

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ РАН

На правах рукописи

Хусаинов Тимур Айратович

**Распространение и трансформация электромагнитных
волновых пучков в неоднородной магнитоактивной плазме**

01.04.08 – физика плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Шалашов Александр Геннадиевич

Нижний Новгород – 2017

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Линейная трансформация волновых пучков в плазме тороидальных магнитных ловушек	16
1.1 Эталонные волновые уравнения в тороидальной геометрии и их решение	18
1.2 Качественный анализ решения и соответствие с ранее разработанными теориями	28
1.3 Эффект кривизны фазового фронта	33
1.4 Расчет эффективности О-Х трансформации для эксперимента на токамаке FTU	38
1.5 Решение задачи О-Х трансформации с одновременным учетом кривизны магнитных поверхностей и неоднородности магнитного поля.....	43
1.6 Заключение к главе 1	57
Глава 2. Влияние флуктуаций на распространение и взаимодействие волновых пучков в магнитоактивной плазме	59
2.1 Брэгговское рассеяние электромагнитных волн в окрестности поверхности отсечки в отсутствии поляризационного вырождения	60
2.2 Ослабление обратного брэгговского рассеяния на флуктуациях плотности в окрестности поверхности отсечки в условиях поляризационного вырождения	62
2.3 Флуктуации коэффициента отражения	69
2.4 Примеры численного моделирования	70
2.5 О влиянии флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации в тороидальных магнитных ловушках	76
2.6 Эффективность О-Х трансформации волнового пучка со случайной фазовой модуляцией в тороидально-неоднородной плазме.....	78
2.7 Заключение к главе 2	81
Глава 3. Квазиоптическое моделирование электронного циклотронного нагрева плазмы в прямой магнитной ловушке	83
3.1 Основные шаги вывода квазиоптического уравнения	85
3.2 «Традиционное» представление квазиоптического оператора и пределы его применимости.....	90
3.3 Новое представление операторов в квазиоптическом уравнении.....	93
3.4 Квазиоптический оператор, соответствующий открытой магнитной ловушке.....	98
3.5 Моделирование ЭЦ нагрева плазмы на установке ГДЛ. Оптимизация параметров эксперимента.....	100
3.6 Заключение к главе 3	105

Заключение	106
Основные публикации автора по теме диссертационной работы	108
Список литературы	110

Введение

Актуальность темы

Микроволновое излучение широко используется для нагрева и диагностики плазмы в исследованиях управляемого термоядерного синтеза (УТС). Это связано с успехами в развитии мощных источников миллиметрового излучения (гиротронов) [1-3], линий передачи излучения [4], а также квазиоптических систем управления излучением внутри вакуумной камеры [5, 6]. Наиболее распространенная схема нагрева использует электромагнитные волны, поглощающиеся в условиях электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса [7, 8]. Однако в современном эксперименте все чаще стали реализовываться режимы удержания, в которых плотность в центральных областях плазменного шнура превышает критическое значение для распространения электромагнитных волн. В установках с малым аспектным отношением (сферических токамаках) резонансное поглощение электромагнитных волн может также оказаться неэффективным, поскольку из-за низкого значения магнитного поля поглощение удастся реализовать только на достаточно высоких циклотронных гармониках [9]. Одна из возможностей по преодолению указанных трудностей связана с линейной трансформацией электромагнитных волн миллиметрового диапазона в квазиэлектростатические бернштейновские волны [10], которые свободно распространяются в закритической плазме и эффективно поглощаются плазмой в широком диапазоне циклотронных гармоник. Поскольку рассматриваемые квазиэлектростатические колебания не существуют в вакууме, возникает отдельная проблема возбуждения этих колебаний внешним излучением. В электронном циклотронном (ЭЦ) диапазоне частот наиболее естественным представляется ввод внешнего излучения в плазму в виде квазиоптического пучка электромагнитных волн, при этом возбуждение бернштейновских волн возможно за счет линейной трансформации электромагнитных волн в неоднородной плазме [11].

Известно несколько способов реализации такой трансформации в тороидальной плазме. Наибольшее распространение получила так называемая схема O-X-V трансформации. Согласно этой схеме, предложенной в работах [12, 13], излучение вводится в плазму со стороны слабого магнитного поля в виде обыкновенной (O) волны. По мере распространения вглубь плазмы излучение достигает окрестности критической магнитной поверхности, на которой частота излучения равна электронной плазменной частоте. При «удачном» выборе угла между волновым вектором и направлением магнитного поля излучение проходит через критическую поверхность, частично трансформируясь при этом в необыкновенную (X) волну [14]. Далее X волна распространяется в сторону увеличения концентрации плазмы. При достижении определенного значения плотности плазмы X волна разворачивается (отражается) и

распространяется в обратном направлении в сторону уменьшения плотности вплоть до области верхнего гибридного резонанса. В этой области происходит вторичная трансформация X волны в электронную бернштейновскую (В) волну. После конверсии в В волну излучение свободно распространяется в сторону увеличения напряженности магнитного поля, в том числе и в области закритической плазмы, доходя до области ЭЦ резонанса, где происходит поглощение излучения и нагрев плазмы. Поиск оптимального угла ввода электромагнитного излучения для реальных установок возможен с использованием геометрооптических кодов для расчета траекторий лучей, модифицированных тем или иным образом для учета эффекта линейной трансформации волн.

Данная схема нагрева плазмы была реализована экспериментально на таких установках, как Wendelstein 7-AS [15-17], MAST [9, 18-20], TCV [21, 22], WEGA [23], LHD [24] и других. При этом измеренная экспериментально эффективность О-Х-В нагрева во всех случаях оказалась значительно ниже предсказанной, и это дало импульс к более детальным теоретическим исследованиям.

Эффективность О-Х-В конверсии в значительной степени определяется эффективностью его первой стадии (О-Х трансформацией), поскольку после неё волна оказывается эффективно заперта в плотной плазме [25] (в некоторых случаях небольшая доля мощности может выходить в виде низкочастотного излучения за счет параметрического распада вблизи верхнего гибридного резонанса [26]). В самой области О-Х трансформации влияние нелинейных эффектов пренебрежимо мало: для типичных параметров излучения можно показать, что энергия осцилляций электрона в поле электромагнитной волны составит порядка 0,1 эВ, что значительно меньше характерных температур в термоядерной плазме. Соответственно О-Х конверсия исследовалась главным образом как линейный процесс, зависящий от распределения усредненных характеристик плазмы и магнитного поля, а также флуктуаций плотности плазмы.

Традиционно О-Х трансформация рассматривалась в рамках плоскостоего приближения, в рамках которого считалось, что концентрация плазмы и магнитное поле детерминированы и меняются только вдоль одного направления. Большинство работ считало при этом направление магнитного поля постоянным [12-14, 27-31], однако в работе [32] также учитывалось и его кручение, и было показано, что оно вносит довольно небольшие поправки. Затем в работе [33] было замечено, что в тороидальных ловушках градиенты плотности плазмы и модуля магнитного поля в общем случае не параллельны, и поэтому нужно учитывать двумерную неоднородность среды. Эта программа была выполнена в работах [34-37]. Было обнаружено, что в двумерно неоднородной среде при линейном взаимодействии волн появляются качественно новые эффекты, наиболее важным из которых с точки зрения практики является существование полностью трансформирующегося пучка с конечной апертурой [38].

Новые качественные свойства О-Х трансформации в двумерно-неоднородных средах также были подтверждены полноволновым численным моделированием [39]. Соответственно, последующие работы предлагали еще более аккуратное описание плазмы и магнитного поля: в работе [40] учитывалась неоднородность модуля магнитного вдоль магнитной линии, а в работах [41, 42] описывалась среда с произвольной трехмерной неоднородностью модуля и направления магнитного поля. Однако в то же время практически во всех работах игнорировалась кривизна магнитных поверхностей, хотя её существенное влияние на эффективность О-Х трансформации было продемонстрировано в полноволновом моделировании [43].

Что касается флуктуаций, то первоначально их влияние было описано в работе [15] для объяснения наблюдавшейся в эксперименте низкой эффективности О-Х-В нагрева, однако в недавней работе [44] в рамках более последовательного подхода роль флуктуаций была полностью пересмотрена. Было показано, что рассмотренный в [15] механизм влияния флуктуаций плотности плазмы на линейное взаимодействие волн не может существенно менять эффективность трансформации в современных установках, но в то же время были обозначены и новые механизмы, роль которых еще предстоит выяснить. Аналогичные результаты также были независимо получены в [45].

В конечном итоге, несмотря на большое количество работ по теме, полная количественная теория, объясняющая полученные в ходе экспериментальных кампаний данные, отсутствует.

Отдельный интерес представляет также применение ЭЦ нагрева в открытых магнитных ловушках, которое до недавнего времени было ограничено либо относительно компактными лабораторными установками, такими как OGRA-4 [46], SMIS 37 [47-49], A-PHOENIX [50], SEISM [51], либо задачами МГД-стабилизации и генерации быстрых электронов в плазме достаточно низкой плотности, прежде всего, на установке GAMMA-10 [52-55]. Единственное исключение – это проведенная в конце 1980-х серия экспериментов на установке TMX-U в Ливерморе, в которой ЭЦ нагрев позволил достичь наибольшей на тот момент температуры электронов 280 эВ в относительно плотной плазме [56].

Вместе с тем, именно для плотной плазмы на крупномасштабном плазменном стенде ГДЛ (газодинамическая ловушка) в Институте ядерной физики им. Г.И.Будкера прямой ЭЦР нагрев электронной компоненты обеспечил достижение рекордных параметров удержания [57]. Успешный эксперимент по комбинированному нагреву плазмы нейтральными пучками и СВЧ излучением на установке ГДЛ описан в работах [58-60]. В результате этих исследований впервые была достаточно убедительно продемонстрирована перспективность использования магнитных ловушек открытого типа с осесимметричной конфигурацией в качестве мощных нейтронных источников для термоядерных приложений [61].

Реализация эффективного ЭЦ нагрева плотной плазмы в достаточно большой открытой ловушке требует некоторого пересмотра сложившихся представлений как о физике циклотронного взаимодействия, так и о последующем транспорте энергии и стабилизации плазменного шнура, поскольку ни одна из используемых на практике схем нагрева тороидальной плазмы не работает в этом случае [62]. Важную роль при этом играют методы моделирования распространения и поглощения электромагнитных волн в неоднородной плазме ловушки. До недавнего времени такое моделирование проводилось исключительно в рамках приближения геометрической оптики методом трассировки лучей. В частности, именно таким способом была обоснована основная схема ЭЦ нагрева, используемая в ГДЛ [62, 63]. Однако в этой схеме возникают области отражения и поглощения волн, в которых среда перестает быть плавнонеоднородной, поэтому детальное понимание физики происходящих процессов требует выхода за рамки геометрического приближения.

Основные эффекты, приводящие к нарушению приближения геометрической оптики – это пространственная дисперсия в сильно неоднородной области резонансного поглощения, дифракционное расплывание волнового пучка и формирование каустик в окрестности точек полного внутреннего отражения. Прямой учет этих эффектов в рамках полной системы уравнений Максвелла сложен, в частности, из-за малой длины волны излучения по сравнению с размерами установки. Хорошей альтернативой этому подходу является последовательный квазиоптический подход, основанный на асимптотическом разложении уравнений Максвелла в параксиальном приближении в окрестности выделенной ВКБ моды [64, 65]. Использование квазиоптических методов моделирования позволяет точнее предсказывать распределение поглощенной СВЧ мощности и оптимизировать сценарии ЭЦ нагрева в открытых магнитных ловушках.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование новых возможностей для СВЧ нагрева плотной плазмы в системах с магнитным удержанием с использованием квазиоптических волновых пучков миллиметрового диапазона длин волн. Целью и актуальностью темы обусловлены следующие задачи диссертационной работы:

1. Построение теории линейного взаимодействия волновых пучков с учетом особенностей распределения плазмы и магнитного поля в тороидальных магнитных ловушках.
2. Исследование влияния флуктуаций плотности на распространение и взаимодействие волновых пучков в магнитоактивной плазме.

3. Развитие средств моделирования распространения волновых пучков в плотной плазме открытой магнитной ловушки, позволяющих корректно учитывать влияние сильной рефракции, пространственной дисперсии и резонансного поглощения.

Научная новизна проведенных исследований

1. Решена новая модельная задача в теории линейного взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн ЭЦ диапазона частот в неоднородной магнитоактивной плазме в окрестности поверхности критической концентрации, учитывающая глобальную тороидальную геометрию магнитного поля и плазмы. Получена система эталонных уравнений и её решение, учитывающее влияние характерной для токамака неоднородности плазмы – кривизны силовых линий магнитного поля, неоднородности напряженности магнитного поля и постоянства давления плазмы на магнитных поверхностях.
2. Был обнаружен новый эффект, сильно влияющий на эффективность линейной трансформации нормальных волн ЭЦ диапазона частот в неоднородной магнитоактивной плазме. Эффективность трансформации существенно снижается, если поверхность фазового фронта медленной огибающей волнового пучка отличается от оптимальной, которая в установках с большим аспектным отношением с высокой точностью совпадает с поверхностью критической концентрации. Этот эффект может объяснить низкую эффективность нагрева закритической плазмы в токамаках и стеллараторах, систематически наблюдающуюся в большинстве экспериментов по линейной конверсии внешнего электромагнитного излучения в квазиэлектростатические бернштейновские волны. В то же время, это падение эффективности может быть полностью скомпенсировано оптимальной фокусировкой волнового пучка.
3. Показано, что поляризационное вырождение нормальных волн в магнитоактивной плазме подавляет известный эффект усиления обратного брэгговского рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях плотности плазмы в окрестности области отсечки. В то же время, среднеквадратичное отклонение случайного коэффициента отражения всегда оказывается много больше возмущения его среднего значения, что необходимо учитывать при диагностике температуры плазмы, основанной на регистрации излучения электронных бернштейновских волн.
4. Получено новое выражение для эффективности туннелирования волнового пучка со случайной фазовой модуляцией через неоднородную область непрозрачности в

окрестности поверхности плазменной отсечки в тороидальной магнитоактивной плазме.

5. На основе усовершенствованного квазиоптического подхода разработан универсальный численный код для моделирования распространения электромагнитных волновых пучков СВЧ диапазона в открытых магнитных ловушках. Код позволяет одновременно учитывать эффекты дифракции, резонансной диссипации, сильной пространственной дисперсии и пространственной неоднородности.
6. Впервые в рамках квазиоптического подхода было проведено исследование эффективных способов ЭЦ нагрева плазмы в крупномасштабной открытой ловушке. Квазиоптическое моделирование профилей распределения поглощенной СВЧ мощности для установки ГДЛ (ИЯФ СО РАН, Новосибирск) подтвердило результаты, полученные ранее с помощью геометрооптического моделирования для уже реализованных в эксперименте сценариев ЭЦ нагрева; предложен новый улучшенный сценарий ЭЦ нагрева, в котором реализуется более равномерный нагрев всего объема плазмы.

Методы и подходы, используемые в диссертации

В диссертации использованы современные аналитические и численные методы решения электродинамических задач:

- Процедура укорочения уравнений Максвелла для плавно-неоднородной анизотропной и гиротропной среды применена для построения теории линейной трансформации нормальных волн вблизи критической поверхности в магнитоактивной плазме.
- Борновское приближение использовалось для анализа брэгговского рассеяния на флуктуациях плотности магнитоактивной плазмы в окрестности поверхности отсечки в условиях поляризационного вырождения.
- Численное моделирование брэгговского рассеяния на флуктуациях плотности плазмы в окрестности поверхности отсечки в условиях поляризационного вырождения выполнялось при помощи методики, основанной на формализме операторного уравнения Риккати для коэффициента связи между нормальными волнами (импедансный подход).
- Моделирование ЭЦ нагрева плазмы в прямой ловушке производилось при помощи нового квазиоптического подхода, который позволяет свести задачу однонаправленного распространения волнового пучка в неоднородной и

диссипативной среде с сильной пространственной дисперсией к решению эволюционного операторного уравнения.

- Для численного решения полученного квазиоптического уравнения использовался модифицированный метод операторной экспоненты.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Эффективность линейной трансформации нормальных волн электронного циклотронного диапазона частот в тороидально-неоднородной магнитоактивной плазме существенно снижается, когда поверхность фазового фронта медленной огибающей волнового пучка отличается от оптимальной, которая в установках с большим аспектным отношением с высокой точностью совпадает с поверхностью критической концентрации.
2. Поляризационное вырождение нормальных волн в магнитоактивной плазме подавляет известный эффект усиления обратного брэгговского рассеяния в окрестности области отсечки для электромагнитных волн рассеивающихся на флуктуациях плотности плазмы.
3. Разработанный на основе усовершенствованного квазиоптического подхода универсальный численный код позволяет моделировать распространение электромагнитных волновых пучков СВЧ диапазона в современных открытых магнитных ловушках, одновременно учитывая эффекты дифракции, резонансной диссипации, сильной пространственной дисперсии и пространственной неоднородности.

Научная и практическая ценность

Научная и практическая значимость проведенных исследований определяются широким спектром применений микроволнового излучения в научном эксперименте и технологиях. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для повышения эффективности использования мощных генераторов микроволнового излучения в термоядерных исследованиях.

Построенная в работе теория линейной трансформации волновых позволяет повысить эффективность СВЧ нагрева магнитоактивной плазмы с плотностью выше критической для распространения электромагнитных волн. Успешная реализация О-Х-В схемы даст возможность использовать микроволновой нагрев в перспективных термоядерных установках, где реализуется высокая плотность плазмы (Т-15, Wendelstein 7-Х, Глобус-М2, MAST, NSTX).

Квазиоптическое моделирование электронного циклотронного нагрева плазмы в прямой магнитной ловушке уже используется при планировании эксперимента в осесимметричной газодинамической ловушке ГДЛ (ИЯФ СО РАН, Новосибирск). Этот подход также может быть применен и для ловушек без осевой симметрии (ГАММА-10, University of Tsukuba) или даже для более экзотических конфигураций с обращенным магнитным полем (СЗВ, TriAlpha Energy).

Публикации, апробация работы

Результаты диссертационной работы изложены в научных статьях в ведущих отечественных и зарубежных журналах: Физика плазмы, Журнал экспериментальной и теоретической физики, Вопросы атомной науки и техники, Plasma Physics and Controlled Fusion, Physics of Plasmas. Всего по теме диссертации опубликовано 6 статей в реферируемых журналах, 1 электронный препринт, 6 статей в сборниках трудов международных конференций и 4 тезиса докладов. Материалы диссертации докладывались на международных конференциях, в том числе European Physical Society Conference on Plasma Physics, European Fusion Theory Conference, International Workshop “Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications”, Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС, International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion Alushta.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка основных публикаций автора по теме работы и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц, включая 21 рисунок, 1 таблицу и список литературы из 106 наименований. Список основных публикаций автора по теме диссертации содержит 12 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, определены цель и задачи диссертационной работы, отмечена научная новизна проведенных исследований, описаны использованные методы и подходы, приведены основные положения, выносимые на защиту, научная и практическая ценность, а также кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе диссертации развивается теория линейного взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн электронно-циклотронного диапазона в тороидальных магнитных ловушках [1А-6А]¹. В рамках двух независимых подходов исследуется влияние особенностей геометрии равновесной конфигурации плазмы на эффективность О-Х

¹ Здесь и далее ссылки с индексом “А” относятся к списку публикаций автора, приведенному на странице 108.

трансформации. Первый подход предлагает учет глобальной тороидальной структуры области взаимодействия волн в модельной среде, второй, напротив, стремится к максимально правдоподобию описанию плазмы и магнитного поля в магнитных ловушках, пусть и в ограниченной области.

В разделе 1.1 вводится модельная среда, учитывающая глобальную тороидальную геометрию магнитного поля и плазмы. Модель соответствует классическому токамаку с большим аспектным отношением без полоидального магнитного поля и шафрановского сдвига: вектор магнитного поля имеет только тороидальную компоненту, а поверхности постоянного давления образуют концентрические круговые торы. Для этой среды получена эталонная система укороченных уравнений, описывающая распределение электрического поля, отвечающее фиксированному значению тороидального волнового числа, в окрестности области трансформации. Для полученной системы найдено полное аналитическое решение в виде разложения по дискретному набору ортогональных базисных функций.

Раздел 1.2 содержит качественный анализ полученного решения. Обсуждаются эффекты двумерной неоднородности: пространственно локализованный пучок, испытывающий полную трансформацию и асимметрия трансформации при вводе пучка сверху и снизу от экваториальной плоскости. Показано как тороидальная кривизна усиливает эффект асимметрии. Изучены пределы применимости одномерного приближения.

В разделе 1.3 отдельно рассматривается роль кривизны магнитных поверхностей при определении начальных условий для полученного решения. Обнаружено, что геометрия магнитного поля и плазмы задают оптимальную поверхность, близкую к поверхности критической концентрации плазмы для установок с большим аспектным отношением, отклонение фазового фронта медленной огибающей волнового пучка от которой приводит к сильному снижению эффективности трансформации. Этот эффект может объяснить низкую эффективность нагрева закритической плазмы в токамаках и стеллараторах, систематически наблюдающуюся в большинстве экспериментов по линейной конверсии внешнего электромагнитного излучения в квазиэлектростатические бернштейновские волны.

В разделе 1.4 построенная теоретическая модель используется для расчета эффективности трансформации квазиоптических пучков, доступных в эксперименте на токамаке FTU. Пересчет волнового поля от выходного зеркала до окрестности перед областью трансформации выполнялся квазиоптическим кодом GRAY с учетом реальной конфигурации магнитного поля и плазмы, при этом сшивка решений производилась в двух разных точках на траектории квазиоптического луча для контроля точности. Расчет показал, что для всех возможных положений фокусирующего зеркала уровень трансформации находится на уровне экспериментальной погрешности его определения из-за того, что поверхность фазового фронта

медленной огибающей волнового пучка была выгнута в обратную сторону относительно магнитной поверхности критической концентрации.

В разделе 1.5 задача линейного взаимодействия О-Х волн рассматривается в рамках альтернативного подхода, позволяющего описывать плазму в магнитной конфигурации общего вида с произвольными кривизной магнитной поверхности и неоднородностью модуля и направления магнитного поля. Плотность плазмы и магнитное поле задаются при помощи локальных разложений с девятью независимыми скалярными параметрами. Для этой среды получена система укороченных уравнений, описывающая распределение электрического поля, затем показано как при помощи фазовых замен и перехода в криволинейную систему координат её можно свести к упрощенной базовой системе уравнений только с тремя управляющих параметрами. Для базовой системы построено новое приближенное решение, сводящееся к ранее известным в физически важных предельных случаях. Полученное решение дает возможность предсказывать эффективность О-Х трансформации с учетом всех известных существенных эффектов и формировать требования к форме оптимальных пучков.

Во второй главе рассматривается влияние флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации. Отдельно анализируется влияние обратного брэгговского рассеяния и малоуглового рассеяния волновых пучков [7А-9А].

В разделе 2.1 кратко рассматривается известный механизм усиления брэгговского рассеяния электромагнитных волн в окрестности поверхности отсечки в отсутствие поляризационного вырождения.

В разделе 2.2 исследуется обратное брэгговское рассеяние на флуктуациях плотности в окрестности поверхности отсечки в условиях поляризационного вырождения. Формулируется модельная задача на распределение волнового поля в области линейного взаимодействия волн в окрестности поверхности критической концентрации в среде с одномерным распределением концентрации и постоянным магнитным полем. В рамках этой задачи показывается, что флуктуации не только сами не приводят к рассеянию назад, но и не модифицируют коэффициент отражения в первом порядке борновского приближения. Для флуктуаций с малой амплитудой возмущение среднего коэффициента отражения вычислено во втором порядке борновского приближения. Показано, что флуктуации в среднем уменьшают коэффициент отражения и улучшают прохождение волн через область непрозрачности за счет перерассеяния отраженной волны.

В разделе 2.3 рассматривается дисперсия случайного коэффициента отражения волны, рассеивающейся на флуктуациях плотности в окрестности поверхности отсечки в условиях поляризационного вырождения. Показано, что эта дисперсия имеет тот же порядок, что и возмущение среднего значения случайного коэффициента отражения, а среднеквадратичное

отклонение, соответственно, всегда оказывается много больше этого возмущения. Отмечается, что это обстоятельство может оказаться важным в задачах, связанных с микроволновой диагностикой плотной плазмы.

В разделе 2.4 аналитические результаты, полученные в разделах 2.2-2.3, проверяются при помощи численного моделирования. Для малых значений амплитуд флуктуаций получено хорошее качественное совпадение результатов, а для больших значений влияние флуктуаций оказывается еще меньше теоретических оценок.

В разделе 2.5 проводится общий обзор влияния флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации. Отдельно рассматривается влияние флуктуаций внутри области трансформации и на проходе через докритическую плазму. Для возмущения средней эффективности за счет флуктуаций внутри области трансформации приводится аналитическая оценка. Для флуктуаций вне области трансформации выделяется механизм малоуглового рассеяния.

В разделе 2.6 анализируется влияние малоуглового рассеяния волнового пучка на флуктуациях плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации. Находится коэффициент трансформации квазиоптического пучка со случайной фазовой модуляцией.

Третья глава посвящена моделированию резонансного СВЧ нагрева плазмы в крупномасштабной прямой ловушке в рамках последовательного квазиоптического приближения для уравнений Максвелла. Такой подход позволяет моделировать распространение электромагнитных волновых пучков СВЧ диапазона, одновременно учитывая эффекты дифракции, резонансной диссипации, сильной пространственной дисперсии и пространственной неоднородности [10А-12А].

В разделе 3.1 дается общий обзор квазиоптического приближения, определяется методика перехода от уравнений Максвелла для векторных полей к задаче на скалярную амплитуду, выводится операторное эволюционное уравнение, задающее изменение скалярной амплитуды волнового пучка вдоль оси ловушки, вводится выражение для плотности поглощенной СВЧ мощности, рассматриваются условия применимости квазиоптического подхода.

Разделы 3.2 и 3.3 посвящены выбору адекватного представления квазиоптического оператора, определяющего эволюцию волнового пучка. В разделе 3.2 рассматривается упрощенное представление, использовавшееся ранее для моделирования электронного циклотонного нагрева и генерации тока в тороидальных магнитных ловушках. Показано, что сложившееся упрощенное представление неприменимо для прямых ловушек, поскольку позволяет корректно учитывать неоднородность плазмы и пространственную дисперсию, связанную с тепловым движением частиц и резонансным взаимодействием только в средах, отвечающих специфическим условиям, которые в прямых ловушках не выполняются.

В разделе 3.3 формулируется новое представление квазиоптического оператора, позволяющее учитывать эффекты дифракции, резонансной диссипации, сильной пространственной дисперсии и пространственной неоднородности для среды общего вида. Для квазиоптического уравнения на скалярную амплитуду волнового пучка, использующего новое представление, приводится метод численного решения, основанный на методе операторной экспоненты.

В разделе 3.4 описываются процедура вычисления ядра квазиоптического оператора через решение дисперсионного соотношения и другие особенности численной схемы, непосредственно реализованные в численном коде для моделирования СВЧ нагрева плазмы в прямой ловушке.

В разделе 3.5 рассматриваются первые результаты численного моделирования ЭЦ нагрева плазмы на установке ГДЛ. Для уже реализованных в эксперименте сценариев моделирование профилей распределения СВЧ мощности подтвердило результаты, полученные ранее с помощью геометрооптического моделирования. Также предложен новый улучшенный сценарий в котором реализуется более равномерный нагрев всего объема плазмы в магнитной ловушке.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1. Линейная трансформация волновых пучков в плазме тороидальных магнитных ловушек

Исторически, начало исследований линейного взаимодействия обыкновенной (О) волны и необыкновенной (Х) волны (О-Х трансформации) в магнитоактивной плазме связано с изучением эффекта «утраивания» радиосигналов в ионосфере [66, 67]. Сегодня особый интерес представляет использование этого явления в практических приложениях по освоению УТС, поскольку линейная трансформация волн позволяет проводить эффективный СВЧ нагрев и диагностику докритической плазмы в тороидальных магнитных ловушках [11].

Традиционно О-Х трансформация рассматривалась в рамках модельного плоскостроистого приближения [12-14, 27-31], однако в работе [33] было замечено, что в тороидальных ловушках градиенты плотности плазмы и модуля магнитного поля в общем случае не параллельны, и поэтому нужно учитывать двумерную неоднородность среды. Соответствующая двумерная конфигурация была впервые введена и изучена без полоидального магнитного поля в работах [34-37], а затем были добавлены эффект от полоидального поля [38, 40], его ширины [41, 42] и обобщение на случай произвольной трехмерной неоднородностью модуля и направления магнитного поля. [41].

В этой главе серия исследований продолжается, причем акцент делается на анализе роли кривизны магнитных поверхностей, которая во всех упомянутых работах игнорировалась. В разделах 1.1-1.4 влияние кривизны рассматривается на примере модельной среды, приближенной к классическому токамаку, следуя логике статьи [2А]. В рамках этого подхода мы рассматриваем всю тороидальную область поляризационного вырождения в токамаке целиком, но пренебрегаем полоидальным магнитным полем. Затем в разделе 1.5 мы, напротив, решаем задачу О-Х трансформации только для малой по сравнению с размерами установки области плазмы, но зато помимо кривизны учитываем также неоднородность модуля и направления магнитного поля.

При этом мы будем рассматривать решения только в малой окрестности области линейного взаимодействия. В приложениях такие решения должны подшиваться к стандартным представлениям квазиоптических волновых пучков [68], описывающим распространение излучения в докритической плазме. Упрощенно этот вопрос будет рассматриваться в разделе 1.4.

Напомним кратко основные условия необходимые для эффективной трансформации. Эффективная трансформация возможна, когда точки разворота обеих мод оказываются достаточно близко друг к другу. Для плоских волн в холодной плазме это возможно в области трансформации, определенной следующим условиям [34]

$$N_{\perp} \ll N_{\parallel}, |\varepsilon_{\parallel}| \ll 1, |\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2| \ll 1, \quad (1.1)$$

где $N_{\perp} = ck_{\perp}/\omega$ и $N_{\parallel} = ck_{\parallel}/\omega$ волновые числа, соответствующие поперечной и продольной относительно магнитного поля компоненте волнового вектора, а ε_{\parallel} и ε_{+} компоненты тензора диэлектрической проницаемости в стиковом представлении,

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - X, \quad \varepsilon_{+} = 1 - X/(1 + Y), \quad X = \omega_{pe}^2/\omega^2, \quad Y = \omega_{ce}/\omega,$$

где ω , ω_{ce} и ω_{pe} частота волны, а также электронная циклотронная и ленгмюровская частоты соответственно. При этих условиях можно получить приближенное решение дисперсионного уравнения для левополяризованных волн в окрестности области трансформации как

$$N_{\perp}^2 \approx 2\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2)/\varepsilon_{+}.$$

В соответствии с обычными обозначениями, это решение описывает О-моду при $\varepsilon_{\parallel} > 0$ и $\varepsilon_{+} > N_{\parallel}^2$ и Х-моду при $\varepsilon_{\parallel} < 0$ и $\varepsilon_{+} < N_{\parallel}^2$. Области распространения для О- и Х-волн разделены областью непрозрачности, определяемой условием $\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2) < 0$. Характерный вид этой области для тороидальной магнитной ловушки показан на Рисунке 1.1. Область непрозрачности образована двумя поверхностями отсечки¹, $\varepsilon_{\parallel} = 0$ и $\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2 = 0$ каждая из которых может быть поверхностью разворота как для О-моды так и для Х-моды, в зависимости от того какая из поверхностей оказывается в более плотной плазме.

В тороидальной геометрии плотность плазмы и внешнее магнитное поле меняются вдоль разных направлений, что приводит к несовпадению поверхностей отсечки и делает общепринятое одномерное рассмотрение недостаточным, чтобы описать О-Х трансформацию в общем случае. Первая поверхность, $\varepsilon_{\parallel} = 0$ представляет собой магнитную поверхность с критической плотностью плазмы, $\omega_{pe} = \omega$. За счет изменения магнитного поля вторая поверхность, $\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2 = 0$, не совпадает с первой. Для определенного диапазона N_{\parallel} эти поверхности могут пересекаться (Рисунок 1.1, слева), и в этом случае трансформация происходит через туннелирование электромагнитного излучения сквозь истончающуюся

¹ Обратите внимание, что здесь «отсечка» относится к точкам разворота на дисперсионной поверхности, где только поперечная составляющая волнового вектора равна нулю, в то время как продольная составляющая остается постоянной. Строго говоря, это не соответствует стандартному определению отсечки в неограниченной плазме, относящемуся к тем точкам, где полный волновой вектор стремится к нулю. Тем не менее, мы принимаем эти обозначения типичными для ограниченных систем ради совместимости с большим количеством предыдущих работ, см., например, [34, 36-38, 40-42].

область непрозрачности в непосредственной близости от линии пересечения. Симметрия токамака задает однородность системы в тороидальном направлении.

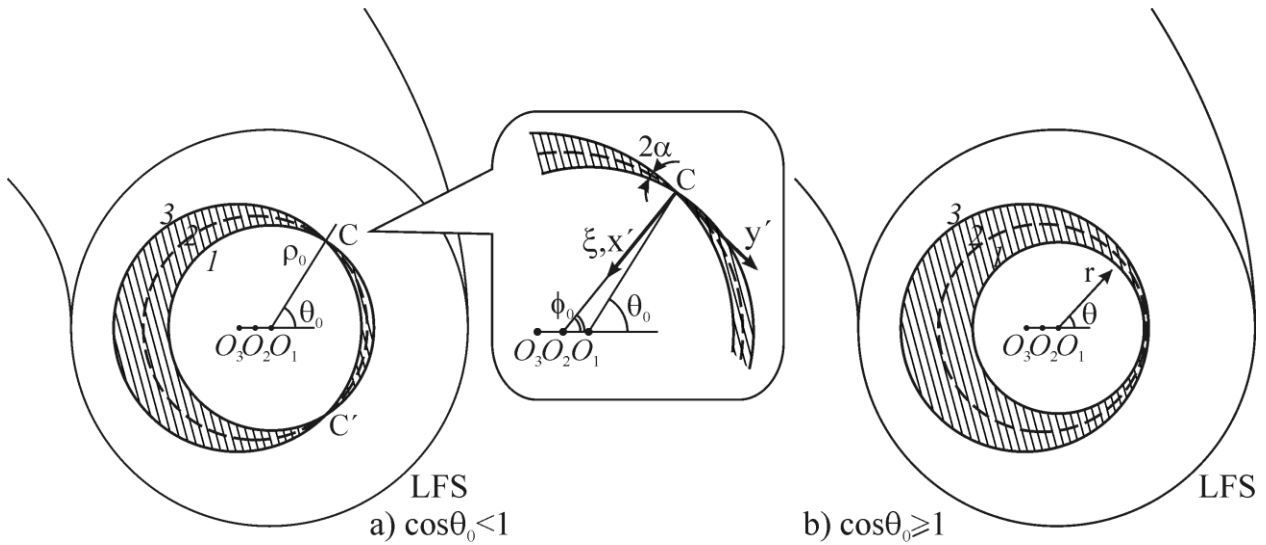


Рисунок 1.1: Область O-X трансформации в токамаке: (a) эффективная трансформация около точек пересечения поверхностей отсечки C и C' , (b) неэффективная трансформация в случае непересекающихся поверхностей отсечки. Область нераспространения для лево поляризованных волн ограничена поверхностями отсечки заштрихована; 1 – контур $\varepsilon_{\parallel} = 0$, окружность с центром в O_1 , 2 – контур $\tilde{\rho} = 0$, окружность с центром в O_2 , сдвинута на $O_1O_2 = \Delta\rho/2$ от O_1 , 3 – контур $\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2 = 0$, окружность с центром в O_3 , сдвинута на $O_1O_3 = \Delta\rho$ от O_1 . Симметрия токамака подразумевает, что система однородна в тороидальном направлении.

После учета тороидальной кривизны, распространение O- и X-волн можно рассматривать как двумерно неоднородную задачу. Ранее проведенные исследования этого процесса проводились в предположении, что обе поверхности отсечки являются плоскими, так как вся область O-X трансформации мала. Ниже мы изучим последствия как полоидальной, так и тороидальной кривизн, свойственных этой поверхности.

1.1 Эталонные волновые уравнения в тороидальной геометрии и их решение

Для того, чтобы получить эталонные волновые уравнения, аккуратно и полным образом учитывающие специфику тороидальных магнитных ловушек, проведем все преобразования в тороидальной системе координат. Введем тороидальные координаты (r, θ, φ) через соотношения:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

где (x, y, z) – это декартовы координаты, где ось z совпадает с главной осью токамака, а плоскость (x, y) лежит в его экваториальной плоскости. При этом направление оси z определяется таким образом, чтобы вектор магнитного поля и орт тороидальной координаты \mathbf{e}_φ были сонаправлены. Соответственно при смене знака магнитного поля у нас будут меняться местами «верх» и «низ». Определим физический смысл введенных параметров: R – большой радиус токамака, r – радиальная координата в полоидальной плоскости, а θ и φ – полоидальный и тороидальный углы, соответственно. В этой системе координат довольно просто определить все параметры плазмы. Поскольку в рамках излагаемого подхода мы пренебрегаем полоидальным магнитным полем, вектор магнитного поля будет иметь только тороидальную компоненту: $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{e}_\varphi$, где $B > 0$. Концентрация плазмы и индукция магнитного поля будут определяться только полоидальными координатами r и θ .

Используя однородность системы вдоль координаты φ , волновое поле можно искать в виде разложения по продольным гармоникам:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi, t) = \int \mathbf{F}(r, \theta, N_{\parallel 0}, \omega) \exp(ik_0 R_0 N_{\parallel 0} \varphi - i\omega t) dN_{\parallel 0}, \quad (1.2)$$

где $k_0 = \omega/c$ и затем ставить задачу только для одной гармоники:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{F}(r, \theta, N_{\parallel 0}) \exp(ik_0 R_0 N_{\parallel 0} \varphi).$$

В дальнейших выкладках мы будем использовать именно это представление электрического поля, а не (1.2), если явно не будет указано обратного.

Однако, поскольку одна из целей этой диссертационной работы заключается в расчете трансформации реального трехмерного пучка, имеющего конечный размер по φ , мы используем несколько соображений, которые позволят упростить вычисление интеграла (1.2) для перехода от множества двумерных задач к одной трехмерной. Например, т.к. диапазон $N_{\parallel 0}$, позволяющий проводить эффективную трансформацию, довольно узок, то каков бы ни был реальный спектр $\mathbf{F}(r, \theta, N_{\parallel 0})$, нам для расчета коэффициента трансформации нужно корректно описать лишь гармоники с $N_{\parallel 0} \approx \bar{N}_{\parallel 0}$, где $\bar{N}_{\parallel 0}$ – это несущее продольное волновое число для поля $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi)$ в представлении (1.2) (мы считаем, что падающий пучок задан разумно и для $N_{\parallel 0} = \bar{N}_{\parallel 0}$ трансформация эффективна). Поэтому мы можем использовать $\bar{N}_{\parallel 0}$ вместо $N_{\parallel 0}$ в выражениях, слабо зависящих от $N_{\parallel 0}$. Это позволит без ущерба для точности определения

коэффициента трансформации сделать большинство параметров одинаковыми в двумерных задачах, отвечающих разными $N_{\parallel 0}$.

Здесь также стоит отметить, что величина $N_{\parallel 0}$ соответствует определенному в (1.1) N_{\parallel} только на цилиндре $R + r \cdot \cos(\theta) = R_0$, а сама N_{\parallel} оказывается зависящей от полоидальных координат по закону: $N_{\parallel} = N_{\parallel 0} \cdot R_0 / (R + r \cdot \cos(\theta))$. Эта зависимость возникает при переходе от цилиндрической геометрии, где $N_{\parallel} = const$, к тороидальной, где $N_{\varphi} = const$. Следовательно, при переходе от цилиндрической геометрии к тороидальной меняется положение поверхности отсечки $\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2 = 0$, и это означает, что цилиндрическая и тороидальная геометрии не эквивалентны для задач О-Х трансформации [44].

Пространственное распределение монохроматического электромагнитного поля с частотой ω определяется уравнением:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = k_0^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E},$$

где $\hat{\varepsilon}$ – тензор диэлектрической проницаемости плазмы. Рассмотрим сначала левую часть уравнения. Наша тороидальная система координат ортогональна, коэффициенты Ламе для неё даются выражениями:

$$H_r = 1, H_{\theta} = r, H_{\varphi} = R + r \cdot \cos(\theta).$$

С их помощью мы легко можем выписать явный вид оператора rot в данной криволинейной системе координат. Но прежде стоит оценить порядок величины слагаемых, которые будут учитываться в упрощенных волновых уравнениях, чтобы не проносить через выкладки лишние члены, которые всё равно будут отброшены впоследствии.

Предполагая, что плазма слабо неоднородна с характерным масштабом $L < R$, удовлетворяющим также условию геометрической оптики $k_0 L \gg 1$, можно получить следующие соотношения для окрестности области трансформации, заданной условиями (1.1):

$$\begin{aligned} N_{\parallel} &\sim 1, \frac{1}{H_{\varphi}^2 k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial^2 F_{r,\theta,\varphi}}{\partial \varphi^2} \right| \sim 1, \\ \frac{1}{H_r H_{\varphi} k_0} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial^2 F_{r,\theta,\varphi}}{\partial r \partial \varphi} \right| &\sim \frac{1}{H_{\theta} H_{\varphi} k_0} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial^2 F_{r,\theta,\varphi}}{\partial \theta \partial \varphi} \right| \sim |\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2| \sim |\varepsilon_{\parallel}| \sim \frac{1}{\sqrt{k_0 L}}, \\ \frac{1}{H_r^2 k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial^2 F_{r,\theta,\varphi}}{\partial r^2} \right| &\sim \frac{1}{H_{\theta}^2 k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial^2 F_{r,\theta,\varphi}}{\partial \theta^2} \right| \sim \frac{1}{H_r H_{\theta} k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial^2 F_{r,\theta,\varphi}}{\partial r \partial \theta} \right| \sim \frac{1}{k_0 L}, \\ \frac{1}{H_{\varphi} k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial F_{r,\theta,\varphi}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{H_r H_{\theta}} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right| &\sim \frac{1}{k_0 L}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{H_\varphi k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial F_{r,\theta,\varphi}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{H_r H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} \right| \sim \frac{1}{H_\varphi k_0^2} \left| \frac{1}{F_{r,\theta,\varphi}} \frac{\partial F_{r,\theta,\varphi}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{H_\theta H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta} \right| \sim \frac{1}{k_0 R}.$$

В уравнениях остаются только члены первого порядка относительно $1/\sqrt{k_0 L}$, поэтому производные от коэффициентов Ламе в упрощенные уравнения не входят. Это соображение, во-первых, существенно упрощает выкладки, а во-вторых, по сути, является математически выраженным распространенным мнением о том, что кривизной магнитных поверхностей можно пренебречь т.к. все радиусы кривизны все равно много больше ширины квазиоптического пучка. В данной главе показано, что даже несмотря на это соотношение масштабов, есть и другие эффекты кривизны, которыми пренебрегать нельзя.

Так или иначе, оставляя только члены первого и нулевого порядка относительно $1/\sqrt{k_0 L}$ и используя величину $N_\parallel = N_{\parallel 0} \cdot R_0 / (R + r \cdot \cos(\theta))$, выражение $\text{rot rot } \mathbf{E}$ можно записать в матричном виде:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} N_\parallel^2 k_0^2 & 0 & iN_\parallel k_0 \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & N_\parallel^2 k_0^2 & iN_\parallel k_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ iN_\parallel k_0 \frac{\partial}{\partial r} & iN_\parallel k_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix}$$

Теперь заметим, что несмотря на то, что базис представления электрического поля не постоянен в пространстве, в каждой отдельной точке он ортогонален, образует правую тройку, а последний орт всегда сонаправлен с магнитным полем. Это значит, что если мы, следуя [34], перейдем в стиковое представление для компонент поля:

$$\sqrt{2}E_\pm = E_r \pm iE_\theta, \quad E_\parallel = E_\varphi,$$

то тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ примет диагональный вид:

$$\hat{\varepsilon} \mathbf{E} = (\varepsilon_+ E_+, \varepsilon_- E_-, \varepsilon_\parallel E_\parallel).$$

Для того чтобы переписать $\text{rot rot } \mathbf{E}$ в стиковом представлении, используем матрицу преобразования

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_\parallel \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{P}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_\parallel \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{P}}^{-1} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

В стиковом представлении $\text{rot rot } \mathbf{E}$ перепишется как:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \hat{\mathbf{P}}^{-1} \begin{pmatrix} N_{\parallel}^2 k_0^2 & 0 & iN_{\parallel} k_0 \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & N_{\parallel}^2 k_0^2 & iN_{\parallel} k_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ iN_{\parallel} k_0 \frac{\partial}{\partial r} & iN_{\parallel} k_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Или в явном виде:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} N_{\parallel}^2 k_0^2 & 0 & \frac{N_{\parallel} k_0}{\sqrt{2}} \left(i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ 0 & N_{\parallel}^2 k_0^2 & \frac{N_{\parallel} k_0}{\sqrt{2}} \left(i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \frac{N_{\parallel} k_0}{\sqrt{2}} \left(i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & \frac{N_{\parallel} k_0}{\sqrt{2}} \left(i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные $\text{rot rot } \mathbf{E}$ и $\hat{\varepsilon} \mathbf{E}$ в уравнение $\text{rot rot } \mathbf{E} = k_0^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}$, получаем укороченную систему волновых уравнений для плавнонеоднородной среды в области О-Х трансформации, определяемой условиями (1.1):

$$\begin{cases} N_{\parallel} \left(i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) F_{\parallel} = \sqrt{2} k_0 (\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2) F_+ \\ N_{\parallel} \left(i \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) F_+ = \sqrt{2} k_0 \varepsilon_{\parallel} F_{\parallel} \end{cases}. \quad (1.3)$$

Очень похожие уравнения были получено в работах [34, 36]. В эти уравнения не входит компонента электрического поля F_- , определяемая третьим уравнением

$$N_{\parallel} \left(i \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) F_{\parallel} = \sqrt{2} k_0 (\varepsilon_- - N_{\parallel}^2) F_-.$$

Поскольку в области трансформации величина $\varepsilon_- - N_{\parallel}^2$ не является малой, из последнего уравнения следует, что $F_- \sim (k_0 L)^{-1/2} F_{\parallel} \ll F_{\parallel}, F_+$. Здесь стоит отметить, что по сути единственное, в чем проявилась специфика криволинейной системы координат – это появление масштабных коэффициентов в уравнении (1.3), а единственное условие, необходимое для этого – плавность изменения масштабных коэффициентов.

Теперь выпишем выражения $(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2)$ и ε_{\parallel} в явном виде. Рассмотрим простейшую модель для тороидальной магнитной конфигурации, когда поверхности постоянного давления образуют концентрические круговые торы. Таким образом, плотность плазмы $n_e(r)$ зависит только от малого радиуса r . В малой окрестности области трансформации радиальная зависимость может быть аппроксимирована линейной функцией:

$$\varepsilon_{\parallel}(r) \approx g_{\parallel}(r - \rho_0),$$

где ρ_0 "малый радиус" области трансформации, а $g_{\parallel} = |n'_e(\rho_0)/n_e(\rho_0)| = 1/L$ обратный масштаб характерного изменения плотности.

Амплитуда магнитного поля обратно пропорциональна расстоянию от оси симметрии, $B = B_0 R_0 / [R + r \cos \theta]$, причем здесь R_0 тот же радиус, что использовался для определения $N_{\parallel 0}$. Наиболее эффективная трансформация ожидается, когда волновое поле локализовано вблизи точки пересечения поверхностей отсечки с координатами (ρ_0, θ_0) в полоидальной плоскости; это точка C на Рисунке 1.1 (а).

Приближенные выражения для $\varepsilon_+(r, \theta)$ и N_{\parallel}^2 могут быть получены путем их линеаризации по $r - \rho_0$ и $\cos \theta - \cos \theta_0$ вблизи от точки пересечения. Но здесь нужно еще раз вспомнить о специфике связанной с расчетом трансформации трехмерного пучка в соответствии с (1.2). Поскольку точка пересечения поверхностей отсечки сдвигается при изменении $N_{\parallel 0}$, то для того чтобы не вводить отдельную точку разложения для каждой входящей в (1.2) гармоники, проведем линеаризацию вблизи точки пересечения определяемой несущим продольным волновым числом $\bar{N}_{\parallel 0}$ с координатами $(\rho_0, \bar{\theta}_0)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_+(r, \theta) &\approx \frac{r - \rho_0}{(1 + Y_0)L_n} - \frac{\rho_0(\cos \theta - \cos \bar{\theta}_0)}{(1 + Y_0)^2 R_0} Y_0 + \frac{Y_0}{1 + Y_0}, \\ N_{\parallel}^2 &\approx N_{\parallel 0}^2 - 2 \frac{Y_0}{1 + Y_0} \frac{\rho_0(\cos \theta - \cos \bar{\theta}_0)}{R_0}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $R_0 = R + \rho_0 \cdot \cos \bar{\theta}_0$, а $Y_0 = Y(\rho_0, \bar{\theta}_0)$ определяется амплитудой магнитного поля в точке пересечения, а $\bar{N}_{\parallel 0}$ выражается через Y_0 как $\bar{N}_{\parallel 0} = Y_0 / (1 + Y_0)$. Относительная ошибка данного приближения может быть оценена как следующий член разложения по $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_+ / \varepsilon_+ &\approx \frac{(\cos \theta - \cos \bar{\theta}_0)^2}{(1 + Y)^2 (R_0 / \rho_0)^2}, \\ \Delta N_{\parallel}^2 / N_{\parallel}^2 &\approx \frac{3 (\cos \theta - \cos \bar{\theta}_0)^2}{2 (R_0 / \rho_0)^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что эта ошибка остается небольшой для всех значений полоидального угла $-\pi < \theta < \pi$ для токамака с большим аспектным отношением, у которого $R_0 / \rho_0 \sim R / r \gg 1$ с r и R , обозначающими малый и большой радиусы. Однако это же приближение можно использовать и в более широком диапазоне параметров. Действительно, ниже показано, что область вблизи экваториальной плоскости со стороны слабого поля, $-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max}$ с $\theta_{\max} \cong \max(1, \bar{\theta}_0)$, является наиболее важной с физической точки зрения, потому что за

пределами данного региона толщина слоя непрозрачности слишком велика, чтобы дать существенный вклад в О-Х трансформацию. Можно найти, что для $|\theta| < \theta_{\max}$ относительная погрешность может быть небольшой из-за малости величины $(\cos \theta - \cos \bar{\theta}_0)^2 \sim \theta_{\max}^4 / 4$ даже для $R_0 / \rho_0 \sim 1$, что делает уравнение (1.4) применимым для устройств с меньшим аспектным отношением, таких как сферические токамаки. Подобный подход применим, потому что интересующая нас область, имеющая малую толщину области непрозрачности, сильно вытянута поперек экваториальной плоскости, за счет чего изменение магнитного поля и продольного волнового числа в ней невелико и хорошо описывается линейной аппроксимацией.

Для дальнейшего анализа введем новые параметры g_+ и $\Delta\rho$ такие, что с использованием уравнений (1.4) функция $\varepsilon_+(r, \theta) - N_{\parallel}^2(r, \theta)$ запишется в виде:

$$\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2 \approx g_+[r - \rho_0 + \Delta\rho(\cos \theta - \cos \theta_0)],$$

$$g_+ = \frac{g_{\parallel}}{1 + Y_0}, \quad \Delta\rho = \rho_0 \frac{L_n}{R_0} \cdot \frac{2(1 + Y_0) - 1}{(1 + Y_0)} Y_0, \quad \cos \theta_0 = \cos \bar{\theta}_0 + \frac{1}{g_+ \Delta\rho} \left(\frac{Y_0}{1 + Y_0} - N_{\parallel 0}^2 \right)$$

Здесь стоит отметить, что входящее в выражение θ_0 – это координата точки пересечения поверхностей отсечки для данного $N_{\parallel 0}$, а не для $\bar{N}_{\parallel 0}$. Это легко увидеть, если подставить $r = \rho_0$ и $\theta = \theta_0$. Обратите внимание, что О-Х трансформация обычно происходит на периферии плазмы, где $L/R_0 \ll 1$ даже в токамаках с малым аспектным отношением, соответственно $\Delta\rho / \rho_0 \sim L/R_0$ может рассматриваться как малая величина.

С учетом малых порядка $O(\Delta\rho / \rho_0)$, обе поверхности отсечки представлены двумя окружностями, с центрами, сдвинутыми на $\Delta\rho$ в горизонтальном направлении и радиусами, различающимися на $\Delta\rho \cos \theta_0$. На Рисунке 1.1 эти окружности отмечены метками 1 и 3, а их центры O_1 и O_3 , соответственно. Более того, те же приближения можно использовать даже тогда, когда поверхности отсечки не пересекаются, как показано на Рисунке 1.1 (b). Этот случай формально соответствует $\cos \theta_0 > 1$. Учитывая это, весь последующий анализ остается справедливым для геометрии без пересечения (по крайней мере, для случая устройств с большим аспектным отношением).

Теперь мы можем более детально рассмотреть эффекты, связанные с изменением положения поверхности отсечки $\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2 = 0$ при переходе от цилиндрической геометрии к тороидальной. Рассмотрим функцию $\varepsilon_+(r, \theta) - N_{\parallel}^2$ в цилиндрической геометрии, взяв величину $\varepsilon_+(r, \theta)$ из (1.4), а $N_{\parallel}^2 = N_{\parallel 0}^2$. Нетрудно увидеть, что функция $\varepsilon_+(r, \theta) - N_{\parallel 0}^2$ будет такой же, как и

в тороидальной геометрии, за исключением иного определения параметра $\Delta\rho$. В цилиндрической геометрии: $\Delta\rho_{cyl} = \rho_0(L_n/R_0)Y_0/(1+Y_0) \approx -\Delta\rho_{tor}/3$.

Увеличение параметра $\Delta\rho$ в тороидальной геометрии приводит к росту толщины области непрозрачности ΔR , поскольку $\Delta R = \Delta\rho|\cos\theta - \cos\theta_0|$. В общем случае это ухудшает трансформацию, но не отменяет того, что в соответствии с [34] или нашими дальнейшими рассуждениями вблизи точки пересечения поверхностей отсечки есть идеально проходящая мода. Интересно также отметить то, что $\partial\Delta R/\partial N_{||0}^2 = 1/g_+$, т.е. при сдвиге продольного волнового числа толщина области непрозрачности меняется независимо от $\Delta\rho$. Это означает, что ширина продольного спектра эффективно проходящих продольных гармоник из разложения (1.2) не меняется при переходе из цилиндрической геометрии в тороидальную.

Для описания рассматриваемой геометрии удобно ввести новые полярные координаты (ρ, ϕ) с началом координат O_2 точно между центрами O_1 и O_3 двух поверхностей отсечки, как показано на Рисунке 1.1. Также удобно ввести новую радиальную координату $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0 - \frac{1}{2}\Delta\rho\cos\theta_0$ так, чтобы $\tilde{\rho}$ была мала внутри области О-Х трансформации, $\tilde{\rho} \ll \rho_0$, круг $\tilde{\rho} = 0$ помечен 2 на Рисунке 1.1. Наконец получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_+ - N_{||}^2 &\approx g_+ [\tilde{\rho} + \Delta\rho(\cos\phi - \cos\phi_0)/2] \\ \varepsilon_{||} &\approx g_{||} [\tilde{\rho} - \Delta\rho(\cos\phi - \cos\phi_0)/2]\end{aligned}\quad (1.5)$$

где ϕ_0 это новая полоидальная координата пересечения поверхностей отсечки определяется из $\rho_0\sin(\phi_0 - \theta_0) = \Delta\rho\sin\phi_0$. Для большого аспектного отношения можно принять $\phi_0 \approx \theta_0$. Таким образом, параметры $\Delta\rho$ и ϕ_0 полностью характеризуют геометрию области трансформации.

Подставляя выражения (1.5) в эталонные волновые уравнения (1.3), получим следующие волновые уравнения в новых координатах [1A, 2A, 4A]:

$$\begin{cases} \frac{\bar{N}_{||0}}{\sqrt{2k_0g_+}} \left(i \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) F_{||} = (\tilde{\rho} + \Delta\rho(\cos\phi - \cos\phi_0)/2) F_+ \\ \frac{\bar{N}_{||0}}{\sqrt{2k_0g_{||}}} \left(i \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) F_+ = (\tilde{\rho} - \Delta\rho(\cos\phi - \cos\phi_0)/2) F_{||} \end{cases}$$

Здесь мы отбросили члены второго порядка малости: $(\tilde{\rho}/\rho_0^2)(\partial/\partial\phi)$ и $(N_{||} - \bar{N}_{||0})(i\rho_0 \cdot \partial/\partial\tilde{\rho} \pm \partial/\partial\phi)$. Вводя новые переменные и координаты

$$\begin{aligned}A_{||} &= \sqrt{g_{||}} F_{||}, \quad A_+ = \text{sign}(\bar{N}_{||0}) \sqrt{g_+} F_+, \\ \xi &= -\frac{\tilde{\rho}}{L_{\nabla}}, \quad \Delta\xi = \frac{\Delta\rho}{2L_{\nabla}}, \quad \kappa = \frac{L_{\nabla}}{\rho_0}, \quad L_{\nabla}^2 = \frac{|\bar{N}_{||0}|}{k_0\sqrt{2g_+g_{||}}},\end{aligned}$$

перепишем эталонные волновые уравнения в безразмерном виде

$$\begin{cases} (i\partial/\partial\xi + \kappa\partial/\partial\phi)A_{\parallel} = (\xi - \Delta\xi(\cos\phi - \cos\phi_0))A_{+} \\ (i\partial/\partial\xi - \kappa\partial/\partial\phi)A_{+} = (\xi + \Delta\xi(\cos\phi - \cos\phi_0))A_{\parallel} \end{cases} \quad (1.6)$$

Это обобщение уравнений (4) из работы [34] на случай тороидальной геометрии, здесь ξ соответствует координате x' , а ϕ – полоидальной координате y' (см. вставку на рис 1.1). Здесь мы также устранили явную зависимость от знака $\bar{N}_{\parallel 0}$, что означает отсутствие асимметрии при вводе по и против магнитного поля. Но при этом надо понимать, что отсутствие асимметрии относится именно к направлению ввода. Если мы меняем направление магнитного поля, то «верх» и «низ» меняются местами, что условно соответствует замене $\phi \rightarrow -\phi$ в наших уравнениях.

Как и в предыдущих работах [34, 36, 37], произвольное волновое поле может быть представлено как

$$A_{+} = A^{+} + A^{-}, \quad A_{\parallel} = A^{+} - A^{-},$$

где компоненты A^{+} и A^{-} соответствуют волнам, которые распространяются, соответственно, в положительном и отрицательном направлениях по радиальной координате в области ВКБ предела. В новых переменных, уравнения (1.6) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} (i\partial/\partial\xi + \xi)A^{-} = (\kappa\partial/\partial\phi + \Delta\xi(\cos\phi - \cos\phi_0))A^{+} \\ (i\partial/\partial\xi - \xi)A^{+} = (\kappa\partial/\partial\phi - \Delta\xi(\cos\phi - \cos\phi_0))A^{-} \end{cases}$$

Будем искать решение этой системы методом разделения переменных. Вводя

$$A^{-} = A_{\xi}^{-}(\xi) \cdot A_{\phi}^{-}(\phi), \quad A^{+} = A_{\xi}^{+}(\xi) \cdot A_{\phi}^{+}(\phi)$$

получим

$$(d^2/d\xi^2 + \xi^2 + i) A_{\xi}^{+} = \lambda\kappa^2 A_{\xi}^{+}, \quad (1.7)$$

$$(-d^2/d\phi^2 + \delta^2(\cos\phi - \cos\phi_0)^2 + \delta\sin\phi) A_{\phi}^{+} = \lambda A_{\phi}^{+}, \quad (1.8)$$

где $\delta = \Delta\xi/\kappa = \rho_0\Delta\rho/2L_{\nabla}^2$.

Уравнение (1.7) полностью эквивалентно уравнению, полученному для плоских поверхностей отсечки, его решение соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении и может быть выражено через функции параболического цилиндра:

$$A_{\xi}^{+} \propto D_{i\nu}(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\xi), \quad \nu = \lambda\kappa^2/2.$$

Уравнение (1.8), которое определяет полоидальную структуру волнового поля, очевидно, отличается от своего аналога, полученного для плоских поверхностей отсечки [34]. В то время как решение последнего может быть записано через полиномы Эрмита, уравнение на

полоидальные моды для цилиндрических поверхностей отсечки не имеют явных аналитических решений. Тем не менее, уравнение (1.8) можно рассмотреть как стационарное уравнение Шредингера с потенциалом

$$V(\phi) = \delta^2 (\cos \phi - \cos \phi_0)^2 + \delta \sin \phi \quad (1.9)$$

и периодическими граничными условиями

$$A_\phi^+(\phi) = A_\phi^+(\phi + 2\pi)$$

Очевидно, что волна может распространяться в полоидальном направлении только в области где $V(\phi) < \lambda$, в области где $V(\phi) > \lambda$ волна затухает. Форма эффективного потенциала (1.9) определяется δ и ϕ_0 . В современном эксперименте $\delta \gg 1$, например, для планирующегося эксперимента по О-Х-В нагреву на токамаке FTU [69] мы получим значение $\delta = 38$. Решения уравнения (1.8) с периодическими граничными условиями образуют полный набор ортогональных мод $\Phi_n(\phi)$, отвечающий дискретному и действительному спектру собственных значений λ_n . В отличие от ранее изученного случая плоских поверхностей отсечки, эти моды и спектр не могут быть выражены в компактном аналитическом виде, однако, они могут быть легко найдены численно [1A].

Общее решение для волны, распространяющейся вперед (падающей и прошедшей), принимает следующий вид [1A, 2A, 4A]:

$$A^+(\xi, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(\phi) D_{i\nu_n}(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\xi), \quad \nu_n = \lambda_n \kappa^2 / 2, \quad (1.10)$$

где A_n постоянные коэффициенты, которые могут быть определены как проекции волнового поля на соответствующие полоидальные моды $\Phi_n(\phi)$ в некоторой точке ξ перед областью трансформации, где известно падающее поле. Соответствующая отраженная волна ($A^- \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$) записывается как [1A, 2A]:

$$A^-(\xi, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{i\nu_n} A_n \Phi_n(-\phi) D_{i\nu_{n-1}}(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\xi). \quad (1.11)$$

Эти два выражения дают полное и явное решение задачи, т. е. позволяют реконструировать волновые поля, которые проходят сквозь и отражаются от области трансформации для любой заданной формы падающего пучка. Аспекты численных методов, использовавшихся при работе с этими выражениями, в том числе расчет полоидальных мод и спектра, обсуждаются в [1A].

Для конкретных примеров в последующих разделах мы выбрали параметры типичные для эксперимента по электрон циклотронному О-Х-В нагреву, который находится в стадии подготовки на токамаке FTU, на который недавно был установлена новая система ввода излучения [69, 70]. Здесь мы просто перечислим их, а более подробное обсуждение

эксперимента на FTU будет приведено в разделе 1.4. Соответственно: $L = 14$ см, $\rho_0 = 12$ см, $R_0 = 106$ см, $\theta_0 = 0.54$, $Y_0 = 0.94$, $k_0 = 30$ см⁻¹ [71]. Перечисленные параметры соответствуют $\delta = 38$, $\kappa = 0.048$. Характерный масштаб области трансформации $L_{\nabla} = 0.58$ см.

1.2 Качественный анализ решения и соответствие с ранее разработанными теориями

В этом разделе показано соответствие новых решений результатам ранее разработанных одно- и двумерных теорий. Для этого можно более детально проанализировать полоидальный спектр, соответствующий эффективному потенциалу $V(\phi)$, определяемому уравнением (1.9).

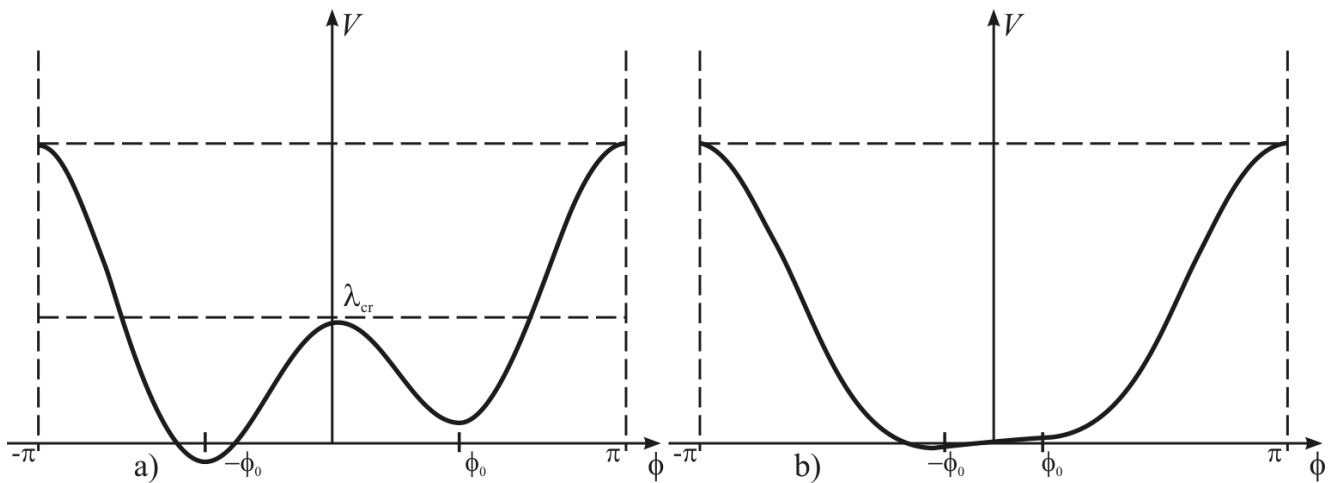


Рисунок 1.2: Эффективный потенциал $V(\phi)$ в случае пересекающихся поверхностей отсечки $\cos \phi_0 \leq 1$: (a) случай двух потенциальных ям при $\delta > \frac{1}{4} \sin \phi_0 / \sin^4(\phi_0/2)$, (b) случай плоского дна одной потенциальной ямы при $\delta \leq \frac{1}{4} \sin \phi_0 / \sin^4(\phi_0/2)$

На Рисунке 1.2 этот потенциал показан для двух типичных случаев. Видно, что он может иметь либо два, либо только один локальный минимум, в зависимости от того, насколько близко к экваториальной плоскости находится точка О-Х трансформации ϕ_0 . Два локальных минимума соответствуют двум точкам наилучшей трансформации C и C' на Рисунке 1.1 (а), которые образованы пересечениями поверхностей отсечки выше и ниже экваториальной плоскости.

В рамках уже разработанной двумерной теории, использующей приближение плоских пересекающихся поверхностей отсечки [34-36], эти же две точки были рассмотрены по отдельности. Очевидно, что подобный подход будет справедлив, если точки достаточно хорошо разделены горбом потенциала вблизи $\phi = 0$. С другой стороны, области трансформации вблизи

C и C' могут начинать взаимодействовать при приближении этих точек к экваториальной плоскости. Так происходит переход к стандартной одномерной теории О-Х трансформации [11, 14], которой соответствует плоский потенциал, показанный на Рисунке 1.2 справа.

Таким образом, новая теория, построенная на основе более реалистичного «глобального» полоидального потенциала (1.9) может описать плавный переход от одномерного случая экваториального ввода к двумерному случаю, отвечающему вводу пучка под углом к экватору. Более того, оно также дает новое представление о физическом эффекте, обнаруженном ранее в приближении плоских пересекающихся поверхностей отсечки, который заключается в асимметрии трансформации при вводе пучка сверху и снизу от экваториальной плоскости (C и C' на Рисунке 1.1) [34]. Действительно, потенциал включает в себя небольшой антисимметричный член $\delta \sin \phi$, который приводит к асимметрии левой и правой потенциальных ям на Рисунке 1.2. Стоит также отметить, что он меняет свой знак и увеличивается при переходе от цилиндрической к тороидальной геометрии, и в результате этого оптимальные и неоптимальные варианты ввода излучения меняются местами, а разница между их коэффициентами трансформации увеличивается, как будет показано на примере позже.

Рассмотрим случай, соответствующий первому типу потенциала. Так как в токамаках $\delta \gg 1$, в потенциале (1.9) доминирует симметричный член. В этих условиях положение локальных минимумов потенциала может быть определено как $\phi \approx \pm \phi_0$, в то время как точка $\phi \approx 0$ соответствует положению максимума барьера, разделяющего две потенциальные ямы. Значение этого максимума может быть оценено как

$$\lambda_{\text{cr}} \approx V(0) = 4\delta^2 \sin^4 \phi_0 / 2.$$

При низких «энергиях» $\lambda_n \ll \lambda_{\text{cr}}$, потенциал можно представить в виде двух слабо связанных параболических ям. Если пренебречь туннелированием волн между ямами и влиянием точных граничных условий, то спектр собственных значений для каждой ямы будет эквидистантным. На самом деле, это будет спектр квантового гармонического осциллятора, причем частоты будут одинаковы для обеих ям [72]. Используя разложение потенциала в окрестностях $\phi = \pm \phi_0$, получаем следующие асимптотические выражения для собственных значений правой и левой ям, соответственно:

$$\lambda_n^{\text{right}} = (n+1)\Delta\lambda, \quad \lambda_n^{\text{left}} = n\Delta\lambda, \quad \Delta\lambda = 2\delta \sin \phi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные функции будут функциями Эрмита, локализованными вблизи минимумов потенциала $V(\phi)$,

$$\Phi_n(\phi) = \exp\left(-\frac{\Delta\lambda}{4}(\phi \mp \phi_0)^2\right) H_n\left(\sqrt{\Delta\lambda/2}(\phi \mp \phi_0)\right), \quad (1.12)$$

где $H_n(x)$ – полиномы Эрмита. Эти собственные функции и спектр собственных значений в точности совпадают с результатами, полученными в предположении плоских и пересекающихся поверхностей отсечки [34-42]. Обратите внимание, что все собственные значения, кроме наименьшего, оказываются дважды вырожденными, а наименьшее $\lambda_0^{\text{left}} = 0$ соответствует идеально трансформирующейся (безотражательной) моде, которая существует только для одной ямы [38].

Эти соображения позволяют указать пределы применимости приближения плоских пересекающихся поверхностей отсечки. Достаточным условием применимости приближения плоских пересекающихся поверхностей отсечки является условие, что в разложении прошедшего пучка незначительно представлены моды с $\lambda_n \geq \lambda_{\text{cr}}$, которые не соответствуют этому приближению. Есть несколько способов удовлетворить такому условию, детальное рассмотрение которых можно найти в [1А]. Здесь рассматривается наиболее важный для термоядерных приложений случай, в котором исходный падающий пучок составлен из полоидальных мод с $\lambda_n < \lambda_{\text{cr}}$, соответствующих "параболической" яме, а вклад других мод в разложение пучка пренебрежимо мал. Это возможно, если (1) полоидальная ширина a_ϕ падающего пучка меньше, чем ширина "параболической" ямы $\sim \rho_0 \phi_0$, и (2) все масштабы неоднородности пучка больше наименьшего масштаба мод, соответствующих эквидистантному спектру, который может оцениваться как $\rho_0 / \sqrt{\lambda_{\text{cr}}} \ll \rho_0 \phi_0$. Любой достаточно плавный пучок, удовлетворяющий этим условиям, может быть представлен в виде суммы Эрмитовых мод (1.12), если внутри ямы существует достаточно большое число таких мод $\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{cr}}$. Объединив все предыдущие условия, можно получить:

$$(2\delta \sin^2 \phi_0 / 2)^{-1} \ll a_\phi / \rho_0 \lesssim \phi_0, \quad \sin \phi_0 \ll 2\delta \sin^4 \phi_0 / 2. \quad (1.13)$$

Эти неравенства обеспечивают необходимые условия для сведения волновых уравнений (1.6)-(1.8) к уравнениям, точно таким же, как и те, что изучались при рассмотрении плоских пересекающихся поверхностей отсечки. Для рассмотренного выше примера FTU получается $2 \text{ см} \lesssim a_{\phi_0} \lesssim 7 \text{ см}$ и $\phi_0 \gtrsim 34 \text{ deg}$.

Рассмотрим теперь переход к одномерному приближению. Для простоты ограничимся его рассмотрением только с качественной стороны. С физической точки зрения, одномерное приближение можно использовать в случае, когда все значимые гармоники в полоидальном

спектре близки к гармоническим функциям $\Phi_n \approx \exp(in_\phi \phi)$, и спектр достаточно плотный, $\Delta\lambda \ll (\rho_0/a_\phi)^2$. В некотором смысле, это эквивалентно квазиклассическому пределу в квантовой механике [72]. Этот переход возможен для обоих типов потенциалов, показанных на Рисунке 1.2. Простейший случай – это "пролетные" моды соответствующие

$$\lambda_n \gg \max V(\phi) = V(\pi) \approx 4\delta^2 \cos^4 \phi_0 / 2.$$

Однако, этот случай не единственный. Например, достаточно высокие ($n \gg 1$) локализованные Эрмитовы моды (1.12) достаточно близки к гармоническим функциям. Очевидно, что для плоского потенциала, показанного на Рисунке 1.2 справа, и типичного экваториального ввода практически все полоидальные моды, составляющие пучок, будут близки к гармоническим, если сам пучок хорошо локализован, $a_\phi < \rho_0$.

Далее, чтобы проиллюстрировать практический взгляд на пределы применимости рассмотренных приближений, сравним результаты реальных расчетов на примере FTU. Рассмотрим коэффициент О-Х трансформации, определенный как отношение падающего и прошедшего потоков мощности

$$T = \int |A_x^+(\phi)|^2 d\phi / \int |A_o^+(\phi)|^2 d\phi,$$

как функцию угла ввода пучка ϕ_i для оптимально сфокусированного падающего гауссового пучка:

$$A_o^+ = A^+(\phi) \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} = \exp\left(-(\phi - \phi_i)^2 \rho_0^2 / 2a_\phi^2\right). \quad (1.14)$$

В тороидальном направлении волновой пучок представлен одной гармоникой из разложения (1.2).

На Рисунке 1.3 коэффициент трансформации изображен на графике как функция угла ввода пучка ϕ_i для фиксированного полоидального положения $\phi_0 = \pi/6$ точки пересечения поверхностей отсечки. Для данного ϕ_0 потенциал соответствует виду, изображенному на Рисунке 1.2 справа. Сравним три подхода: (1) двумерные расчеты с учетом кривизны (черная линия), (2) двумерные расчеты с плоскими поверхностями отсечки с потенциалом, представленным двумя независимыми параболическими ямами (синие линии) (3) одномерные расчеты с плоскопараллельными поверхностями отсечки, учитывающие локальное расстояние между поверхностями отсечки (красная линия) и (4) двумерные расчеты с плоскими поверхностями отсечки, учитывающие локальные расстояние и между поверхностями отсечки и их взаимный наклон (зеленая линия). Двумерные теории (1) и (2) предсказывают довольно сильно различающиеся коэффициенты трансформации для $\pm \phi_i$ из-за асимметрии коэффициента трансформации сверху и снизу [34], результаты обеих теорий совпадают вблизи

оптимальных углов ввода $\phi_i \approx \pm\phi_0$, и только (1) обеспечивает адекватное описание в промежуточной области. Одномерная теория (3) более или менее применима во всей области углов ввода, но не учитывает эффекты асимметрии, что дает весьма заметную ошибку для положительных углов. Этой ошибки избегает двумерная теория (4), учитывающая локальный взаимный наклон поверхностей отсечки, которая даёт результат, наиболее близкий к глобальному моделированию (1). Столь хороший результат для расчета, учитывающего только локальные параметры послужил мотивацией к развитию теории О-Х трансформации, основанной на локальных разложениях параметров плазмы, изложенной в разделе 1.5.

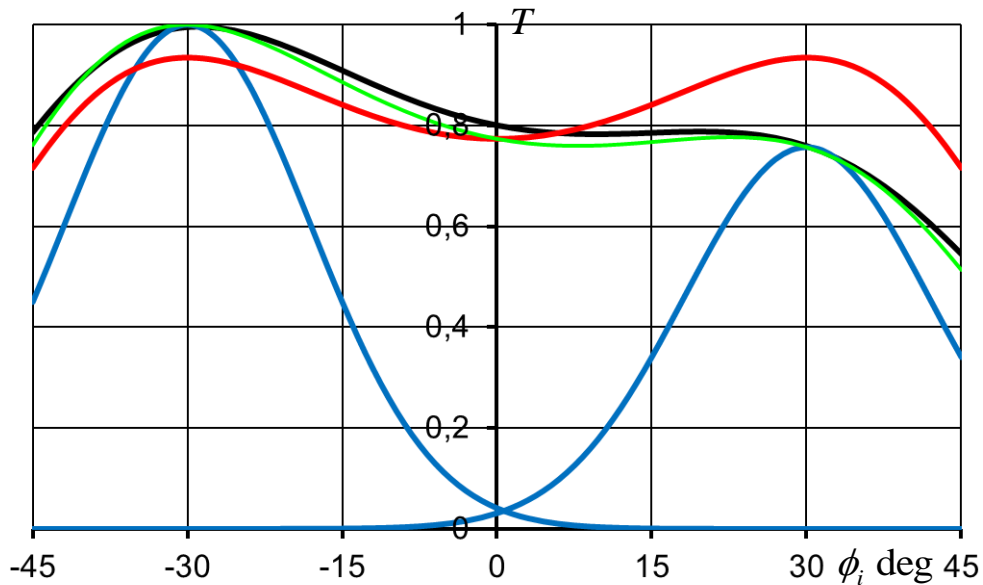


Рисунок 1.3: Коэффициент трансформации T как функция угла ввода пучка ϕ_i для гауссового пучка (1.14) с $a_\phi = 4$ ст вычисленный с использованием трех подходов: двумерные расчеты с учетом кривизны (черная линия), двумерные расчеты с плоскими пересекающимися поверхностями отсечки (синие линии), одномерные расчеты, учитывающие локальное расстояние между поверхностями отсечки (красная линия) и (4) двумерные расчеты с плоскими поверхностями отсечки, учитывающие локальное расстояние и между поверхностями отсечки и их взаимный наклон (зеленая линия). Параметры токамака: $\rho_0 = 12$ см, $N_{||} = 0.7$, $\delta = 38$, $\kappa = 0.048$, $\phi_0 = 30$ deg, а $\alpha = 0.044$.

Обнаружение столь сильного эффекта асимметрии стало результатом учета изменения $N_{||}$ в области трансформации из-за тороидальной кривизны. Если сейчас асимметрия снижает коэффициент трансформации на 25%, то предыдущие оценки, использовавшие рассмотрение задачи О-Х трансформации в цилиндрической геометрии, давали для этого примера разницу только в 10%. Пожалуй, это наиболее сильный эффект возникающий из-за изменения

положения поверхности отсечки $\varepsilon_+ - N_{\parallel} = 0$ при переходе от цилиндрической геометрии к тороидальной.

1.3 Эффект кривизны фазового фронта

Из предыдущих исследований мы знаем, что фазовая модуляция волнового пучка в полоидальном направлении может существенно ухудшить эффективность трансформации [40, 41]. С другой стороны, полученные решения в тороидальной геометрии предполагают "естественные" координаты – каждая собственная мода распространяется вдоль радиальной оси и, следовательно, дополнительная полоидальная фазовая модуляция соответствует поверхности $\rho = \text{const}$ ($\xi = \text{const}$). Действительно, как следует из свойств функции параболического цилиндра в пределе $|\xi| \gg 1$, решение (1.10) можно переписать в виде

$$A^+(\rho, \phi) = A_{\phi}^+(\phi) \exp(-i(\rho - \rho_0)^2 / 2L_{\nabla}^2), \quad A_{\phi}^+(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(\phi)$$

т.е. в ВКБ области структура поля по ϕ сохраняется. Сохранение полоидальной структуры приводит к модуляции по декартовой координате y' , лежащей в полоидальной плоскости и ортогональной направлению распространения пучка. Однако, именно декартовы координаты наиболее естественны для задания падающего пучка. Рассмотрим для определенности, падающий пучок $A_y^+(y')$, заданный на плоскости, касательной к поверхности $\rho = \rho_i$ в точке $\phi = \phi_i$. Для узкого по сравнению с ρ_i пучка можно получить $\rho - \rho_i \approx y'^2 / 2\rho_0$, $\phi - \phi_i \approx y' / \rho_0$ и, используя это, вывести соотношение между декартовым $A_y^+(y')$ и угловым $A_{\phi}^+(\phi)$ представлением волнового поля [2A, 5A]:

$$A_{\phi}^+(\phi) = A_y^+((\phi - \phi_i)\rho_i) \exp(i\chi_{\phi}(\phi - \phi_i)^2 / 2 + i\chi_{\phi}^2(\phi - \phi_i)^4 / 8\xi_i^2)$$

с $\chi_{\phi} = \xi_i \rho_i / L_{\nabla}$ и $\xi_i = (\rho_i - \rho_0) / L_{\nabla}$. Здесь дополнительная полоидальная фазовая модуляция выписана явно. Например, для гауссового падающего пучка с полоидальной шириной a_{ϕ} и плоским волновым фронтом в окрестности поверхности $\rho = \rho_i$ можно получить

$$A^+(\rho_i, \phi) \approx \exp\left(-(\phi - \phi_i)^2 \rho_i^2 / 2a_{\phi}^2 + i\chi_{\phi}(\phi - \phi_i)^2 / 2\right). \quad (1.15)$$

В этом выражении оставлена только квадратичная фазовая модуляция возникающая в результате различных кривизн у волнового фронта и у поверхностей отсечки. Эта фазовая модуляция добавляет дополнительный масштаб в полоидальном направлении,

$$\tilde{a}_{\phi} = \rho_i / \sqrt{\chi_{\phi}},$$

который может быть сравним или даже меньше начальной ширины пучка a_ϕ . Это дает дополнительное условие

$$a_\phi \ll \tilde{a}_\phi$$

для пренебрежения эффектами кривизны. Следует отметить, что для параметров токамака $\chi \gg 1$ и, следовательно $\tilde{a}_\phi \ll \rho_i$, кривизна может быть существенной даже для узких пучков с шириной много меньшей, чем сам радиус кривизны. Например, для FTU можно получить оценку $\chi_\phi \sim 70-160$, неопределенность связана с неопределенностью в определении стартовой точки для пучка ρ_i , которая должна быть выбрана таким образом, что $L_\nabla \ll |\rho_i - \rho_0| \ll L$ (или $\xi_i \sim 3-6$). Это дает значение $\tilde{a}_\phi = \sqrt{L_\nabla \rho_i / \xi_i} \approx 1,2$ см, что сопоставимо или меньше размера пучка, формируемого новой системой ввода на FTU: $1.2 \text{ см} < a_\phi < 1.9 \text{ см}$ [71]. Более того, эффект кривизны фазового фронта должен быть еще более выраженным в распространенном случае, если фокус пучка оказывается расположенным снаружи поверхности $\rho = \rho_i$ и фазовый фронт оказывается не плоским, а выгнутым в обратную сторону относительно оптимального.

Сильная фазовая модуляция в полоидальном направлении приводит к двум основным эффектам [2А, 5А]. Во-первых, эффективность О-Х трансформации волновых пучков с плоскими фазовыми фронтами становится намного меньше, чем предсказывалось, исходя из предыдущей теории, основанной на приближении плоских пересекающихся поверхностей отсечки. Во-вторых, оптимальная ширина пучка, при которой трансформация наиболее эффективна, смещается в сторону меньших значений и довольно точно соответствует \tilde{a}_ϕ , а не a_0 как предсказывали предыдущие теории [34, 36-38].

Конечно, этих эффектов можно избежать, если взять падающий пучок со специально подобранным фазовым фронтом, совпадающим с кривой $\rho = \text{const}$. Это проиллюстрировано на Рисунке 1.4, который показывает эффективность О-Х трансформации (сплошные линии) в зависимости от ширины a_ϕ для гауссовых падающих пучков, определяемых формулой (1.15) с различными фазовыми модуляциями, изменяющимися от точного соответствия фазового фронта и поверхности отсечки ($\chi_\phi = 0$) до плоского фазового фронта ($\chi_\phi = 128$ или $\tilde{a}_\phi = 1.31$ см) и фазового фронта сильно выгнутого в обратную сторону ($\chi_\phi = 360$ или $\tilde{a}_\phi = 0.78$ см).

Расчеты проводились для перечисленных выше параметров FTU, все пучки были представлены только одной тороидальной гармоникой из разложения (1.2). Видно, что

кривизна фазового фронта в "естественных" координатах может существенно повлиять на эффективность О-Х-В нагрева плазмы токамака.

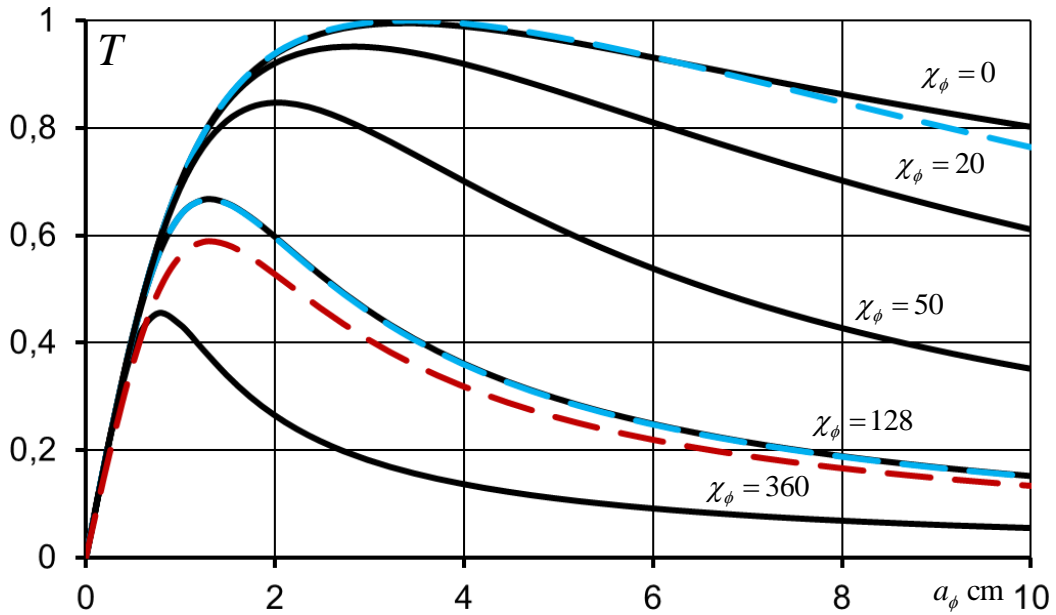


Рисунок 1.4: Коэффициент О-Х трансформации как функция ширины пучка a_ϕ для гауссового падающего пучка (1.15) с различными фазовыми модуляциями $\chi_\phi = 0, 20, 50, 128, 360$ и оптимальным углом ввода $\phi_i = -\phi_0$, полученная численно (сплошные линии) и из разных аналитических выражений (пунктирные линии). Параметры токамака такие же, как на Рисунке 1.3, а $\xi_i = 5$

Как уже было показано в предыдущем разделе, вблизи точки пересечения поверхностей отсечки довольно точные результаты дает приближение плоских пересекающихся поверхностей отсечки. Мы можем использовать эту технику, основанную на разложении по функциям Эрмита (1.12), и для расчета влияния кривизны на коэффициент трансформации. Для этого просто добавим во входящий пучок дополнительную поперечную фазовую модуляцию. Для гауссова пучка (1.15), нацеленного точно на оптимальную точку трансформации $\phi_i = -\phi_0$ можно получить аналитическую формулу [2A]:

$$T = \left(1 + \frac{\tanh(\pi \tan|\alpha|)}{(1 + \tanh(\pi \tan|\alpha|))^2} \left(\frac{a_0^2}{a_\phi^2} \left(1 - \frac{a_\phi^2}{a_0^2} \right)^2 + \frac{a_0^2 a_\phi^2}{\rho_0^4} \chi_\phi^2 \right) \right)^{-1/2}, \quad (1.16)$$

где $\alpha = \arctan [(\Delta\rho/2\rho_0)\sin\phi_0]$ половинный угол между поверхностями отсечки и $a_0 = L_\nabla/\sqrt{|\sin|\alpha|}$ оптимальная ширина пучка для $\chi_\phi = 0$. Обе эти величины были введены в [34]. Результаты расчетов по приведенной аналитической формуле показаны на Рисунке 1.4

синими штрихованными линиями. Хорошо видно их полное согласие с результатами численных расчетов, которое нарушается только для очень широких пучков при $\chi_\phi = 0$.

Аналитическое выражение (1.16) упрощается при условии $\alpha \ll 1$, обычно выполняющемся в экспериментах по термоядерному синтезу в тороидальных магнитных ловушках. Для узкого пучка можно получить формулу:

$$T \approx \left(1 + \pi L_\nabla^2 \left(\frac{1}{a_\phi^2} + \frac{a_\phi^2}{\tilde{a}_\phi^4} \right) \right)^{-1/2},$$

соответствующую коэффициенту трансформации пучка (1.15) в наиболее простом приближении плоских совпадающих поверхностей отсечки. На Рисунке 1.4 результат расчета по этой формуле представлен в виде красной штрихованной линии, и хорошо видно, что, несмотря на значительную ошибку, даваемую этим методом, положение максимума коэффициента трансформации совпадает очень точно.

В этом есть простой смысл: поскольку в одномерном приближении коэффициент трансформации убывает с ростом ширины Фурье спектра пучка, то этот максимум соответствует минимальной ширине спектра. Действительно для пучка (1.15) ширина спектра $\sqrt{1/a_\phi^2 + a_\phi^2/\tilde{a}_\phi^4}$ и её минимум соответствует $a_\phi = \tilde{a}_\phi$. Таким образом, появление максимумов коэффициента трансформации при $\chi_\phi = 0$ и $\chi_\phi \gg 1$ имеет разную природу. Если при $\chi_\phi = 0$ максимум возникает из-за двумерной неоднородности структуры поверхностей отсечек, то при $\chi_\phi \gg 1$ причина – это простое свойство Фурье спектра падающего пучка.

Явление, когда за счет фазовой модуляции ширина спектра пучка может оказаться много больше ожидаемой обратной пространственной ширины a_ϕ , может существенно ухудшить коэффициент трансформации пучка с конечной шириной по тороидальной координате. Дело в том, что если мы хотим получить коэффициент трансформации трехмерного пучка близким к единице, нужно обеспечить близкие к единице коэффициенты прохождения для каждой двумерной волны, отвечающей значащему $N_{||0}$. И здесь основная проблема в том, что при изменении $N_{||0}$ расстояние между поверхностями отсечки довольно быстро возрастает и превышает L_∇ ($|\bar{N}_{||0} - N_{||0}| \sim 1/\sqrt{L_n k_0}$), а это делает эффективную трансформацию гармоники с данным $N_{||0}$ невозможной. Таким образом, для оптимизации коэффициента трансформации трехмерного пучка в первую очередь необходимо уменьшать ширину его спектра по $N_{||0}$. А как было показано выше возникающая дополнительная фазовая модуляция может эффективно уширять спектр, и поэтому необходимо также рассмотреть эффект тороидальной кривизны фазового фронта.

Поскольку поляризация падающей волны не зависит от $|N_{\parallel 0}|$, мы можем использовать фурье-разложение аналогичное (1.2), чтобы построить решение для скалярной амплитуды поля волнового пучка локализованного вдоль φ . Для простоты будем анализировать только его медленную огибающую:

$$A_{3D}^+(\rho, \phi, \varphi) = \int A^+(\rho, \phi, \bar{N}_{\parallel 0} + \Delta N_{\parallel 0}) \exp(ik_0 R_0 \Delta N_{\parallel 0} \varphi) d\Delta N_{\parallel 0},$$

Рассмотрим случай, когда $A_{3D}^+(\rho = \rho_i, \phi, \varphi) \propto A_\phi^+(\phi) \cdot A_\varphi^+(\varphi)$, т.е. когда координаты разделяются. Введем ось z' через векторное произведение уже введенных орт x' и y' , и по аналогии с $A_\phi^+(\phi)$ и $A_y^+(y')$ запишем:

$$A_\varphi^+(\varphi) = A_z^+((\varphi - \varphi_i) R_i) \exp(i\chi_\varphi (\varphi - \varphi_i)^2 / 2),$$

где $R_i \approx R + \rho_i \cos \phi_i$ и $\chi_\varphi = \xi_i R_i \cos \phi_i / L_\nabla$. Косинус угла ввода появился в χ_φ из-за того, что мы проецируем несущий волновой вектор на вектор кривизны линии $\rho = \rho_i$, $\phi = \phi_i$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Рассматривая гауссов пучок для плоского волнового фронта, получим:

$$A_\varphi^+(\varphi) = \exp\left(-(\varphi - \varphi_i)^2 R_i^2 / 2a_\varphi^2 + i\chi_\varphi (\varphi - \varphi_i)^2 / 2\right)$$

Условие малости эффекта кривизны $a_\varphi \ll \tilde{a}_\varphi$, где $\tilde{a}_\varphi = \sqrt{L_\nabla R_i / \xi_i} = \tilde{a}_\phi \sqrt{R_i / \rho_i}$. Таким образом, большой радиус входит под корнем и даже для классического токамака FTU отношение масштабов навязываемых соответственно тороидальной и полоидальной кривизнами оказывается $\tilde{a}_\varphi / \tilde{a}_\phi \sim 3$. С учетом того, что в продольном направлении пучок распространяется под углом, и пятно пучка вытягивается в направлении z' , получается, что для прямого фазового фронта условие малости тороидальной кривизны оказывается не слабее чем условие малости полоидальной, несмотря на куда больший радиус R_i .

Таким образом, для оптимальной трансформации фазовый фронт медленной огибающей волнового пучка должен совпадать с поверхностью $\rho = const$ в трехмерном пространстве, а кривизна соответственно определяет геометрию этой поверхности. Это проиллюстрировано на Рисунке 1.5, где изображен коэффициент О-Х трансформации как функция полоидальной (горизонтальная ось) и тороидальной (вертикальная ось) ширины трехмерного пучка для: а) идеально сфокусированного пучка и б) пучка с плоским фазовым фронтом. Видно, что, несмотря на большое аспектное отношение токамака FTU, картина распределения коэффициента трансформации качественно меняется при переходе от идеальной параболической фокусировки к плоскому фронту.

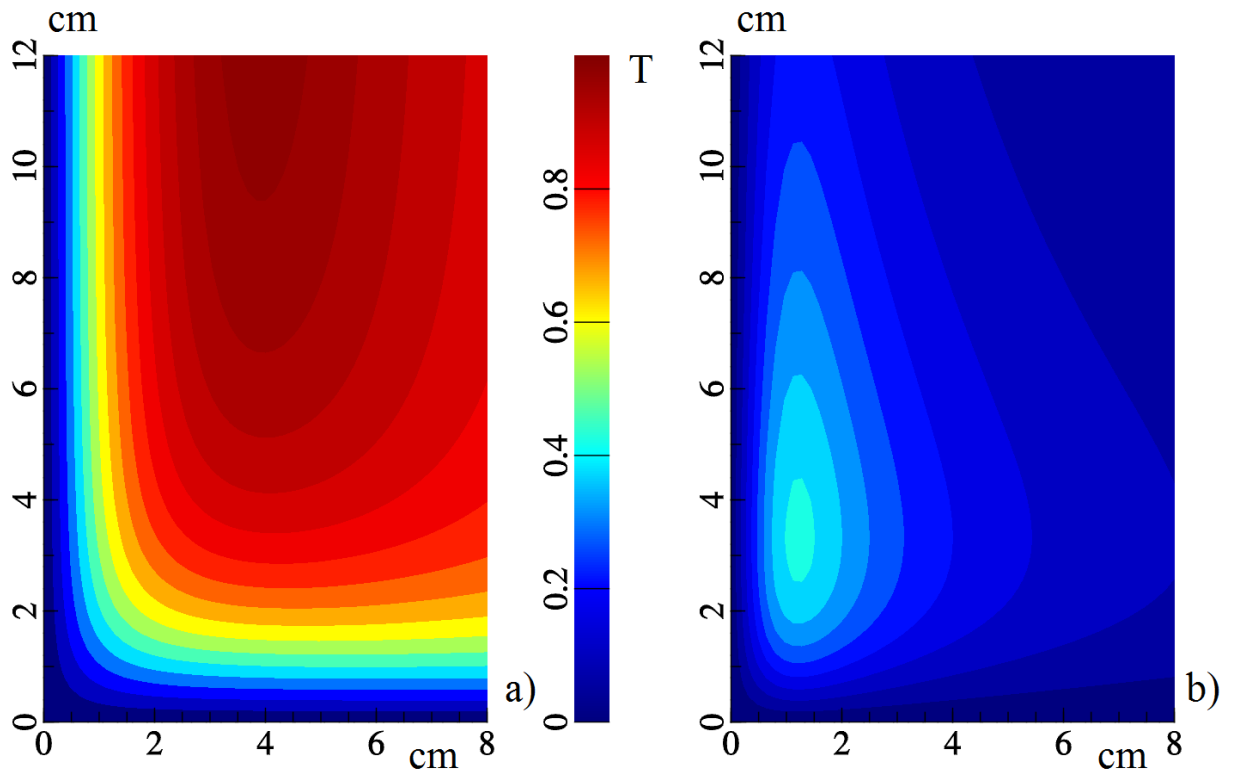


Рисунок 1.5: Коэффициент О-Х трансформации как функция полоидальной (горизонтальная ось) и тороидальной (вертикальная ось) ширины трехмерного пучка для: а) идеально сфокусированного пучка и б) пучка с плоский фазовым фронтом. Параметры такие же, как для Рисунке 1.3, а $\xi_i = 6.5$

1.4 Расчет эффективности О-Х трансформации для эксперимента на токамаке FTU

В этом разделе мы применим нашу теоретическую модель для расчета реальных квазиоптических пучков, доступных в эксперименте по О-Х-В нагреву плазмы на токамаке FTU.

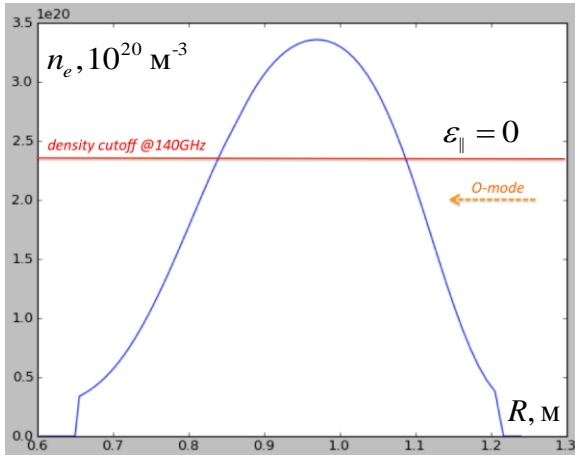


Рисунок 1.6 Профиль концентрации плазмы на токамаке FTU. Показана зависимость концентрации плазмы в экваториальной плоскости от расстояния до оси симметрии токамака. Горизонтальной линией показан уровень критической концентрации $\omega_{pe} = \omega$.

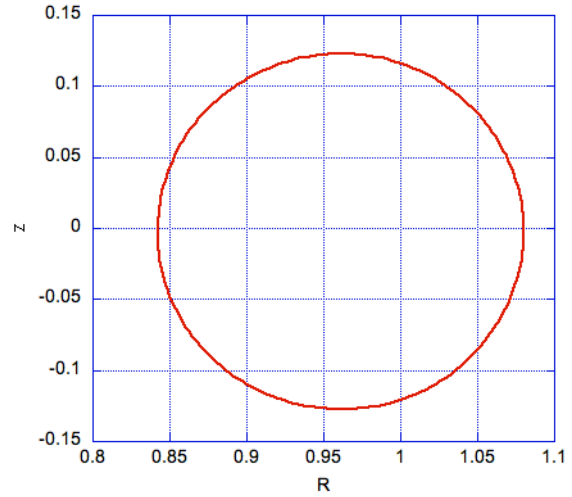


Рисунок 1.7 Контур поверхности отсечки в полоидальной плоскости для токамака FTU. По вертикальной оси отложено расстояние до экваториальной плоскости, по горизонтальной – расстояние до оси симметрии.

Для начала рассмотрим насколько наше описание поверхностей отсечки соответствует их реальному положению. На Рисунке 1.6 изображен профиль концентрации плазмы в разряде. Видно, что снаружи от поверхности $\epsilon_{\parallel} = 0$ концентрация очень точно описывается линейной аппроксимацией на расстояниях сравнимых с L_n . На Рисунке 1.7 изображено сечение поверхности критической концентрации полоидальной плоскостью, это окружность с точностью до расстояний порядка длины волны. FTU является классическим токамаком с достаточно большим аспектным отношением ($R_0/\rho_0 \approx 9$), поэтому линейные аппроксимации магнитного поля и N_{\parallel} также дают хорошую точность. Непосредственное сравнение положений реальных поверхностей отсечки и наших аппроксимаций показало их совпадение с точностью до величины порядка длины волны, что более чем достаточно для применения нашей модели.

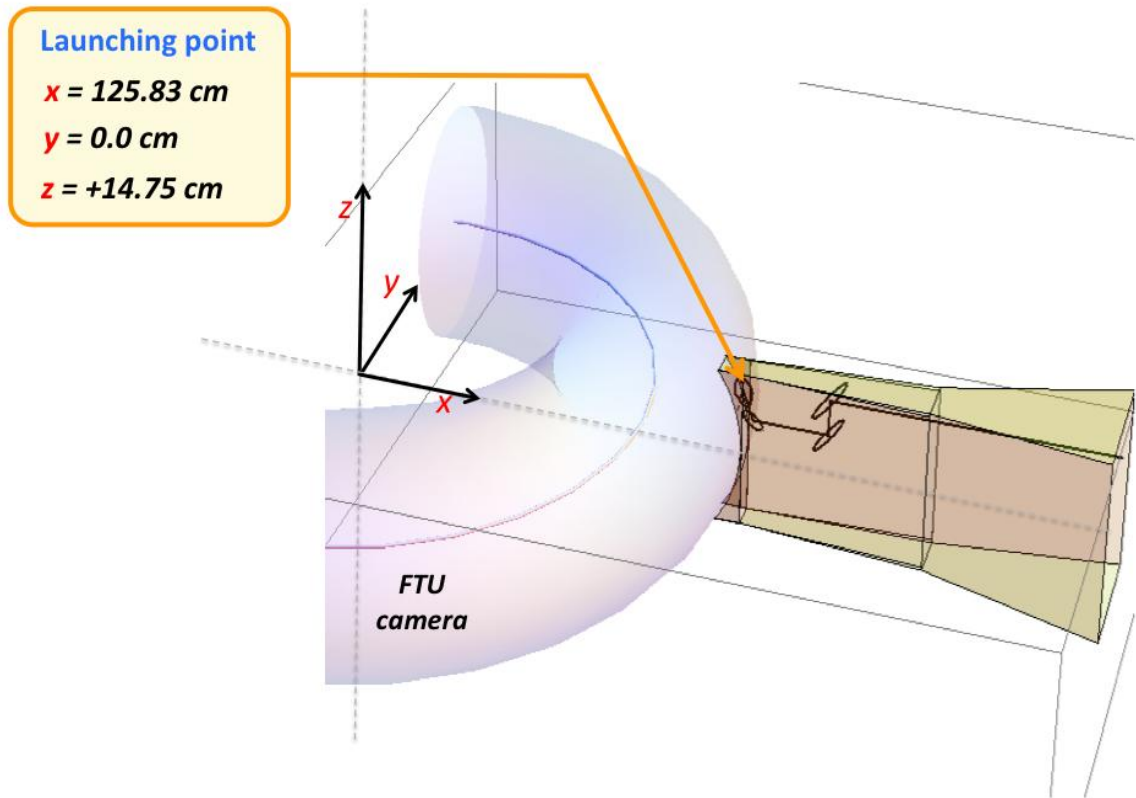


Рисунок 1.8 Схематический вид системы ввода излучения и вакуумной камеры токамака FTU.

На Рисунке 1.8 показан схематический вид новой системы ввода излучения. Поскольку координаты выходного зеркала не могут меняться, возможен только один полоидальный угол ввода, при котором у пучка не возникает поперечной фазовой модуляции, ухудшающей трансформацию. Соответственно, величина \bar{N}_{10} выбирается из условия, чтобы точка пересечения поверхностей отсечки имела полоидальную координату, равную этому углу. Таким образом, единственная остающаяся степень свободы – это фокусировка пучка. Фокусировка пучка управляется положением фокусирующего зеркала. На Рисунке 1.9 показано как от положения зеркала сдвигается фокус пучка. К сожалению, можно заметить, что фокус практически всегда остается вне плазмы, что означает инвертированную кривизну фазового фронта и заранее невысокие значения коэффициента О-Х трансформации.

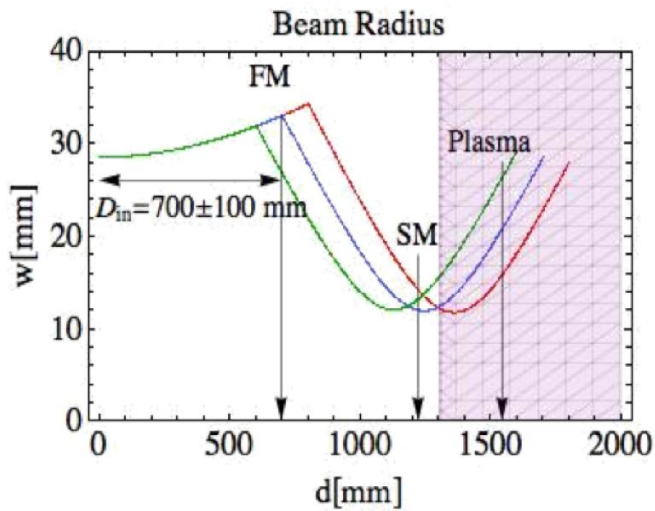


Рисунок 1.9 Зависимость радиуса гауссового пучка от пройденной им дистанции для различных положений фокусирующего зеркала (FM). Изображены два крайних положения фокусирующего зеркала и одно промежуточное.

Для того чтобы определить параметры пучка в окрестности области трансформации использовался код GRAY [73]. В данном коде реальный квазиоптический пучок представляется в виде пучка геометрооптических лучей, между которыми введены силы отталкивания для имитации дифракции. Пример расчета квазиоптического пучка при помощи этого кода показан на Рисунке 1.10.

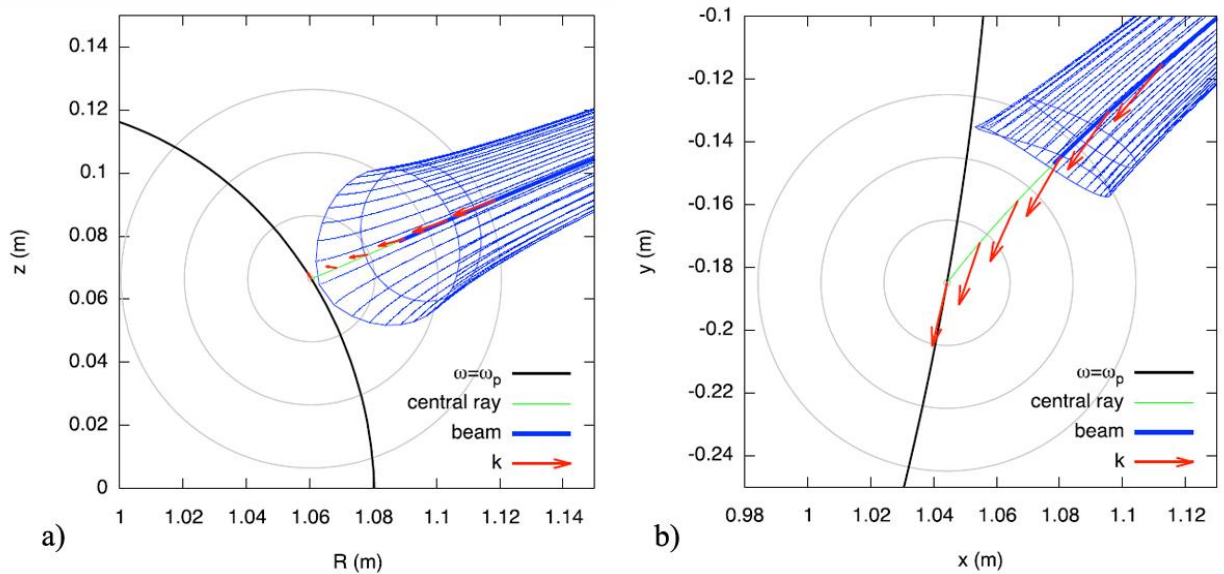


Рисунок 1.10 Иллюстрация примера работы кода GRAY. Тонкими синими линиями изображены траектории геометрооптических лучей и линии постоянной фазы для двух расчетных точек, красной стрелкой показан несущий волновой вектор, толстой черной линией поверхность $\varepsilon_{\parallel} = 0$. Данные изображены в двух проекциях: а) на полоидальную плоскость, проходящую через точку пересечения поверхностей отсечки, б) на плоскость параллельную экваториальной проходящую через точку пересечения поверхностей отсечки.

Данный код не вполне надежно работает вблизи поверхностей отсечки, в то время как наша модель мало применима вдали от них. В промежуточной области, где мы производим сшивку решений, вероятно, некоторую ошибку дают оба способа, описывающие распространение пучка. Для того чтобы оценить величину ошибки, мы будем проводить сшивку в двух разных точках на траектории квазиоптического луча и рассматривать, как от этого меняется коэффициент трансформации. В качестве этих точек мы возьмем точки, соответствующие границам областей применимости использующихся подходов. Для нашей модели это точка, находящаяся на расстоянии $6.5L_{\nabla}$ от поверхностей отсечки. Для кода GRAY это точка, где периферийные лучи начинают касаться поверхностей отсечки, что можно увидеть на Рисунке 1.10.

В таблице 1.1 приведены результаты расчета для трех пучков: двух соответствующих крайним положениям фокусирующего зеркала и одного промежуточного. Для каждого пучка указаны параметры a_{ϕ} , \tilde{a}_{ϕ} , a_{φ} , \tilde{a}_{φ} , ξ_i и вычисленный коэффициент трансформации T .

Таблица 1.1: Результаты расчет коэффициента трансформации для токамака FTU

Описание пункта	a_{ϕ} (см)	\tilde{a}_{ϕ} (см)	a_{φ} (см)	\tilde{a}_{φ} (см)	ξ_i	T
пучок с максимальной шириной, точка 1.	1,73	0,79	4,12	1,6	6,56	7%
пучок с максимальной шириной, точка 2.	2,02	0,8	4,5	1,75	5,9	7,7%
промежуточный пучок, точка 1.	1,55	0,77	3,3	1,55	6,56	9,5%
промежуточный пучок, точка 2.	1,7	0,8	3,76	1,85	4,96	11,7%
пучок с минимальной шириной, точка 1.	1,23	0,78	2,55	1,53	6,56	13,2%
пучок с минимальной шириной, точка 2.	1,44	0,81	3,16	1,87	4,47	16,2%

Из таблицы видно, что точность нашего расчета составила $\sim 3\%$. Это довольно неплохой результат, т.к. точность определения коэффициента трансформации в реальном эксперименте $\sim 10\%$. С другой стороны, стоит отметить, что опасения о том, что неправильная фокусировка сделает трансформацию неэффективной, явно подтвердились: уровень трансформации

находится на уровне экспериментальной погрешности его определения. Видно, что коэффициент трансформации несколько возрастает при уменьшении размеров пучка. Это можно объяснить, если обратить внимание на то, что $a_\phi > \tilde{a}_\phi$ и $a_\phi > \tilde{a}_\phi$: при таком соотношении параметров уменьшение размеров пучка приводит к уменьшению ширины поперечного и продольного спектров. Учитывая, что в районе $a_{\phi,\phi} = \tilde{a}_{\phi,\phi}$ обратная ширина спектра $1/\sqrt{1/a_{\phi,\phi}^2 + a_{\phi,\phi}^2/\tilde{a}_{\phi,\phi}^2}$ имеет довольно резкий максимум (см. Рисунок 1.4), возможно результат трансформации все же можно улучшить, если найти возможность приблизить точку фокуса пучка еще ближе к области трансформации.

1.5 Решение задачи О-Х трансформации с одновременным учетом кривизны магнитных поверхностей и неоднородности магнитного поля

В этом разделе задача О-Х трансформации рассматривается в рамках альтернативного подхода, который моделирует только ту область плазмы вблизи поверхности критической концентрации, сквозь которую проходит квазиоптический пучок. Такая локализация в трехмерном пространстве позволяет использовать разложения Тейлора по пространственным координатам для параметров плазмы и магнитного поля. Кривизна магнитных поверхностей общего вида может задаваться квадратичной формой в разложении плотности по координатам ортогональным её градиенту, а неоднородность модуля и направления магнитного поля (кривизна силовых линий и шир) может учитываться линейными слагаемыми для компонент магнитного поля аналогично тому, как это проделывалось в работе [41]. Этот подход дает гораздо больше свободы при определении параметров среды. Поскольку привязка к тороидальной геометрии больше не навязывает направление и неоднородность магнитного поля, можно сказать, что мы переходим от модельной среды к среде общего вида.

Модель среды

Пусть у нас определена точка максимальной амплитуды СВЧ поля на магнитной поверхности с критической концентрацией. Назовем её точкой разложения.

Введем декартову систему координат с началом в точке разложения, ось x направим вдоль градиента концентрации, а ось z вдоль магнитного поля, вычисленных в точке разложения. В этой системе координат запишем разложения для концентрации плазмы n_e и компонент магнитного поля \mathbf{B} :

$$n_e/n_{cr} = 1 + g_{\parallel} \left(x - \kappa_{yy} y^2 - \kappa_{zz} z^2 - 2\kappa_{yz} yz \right)$$

$$\begin{aligned} B_x/B_0 &= (\mathbf{r}, \nabla \theta_x) \\ B_y/B_0 &= (\mathbf{r}, \nabla \theta_y) \\ B_z/B_0 &= 1 + (\mathbf{r}, \nabla b) \end{aligned}$$

Здесь $\nabla \theta_x$, $\nabla \theta_y$, ∇b – постоянные вектора, определяемые соответствующими градиентами, вычисленными в точке разложения, n_{cr} – критическая концентрация плазмы, а B_0 – модуль магнитного поля в точке разложения. Опишем также физический смысл параметров разложения. Величина g_{\parallel} – это нормированный градиент концентрации в точке разложения, $g_{\parallel} = |\nabla n_e|/n_{cr}$. Параметры κ_{yy} , κ_{zz} , κ_{yz} задают форму поверхности критической концентрации $x = \kappa_{yy}y^2 + \kappa_{zz}z^2 + 2\kappa_{yz}yz$; параметры κ_{yy} , κ_{zz} также определяют половинные нормальные кривизны этой поверхности в направлениях y и z соответственно. Углы θ_x и θ_y определяют отклонение вектора магнитного поля от оси z в направлениях x и y соответственно: $\theta_x = \arcsin(B_x/|\mathbf{B}|) \approx B_x/B_0$, $\theta_y = \arcsin(B_y/|\mathbf{B}|) \approx B_y/B_0$. Величина b отвечает нормированному модулю магнитного поля: $b = |\mathbf{B}|/B_0 \approx B_z/B_0$.

Глобальные свойства плазмы и магнитного поля накладывают естественные ограничения на параметры разложения. Постоянство концентрации плазмы на магнитной поверхности дает условие $(\nabla n_e, \mathbf{B}) = 0$, отсутствие переноса зарядов через магнитную поверхность – $(\nabla n_e, \text{rot } \mathbf{B}) = 0$, вихревой характер магнитного поля – $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Учет этих соотношений накладывает следующие ограничения на коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} (\nabla n_e, \mathbf{B}) \propto (\nabla \theta_x, \mathbf{r}) - (2\kappa_z z + 2\kappa_{yz} y) &= 0 \Rightarrow \nabla \theta_x = (0, 2\kappa_{yz}, 2\kappa_z) \\ (\nabla n_e, \text{rot } \mathbf{B}) \propto \partial_y b - \partial_z \theta_y &= 0 \Rightarrow \partial_z \theta_y = \partial_y b \\ \text{div } \mathbf{B} \propto \partial_y \theta_y + \partial_z b &= 0 \Rightarrow \partial_y \theta_y = -\partial_z b \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Таким образом, наша модель среды определяется девятью скалярными параметрами: g_{\parallel} , κ_{yy} , κ_{zz} , κ_{yz} , B_0 , $\partial_x \theta_y$, $\partial_x b$, $\partial_y b$, $\partial_z b$. Её окончательный вид:

$$\begin{aligned} n/n_{cr} &= 1 + g_{\parallel} (x - \kappa_{yy}y^2 - \kappa_{zz}z^2 - 2\kappa_{yz}yz) \\ B_x/B_0 &= 2\kappa_{yz}y + 2\kappa_z z \\ B_y/B_0 &= \partial_x \theta_y x - \partial_z b \cdot y + \partial_y b \cdot z \\ B_z/B_0 &= 1 + \partial_x b \cdot x + \partial_y b \cdot y + \partial_z b \cdot z \end{aligned}$$

Интересно, что за исключением $\partial_x \theta_y$ все остальные коэффициенты, определявшие поворот магнитного поля, выразились через параметры распределения концентрации и модуля

магнитного поля. Коэффициент $\partial_x \theta_y$ определяет шир магнитного поля, т.е. поворот магнитного поля при переходе между магнитными поверхностями.

Такая модель среды позволяет описывать плазму в любых установках, где выполняется условия $(\nabla n_e, \mathbf{B}) = 0$ и $(\nabla n_e, \text{rot } \mathbf{B}) = 0$, в том числе и довольно экзотичных вроде прямых ловушек или установок с обращенным магнитным полем (FRC).

Для качественных оценок удобно ввести дополнительные переменные:

$L = 1/g_{\parallel}$ – масштаб неоднородности концентрации.

$r = 1/(2\kappa_y)$ – радиус кривизны у поверхности критической концентрации поперек магнитного поля. В тороидальных установках величина порядка малого радиуса.

$R = 1/|\nabla b|$ – характерный масштаб неоднородности модуля магнитного поля. Величина порядка большого радиуса.

Для простоты будем считать, что $L \leq r \leq R$.

Оценим оставшиеся параметры разложения через эти дополнительные переменные. Коэффициент κ_{zz} можно оценить при помощи уравнения равновесия плазмы [74]:

$$\frac{(\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{B}}{4\pi} = \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} + p \right)$$

В нашей модели среды это уравнение дает

$$\kappa_{zz} - \partial_x b/2 = \partial_x p / (B_0^2/2\pi) \sim \beta/L < 1/R,$$

где $\beta = p/(B_0^2/2\pi)$ определяет отношение давления плазмы к магнитному давлению. Отсюда можно получить оценку $\kappa_{zz} \sim \partial_x b/2 \sim 1/R$. Величину κ_{yz} можно оценить из условия выпуклости магнитной поверхности: $\kappa_{yz} < \sqrt{\kappa_{yy} \kappa_{zz}} \sim 1/\sqrt{rR}$. Правда, эта оценка не очень хорошая, поскольку в общем случае магнитная поверхность не выпуклая, а в большинстве типичных случаев $\kappa_{yz} \ll \sqrt{\kappa_{yy} \kappa_{zz}}$. Величина $\partial_x \theta_y$ сильно зависит от конкретного вида магнитной конфигурации, для токамаков её можно оценить как $\partial_x \theta_y \sim 1/qR$, где q – запас устойчивости на магнитной поверхности с критической концентрацией.

Порядки малости отброшенных в разложениях слагаемых можно оценить, зная характерные размеры области О-Х трансформации. Вдоль оси x это величина определяемая нарушением фазового синхронизма $\sim \sqrt{\lambda L}$, где λ – длина волны. Поперек оси x это ширина, определяемая размерами пучка – a . Тогда порядки малости отброшенных слагаемых в разложении концентрации: вдоль эволюционной координаты – λ/L , поперек – $a^3/r^2 L$, в разложении магнитного поля: вдоль эволюционной координаты – $\lambda L/R^2$, поперек – a^2/R^2 .

Поскольку слагаемое λ/L мы считаем заведомо достаточно малым, а $\lambda L/R^2 < \lambda/L$, условие малости отброшенных членов можно записать как:

$$a \ll \min\left(R(\lambda/L)^{1/4}, r^{2/3}(\lambda L)^{1/6}\right)$$

Мы считаем, что вдоль эволюционной координаты первой степени в разложении нам заведомо достаточно, а по поперечным координатам мы всегда можем сделать разложение справедливым, взяв достаточно узкий пучок. Недостатком такого подхода является возможность превышения точности. В частности, если $L \sim r \sim R$, то слагаемые, описывающие кривизну, окажутся того же порядка, что и отброшенные слагаемые в разложении компонент магнитного поля.

Вывод эталонных уравнений

Рассмотрим введенное ранее волновое уравнение для монохроматического электрического поля $\text{rot rot } \mathbf{E} = k_0^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}$, где $k_0 = \omega/c$, а ω – частота излучения. Будем искать медленную огибающую $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y, z) \cdot \exp(ik_0 \bar{N}_\parallel z)$ в стиковом представлении для компонент поля $F_\pm = (F_x \pm iF_y)/\sqrt{2}$, $F_\parallel = F_z$.

В окрестности области поляризационного вырождения, где выполняются условия: $N_\perp \ll N_\parallel$, $|\varepsilon_+ - \bar{N}_\parallel^2| \ll 1$, $\varepsilon_\parallel \ll 1$, и при условии, что магнитное поле мало отклоняется от оси z , волновое уравнение переписется в виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{N}_\parallel^2 & 0 & \bar{N}_\parallel \hat{D}_- \\ 0 & \hat{N}_\parallel^2 & \bar{N}_\parallel \hat{D}_+ \\ \bar{N}_\parallel \hat{D}_+ & \bar{N}_\parallel \hat{D}_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_+ \\ F_- \\ F_\parallel \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\varepsilon_+ & 0 & -(\theta_x + i\theta_y)\bar{N}_\parallel^2 \\ 0 & \sqrt{2}\varepsilon_- & -(\theta_x - i\theta_y)\varepsilon_- \\ -(\theta_x - i\theta_y)\bar{N}_\parallel^2 & -(\theta_x + i\theta_y)\varepsilon_- & \sqrt{2}\varepsilon_\parallel \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_+ \\ F_- \\ F_\parallel \end{pmatrix}$$

где \hat{D}_\pm и \hat{N}_\parallel^2 – дифференциальные операторы,

$$\hat{D}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}k_0} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{N}_\parallel^2 = \bar{N}_\parallel^2 - 2i\bar{N}_\parallel \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial z},$$

а ε_\pm , ε_\parallel – элементы тензора диэлектрической проницаемости в стиковом представлении с учетом тепловых поправок первого порядка [3А, 6А]:

$$\varepsilon_\pm = 1 - \frac{X}{1 \pm Y} \left(1 + \frac{\bar{N}_\parallel^2 \beta_e^2}{(1 \pm Y)^2} \right), \quad \varepsilon_\parallel = 1 - X(1 + 3\bar{N}_\parallel^2 \beta_e^2),$$

$$X = \omega_{pe}^2 / \omega^2 = n_e / n_{cr}, \quad Y = \omega_{ce} / \omega = |\mathbf{B}| / B_{res}, \quad \beta_e^2 = T_e / m_e c^2,$$

где ω_{ce} и ω_{pe} – электронная циклотронная и ленгмюровская частоты соответственно, B_{res} – магнитное поле, соответствующее электронному циклотронному резонансу, а T_e – температура электронов на поверхности критической концентрации.

Отбрасывая F_- и подставляя разложения для θ_x, θ_y , получим систему:

$$\begin{cases} \bar{N}_\parallel [\hat{D}_- + 2^{-1/2} \bar{N}_\parallel (2\kappa_{yz}y + 2\kappa_{zz}z + i(\partial_x \theta_y x - \partial_z b \cdot y + \partial_y b \cdot z))] F_\parallel = (\varepsilon_+ - \hat{N}_\parallel^2) F_+ \\ \bar{N}_\parallel [\hat{D}_+ + 2^{-1/2} \bar{N}_\parallel (2\kappa_{yz}y + 2\kappa_{zz}z - i(\partial_x \theta_y x - \partial_z b \cdot y + \partial_y b \cdot z))] F_+ = \varepsilon_\parallel F_\parallel \end{cases} \quad (1.18)$$

Как и в статье [41], большая часть слагаемых связанных с неоднородностью направления магнитного поля компенсируется фазовой заменой:

$$F_{+,\parallel} = \tilde{F}_{+,\parallel} \cdot \exp[ik_0 \Phi_1], \quad \Phi_1 = \bar{N}_\parallel \left(2\kappa_{yz}xy + 2\kappa_{zz}xz - \partial_z b \cdot \frac{y^2}{2} + \partial_y b \cdot yz \right) \quad (1.19)$$

В новых переменных система (1.18) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \bar{N}_\parallel (\hat{D}_- + ic'x) \tilde{F}_\parallel = [\varepsilon_+ - \hat{N}_\parallel^2 - 2\bar{N}_\parallel^2 (2\kappa_{zz}x + \partial_y b \cdot y)] \tilde{F}_+ \\ \bar{N}_\parallel (\hat{D}_+ - ic'x) \tilde{F}_+ = \varepsilon_\parallel \tilde{F}_\parallel \end{cases}, \quad (1.20)$$

где $c' = 2^{-1/2} \bar{N}_\parallel (\partial_x \theta_y - 2\kappa_{yz}) \propto (\partial_x \theta_y - \partial_y \theta_x) \propto (\text{rot } \mathbf{B})_z$ с учетом соотношения $2\kappa_{yz} = \partial_y \theta_x$ (1.17).

Таким образом, слагаемые $\pm ic'x$ описывают влияние неоднородности магнитного поля, вызываемого током, текущим вдоль магнитной линии; однако в дальнейшем для краткости и преимущества со старыми работами мы будем называть это влиянием шира. Обратим внимание, что коэффициент c' строго равняется нулю в установках, где магнитное поле создается только внешними катушками и $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, например, в стеллараторах.

Здесь можно больше сказать о выражении $\varepsilon_+ - \hat{N}_\parallel^2$, которое определяет уже встречающуюся нам в разделе 1.1 величину $\varepsilon_+ - N_\parallel^2$, где N_\parallel – нормированная проекция волнового вектора на вектор магнитного поля. Здесь мы точно также, как и в разделе 1.1, стремимся явно определить величину $\varepsilon_+ - N_\parallel^2$ в волновом уравнении. Разница состоит в том, что раньше мы использовали условие аксиальной симметрии для определения изменения N_\parallel , а сейчас изменение N_\parallel выражается более универсальными фазовыми заменами типа (1.19), определяемыми заложенной в модель неоднородностью среды по аналогии с [41].

Следующим шагом преобразуем правую часть уравнений (1.20) к более удобному виду. Перепишем выражения для диагональных элементов тензора диэлектрической проницаемости с учетом выбранной нами модели среды и введем фазовую замену, компенсирующую неоднородность модуля магнитного поля вдоль своего направления:

$$\tilde{F}_{+,\parallel} = \tilde{\tilde{F}}_{+,\parallel} \cdot \exp[ik_0 \Phi_2], \quad \Phi_2 = \bar{N}_\parallel \frac{\partial_z b \cdot z^2}{4(1 + Y_0)} \quad (1.21)$$

С точностью до слагаемых второго порядка малости получим:

$$\begin{cases} \bar{N}_{\parallel}(\hat{D}_- + ic'x)\tilde{F}_{\parallel} = (N_{\parallel opt}^2 - \hat{N}_{\parallel}^2)\tilde{F}_{\parallel} - g_+ [\cos 2\alpha \cdot (x - \kappa_{yy}y^2 - \kappa_{zz}z^2 - 2\kappa_{yz}yz) + \sin 2\alpha \cdot y]\tilde{F}_{\parallel} \\ \bar{N}_{\parallel}(\hat{D}_+ - ic'x)\tilde{F}_{\parallel} = -g_{\parallel}(x - \kappa_{yy}y^2 - \kappa_{zz}z^2 - 2\kappa_{yz}yz)\tilde{F}_{\parallel} \end{cases} \quad (1.22)$$

где

$$g_+ = \sqrt{\left(\frac{g_{\parallel}}{1+Y_0} - \frac{\bar{N}_{\parallel}^2}{1+Y_0}\partial_x b + 4\bar{N}_{\parallel}^2\kappa_{zz}\right)^2 + \left(\frac{1+2Y_0}{1+Y_0}\bar{N}_{\parallel}^2\partial_y b\right)^2}, \quad (1.23)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\bar{N}_{\parallel}^2\partial_y b}{g_+} \cdot \frac{1+2Y_0}{1+Y_0}, \quad Y_0 = B_0/B_{res} \quad (1.24)$$

$$N_{\parallel opt}^2 = \frac{Y_0}{1+Y_0} \left(1 + \frac{3(1+Y_0)^2 - 1}{(1+Y_0)^3} \beta_e^2\right) \approx \frac{Y_0}{1+Y_0}. \quad (1.25)$$

Величина $N_{\parallel opt}$ здесь определяет оптимальное продольное волновое число с учетом тепловых поправок. Как уже было отмечено в работах [3А, 5А], тепловое движение частиц вносит поправку лишь в оптимальный продольный волновой вектор. Эта поправка существенна если $\beta_e^2 \sim \sqrt{\lambda/L}$, в случае если температура существенно ниже, для $N_{\parallel opt}^2$ можно использовать упрощенное выражение: $N_{\parallel opt}^2 = Y_0/(1+Y_0)$.

Забегая вперед можно сказать, что общее решение задачи О-Х трансформации будет представлено в виде суммы ряда частных решений, для которых фазовые замены (1.19) и (1.21) определяют изменение величины N_{\parallel} с точностью до константы: $N_{\parallel} = \bar{N}_{\parallel} + \partial_z(\Phi_1 + \Phi_2) + \Delta N_{\parallel}$. С учетом этого, коэффициенты g_+ и α имеют следующий физический смысл: $g_+ = |\nabla(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2)|$, а α – это половинный угол между $\nabla(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2)$ и $\nabla\varepsilon_{\parallel}$ вычисленные в точке разложения. Если говорить менее формально, то угол α характеризует взаимный наклон поверхностей отсечки $\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2 = 0$ и $\varepsilon_{\parallel} = 0$, см. например Рисунок 1.1. При этом для упрощения выражения для угла α мы использовали соотношение $\partial_z\theta_y = \partial_y b$ (1.17), которое получается из условия отсутствия переноса зарядов через магнитную поверхность. Без этого соотношения угол α зависел бы от кривизны силовой линии магнитного поля $\partial_z\theta_y$,

$$\sin 2\alpha \propto \left(\frac{\partial_y b}{1+Y_0} - 2\partial_z\theta_y\right),$$

что повторяло бы результат полученный в [41]. В ранних работах (см. например [34]) кривизна силовой линии игнорировалась полностью, что приводило к неправильному определению как величины, так и знака угла α . В теории, изложенной в предыдущих разделах, кривизна силовой

линии учитывалась при помощи глобальной перестройки геометрии задачи от цилиндрической к тороидальной.

В статье [41] аналоги фазовых замен (1.19) и (1.21) полностью устраняли из уравнений явную зависимость от продольной координаты и, таким образом, сводили трехмерную задачу к двумерной. В данном разделе после этих замен в системе (1.22) зависимость от z остается в слагаемых, описывающих кривизну магнитных поверхностей и будет исключаться переходом в криволинейную систему координат. Получается, что кривизна магнитных силовых линий и кривизна магнитных поверхностей могут рассматриваться в определенной степени независимо.

Следующий шаг – нормировка компонент волнового поля:

$$\tilde{F}_+ = \text{sign}(\bar{N}_\parallel) \frac{\tilde{A}_+}{\sqrt{g_+}}, \quad \tilde{F}_\parallel = \frac{\tilde{A}_\parallel}{\sqrt{g_\parallel}}. \quad (1.26)$$

Эта замена также вводит зависимость поляризации от знака \bar{N}_\parallel , что позволяет в дальнейшем единообразно рассматривать случаи ввода вдоль и против направления магнитного поля.

После замены система приобретает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\bar{N}_\parallel|}{\sqrt{g_+ g_\parallel}} (\hat{D}_- + ic'x) \tilde{A}_\parallel = -[(x - \kappa_{yy} y^2 - \kappa_{zz} z^2 - 2\kappa_{yz} yz) \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha] \tilde{A}_+ - \\ \hspace{25em} - [(N_{\parallel opt}^2 - \hat{N}_\parallel^2) / g_+] \tilde{A}_+ \\ \frac{|\bar{N}_\parallel|}{\sqrt{g_+ g_\parallel}} (\hat{D}_+ - ic'x) \tilde{A}_+ = -(x - \kappa_{yy} y^2 - \kappa_{zz} z^2 - 2\kappa_{yz} yz) \tilde{A}_\parallel \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Теперь все готово к переходу в криволинейную систему координат x', y', z' , где

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (x - \kappa_{yy} y^2 - \kappa_{zz} z^2 - 2\kappa_{yz} yz) \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -(x - \kappa_{yy} y^2 - \kappa_{zz} z^2 - 2\kappa_{yz} yz) \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' = z \end{array} \right. \quad (1.28)$$

То есть, сначала мы принимаем величину $(x - \kappa_{yy} y^2 - \kappa_{zz} z^2 - 2\kappa_{yz} yz)$ за новую эволюционную координату, сохраняя остальные координаты неизменными и нарушая при этом ортогональность системы координат, а затем делаем поворот на угол α вокруг оси z . Переход в новую систему координат проиллюстрирован на Рисунке 1.11.

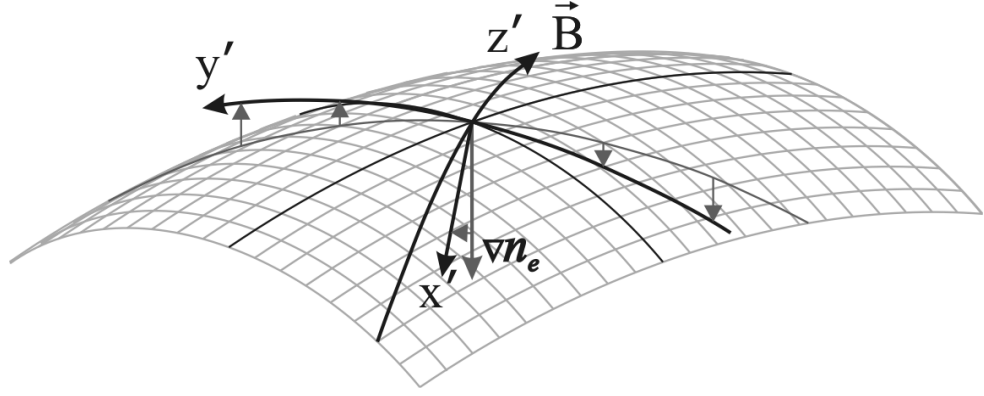


Рисунок 1.11: Переход в криволинейную систему координат.

Вводим еще одну фазовую замену, чтобы сохранить вид слагаемых $\pm ic'x$, отвечающих за шир:

$$\tilde{A}_{+,\parallel} = A_{+,\parallel} \cdot \exp\left[\pm \frac{i\alpha}{2} + ik_0\Phi_3\right], \quad (1.29)$$

$$\Phi_3 = \frac{c' \sin \alpha}{\sqrt{2}} \left((x'^2 - y'^2) \cos \alpha - 2x'y' \sin \alpha \right) \approx -\frac{c' \sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} y^2$$

При переходе к приближенному равенству мы отбросили слагаемое $\propto x'^2$, поскольку оно не влияет на эффективность трансформации, и слагаемое $\propto x'y'$, поскольку оно выходит за границы точности приближенного метода решения эталонных уравнений, который будет использован дальше.

С точностью до слагаемых второго порядка малости получим:

$$\begin{cases} -\frac{|\bar{N}_\parallel|}{\sqrt{g_+g_\parallel}} [\hat{D}'_- + ic'x'] A_\parallel = [x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + \hat{D}'_\parallel] A_+ \\ -\frac{|\bar{N}_\parallel|}{\sqrt{g_+g_\parallel}} [\hat{D}'_+ - ic'x'] A_+ = [x' \cos \alpha - y' \sin \alpha] A_\parallel \end{cases}, \quad (1.30)$$

где операторы \hat{D}'_\pm и \hat{D}'_\parallel определены как:

$$\hat{D}'_\pm = \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left(i \frac{\partial}{\partial x'} \pm \frac{\partial}{\partial y'} \right), \quad \hat{D}'_\parallel = -\frac{1}{g_+} \left(N_{\parallel opt}^2 - \bar{N}_\parallel^2 + 2i\bar{N}_\parallel \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial z'} \right)$$

Теперь, когда в системе (1.30) нет явной зависимости от z' , по этой координате можно перейти к Фурье представлению:

$$\bar{A}_{+,\parallel}(x', y', \Delta N_\parallel) = \int A_{+,\parallel}(x', y', z') \cdot \exp(-ik_0 \Delta N_\parallel z') d\Delta N_\parallel.$$

Принципиальный момент заключается в том, что Фурье образ берется при постоянных значениях именно x' и y' , а не каких-то других координат. Как уже отмечалось ранее в разделе 1.3 главная роль кривизны – это фиксация поверхностей, на которых задаются волновые поля.

Используя свойства Фурье представления и малость ΔN_{\parallel} , перепишем слагаемое \hat{D}'_{\parallel}

$$\hat{D}'_{\parallel} = (\bar{N}_{\parallel}^2 + 2\bar{N}_{\parallel}\Delta N_{\parallel} - N_{\parallel opt}^2)/g_+ \approx ((\bar{N}_{\parallel} + \Delta N_{\parallel})^2 - N_{\parallel opt}^2)/g_+.$$

Введем новые безразмерные координаты

$$x'' = \frac{x'}{L_{\nabla}} + \frac{d}{\cos \alpha}, \quad y'' = \frac{y'}{L_{\nabla}}, \quad d = \frac{1}{2g_+L_{\nabla}} ((\bar{N}_{\parallel} + \Delta N_{\parallel})^2 - N_{\parallel opt}^2),$$

где

$$L_{\nabla}^2 = \frac{|\bar{N}_{\parallel}|}{k_0 \sqrt{2g_+g_{\parallel}}}.$$

Здесь L_{∇} имеет смысл характерного масштаба области трансформации. После сдвиги по x' также возникают дополнительные слагаемые $\pm icd/\cos \alpha$, которые устраняются еще одной фазовой заменой вида $\exp(icd \cdot y/\cos \alpha)$.

Окончательно система эталонных волновых уравнений, описывающая О-Х трансформацию, принимает следующий вид:

$$\begin{cases} -\left[i \frac{\partial}{\partial x''} - \frac{\partial}{\partial y''} + icx'' \right] \bar{A}_{\parallel} = [x'' \cos \alpha + y'' \sin \alpha + d] \bar{A}_+, \\ -\left[i \frac{\partial}{\partial x''} + \frac{\partial}{\partial y''} - icx'' \right] \bar{A}_+ = [x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha - d] \bar{A}_{\parallel} \end{cases}, \quad (1.31)$$

где

$$c = c' \frac{|\bar{N}_{\parallel}|}{\sqrt{g_+g_{\parallel}}} = \bar{N}_{\parallel} |\bar{N}_{\parallel}| \frac{\partial_x \theta_y - 2\kappa_{yz}}{\sqrt{2g_+g_{\parallel}}}.$$

В итоге, после всех преобразований в уравнениях (1.31) осталось только три управляющих параметра: величины d и α , характеризующие расстояние и взаимный наклон между поверхностями отсечки, и величина c , которая определяется неоднородностью направления магнитного поля, создаваемой током, текущим вдоль магнитной линии.

Система (1.31) является обобщением эталонных уравнений из работы [41] на случай $\alpha = 0$, реализующийся при экваториальном вводе излучения. В случае $\alpha \neq 0$, величину d можно исключить из уравнений введением сдвига по координате y'' и свести систему (1.31) непосредственно к эталонным уравнениям из работы [41].

Величины коэффициентов α и c можно оценить с помощью следующих формул:

$$\sin 2\alpha = \frac{\bar{N}_{\parallel}^2 \partial_y b}{g_+} \cdot \frac{1 + 2Y_0}{1 + Y_0} \sim Y_0 \frac{L}{R} \cos \theta_0,$$

$$c = \bar{N}_{\parallel} \left| \bar{N}_{\parallel} \right| \frac{\partial_x \theta_y - 2\kappa_{yz}}{\sqrt{2g_+ g_{\parallel}}} \sim \frac{Y_0 L}{q R},$$

где θ_0 – угол между осью y и градиентом модуля магнитного поля, а остальные параметры определены в параграфе, описывающем модель среды. Поскольку $Y_0 < 1$, $L/R < 1$, $\cos \theta_0 < 1$, $1/q < 1$, а коэффициенты α и c определяются через произведение этих величин, можно считать, что $\alpha \ll 1$, $c \ll 1$.

Считая, что пучок нацелен достаточно точно, величину d можно оценить как:

$$d = \frac{1}{2g_+ L_{\nabla}} \left((\bar{N}_{\parallel} + \Delta N_{\parallel})^2 - N_{\parallel opt}^2 \right) \sim \sqrt{\frac{L}{\lambda}} \Delta N_{\parallel}$$

Видно, что она может меняться для разных продольных гармоник заданного трехмерного пучка. Трансформация будет эффективной лишь для гармоник с $d \ll 1$, однако за счет фазовой модуляции на поверхности $x' = const$ в спектре могут присутствовать гармоники и с большим ΔN_{\parallel} . При этом, поскольку основной интересующий нас параметр – это эффективность трансформации, мы можем формально рассматривать и гармоники с $\Delta N_{\parallel} \sim 1$ и $d \gg 1$. Несмотря на то, что такие гармоники выходят за пределы области применимости наших уравнений, сам факт того, что они полностью отражаются, мы описываем правильно.

В заключение параграфа приведем компоненты электрического поля, выраженные через переменные \bar{A}_+ и \bar{A}_{\parallel} :

$$E_+ = \text{sign}(\bar{N}_{\parallel}) \frac{\bar{A}_+}{\sqrt{g_+}} \exp \left[i \frac{\alpha}{2} + ik_0 \Phi \right], \quad E_{\parallel} = \frac{\bar{A}_{\parallel}}{\sqrt{g_{\parallel}}} \exp \left[-i \frac{\alpha}{2} + ik_0 \Phi \right],$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \bar{N}_{\parallel} \left(2\kappa_{yz} xy + 2\kappa_{zz} xz - \partial_z b \frac{y^2}{2} + \partial_y b \cdot yz + \frac{\partial_z b}{4(1+Y_0)} z^2 \right) - \frac{c' \sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} y^2. \quad (1.32)$$

Качественный анализ

Малость величин α и c позволяет значительно упростить анализ системы (1.31). Поскольку решение системы плавно зависит от параметров, качественную оценку эффективности трансформации можно получить, просто рассматривая предельный случай $\alpha = 0$ и $c = 0$. В этом пределе система (1.31) описывает линейное взаимодействие в широко известном плоскостойком приближении [14]. В рамках этого приближения эффективность трансформации оптимально прицеленного пучка определяется шириной фурье-спектра распределения его скалярной амплитуды определенной на поверхности $x'' = const$: пучки со

спектральной шириной много меньше $1/L_V$ проходят практически без отражения, с шириной много большей – практически полностью отражаются.

Ширина спектра может существенно увеличиваться за счет осцилляций фазы на поверхности $x'' = const$. Наша модель среды позволяет описывать квадратичные и линейные осцилляции, и, в идеальном случае, они должны быть полностью подавлены. Линейные осцилляции легко подавить правильным прицеливанием пучка, а для квадратичных нужна правильная фокусировка. Если не учитывать неоднородность направления магнитного поля, как это было сделано ранее, то для оптимальной фокусировки нужно, чтобы фазовый фронт пучка имел такую же кривизну, как и у магнитной поверхности. Неоднородность направления магнитного поля вносит дополнительный фазовый набег (1.32), причем, поскольку его знак может меняться в зависимости от знака \bar{N}_{\parallel} , он может, как увеличивать, так и уменьшать оптимальную кривизну фазового фронта. В некоторых конфигурациях с сильной неоднородностью оптимальный фазовый фронт может даже оказаться выгнутым в обратную сторону относительно кривизны магнитных поверхностей, но, к сожалению, только в одном измерении, поскольку фазовые корректоры для y и z в (1.32) имеют разный знак.

Таким образом, сложная трехмерная структура, заложенная в модель среды, проявляется в первую очередь в виде фазовых модификаторов, определяющихся кривизной магнитных поверхностей и неоднородностью модуля и направления магнитного поля. Учет этих модификаторов позволяет описывать О-Х трансформацию в среде общего вида в рамках широко известного плоскостойкого приближения с поправками, связанными с двумерной неоднородностью и широм магнитного поля.

Решение эталонных уравнений

Для решения системы (1.31) будет использован тот же приближенный подход, что и в работе [41], однако в более простом и наглядном изложении. Сначала перейдем к волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлении на большом удалении от области трансформации, при $|x''| \rightarrow \infty$. Поляризации в этом случае определяются упрощенной системой:

$$\begin{cases} -\left[i \frac{\partial}{\partial x''} + icx'' \right] \bar{A}_{\parallel} = x'' \cos \alpha \cdot \bar{A}_{+} \\ -\left[i \frac{\partial}{\partial x''} - icx'' \right] \bar{A}_{+} = x'' \cos \alpha \cdot \bar{A}_{\parallel} \end{cases} \quad (1.33)$$

Эта система имеет решение:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_+ \\ \bar{A}_- \end{pmatrix} = A^+ \begin{pmatrix} 1 \\ -p \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{2}\gamma x''^2\right) + A^- \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{2}\gamma x''^2\right),$$

где A^+ и A^- – амплитуды волн распространяющихся в положительном и отрицательном направлении соответственно, $\gamma = \sqrt{\cos^2 \alpha - c^2}$, а $p = (\gamma - ic)/\cos \alpha$.

Будем рассматривать A^+ и A^- как новые полевые переменные; перепишем систему (1.31) в виде:

$$\begin{cases} i \left[\frac{\partial}{\partial x''} + \frac{c}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''} + i\gamma x'' \right] A^+ = \left[-\frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''} + y'' \sin \alpha + d \right] A^- \\ i \left[\frac{\partial}{\partial x''} - \frac{c}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''} - i\gamma x'' \right] A^- = \left[-\frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''} - y'' \sin \alpha - d \right] A^+ \end{cases} \quad (1.34)$$

В этой системе левые части уравнений описывают распространение прямой и отраженной волн, а правые задают их связь. Видно, что шир приводит к тому, что в отсутствии взаимодействия волны распространяются под углом к оси x'' . Учтем это заменой координат: $y''_+ = y'' - c \cdot x''/\gamma$ для волны A^+ и $y''_- = y'' + c \cdot x''/\gamma$ для волны A^- . Получим систему:

$$\begin{cases} i \left[\frac{\partial}{\partial x''} + i\gamma x'' \right] A^+(x'', y''_+) = \left[-\frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''_-} + (y''_- - c \cdot x''/\gamma) \sin \alpha + d \right] A^-(x'', y''_-) \\ i \left[\frac{\partial}{\partial x''} - i\gamma x'' \right] A^-(x'', y''_-) = \left[-\frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''_+} - (y''_+ + c \cdot x''/\gamma) \sin \alpha - d \right] A^+(x'', y''_+) \end{cases} \quad (1.35)$$

Рассмотрим полученную систему отдельно для больших и малых значений эволюционной координаты x'' . При больших x'' моды не взаимодействуют, поэтому можно пренебречь правыми частями уравнений (1.35) и решение представляет собой пучки, распространяющиеся под углом к оси x'' . При малых x'' можно пренебречь разницей между y''_+ и y''_- и слагаемыми $\pm c \sin \alpha \cdot x''/\gamma$ и упростить систему (1.35) к виду:

$$\begin{cases} i \left[\frac{\partial}{\partial x''} + i\gamma x'' \right] A^+(x'', y'') = \left[-\frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''} + y'' \sin \alpha + d \right] A^-(x'', y'') \\ i \left[\frac{\partial}{\partial x''} - i\gamma x'' \right] A^-(x'', y'') = \left[-\frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y''} - y'' \sin \alpha - d \right] A^+(x'', y'') \end{cases} \quad (1.36)$$

Система (1.36) описывает взаимодействие мод и решается методом разделения переменных. Решение в виде ряда выглядит так [34]:

$$A^+(x'', y'') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(y'' + d/\sin \alpha) \tilde{D}_{i\nu_n}(x'')$$

$$A^-(x'', y'') = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} +A_{n+1}h_n(y'' + d/\sin \alpha), & \alpha > 0 \\ -A_n h_{n+1}(y'' + d/\sin \alpha), & \alpha < 0 \end{cases} \sqrt{i\nu_n^+} \tilde{D}_{i\nu_n^+-1}(x'')$$

Здесь A_n – произвольные постоянные,

$$h_n(y'') = \frac{\sqrt[4]{\gamma \tan |\alpha|}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{2^n n!}} e^{-\gamma \tan |\alpha| y''^2 / 2} H_n(\sqrt{\gamma \tan |\alpha|} \cdot y''),$$

$$\tilde{D}_{i\nu}(x'') = D_{i\nu}(\sqrt{2\gamma} \cdot e^{i\pi/4} x''),$$

H_n – полином Эрмита, $D_{i\nu}$ – функция параболического цилиндра с мнимым индексом, определяемым следующими выражениями:

$$\nu_n = \begin{cases} n \delta \tan \alpha, & \alpha > 0 \\ (n+1)\delta \tan |\alpha|, & \alpha < 0 \end{cases}, \quad \nu_n^+ = (n+1)\delta \tan |\alpha|, \quad \delta = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - c^2}$$

Теперь модифицируем полученное решение таким образом, чтобы при малых x'' оно сохранило свой вид, а при больших x'' оно переходило в соответствующее решение системы (1.35). Для этого достаточно сделать замены $y'' \rightarrow y''_+ = y'' - c \cdot x''/\gamma$ для падающей волны A^+ и $y'' \rightarrow y''_- = y'' + c \cdot x''/\gamma$ для отраженной волны A^- .

$$A^+(x'', y'') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(y'' - c \cdot x''/\gamma + d/\sin \alpha) \tilde{D}_{i\nu_n}(x''),$$

$$A^-(x'', y'') = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} +A_{n+1}h_n(y'' + c \cdot x''/\gamma + d/\sin \alpha), & \alpha > 0 \\ -A_n h_{n+1}(y'' + c \cdot x''/\gamma + d/\sin \alpha), & \alpha < 0 \end{cases} \sqrt{i\nu_n^+} \tilde{D}_{i\nu_n^+-1}(x'').$$
(1.37)

Полученное таким образом приближенное решение оказывается справедливым в нужной нам области параметров $\alpha \ll 1$, $c \ll 1$, поскольку в предельных случаях $\alpha = 0$ и $c = 0$ систему (1.35) можно решить методом разделения переменных без упрощений, и решение (1.37) становится в этих случаях точным. Здесь мы «честно» описываем и двумерность, и шир, а ошибаемся только в тонких аспектах сочетания этих эффектов.

Ниже будет показано, что для наиболее интересных с практической стороны пучков с коэффициентом трансформации близким к единице ошибка оказывается $\sim \alpha^3 c^4$, что заведомо достаточно мало для любых приложений.

Вычисление эффективности трансформации.

Коэффициент трансформации для одной продольной гармоники можно определить как отношение падающего и прошедшего потоков мощности:

$$T(\Delta N_{\parallel}) = \frac{\int |A^+(x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy''}{\int |A^+(-x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy''}$$
(1.38)

Здесь $A^+(x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})$ определяет распределение поля в падающем пучке вдали от области

трансформации $x_0'' \gg 1$, а $A^+(x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})$ – распределение поля в прошедшем пучке. Следуя логике работы [41], амплитуду прошедшей волны можно определить через функцию Грина:

$$A^+(x_0'', y_1'') = \int G(y_1'' + c\gamma^{-1} \cdot x_0'' + d/\sin \alpha, y_2'' - c\gamma^{-1} \cdot x_0'' + d/\sin \alpha) A^+(-x_0'', y_2'') dy_2'', \quad (1.39)$$

где

$$G(y_1'', y_2'') = \sqrt{\frac{\sin \alpha (1 + \tanh(\tilde{\alpha}))}{2\pi\sqrt{\delta} \tanh(\tilde{\alpha})}} \exp\left[-\frac{(y_1''^2 + y_2''^2) \cosh(\tilde{\alpha}) - 2y_1'' y_2''}{2\sqrt{\delta} \sinh(\tilde{\alpha})/\sin \alpha}\right], \quad \tilde{\alpha} = \pi\delta \tan \alpha.$$

Если подставить (1.39) в (1.38) и взять интеграл по dy'' , то можно получить явное выражение для коэффициента трансформации гармоник в виде двойного интеграла от нормированной амплитуды поля в падающем пучке:

$$T(\Delta N_{\parallel}) = \int \tilde{G}(y_1'', y_2'') A(y_1'') A^*(y_2'') dy_1'' dy_2'', \quad (1.40)$$

где

$$A(y'') = \frac{A^+(-x_0'', y'' + c\gamma^{-1} x_0'' - d/\sin \alpha, \Delta N_{\parallel})}{\sqrt{\int |A^+(-x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy''}}, \quad (1.41)$$

$$\tilde{G}(y_1'', y_2'') = \int G(y_1'', y'') G(y_2'', y'') dy''.$$

Новая функция Грина может быть вычислена явно:

$$\tilde{G}(y_1'', y_2'') = \sqrt{\frac{\sin \alpha (1 + \tanh(\tilde{\alpha}))^2}{4\pi\sqrt{\delta} \tanh(\tilde{\alpha})}} \exp\left[-\frac{(y_1''^2 + y_2''^2) \cosh(2\tilde{\alpha}) - 2y_1'' y_2''}{2\sqrt{\delta} \sinh(2\tilde{\alpha})/\sin \alpha}\right].$$

В практически важном случае гауссового пучка коэффициент трансформации можно записать явно. Если форма пучка задана выражением:

$$A(y'') \propto \exp\left(-\frac{(y'' - \bar{y}'')^2 L_{\nabla}^2}{2a_y^2} - ik_0 K_y (y'' - \bar{y}'')^2 L_{\nabla}^2 + ik_0 N_{\perp} L_{\nabla} y''\right), \quad (1.42)$$

то выражение для коэффициента трансформации будет

$$T = \frac{\exp(\tilde{\alpha} - |\tilde{\alpha}| - \Delta)}{\sqrt{1 + \frac{\tanh|\tilde{\alpha}|}{(1 + \tanh|\tilde{\alpha}|)^2} \left[\frac{(a_y^2 - a_0^2)^2}{a_y^2 a_0^2} + 4k_0^2 K_y^2 a_0^2 a_y^2 \right]}}, \quad (1.43)$$

где

$$\Delta = \frac{a_0^2 (y_0^2 + a_y^4 k_0^2 (N_{\perp} + 2K_y y_0)^2) + a_y^2 (a_0^4 k_0^2 N_{\perp}^2 + y_0^2) \coth|\tilde{\alpha}|}{a_0^2 a_y^2 (1 + \coth^2|\beta|) + (a_y^4 + a_0^4 (1 + 4a_y^4 k_0^2 K_y^2)) \coth|\tilde{\alpha}|},$$

$$y_0 = (\bar{y}'' - c\gamma^{-1} \cdot x_0'' + d/\sin \alpha) L_{\nabla}, \quad a_0 = L_{\nabla} / \sqrt{\gamma \tan|\alpha|}.$$

Этот ответ переходит к известному выражению в одномерном приближении при $\alpha \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 0$:

$$T_{\parallel} = \frac{\exp(-\Delta_{\parallel})}{\sqrt{1 + \pi L_{\nabla}^2 \left[\frac{1}{a_y^2} + 4a_y^2 k_0^2 K_y^2 \right]}}, \quad \Delta_{\parallel} = \pi d^2 + \frac{\pi L_{\nabla}^2 k_0^2 N_{\perp}^2}{1 + \pi L_{\nabla}^2 \left[\frac{1}{a_y^2} + 4a_y^2 k_0^2 K_y^2 \right]} \quad (1.44)$$

Переход к случаю локализованного вдоль оси z пучка осуществляется при помощи интегрирования по всем продольным гармоникам:

$$T_{3D} = \frac{\int |A^+(x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy'' d\Delta N_{\parallel}}{\int |A^+(-x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy'' d\Delta N_{\parallel}} = \int T(\Delta N_{\parallel}) P_0(\Delta N_{\parallel}) d\Delta N_{\parallel}, \quad (1.45)$$

где $P_0(\Delta N_{\parallel})$ – нормированная спектральная мощность:

$$P_0(\Delta N_{\parallel}) = \frac{\int |A^+(-x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy''}{\int |A^+(-x_0'', y'', \Delta N_{\parallel})|^2 dy'' d\Delta N_{\parallel}}.$$

В заключение параграфа приведем оценку точности выражения для эффективности трансформации (1.40). Система (1.31) имеет точное частное решение:

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\psi} \end{pmatrix} \cdot A \exp \left[-i \left(\frac{\kappa x^2}{2} - \frac{c^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2\kappa} y^2 - c \sin^2 \alpha \cdot xy \right) - \kappa \tan \alpha \frac{(y - c \cos^2 \alpha \cdot x/\kappa)^2}{2} \right]$$

где

$$e^{i\psi} = -\frac{\kappa}{\cos \alpha} + i c e^{-i\alpha} + \frac{i c^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{\kappa}, \quad \kappa^2 = \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2c^2 \cos 2\alpha + c^4} \right)$$

Это решение описывает идеальный пучок, проходящий через область трансформации без отражения. Пренебрегая отличиями в поляризации, подставим скалярное распределение поля в выражение для коэффициента трансформации (1.43), построенного на основе решения (1.37). Раскладывая по малым параметрам α и c , получим:

$$T \approx 1 - \frac{\pi}{2} \alpha^3 c^4 - \pi \alpha_0^2 \alpha^4 c^2$$

Соответственно, точность решения (1.37) определяется отличием полученного результата от единицы.

1.6 Заключение к главе 1

В данной главе рассмотрена задача О-Х трансформации для квазиоптических пучков с учетом кривизны магнитных поверхностей. Было обнаружено, что наиболее сильный эффект связан появлением дополнительной фазовой модуляции поперек пучка из-за несовпадения поверхности фазового фронта медленной огибающей волнового пучка и оптимальной

поверхности, которая в установках с большим аспектным отношением с высокой точностью совпадает с поверхностью критической концентрации. Эта модуляция эффективно уширяет Фурье спектр пучка, что приводит к значительному снижению коэффициента трансформации даже, если радиусы главных кривизн магнитной поверхности много больше ширины пучка. Это снижение может быть очень существенно для типичных пучков, используемых в термоядерных установках, как это было наглядно продемонстрировано на примере расчета коэффициента трансформации для пучков, используемых на токамаке FTU.

Было получено, что эффекты кривизны фазового фронта делают О-Х-В нагрев на FTU практически невозможным, снижая коэффициент О-Х трансформации до уровня 10%. Таким образом, эффекты кривизны фазового фронта следует учитывать при интерпретации и планировании экспериментов по О-Х-В нагреву в современном термоядерном эксперименте.

Задача О-Х трансформации была полностью решена для среды общего вида, способной адекватно описывать магнитные конфигурации сферических токамаков и оптимизированных стеллараторов. Было показано, что при помощи фазовых замен, определяющихся кривизной магнитных поверхностей и неоднородностью магнитного поля можно свести общую задачу к уже рассмотренной в [41] задаче с плоскими пересекающимися поверхностями отсечки и широм. Фазовые замены, в свою очередь, определяют оптимальную форму для поверхности фазового фронта медленной огибающей волнового пучка, которая в общем случае может существенно отличаться от поверхности критической концентрации. Показано также, что форма оптимальной поверхности может существенно зависеть от направления ввода излучения вдоль или против магнитного поля, что следует учитывать при оптимизации нагрева и интерпретации экспериментальных данных.

Также следует отметить довольно простой и красивый эффект связанный с перестройкой структуры области О-Х трансформации при переходе от цилиндрической геометрии к тороидальной. Он связан с тем, что в тороидальной геометрии проекция волнового вектора на магнитное поле начинает зависеть от расстояния до центральной оси токамака. Наиболее сильно этот эффект влияет на асимметрию трансформации относительно ввода излучения сверху и снизу от экваториальной плоскости, в частности, он существенно усиливает её.

Подход, описанный в разделе 1.4 может быть усовершенствован, если вместо многолучевого кода использовать более надежный полноценный квазиоптический код [65, 75, 76] и численный механизм сшивки решений по многим точкам.

Глава 2. Влияние флуктуаций на распространение и взаимодействие волновых пучков в магнитоактивной плазме

Обратное брэгговское рассеяние электромагнитных волн, распространяющихся в турбулентной плазме – один из основных фундаментальных процессов, определяющих особенности спектров отражения волн. В термоядерной плазме исследование обратного брэгговского рассеяния обычно связывают с интерпретацией результатов доплеровской рефлектометрии в тороидальных магнитных ловушках [77-80]. Это объясняется тем, что вблизи отсечки из-за замедления волн рассеяние назад усиливается, при этом условие брэгговского резонанса $k_{\parallel} = 2k_w$ (где k_{\parallel} – волновой вектор флуктуаций среды, а k_w – волновой вектор зондирующей электромагнитной волны) выполняется для меньших k_{\parallel} , что, как правило, соответствует большим амplitудам флуктуаций [79, 80]. Большая часть теоретических исследований обратного брэгговского рассеяния проводилась для практически важного в задачах диагностики и нагрева магнитоактивной плазмы случая поперечного по отношению к внешнему магнитному полю распространения электромагнитной волны. Характерная особенность этого случая заключается в том, что обе нормальные волны, обыкновенная (O) и необыкновенная (X), распространяются и рассеиваются независимо [79, 81].

Однако результаты этих исследований, предсказывающих сильное обратное брэгговское рассеяние в окрестности области отсечки излучения, в некоторых работах [80, 82] переносятся на описание взаимодействия нормальных волн, запущенных под углом к внешнему магнитному полю в неоднородной плазме в условиях поляризационного вырождения вблизи поверхности критической концентрации, когда реализуется процесс линейной трансформации O и X волн. Эффект усиления брэгговского рассеяния используется для интерпретации малой по сравнению с теоретическими предсказаниями эффективности O-X трансформации, систематически наблюдаемой в экспериментах по нагреву сверхкритической плазмы в стеллараторах и токамаках [11, 15, 83]. С другой стороны, в работе [44] для достаточно широкого класса флуктуаций плотности тороидальной плазмы было показано, что гармонические флуктуации, волновой вектор которых параллелен градиенту «регулярного» профиля плотности, приводят в среднем к увеличению коэффициента линейной трансформации. То есть в этой постановке рассеяние назад не происходит, несмотря на наличие точки брэгговского резонанса в области фазового замедления волны. Поскольку, как уже отмечалось, обратное брэгговское рассеяние и линейное взаимодействие волн в области поляризационного вырождения – базовые фундаментальные процессы, сопровождающие распространение электромагнитных волн в анизотропных

неоднородных средах, то представляется уместным подробно исследовать особенности одновременного протекания этих процессов.

В первой части данной главы, следуя логике статьи [7A], для модельной стационарной среды анализируются отличия брэгговского рассеяния назад в окрестности поверхности отсечки в плавнонеоднородной магнитоактивной плазме для двух случаев: (1) нормальные волны распространяются независимо друг от друга и (2) нормальные волны испытывают сильную взаимную трансформацию в результате поляризационного вырождения. Делается вывод, что брэгговское рассеяние не может существенно влиять на эффективность О-Х трансформации в области поляризационного вырождения. Во второй части главы дается общий обзор влияния флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х туннелирования в тороидальной геометрии, и детально рассматривается влияние случайной модуляции на трансформации квазиоптического пучка.

2.1 Брэгговское рассеяние электромагнитных волн в окрестности поверхности отсечки в отсутствии поляризационного вырождения

Рассмотрим плазму, помещенную во внешнее однородное магнитное поле, направленное вдоль оси z . Плотность плазмы меняется в направлении x , ортогональном внешнему магнитному полю. Из вакуума на плазму ортогонально внешнему магнитному полю падает электромагнитная волна. При этом направление распространения волны лежит в плоскости x - y и необязательно совпадает с направлением градиента плотности плазмы. Подобная задача подробно рассматривалась в литературе (см., например, [79, 80, 81]), поэтому здесь мы ограничимся кратким анализом.

Векторные волновые уравнения на компоненты электрического поля в этом случае расщепляются на уравнения для нормальных волн. Уравнение для продольной по отношению к внешнему магнитному полю компоненты E_z (обыкновенная волна) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 N_o^2 \right) E_z = 0, \quad (2.1)$$

где $N_o^2(x) = 1 - n_e(x)/n_{cr}$ – квадрат показателя преломления обыкновенной волны, n_e – концентрация плазмы, n_{cr} – критическое значение концентрации для данной частоты. В плоскостном приближении, когда концентрация плазмы зависит только от координаты x , мы можем сделать замену $\partial/\partial y \rightarrow ik_y$. Поверхность отсечки определяется при этом равенством

$k_0^2 N_0^2(x) - k_y^2 = 0$. В окрестности данной поверхности обыкновенная волна эффективно отражается назад.

Процесс обратного брэгговского рассеяния на флуктуациях проще всего анализировать в том случае, когда в отсутствие флуктуаций концентрация плазмы постоянна, т.е. $n_e(x) = n_0 + \delta n(x)$, где $\delta n(x)$ описывает возмущения плотности. Также будем считать, что флуктуации локализованы, это позволяет описывать процесс рассеяния в терминах амплитуд встречных (имеющих определенное направление распространения) волн A_{\pm} для невозмущенной плазмы. Делая замену переменных

$$E_z = A_+ + A_-, \quad \frac{dE_z}{dx} = ik_x(A_+ - A_-), \quad (2.2)$$

где $k_x = \sqrt{(1 - n_0/n_{cr})k_0^2 - k_y^2}$, мы из уравнения (2.1) получаем следующую систему уравнений на амплитуды встречных волн

$$\begin{cases} \frac{dA_+}{dx} = ik_x A_+ + \frac{ik_0^2}{2k_x} \frac{\delta n(x)}{n_{cr}} (A_+ + A_-) \\ \frac{dA_-}{dx} = -ik_x A_- - \frac{ik_0^2}{2k_x} \frac{\delta n(x)}{n_{cr}} (A_+ + A_-) \end{cases}. \quad (2.3)$$

Здесь A_+ определяет амплитуду обыкновенной волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси x , а A_- – амплитуду волны, распространяющейся в отрицательном направлении вдоль оси x .

Видно, что член, описывающий рассеяние волны A_+ во встречную волну A_- , пропорционален $1/k_x$. Коэффициент связи между волнами неограниченно возрастает при $k_x \rightarrow 0$ или, что тоже самое, при стремлении невозмущенной плотности n_0 к значению $n_{cr}(1 - k_y^2/k_0^2)$. Это увеличение, очевидно, приводит к увеличению эффективности брэгговского рассеяния в окрестности поверхности отсечки. При этом эффективность рассеяния определяется амплитудой фурье-спектра флуктуаций с волновым вектором, отвечающим условию брэгговского резонанса:

$$k_{\parallel} = 2k_x. \quad (2.4)$$

Если учесть, что профиль концентрации плазмы в отсутствие флуктуаций плавно меняется по линейному закону с характерным масштабом L , много большим вакуумной длины волны ($k_0 L \gg 1$), то формальная бесконечность в коэффициенте связи встречных волн заменяется на $(k_0 L)^{2/3} \delta n / 2n_{cr}$. В данном случае, отвечающем задаче рефлектометрии плазмы,

влияние флуктуаций сводится к смещению точки отражения и, следовательно, скачку фазы отраженного сигнала [80].

Совершенно аналогично может быть рассмотрена задача распространения необыкновенной волны, единственным отличием в которой будет замена показателя преломления обыкновенной волны на показатель преломления необыкновенной волны.

Отметим ещё раз важную особенность рассеяния при распространении перпендикулярно внешнему магнитному полю. Несмотря на то, что условие брэгговского резонанса может быть формально выполнено и для рассеяния обыкновенной волны в необыкновенную,

$$k_{\parallel} = k_o \pm k_x \quad (2.5)$$

этот процесс не происходит, поскольку уравнения на амплитуды двух нормальных волн полностью расщепляются.

При распространении под произвольным углом к магнитному полю, обыкновенная и необыкновенная волны в неоднородной плазме перестают распространяться независимо, но с точки зрения приведенного выше рассмотрения это лишь добавляет возможность брэгговского рассеяния с изменением поляризации волны на брэгговском резонансе $k_{\parallel} = k_o - k_x$. Такое рассеяние обычно бывает менее эффективным, чем рассеяние назад без изменения поляризации [84].

2.2 Ослабление обратного брэгговского рассеяния на флуктуациях плотности в окрестности поверхности отсечки в условиях поляризационного вырождения

При распространении электромагнитных волн в плавно неоднородной плазме под особым углом к внешнему магнитному полю в окрестности поверхности отсечки (для одной из нормальных волн) формируется область поляризационного вырождения [85]. В этой области, определяемой условиями $n_e \approx n_{cr}$ и $k_z \approx k_z^{opt}$, даже в среде без флуктуаций возможна эффективная взаимная трансформация обыкновенной и необыкновенной волн [14, 27]. Этот эффект был впервые обнаружен в ионосферных наблюдениях [66] и, как уже отмечалось, нашел свое применение в задачах нагрева плотной магнитоактивной плазмы миллиметровым излучением в лабораторных системах магнитного удержания [9, 11].

Отметим, что в области поляризационного вырождения дисперсионные свойства обоих нормальных волн, распространяющихся в одном направлении, становятся близки. С другой стороны, в этой области поляризация нормальных волн начинает очень сильно зависеть от направления их распространения [28, 85]. Это существенно меняет характер распространения волн в окрестности поверхности отсечки, в том числе, и в присутствии флуктуаций среды.

Приближенные уравнения для поля в окрестности поляризационного вырождения уже подробно рассматривались в первой главе. Поскольку здесь нас меньше волнуют сложные геометрические эффекты мы можем считать магнитное поле постоянным, а концентрацию электронов меняющейся только по одной координате. В этом случае продольное волновое число $N_{\parallel} = k_z/k_0$ будет сохраняться и система (1.18) переписется в виде [34, 85]

$$\begin{cases} N_{\parallel} (i\partial/\partial x - \partial/\partial y) F_{\parallel} = \sqrt{2}k_0 (\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2) F_+ \\ N_{\parallel} (i\partial/\partial x + \partial/\partial y) F_+ = \sqrt{2}k_0 \varepsilon_{\parallel} F_{\parallel} \end{cases} \quad (2.6)$$

Здесь $F_{\pm} = 2^{-1/2} (E_x \pm iE_y) \exp(-ik_0 N_{\parallel} z + i\omega t)$ и $F_{\parallel} = E_z \exp(-ik_0 N_{\parallel} z + i\omega t)$ – компоненты комплексной амплитуды электрического поля медленной огибающей в стиковом представлении (для определенности мы считаем, что $N_{\parallel} > 0$), а $\varepsilon_{\pm, \parallel}$ – соответствующие компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_+ = 1 - \frac{X}{1+Y}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - X, \quad (2.7)$$

$$X = n_e/n_{cr}, \quad Y = B/B_{res},$$

где n_e и n_{cr} соответственно локальная и критическая концентрации плазмы, а B и B_{res} – значения модуля магнитного поля в плазме и при циклотронном резонансе для данной частоты.

Условия применимости этих уравнений, изначально полученных для случая плавнонеоднородной среды с $k_0 L \gg 1$, для описания флуктуирующей плазмы обсуждались в [44]. В этой работе было показано, что при наличии флуктуаций, характеризуемых волновым числом k_{\parallel} , условие применимости уравнений (2.6) модифицируется к виду

$$\frac{k_0 L}{1 + k_{\parallel} L \delta X} \gg 1, \quad (2.8)$$

где $\delta X = \delta n_e/n_{cr}$ – нормированная амплитуда флуктуаций. Таким образом, приведенная система укороченных уравнений позволяет описывать коротковолновые флуктуации при условии, что их амплитуда ограничена.

Поляризационное вырождение возникает в точке, в которой правые части уравнений (2.6) одновременно обращаются в ноль, то есть $\varepsilon_+ = N_{\parallel}^2$ и $\varepsilon_{\parallel} = 0$. Эти условия определяют оптимальный угол распространения по отношению к магнитному полю, $N_{\parallel opt} = (1 + 1/Y)^{-1/2}$ и плотность плазмы $n_e = n_{cr}$. Запишем изменение концентрации электронов, считая, что ее отклонение от критического значения мало ($|n_e - n_{cr}| \ll n_{cr}$), как сумму регулярной линейной и флуктуирующей частей:

$$n_e(x)/n_{cr} = X = 1 + x/L + \delta X(x). \quad (2.9)$$

Тогда, считая, что излучение распространяется под оптимальным углом к магнитному полю (случай неоптимальных углов может быть рассмотрен аналогично [44]), мы сможем переписать выражения для компонент диэлектрического тензора в виде:

$$\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2 = -g_+(x + L\delta X(x)), \quad \varepsilon_{\parallel} = -g_{\parallel}(x + L\delta X(x)), \quad (2.10)$$

где $g_{+,\parallel} = -(\partial\varepsilon_{+,\parallel}/\partial X)/L$. Перейдем к новым амплитудам волн A^{\pm} ,

$$F_+ = (A^+ + A^-)/\sqrt{g_+}, \quad F_{\parallel} = (A^- - A^+)/\sqrt{g_{\parallel}}, \quad (2.11)$$

Эти амплитуды отвечают волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлениях по отношению к оси x в ВКБ области уравнений (2.6) [34, 44]. Например, поле волны, убегаящей в положительном направлении, отвечает $A^- = 0$ и ненулевой амплитуде A^+ . В результате уравнения (2.6) преобразуются к виду

$$\begin{cases} (iL_{\nabla}\partial/\partial x - x/L_{\nabla} - \delta(x))A^+ = ik_y L_{\nabla} A^- \\ (iL_{\nabla}\partial/\partial x + x/L_{\nabla} + \delta(x))A^- = ik_y L_{\nabla} A^+ \end{cases}, \quad (2.12)$$

где характерный пространственный масштаб области трансформации L_{∇} и случайная функция $\delta(x)$, отвечающая за влияние флуктуаций на процесс трансформации, определяются следующими соотношениями

$$\delta = \frac{L}{L_{\nabla}} \delta X(x), \quad L_{\nabla}^2 = \frac{N_{\parallel}}{k_0 \sqrt{2g_+ g_{\parallel}}}. \quad (2.13)$$

Поскольку мы по-прежнему остаемся в рамках плоскостоего приближения, в уравнениях (2.12) сделана замена $\partial/\partial y \rightarrow ik_y$.

Отметим, что для случая плавнонеоднородной среды характерный масштаб области трансформации занимает промежуточное положение между длиной волны и масштабом неоднородности среды $1/k_0 \ll L_{\nabla} \sim \sqrt{L/k_0} \ll L$. Из второго из этих неравенств следует, что безразмерная величина δ , характеризующая вклад флуктуаций, много больше относительной амплитуды флуктуаций: $\delta \gg \delta n_e/n_{cr}$. Из чего можно сделать «поспешный» вывод об усилении влияния флуктуаций в области поляризационного вырождения, аналогичному усилению влияния флуктуаций в окрестности поверхности отсечки. Как мы покажем ниже, строгий анализ системы (2.12) приводит к противоположным выводам.

Будем решать систему уравнений (2.12) с естественными граничными условиями: волна, распространяющаяся в положительном направлении, совпадает с падающей волной на левой границе области трансформации, $A^+ = A_0$ при $x' \rightarrow -\infty$, а волна, распространяющаяся в

отрицательном направлении, отсутствует на правой границе, $A^- \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow +\infty$ (нет отраженной волны).

Решение системы (2.12) удобнее всего характеризовать коэффициентами отражения и прохождения по интенсивности

$$R = \frac{|\sum A^-(-\infty)|^2}{|\sum A^+(-\infty)|^2}, \quad T = \frac{|\sum A^+(+\infty)|^2}{|\sum A^+(-\infty)|^2} \quad (2.14)$$

Учет статистического характера распределений $\delta(x)$ при этом соответствует усреднению коэффициентов отражения и прохождения по случайным реализациям $\delta_i(x)$, в дальнейшем для средних мы будем использовать обозначения $\langle R \rangle$ и $\langle T \rangle$. Это отвечает следующей физической картине флуктуаций – распределение плотности меняется от опыта к опыту или флуктуирует с характерными временами, значительно превышающими период электромагнитного поля. В этом случае наше определение усреднения (по многим опытам) отвечает усреднению по времени. В работе [44], где рассматривались гармонические флуктуации, нашему усреднению отвечало усреднение по фазе флуктуаций.

В случае оптимальной трансформации ($k_z = k^{\text{opt}}$ и $k_y = 0$) встречные волны не взаимодействуют друг с другом. Действительно, в нашей модели условия оптимальной трансформации вовсе не зависят от деталей распределения плотности плазмы, поскольку определяются значением магнитного поля в точке, где концентрация равна критической. Таким образом, трансформация в однородном магнитном поле должна оставаться идеальной независимо от возмущения профиля плотности.

Чтобы формально убедиться в этом, будем искать решение в виде $A^\pm = C^\pm \exp[\mp i\Phi]$. Нетрудно убедиться, что амплитуды волн не меняются, при этом фаза подчиняется уравнению

$$L_\nabla \Phi' = (x/L_\nabla + \delta). \quad (2.15)$$

Здесь и далее в этом разделе штрих обозначает дифференцирование по координате x . Таким образом, независимо от конкретной зависимости флуктуаций плотности от координаты, коэффициент прохождения будет равен единице, а коэффициент отражения нулю

$$\langle T \rangle = T = 1, \quad \langle R \rangle = R = 0. \quad (2.16)$$

Заметим, что при этом в области линейного взаимодействия направление градиента фазы, обычно связываемое с направлением распространения волны, может случайным образом меняться.

Этот математический результат можно пояснить следующими физическими соображениями. Как уже было отмечено, поляризационное вырождение снимается в области трансформации неоднородностью среды. Вследствие этого волны, распространяющиеся в

разных направлениях, имеют существенно разную поляризацию, и распространяются независимо. Брэгговское рассеяние при этом оказывается подавлено точно так же, как при поперечном распространении подавлено рассеяние обыкновенной волны в необыкновенную.

В случае неидеальной трансформации при $k_y \neq 0$ в области $|x| < k_y L_{\nabla}^2$ возникает связь между волнами, бегущими в противоположные стороны, что приводит к частичному отражению падающей волны. Для плавнонеоднородной среды без флуктуаций ($\delta = 0$) коэффициенты прохождения и отражения имеют вид [14, 27]

$$T_0 = \exp(-\pi k_y^2 L_{\nabla}^2), \quad R_0 = 1 - T_0. \quad (2.17)$$

Флуктуации влияют на это соотношение очень тонким образом. Для качественной оценки этого влияния заметим, что флуктуации меняют локальное значение градиента плотности плазмы, $n'_e = 1/L + \delta n' / n_{cr}$, который в свою очередь определяет масштаб области трансформации $\tilde{L}_{\nabla} \propto 1/\sqrt{n'_e}$. Подставим флуктуирующее значение

$$\tilde{L}_{\nabla}^2 = L_{\nabla}^2 \left(1 - L_n \delta n' / n_{cr} + (L_n \delta n' / n_{cr})^2 + \dots \right) = L_{\nabla}^2 \left(1 - L_{\nabla} \delta' + L_{\nabla}^2 \delta'^2 + \dots \right) \quad (2.18)$$

в выражения (2.17), разложим для простоты выкладок экспоненту до первого порядка по $k_y L_{\nabla} \ll 1$ и проведем усреднение по различным реализациям флуктуаций. С точностью до квадратичных по амплитуде флуктуаций членов получим

$$\langle R \rangle = -\pi k_y^2 L_{\nabla}^2 \left(1 - L_{\nabla} \langle \delta' \rangle + L_{\nabla}^2 \langle \delta'^2 \rangle + \dots \right). \quad (2.19)$$

Далее напрашивается вывод, что раз $\langle \delta' \rangle = 0$, $\langle \delta'^2 \rangle = \langle \delta^2 \rangle / \lambda_{\text{сог}}^2$, то смещение среднего коэффициента отражения из-за флуктуаций есть $\langle R \rangle - R_0 \approx -\pi k_y^2 L_{\nabla}^4 \langle \delta^2 \rangle / \lambda_{\text{сог}}^2$, где $\lambda_{\text{сог}}$ – характерный пространственный масштаб флуктуаций. Однако это совершенно неверно! Здесь надо иметь в виду, что усреднение в (2.18) проводится не по значениям производных в какой-то одной точке, а по значениям производных в точках, определяемых условием $n_e(x_0) = n_{cr}$ или в наших обозначениях

$$x_0 + L_{\nabla} \delta(x_0) = 0. \quad (2.20)$$

Точка x_0 сама является флуктуирующей величиной относительно некоторой фиксированной точки $x = 0$. Учитывая это обстоятельство, для малых и достаточно плавных флуктуаций можно записать

$$\begin{aligned} x_0 &\approx -L_{\nabla} \delta(0), \\ \delta'(x_0) &\approx \delta'(0) + \delta''(0)x_0 \approx \delta'(0) - L_{\nabla} \delta(0) \delta''(0), \\ \delta'(x_0) - L_{\nabla} (\delta'(x_0))^2 &\approx \delta'(0) - L_{\nabla} \delta(0) \delta''(0) - L_{\nabla} (\delta'(0))^2. \end{aligned}$$

Последнее выражение есть полная производная от функции $\delta - L_{\nabla} \delta \delta'$ при $x = 0$. Но именно это выражение стоит под усреднением в (2.19), поэтому на классе ограниченных функций такое

усреднение всегда равно нулю. Другими словами, поправка к коэффициенту отражения, связанная с влиянием флуктуаций, может быть отлична от нуля только в следующем порядке по отношению к уже малой величине $\pi k_y^2 L_\nabla^2 < \delta n^2 > / n_{cr}^2 \lambda_{cor}^2$ [7A] (здесь мы вернулись к размерным флуктуациям).

Более последовательный анализ решений уравнений (2.12) можно провести в борновском приближении. Использование борновского приближения оправдано при $k_y^2 L_\nabla^2 < 1/\pi$, что эквивалентно случаю эффективной трансформации. В первом порядке борновского приближения ограниченные флуктуации произвольного вида не влияют на коэффициенты отражения и прохождения (трансформации). Действительно, в борновском приближении коэффициент отражения может быть вычислен по следующей формуле [86]:

$$R = k_y^2 L_\nabla^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\Phi} dx / L_\nabla \right|^2 = \pi k_y^2 \left| \sum e^{i\Phi} |\Phi''|^{-1/2} \right|^2, \quad (2.21)$$

где фаза Φ определяется уравнением (2.15), а сумма берется по всем стационарным точкам фазы, в которых $\Phi' = 0$. Усредним соотношение (2.21) по случайным функциям $\delta(x)$, воспользовавшись, что набег фазы между разными стационарными точками фазы будет случайной величиной

$$\langle R \rangle = \pi k_y^2 \langle \sum |\Phi''|^{-1} \rangle. \quad (2.22)$$

При этом разделим операцию усреднения на две части: усреднение по случайному сдвигу функции $\delta(x - \xi)$ и усреднение по всем видам функций $\delta(x)$, не сводимых друг к другу сдвигом. Для проведения усреднения по сдвигу перейдем от ξ к новой переменной $\varphi = x_0 - \xi$, где x_0 – стационарная точка фазы Φ , определяемая условием

$$x_0 + L_\nabla \delta(x_0 - \xi) = 0. \quad (2.23)$$

Переменная φ связана со случайным сдвигом ξ уравнением

$$\varphi + L_\nabla \delta(\varphi) = -\xi, \quad (2.24)$$

и, следовательно, усреднение по ξ связано с усреднением по φ соотношением

$$\langle \dots \rangle_\varphi = \langle \sum \dots |d\xi / d\varphi|^{-1} \rangle_\xi, \quad (2.25)$$

здесь сумма берется по ветвям однозначности случайной функции $\varphi(\xi)$, производная $-d\xi / d\varphi = 1 + L_\nabla \delta'(\varphi)$ находится из уравнения (2.24). С другой стороны, вторая производная в точке стационарной фазы, которую и необходимо усреднять, определяется из (2.15) как

$$L_\nabla^2 \Phi'' = (1 + L_\nabla \delta'(x)) = -id\xi / d\varphi. \quad (2.26)$$

Отсюда получаем, что $\langle \sum |\Phi''|^{-1} \rangle_\xi = L_\nabla^2 \langle 1 \rangle_\varphi$. Поэтому независимо от распределения по

«формам» флуктуаций $\delta(x)$, наличие случайного разброса по сдвигам приводит к универсальному ответу

$$\langle R \rangle = \pi k_y^2 L_\nabla^2 \langle 1 \rangle_\phi = \pi k_y^2 L_\nabla^2. \quad (2.27)$$

Т.е. флуктуации не только сами не приводят к рассеянию назад, но и не модифицируют коэффициент отражения в первом порядке борновского приближения [7А]. Для гармонических флуктуаций аналогичный результат был получен в [44]. Отметим, что при получении этого результата нам не требовалась малость возмущения плотности $\delta(x)$.

Анализ следующего порядка борновского приближения гораздо более трудоемок, однако, предполагая малость флуктуаций, $\delta \ll 1$, можно с точностью до квадратичных по δ членов и членов четвертого порядка по $k_y L_\nabla$ получить выражение для коэффициента отражения в виде

$$\langle R \rangle = \pi k_y^2 L_\nabla^2 - \frac{1}{2} \pi^2 k_y^4 L_\nabla^4 - A k_y^4 L_\nabla^2 L_n^2 \langle \delta n_e^2 \rangle / n_{cr}^2 + \dots, \quad (2.28)$$

где A – безразмерный форм-фактор, определяемый соотношением пространственных масштабов флуктуаций и области линейного взаимодействия волн, λ_{cor} / L_∇ . В [44] этот форм-фактор был найден для гармонических флуктуаций с волновым числом k_\parallel и случайной фазой ϕ , $\delta n_e \propto \cos(k_\parallel x + \phi)$:

$$A(k_\parallel) = 8\pi^2 \frac{\sin^2(k_\parallel^2 L_\nabla^2 / 4)}{k_\parallel^2 L_\nabla^2} \quad (2.29)$$

Если теперь предположить, что флуктуации описываются неким спектром волновых чисел $f(k_\parallel)$ с условием нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dk_\parallel = 1$ и флуктуации, отвечающие разным волновым числам, не коррелированы, то суммарная поправка к среднему коэффициенту отражения определяется форм-фактором

$$A = 8\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k_\parallel^2 L_\nabla^2 / 4)}{k_\parallel^2 L_\nabla^2} |f(k_\parallel)|^2 dk_\parallel. \quad (2.30)$$

Независимо от масштаба флуктуаций, эта величина всегда ограничена. Для длинноволновых флуктуаций

$$A \approx \frac{1}{2} \pi^2 L_\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_\parallel^2 |f(k_\parallel)|^2 dk_\parallel \approx \frac{1}{2} \pi^2 L_\nabla^2 / \lambda_{cor}^2, \quad (\lambda_{cor} \gg L_\nabla), \quad (2.31)$$

для коротковолновых флуктуаций

$$A \approx 4\pi^2 L_\nabla^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} k_\parallel^{-2} |f(k_\parallel)|^2 dk_\parallel \approx 4\pi^2 \lambda_{cor}^2 / L_\nabla^2, \quad (\lambda_{cor} \ll L_\nabla). \quad (2.32)$$

Эти две асимптотики сшиваются при $\lambda_{cor} = 2^{-3/4} L_\nabla$, отсюда можно оценить максимальное

значение для форм-фактора как $A \approx \sqrt{2}\pi^2$. Физически полученный результат можно пояснить так. Если характерный масштаб флуктуаций велик, то они мало возмущают градиент плотности, а если характерный масштаб флуктуаций мал, то при усреднении на масштабе области линейного взаимодействия флуктуации будут взаимно компенсироваться, поэтому их влияние также будет ослабевать. Заметим, что связанная с флуктуациями поправка вошла в выражение (2.28) со знаком минус, то есть флуктуации в среднем уменьшают коэффициент отражения и улучшают прохождение (туннелирование) волн через область непрозрачности. Волна, которая отразилась от области линейного взаимодействия, под влиянием флуктуаций взаимодействует с падающей волной и частично перерассеивается в неё.

Суммируя вышесказанное, можно сделать вывод, что при условии $\pi k_y^2 L_\nabla^2 \ll 1$, отвечающему эффективному взаимодействию нормальных волн, флуктуации плотности мало меняют коэффициент трансформации, поскольку проявляются только во втором порядке борновского приближения [7A]. При этом надо отметить, что влияние флуктуаций может оказаться заметно вне условий, отвечающих поляризационному вырождению, когда система (2.6) оказывается неприменима для описания распространения волн. Первые неучтенные в (2.6) поправки к волновым уравнениям могут быть оценены как $(k_0 L)^{-1/2}$. Изменение среднего коэффициента отражения, связанное с этими неучтенными нами членами оценивается как $\langle \Delta R \rangle \sim \delta^2 (k_0 L_n)^{-1} \sim (\delta n / n_{cr})^2$. Таким образом, из этого выражения выпадает большое число L / L_∇ , характеризующее рассеяние в окрестности отсечки (2.13). Поэтому, когда мы говорим о *подавлении* рассеяния назад, на самом деле имеем мы в виду отсутствие в области поляризационного вырождения *усиления* рассеяния назад, характерного для области фазового замедления волн.

2.3 Флуктуации коэффициента отражения

В предыдущем разделе было показано, что в условиях линейного взаимодействия среднее отклонение коэффициента отражения, вызванное случайными возмущениями плотности плазмы, крайне мало. Однако в некоторых случаях важным становится уровень флуктуаций коэффициентов отражения и трансформации [87]. Основной характеристикой этого уровня может служить дисперсия случайной величины R

$$\sigma_R^2 = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2 \quad (2.33)$$

В отличие от линейного среднего, среднее от квадратичного отклонения отлично от нуля уже в первом порядке борновского приближения:

$$\sigma_R^2 = \pi^2 k_y^4 L_\nabla^4 \left(\left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\Phi} dx / L_\nabla \right|^4 \right\rangle - 1 \right). \quad (2.34)$$

С точностью до величин порядка δ^2 можно считать, что рассеяние на каждой отдельной фурье-гармонике флуктуаций происходит независимо, поэтому дисперсии от этих процессов складываются. Суммарная дисперсия при этом будет равна [7A]

$$\sigma_R^2 = 16\pi^2 k_y^4 L_n^2 \frac{\langle \delta n^2 \rangle}{n_{cr}^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k_{\parallel}^2 L_\nabla^2 / 4)}{k_{\parallel}^2} |f(k_{\parallel})|^2 dk_{\parallel}. \quad (2.35)$$

Обратим внимание на тот факт, что связанная с возмущениями плотности усредненная поправка $\Delta R = \langle R \rangle - R_0$ к невозмущенному коэффициенту отражения есть $\Delta R = -2\sigma_R^2$, при этом $|\Delta R| \ll \sigma_R$. То есть флуктуации профиля плотности в области трансформации могут приводить к заметным флуктуациям коэффициента отражения, не смещая при этом среднее значение этого коэффициента. Это обстоятельство может оказаться полезным в задачах, связанных с микроволновой диагностикой плотной плазмы.

2.4 Примеры численного моделирования

Для того, чтобы проверить сделанные выше выводы, в том числе в области параметров $\delta^2 \sim 1$ и $\delta^2 > 1$, где заведомо не выполняются условия, в которых написаны формулы (2.28) и (2.35), мы исследовали численно систему уравнений, аналогичную системе (2.12):

$$\begin{cases} (i\partial / \partial x' - \eta(x') - \delta(x'))A^+ = ik'_y A^- \\ (i\partial / \partial x' + \eta(x') + \delta(x'))A^- = ik'_y A^+ \end{cases} \quad (2.36)$$

Здесь $x' = x / L_\nabla$, $k'_y = k_y L_\nabla$, функция $\eta(x')$ задает регулярную, а функция $\delta(x')$ случайную части профиля плотности. Для решения этих уравнений был применен импедансный метод, описанный в [88]. Особенностью численного моделирования является невозможность непосредственно воспользоваться граничными условиями при $x' \rightarrow \pm\infty$. В импедансном подходе граничные условия при конечных x' эквивалентны сшивке в этой точке с однородной средой. Для того чтобы корректно поставить граничные условия, не внося в задачу больших возмущений, связанных с отражением от скачка производной показателя преломления по координате, в численных расчетах регулярный профиль плотности был выбран в виде

$$\eta(x') = \eta_{\max} \tanh(x'/\eta_{\max}),$$

а граничные условия задавались там, где эта функция выходит на насыщение. Заметим, что введенные выше переменные A^+ и A^- соответствуют амплитудам падающей и отраженной волны в линейном слое $\eta = x'$ при $x' \rightarrow \pm\infty$. Поэтому в численных расчетах с конечным перепадом плотности нам потребовалось перейти к новым переменным C^+ и C^- , отвечающим амплитудам падающей и отраженной волн при $\eta = -\eta_{\max}$ (на левой границе слоя, со стороны которой задается падающее излучение). В итоге система уравнений (2.36) переписывается в виде

$$\begin{cases} (i(1-\alpha^2)\partial/\partial x' - (1+\alpha^2)(\eta+\delta) - 2\alpha k'_y) C^+ = (ik'_y + 2i\alpha(\eta+\delta) + i\alpha^2 k'_y) C^- \\ (i(1-\alpha^2)\partial/\partial x' + (1+\alpha^2)(\eta+\delta) + 2\alpha k'_y) C^- = (ik'_y + 2i\alpha(\eta+\delta) + i\alpha^2 k'_y) C^+ \end{cases} \quad (2.37)$$

где $\alpha = \left(\eta_{\max} + \sqrt{\eta_{\max}^2 - k'_y{}^2} \right)^{-1} k'_y \ll 1$.

Естественно, что изменение профиля плотности само по себе приводит к отклонению коэффициента трансформации от теоретических предсказаний. Кроме того, из (2.37) видно, что из-за изменения ВКБ мод флуктуации стали возмущать не только распространение волн, но и коэффициент связи между ними, то есть появилась возможность «прямого» рассеяния на флуктуациях. Однако в этом можно увидеть возможность для качественного учета эффектов, связанных с поправками к системе эталонных уравнений (2.12). Дело в том, что условие положительной определенности плотности (то есть, значение плотности не должно отклоняться от критического больше чем на величину критической плотности) приводит к естественной связи $\eta_{\max} \approx L/L_{\nabla} \sim (k_0 L)^{1/2}$. То есть эффекты, связанные с отличием выбранного профиля от линейного, по порядку величины совпадают с эффектами, связанными с первыми отброшенными в уравнениях (2.12) поправками. Поэтому, когда мы не видим в численном моделировании заметного отклонения от теоретических предсказаний, мы ожидаем, что и отброшенные при выводе системы (2.12) члены также не оказывают заметного влияния.

Для флуктуаций плотности $\delta(x')$ была использована модель, аналогичная используемой в работе [89]. Случайная функция собиралась из набора некоррелированных дискретных гармоник с детерминированными амплитудами, определяемыми гауссовым спектром, и случайными фазами φ_n :

$$\delta(x') = \Delta \sqrt{\frac{\sqrt{8\pi}a}{3\eta_{\max}}} f(x') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2 \kappa_n^2 + i\kappa_n x' + i\varphi_n), \quad (2.38)$$

где $f(x') = \exp(-x'^2/3\eta_{\max}^2)$ – экспоненциальный множитель «отключающий» флуктуации при приближении к границам области интегрирования; дискретизация спектра флуктуаций $\kappa_n L_{\nabla} = \kappa_n = 2\pi/(3\eta_{\max})$ отвечает отсутствию флуктуаций с характерными длинами волн

больше $3L$; параметр $a = \lambda_{\text{кор}} / L_{\nabla}$ задает характерную длину корреляции. Нормировка выбрана так, чтобы среднеквадратичное отклонение профиля плотности в произвольной точке от регулярного составляла $\langle \delta^2 \rangle = \Delta^2 f^2(x')$. На Рисунке 2.1 приведен характерный вид профиля плотности плазмы с флуктуациями.

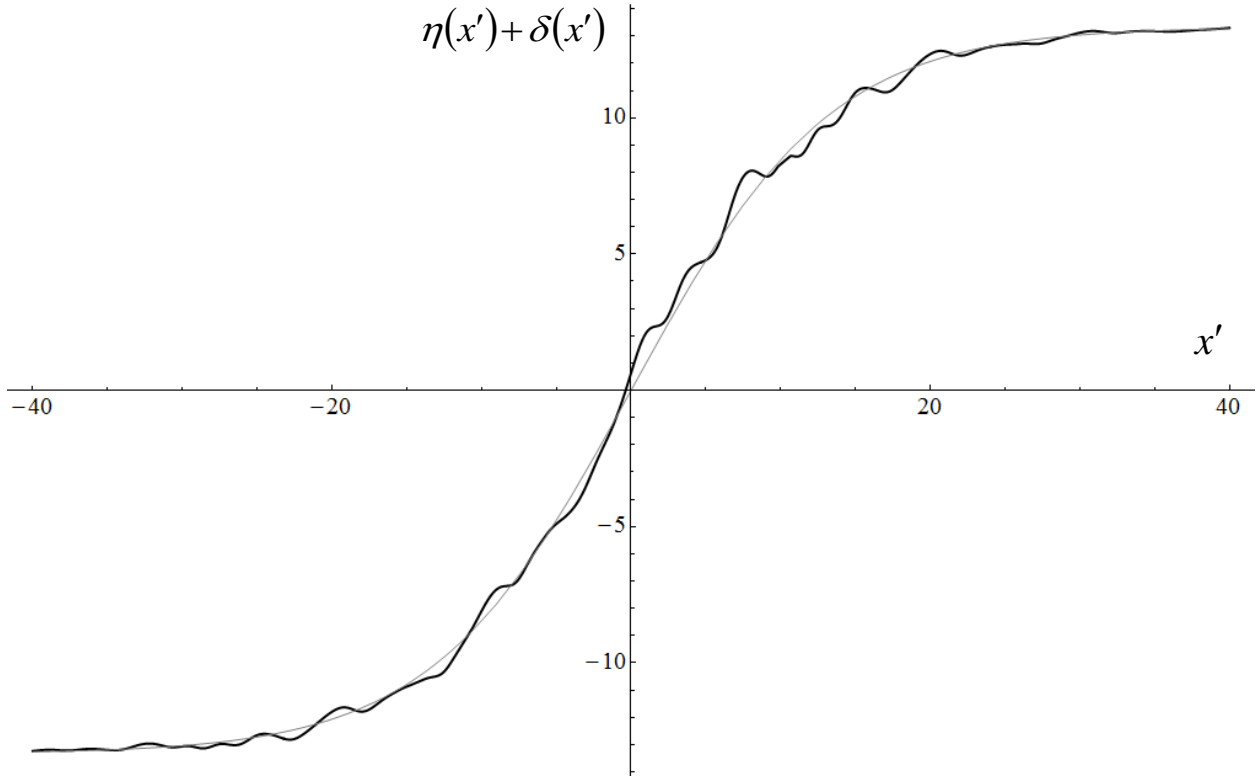


Рисунок 2.1: Пример профиля плотности плазмы с флуктуациями. Тонкая линия — невозмущенный профиль.

Мы проводили моделирование в достаточно широком диапазоне безразмерных параметров флуктуаций (расчеты проводились при $a = 0.1 \div 3$, $\Delta = 0.1 \div 2$, $k'_y = 0 \div 2$, однако трудно ожидать качественного изменения результатов и за этими пределами). Для того, чтобы перейти к размерным параметрам флуктуаций — длине корреляции $\lambda_{\text{кор}} = aL_{\nabla}$ и относительному возмущению плотности $\delta X = \Delta \cdot L_{\nabla} / L$, необходимо задать длину волны излучения и масштаб неоднородности регулярного профиля плотности. Например, для экспериментов по нагреву и диагностике за критической плазмы с использованием линейной трансформации волн в современных тороидальных установках [11] можно считать $L \sim 10$ см, $\lambda \sim 0.1$ см. Тогда $a = 1$ соответствует длине корреляции $\lambda_{\text{кор}} = 0.3$ см, что отвечает типичному значению этой величины — несколько гирорадиусов протона при магнитном поле в несколько Тесла и температуре несколько кэВ. При этом $\Delta = 1$ отвечает относительной амплитуде флуктуаций $\delta X = 0.04$, что соответствует очень высоким уровням флуктуаций для плазмы токамака [90, 91].

Параметр «нелинейности» регулярного профиля также выбирался в соответствии с этими оценками $\eta_{\max} \approx \sqrt{\pi L / \lambda} \approx 15$.

Теоретические оценки предсказывают крайне незначительное смещение среднего значения коэффициента отражения по сравнению как с невозмущенным уровнем, так и с уровнем его флуктуаций. Например для параметров $k'_y = 0.2$, $\Delta = 0.5$, $a = 0.5$ среднеквадратичное отклонение при составляет $\sigma_R \sim \langle R \rangle \sim 0.1$, а связанное с флуктуациями смещение среднего ($\langle R \rangle - R_0$) ~ 0.0025 . Это обстоятельство заметно ухудшает точность, достижимую при усреднении по многим реализациям. Для получения приемлемого уровня флуктуаций усредненного значения, такого, при котором флуктуации усредненного значения меньше его смещения относительно невозмущенного значения, потребовалось проводить усреднение по очень большому числу реализаций $N_{\text{уср}} = 100\,000$.

На приведенных ниже рисунках (Рисунки 2.2-2.4) можно видеть сравнение аналитических предсказаний с результатами численного моделирования для среднего смещения эффективности трансформации вследствие флуктуаций плотности и для уровня флуктуаций коэффициента отражения [7A]. Поскольку мы выходим за пределы применимости борновского приближения, аналитическая формула (2.28) было модифицирована как

$$\langle R \rangle = 1 - \exp(-\pi k_y^2 L_V^2 + A k_y^4 L_V^2 L^2 \langle \delta n^2 \rangle / n_{cr}^2). \quad (2.39)$$

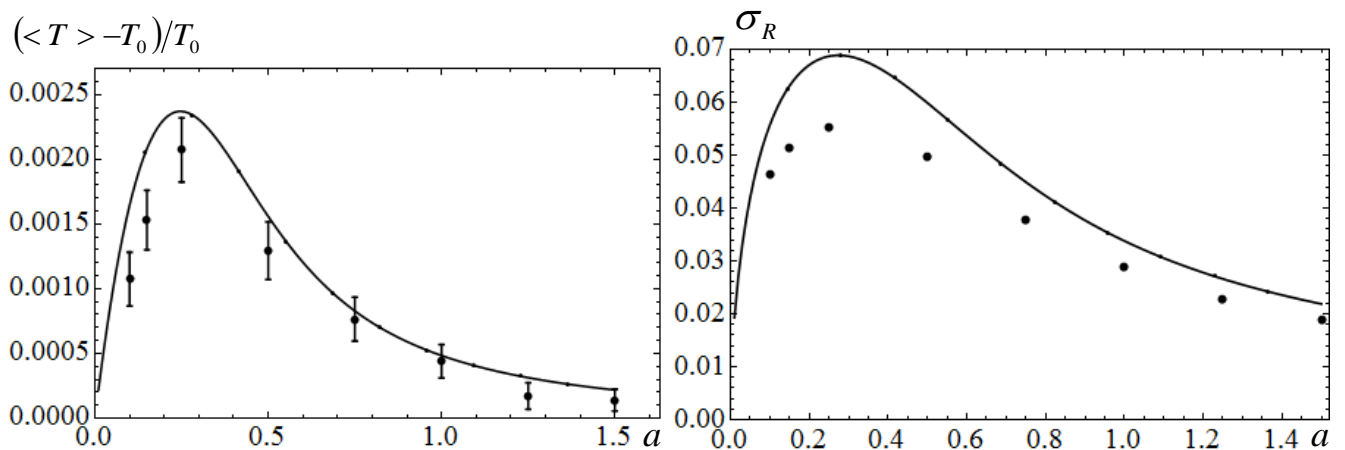


Рисунок 2.2: Зависимости среднего изменения коэффициента прохождения (слева) и среднеквадратичного отклонения коэффициента отражения (справа) от характерной длины корреляции флуктуаций при $\Delta = 0.5$, $k'_y = 0.2$. Сплошная линия – аналитический расчет, точки – результаты численного моделирования с оценкой погрешности усреднения.

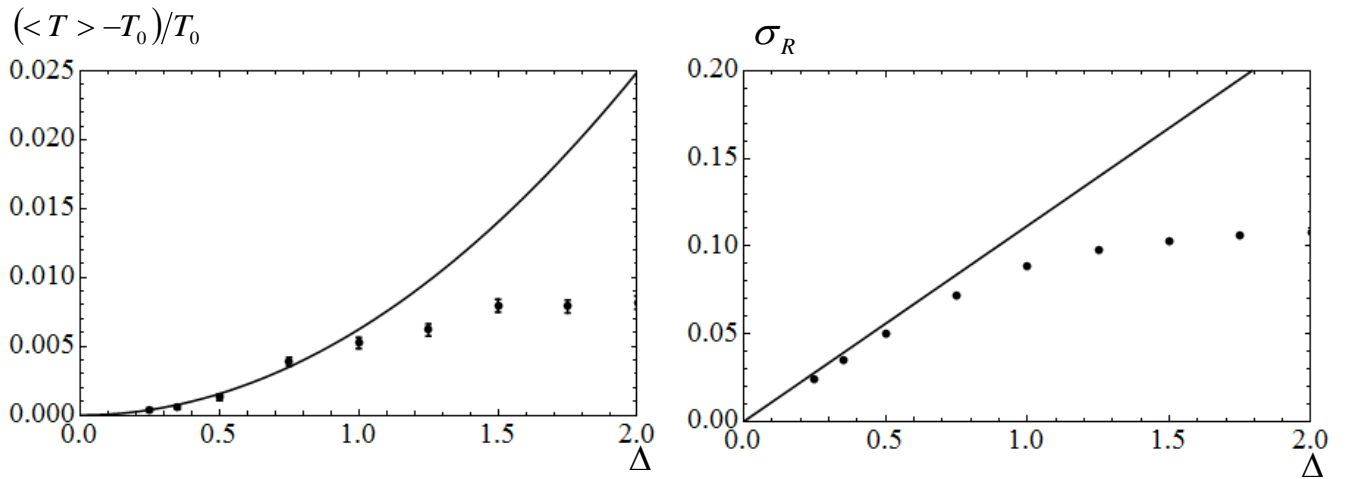


Рисунок 2.3: Зависимости среднего изменения коэффициента прохождения (слева) и среднеквадратичного отклонения коэффициента отражения (справа) от амплитуды флуктуаций при $a = 0.5$, $k'_y = 0.2$. Сплошная линия – аналитический расчет, точки результаты – численного моделирования с оценкой погрешности усреднения.

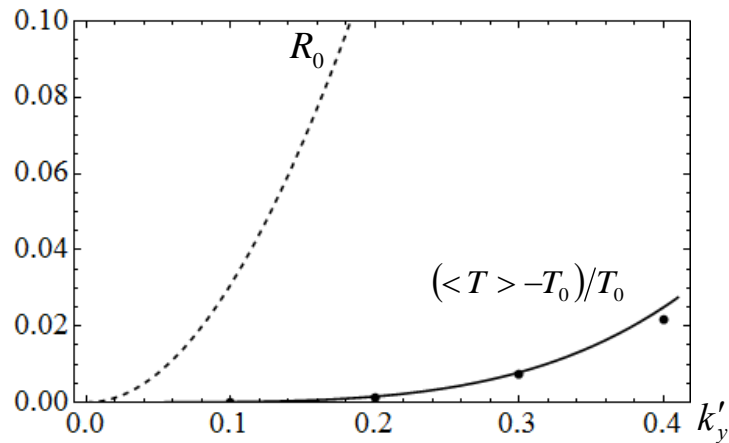


Рисунок 2.4: Зависимости среднего «улучшения» коэффициента прохождения (сплошная линия – аналитический расчет, точки – результаты численного моделирования с оценкой погрешности усреднения) и коэффициента отражения (пунктирная линия) от поперечного волнового числа в падающей волне при $a = 0.5$, $\Delta = 0.5$.

Графики построены в зависимости от параметров флуктуаций: длины корреляции a (Рисунок 2.2) и амплитуды флуктуаций Δ (Рисунок 2.3), а также поперечного волнового числа k'_y , характеризующего степень неидеальности трансформации (Рисунок 2.4). Видно, что качественные зависимости очень хорошо совпадают при $\Delta < 1$ во всем диапазоне остальных параметров, а при $\Delta > 1$ (см. Рисунки 2.3) влияние флуктуаций оказывается еще меньше теоретических оценок. Как и предсказывала теория, наибольшее влияние оказывают флуктуации с длинами корреляции порядка размера области трансформации (для нашей формы спектра флуктуаций в оптимуме $a = \lambda_{\text{cor}} / L_{\nabla} \sim 0.25$). При отклонении длины корреляции от

оптимального значения влияние флуктуаций спадает: среднее увеличение коэффициента трансформации ведет себя $\sim a^2$ при малых длинах корреляции и $\sim a^{-2}$ при больших, а среднеквадратичное отклонение $\sim a$ при малых длинах корреляции и $\sim a^{-1}$ при больших. Отметим ещё раз, что во всех этих случаях флуктуации приводят в среднем к уменьшению коэффициента отражения и, следовательно, к улучшению трансформации (прохождения) волн.

Все вышесказанное полностью противоречит аналитическим предсказаниям работы [82], в которой для длинноволновых флуктуаций, соответствующих в наших обозначениях $\Delta = 0.5$ и $\lambda_{\text{кор}} / L_{\nabla} \gg 1$, предсказывалась деградация коэффициента трансформации вдвое.

Несмотря на хорошее качественное совпадение зависимостей, численное моделирование продемонстрировало систематическое смещение результатов по сравнению с теоретическими предсказаниями, превышающее погрешность усреднения. Это систематическое смещение складывается, на наш взгляд, из двух факторов. С одной стороны, относительная точность борновского приближения, использованного при оценках, соответствует невозмущенному коэффициенту отражения $R \sim 0.1$, причем следующая поправка (перерассеяние назад волны, рассеянной вперед, появляющееся в третьем порядке борновского приближения) как раз должна отвечать уменьшению коэффициента прохождения. С другой стороны, примерно в этом же порядке находятся поправки, связанные с прямым рассеянием назад, определяемым отличием системы (2.37) от системы (2.12).

В заключение проверим вывод теории о возможном высоком уровне флуктуаций коэффициента отражения. Для иллюстрации этого тезиса на Рисунке 2.5 изображены распределения плотности вероятности наблюдения различных значений коэффициента отражения для трех значений поперечного волнового числа в падающей волне. Виден широкий разброс коэффициента отражения, который, тем не менее, не приводит к заметному к смещению среднего значения относительно невозмущенного коэффициента отражения (2.28).

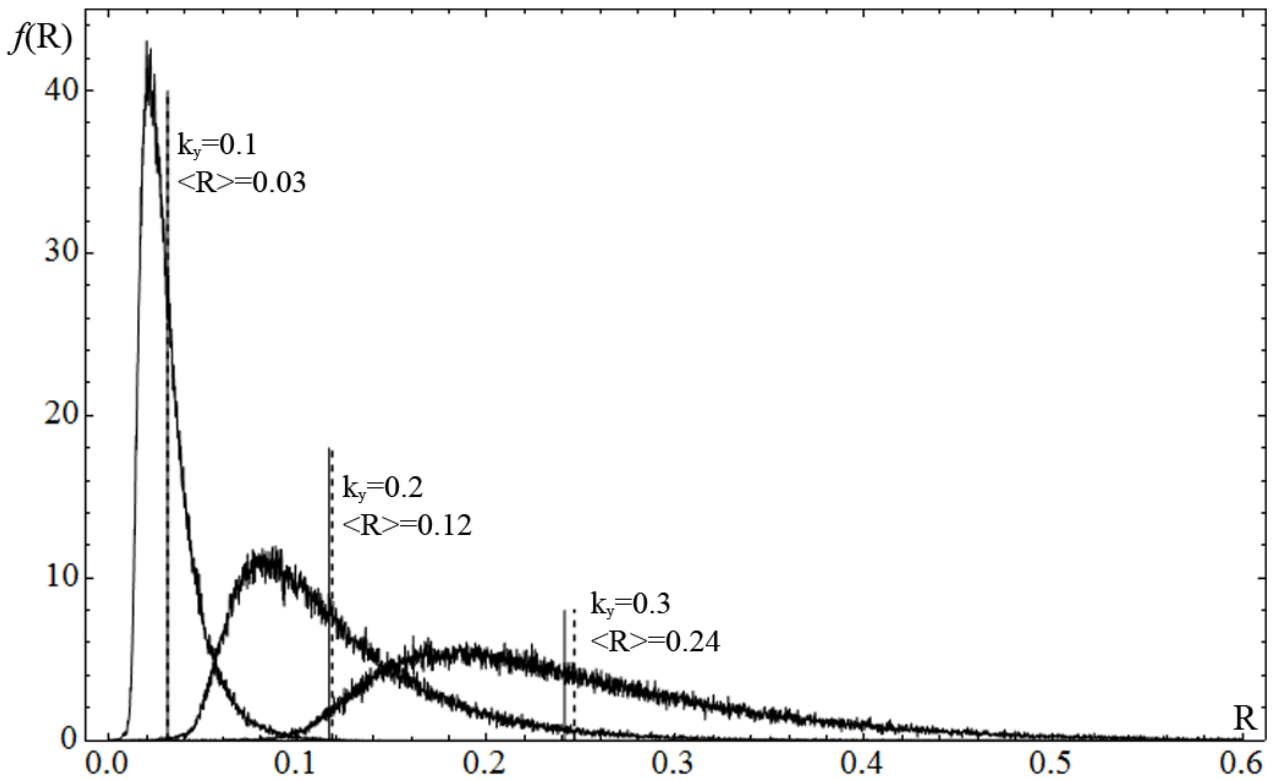


Рисунок 2.5: Распределение плотности вероятности для коэффициента отражения при значениях параметров $\Delta = 0.5$ и $a = 0.5$, $k'_y = 0.1; 0.2; 0.3$. Вертикальные пунктирные линии отмечают невозмущенные значения коэффициента отражения, вертикальные сплошные линии – среднее значение с учетом флуктуаций.

2.5 О влиянии флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации в тороидальных магнитных ловушках

Рассмотрим теперь, как на эффективность О-Х трансформации влияют флуктуации плотности плазмы общего вида в тороидальных системах, считая, однако, что корреляционная длина флуктуаций вдоль магнитного поля много больше размеров пучка за счет скорости переноса вдоль магнитного поля. В соответствии с работой [44] флуктуации плотности плазмы могут влиять на эффективность трансформации или рассеивая одну из мод, или внося возмущение в коэффициент связи между модами. На большей части трассы пучка рассеяние малоугловое, однако вблизи области трансформации возможно рассмотренное выше брэгговское рассеяние, которое, впрочем, практически не влияет на средний коэффициент трансформации. Поскольку область поляризационного вырождения в нашем рассмотрении всегда выделена, удобно рассматривать флуктуации плотности плазмы внутри этой области и снаружи отдельно.

В работе [44] показано, что влияние флуктуаций плотности плазмы внутри области трансформации достаточно мало, а наибольший вклад вносит механизм нарушения взаимодействия мод, который проявляется в первом порядке борновского приближения и выражается в эффективном уширении области нераспространения между поверхностями отсечки. В той же работе была получена точная оценка снизу для уменьшения коэффициента трансформации, подтвержденная также в [7A, 8A]:

$$\tilde{T} = T \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{1}{2Y_0}} \delta X^2 k_0 L \left(\frac{\eta L}{R}\right)^2 \left(1 + \frac{\eta L}{R}\right)^{-3/2}\right), \quad \eta = \bar{N}_{\parallel}^2 (2Y_0 + 1) \quad (2.40)$$

где \tilde{T} и T – коэффициенты трансформации, соответственно, с учетом и без учета влияния флуктуаций, $\delta X = \delta n_e / n_{cr}$ – нормированная амплитуда флуктуаций, а остальные обозначения определены в разделе 1.5. Таким образом, внутри области трансформации влияние флуктуаций оказывается малым как в установках с большим аспектным отношением, где мал параметр L/R , так и в сферических токамаках, для которых характерно низкое значение магнитного поля Y_0 и малая величина $\eta \propto Y_0$. При этом важно отметить, что за счет неоднородности магнитного поля, которая отсутствовала в модельной задаче брэгговского рассеяния, рассмотренной в разделе 2.2, флуктуации плотности приводят именно к снижению эффективности просачивания.

В статье [44] выражение (2.40) было получено в рамках модельной задачи. С учетом результатов раздела 1.5 оно может быть обобщено для среды общего вида:

$$\tilde{T} = T \cdot \exp\left(-\frac{\pi \delta X^2}{4L_{\nabla}^2} \left(\frac{1}{g_+ (1 + Y_0)} - \frac{1}{g_{\parallel}}\right)^2\right), \quad (2.41)$$

где g_+ определяется выражением (1.23). В случае, если у магнитного поля нет поперечной неоднородности, а давление плазмы пренебрежимо мало, т.е. если $\partial_y b = 0$ и $\kappa_z \approx \partial_x b / 2$, то этот ответ переходит в выражение (2.40).

Выражения (2.40) и (2.41) становятся точными оценками в пределе крупномасштабных флуктуаций плотности плазмы, в обратном пределе, когда мала корреляционная длина флуктуаций поперек градиента концентрации, флуктуации не меняют эффективности трансформации.

2.6 Эффективность О-Х трансформации волнового пучка со случайной фазовой модуляцией в тороидально-неоднородной плазме

Вне области трансформации флуктуации за счет малоуглового рассеяния вносят в пучок случайную модуляцию фазы. Это приводит уширению спектральной ширины пучка, что может существенно снизить эффективность трансформации, поскольку это уширение может накапливаться на трассе. При этом, поскольку влияние флуктуаций в области трансформации мало, мы можем либо пренебречь ими, либо учесть неявно при помощи множителей типа (2.40)-(2.41). Такой подход позволяет считать параметры плазмы в области трансформации детерминированными и использовать теорию, разработанную в разделе 1.5. В частности, мы можем использовать формулу (1.40) для коэффициента прохождения каждой конкретной реализации падающего пучка. Тогда для усредненного по ансамблю реализаций коэффициента ответ будет:

$$\langle T(\Delta N_{\parallel}) \rangle = \int \tilde{G}(y_1, y_2) \langle A(y_1) A^*(y_2) \rangle dy_1 dy_2,$$

где ядро интегрального оператора \tilde{G} выносится из под усреднения, поскольку параметры плазмы в области трансформации мы считаем детерминированными. Коэффициент трансформации определяется двойным интегралом от кросскорреляционной функции падающего пучка $\langle A(y_1) A^*(y_2) \rangle$, а усреднение проводится по всем реализациям случайной фазы пучка.

Мы считаем, что трасса пучка в турбулентной плазме была достаточно короткой, чтобы амплитуда пучка осталась детерминированной. Рассмотрение более длинных трасс не представляет для нас интереса, поскольку на них модуляция фазы будет настолько сильна, что эффективная трансформации все равно будет невозможна. Тогда падающий пучок можно записать в виде:

$$A(y) = \tilde{A}(y) \exp(i\phi(y)),$$

где $\tilde{A}(y)$ – детерминированный пучок, определяемый выражением (1.41) из раздела 1.5 и $\phi(y)$ – добавленная к нему случайная фаза. Кросскорреляционная функция переписется в виде:

$$\langle A(y_1) A^*(y_2) \rangle = \tilde{A}(y_1) \tilde{A}^*(y_2) \langle \exp(i\phi(y_1) - i\phi(y_2)) \rangle.$$

Далее естественно предположить, как это было сделано в [92], что случайные фазы в экспоненте, являющиеся интегралами по длинным интервалам от независимых одинаково распределенных случайных величин, имеют нормальное распределение в силу центральной предельной теоремы. Это предположение позволяет явно провести усреднение:

$$\langle \exp(i\phi(y_1) - i\phi(y_2)) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (\phi(y_1) - \phi(y_2))^2 \rangle\right) = \Phi(y_1 - y_2)$$

Здесь мы считаем, распределение флуктуаций не меняется на апертуре пучка, и поэтому результат усреднения выражается через одномерную детерминированную функцию от разности $y_1 - y_2$.

Такое описание позволяет учитывать влияние модуляции фазы на эффективность трансформации просто через добавление дополнительного множителя в интегральный оператор (1.40):

$$\langle T(\Delta N_{\parallel}) \rangle = \int \tilde{G}(y_1, y_2) \tilde{A}(y_1) \tilde{A}^*(y_2) \Phi(y_1 - y_2) dy_1 dy_2. \quad (2.42)$$

Переход к локализованному вдоль z пучку также прост, поскольку мы считаем, что флуктуации вытянуты вдоль магнитного поля и не дают модуляции фазы вдоль оси z . Усредняя формулу (1.45) получаем:

$$\langle T_{3D} \rangle = \int \langle T(\Delta N_{\parallel}) \rangle P_0(\Delta N_{\parallel}) d\Delta N_{\parallel}$$

Вид функции $\Phi(\Delta y)$ определяется распределением флуктуаций плотности плазмы на трассе волнового пучка. В рамках данной главы мы не определяем эту функцию явно, это требует решения отдельной задачи по аналогии с работой [92]. С другой стороны, после того как эта функция найдена, с использованием универсального соотношения (2.42) мы легко можем учесть влияние «трассовых» эффектов флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации для любого детерминировано заданного пучка.

Рассмотрим естественные свойства функции $\Phi(\Delta y)$. При $\Delta y = y_1 - y_2 = 0$ значения вычитаемых фаз совпадают, поэтому $\Phi(0) = 1$. При $\Delta y \rightarrow \infty$ фазы оказываются полностью некоррелированными, следовательно

$$\lim_{\Delta y \rightarrow \infty} \Phi(\Delta y) = \exp\left(-\langle \phi^2(y_1) \rangle / 2 - \langle \phi^2(y_2) \rangle / 2\right) = \exp\left(-\langle \phi^2 \rangle\right).$$

Для качественного анализа влияния фазовой модуляции на эффективность трансформации, функцию $\Phi(\Delta y)$ можно взять в виде:

$$\Phi(\Delta y) = (1 - \xi) \exp\left(-\Delta y^2 / y_{cor}^2\right) + \xi, \quad \xi = \exp\left(-\langle \phi^2 \rangle\right) \quad (2.43)$$

где y_{cor} – корреляционная длина модуляции фазы. В этом случае интеграл (2.42) берется явно для гауссового падающего пучка (1.42). В результате усредненный коэффициент трансформации (2.42) для одной продольной гармоники будет равен:

$$\langle T(\Delta N_{\parallel}) \rangle = (1 - \xi) \cdot \tilde{T} + \xi \cdot T, \quad (2.44)$$

где T – невозмущенный коэффициент (1.43), а \tilde{T} отличается от T заменой для эффективной фазовой модуляции:

$$K_y^2 \rightarrow \tilde{K}_y^2 = K_y^2 + \frac{a_y^2 \tanh|\tilde{\alpha}| + a_0^2}{k_0^2 a_0^2 a_y^2 y_{cor}^2} = K_y^2 + \frac{1}{k_0^2 a_y^2 y_{cor}^2} + O(\alpha^2).$$

В плоскостом приближении ответ (2.44) сохраняет свой вид, однако упрощаются выражение для невозмущенного коэффициента (1.44) и замена для эффективной фазовой модуляции: $K_y^2 \rightarrow \tilde{K}_y^2 = K_y^2 + (k_0 a_y y_{cor})^{-2}$.

Функцию $\Phi(\Delta y)$ можно также связать с усредненной спектральной мощностью падающего пучка:

$$\langle |A(k_y)|^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \iint A(y_1) A^*(y_2) \Phi(y_1 - y_2) \exp(-ik_y(y_1 - y_2)) dy_1 dy_2.$$

Для гауссового пучка (1.42) и $\Phi(\Delta y)$, определяемой формулой (2.43), получаем:

$$\langle |A(k_y)|^2 \rangle = (1 - \xi) \cdot \tilde{P}_0(k_y) + \xi \cdot P_0(k_y),$$

где

$$P_0(k_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1/a_y^2 + 4a_y^2 k_0^2 K_y^2}} \exp\left(-\frac{k_y^2}{1/a_y^2 + 4a_y^2 k_0^2 K_y^2}\right)$$

$$\tilde{P}_0(k_y) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1/a_y^2 + 4a_y^2 k_0^2 K_y^2 + 4/y_{cor}^2}} \exp\left(-\frac{k_y^2}{1/a_y^2 + 4a_y^2 k_0^2 K_y^2 + 4/y_{cor}^2}\right)$$

Здесь $P_0(k_y)$ определяет нормированную спектральную мощность гауссового пучка (1.42), а $\tilde{P}_0(k_y)$ получается из $P_0(k_y)$ при помощи замены для эффективной фазовой модуляции: $K_y^2 \rightarrow \tilde{K}_y^2 = K_y^2 + (k_0 a_y y_{cor})^{-2}$. Можно убедиться, что в плоскостом приближении добавление случайной фазовой модуляции одинаково меняет спектр пучка и коэффициент О-Х трансформации.

Таким образом, рассмотренный модельный пример позволяет понять следующие особенности влияния случайной фазовой модуляции на эффективность О-Х трансформации:

1. Случайная фазовая модуляция увеличивает ширину спектра пучка также, как и детерминированная фазовая модуляция, связанная с кривизной магнитных поверхностей и неоднородностью направления магнитного поля.
2. В одномерном приближении эффективность трансформации определяется только формой усредненного спектра пучка.
3. Учет двумерной неоднородности формально требует полную информацию о кросскорреляционной функции поля, однако на практике сочетание двумерной

неоднородности со случайной фазовой нарезкой дает только маленькую поправку к коэффициенту трансформации только порядка $O(\alpha^3 a_y^2 / L_V^2)$.

При этом нужно еще раз отметить, что в рамках данного анализа не рассматривается связь флуктуаций плотности плазмы и параметров случайной фазовой модуляции. В частности, y_{cor} — это корреляционная длина именно фазовой модуляции, которая может меняться на трассе, а не характерный масштаб флуктуаций.

2.7 Заключение к главе 2

В данной главе мы аналитически и численно исследовали особенности брэгговского рассеяния назад в условиях сильного поляризационного вырождения в анизотропной среде. Показано, что случай поляризационного вырождения в анизотропной среде вблизи поверхности отсечки сильно отличается от «изотропного» отражения от поверхности отсечки, когда различные нормальные волны слабо связаны. В частности, продемонстрировали, что после усреднения по случайным реализациям профилей плотности плазмы при условиях, отвечающих эффективной линейной трансформации, характерного для области отсечки усиления обратного брэгговского рассеяния не происходит, хотя коэффициент трансформации при этом может заметно флуктуировать. Этот вывод может быть важен с точки зрения интерпретации экспериментов по нагреву и диагностике закритической термоядерной плазмы с использованием схем, основанных на линейной конверсии электромагнитных волн в квазиэлектростатические моды Бернштейна, поскольку эффективность такой трансформации в значительной мере определяется трансформацией обыкновенной волны в медленную необыкновенную волну в окрестности поверхности отсечки.

С другой стороны, мы показали, что флуктуации хотя и не дают после усреднения сколь-нибудь заметного вклада в коэффициент отражения, но приводят к сильным его флуктуациям. Среднеквадратичное отклонение коэффициента отражения может достигать десятков процентов даже при умеренных, порядка 1%, величинах флуктуаций плотности. Возможно, что это необходимо учитывать при диагностике температуры плазмы по флуктуациям В-Х-О излучения, предложенной в работе [87].

Помимо брэгговского рассеяния были рассмотрены и другие механизмы влияния флуктуаций плотности плазмы на эффективность О-Х трансформации в тороидальной геометрии. Например, нарушение взаимодействия мод, выражающееся в эффективном уширении области нераспространения между поверхностями отсечки при наличии

неоднородности модуля магнитного поля. Роль этого механизма является доминирующей внутри области трансформации, однако оценки показывают, что даже она довольно мала как для классических, так и для сферических токамаков.

Другой важный механизм влияния флуктуаций на эффективность О-Х трансформации связан с фазовой модуляцией волнового пучка из-за малоуглового рассеяния на проходе через докритическую плазму. Эта модуляция увеличивает ширину спектра пучка также, как и детерминированные фазовые модуляции, связанные с кривизной магнитных поверхностей и неоднородностью направления магнитного поля, обсуждавшиеся в первой главе. При этом эта модуляция может накапливаться на трассе распространения волнового пучка, значительно превышающей размеры области поляризационного вырождения, и за счет этого может приводить к существенной деградации коэффициента трансформации. Для построения количественной оценки величины деградации был найден коэффициент трансформации квазиоптического пучка со случайной фазовой модуляцией.

Глава 3. Квазиоптическое моделирование электронного циклотронного нагрева плазмы в прямой магнитной ловушке

Как уже отмечалось, поглощение электромагнитных волн в условиях электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса широко используется для нагрева высокотемпературной плазмы в тороидальных магнитных ловушках. Однако применение этого метода в открытых магнитных ловушках до недавнего времени было ограничено либо относительно компактными лабораторными установками, такими как OGRA-4 [46], SMIS 37 [47-49], A-PHOENIX [50], SEISM [51], либо задачами МГД-стабилизации и генерации быстрых электронов в плазме достаточно низкой плотности, прежде всего, на установке GAMMA-10 [52-55]. Единственное исключение – это проведенная в конце 1980-х серия экспериментов на установке TMX-U в Ливерморе, в которой ЭЦ нагрев позволил достичь наибольшей на тот момент температуры электронов 280 эВ в относительно плотной плазме [56].

Вместе с тем, прямой нагрев именно электронной компоненты в условиях ЭЦ резонанса обеспечил достижение рекордных параметров плазмы на крупномасштабном плазменном стенде ГДЛ (газодинамическая ловушка) в Институте ядерной физики им. Г.И.Будкера [57]. Успешный эксперимент по комбинированному нагреву плазмы нейтральными пучками и СВЧ излучением на ГДЛ отражен в работах [58-60]. В результате этих исследований впервые была достаточно убедительно продемонстрирована перспективность использования магнитных ловушек открытого типа с осесимметричной конфигурацией в качестве мощных нейтронных источников для термоядерных приложений [61].

Реализация эффективного ЭЦ нагрева плотной плазмы в достаточно большой открытой ловушке требует пересмотра сложившихся представлений как о физике циклотронного взаимодействия, так и о последующем транспорте энергии и стабилизации плазменного шнура, поскольку ни одна из используемых на практике схем нагрева тороидальной плазмы не работает в этом случае [62]. Важную роль при этом играют методы моделирования распространения и поглощения электромагнитных волн в неоднородной плазме ловушки. До недавнего времени такое моделирование проводилось исключительно в рамках приближения геометрической оптики методом трассировки лучей. В частности, именно таким способом была обоснована основная схема ЭЦ нагрева, используемая в ГДЛ [62, 63]. В этой схеме возникают области отражения и поглощения волн, в которых среда перестает быть плавнеоднородной, поэтому детальное понимание физики происходящих процессов требует выхода за рамки геометрооптического приближения.

Основные эффекты, приводящие к нарушению приближения геометрической оптики – это пространственная дисперсия в сильно неоднородной области резонансного поглощения,

дифракционное расплывание волнового пучка и формирование каустик в окрестности точек полного внутреннего отражения. Прямой учет этих эффектов в рамках полной системы уравнений Максвелла сложен, в частности, из-за малой длины волны излучения по сравнению с размерами установки. Хорошей альтернативой этому подходу является последовательный квазиоптический подход, основанный на асимптотическом разложении уравнений Максвелла в параксиальном приближении в окрестности выделенной ВКБ моды [64, 65].

В настоящей главе квазиоптический метод применяется для описания распространения волновых пучков в высокотемпературной плазме в открытой магнитной ловушке. За основу взята теория, развитая для тороидальных магнитных ловушек [75, 76]. Однако специфика СВЧ нагрева в современных прямых ловушках потребовала существенной модификации квазиоптической теории, связанной с более аккуратным описанием эффектов пространственной дисперсии в области резонансной диссипации волн. Физика этого отличия обусловлена тем, что в прямой ловушке магнитное поле в основном меняется вдоль своего направления, а в тороидальной – поперек. Поэтому приближения и численные приемы, которые хорошо проявили себя при моделировании распространения волн в тороидальной ловушке, не сработали в случае прямой ловушки. Это потребовало создания новой теоретической модели и существенной модификации численных алгоритмов, что привело в итоге к созданию абсолютно нового кода.

В диссертации мы сосредоточимся только на электродинамической составляющей проблемы, считая среду, в которой распространяются волны, известной – это максвелловская плазма с заданными распределениями концентрации и температуры электронов. При этом мы не учитываем возможное при интенсивном СВЧ нагреве отклонение функции распределения электронов по скоростям от максвелловского распределения. Этот подход оправдан тем обстоятельством, что в интересующем нас случае нагрева достаточно плотной плазмы энергия вкладывается в тепловую компоненту, для которой кулоновское взаимодействие эффективно поддерживает локально-равновесное распределение. Так, например, для установки ГДЛ методом лазерного рассеяния были проведены прямые измерения функции распределения электронов сразу после ЭЦР нагрева, которые показали, что распределение электронов близко к максвелловскому [57, 59, 60].

Отброшенные нами кинетические эффекты, связанные с модификацией функции распределения резонансных электронов, проявляются при нагреве более разреженной плазмы, например, на японской установке ГАММА-10 [53] или даже на установке ГДЛ на стадии ЭЦР пробоя [93]. Традиционно такие эффекты описываются в рамках баунс-усредненного кинетического уравнения с оператором типа Фоккера–Планка, учитывающего совместное действие кулоновских соударений и СВЧ поля в квазилинейном приближении [94]. При этом

для описания распределения СВЧ поля в разреженной плазме обычно достаточно геометрического приближения с коэффициентом поглощения, отвечающим возмущенной функции распределения электронов. Обобщение указанного подхода на случай плотной плазмы сводится к замене геометрического приближения квазиоптическим. При этом построение квазиоптического отклика среды, отвечающего немаксвелловской функции распределения, нетривиально, поскольку поглощение в плотной плазме не может быть рассчитано в рамках стандартной теории возмущений [95]. Но, так или иначе, эта задача выходит за рамки настоящей диссертационной работы.

3.1 Основные шаги вывода квазиоптического уравнения

Вывод квазиоптических уравнений для гиротропных сред с пространственной дисперсией приведен в работах [64, 96]. Для удобства мы приведем основные шаги этого вывода. Начнем с уравнений Максвелла для $e^{-i\omega t}$ процессов, записанного в операторной форме

$$\hat{L}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{L}_{ij} \equiv \delta_{ij} \hat{k}^2 - \hat{k}_i \hat{k}_j - k_0^2 \hat{\varepsilon}_{ij}, \quad (3.1)$$

где оператор $\hat{L}_{ij}[E_j(\mathbf{r})]$ действует на j -ую декартову компоненту $E_j(\mathbf{r})$ вектора электрического поля (далее всюду « $\hat{}$ [...]» обозначает оператор, действующий на функцию в квадратных скобках), $k_0 = \omega/c$ – вакуумное волновое число. В уравнении (3.1) оператор $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ определяется как оператор дифференцирования в координатном пространстве (в квазиоптической теории этот оператор часто называют оператором импульса), а $\hat{\varepsilon}_{ij}$ – оператор, полученный из тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ путем формальной замены волнового вектора \mathbf{k} на оператор $\hat{\mathbf{k}}$ и симметризации полученного выражения. Этот переход наиболее удобно выразить через интеграл Фурье:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = \int \frac{\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}') + \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{k}')}{2} e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} E_j(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{r}' d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}.$$

Подробнее эта процедура будет описана в разделе 3.3.

В плавно неоднородной среде приближенное решение уравнений Максвелла естественно искать в виде квазиоптического пучка, отвечающего заданной волновой моде. Для этого определим вектор поляризации \mathbf{e} интересующей нас геометрической моды как решение уравнения $L_{ij} e_j = 0$ в локально однородной среде. Далее, используя ту же технику, что и при переходе $\varepsilon_{ij} \rightarrow \hat{\varepsilon}_{ij}$, вектору поляризации $\mathbf{e}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ можно сопоставить оператор $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})$. Тогда

приближенное решение уравнения (3.1) можно искать в виде

$$E_j(\mathbf{r}) = \hat{e}_j(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})[U(\mathbf{r})].$$

Здесь оператор вектора поляризации «действует» на скалярную амплитуду волнового пучка $U(\mathbf{r})$. Уравнение для скалярной амплитуды U принимает вид:

$$\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}})[U(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{\mathcal{P}} \equiv \hat{e}_i^* \hat{L}_{ij} \hat{e}_j. \quad (3.2)$$

Следующим шагом следует выбрать криволинейную систему координат, связанную с опорным лучом, вдоль которого параметры волнового пучка меняются медленно. При построении квазиоптической теории для тороидальных магнитных ловушек в качестве опорного луча выбирается центральный геометрооптический луч [65, 75]. Однако, опорный луч не привязан к распределению поля в волновом пучке и, в общем случае, может быть выбран произвольно. Для квазиоптического моделирования ЭЦ нагрева плазмы в прямой ловушке опорный луч более естественно направить вдоль оси системы. Такой выбор опорного направления вместо геометрооптического луча вызван рядом причин. Во-первых, геометрооптические лучи сильно искривляются внутри плазменного шнура, что приводит к формальному нарушению однозначности в сопровождающей криволинейной системе координат при ширине волнового пучка большей радиуса кривизны луча. Во-вторых, при нагреве плазмы в прямых магнитных ловушках возможен «захват» излучения плотной плазмой, соответствующий полному внутреннему отражению на периферии плазменного шнура. В окрестности точки отражения имеет место сильное разбегание геометрооптических лучей и, соответственно, уширение волнового пучка, что может привести к появлению «отражения» в сопутствующей системе координат, которое не описывается квазиоптическими уравнениями. Указанных трудностей можно избежать при использовании опорного луча, направленного вдоль оси ловушки.

Введем систему координат и канонически сопряженных импульсов

$$\mathbf{r} \equiv (\mathbf{x}, z), \quad \hat{\mathbf{k}} \equiv (\hat{\mathbf{q}}, \hat{k}_z), \quad (3.3)$$

где z – координата вдоль оси ловушки, $\mathbf{x} = \mathbf{r}_\perp$ – совокупность двух декартовых координат поперек оси ловушки, $\hat{\mathbf{q}} = -i\nabla_\perp$ и $\hat{k}_z = -i\partial/\partial z$. Полагая изменение параметров пучка плавным вдоль опорного луча, мы можем представить скалярную амплитуду U в виде

$$U = \tilde{u}(\mathbf{r}) \exp\left(i \int \kappa(z) dz\right),$$

где \tilde{u} – комплексная огибающая волнового пучка, функция $\kappa(z)$ задает зависимость «несущей фазы» волнового поля вдоль оси системы. Подставляя поле в таком виде в (3.2), получаем уравнение для комплексной огибающей \tilde{u} [65, 64, 75]:

$$\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}} + \kappa(z)\mathbf{z}_0)[\tilde{u}(z, \mathbf{x})] = 0. \quad (3.4)$$

Заметим, что в отличие от геометрической оптики, у нас имеется определенная свобода в выборе $\kappa(z)$, связанная с конечным поперечным размером пучка. При численной реализации излагаемого в данной главе подхода оказалось, что эту величину удобно находить как решение локального дисперсионного уравнения

$$\text{Re } \hat{\phi}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{z}) + \kappa(z)\mathbf{z}_0) = 0, \quad \tilde{\mathbf{r}} = (z, \tilde{\mathbf{x}}), \quad (3.5)$$

где $\text{Re } \hat{\phi}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ – обычный геометрооптический гамильтониан, $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$ – координата и волновой вектор, отвечающие, соответственно, центрам масс пучка и его спектра в заданном поперечном сечении z ,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\int \mathbf{x} |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x}}{\int |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{\int \mathbf{q} \left| \int u(\mathbf{x}, z) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} d\mathbf{x} \right|^2 d\mathbf{q}}{(2\pi)^2 \int |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x}}. \quad (3.6)$$

Полагая огибающую \tilde{u} плавно зависящей от продольной координаты $|\partial\tilde{u}/\partial z| = \kappa|\tilde{u}|$, разложим уравнение (3.4) до первого порядка по степеням \hat{k}_z (или, что то же самое, по степеням $\partial\tilde{u}/\partial z$):

$$\hat{\phi}[\tilde{u}] \approx \hat{\phi}_0[\tilde{u}] - i \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \kappa} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right] - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_0}{\partial \kappa^2} [\tilde{u}] = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\phi}(\mathbf{r}, -i\nabla_{\perp} + \kappa(z)\mathbf{z}_0)$$

– укороченный оператор, в котором отсутствуют производные по эволюционной координате z . Последнее слагаемое в уравнении (3.7) в пределе геометрической оптики дает предэкспоненциальный множитель, ответственный за изменение амплитуды из-за группового замедления волны. Выполняя формальную замену¹

$$\tilde{u} = \left(k_0 \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \kappa} \right)^{-1/2} [u], \quad \hat{H} = - \left(k_0 \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \kappa} \right)^{-1} \hat{\phi}_0,$$

получаем более простое уравнение, описывающее эволюцию скалярной амплитуды волнового пучка u вдоль оси z ,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ik_0 \hat{H}[u]. \quad (3.8)$$

Заметим, что за исключением ряда специальных случаев оператор $\partial \hat{\phi}_0 / \partial \kappa$ можно считать локальным, то есть не содержащим производных по поперечным координатам при условии, что среда является плавнонеоднородной на масштабе длины волны излучения.

¹ Оператор $\hat{B} = \hat{A}^{-1/2}$ определяется как решение операторного уравнения $\hat{A} \partial \hat{B} / \partial z + \frac{1}{2} \partial \hat{A} / \partial z \hat{B} = 0$.

Если сопоставить левую и правую части уравнения (3.8), то становится ясным физический смысл нового гамильтониана \hat{H} – это оператор продольного волнового числа, выраженный через поперечные производные. Символически это можно представить (с учетом вычитания несущей гармоники) как

$$k_0 \hat{H} = \hat{k}_z(\mathbf{r}, -i\nabla_{\perp}) - \kappa(z). \quad (3.9)$$

Ниже мы покажем, что квазиоптический оператор в такой форме можно построить по решению алгебраического дисперсионного уравнения $k_z(\mathbf{r}, \mathbf{k}_{\perp})$ для рассматриваемой моды в локально однородной среде, заданной параметрами, отвечающими точке \mathbf{r} .

Поскольку в правой части получившегося уравнения сохранены производные по поперечным координатам, входящие в исходные уравнения Максвелла, можно утверждать, что данное уравнение последовательно описывает основные волновые эффекты в параксиальном приближении $|\partial u / \partial z| = \kappa |u|$, включая дифракцию, пространственную дисперсию и диссипацию, если они присутствуют в среде. При этом на неоднородность в поперечном направлении не накладывается никаких дополнительных ограничений, кроме ограничений используемой численной схемы. Это оказывается важным при моделировании резонансного СВЧ нагрева в магнитных ловушках, где сильная неоднородность поглощения может влиять на распространение волн. В ряде частных случаев для уравнения (3.8) удастся построить автомодельные решения в виде обобщенных гауссовых пучков [97, 98]. Однако, в отличие от случая токамаков, для прямой ловушки с плотной плазмой такие решения плохо применимы, поэтому мы развиваем метод прямого численного интегрирования квазиоптического уравнения. В этом смысле мы рассматриваем задачу эволюции волнового пучка с учетом его аббераций. Все указанные эффекты, естественно, не могут быть учтены в рамках геометрической оптики.

В дальнейшем мы будем использовать разложение линейного оператора \hat{H} на эрмитову и антиэрмитову части

$$\hat{H} = \hat{H}_H + i\hat{H}_A, \quad (3.10)$$

где $\hat{H}_H \equiv (\hat{H} + \hat{H}^{\dagger})/2$ и $\hat{H}_A \equiv (\hat{H} - \hat{H}^{\dagger})/2i$ — эрмитовы операторы в смысле стандартного скалярного произведения $\int a^* b d\mathbf{x}$.

Можно показать, что в рамках сделанных приближений величина

$$\Pi = \int |u(\mathbf{x}, z)|^2 d\mathbf{x} \quad (3.11)$$

с точностью до размерного коэффициента совпадает с полным потоком энергии в волновом пучке. Определим плотность поглощенной мощности как

$$P = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\int \left(u^* \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) d\mathbf{x}.$$

Используя квазиоптическое уравнение (3.8) эту величину можно представить в виде:

$$P = 2k_0 \int \operatorname{Re}(u^* \hat{H}_A[u]) d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Как и ожидалось, антиэрмитова часть эволюционного оператора $i\hat{H}_A$ ответственна за диссипацию или усиление волнового поля. В частности, в бездиссипативной среде, описываемой эрмитовым эволюционным оператором, поток энергии Π сохраняется в силу уравнения (3.8). Полная мощность потерь определяется интегралом $\int P dz$, по всему объему, занятому пучком.

При СВЧ нагреве плазмы в магнитной ловушке вкладываемая мощность быстро перераспределяется по магнитным поверхностям. Поэтому важной количественной характеристикой является одномерное распределение мощности по магнитным поверхностям:

$$P(\rho) = \frac{2k_0}{l(\rho)} \int \operatorname{Re}(u^* \hat{H}_A[u]) \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, z)) d\mathbf{x} dz, \quad (3.13)$$

где ρ имеет смысл метки магнитной поверхности, определяемой уравнением $\rho(\mathbf{x}, z) = \rho$,

$$l(\rho) = \int \delta(\rho - \rho(\mathbf{x}, z_0)) d\mathbf{x}$$

– эффективный периметр магнитной поверхности в сечении $z = z_0$ (для аксиально-симметричной магнитной конфигурации $l = 2\pi\rho$). В работе [99] приведенный способ вычисления профиля поглощаемой мощности сравнивался с двумя другими распространенными методами – геометрооптическим и методом Переверзева, основанным на безабберационном приближении для гауссова пучка [100, 101]. На примере модельной задачи, допускающей аналитическое решение, было показано, что моделирование профиля энерговклада на основе квазиоптического подхода дает хорошее согласие с точным результатом, а остальные способы приводят к существенным ошибкам в условиях сильной пространственной дисперсии и неоднородности поглощения. Для токамака ИТЭР квазиоптическая теория предсказывает дополнительное уширение профиля энерговклада на 10-15 % в сценариях с «верхним» вводом СВЧ излучения [75].

3.2 «Традиционное» представление квазиоптического оператора и пределы его применимости

По аналогии с работой [102], в наиболее общей форме линейный оператор \hat{H} можно записать в виде формального ряда Тейлора:

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\partial^{m_1+n_1+m_2+n_2} H}{\partial x_1^{m_1} \partial q_1^{n_1} \partial x_2^{m_2} \partial q_2^{n_2}} \left\{ (\hat{x}_1 - \bar{x}_1)^{m_1}, (\hat{q}_1 - \bar{q}_1)^{n_1} \right\} \left\{ (\hat{x}_2 - \bar{x}_2)^{m_2}, (\hat{q}_2 - \bar{q}_2)^{n_2} \right\} \quad (3.14)$$

Здесь фигурные скобки означают $\{\hat{x}_1^{m_1}, \hat{q}_1^{n_1}\} = (\hat{x}_1^{m_1} \hat{q}_1^{n_1} + \hat{q}_1^{n_1} \hat{x}_1^{m_1})/2$, а $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ – константы, задающие точку, относительно которой производится разложение. Оператор определяется через четырехмерную функцию H таким образом, чтобы действительная часть H определяла эрмитову часть оператора \hat{H}_H , а мнимая – антиэрмитову часть $i\hat{H}_A$.

Представление (3.14) определяет оператор \hat{H} аналогично разложению Тейлора по степеням неоднородности функции H по пространственным и импульсным координатам. Слагаемые с $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 \leq 2$ в квазиоптическом уравнении (3.8) сохраняют форму гауссового пучка и описывают безабберационное приближение в рамках квазиоптического подхода. Слагаемые более высоких порядков описывают влияние aberrаций. В случае, если функция H меняется плавно на масштабах пучка, то безабберационное приближение оказывается достаточно точным, однако пространственная неоднородность или сильная пространственная дисперсия могут создавать сильную неоднородность функции H по пространственным или импульсным координатам, что потребует учета слагаемых более высокого порядка.

Представление (3.14) может быть значительно упрощено, если отбросить все слагаемые, содержащие некоммутирующие операторы. Тогда оператор \hat{H} можно будет переписать в виде:

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = \hat{H}_1(\hat{x}_2, \hat{q}_1) + \hat{H}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \hat{H}_3(\hat{q}_1, \hat{q}_2) + \hat{H}_4(\hat{x}_1, \hat{q}_2), \quad (3.15)$$

где каждый из операторов $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3, \hat{H}_4$ формально определяется при помощи представления (3.14) через соответствующую двумерную функцию:

$$H_1(x_2, q_1) = H(\bar{x}_1, x_2, q_1, \bar{q}_2)$$

$$H_2(x_1, x_2) = H(x_1, x_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2) - H(\bar{x}_1, x_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2)$$

$$H_3(q_1, q_2) = H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, q_1, q_2) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, q_1, \bar{q}_2)$$

$$H_4(x_1, q_2) = H(x_1, \bar{x}_2, \bar{q}_1, q_2) + H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2) - H(x_1, \bar{x}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{q}_1, q_2)$$

Представленный в таком виде оператор оказывается достаточно простым для использования.

Каждое из слагаемых $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3, \hat{H}_4$ действует просто как умножение на двумерную функцию:

скалярной амплитуды волнового пучка $u(x_1, x_2)$ для оператора $\hat{H}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, фурье-спектра скалярной амплитуды для $\hat{H}_3(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ и скалярных амплитуд в комбинированных координатно-импульсных представлениях для операторов $\hat{H}_1(\hat{x}_2, \hat{q}_1)$ и $\hat{H}_4(\hat{x}_1, \hat{q}_2)$. При этом, несмотря на существенное упрощение, представление (3.15) позволяет описывать широкий спектр aberrаций.

Однако это представление имеет формальный недостаток: в нем отброшены некоторые слагаемые, учитываемые в более простом безабберационном приближении. Если их вернуть, то мы получим традиционное представление квазиоптического оператора, использовавшееся для моделирования электронного циклотонного нагрева и генерации тока в тороидальных магнитных ловушках [75, 76]:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{q}}) = & \hat{H}_1(\hat{x}_2, \hat{q}_1) + \hat{H}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \hat{H}_3(\hat{q}_1, \hat{q}_2) + \hat{H}_4(\hat{x}_1, \hat{q}_2) + \\ & + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial q_1} \{\hat{x}_1 - \bar{x}_1, \hat{q}_1 - \bar{q}_1\} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial q_2} \{\hat{x}_2 - \bar{x}_2, \hat{q}_2 - \bar{q}_2\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Область применимости полученного представления определяется малостью отброшенных членов, что накладывает ограничения на неоднородность функции H . Можно сказать, что если безабберационное приближение требует плавной неоднородности функции H , то квазиоптический подход с оператором в представлении (3.16) может описывать среды в которых функция H имеет сильную неоднородность, но не более чем по двум коммутирующим координатам.

В тороидальных магнитных ловушках сильная неоднородность H определяется резонансной диссипацией, которая в свою очередь зависит от модуля магнитного поля и компоненты волнового вектора вдоль магнитного поля. Поскольку в тороидальных ловушках градиент модуля магнитного поля и его вектор практически ортогональны, считалось, что можно повернуть систему координат x_1, x_2 таким образом, чтобы сильная зависимость функции H осталась только по координатам x_1, q_2 , а отброшенные члены в представлении (3.16) оказались несущественны.

Проблема такой логики в том, что компоненты квазиоптического импульса (волнового числа) связаны дисперсионным соотношением, поэтому достаточно сильная пространственная дисперсия дает сильную неоднородность по всем импульсным координатам. Помимо этого, в прямых ловушках также нет выделенного направления неоднородности по пространственным координатам: вдоль оси ловушки направлен градиент модуля магнитного поля, а поперек неоднородность определяется шириной плазменного шнура, которая в области электронного циклотонного резонанса оказывается сравнимой с размерами волнового пучка. Такие соображения показывают, что в прямых ловушках функция H будет иметь сильную

неоднородность по всем четырем координатам, поэтому традиционное представление (3.16) окажется не применимо для моделирования и потребуется новое представление, позволяющее описывать сильную неоднородность общего вида.

Эти общие соображения подтвердились результатами численного моделирования ЭЦР нагрева в крупномасштабной прямой ловушке ГДЛ, которые также указали на необходимость использования нового представления квазиоптического гамильтониана. В первоначальной версии квазиоптического кода по аналогии с тороидальными системами использовался упрощенный квазиоптический оператор в представлении (3.16). В этом моделировании функция H определялась из соотношения (3.9) $k_0 H = k_z(\mathbf{r}, \mathbf{q}) - \kappa(z)$, а координаты точки разложения задавались через центры масс пучка и его спектра (3.6) для каждого поперечного сечения z вдоль оси ловушки:

$$\bar{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}, \quad \bar{q}_1 = \tilde{q}_1 + \delta q, \quad \bar{q}_2 = \tilde{q}_2 + \delta q.$$

Варируя параметр δq , мы могли менять положение точки разложения в пределах ширины спектра пучка. Поскольку координаты точки разложения – это внутренний параметр модели, результат расчета не должен был от него зависеть. Прямая проверка этого факта позволила верифицировать результаты.

Рассмотрим относительную долю мощности поглощенную в плазме $\int P dz / \Pi(z_0)$, где P – мощность поглощенная на сечении z , заданная выражением (3.12), а $\Pi(z_0)$ – мощность пучка в начальном сечении, определенная интегралом (3.11). На Рисунке 3.1 изображена типичная зависимость этой величины от параметра δq нормированного на характерную ширину спектра пучка. Рисунок показывает, что доля поглощенной мощности не только существенно менялась при изменении положения точки разложения в пределах пучка, но и даже сколь угодно малый сдвиг приводил к изменению результатов моделирования. Эту неопределенность модели поглощения не удалось преодолеть, оставаясь в рамках модели с квазиоптическим оператором (3.16).

С точки зрения теории такой результат достаточно понятен. Отброшенные в представлении (3.16) члены устроены так, что они всегда равны нулю в точке разложения. Соответственно сдвиг точки разложения меняет и задаваемый ими оператор. В случае, если функция H сильно неоднородна и отброшенные члены существенны, получается, что сдвиг меняет и оператор (3.16), а следовательно и результаты моделирования.

В итоге мы убедились, что квазиоптическое моделирование актуальных сценариев СВЧ нагрева плазмы в прямой магнитной ловушки требует выработки нового подхода к вычислению квазиоптического оператора диссипативной резонансной среды, основанного на

использовании «полного» представления (3.14), а не его укороченной версии (3.16). Такой подход излагается в последующих разделах. Впервые он был предложен в общем виде в работе [103], затем реализован для конкретного случая тепловой магнитоактивной плазмы в открытой магнитной ловушке в работах [10А, 11А].

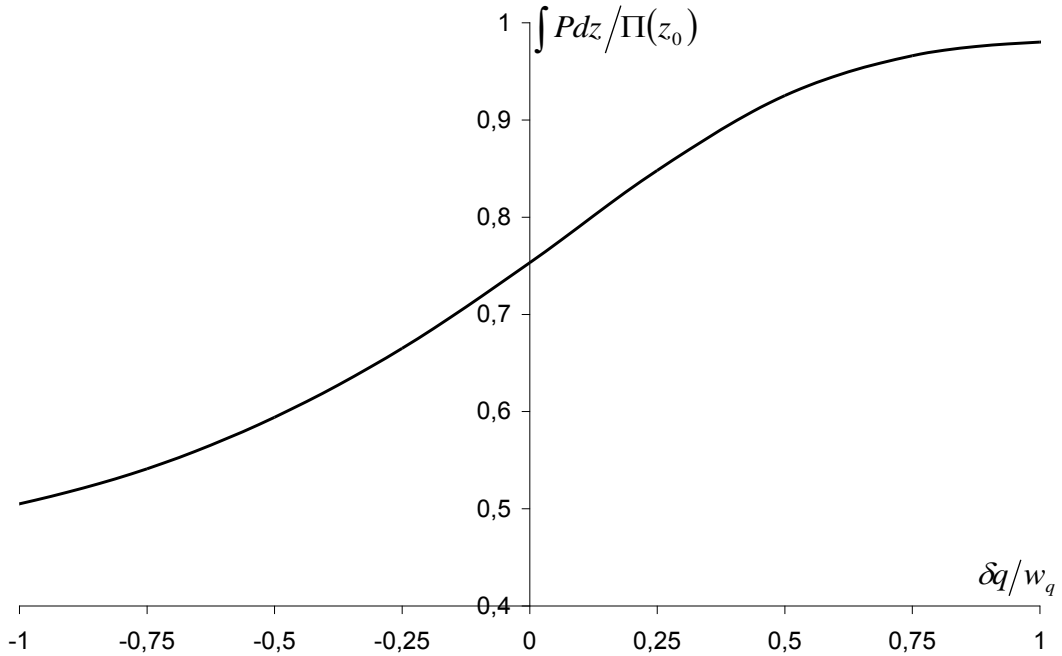


Рисунок 3.1: Зависимость относительной доли поглощенной в плазме мощности пучка от нормированного на характерную ширину спектра пучка сдвига точки разложения квазиоптического оператора в представлении (3.16).

3.3 Новое представление операторов в квазиоптическом уравнении

Основная сложность при практическом использовании уравнения (3.8) состоит в неопределенности вида оператора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, необходимого для получения оператора \hat{H} . В работе [102] показано, что линейный оператор $\hat{\varepsilon}$ удобно ввести в виде

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{k}^n} (\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{k})^n + (\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{k})^n \frac{\partial^n \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{k}^n} \right), \quad (3.17)$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ — заданная матричная функция (ядро), порождающая оператор, а $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$. Для такого представления оператора эрмитова матрица ядра $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^*$ всегда порождает эрмитов оператор $\hat{\varepsilon}$, а антиэрмитова матрица $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ij}^*$ порождает антиэрмитов оператор. Это

нетривиальное свойство позволяет ввести диэлектрический отклик неоднородной среды, совместимый с законом сохранения энергии. Вторым важным свойством является то обстоятельство, что ядро оператора для рассматриваемого представления получается как сумма поправок к тензору диэлектрической проницаемости по степеням характерного масштаба l неоднородности среды [102]:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{ij}^{(m)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(m)} = \mathcal{O}((k_0 l)^{-m}).$$

В плавно неоднородных средах $k_0 l \gg 1$, поэтому, как правило, можно ограничиться нулевым членом, то есть выражением диэлектрической проницаемости, полученным в «локально однородном» приближении. Заметим, что формально приведенная форма линейного отклика остается справедливой для любой (не обязательно плавно) неоднородной среды, однако за исключением простейших случаев [102] ядро для тензора диэлектрической проницаемости удастся определить лишь в «геометрооптическом» приближении.

Выражая операцию дифференцирования по пространственным переменным через интеграл Фурье, после простых алгебраических преобразований результат действия оператора (3.17) на электрическое поле можно определить как

$$\hat{\varepsilon}_{ij}[E_j(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{k}^n} (\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{k})) \times (\mathbf{k}' - \mathbf{k})^n e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} E_j(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{r}' d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}$$

Замечая, что суммирование по n есть в точности разложение в ряд Тэйлора по \mathbf{k}' функций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{k}')$ и $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}', \mathbf{k}')$, мы получаем в точности выражение для $\hat{\varepsilon}_{ij}$, приведенное в начале раздела 3.1.

Можно показать, что оператор диэлектрического отклика (3.17) приводит к квазиоптическому эволюционному оператору (3.8), который можно представить в виде

$$\hat{H}[u] = \int \frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + H(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2} e^{i\mathbf{q}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} u(\mathbf{x}') \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}. \quad (3.18)$$

По форме это выражение совпадает с представлением для $\hat{\varepsilon}_{ij}$ за исключением того, что вместо шестимерного фазового пространства $d\mathbf{r}' d\mathbf{k}' / (2\pi)^3$ здесь используется четырехмерное пространство $d\mathbf{x}' d\mathbf{q}' / (2\pi)^2$, а координата z входит как параметр. Проще всего это выражение можно получить, если сразу применить разложение, аналогичное (3.17), непосредственно для оператора \hat{H} . Оператор \hat{H} порождается скалярной функцией $H = \sum H^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, причем в качестве нулевого приближения напрашивается решение $H^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ локально однородной задачи. Отметим, что представление оператора (3.18) автоматически порождает эрмитовы операторы для действительных $H(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ и антиэрмитовы операторы для чисто мнимых $H(\mathbf{x}, \mathbf{q})$.

Важным свойством представления (3.18) является возможность написать приближенное решение уравнения (3.8) в виде операторной экспоненты. Действительно, нам требуется приближенное решение за малый, но конечный шаг расчета Δ , которое удовлетворяет уравнению (3.8) при малых $\Delta \rightarrow 0$ и совпадает с точным решением в однородной среде:

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) = \int e^{ik_0\Delta \cdot H(\mathbf{q}) + iq'(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} u(\mathbf{x}', z) \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}. \quad (3.19)$$

Наиболее простой вид приближенного решения, удовлетворяющего этим требованиям, является обобщение (3.19) на плавнонеоднородные среды:

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) \approx \hat{S}_H[u],$$

где

$$\hat{S}_H[u] \equiv \int \exp\left(ik_0\Delta \frac{H(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + H(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2}\right) \cdot e^{iq'(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} u(\mathbf{x}', z) \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2} \quad (3.20)$$

По форме такой вид приближенного решения совпадает с операторной экспонентой [75, 104], и имеет те же достоинства и недостатки.

Для вычисления оператора вида (3.20) существует эффективная численная процедура, требующая не более N^2 операций для N ячеек сетки по координате \mathbf{x} . При этом, шаг расчета Δ не имеет формальных ограничений со стороны числа точек по эволюционной координате, в отличие от традиционных конечно-разностных методов [105]. Шаг расчета ограничен лишь «физическими» соображениями, а именно, величиной коммутатора операторов $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ и $\hat{H}(\mathbf{x}', \mathbf{q})$:

$$\Delta = \frac{1}{k_0 \int |u|^2 dx} \int \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}[x_i u] - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}[u] \right|^2 dx. \quad (3.21)$$

С другой стороны, метод операторной экспоненты строго обоснован только для сред без диссипации, заданных эрмитовым эволюционным оператором и сохраняющим интеграл (3.11). В неоднородных диссипативных средах с пространственной дисперсией формула (3.20) может дать решение с экспоненциально растущей энергией даже для случая диссипации в рамках геометрооптического приближения (т.е. при $\text{Im}H > 0$). Формальная причина заключается в том, что «диссипативное» слагаемое \hat{H}_A в (3.10), отвечающее «диссипативному» ядру $\text{Im}H(\mathbf{x}, \mathbf{q}) > 0$ после применения процедуры (3.18), может иметь отрицательные собственные значения. Преобразование (3.18) гарантирует только действительность всех собственных значений, но не их знакоопределенность.

По сути это известная проблема правильной аппроксимации среды для физически корректного описания поглощения энергии волнового пучка [106]. Ошибки в аппроксимации

эрмитовой части (т.е. нарушение условия (3.21)) лишь возмутят фазовый профиль волнового пучка, а их влияние будет заметно на трассах больших дифракционной длины. Систематические ошибки в аппроксимации антиэрмитовой части влияют непосредственно на амплитуду пучка. В результате приближенное решение может, например, экспоненциально быстро увеличивать энергию пучка. Особенно эта проблема актуальна для СВЧ пучков электрон-циклотронного диапазона частот, когда диссипация нарастает резко как в координатном пространстве, так и в пространстве волновых векторов.

Простейшая корректная аппроксимация, гарантирующая знакоопределенность собственных чисел антиэрмитовой части оператора \hat{H}_A , состоит в использовании модельного оператора, представимого в виде квадрата некоторого другого эрмитового оператора. Определим

$$\hat{H}_A = \hat{G}[\hat{G}[u]], \quad (3.22)$$

где оператор \hat{G} строится аналогично (3.18),

$$\hat{G}[u] = \int \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + G(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2} e^{i\mathbf{q}'(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} u(\mathbf{x}') \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2}, \quad (3.23)$$

но с ядром $G = \sqrt{\text{Im}H(\mathbf{x}, \mathbf{q})}$.

Итак, при использовании модифицированного представления (3.22) для диссипативной части квазиоптическое уравнение (3.8) примет вид [10A, 11A]

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ik_0 \hat{H}_H[u] - k_0 \hat{G}[\hat{G}[u]]. \quad (3.24)$$

Для построения численного алгоритма решения этого уравнения воспользуемся «split-step» методом, заключающемся в последовательном учете эрмитова $\hat{H}_H[u]$ и антиэрмитова $\hat{G}[\hat{G}[u]]$ слагаемых в уравнении

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) \approx \hat{S}_{iGG}[\hat{S}_H[u]],$$

где \hat{S} определяется операторной экспонентой (3.20).

Как уже отмечалось, вычисление операторной экспоненты \hat{S}_H от действительной части H не вызывает трудностей. Однако прямое вычисление экспоненты \hat{S}_{iGG} от матрицы $\hat{G}\hat{G}$ оказывается весьма ресурсоемким. Использование методов Адамса, Рунге-Кутты и подобных проблематично, так как оператор \hat{G} может иметь большие собственные значения, соответствующие быстро затухающим модам. Это приводит к необходимости уменьшать шаг расчета Δ для обеспечения устойчивости метода. С другой стороны, такие быстро затухающие моды не представляют физического интереса, т.к. они соответствуют нераспространяющимся

волнам. Это обстоятельство позволяет заменить операторную экспоненту \hat{S}_{iGG} на некоторый приближенный оператор \hat{D} , который должен правильно описывать слабозатухающие моды и обеспечивать при этом экспоненциальное затухание при больших собственных числах.

Для выполнения первого условия потребуем, чтобы оба оператора имели одинаковые асимптотики при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\hat{S}_{iGG} \approx \hat{D} = \hat{1} - k_0 \Delta \hat{G} \hat{G} + O(\Delta^2).$$

Чтобы обеспечить второе требование достаточно «обрезать» ядро оператора \hat{D} при больших Δ . Одним из простейших операторов, удовлетворяющих указанным условиям, является

$$\hat{D}[u] = u - \hat{T}[\hat{T}[u]], \quad (3.25)$$

$$\hat{T}[u] = \int \frac{T(\mathbf{x}, \mathbf{q}') + T(\mathbf{x}', \mathbf{q}')}{2} e^{iq'(x-x')} u(\mathbf{x}') \frac{d\mathbf{x}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^2},$$

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \phi(\sqrt{k_0 \Delta} G(\mathbf{x}, \mathbf{q})).$$

Здесь $\phi(x)$ — любая одномерная функция, обладающая следующими свойствами: $\phi(x) \rightarrow x$ при $x \rightarrow 0$, $\phi''(0) = 0$ и $\phi(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. В нашей программе в качестве такой функции мы использовали гиперболический тангенс $\phi = \tanh(x)$. Вычисление оператора (3.25) сводится к последовательному применению преобразования Фурье к факторизованному ядру, поэтому вычислительная сложность для оператора (3.25) с точностью до фактора 2 такая же, как и для операторной экспоненты (3.20).

Таким образом, используя операторы (3.20) и (3.25), для квазиоптического уравнения (3.24) удастся построить явную схему (для шага по продольной координате) [10А, 11А]

$$u(\mathbf{x}, z + \Delta) \approx \hat{D}[\hat{S}_H[u]],$$

которая обеспечивает устойчивое решение.

Развитый квазиоптический подход был протестирован на физически важных модельных примерах [103, 11А], а затем использован для разработки нового квазиоптического кода, позволяющего моделировать электронно-циклотронный нагрев плазмы в открытых магнитных ловушках с учетом всех основных волновых эффектов (резонансное поглощение, дифракция, дисперсия и абберации), возникающих при распространении волновых пучков.

3.4 Квазиоптический оператор, соответствующий открытой магнитной ловушке

В этом разделе на основе развитого выше подхода в явном виде определяются ядра квазиоптических операторов, используемых в численном коде для моделирования СВЧ нагрева плазмы в прямой ловушке.

Прежде всего, нам необходимо определить модель среды. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн, распространяющихся в локально однородной теплой магнитоактивной плазме в окрестности первой ЭЦ гармоники, можно представить в следующем виде [95]:

$$N_{\perp}^2 [(\varepsilon_+ - \varepsilon_{\parallel})(\varepsilon_- - N^2) + (\varepsilon_- - \varepsilon_{\parallel})(\varepsilon_+ - N^2)] = 2\varepsilon_{\parallel}(\varepsilon_+ - N^2)(\varepsilon_- - N^2) \quad (3.26)$$

где $N = \sqrt{N_{\perp}^2 + N_{\parallel}^2}$, а N_{\parallel} и N_{\perp} – компоненты волнового числа вдоль и поперек направления магнитного поля,

$$\varepsilon_- = 1 + \frac{XZ(\zeta)}{N_{\parallel}\beta_e}, \quad \varepsilon_+ = 1 - \frac{X}{1+Y}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - X,$$

$X = \omega_{pe}^2/\omega^2$ и $Y = \omega_{ce}/\omega$ – стандартные параметры Стикса, определяющие плотность плазмы и напряженность внешнего магнитного поля через, соответственно, ленгмюровскую и циклотронную частоту для электронов. Все эффекты, связанные с пространственной дисперсией и резонансной диссипацией в окрестности первой гармоники, определяются «теплой» добавкой в ε_- , зависящей от функции Крампа

$$Z(\zeta) = e^{-\zeta^2} \left(i\sqrt{\pi} \operatorname{sign} \operatorname{Re}(N_{\parallel}) - 2 \int_0^{\zeta} e^{t^2} dt \right)$$

от аргумента $\zeta = (1-Y)/(n_{\parallel}\beta_e)$ и нормированной тепловой скорости электронов $\beta_e = \sqrt{2T_e/mc^2}$. Приведенные формулы получены для слабoreлятивистской плазмы $\beta_e \ll 1$, малого ларморовского радиуса $N_{\perp}\beta_e \ll Y$ и «квазипродольного» распространения волн $N_{\parallel} > \beta_e$. В современном эксперименте эти условия выполняются, как правило, с большим запасом.

Как уже отмечалось, при построении квазиоптического приближения в прямой ловушке удобно выбрать опорный луч, совпадающий с осью системы. В текущей реализации кода магнитное поле в прямой ловушке также считается направленным строго по оси системы, что хорошо подходит, например, для описания длинной и осесимметричной установки ГДЛ. Это ограничение не принципиально для нашей методики и может быть обойдено при необходимости, однако оно позволяет упростить процедуру восстановления квазиоптического гамильтониана по дисперсионному уравнению (3.26).

Действительно, в этом случае квазиоптический набор переменных (3.3) проектируется на используемые выше волновые числа как

$$N_{||} = k_z/k_0, \quad N_{\perp} = |\mathbf{q}|/k_0.$$

С учетом этой подстановки можно определить комплексное решение $k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})$ дисперсионного уравнения (3.26), отвечающее действительным поперечным импульсам \mathbf{q} . Вдали от области резонанса это решение будет близко к корням биквадратного уравнения, отвечающего холодной плазме $\beta_e \rightarrow 0$. Это позволяет выбрать «правильный» корень, отвечающий заданной электромагнитной моде, и использовать его в качестве стартового значения для итеративного поиска решения трансцендентного относительно k_z уравнения (3.26). Дополнительную помощь оказывает использование значений k_z в соседних ячейках сетки, которые позволяют контролировать правильный выбор моды по плавности изменения найденного решения $k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})$.

В соответствии с изложенной выше методикой эволюционный оператор (3.9) задается ядром $k_0 H = k_z - \kappa$ или, в наших обозначениях,

$$H_H = \frac{\text{Re} k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q}) - \kappa(z)}{k_0}, \quad G = \sqrt{\frac{\text{Im} k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})}{k_0}}.$$

В соответствии с (3.5), несущее волновое число определяется как решение локального дисперсионного уравнения

$$\kappa = \text{Re} k_z(\tilde{\mathbf{x}}, z, \tilde{\mathbf{q}}),$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$ соответствуют центрам масс волнового поля и его спектра в заданном поперечном сечении z .

При этом скорость решения квазиоптического уравнения (3.8) может быть существенно увеличена для осесимметричных и вытянутых прямых ловушек. В общем случае каждый шаг вдоль z требует решения трансцендентного уравнения относительно $k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})$ для четырехмерного массива точек \mathbf{x}, \mathbf{q} . В осесимметричной ловушке, где магнитное поле можно считать локально однонаправленным, решение $k_z(\mathbf{x}, z, \mathbf{q})$ не зависит от направления векторов \mathbf{x} и \mathbf{q} , что позволяет решать трансцендентное уравнение только для двумерного массива $|\mathbf{x}|, |\mathbf{q}|$.

Для решения квазиоптического уравнения (3.8) с определенным выше эволюционным оператором, расчета профиля энерговклада (3.13) в геометрии открытой магнитной ловушки и визуализации результатов был разработан новый код QOOT (Quasi-Optics for Open Traps) [10A]. Как уже отмечалось во введении, при разработке использовался квазиоптический код LAQO, созданный для тороидальных магнитных ловушек [75]. Однако, поскольку условия

распространения волн в теплой анизотропной плазме в прямой и тороидальной магнитных конфигурациях имеют существенные отличия, в итоге был создан, по сути, абсолютно новый код.

3.5 Моделирование ЭЦ нагрева плазмы на установке ГДЛ. Оптимизация параметров эксперимента.

Основная схема нагрева плазмы на установке ГДЛ использует режим захвата излучения неоднородным плазменным столбом. В основе эффекта лежит зависимость рефракции плазмы от величины магнитного поля. Излучение вводится через боковую поверхность плазменного столба со стороны сильного магнитного поля и распространяется в направлении центра ловушки. Поэтому к точке возможного выхода из плазменного столба излучение подходит при более низкой величине магнитного поля, чем в точке ввода. Можно показать, что этой вариации магнитного поля соответствует вариация продольного показателя преломления необыкновенной волны на первой гармонике $\Delta N_{||}^2 \approx \Delta \varepsilon_- (N_{||}^2/N^2 + \varepsilon_{||}) / (\varepsilon_+ + \varepsilon_{||})$ [62]. При этом может оказаться, что после прохода через плазменный столб $N_{||} > 1$, то есть возникают условия для полного внутреннего отражения. В результате плазма формирует своеобразный волновод, неоднородный как в поперечном, так и в продольном направлениях, по которому излучение доставляется к поверхности ЭЦ резонанса.

В областях отражения и поглощения волнового поля среда перестает быть плавнонеоднородной, что ставит под сомнение применимость геометрикооптического приближения. Поэтому в качестве первой задачи для нового квазиоптического кода была проведена проверка полученных ранее результатов геометрикооптического моделирования. В частности, была повторно проанализирована задача об оптимизации эффективности ЭЦР нагрева в ГДЛ [10А, 11А]. Ранее при оптимизации эффективности ЭЦР нагрева плазмы в ГДЛ было установлено, что нагрев может осуществляться в двух режимах с сильно различающимися распределениями поглощаемой СВЧ мощности [59, 60]. При этом управление радиальным распределением поглощаемой в условиях ЭЦР мощности осуществляется за счет относительно небольшой перестройки внешнего магнитного поля в окрестности резонансной поверхности.

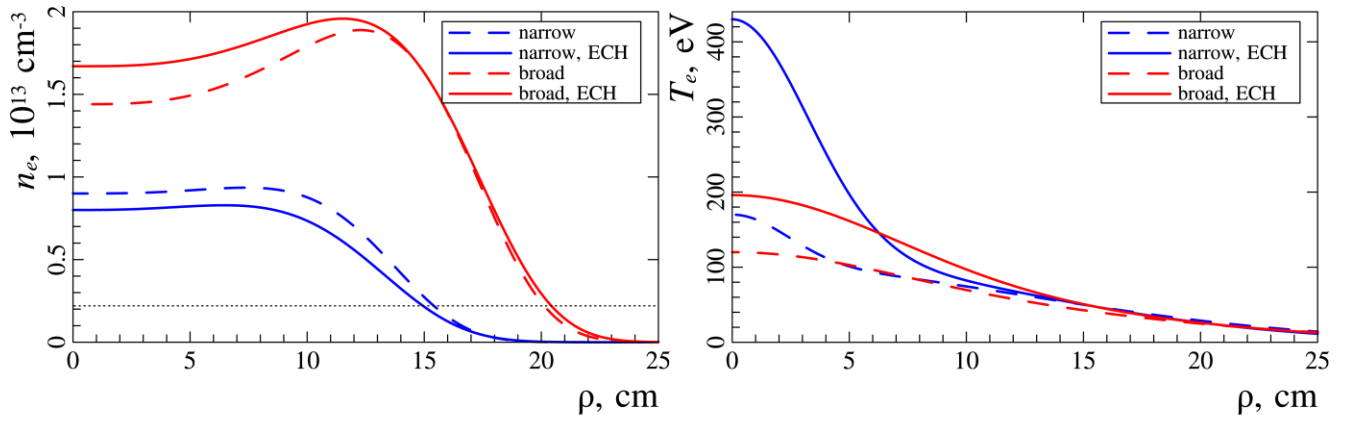


Рисунок 3.2: Радиальные распределения плотности плазмы и электронной температуры в ГДЛ в центральном сечении ловушки до (пунктирная линия) и после (сплошная линия) ЭЦ нагрева. При пересчете в другие сечения z профили масштабировались так, чтобы обеспечить постоянство магнитного потока через поперечное сечение плазменного столба. Горизонтальной линией отмечено значение плотности плазмы, которое определяет условную границу области плотной плазмы на Рисунках 3.3-3.5.

Расчеты проводились для экспериментально измеренных профилей плотности плазмы и температуры электронов до и после ЭЦ нагрева (Рисунок 3.2). Результаты расчетов приведены на Рисунках 3.3-3.5. Для двумерной визуализации квазиоптического пучка в плоскости (y, z) была выбрана интенсивность, то есть плотность потока энергии вдоль направления групповой скорости, проинтегрированная вдоль оси x (перпендикулярно плоскости рисунка)

$$J(y, z) = \int \frac{|\mathbf{v}_{gr}|}{|\mathbf{v}_{gr} \mathbf{z}_0|} |u|^2 dx, \quad \frac{|\mathbf{v}_{gr}|}{|\mathbf{v}_{gr} \mathbf{z}_0|} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \text{Re} k_z}{\partial k_x} \right)_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}^2 + \left(\frac{\partial \text{Re} k_z}{\partial k_y} \right)_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}^2}.$$

Для улучшения контраста использовалась логарифмическая цветовая шкала, отвечающая величине $\ln J$, что позволило отобразить решения с каустиками. Распределение поглощаемой мощности рассчитывалось по формуле (3.13), примененной в центральном сечении установки, проходящем через минимум магнитного поля.

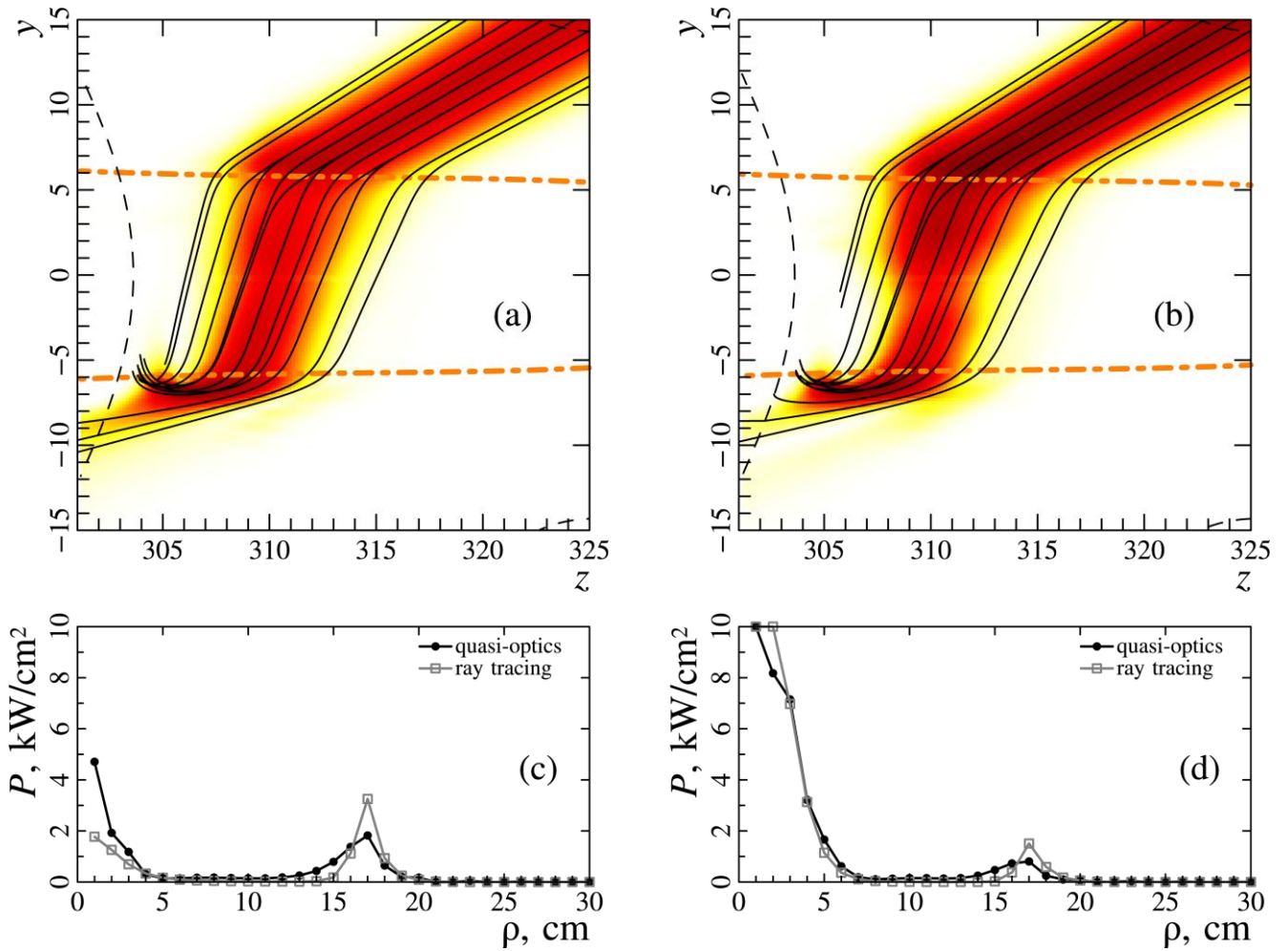


Рисунок 3.3: Распределения интенсивности поля в пучке (a,b) и профилей поглощаемой мощности (c,d) в режиме с «узким профилем энерговклада» в состоянии до (a,c) и после (b,d) нагрева. Сплошными на рисунках (a,b) показаны геометрооптические лучи. Пунктир и пунктир с точками на рисунках (a,b) показывают область ЭЦ резонанса и границу плотной плазмы соответственно. Эффективность поглощения почти 100 %.

На Рисунке 3.3 приведены результаты расчетов распределения интенсивности поля в пучке и профилей поглощаемой мощности в «режиме с узким профилем энерговклада». В экспериментах в этом режиме наблюдались рекордные для открытых магнитных систем температуры электронов порядка 1 кэВ. Левые и правые графики отвечают, соответственно, состояниям до и после ЭЦ нагрева. Для сравнения также приведены результаты геометрооптического моделирования. В данном случае профили поглощаемой мощности достаточно хорошо совпадают. Некоторое расхождение наблюдается на периферии плазменного шнура, отвечающей поглощению излучения после внутреннего отражения в окрестности каустической поверхности, где геометрическая оптика нарушается. Заметим, что ход геометрооптических лучей удовлетворительно воспроизводит квазиоптический пучок как до, так и внутри области каустики.

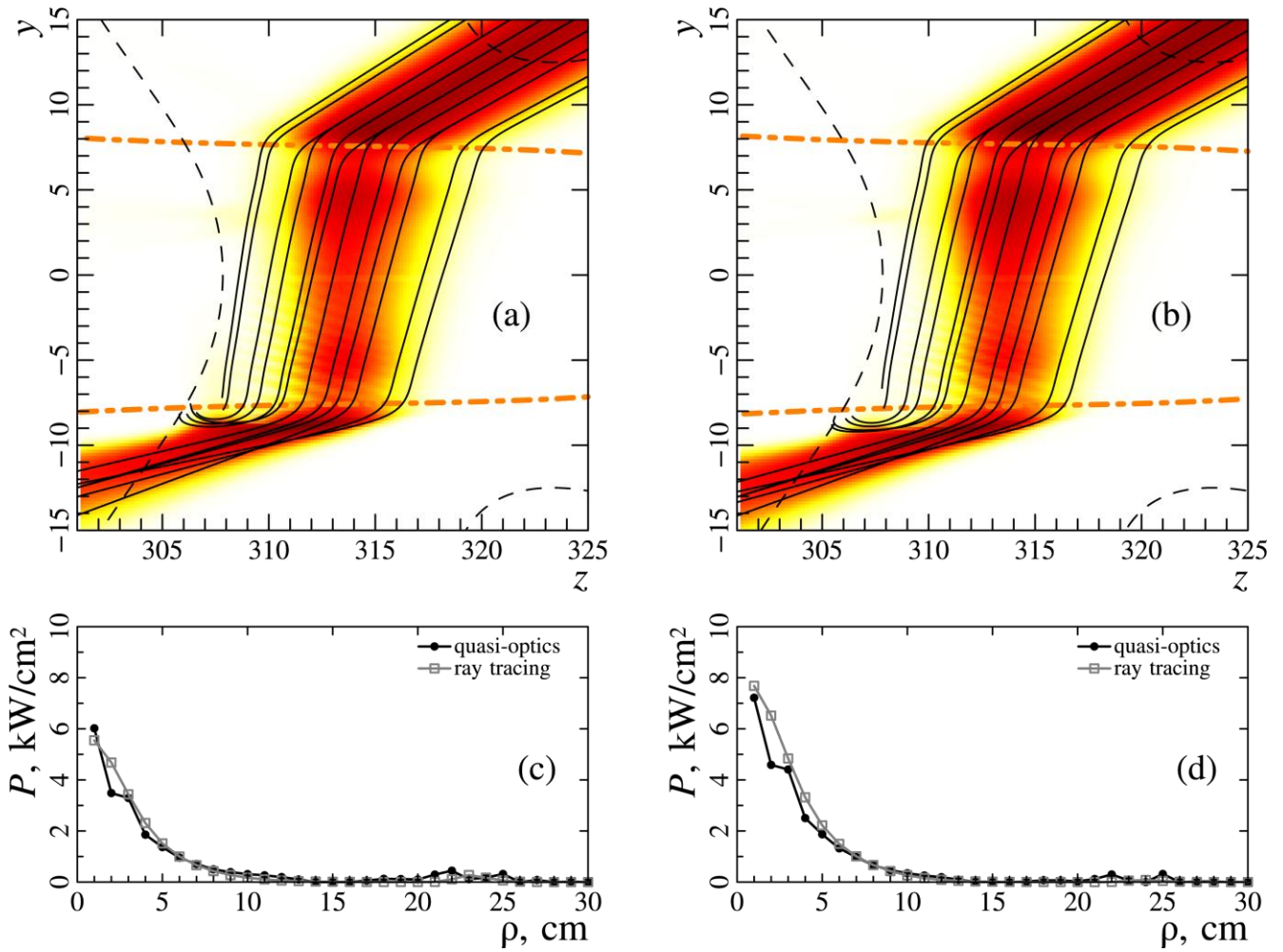


Рисунок 3.4: Распределения интенсивности поля в пучке (a,b) и профилей поглощаемой мощности (c,d) в режиме с «широким профилем энерговклада» в состоянии до (a,c) и после (b,d) нагрева. Сплошными на рисунках (a,b) показаны геометрооптические лучи. Пунктир и пунктир с точками на рисунках (a,b) показывают область ЭЦ резонанса и границу плазмы соответственно. Квазиоптические расчеты дают эффективность поглощения более 80 %.

На Рисунке 3.4 те же графики приведены для «режима с широким профилем энерговклада». В экспериментах в этом режиме наблюдалось заметное увеличение энергосодержания плазмы, связанное в улучшенным удержанием горячих ионов. В этом режиме наблюдается лучшее согласие квазиоптического и геометрооптического профилей поглощаемой мощности, поскольку доля поглощенной мощности в окрестности каустики в режиме с широким профилем энерговклада меньше. Как и геометрооптические расчеты, квазиоптическое моделирование предсказывает неполное поглощение СВЧ мощности в этом режиме.

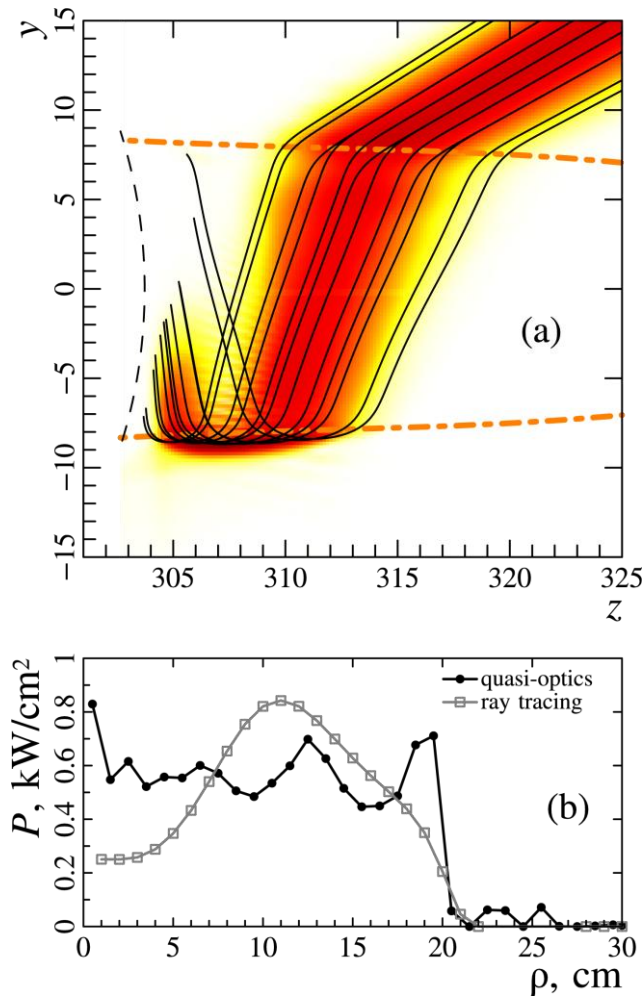


Рисунок 3.5: Распределение интенсивности поля в пучке (a) и профиль поглощаемой мощности (b) в режиме с «улучшенным широким профилем энерговклада» в состоянии до нагрева. Сплошными на рисунке (a) показаны геометрооптические лучи. Пунктир и пунктир с точками на рисунке (a) показывают область ЭЦ резонанса и границу плазмы соответственно. Эффективность поглощения почти 100 %.

На Рисунке 3.5 мы привели результаты расчета для «режима с улучшенным широким профилем энерговклада». Этот режим еще не был продемонстрирован в эксперименте, для его реализации в настоящее время производится модернизация пробочной катушки магнитной системы ГДЛ. Графики приведены только для стадии до СВЧ нагрева, поскольку экспериментальные данные о профилях плазмы после нагрева отсутствуют (профили до нагрева брались такими же, как для режима с широким профилем энерговклада). В этом режиме формируется протяженная область каустики, а доля поглощенной за каустикой мощности выше, чем в предыдущих рассмотренных режимах. Поэтому профили поглощенной мощности, рассчитанные в рамках квазиоптического и геометрооптического подходов, различаются достаточно сильно. Квазиоптическое моделирование предсказывает более равномерное распределение поглощаемой мощности, что в целом лучше отвечает конечной цели, ради

которой планируется реализовать данный режим. По мнению авторов квазиоптический метод дает более адекватное описание, однако подтверждение этого утверждения требует дополнительных исследований и экспериментов, результаты которых будут опубликованы отдельно.

В целом можно заключить, что для используемых на установке ГДЛ режимов геометрооптическое моделирование дает неплохое согласие с более точным квазиоптическим расчетом. Однако этот вывод не исключает возможного влияния эффектов пространственной дисперсии в области резонансной диссипации и потерь за счет дифракции излучения в окрестности каустик на эффективность нагрева в более оптимизированных сценариях.

3.6 Заключение к главе 3

Развитая ранее квазиоптическая теория распространения волновых пучков в высокотемпературной плазме, удерживаемой в тороидальных магнитных ловушках, обобщена на случай открытых магнитных систем. Специфика СВЧ нагрева в современных прямых ловушках потребовала существенной модификации квазиоптической теории, связанной с более аккуратным описанием эффектов пространственной дисперсии в области резонансной диссипации волн. В результате разработан универсальный квазиоптический код для моделирования электронно-циклотронного нагрева плазмы, позволяющей учесть все основные волновые эффекты (дифракцию, дисперсию и абберации) при распространении и поглощении электромагнитного волновых пучков в открытых ловушках.

Новый код был использован для верификации результатов оптимизации эффективности ЭЦР нагрева в открытой магнитной ловушке ГДЛ, полученных ранее с помощью геометрооптического моделирования. Показана возможность управления радиальным распределением поглощаемой СВЧ мощности за счет локальной модификации магнитной конфигурации в области ЭЦР и, в частности, возможность эффективного нагрева плазмы в приосевой области установки. Продемонстрировано влияние каустик на локализацию области СВЧ нагрева.

Заключение

В заключение приведем основные результаты диссертационной работы:

1. Развита теория линейного взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн ЭЦ диапазона частот в неоднородной магнитоактивной плазме в окрестности поверхности критической концентрации, основанная на решении новой модельной задачи, в которой, в отличие от ранее использовавшихся подходов, учитывается глобальная тороидальная геометрия магнитного поля и плазмы. Получена система эталонных уравнений и её решение, учитывающие влияние характерной для токамака неоднородности – кривизны силовых линий магнитного поля, неоднородности напряженности магнитного поля и постоянства давления плазмы на магнитных поверхностях.
2. Обнаружен новый эффект, связанный с кривизной магнитных поверхностей, который существенно влияет на эффективность линейной трансформации нормальных волн ЭЦ диапазона частот в тороидально-неоднородной магнитоактивной плазме. Показано, что эффективность трансформации снижается, когда поверхность фазового фронта медленной огибающей волнового пучка отличается от оптимальной, которая в установках с большим аспектным отношением с высокой точностью совпадает с поверхностью критической концентрации. Этот эффект может объяснить низкую эффективность нагрева закритической плазмы в токамаках и стеллараторах, систематически наблюдающуюся в большинстве экспериментов по линейной конверсии внешнего электромагнитного излучения в квазиэлектростатические бернштейновские волны. В то же время негативное влияние кривизны может быть полностью скомпенсировано оптимальной фокусировкой волнового пучка.
3. Исследованы особенности брэгговского рассеяния назад в условиях поляризационного вырождения нормальных волн в магнитоактивной плазме. Показано, что случай поляризационного вырождения в гиротропной плазме вблизи поверхности отсечки сильно отличается от общего случая, когда различные нормальные волны связаны слабо. Продемонстрировано, что после усреднения по случайным реализациям профилей плотности плазмы при условиях, отвечающих эффективной линейной трансформации, характерного для общего случая усиления обратного брэгговского рассеяния в области отсечки не происходит. В то же время среднеквадратичное отклонение случайного коэффициента отражения всегда оказывается много больше возмущения его среднего значения, что необходимо учитывать при диагностике

температуры плазмы, основанной на регистрации излучения электронных бернштейновских волн.

4. На основе усовершенствованного квазиоптического подхода разработан численный код для моделирования распространения электромагнитных волновых пучков СВЧ диапазона в открытых магнитных ловушках. Код позволяет одновременно учитывать эффекты дифракции, резонансной диссипации, сильной пространственной дисперсии и пространственной неоднородности.
5. Новый квазиоптический подход был использован для исследования эффективных способов ЭЦ нагрева плазмы в перспективных открытых магнитных ловушках. В частности, квазиоптическое моделирование профилей распределения поглощенной СВЧ мощности в крупномасштабной газодинамической ловушке ГДЛ (ИЯФ СО РАН, Новосибирск) подтвердило результаты, полученные ранее с помощью геометрического моделирования для уже реализованных в эксперименте сценариев ЭЦ нагрева. Для установки ГДЛ предложен новый улучшенный сценарий ЭЦ нагрева плазмы, в котором реализуется равномерный нагрев всего объема плазмы в магнитной ловушке.

**Основные публикации автора по теме
диссертационной работы**

- [1A] Хусаинов Т. А., Господчиков Е. Д., Шалашов А. Г. Влияние кривизны магнитных поверхностей на линейную трансформацию волн электронного циклотронного диапазона в плазме токамака // Физика Плазмы. – 2012. – Т. 38. – №. 2. – С. 99.
- [2A] Gospodchikov E. D., Khusainov T. A., Shalashov A. G. Impact of poloidal curvature on linear mode conversion of quasi-optical wave beams in tokamak plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2012. – Vol. 54(4). – P. 045009.
- [3A] Gospodchikov E. D., Khusainov T. A., Shalashov A. G. Electron temperature effects in linear coupling of electron-cyclotron waves near the cut-off layers in fusion plasmas // Problems of atomic science and technology. – 2012. – Vol. 82(6) – P. 64-66
- [4A] Gospodchikov E. D., Khusainov T. A., Shalashov A. G. Curvature effects on linear mode-conversion of electron cyclotron waves in tokamak plasmas // Proceedings of 8th International Workshop “Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications”. (09-16.06.2011, Nizhny Novgorod). N. Novgorod: Institute of Applied Physics RAS. – 2011. – P. 179-180.
- [5A] Gospodchikov E. D., Khusainov T. A., Shalashov A. G. On the linear O-X mode-coupling in warm magnetized plasmas in toroidal magnetic traps // EPS Series. – 2012. – Vol. 36F. – P. P5.067
- [6A] Gospodchikov E.D., Khusainov T.A., Shalashov A.G. Electron temperature effects in linear coupling of electron-cyclotron waves near the cut-off layers in fusion plasmas // Proceedings of “International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion Alushta-2012”. (17-21.09.2012, Alushta) Kharkov Institute of Physics and Technology – 2012 – P. 49.
- [7A] Господчиков Е. Д., Хусаинов Т. А., Шалашов А. Г. Ослабление обратного брэгговского рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях плотности в окрестности области поляризационного вырождения в магнитоактивной плазме // Физика плазмы. – 2016. – Т. 42. – №. 8. – С. 695–706.
- [8A] Shalashov A. G., Gospodchikov E. D., Khusainov T. A. Theory of the O-X mode coupling in fluctuating plasmas // Proceedings of 9th International Workshop “Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications”. (24-30.06.2014, Nizhny Novgorod). N. Novgorod: Institute of Applied Physics RAS. – 2014. – P. 111-112.

- [9A] Gospodchikov E. D., Shalashov A. G., Khusainov T. A. Theory of the ordinary and extraordinary mode coupling in fluctuating plasmas // *EPS Series* – 2015. – Vol. 39E. – P. 5.408
- [10A] Shalashov A. G., Balakin A. A., Gospodchikov E. D., Khusainov T. A. Quasi-optical theory of microwave plasma heating in open magnetic trap // *Physics of Plasmas*. – 2016. – Vol. 23(11). – P. 112504.
- [11A] Шалашов А. Г., Балакин А. А., Хусаинов Т.А., Господчиков Е.Д., Соломахин А. Л. Квазиоптическое моделирование ЭЦ нагрева плазмы в прямой магнитной ловушке // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. – 2017. – Т. 151. – №. 2. – С. 379–395.
- [12A] Bagryansky P.A., Anikeev A.V., Balakin A.A., Denisov G.G., Gospodchikov E.D., Ivanov A.A., Lizunov A.A., Khusainov T.A., Kovalenko Yu.V., Malygin V.I., Maximov V.V., Korobeinikova O.A., Murakhtin S.V., Pinzhenin E.I., Prikhodko V.V., Savkin V.Ya., Shalashov A.G., Smolyakova O.B., Soldatkina E.I., Solovakhin A.L., Yakovlev D.V., Zaytsev K.V. ECR plasma heating experiment in the GDT magnetic mirror // *EPS Series* – 2015. – Vol. 39E. – P. O5.140.

Список литературы

- [1] Thumm M. Recent advances in the worldwide fusion gyrotron development // *IEEE Transactions on Plasma Science*. – 2014. – Vol. 42 (3). – P. 590-599.
- [2] Kariya T. et al. Development of gyrotrons for fusion with power exceeding 1 MW over a wide frequency range // *Nuclear Fusion*. – 2015. – Vol. 55 (9). – P. 093009.
- [3] Litvak A. G. et al. Development in Russia of megawatt power gyrotrons for fusion // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. – 2011. – Vol. 32 (3). – P. 337-342.
- [4] Gandini F. et al. The EC H&CD transmission line for ITER // *Fusion Science and Technology*. – 2011. – Vol. 59 (4). – P. 709-717.
- [5] Strauss D. et al. Preliminary design of the ITER ECH Upper Launcher // *Fusion Engineering and Design*. – 2013. – Vol. 88 (11). – P. 2761-2766.
- [6] Kasperek W. et al. Remote-Steering Launchers for the ECRH system on the Stellarator W7-X // *EPJ Web of Conferences*. – EDP Sciences, 2015. – Vol. 87. – P. 04005.
- [7] Luce T. C. Applications of high-power millimeter waves in fusion energy research // *IEEE transactions on plasma science*. – 2002. – Vol. 30 (3). – P. 734-754.
- [8] Prater R. Heating and current drive by electron cyclotron waves // *Physics of Plasmas*. – 2004. – Vol. 11 (5). – P. 2349-2376.
- [9] Preinhaelter, J., Irzak, M.A., Vahala, L., Vahala, G. Electron cyclotron resonance heating in spherical plasmas: O-X-EBW mode conversion in MAST // *Review of Scientific Instruments*. – 2001. – Vol. 72 (1). – P.391-393.
- [10] Голант В. Е., Пилия А. Д. Линейная трансформация и поглощение волн в плазме // *Успехи физических наук*. – 1971. – Т. 104. – №. 3. – С. 413-457.
- [11] Laqua H. P. Electron Bernstein wave heating and diagnostic // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2007. – Vol. 49 (4). – P. R1–R42.
- [12] Preinhaelter J., Kopecký V. Penetration of high-frequency waves into a weakly inhomogeneous magnetized plasma at oblique incidence and their transformation to Bernstein modes // *Journal of Plasma Physics*. – 1973. – Vol. 10 (1). – P. 1-12.
- [13] Maekawa T. et al. Wave trajectory and electron-cyclotron heating in toroidal plasmas // *Physical Review Letters*. – 1978. – Vol. 40 (21). – P. 1379.

- [14] Mjølhus E. Coupling to Z mode near critical angle // *Journal of plasma physics*. – 1984. – Vol. 31 (1). – P. 7-28.
- [15] Laqua H. P. et al. Resonant and nonresonant electron cyclotron heating at densities above the plasma cutoff by OXB mode conversion at the W7-AS stellarator // *Physical review letters*. – 1997. – Vol. 78 (18). – P. 3467.
- [16] Laqua H. P. et al. Electron Bernstein wave heating and emission via the OXB process at W7-AS // *Plasma physics and controlled fusion*. – 1999. – Vol. 41 (3A). – P. A273.
- [17] Laqua H. P. et al. Electron-Bernstein-wave current drive in an overdense plasma at the Wendelstein 7-AS stellarator // *Physical review letters*. – 2003. – Vol. 90 (7). – P. 075003.
- [18] Shevchenko V. F. et al. Prospects of EBW emission diagnostic and EBW heating in spherical tokamaks // *Proceedings of 13th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating (17-20.05.2004, Nizhny Novgorod, Russia)*. N. Novgorod: Institute of Applied Physics RAS. – 2004. – P. 162.
- [19] Shevchenko V. et al. Development of electron Bernstein wave research in MAST // *Fusion science and technology*. – 2007. – Vol. 52 (2). – P. 202-215.
- [20] Shevchenko V. F. et al. Electron Bernstein wave assisted plasma current start-up in MAST // *Nuclear Fusion*. – 2010. – Vol. 50 (2). – P. 022004.
- [21] Pochelon A. et al. Electron Bernstein wave heating of over-dense H-mode plasmas in the TCV tokamak via OXB double mode conversion // *Nuclear Fusion*. – 2007. – Vol. 47 (11). – P. 1552.
- [22] Mueck A. et al. Demonstration of Electron-Bernstein-Wave Heating in a Tokamak via O-X-B Double-Mode Conversion // *Physical review letters*. – 2007. – Vol. 98 (17). – P. 175004.
- [23] Preinhaelter J. et al. EBW power deposition and current drive in WEGA—comparison of simulation with experiment // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2009. – Vol. 51 (12). – P. 125008.
- [24] Igami H. et al. Searching for O-X-B mode-conversion window with monitoring of stray microwave radiation in LHD // *Review of scientific instruments*. – 2006. – Vol. 77 (10). – P. 10E931.
- [25] Balakina, M. A., Shalashov, A. G., Gospodchikov, E. D., Smolyakova, O. B. Modeling of OXB conversion of electromagnetic radiation in tokamak plasmas // *Radiophysics and quantum electronics*. – 2006. – Vol. 49 (8). – P. 617-632.

- [26] Gusakov E. Z., Surkov A. V. Induced backscattering in an inhomogeneous plasma at the upper hybrid resonance // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2007. – Vol. 49 (5). – P. 631.
- [27] Токман М. Д. О линейной трансформации электромагнитных волн в магнитоактивной плазме при распространении под углом к градиенту концентрации // *Физика плазмы*. – 1985. – Т. 10. – С. 1205.
- [28] Тимофеев А. В. О прохождении электромагнитных колебаний через критическую поверхность // *Физика плазмы*. – 2000. – Т. 26. – С. 874.
- [29] Тимофеев А. В. Волны в плазме в магнитном поле вблизи критической поверхности // *Успехи физических наук*. – 2004. – Т. 174. – №. 6. – С. 609-637.
- [30] Preinhaelter J. Penetration of an ordinary wave into a weakly inhomogeneous magnetoplasma at oblique incidence // *Czechoslovak Journal of Physics B*. – 1975. – Vol. 25 (1). – P. 39-50.
- [31] Hansen F. R. et al. Full-wave calculations of the OX mode conversion process // *Journal of plasma physics*. – 1988. – Vol. 39 (2). – P. 319-337.
- [32] Cairns R. A., Lashmore-Davies C. N. The prospects for electron Bernstein wave heating of spherical tokamaks // *Physics of Plasmas*. – 2000. – Vol. 7 (10). – P. 4126-4134.
- [33] Weitzner H. OX mode conversion in an axisymmetric plasma at electron cyclotron frequencies // *Physics of Plasmas*. – 2004. – Vol. 11 (3). – P. 866-877.
- [34] Gospodchikov E. D., Shalashov A. G., Suvorov E. V. On the influence of 2D inhomogeneity on electromagnetic mode conversion near the cut-off surfaces in magnetized plasmas // *Plasma physics and controlled fusion*. – 2006. – Vol. 48 (6). – P. 869.
- [35] Попов А. Ю., Пилия А. Д. О трансформации нормальных волн в области критической плотности плазмы в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью в диапазоне электронных циклотронных частот // *Физика плазмы*. – 2007. – Т. 33. – №. 2. – С. 128-136.
- [36] Gospodchikov E. D., Shalashov A. G., Suvorov E. V. Effects of two-dimensional inhomogeneity in OX mode conversion in tokamak plasmas // *Fusion Science and Technology*. – 2008. – Vol. 53 (1). – P. 261-278.
- [37] Шалашов А. Г., Господчиков Е. Д., Суворов Е. В. О структуре волновых полей в области линейного взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн в

двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2006. – Т. 130. – №. 3. – С. 554-572.

- [38] Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. On perfect O–X mode conversion near the cut-off surfaces in magnetized plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2008. – Vol. 50 (4). – P. 045005.
- [39] Irzak M. A., Popov A. Y. 2D Modeling of the O–X conversion in toroidal plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2008. – Vol. 50 (2). – P. 025003.
- [40] Popov A. Y. On O–X mode conversion in spherical tokamaks // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2007. – Vol. 49 (10). – P. 1599.
- [41] Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. On O–X mode conversion near the cut-off surfaces in 3D sheared magnetic field // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – Vol. 52 (11). – P. 115001.
- [42] Popov A. Yu. On O–X mode conversion in 2D inhomogeneous plasma with a sheared magnetic field // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – Vol. 52 (3). – P. 035008.
- [43] Köhn A. et al. Full-wave calculation of the O–X–B mode conversion of Gaussian beams in a cylindrical plasma // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2008. – Vol. 50 (8). – P. 085018.
- [44] Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. Theory of the ordinary and extraordinary mode coupling in fluctuating plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2014. – Vol. 56 (12). – P. 125011.
- [45] Popov A. Anomalous reflection of electromagnetic waves at O-X mode conversion in 2D inhomogeneous turbulent plasma // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2014. – Vol. 57 (2). – P. 025010.
- [46] Zhiltsov V. A. et al. OGRA-4 open trap electron confinement peculiarities upon longitudinal microwave-input ECR heating // Plasma Physics Reports. – 1994. – Vol. 20 (3). – P. 242-251.
- [47] Golubev S. V. et al. Formation of multicharged ions in plasma of ECR discharge sustained by powerful millimeter wave radiation in a mirror trap // Fusion technology. – 1999. – Vol. 35 (1T). – P. 288-291.

- [48] Vodopyanov A. V. et al. Soft X-rays generated by the electron-cyclotron resonance discharge in heavy gases sustained by a high-power microwave beam in a magnetic trap // Technical Physics Letters. – 2000. – Vol. 26 (12). – P. 1075-1077.
- [49] Golubev S. V. et al. Formation of multi-charged ions and plasma stability at quasigasdynamic plasma confinement in a mirror magnetic trap // Review of Scientific Instruments. – 2000. – Vol. 71 (2). – P. 669-671.
- [50] Thuillier T. et al. A-PHOENIX, an electron cyclotron resonance ion source for the Spiral 2 facility // Review of scientific instruments. – 2006. – Vol. 77 (3). – P. 03A323.
- [51] Latrasse L. et al. SEISM: A 60 GHz cusp electron cyclotron resonance ion source // Review of Scientific Instruments. – 2010. – Vol. 81 (2). – P. 02A324.
- [52] Tamano T. Tandem mirror experiments in GAMMA 10 // Physics of Plasmas. – 1995. – Vol. 2 (6). – P. 2321-2327.
- [53] Cho T. et al. Active control of internal transport barrier formation due to off-axis electron-cyclotron heating in GAMMA 10 experiments a // Physics of Plasmas. – 2008. – Vol. 15 (5). – P. 056120.
- [54] Imai T. et al. Status and plan of GAMMA 10 tandem mirror program // Fusion Science and Technology. – 2011. – Vol. 59 (1T). – P. 1-8.
- [55] Minami R. et al. Experimental Results and Design of Mirror Antenna and MW Gyrotron for Control of High Intermittent Heat Flux in GAMMA 10 Tandem Mirror // Fusion Science and Technology. – 2015. – Vol. 68 (1). – P. 142-146.
- [56] Simonen T. C., Horton R. The highest energy confinement measured on TMX-U // Nuclear Fusion. – 1989. – Vol. 29 (8). – P. 1373.
- [57] Bagryansky P. A., Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. et al. Threefold increase of the bulk electron temperature of plasma discharges in a magnetic mirror device // Physical review letters. – 2015. – Vol. 114 (20). – P. 205001.
- [58] Bagryansky P. A. et al. First results of an auxiliary electron cyclotron resonance heating experiment in the GDT magnetic mirror // Nuclear Fusion. – 2014. – Vol. 54 (8). – P. 082001.
- [59] Bagryansky P. A., Anikeev A. V., Denisov G. G., Gospodchikov E. D. et al. Overview of ECR plasma heating experiment in the GDT magnetic mirror // Nuclear Fusion. – 2015. – Vol. 55 (5). – P. 053009.

- [60] Bagryansky P. A., Gospodchikov E. D., Kovalenko Y. V., Lizunov A. A. et al. Electron cyclotron resonance heating experiment in the GDT magnetic mirror: Recent experiments and future plans // *Fusion Science and Technology*. – 2015. – Vol. 68 (1). – P. 87-91.
- [61] Simonen T. C. Three Game Changing Discoveries: A Simpler Fusion Concept? // *Journal of Fusion Energy*. – 2016. – Vol. 35 (1). – P. 63-68.
- [62] Shalashov A. G., Gospodchikov E. D., Smolyakova O. B., Bagryansky P. A. et al. Auxiliary ECR heating system for the gas dynamic trap // *Physics of Plasmas*. – 2012. – Vol. 19 (5). – P. 052503.
- [63] Bagryansky P. A. et al. ECR heating system for the gas dynamic trap // *Fusion Science and Technology*. – 2013. – Vol. 63 (1T). – P. 40-45.
- [64] Балакин А. А. Волновые пучки в плавно неоднородных анизотропных средах: квазиоптическое уравнение (часть 2) // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. – 2012. – Т. 55. – №. 8. – С. 555-564.
- [65] Балакин А. А., Балакина М. А., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. Скалярное уравнение для волновых пучков в магнитоактивной плазме // *Физика плазмы*. – 2007. – Т. 33. – №. 4. – С. 337-345.
- [66] Ginsburg V. L. On the influence of the terrestrial magnetic field on the reflection of radio waves from the ionosphere // *J. Phys.* – 1943. – Vol. 7. – P. 289-304.
- [67] Гинзбург В. Л. К теории распространения электромагнитных волн в магнитоактивной среде // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1948. – Т. 18. – С. 487.
- [68] Balakin A A, Buyanova M N, Gospodchikov E D, Shalashov A G. Novel quasi-optical approach to studying the linear mode-conversion in magnetic fusion devices // *Proceedings of 8th International Workshop “Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications”*. (09-16.06.2011, Nizhny Novgorod). N. Novgorod: Institute of Applied Physics RAS. – 2011. – P. 177-178.
- [69] Bruschi A. et al. A new launcher for real-time ECRH experiments on FTU // *Fusion Science and Technology*. – 2009. – Vol. 55 (1). – P. 94-107.
- [70] Bin W. et al. Design of a new ECRH launcher for FTU tokamak // *Fusion Engineering and Design*. – 2009. – Vol. 84 (2). – P. 451-456.
- [71] Bin W. et al. Feasibility study of O–X coupling for overdense plasma heating through O–X–B mode conversion in FTU // *Nuclear Fusion*. – 2013. – Vol. 53 (8). – P. 083020.

- [72] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. Пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 808 с. – ISBN 5-9221-0057-2 (Т. III).
- [73] Farina D. A quasi-optical beam-tracing code for electron cyclotron absorption and current drive: GRAY // Fusion Science and Technology. – 2007. – Vol. 52 (2). – P. 154-160.
- [74] Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
- [75] Balakin A. A., Balakina M. A., Westerhof E. ECRH power deposition from a quasi-optical point of view // Nuclear Fusion. – 2008. – Vol. 48 (6). – P. 065003.
- [76] Bertelli N., Balakin A. A., Westerhof E., Buyanova M. N. ECCD calculations in ITER by means of the quasi-optical code // Nuclear Fusion. – 2010. – Vol. 50 (11). – P. 115008.
- [77] Clairet F. et al. Advances of the density profile reflectometry on TORE SUPRA // Review of scientific instruments. – 2003. – Vol. 74 (3). – P. 1481-1484.
- [78] Da Silva F. et al. A Numerical study of forward-and backscattering signatures on Doppler-reflectometry signals // IEEE Transactions on Plasma Science. – 2010. – Vol. 38 (9). – P. 2144-2149.
- [79] Boucher I. et al. One-dimensional analytical model of the phase shift due to Bragg backscattering of an ordinary wave by large amplitude density fluctuations // Plasma physics and controlled fusion. – 1998. – Vol. 40 (8). – P. 1489.
- [80] Gusakov E. Z., Heuraux S., Popov A. Yu. Strong Bragg backscattering in reflectometry // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2009. – Vol. 51 (6). – P. 065018.
- [81] Gusakov E. Z. Theory of cross-polarization scattering at the upper hybrid resonance // Plasma Physics Reports. – 2002. – Vol. 28 (7). – P. 580-585.
- [82] Popov A. Yu. On O-X mode conversion in 1D inhomogeneous turbulent plasma // EPS Series. – 2014. – Vol. 38F. – P. 4.048.
- [83] Volpe F. Electron Bernstein emission diagnostic of electron temperature profile at W7-AS Stellarator // Ph. D. Thesis. Ernst-Moritz-Arndt-Universität. – Greifswald. – 2003.
- [84] Шалашов А. Г., Господчиков Е. Д. Импедансный метод решения задач распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181. – №. 2. – С. 151-172.
- [85] Шалашов А. Г., Господчиков Е. Д. О структуре уравнений Максвелла в области линейного взаимодействия электромагнитных волн в плавнонеоднородных

анизотропных и гиротропных средах // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182. – №. 2. – С. 157-171.

- [86] Mazzucato E., Nazikian R. Microwave reflectometry for the study of density fluctuations in tokamak plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 1991. – Vol. 33 (3). – P. 261.
- [87] Popov A., Irzak M. On correlation measurements of electron Bernstein wave emission // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2014. – Vol. 56 (2). – P. 025002.
- [88] Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. Mode-impedance technique for modeling of electromagnetic wave propagation in plasmas // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – Vol. 52 (2). – P. 025007.
- [89] Sysoeva E. V., Gusakov E. Z., Heuraux S. Transition into diffusive regime of propagation of probing electromagnetic waves in a turbulent inhomogeneous plasma and limitations for microwave reflectometry in reactor scale devices // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2013. – Vol. 55 (11). – P. 115001.
- [90] Gerbaud T. et al. Comparison of density fluctuation measurements between O-mode and X-mode reflectometry on Tore Supra // Review of scientific instruments. – 2006. – Vol. 77 (10). – P. 10E928.
- [91] McKee G. R. et al. Non-dimensional scaling of turbulence characteristics and turbulent diffusivity // Nuclear Fusion. – 2001. – Vol. 41 (9). – P. 1235.
- [92] Sysoeva E. V., Gusakov E. Z., Heuraux S. Transition into diffusive regime of propagation of probing electromagnetic waves in a turbulent inhomogeneous plasma and limitations for microwave reflectometry in reactor scale devices // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2013. – Vol. 55 (11). – P. 115001.
- [93] Yakovlev D. V., Shalashov A. G., Gospodchikov E. D., Solomakhin A. L., Savkin V. Y., Bagryansky P. A. Electron cyclotron plasma startup in the GDT experiment // Nuclear Fusion. – 2016. – Vol. 57 (1). – P. 016033.
- [94] Stallard B. W., Matsuda Y., Nevins W. M. Fokker-Planck calculations of hot-electron formation by electron cyclotron resonance heating in the TMX-Upgrade tandem mirror // Nuclear Fusion. – 1983. – Vol. 23 (2). – P. 213-223.
- [95] Gospodchikov E. D., Suvorov E. V. On Cyclotron Absorption of Electromagnetic Waves with Longitudinal Propagation in Magnetized Plasma // Radiophysics and Quantum Electronics. – 2005. – Vol. 48 (8). – P. 641-647.

- [96] Балакин А. А. Волновые пучки в плавно неоднородных анизотропных средах: одномодовое описание (часть 1) // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2012. – Т. 55. – №. 7. – С. 521-532.
- [97] Balakin A. A., Balakina M. A., Permitin G. V., Smirnov A. I. Quasi-optical description of wave beams in smoothly inhomogeneous anisotropic media // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2007. – Vol. 40 (14). – P. 4285.
- [98] Балакин А. А. Волновые пучки в плавно неоднородных анизотропных средах: безабберационное приближение (часть 3) // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2012. – Т. 55. – №. 9. – С. 617-625
- [99] Maj O., Balakin A. A., Poli E. Effects of aberration on paraxial wave beams: beam tracing versus quasi-optical solutions // Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2010. – Vol. 52 (8). – P. 085006.
- [100] Pereverzev G. V. // Reviews of Plasma Physics Vol. 19, ed. by Kadomtsev V. B., Consultants Bureau. – New York. – 1996. – p.1.
- [101] Pereverzev G. V. Beam tracing in inhomogeneous anisotropic plasmas // Physics of Plasmas. – 1998. – Vol. 5 (10). – P. 3529-3541.
- [102] Balakin A. A., Gospodchikov E. D. Operator formalism for permittivity tensor in smoothly inhomogeneous media with spatial dispersion // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2015. – Vol. 48 (21). – P. 215701.
- [103] Балакин А. А., Господчиков Е. Д., Шалашов А. Г. О построении квазиоптического приближения в диссипативных средах с пространственной дисперсией // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2016. – Т. 104. – №. 10. – С. 701-707.
- [104] Fraiman G. M. et al. Long-term evolution of strong 2-D NSE turbulence // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1995. – Vol. 87 (1-4). – P. 325-334.
- [105] Самарский А. А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 288 с. — ISBN 5-8114-0602-9
- [106] Балакин А. А., Балакина М. А., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. Влияние диссипации на распространение волновых пучков в неоднородных анизотропных и гиротропных средах // Физика плазмы. – 2008. – Т. 34. – №. 6. – С. 533-547.