

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи

Кияшко Сергей Борисович

**ЭВОЛЮЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН
В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ
С СИЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

01.04.06 - акустика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
В.Е. Назаров

Нижний Новгород - 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Нелинейные волновые процессы в водоподобных средах, содержащих систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью	10
1.1. Модель капилляра и основные предположения.....	10
1.2. Уравнение состояния капилляра и пористой водоподобной среды.....	12
1.3. Генерация второй гармоники.....	20
1.4. Генерация волны разностной частоты.....	22
1.5. Самодетектирование высокочастотных импульсов.....	24
1.6. Амплитудно-фазовые эффекты при распространении гармонической волны в поле статической нагрузки.....	25
1.7. Заключение.....	26
Глава 2. Акустические волны в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью	28
2.1. Распространение акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и вязкой диссипацией.....	29
2.1.1. Волновое уравнение для однородной разномодульной среды с вязкой диссипацией.....	29
2.1.2. Стационарные волны.....	31
2.1.3. Самоподобные импульсные и периодические волны.....	32
2.1.4. Нелинейная эволюция первоначально гармонической волны.....	34
2.2. Распространение акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией.....	37
2.2.1. Уравнение состояния и волновое уравнение для однородной разномодульной среды с релаксацией.....	38
2.2.2. Стационарные волны.....	39
2.2.3. Самоподобные импульсные и периодические волны.....	41
2.2.4. Эволюция акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией.....	45
2.2.5. Схема численного решения нелинейного волнового уравнения.....	48
2.2.6. Результаты численного счета.....	52
2.3. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией.....	55
2.3.1. Уравнение состояния и волновое уравнение для микронеоднородной среды с разномодульной нелинейностью и релаксацией.....	56

2.3.2. Генерация гармоник НЧ и ВЧ волн.....	59
2.3.3. Стационарные волны.....	60
2.3.4. Самоподобные волны.....	62
2.3.5. Эволюция НЧ гармонических волн: численное решение.....	63
2.4. Заключение.....	66
Глава 3. Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью.....	68
3.1. Распространение пилообразных акустических волн в средах с гистерезисной нелинейностью.....	70
3.1.1. Пилообразные волны в среде с упругой квадратичной нелинейностью.....	71
3.1.2. Пилообразные волны в среде с упругим гистерезисом.....	74
3.1.3. Пилообразные волны в среде с неупругим гистерезисом.....	79
3.2. Акустические волны в средах с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.....	82
3.2.1. Уравнение состояния поликристалла с насыщением гистерезисных потерь.....	82
3.2.2. АЗВТ и генерация высших гармоник при распространении гармонической волны.....	83
3.2.3. Результаты численного счета.....	87
3.3. Нелинейные эффекты в резонаторе с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.....	91
3.3.1. АЗВТ и генерация высших гармоник в резонаторе с гистерезисной нелинейностью.....	92
3.3.2. Мало-амплитудный режим ($\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1$).....	94
3.3.3. Режим насыщения ($\gamma_0 \varepsilon_m \gg 1$).....	97
3.3.4. Нелинейные эффекты АЗВТ в резонаторе из отожженной меди.....	97
3.4. Распространение однополярных возмущений в средах с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.....	101
3.5. Волновые процессы в средах с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.....	104
3.5.1. Неупругий гистерезис с насыщением нелинейных потерь.....	104
3.5.2. Эволюция гармонической волны в безграничной среде.....	105
3.5.3. АЗВТ и генерация высших гармоник в резонаторе с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.....	111
3.6. Заключение.....	114
Основные результаты.....	116
Литература.....	118

Введение.

В последнее время в акустике все большее внимание уделяется изучению нелинейных волновых процессов (НВП) в средах, акустическая нелинейность которых является аномально-высокой по сравнению со слабо-нелинейными однородными твердотельными средами, описываемыми “классической” пятиконстантной теорией упругости [1,2]. Высокой акустической нелинейностью обладают микронеоднородные (или, в англоязычной литературе, мезоскопические [3]) среды. (Согласно определению Л.И.Мандельштама [4,61], микронеоднородной называется среда, содержащая микронеоднородности или дефекты, размер которых много больше атомарного, но много меньше длины волны, при этом на длине волны находится много дефектов, а их распределение в пространстве однородно, так что среду, в среднем, можно считать «макрооднородной» на участках, больших по сравнению с размерами дефектов, но малых по сравнению с длиной волны.) К дефектам в твердых телах относятся дислокации, полости, трещины, зерна, контакты и т.д. Такие дефекты являются нелинейными, при этом они, как правило, обладают и большей (по сравнению с окружающей однородной средой) сжимаемостью, так что при достаточно высокой концентрации дефектов именно они определяют высокую нелинейность микронеоднородных твердых тел [5]. При описании нелинейных волновых процессов в средах с сильной акустической нелинейностью можно считать, что нелинейность уравнения состояния среды преобладает над геометрической нелинейностью уравнений движения и последней можно пренебречь. В этом приближении уравнения теории упругости в лагранжевой и эйлеровой формах совпадают [6]. (Следует, однако, отметить, что как и для однородных сред, нелинейность микронеоднородных сред также является малой, в том смысле, что для деформаций, характерных для акустических волн, нелинейное слагаемое $f(\varepsilon)$ в уравнении состояния микронеоднородной среды (в зависимости $\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)]$, σ и ε - напряжение и деформация, E - модуль упругости) всегда много меньше линейного, т.е. $|f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon| \ll 1$, но, конечно, $|f(\varepsilon)| \gg |\gamma|\varepsilon^2$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{th}$, $|\gamma| \leq 5$, где γ - квадратичный параметр нелинейности однородного твердого тела [2], ε_{th} - предел текучести твердого тела, при превышении которого в нем возникают необратимые пластические деформации и происходит его разрушение; для многих материалов $|\varepsilon_{th}| > 10^{-4} - 10^{-3}$.)

Часто уравнения состояния дефектов, а соответственно и микронеоднородных твердых тел, являются неаналитическими и содержат реактивную (упругую), диссипативную (неупругую) или гистерезисную нелинейности. Так, например, дислокации являются причиной гистерезисной нелинейности поликристаллов [7] (при этом в некоторых из них имеет место насыщение гистерезисных потерь), трещины с ровными поверхностями (без

адгезии) приводят к разномодульной нелинейности твердых тел (т.е. к различию модулей упругости при их растяжении и сжатии) [8], зеренная структура гранулированных (или зернистых) сред определяет упругую дробно-степенную нелинейность с показателем степени, близким к $3/2$ [1] и т.д. “Неаналитичность” уравнения состояния микронеоднородных сред обуславливает возникновение в них широкого “спектра” нелинейных эффектов, не наблюдаемых в однородных средах и не описываемых пятиконстантной теорией упругости. Кроме того, подобные дефекты проявляют и релаксационные свойства; это приводит к тому, что микронеоднородные среды обладают релаксационными дисперсией и диссипацией, а также релаксационной (следовательно, частотно-зависимой) нелинейностью [9]. В результате, проявления нелинейных эффектов, возникающих при распространении и взаимодействии акустических волн в различных микронеоднородных средах, является не только количественно, но и качественно различным, что можно использовать для их диагностики и неразрушающего контроля. Этому также способствует и то, что нелинейные акустические свойства таких сред являются более чувствительными к наличию в них дефектов, чем линейные [5].

К микронеоднородным сильно-нелинейным твердотельным средам относятся многие поликристаллические горные породы (гранит, известняк, магнезит, мрамор, песчаник, речной песок и т.д.), металлы (медь, свинец, цинк), а также искусственные конструкционные и строительные материалы (бетоны, керамики). Микронеоднородные среды широко распространены в природе, они имеют большое применение в технике и строительстве, поэтому изучение нелинейных волновых процессов в микронеоднородных твердых телах важно для диагностики дефектов их структуры, определения напряженного состояния, степени износа, изготовленных из них конструкций и деталей и т.д. Для решения таких задач необходимо знание нелинейного уравнения состояния микронеоднородной среды.

Таким образом, комплекс вопросов, связанных с созданием физических моделей микронеоднородных сред с сильной акустической нелинейностью, получением их уравнений состояния и (по возможности) точных или приближенных аналитических и численных решений нелинейных волновых уравнений для сред с различного вида неаналитическими уравнениями состояния, относится к актуальным вопросам нелинейной акустики. Актуальность этих вопросов во многом определяется тем, что “классическая” пяти (или девяти) константная теория упругости [1,2], призванная описывать слабо-нелинейные однородные твердотельные среды, не объясняет закономерностей НВП, наблюдаемых в экспериментах с сильно-нелинейными микронеоднородными средами, а “универсальной” микроскопической теории, адекватно описывающей НВП в таких средах не существует.

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование нелинейных волновых процессов и выявление закономерностей распространения продольных упругих волн в микронеоднородных твердых телах, обладающих сильной акустической нелинейностью (реактивной, диссипативной, гистерезисной).

Достижение этой цели предполагает решение следующих задач.

1. Получение уравнения состояния пористой водоподобной среды, содержащей систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью и теоретическое исследование нелинейных волновых процессов в такой среде.
2. Теоретическое исследование волновых процессов в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью.
3. Теоретическое исследование волновых процессов в средах с гистерезисной нелинейностью, в том числе и с насыщением нелинейных потерь.

Решению каждой из этих задач посвящена отдельная глава диссертации.

Научная новизна.

1. Предложена физическая модель микронеоднородной среды, обладающей сильной (релаксационной реактивной и диссипативной) акустической нелинейностью.
2. Получены аналитические и численные решения волновых уравнений для диссипативных и релаксирующих сред с разномодульной нелинейностью.
3. Проведен сравнительный анализ распространения периодических пилообразных волн в недиспергирующих средах с квадратичной упругой и гистерезисной нелинейностью. Из сравнения точных решений для пилообразных волн и их спектральных характеристик выявлены отличия в закономерностях нелинейных волновых процессов в таких средах.
4. На основе анализа результатов экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в поликристаллических твердых телах предложены модифицированные гистерезисные уравнения состояния, учитывающие насыщение нелинейных потерь и проведены теоретические исследования нелинейных волновых процессов в таких средах.

Научная и практическая значимость.

1. Получено нелинейное динамическое уравнение состояния микронеоднородной среды - водоподобного материала, содержащего систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью. Проведены теоретические исследования нелинейных акустических эффектов в такой среде и определены частотные зависимости параметров квадратичной нелинейности среды для эффектов генерации второй гармоники и волны разностной частоты, самодемодуляции высокочастотных импульсов, изменения скорости распространения и коэффициента поглощения пробной волны под действием статической нагрузки. Слой из

такого материала можно использовать для создания высокоэффективных параметрических излучателей звука апертурного типа.

2. Результаты исследований нелинейных волновых процессов в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью могут быть использованы для развития нелинейных методов акустической диагностики микронеоднородных сред и конструкционных материалов, содержащих трещины.

3. Выявлены характерные отличия процессов распространения и эволюции пилообразных волн в среде с квадратичной упругой нелинейностью и в средах с упругим и неупругим (или пластическим) гистерезисами.

4. Уравнения состояния поликристаллических твердых тел, учитывающие насыщение гистерезисных потерь, позволяют объяснить закономерности нелинейных волновых процессов в таких средах.

Апробация работы. Представленная диссертационная работа выполнена в Институте прикладной физики РАН. Изложенные в диссертации результаты обсуждались на семинарах в Институте прикладной физики РАН и докладывались на 15-ой - 19-ой научных конференциях по радиофизике (Нижний Новгород, ННГУ, 2011 г. - 2015 г.), на 19-ой и 20-ой Нижегородских сессиях молодых ученых (2014 г. и 2015 г.), на 1-ой Всероссийской акустической конференции (Москва, 2014 г.) и на 16-ой и 17-ой Научных школах «Нелинейные волны» (Нижний Новгород, 2012 г., 2016 г.).

Публикации. По теме работы опубликовано 17 печатных работ [10-26], из них 10 в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора.

Все изложенные в диссертации результаты получены автором или при его непосредственном участии. Во всех работах автор принимал участие в постановке задач и обсуждении их результатов; им же проведены все аналитические и численные расчеты.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Водоподобный материал, содержащий систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью, обладает сильной акустической (релаксационной упругой и неупругой) нелинейностью, обусловленной нелинейной зависимостью капиллярного и вязкого давлений в жидкости от диаметра капилляра.

2. В диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью существуют самоподобные (не меняющие своей формы при распространении) импульсные и периодические акустические волны.

3. В отличие от сред с квадратичной нелинейностью и неупругим гистерезисом, среды с упругим гистерезисом обладают нелинейной дисперсией фазовой скорости.

4. Модифицированные гистерезисные уравнения состояния, учитывающие насыщение амплитудно-зависимых потерь, объясняют закономерности нелинейных волновых процессов в поликристаллических твердых телах и резонаторах из таких материалов.

Структура диссертации.

В первой главе получено уравнение состояния пористого водоподобного материала, содержащего систему капилляров частично заполненных вязкой жидкостью и исследуются нелинейные акустические эффекты в такой среде.

В разделе 1.1 рассматривается модель такой микронеоднородной среды и описываются основные предположения, используемые при получении ее уравнения состояния.

В разделе 1.2 выводится нелинейное (в квадратичном приближении) уравнение состояния капилляра и пористой водоподобной среды, содержащей систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью, при этом решается задача о колебательном движении несжимаемой вязкой жидкости в капилляре под действием переменного напряжения).

В разделе 1.3 исследуется процесс генерации второй гармоники в такой среде: определяются амплитуда и фаза второй гармоники на малых расстояниях, когда дисперсионная расстройка первичной и вторичной волн незначительна.

В разделе 1.4 исследуется процесс генерации волны разностной частоты.

В разделе 1.5 исследуется эффект демодуляции высокочастотных импульсов, определяется форма демодулированных импульсов.

В разделе 1.6 исследуется распространение гармонической волны в поле статической нагрузки; определяются изменения фазовой скорости волны и декремента затухания под действием нагрузки.

В разделе 1.7 приводятся основные результаты и выводы первой главы.

Во второй главе исследуется распространение акустических волн в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью.

В разделе 2.1 исследуется распространение волн в среде с разномодульной нелинейностью и вязкой диссипацией.

В разделе 2.2 исследуется распространение волн в среде с разномодульной нелинейностью и релаксацией.

В разделе 2.3 исследуется распространение волн в микронеоднородной среде и разномодульной нелинейностью и релаксацией.

В разделе 2.4 приводятся основные результаты и выводы второй главы.

В третьей главе рассматривается распространение периодических волн и импульсных возмущений в безграничных средах и резонаторах с гистерезисной нелинейностью.

В разделе 3.1 проводится сравнительный анализ распространения и эволюции периодической пилообразной (т.е. многочастотной) волны в средах с квадратичной нелинейностью и с упругим и неупругим (или микропластическим) квадратичными гистерезисами [62,64], для которых соответственно $\sigma(\varepsilon = 0) = 0$ и $\sigma(\varepsilon = 0) \neq 0$, $\varepsilon(\sigma = 0) \neq 0$.

В разделе 3.2, на основе анализа результатов экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в поликристаллах, а также обобщения и объединения моделей и дислокационных механизмов гистерезисной нелинейности, предложено гистерезисное (упругого типа) уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением нелинейных потерь.

В разделе 3.3 рассматривались нелинейные акустические эффекты в стержневом резонаторе с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь при его гармоническом возбуждении.

В разделе 3.4 рассматриваются распространение и эволюция однополярного треугольного импульсного возмущения в среде с упругим гистерезисом с насыщением гистерезисных потерь.

В разделе 3.5 рассматриваются нелинейное распространение первоначально гармонической волны в среде с неупругим (или пластическим) гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

В разделе 3.6 проводится теоретическое исследование нелинейных волновых процессов при возбуждении продольной гармонической волны в стержневом резонаторе с неупругим гистерезисом с насыщением амплитудно-зависимых потерь.

В разделе 3.7 приводятся основные результаты и выводы третьей главы.

В Заключение приводятся основные результаты диссертации.

Глава I. Нелинейные волновые процессы в пористых водоподобных средах, содержащих систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью.

В нелинейной акустике известно не очень большое, буквально счетное, число микроскопических теорий и, соответственно, уравнений состояния, описывающих нелинейные механизмы динамического деформирования микронеоднородных твердых тел. К ним можно отнести гистерезисное уравнение дислокационной теории Гранато-Люкке [7], уравнения с упругой нелинейностью для зернистых сред (герцевская нелинейность [1,28,29]) и для пористых водоподобных материалов [27,30], уравнения с адгезионной гистерезисной, реактивной (упругой) и диссипативной (неупругой) нелинейностями для твердых тел, содержащих “сухие” и частично заполненные жидкостью трещины и полости [31,32]. Кроме микроскопических, часто, для описания нелинейных волновых процессов в различных средах, успешно применяются и феноменологические уравнения состояния. Такие уравнения, по существу, постулируются на основе анализа результатов экспериментальных исследований нелинейных эффектов, поэтому они, как правило, адекватно описывают эти результаты. Необходимо, однако, отметить, что “ценность” феноменологических уравнений состояния существенно ниже, чем микроскопических, так как в них, вообще говоря, не заложен какой-либо конкретный физический механизм нелинейности. Таким образом, создание моделей, разработка физических механизмов и получение микроскопических нелинейных уравнений состояния различных микронеоднородных сред представляет и научный и практический интерес.

В первой главе предложена модель микронеоднородной среды - пористого водоподобного материала, содержащего систему цилиндрических капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью, получено ее нелинейное динамическое уравнение состояния и проведено теоретическое исследование нелинейных волновых процессов в такой среде [10,22].

1.1. Модель капилляра и основные предположения.

При получении уравнения состояния капилляра будем предполагать следующее.

1. В идеально-упругом водоподобном материале ($\mu \ll \lambda$, μ и λ - коэффициенты Ламе [1,61]) имеется система тонких, цилиндрических, параллельных друг другу капилляров исходного радиуса R . Каждый капилляр заполнен столбиками несжимаемой вязкой жидкости, при этом между этими столбиками находится газ. Длины столбиков газа и жидкости равны l_1 и l_2 , так что линейная концентрация жидкости в капилляре равна $\nu = l_2 / (l_1 + l_2)$ [33].

2. При динамическом деформировании водоподобного пористого материала диаметр капилляра изменяется под действием нормального к его поверхности переменного напряжения $\sigma_{nn} = \sigma$, $|\sigma| \ll \lambda$, при этом линия трехфазного контакта (газ-жидкость-твердое тело) неподвижна на поверхности капилляра, а форма мениска жидкости изменяется. Жидкость в капилляре можно считать несжимаемой при выполнении условия [34]: $\omega \ll C_0/l_2$, ω - частота колебаний напряжения σ , C_0 - скорость звука в жидкости.

Очевидно, что, вследствие поверхностного натяжения жидкости, исходная форма капилляра изменится, а именно, в тех местах, где жидкости нет – радиус капилляра, по-прежнему, будет равен R , а там, где есть жидкость – радиус капилляра будет равен $R - \Delta R$ (Рис.1.1), при этом $\Delta R > 0$, если жидкость смачивает стенки капилляра и $\Delta R < 0$ - если не смачивает.

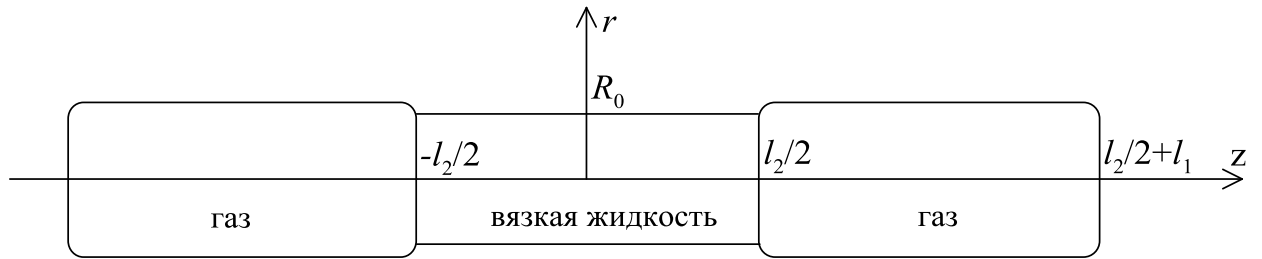


Рис.1.1. Схема капилляра, частично заполненного жидкостью.

Для получения уравнения состояния капилляра, частично заполненного вязкой жидкостью, т.е. зависимости изменения его объема от внешнего, нормального к его поверхности, переменного напряжения σ , воспользуемся выражением для изменения площади сечения $\Delta S = \pi(R - \Delta R)^2 - \pi R^2$ пустого капилляра от этого напряжения. В низкочастотном приближении [35] ($\omega \ll \omega_0 \approx C_t/2R$ - резонансная частота цилиндрической полости, $C_t = (\mu/\rho_1)^{1/2} \ll C_l = [(\lambda + 2\mu)/\rho_1]^{1/2}$, C_t и C_l - скорости сдвиговой и продольной волн, ρ_1 - плотность материала, ω - частота акустической волны), это выражение имеет вид [27]:

$$\sigma = \frac{\mu}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta S}{\pi R^2} \right) + \frac{\Delta S}{\pi R^2 + \Delta S} \right] \quad (1.1)$$

В состоянии равновесия (при $\sigma = 0$) радиус $R_0 = R - \Delta R = R(1 - X_0)$ заполненного жидкостью капилляра будет определяться уравнением:

$$\frac{2\alpha \cos \vartheta}{R - \Delta R} = -\frac{\mu}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{(R - \Delta R)^2 - R^2}{R^2} \right) + \frac{(R - \Delta R)^2 - R^2}{(R - \Delta R)^2} \right], \quad (1.2)$$

или

$$\gamma = -(1 - X_0) \left[\ln(1 - X_0) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 - X_0)^2} \right], \quad (1.3)$$

где $\gamma = \frac{2\alpha \cos \mathcal{G}}{\mu R}$, α - коэффициент поверхностного натяжения жидкости, \mathcal{G} - статический (или равновесный) краевой угол, $X_0 = \Delta R / R < 1$.

Для тонкого капилляра ($R_0 \ll a_0$, $a_0 = (2\gamma / \rho_0 g)^{1/2}$ - капиллярная постоянная, ρ_0 - плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести) профиль $U(r, R_0, \mathcal{G})$ невозмущенного (т.е. статического или равновесного) мениска жидкости является частью сферы радиуса $R_0 / \cos \mathcal{G}$ [34] и определяется выражением:

$$U(r, R_0, \mathcal{G}) = l_2 / 2 + R_0 t g \mathcal{G} - [R_0^2 - r^2 \cos^2 \mathcal{G}]^{1/2} / \cos \mathcal{G}, \quad (1.4)$$

при этом $\partial U(r = R_0, R_0, \mathcal{G}) / \partial r = t g \mathcal{G}$.

При малых колебаниях капилляра под действием переменного напряжения σ в вязкой жидкости также возникнет колебательное движение, при этом форма возмущенного мениска будет отличаться от равновесной - сферической, а краевой угол будет переменным.

1.2. Уравнение состояния капилляра и пористой водоподобной среды.

Рассмотрим в капилляре с жидкостью сектор с малым углом $d\varphi$. Импульс жидкости в этом объеме удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(dP_r)}{\partial t} = \sigma(R_0 + \tilde{R})l_2 d\varphi - \mu(R_0 + \tilde{R})l_2 \left[\ln(1 - X_0 + X) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 - X_0 + X)^2} \right] d\varphi + \\ + (R_0 + \tilde{R}) \int_{-l_2/2}^{l_2/2} p(z, R_0 + \tilde{R}, \dot{\tilde{R}}) dz d\varphi, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где dP_r - r -компонента импульса жидкости, находящейся в рассматриваемом секторе $d\varphi$, $p(z, R_0 + \tilde{R}, \dot{\tilde{R}}) = p_1(R_0 + \tilde{R}) + p_2(z, \dot{\tilde{R}})$, $p_1(R_0 + \tilde{R})$ и $p_2(z, \dot{\tilde{R}})$ - капиллярное и вязкое давление в жидкости, \tilde{R} - изменение радиуса капилляра с жидкостью под действием переменного напряжения σ .

Для определения давления $p(z, R_0 + \tilde{R}, \dot{\tilde{R}})$ решим задачу о колебательном движении вязкой жидкости в капилляре под действием переменного напряжения σ . В цилиндрических координатах, с началом в центре части капилляра, заполненного жидкостью, движение жидкости осесимметрично и, в основном, продольно, причем: $V_r(r) \ll V_z(r, z)$,

$$\frac{\partial V_z(r, z)}{\partial r} \gg \frac{\partial V_z(r, z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial p(z, R_0 + \tilde{R}, \dot{\tilde{R}})}{\partial r} = 0, \quad \text{где } V_r(r) \text{ и } V_z(r, z) \text{ - } r \text{ и } z \text{ компоненты}$$

скорости жидкости. При малых числах Рейнольдса ($Re = \dot{\tilde{R}}R_0/\nu \ll 1$) движение жидкости в капилляре будет описываться линейными уравнениями гидродинамики [34]:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0, \quad (1.7)$$

со следующими граничными условиями:

$$V_r(r = R_0 + \tilde{R}) = \dot{\tilde{R}}, \quad (1.8)$$

$$V_z(r = R_0 + \tilde{R}) = 0, \quad (1.9)$$

$$p(z = \pm l_2/2, R_0 + \tilde{R}, \dot{\tilde{R}}) = p_1(R_0 + \tilde{R}), \quad (1.10)$$

где ν - кинематическая вязкость жидкости.

Для акустических возмущений в диапазоне частот, удовлетворяющих условию $\omega \ll \omega^* = \nu/R_0^2$, движение жидкости в капилляре будет стационарным и слагаемым \dot{V}_z в уравнении (1.6) можно пренебречь [34]. По этой же причине мы будем пренебрегать и инерционным слагаемым $\dot{P}_r \sim \dot{V}_r$ в уравнении (1.5). В этом случае решение уравнений (1.6)-(1.9) имеет вид:

$$V_r(r) = \frac{[2(R_0 + \tilde{R})^2 - r^2]r\dot{\tilde{R}}}{(R_0 + \tilde{R})^3}, \quad V_z(r, z) = \frac{4[r^2 - (R_0 + \tilde{R})^2]z\dot{\tilde{R}}}{(R_0 + \tilde{R})^3}, \quad (1.11)$$

$$p(z, R_0 + \tilde{R}, \dot{\tilde{R}}) = 8\nu\rho_0 \frac{[z^2 - (l_2/2)^2]\dot{\tilde{R}}}{(R_0 + \tilde{R})^3} + p_1(R_0 + \tilde{R}). \quad (1.12)$$

Для определения капиллярного давления $p_1(R_0 + \tilde{R})$ найдем изменения формы и площади мениска в зависимости от текущего радиуса капилляра $R_0 + \tilde{R}$. Как уже было отмечено, колебательное движение вязкой жидкости в капилляре приведет к колебанию мениска, при этом его форма $\tilde{U}(r, R_0 + \tilde{R}, \tilde{\mathcal{G}})$ будет определяться уравнением:

$$\tilde{U}(r, R_0 + \tilde{R}, \tilde{\mathcal{G}}) = U(r, R_0 + \tilde{R}, \mathcal{G}) + \xi(r), \quad (1.13)$$

где $\tilde{\mathcal{G}}$ - динамический краевой угол, $U(r, R_0 + \tilde{R}, \mathcal{G})$ - определяется выражением (1.4), в котором постоянное значение R_0 следует заменить на переменное $R_0 + \tilde{R}$, а возмущение формы мениска $\xi(r)$ определяется уравнением:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = V_z(r, z = l_2/2). \quad (1.14)$$

В этом случае, как и в равновесном состоянии (1.4), будет выполняться условие:

$$\frac{\partial \tilde{U}(r, R_0 + \tilde{R}, \tilde{\mathcal{G}})}{\partial r} = \text{ctg } \tilde{\mathcal{G}}. \quad (1.15)$$

Из уравнений (1.13), (1.14) находим:

$$\tilde{U}(r, R_0 + \tilde{R}, \tilde{\mathcal{G}}) = U(r, R_0 + \tilde{R}, \mathcal{G}) - 2l_2 \left(1 - \frac{r^2}{(R_0 + \tilde{R})^2} \right) \ln[1 + (\tilde{R}/R_0)]. \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.15) получаем выражение для динамического краевого угла:

$$\cos \tilde{\mathcal{G}} = \cos \mathcal{G} + \frac{4l_2 \tilde{R}}{R_0^2} \sin^3 \mathcal{G}. \quad (1.17)$$

Из этого уравнения следует, что при изменении радиуса капилляра динамический краевой угол $\tilde{\mathcal{G}}$ ведет себя по разному в зависимости от значения статического краевого угла \mathcal{G} , а именно: при расширении капилляра ($\tilde{R} > 0$) и $0 < \mathcal{G} < \pi/2$ краевой угол $\tilde{\mathcal{G}}$ уменьшается, а при $\pi/2 < \mathcal{G} < \pi$ - увеличивается, и наоборот; при $\mathcal{G} = 0$ и $\mathcal{G} = \pi$ краевой угол $\tilde{\mathcal{G}}$ не изменяется и $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$; при $\mathcal{G} = \pi/2$ краевой угол $\tilde{\mathcal{G}}$ изменяется так, что $\cos \tilde{\mathcal{G}} > 0$ при расширении капилляра и $\cos \tilde{\mathcal{G}} < 0$ - при сжатии.

Определим площадь возмущенного мениска поверхности жидкости:

$$\begin{aligned} S(R_0 + \tilde{R}) &= 2 \int_0^{R_0 + \tilde{R}} \left(1 + \left(\frac{\partial \tilde{U}(r, R_0 + \tilde{R}, \tilde{\mathcal{G}})}{\partial r} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} 2\pi r dr = \\ &= 2\pi R_0^2 \left(\frac{2(1 - \sin \mathcal{G})}{\cos^2 \mathcal{G}} \right) + 4\pi l_2 \cos \mathcal{G} \tilde{R} + \frac{32\pi l_2^2}{35 R_0^2} \frac{(2 - 7 \sin^5 \mathcal{G} + 5 \sin^7 \mathcal{G})}{\cos^4 \mathcal{G}} \tilde{R}^2 - \\ &- \frac{64\pi l_2^3}{R_0^4} \cos \mathcal{G} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 \mathcal{G} + \frac{1}{5} \cos^4 \mathcal{G} \right) \tilde{R}^3. \end{aligned} \quad (1.18)$$

По изменению площади мениска определяем капиллярное давление в жидкости:

$$\begin{aligned} p_1(R_0 + \tilde{R}) &= -\frac{\alpha}{2\pi(R_0 + \tilde{R})l_2} \frac{\partial S(R_0 + \tilde{R})}{\partial \tilde{R}} = \\ &= -\frac{2\alpha \cos \mathcal{G}}{R_0} - \frac{\alpha l_2 F_1(\mathcal{G})}{R_0^3} \tilde{R} + \frac{\alpha l_2^2 F_2(\mathcal{G})}{R_0^5} \tilde{R}^2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\text{где } F_1(\mathcal{G}) = \frac{32}{35} \frac{2 - 7 \sin^5 \mathcal{G} + 5 \sin^7 \mathcal{G}}{\cos^4 \mathcal{G}}, \quad F_2(\mathcal{G}) = 32 \cos \mathcal{G} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \mathcal{G} + \frac{3}{5} \cos^4 \mathcal{G} \right).$$

Графики функций $F_{1,2} = F_{1,2}(\theta)$ представлены на Рис.1.2

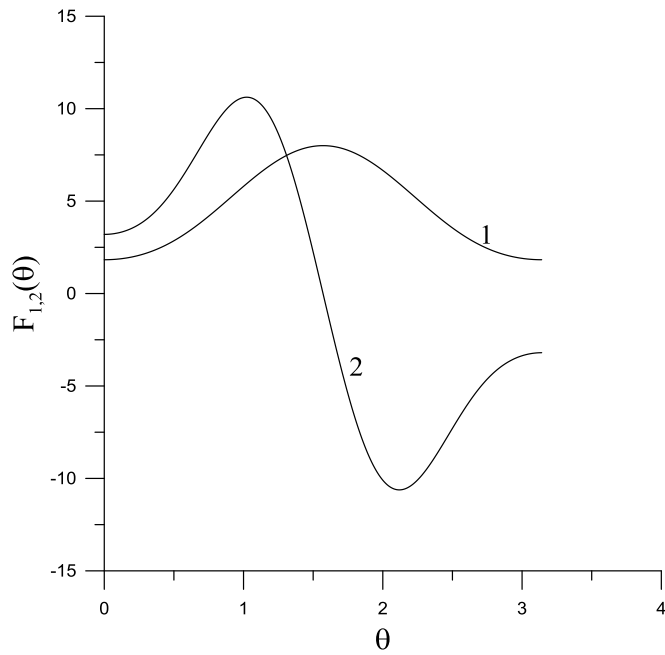


Рис.1.2. Графики функций $F_{1,2} = F_{1,2}(\theta)$.

Подставляя (1.12), (1.19) в уравнение (1.5) с учетом (1.2), получаем зависимость $\sigma = \sigma(\tilde{R})$:

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{R}) = & \left[\frac{\mu(R^2 + R_0^2)}{R_0^3} + \frac{\alpha l_2 F_1(\vartheta)}{R_0^3} \right] \tilde{R} + \frac{4}{3} \frac{\rho_0 \nu l_2^2}{R_0^3} \dot{\tilde{R}} - \\ & - \left(\frac{\mu(3R^2 + R_0^2)}{2R_0^4} + \frac{\alpha l_2^2}{R_0^5} F_2(\vartheta) \right) \tilde{R}^2 - 4\rho_0 \nu \frac{l_2^2}{R_0^4} \tilde{R} \dot{\tilde{R}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

и зависимость $\sigma = \sigma(\tilde{V})$ для изменения объема $\tilde{V} = \pi l_2 (2\tilde{R}R_0 + \tilde{R}^2)$ столбика жидкости с длиной l_2 :

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{V}) = & \frac{1}{2\pi R_0^4} \left(\frac{\mu(R^2 + R_0^2)}{l_2} + \alpha F_1(\vartheta) \right) \tilde{V} + \frac{2}{3} \frac{\rho_0 \nu l_2}{\pi R_0^4} \dot{\tilde{V}} - \\ & - \frac{1}{4\pi^2 R_0^6} \left[\frac{\mu(2R^2 + R_0^2)}{l_2^2} + \frac{\alpha F_2(\theta)}{R_0} \right] \tilde{V}^2 - \frac{4\rho_0 \nu}{3\pi^2 R_0^6} \tilde{V} \dot{\tilde{V}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

По форме это уравнение совпадает с уравнением состояния трещины, частично заполненной вязкой жидкостью [32], где проявляются те же самые механизмы акустической нелинейности – капиллярный и вязкий. Капиллярный механизм приводит к реактивной нелинейности (слагаемое $\propto \tilde{V}^2$), а вязкий – к диссипативной (слагаемое $\propto \tilde{V} \dot{\tilde{V}}$).

Получим теперь уравнение состояния среды, содержащей систему капилляров, частично заполненных жидкостью. Для этого, решая это уравнение (1.21) методом возмущений, определим зависимость $\tilde{V} = \tilde{V}(\sigma)$:

$$\tilde{V}(\sigma) = \frac{1}{a}D[\sigma] + \frac{1}{a^3}\left(cD[D^2[\sigma]] + \frac{d}{2}\frac{\partial}{\partial t}D[D^2[\sigma]]\right), \quad (1.22)$$

$$\text{где } a = \frac{1}{2\pi R_0^4}\left(\mu\frac{R^2 + R_0^2}{l_2} + \alpha F_1(\vartheta)\right) > 0, \quad b = \frac{2\nu\rho_0 l_2}{3\pi R_0^4}, \quad c = \frac{\mu}{4\pi^2 R_0^6}\left[\frac{2R^2 + R_0^2}{l_2^2} + \frac{\alpha F_2(\vartheta)}{\mu R_0}\right],$$

$$d = \frac{4\nu\rho_0}{3\pi^2 R_0^6}, \quad D[f(t)] = \Omega \int_{-\infty}^t f(t') \exp[-\Omega(t-t')] dt', \quad D^2[\sigma] = [D[\sigma]]^2, \quad \Omega = \frac{a}{b} - \text{релаксационная}$$

частота капилляра с вязкой жидкостью.

Будем считать, что расстояния $d = N^{-1/2}$ между этими капиллярами много больше их радиусов R и R_0 (N - количество капилляров, пересекающих единицу площади среды, перпендикулярную к их осям) и на длине волны Λ , находится достаточно большое количество таких капилляров. Объемная деформация ε среды под действием напряжения σ будет складываться из изменения объема самого водоподобного материала и изменения объемов капилляров, заполненных газом и жидкостью:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) = (1-B)\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) + \frac{\pi R^2 l_1 N}{l_1 + l_2}\left(\frac{\sigma}{\mu} + \frac{3}{4}\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) + \frac{N}{a(l_1 + l_2)}D[\sigma] + \\ + \frac{N}{(l_1 + l_2)a^3}\left(cD[D^2[\sigma]] + \frac{d}{2}\frac{\partial}{\partial t}D[D^2[\sigma]]\right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

или:

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1}{K}\sigma - \frac{q}{\lambda\Omega}\frac{\partial}{\partial t}D[\sigma] + \frac{3}{4}\frac{h}{\lambda\mu}\sigma^2 + \frac{cN}{(l_1 + l_2)a^3}\left(D[D^2[\sigma]] + \frac{d}{2c}\frac{\partial}{\partial t}D[D^2[\sigma]]\right), \quad (1.24)$$

$$\text{где } K = \frac{\lambda}{1 + h + q} - \text{модуль упругости, } h = \frac{\pi R^2 l_1 N \lambda}{(l_1 + l_2)\mu}, \quad q = \frac{N\lambda}{(l_1 + l_2)a},$$

$B = \pi[(1-\nu)R^2 + \nu R_0^2]N \ll 1$ - объемная концентрация капилляров.

При выполнении условий: $\frac{NK}{a\Omega(l_1 + l_2)}\left|\frac{\partial}{\partial t}D[\sigma]\right| \ll |\sigma|$, $\frac{NK}{a\Omega(l_1 + l_2)}\left|\frac{\partial}{\partial t}D[\varepsilon]\right| \ll |\varepsilon|$, из уравнения

(1.24) получаем:

$$\sigma(\varepsilon) = K\left(\varepsilon + g\frac{\partial}{\partial t}D[\varepsilon] - s\varepsilon^2 - mD[D^2[\varepsilon]] - n\frac{\partial}{\partial t}D[D^2[\varepsilon]]\right), \quad (1.25)$$

$$\text{где } g = \frac{NK}{(l_1 + l_2)a\Omega}, \quad s = \frac{3\pi R^2 l_1 NK^2}{4(l_1 + l_2)\mu^2}, \quad m = \frac{cNK^2}{(l_1 + l_2)a^3}, \quad n = \frac{dNK^2}{2(l_1 + l_2)a^3}.$$

Проанализируем уравнение (1.25). Его отличие от аналогичного, полученного в рамках реологической модели микронеоднородной среды с квадратичной упругой нелинейностью и

релаксацией [9,36], связано с наличием нелинейных безынерционного реактивного и релаксационного диссипативного слагаемых $s\varepsilon^2$ и $nD_t[D^2[\varepsilon]]$. При $l_1 \rightarrow 0$, слагаемое $s\varepsilon^2$, связанное с реактивной нелинейностью капилляра без жидкости, стремится к нулю ($s \sim h \rightarrow 0$); при $l_2 = \infty$ капиллярная и вязкая нелинейности также исчезают ($m = 0, n = 0$).

В квазистатическом приближении из уравнения (1.25) получаем:

$$\sigma(\varepsilon) = K[\varepsilon - \Gamma\varepsilon^2], \quad (1.26)$$

где $\Gamma = s + m = \frac{3\pi R^2 N l_1}{4[1 + AN]^2 (l_1 + l_2)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{4c\mu^2}{3\pi R^2 a^3 l_1}\right)$ - низкочастотный параметр упругой

квадратичной нелинейности, $A = \frac{\pi R^2 l_1 \lambda}{(l_1 + l_2) \mu} \left[1 + \frac{\mu}{\pi R^2 a l_1}\right]$. Максимальное значение параметр

нелинейности Γ принимает при $N_{opt} = A^{-1}$ или при $\delta_{opt} = \pi R^2 N_{opt} = \pi R^2 / A$:

$$\Gamma_{max} = \frac{3\lambda}{16\mu} \frac{1 + \frac{4c\mu^2}{3\pi R^2 a^3 l_1}}{1 + \frac{\mu}{\pi R^2 a l_1}}, \quad (1.27)$$

где $\delta = \pi R^2 N$ - исходная (без жидкости) объемная концентрация капилляров.

Из (1.27) при $l_1 \rightarrow \infty, l_2 = 0$, когда жидкости в капиллярах нет, получаем простые выражения для оптимальной концентрации δ_{opt} и параметра нелинейности Γ_{max} водоподобного материала с цилиндрическими порами [27]: $\delta_{opt} = \mu / \lambda \ll 1, \Gamma_{max}(l_2 = 0) = 3\lambda / 16\mu$.

На Рис.1.3 и Рис.1.4 показаны графики зависимости $\Gamma_{max} = \Gamma_{max}(X_0)$ и $\delta_{opt} = \delta_{opt}(X_0)$, где $0 < X_0 = \Delta R / R < 1$, при следующих параметрах: $l_1 + l_2 = 6 \cdot 10^{-1}$ см, $R = 3 \cdot 10^{-3}$ см, $\alpha = 72$ дин/см, $\vartheta = \pi / 3$, $\lambda / \mu = 10^2$ и различных значениях линейной концентрации жидкости $\nu = l_2 / (l_1 + l_2)$ в капилляре. Из Рис.1.3 и Рис.1.4 видно, что с ростом концентрации ν параметр Γ_{max} растет, при этом имеется оптимальное значение $X_{0opt} \cong 10^{-3}$, при котором параметр Γ_{max} максимален. Например, при $\nu = 0,9$ имеем: $\delta_{opt} < 6 \cdot 10^{-2}$, а $\Gamma_{max}(X_{0opt}) \cong 800 \gg \Gamma_{max}(l_2 = 0) = 18,75$ [27]. Аналогичным образом ведет себя и параметр диссипативной нелинейности $n = n(X_0)$. При $\delta = \delta_{opt}$ получаем:

$n_{max} = \frac{\nu \rho_0 \lambda \mu}{6\pi^3 a^3 R^2 R_0^6 l_1 [1 + (\mu / \pi R^2 a l_1)]}$. График функции $n_{max} = n_{max}(X_0)$ показан на Рис.1.5

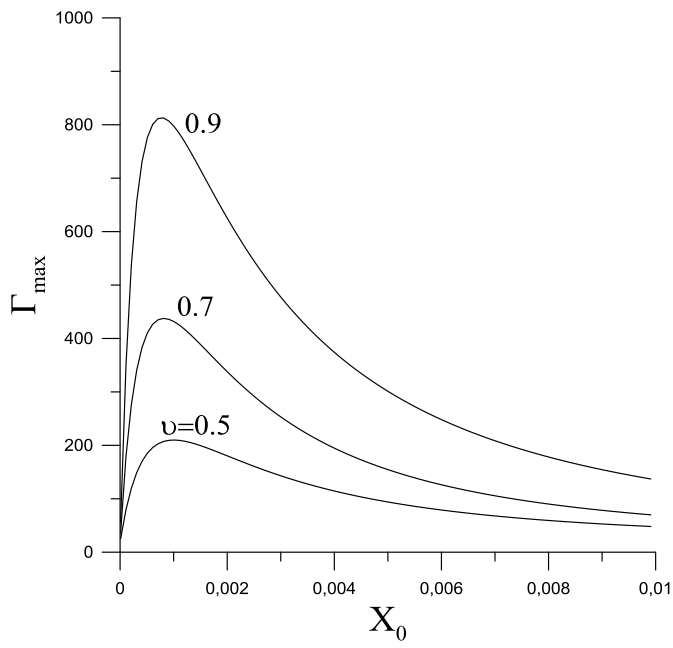


Рис.1.3. Зависимость параметра упругой нелинейности Γ_{\max} от X_0 .

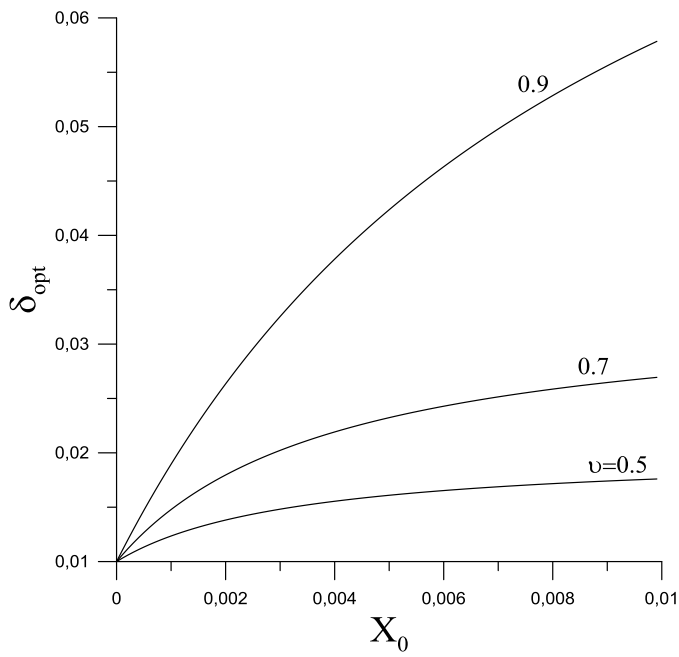


Рис.1.4. Зависимость оптимальной концентрации капилляров от X_0 .

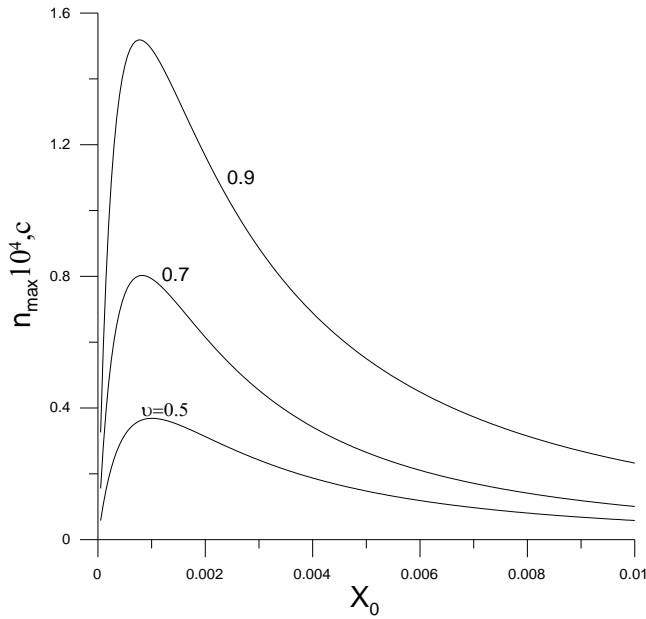


Рис.1.5. Зависимость параметра диссипативной нелинейности n_{\max} от X_0 при $\nu = 10^{-2}$ см²/сек, $\rho_0 = 1$ г/см³.

Подставляя (1.25) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [1,2] и дифференцируя его по x , получим волновое уравнение для деформации ε :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[g \frac{\partial D[\varepsilon]}{\partial t} - s\varepsilon^2 - mD[D^2[\varepsilon]] - n \frac{\partial D[D^2[\varepsilon]]}{\partial t} \right], \quad (1.28)$$

где U - смещение, $C_0 = \sqrt{K/\rho}$ - скорость продольной низкочастотной волны в пористом водоподобном материале, $\rho = (1-B)\rho_1 + \nu B\rho_0 \cong \rho_1$ - его плотность.

Перейдем в уравнении (1.28) к сопровождающей системе координат: $\tau = t - x/C_0$, $x' = x$; в результате получим одноволновое уравнение:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{g}{2C_0} \frac{\partial^2 D[\varepsilon]}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(s\varepsilon^2 + mD[D^2[\varepsilon]] + n \frac{\partial D[D^2[\varepsilon]]}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (1.29)$$

Отличие волновых уравнений (1.28), (1.29) от аналогичных уравнений, полученных в рамках реологической модели микронеоднородной среды [9,36,37], связано с наличием нелинейных безынерционного и релаксационного слагаемых $s\varepsilon^2$ и $nD_\tau[D^2[\varepsilon]]$, так что уравнения (1.28), (1.29) представляют более общий вид нелинейных уравнений, описывающих волновые процессы в микронеоднородных средах с квадратичной (реактивной и диссипативной) нелинейностью и релаксацией. В низкочастотном приближении, при $\omega \ll \Omega$, из уравнения (1.29) следует уравнение Бюргерса [40,42]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{g}{2C_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} + \frac{\Gamma}{C_0} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = 0.$$

Далее, методом возмущений мы исследуем нелинейные эффекты, возникающие при распространении и взаимодействии продольных акустических волн в среде, описываемых эволюционным уравнением (1.29).

1.3. Генерация второй гармоники.

Рассмотрим вначале процессы распространения гармонической волны и генерации ее второй гармоники, полагая, что: $\varepsilon(x, \tau) = \varepsilon_1(x, \tau) + \varepsilon_2(x, \tau)$, где $\varepsilon_1(x, \tau)$ и $\varepsilon_2(x, \tau)$ соответствуют первичным и вторичным (нелинейно-порожденным) волнам, $|\varepsilon_2(x, \tau)| \ll |\varepsilon_1(x, \tau)|$. В первом приближении из (1.29) получаем уравнение для первичной волны:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} - \frac{g}{2C_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} D[\varepsilon_1] = 0. \quad (1.30)$$

Представив решение этого уравнения в виде $\varepsilon_1(x, \tau) = \frac{1}{2} A_1(x) \exp(i\omega\tau) + c.c.$, получим

уравнение для амплитуды $A_1(x)$:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + iK_1(\omega)A_1 = 0, \quad (1.31)$$

где комплексная дисперсионная поправка $K_1(\omega)$ определяется выражением:

$$K_1(\omega) = k(\omega) - \frac{\omega}{C_0} = -\frac{g}{2C_0} \frac{i\Omega\omega^2}{(i\omega + \Omega)} = -\frac{g\Omega\omega^3}{2C_0(\Omega^2 + \omega^2)} - i\frac{g\Omega^2\omega^2}{2C_0(\Omega^2 + \omega^2)}. \quad (1.32)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения определяет дисперсию фазовой скорости $C(\omega) = C_0 + \Delta C(\omega)$, а второе - коэффициент поглощения волны $\alpha(\omega) = \theta(\omega)\omega/2\pi C_0$, где $\theta(\omega)$ - декремент затухания:

$$C(\omega) = C_0 \left[1 + \frac{g\Omega\omega^2}{2(\Omega^2 + \omega^2)} \right], \quad \alpha(\omega) = \frac{g\Omega^2\omega^2}{2C_0(\Omega^2 + \omega^2)}, \quad \theta(\omega) = \frac{\pi g\Omega^2\omega}{\Omega^2 + \omega^2}. \quad (1.33)$$

Для граничного условия $\varepsilon(x=0, t) = (A_0/2) \exp(i\omega t) + c.c.$ решение уравнения (1.31) имеет вид: $A_1(x) = A_0 \exp[-iK_1(\omega)x]$.

Во втором приближении из (1.29) следует неоднородное уравнение для нелинейной поправки $\varepsilon_2(x, \tau)$:

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - \frac{g}{2C_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} D[\varepsilon_2] = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[s\varepsilon_1^2 + mD[D^2[\varepsilon_1]] + n\frac{\partial}{\partial \tau} D[D^2[\varepsilon_1]] \right]. \quad (1.34)$$

Полагая, что $\varepsilon_2(x, \tau) = \frac{1}{2} A_2(x) \exp(2i\omega\tau) + c.c.$, получаем уравнение для амплитуды $A_2(x)$

вторичной волны на частоте 2ω :

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} + iK_2(\omega)A_2 = -\frac{i\omega A_0^2}{2C_0} \left(s + \frac{m + 2i\omega n}{[1 + i\omega/\Omega]^2 [1 + 2i\omega/\Omega]} \right) \exp[-2iK_1(\omega)x]. \quad (1.35)$$

Его решение имеет вид:

$$A_2(x) = \frac{\omega A_0^2}{2C_0} \left[s + \frac{m + 2i\omega n}{[1 + i\omega/\Omega]^2 [1 + 2i\omega/\Omega]} \right] \frac{1 - \exp[i(K_2 - 2K_1)x]}{K_2 - 2K_1} \exp[-iK_2(\omega)x], \quad (1.36)$$

$$\text{где } K_2(\omega) = K_1(2\omega) = k(2\omega) - \frac{2\omega}{C_0} = -\frac{4g\Omega\omega^3}{C_0(\Omega^2 + 4\omega^2)} - i\frac{2g\Omega^2\omega^2}{C_0(\Omega^2 + 4\omega^2)}.$$

На малых расстояниях, когда $|(K_2(\omega) - 2K_1(\omega))x| \ll 1$, из (1.36) получаем:

$$A_2(x) = -\frac{i\omega A_0^2}{2C_0} \left[s + \frac{[m + 2i\omega n]}{[1 + i\omega/\Omega]^2 [1 + 2i\omega/\Omega]} \right] x \exp[-iK_2(\omega)x], \quad (1.37)$$

при этом выражения для амплитуды и фазы волны $\varepsilon_2(x, \tau)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} |A_2(x)| &= \\ &= \frac{\omega A_0^2 \left[[s - 5s(\omega/\Omega)^2 + m]^2 + 4(\omega/\Omega)^2 [2s - s(\omega/\Omega)^2 + n\Omega]^2 \right]^{1/2} x \exp[-\alpha(2\omega)x]}{2C_0 [1 + (\omega/\Omega)^2] [1 + 4(\omega/\Omega)^2]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\omega/\Omega) &= \\ &= -\text{arctg} \left[\frac{2(\omega/\Omega)[2s - s(\omega/\Omega)^2 + n\Omega]}{[s - 5s(\omega/\Omega)^2 + m]} \right] + \text{arctg} \left[\frac{2(\omega/\Omega)[(\omega/\Omega)^2 - 2]}{5(\omega/\Omega)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Из выражений (1.36)–(1.39) легко видны проявления и вклады различного вида нелинейностей микронеоднородной среды в эффект генерации второй гармоники: эти вклады аддитивны, но они не синфазны и по-разному зависят от частоты первичной волны.

Из (1.38), (1.39), при $|s| \ll \left| \frac{m + 2i\omega n}{[1 + i\omega/\Omega]^2 [1 + 2i\omega/\Omega]} \right|$, следуют более простые выражения для

амплитуды и фазы волны $\varepsilon_2(x, \tau)$:

$$|A_2(x)| = \frac{\omega A_0^2 [m^2 + 4(n\omega)^2]^{1/2} x \exp[-\alpha(2\omega)x]}{2C_0 [1 + (\omega/\Omega)^2] [1 + 4(\omega/\Omega)^2]^{1/2}}, \quad (1.40)$$

$$\varphi_2(\omega/\Omega) = -\text{arctg}[2n\omega/m] + \text{arctg} \left[\frac{2(\omega/\Omega)[(\omega/\Omega)^2 - 2]}{5(\omega/\Omega)^2 - 1} \right]. \quad (1.41)$$

В выражении (1.40) можно выделить частотно-зависимый амплитудный множитель $N_2(\omega/\Omega)$, определяющий, как и в работах [9,36], уменьшение эффективной нелинейности с ростом частоты ω волны из-за релаксации среды:

$$N_2(\omega/\Omega) = \frac{1}{[1 + (\omega/\Omega)^2][1 + (2\omega/\Omega)^2]^{1/2}} \leq 1. \quad (1.42)$$

Графики функций $N_2 = N_2(\omega/\Omega)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\omega/\Omega)$ при $n\Omega/m = 4 \cdot 10^{-2}$ приведены на Рис.1.6. В низкочастотном пределе $N_2(\omega/\Omega) = 1$, а в высокочастотном - $N_2(\omega/\Omega)$ спадает по закону $N_2(\omega/\Omega) \propto (\Omega/\omega)^3$. Фаза $\varphi_2 = \varphi_2(\omega/\Omega)$ вначале растет от 0 до $\pi/2$, затем испытывает скачок от $\pi/2$ до $-\pi/2$ и далее опять растет и стремится к нулю.

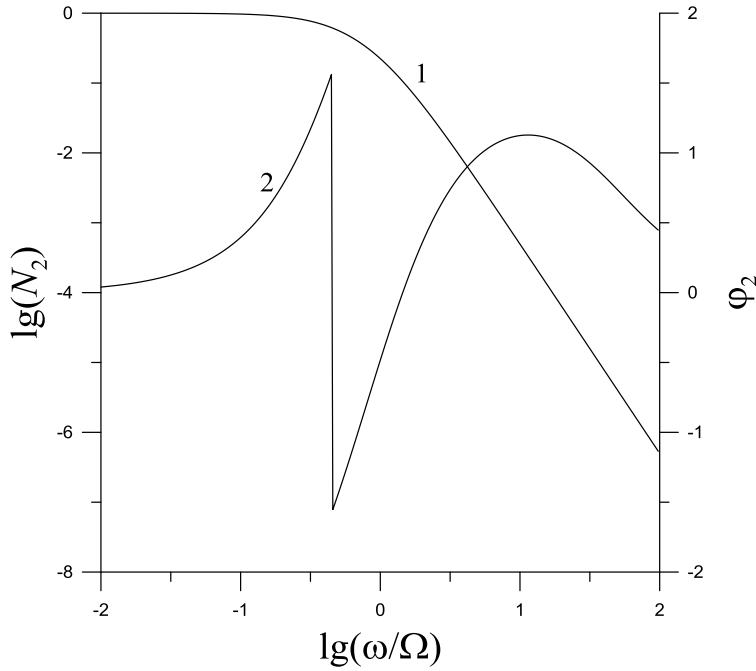


Рис.1.6. Графики функций, $N_2 = N_2(\omega/\Omega) - 1$, $\varphi_2 = \varphi_2(\omega/\Omega) - 2$ при $n\Omega/m = 10^{-2}$.

1.4. Генерация волны разностной частоты.

Рассмотрим генерацию волны на разностной частоте $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$ при возбуждении в среде двух первичных волн на частотах ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \cong \omega_2 = \omega \gg \omega_d$) с начальными амплитудами A_{01} и A_{02} . Решения уравнения (1.29) в первом приближении имеют вид:

$$\varepsilon_1(x, \tau) = \frac{1}{2} A_{01} \exp[-iK_1(\omega_1)x + i\omega_1\tau] + \frac{1}{2} A_{02} \exp[-iK_2(\omega_2)x + i\omega_2\tau] + c.c. \quad \text{В этом случае}$$

решение уравнения (1.29) для волны на разностной частоте запишем в виде:

$$\varepsilon_d(x, \tau) = \frac{1}{2} A_d(x) \exp(i\omega_d\tau) + c.c. \quad \text{Из уравнения (1.29) находим:}$$

$$A_d(x) = \frac{\omega_d A_{01} A_{02}}{2C_0} \left[s + \frac{m + in\omega_d}{[1 + (\omega/\Omega)^2 + i\omega_d/\Omega][1 + i\omega_d/\Omega]} \right] \times \\ \times \frac{1 - \exp[i(\bar{K}_2 - K_1 + K_d)x]}{\bar{K}_2 - K_1 + K_d} \exp(-iK_d x), \quad (1.43)$$

где $K_1 = K_1(\omega_1)$, $K_2 = K_2(\omega_2)$, $K_d = K_d(\omega_d)$ определяются выражением (1.32) при замене ω и 2ω на $\omega_{1,2} = \omega$ и ω_d , соответственно. При $|s| \ll \left| \frac{m + in\omega_d}{[1 + (\omega/\Omega)^2 + i\omega_d/\Omega][1 + i\omega_d/\Omega]} \right|$, $|\bar{K}_2(\omega_2) - K_1(\omega_1) + K_d(\omega_d)|x \ll 1$, $|K_d(\omega_d)|x \ll 1$, амплитуда и фаза волны разностной частоты определяются выражениями:

$$|A_d(x)| = \frac{\omega_d A_{01} A_{02}}{2C_0} \frac{[m^2 + (n\omega_d)^2]^{1/2} x}{[1 + 2(\omega/\Omega)^2 + (\omega/\Omega)^4 + (\omega_d/\Omega)^2]^{1/2} [1 + (\omega_d/\Omega)^2]^{1/2}}, \quad (1.44)$$

$$\varphi_d(\omega/\Omega) = -\text{arctg}[(n\omega_d/m)] + \text{arctg} \left[\frac{(\omega_d/\Omega)[2 + (\omega/\Omega)^2]}{1 + (\omega/\Omega)^2} \right]. \quad (1.45)$$

Как и для второй гармоники, здесь также можно ввести нормированный параметр нелинейности для разностной частоты, определяющий, как и в работах [9,36], уменьшение эффективной нелинейности с ростом частот ω и ω_d из-за релаксации среды:

$$N_d(\omega/\Omega) = \frac{1}{[1 + 2(\omega/\Omega)^2 + (\omega/\Omega)^4 + (\omega_d/\Omega)^2]^{1/2} [1 + (\omega_d/\Omega)^2]^{1/2}}. \quad (1.46)$$

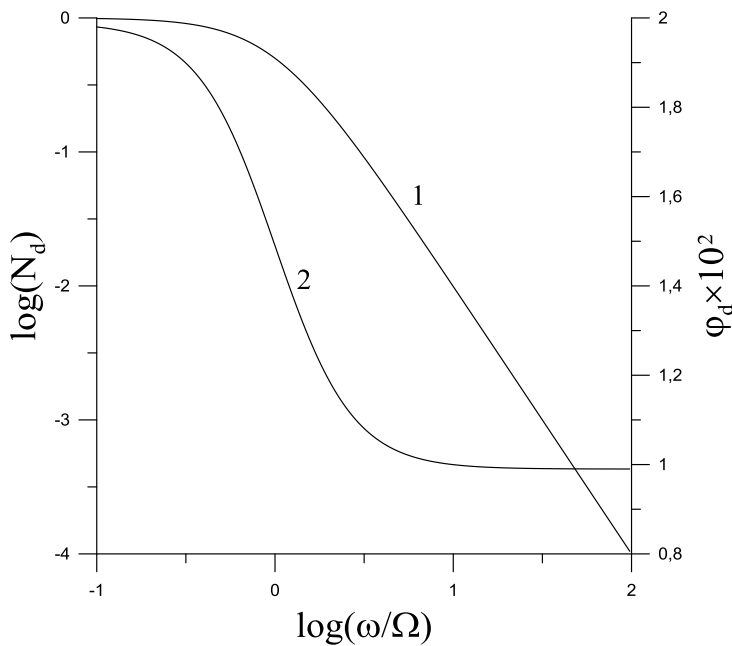


Рис.1.7. Графики функций, $N_d = N_d(\omega/\Omega)$ - 1, $\varphi_d = \varphi_d(\omega/\Omega)$ - 2 при $n\Omega/m = 10^{-2}$, $\omega_d/\Omega = 10^{-2}$.

Графики функций $N_d = N_d(\omega/\Omega)$ и $\varphi_d = \varphi_d(\omega/\Omega)$ при $n\Omega/m = 4 \cdot 10^{-2}$ приведены на Рис.1.7. В низкочастотном пределе $N_d(\omega/\Omega) = 1$, а в высокочастотном - $N_d(\omega/\Omega)$ спадает

по закону $N_d(\omega/\Omega) \propto \frac{(\Omega/\omega)^2}{[1+(\omega_d/\Omega)^2]^{1/2}}$. Здесь, в отличие от фазы волны второй гармоники,

фаза волны разностной частоты $\varphi_d = \varphi_d(\omega/\Omega)$ изменяется мало и не имеет резких скачков.

1.5. Самодетектирование высокочастотных импульсов.

Рассмотрим теперь проявление различных видов нелинейности микронеоднородной среды на эффект самодетектирования высокочастотных (ВЧ) импульсов, а именно, на амплитуду и форму НЧ демодулированных импульсов. Зададим граничное условие в следующем виде:

$\varepsilon(x=0, t) = A_0 \Phi(t/T) \sin \omega_0 t$, где $\Phi(t/T)$ - огибающая импульса, ω_0 и T - его несущая частота и длительность, $T\omega_0 \gg 1$. В первом приближении распространение первичного ВЧ

импульса $\varepsilon_1(x, \tau)$ описывается уравнением (1.30). Решая это уравнение методом Фурье, находим (при $\omega_0 \gg \Omega$, $g\Omega\omega_0 x / 2C_0 \ll 1$):

$$\varepsilon_1(x, \tau) = A_0 \Phi(\tau/T) \exp[-\alpha x] \sin[\omega_0 \tau + g\Omega\omega_0 x / 2C_0], \quad (1.47)$$

где $\alpha = g\Omega^2 / 2C_0$ - коэффициент затухания ВЧ импульса.

Чтобы найти выражение для вторичного (продетектированного) НЧ импульса $\varepsilon_2(x, \tau)$, нелинейный источник $Q(x, \tau)$ в уравнении (1.34) усредним по интервалу времени большему, чем период ВЧ колебания $2\pi/\omega_0$, но меньшему, чем T :

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - \frac{g}{2C_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} D[\varepsilon_2] = Q(x, \tau), \quad (1.48)$$

$$Q(x, \tau) = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[s \langle \varepsilon_1^2 \rangle + m D[\langle D^2[\varepsilon_1] \rangle] + n \frac{\partial}{\partial \tau} D[\langle D^2[\varepsilon_1] \rangle] \right], \quad (1.49)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени.

Далее, мы отдельно исследуем проявление каждого слагаемого нелинейного источника $Q(x, \tau)$ на эффект детектирования первичных ВЧ импульсов. Из выражений (1.47), (1.49), находим:

$$Q_s(x, \tau) = -\frac{s}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} [\langle \varepsilon_1^2 \rangle] = -\frac{sA_0^2 \exp[-2\alpha x]}{4C_0} \frac{\partial \Phi^2(\tau/T)}{\partial \tau}, \quad (1.50)$$

$$Q_m(x, \tau) = -\frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} [D[\langle D^2[\varepsilon_1] \rangle]] = -\frac{mA_0^2 \exp[-2\alpha x] \Omega^2}{4C_0 \omega_0^2} \frac{\partial D[\Phi^2(\tau/T)]}{\partial \tau}, \quad (1.51)$$

$$Q_n(x, \tau) = -\frac{n}{2C_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [D[\langle D^2[\varepsilon_1] \rangle]] = -\frac{nA_0^2 \exp[-2\alpha x] \Omega^2}{4C_0 \omega_0^2} \frac{\partial^2 D[\Phi^2(\tau/T)]}{\partial \tau^2}. \quad (1.52)$$

Решая уравнение (1.48) методом Фурье, получим выражения для протектированных импульсов (при $g\Omega^2 x/C_0 \ll 1$):

$$\varepsilon_{2s}(x, \tau) = -\frac{sA_0^2 x}{2C_0 T^2} \frac{\partial \Phi^2(\tau/T)}{\partial \tau}, \quad (1.53)$$

$$\varepsilon_{2m}(x, \tau) = -\frac{m\Omega^2 A_0^2 x}{2C_0 \omega_0^2 T^2} \frac{\partial \Phi^2(\tau/T)}{\partial \tau}, \quad (1.54)$$

$$\varepsilon_{2n}(x, \tau) = -\frac{n\Omega^2 A_0^2 x}{2C_0 \omega_0^2 T^2} \frac{\partial^2 \Phi^2(\tau/T)}{\partial \tau^2}. \quad (1.55)$$

Из этих выражений следует, что амплитуда и форма протектированных импульсов различны и зависят от вида нелинейности: в первом и во втором случаях протектированный импульс пропорционален первой производной (по времени), а в третьем – второй производной от квадрата огибающей первичного ВЧ импульса, при этом амплитуды протектированных импульсов определяются, соответственно, параметрами s , $m(\Omega/\omega_0)^2$ и $n(\Omega/\omega_0)^2$.

1.6. Амплитудно-фазовые эффекты при распространении гармонической волны в поле статической нагрузки.

Кроме рассмотренных выше эффектов, в среде с квадратичной реактивной и диссипативной нелинейностью будут также наблюдаться эффекты изменения фазы и амплитуды слабой гармонической волны под действием статической нагрузки. Эти эффекты связаны с зависимостью модуля упругости среды (или скорости распространения волны) и коэффициента поглощения волны от статического напряжения в среде (или ее статической деформации). Отметим, что по самой пробной волне этот эффект линеен - при распространении ее форма не искажается. Изменение скорости распространения акустической волны под действием статической нагрузки называется акусто-упругим эффектом [38,39]; по аналогии с ним, изменение коэффициента поглощения волны можно назвать акусто-неупругим эффектом.

Итак, пусть в среду, подверженной однородной, статической деформации ε_0 , излучается слабая (пробная) волна: $\varepsilon_1(x=0, t) = (A_0/2)\exp(i\omega t) + c.c.$ Подставляя в (1.29) $\varepsilon(x, \tau) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x, \tau, \varepsilon_0)$, получаем линейное уравнение для волны $\varepsilon_1(x, \tau, \varepsilon_0)$:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} - \frac{g}{2C_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} D[\varepsilon_1] = -\frac{\varepsilon_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[s\varepsilon_1 + mD[D[\varepsilon_1]] + n\frac{\partial}{\partial \tau} D[D[\varepsilon_1]] \right]. \quad (1.56)$$

Полагая в уравнение (1.56) $\varepsilon_1(x, \tau, \varepsilon_0) = \frac{1}{2} A_1(x, \varepsilon_0) \exp(i\omega\tau) + c.c.$, находим выражение для комплексной амплитуды $A_1(x, \varepsilon_0)$:

$$A_1(x) = A_0 \exp[-iK_1(\omega)x] \exp[-B(\varepsilon_0)x], \quad (1.57)$$

$$\text{где } B(\varepsilon_0) = i \frac{\varepsilon_0 \omega}{C_0} \left[s + \frac{\Omega^2 [m(\Omega^2 - \omega^2) + n\Omega\omega^2]}{(\Omega^2 + \omega^2)^2} \right] + \frac{\varepsilon_0 \omega^2 \Omega^2 [2m\Omega - n(\Omega^2 - \omega^2)]}{C_0 (\Omega^2 + \omega^2)^2}.$$

Из (1.57) получаем выражения для изменения скорости распространения $\Delta C_0(\varepsilon_0) = C_0(\varepsilon_0) - C_0$ и коэффициента затухания $\chi(\varepsilon_0)$ волны, обусловленные нелинейностью среды и вызванные ее статической деформацией ε_0 :

$$\frac{\Delta C_0(\varepsilon_0)}{C_0} = -\varepsilon_0 \left[s + \frac{\Omega^2 [m(\Omega^2 - \omega^2) + n\Omega\omega^2]}{(\Omega^2 + \omega^2)^2} \right], \quad (1.58)$$

$$\chi(\varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0 \omega^2 \Omega^2 [2m\Omega - n(\Omega^2 - \omega^2)]}{C_0 (\Omega^2 + \omega^2)^2}. \quad (1.59)$$

Из этих выражений следует, что, в общем случае $\Delta C_0(\varepsilon_0)/C_0$ и $\chi(\varepsilon_0)$ определяются и упругой и неупругой нелинейностями среды, и только в низкочастотном диапазоне ($\omega \ll \Omega$, $m \gg n\omega^2/\Omega$, $n\Omega \gg 2m$) вклады этих нелинейностей разделяются:

$$\frac{\Delta C_0(\varepsilon_0)}{C_0} = -(s+m)\varepsilon_0, \quad \chi(\varepsilon_0) = -\frac{n\varepsilon_0\omega^2}{C_0}. \quad (1.60)$$

Таким образом, проводя измерения $\Delta C_0(\varepsilon_0)$ и $\chi(\varepsilon_0)$ при различных деформациях ε_0 и частотах ω можно определить параметры реактивной и диссипативной нелинейности микронеоднородной среды.

1.7. Заключение.

В первой главе предложена модель микронеоднородной среды - пористого водоподобного материала, содержащего систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью и получено ее нелинейное динамическое уравнение состояния. Показано, что такая трехфазная среда обладает сильной акустической нелинейностью и содержит релаксационные реактивную и диссипативную составляющие, обусловленные нелинейной зависимостью капиллярного и вязкого давлений в жидкости от диаметра капилляра. Определены оптимальные соотношения физических и геометрических характеристик среды, при которых параметры ее акустической нелинейности максимальны. Получено нелинейное эволюционное уравнение, описывающее волновые процессы в такой микронеоднородной среде, и проведено теоретическое исследование эффектов генерации второй гармоник и

волны разностной частоты, самодемодуляции высокочастотных импульсов, изменения скорости распространения и коэффициента поглощения пробной волны под действием однородной статической нагрузки. Определены частотные зависимости эффективных параметров квадратичной нелинейности среды для этих эффектов и показано, что с ростом частоты акустической волны нелинейность среды уменьшается. Полученные результаты могут иметь прикладное значение в медицинской акустике (для нелинейной диагностики мягких биологических тканей), и в материаловедении (при создании искусственных сильно нелинейных материалов, с целью повышения эффективности параметрических излучателей звука апертурного типа [41]).

Глава II. Акустические волны в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью.

В последнее время все большее внимание уделяется твердотельным средам с сильной акустической нелинейностью, намного превышающей нелинейность однородных твердых тел [1,2]. Среда с сильной нелинейностью часто описывается неаналитическими уравнениями состояния. Закономерности нелинейных волновых процессов в средах с неаналитической и квадратичной (аналитической) нелинейностью качественно отличаются друг от друга, поэтому изучение и выявление этих закономерностей может быть использовано для установления вида нелинейного уравнения состояния среды и определения его параметров.

“Неаналитичность” некоторых твердых тел проявляется, в так называемой, разномодульности. Разномодульными (или бимодульными) упругими свойствами, т.е. различными модулями E_1 и E_2 упругости при растяжении и сжатии, обладает довольно широкий класс твердых тел: некоторые полимеры, композиционные и конструкционные материалы [8], грунты [44,45], а также твердые тела, содержащие трещины [46-48]. Распространение нелинейных акустических волн в разномодульных материалах исследовалось во многих работах [6,44-53], однако влияние диссипативных или релаксационных свойств на эволюцию нелинейных волн в таких средах не рассматривалось. Отметим, что в разномодульной среде нелинейный режим распространения имеет место только для разнополярных волн, однополярные же возмущения распространяются линейно, с постоянными, но различными скоростями (зависящими от их полярности). Нелинейное искажение гармонической (разнополярной) волны в идеальной разномодульной среде происходит таким образом, что на каждом ее периоде, уже на сколь угодно малом расстоянии от излучателя, в профиле волны образуется неоднозначность или “перехлест” – положительный полупериод волны “наезжает” на отрицательный (или наоборот) [6]. Как и в среде с квадратичной нелинейностью [34,40,42], такая неоднозначность устраняется введением в профиль волны разрыва – ударного фронта [6]. Также как и в квадратичной среде [42], диссипация или релаксация может предотвратить образование неоднозначностей и разрывов в профиле волны и в разномодульной среде, однако формы волн в этих средах будут различными.

Во второй главе проводится теоретическое исследование распространения плоских продольных акустических волн в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью [11-14,20,21,23]. Интерес к такой задаче и ее специфика связаны с линейной зависимостью разномодульной нелинейности от амплитуды

деформации, что позволяет получить точные аналитические решения нелинейных волновых уравнений для таких сред. Здесь также разработан численный метод для расчета эволюции первоначально гармонических волн в таких средах.

2.1. Распространение акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и вязкой диссипацией.

Вначале мы рассмотрим распространение акустических волн в средах с разномодульной нелинейностью и вязкой диссипацией [11].

2.1.1. Волновое уравнение для однородной разномодульной среды с вязкой диссипацией.

Итак, рассмотрим распространение продольных акустических волн в среде, динамическое уравнение состояния которой имеет вид:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_1\varepsilon, & \varepsilon \geq 0 \\ E_2\varepsilon, & \varepsilon \leq 0 \end{cases} + \alpha\rho\varepsilon\dot{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

где σ , ε и $\dot{\varepsilon}$ - продольные напряжение, деформация и скорость деформации; $E_{1,2}$ - модули упругости среды при ее растяжении и сжатии, отсюда и название среды - разномодульная ($|E_1 - E_2| \ll E_{1,2}$); α - коэффициент линейной диссипации; ρ - плотность. (Для трещиноватых твердых тел $E_2 > E_1$, но для других материалов может быть и наоборот, $E_2 < E_1$). В уравнении состояния (2.1) разномодульность проявляется уже при сколь угодно малых положительных и отрицательных напряжениях и деформациях. Заметим, однако, что для реальных материалов вблизи очень малых деформаций ε_{th} зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ может быть гладкой (без излома). Это соответствует аналитической нелинейности, например, квадратичной или кубической; нелинейные волны в таких средах изучены в работах [42,54]. Таким образом, в модели разномодульной среды [11,46-53], предполагается, что для амплитуды ε_0 деформации акустической волны выполняется условие: $\varepsilon_0 \gg |\varepsilon_{th}| \ll 1$.

Вводя обозначения: $E = \frac{E_1 + E_2}{2}$, $\gamma = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2}$, из уравнения (2.1) получим “каноническую”

форму уравнения состояния, более удобную при получении нелинейного волнового уравнения:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|] + \alpha\rho\varepsilon\dot{\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Заметим, что нелинейность этого уравнения описывается неаналитической, четной функцией деформации ($f(\varepsilon) = \gamma|\varepsilon|$, $|\varepsilon| \ll |\gamma| \ll 1$). Из уравнений (2.1), (2.2) следует, что

положительные ($\varepsilon > 0$) и отрицательные ($\varepsilon < 0$) возмущения в такой среде распространяются со скоростями C_+ и C_- соответственно, причем

$$C_{\pm} = (E_{1,2}/\rho)^{1/2} = C_0(1 \mp \gamma)^{1/2} \cong C_0[1 \mp (\gamma/2)], \text{ где } C_0 = (E/\rho)^{1/2}.$$

Уравнению состояния (2.2) отвечает реологическая модель однородной разномодульной среды с вязкой диссипацией [48,60] (Рис.2.1). Модель представляет собой однородную цепочку из одинаковых масс 4 и одинаковых звеньев, каждое из которых является параллельным соединением линейной пружины 1, линейного демпфера 2 и нелинейного (в данном случае - разномодульного) элемента 3.

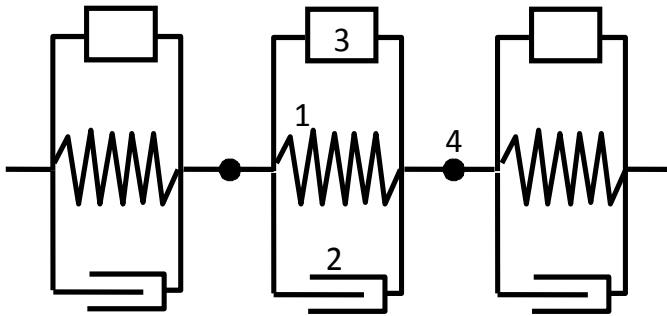


Рис.2.1. Реологическая модель однородной нелинейной среды с вязкой диссипацией: 1 – линейная пружина, 2 – демпфер, 3 – нелинейный элемент, 4 - масса.

Подставляя уравнение состояния (2.2) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [1,2], $\varepsilon = U_x$, U - смещение, получим нелинейное волновое уравнение для деформации ε :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\gamma C_0^2 \frac{\partial^2 |\varepsilon|}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t}. \quad (2.3)$$

Далее мы будем рассматривать распространение волн, бегущих в положительном направлении оси x , при этом, как обычно [2,40,42], будем считать, что искажения профиля волны из-за нелинейности и диссипации малы на расстояниях порядка длины волны, т.е. будем считать, что выполняется условие: $\alpha/TC_0^2 \ll 1$, T - характерная длительность фронта волны. Применяя процедуру перехода к сопровождающей системе координат [2,40,42], т.е. переходя к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x_1$, получим эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}. \quad (2.4)$$

Из этого уравнения следует, что для разномодульной среды с диссипацией акустическое число Рейнольдса Re , равное отношению нелинейного слагаемого $\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau}$ к линейному

диссипативному $\frac{\alpha}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}$, не зависит от амплитуды волны $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ и определяется

выражением: $\text{Re} \cong \gamma T C_0^2 / \alpha$.

Уравнение (2.4) является аналогом уравнения Бюргерса для среды с квадратичной упругой нелинейностью и линейной вязкой диссипацией [2,40,42,55,56]; решения этих уравнений обладают следующими свойствами. Первое - имеет место закон сохранения импульса (или

количества движения акустической волны), т.е. $\frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, \tau) d\tau \right) = 0$, и второе - при $\alpha \neq 0$

форма волны определяется непрерывной и однозначной функцией $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$. Далее, как и уравнение Бюргерса, уравнение (2.4) обладает трансляционной симметрией [$\varepsilon(x, \tau) \Leftrightarrow \varepsilon(x+a, \tau+b)$] и нечетной симметрией отражения [$\varepsilon(x, \tau) \Leftrightarrow -\varepsilon(x, -\tau)$], где $a, b = \text{const}$, а знак \Leftrightarrow символизирует наличие симметрии [56]. Кроме этих симметрий, уравнение (2.4) инвариантно также к масштабному преобразованию деформации [$\varepsilon(x, \tau) \Leftrightarrow C\varepsilon(x, \tau)$], т.е., если функция $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ является решением уравнения (2.4), то и функция $\varepsilon = C\varepsilon(x, \tau)$, где $C = \text{const} > 0$, также является решением этого уравнения.

Для получения и исследования решений уравнения (2.4), приведем его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + \delta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}, \quad (2.5)$$

где $\varepsilon = \varepsilon / \varepsilon_0$, $\theta = \omega \tau$, $z = \gamma \alpha x / 2C_0$, $\delta = \text{Re}^{-1} = \alpha \omega / \gamma C_0^2$ - число Гольдберга для разномодульной среды [56], ε_0 и ω - характерные (например, начальные) амплитуда и частота акустической волны. Из этого уравнения следует, что эволюция волны в такой среде зависит только от параметра δ , причем, в случае $|\delta| \ll 1$ получаем сильно-нелинейную волну, а в случае $|\delta| \gg 1$ - практически линейное ее распространение. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma \geq 0$ и, следовательно, $\delta \geq 0$ и $z \geq 0$.

2.1.2. Стационарные волны.

Как и уравнение Бюргерса, уравнение (2.5) имеет частное точное решение, описывающее стационарную, т.е. не зависящую от координаты z , волну типа симметричного скачка - перехода (при $\delta > 0$) из состояния $\varepsilon_- (\theta \rightarrow \infty) = -1$ в состояние $\varepsilon_+ (\theta \rightarrow -\infty) = 1$. (При $\gamma < 0$ устойчивым будет обратный переход: из $\varepsilon_+ (\theta \rightarrow -\infty) = 1$ в $\varepsilon_- (\theta \rightarrow \infty) = -1$.) Положительная [$\varepsilon_+ (\theta) \geq 0, \theta \leq 0$] и отрицательная [$\varepsilon_- (\theta) < 0, \theta > 0$] части стационарной

волны определяются различными выражениями, непрерывно (вместе с нечетными производными по θ) переходящими одно в другое в точке $\theta_0 = 0$, $\epsilon_0 = 0$:

$$\epsilon_+ (\theta \leq 0) = [1 - \exp(\theta/\delta)], \quad \epsilon_- (\theta > 0) = -[1 - \exp(-\theta/\delta)]. \quad (2.6)$$

В краткой форме эти выражения можно представить в следующем виде:

$$\epsilon(\theta) = -[1 - \exp(-|\theta|/\delta)] \text{sign } \theta. \quad (2.7)$$

Из-за неаналитичности разномодульной нелинейности уравнения (2.5), его решение для стационарной волны получилось также неаналитическим – в точке $\theta = 0$ терпят разрыв четные производные $d^{2n} \epsilon(\theta)/d\theta^{2n}$: $d^{2n} \epsilon_{\pm}(\theta=0)/d\theta^{2n} = \mp \delta^{-2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

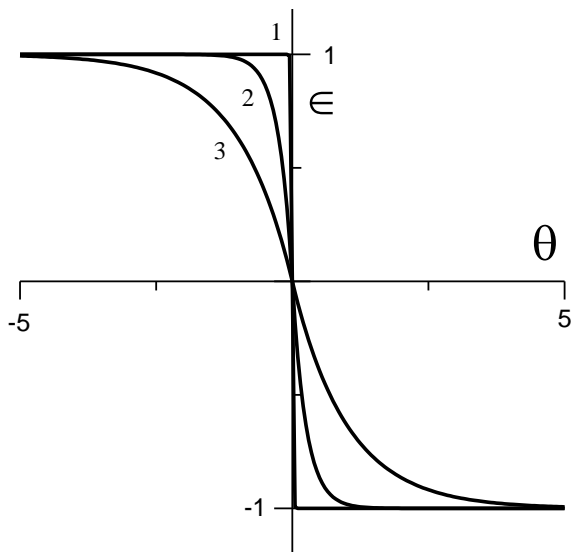


Рис.2.2. Профили стационарных волн типа симметричного скачка при различных значениях параметра δ : 1 – 10^{-2} ; 2 – 10^{-1} , 3 – 1.

Очевидным свойством решения (2.7) является обратная пропорциональность ширины области такого перехода коэффициенту диссипации δ . Здесь, как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [2,40,42,55,56], устойчивость стационарной волны (2.7) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и линейной диссипации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта, а диссипация стремится ее уменьшить. Профили стационарных волн (2.7) при различных значениях параметра δ представлены на Рис.2.2, из которого видно, что при уменьшении δ , этот переход становится более “крутым”, а при $\delta \rightarrow 0$, решение (2.7) сходится к разрывному: $\epsilon(\theta) = -\text{sign } \theta$.

2.1.3. Самоподобные импульсные и периодические волны.

Попробуем теперь отыскать автомодельное (или самоподобное) [42] решение уравнения (2.5) методом разделения переменных, полагая, что:

$$\epsilon(z, \theta) = \Psi(\theta)Z(z), \quad Z(z) > 0, \quad Z(z=0) = 1. \quad (2.8)$$

Самоподобное решение (2.8) описывает, вообще говоря, затухающую волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ в процессе распространения. Примерами таких “самоподобных” волн являются стационарные волны и солитоны - в нелинейных средах и гармонические волны - в средах линейных. В разномодульной среде “самоподобные” волны (2.8) распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью.

Подставляя (2.8) в (2.5), получаем:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{dZ(z)}{dz} = \frac{\delta}{\Psi(\theta)} \frac{d^2\Psi(\theta)}{d\theta^2} - \frac{1}{\Psi(\theta)} \frac{d|\Psi(\theta)|}{d\theta} = -m, \quad (2.9)$$

где $m = const$. Из физических соображений – волна не должна быть нарастающей по координате $z > 0$ (при $\delta \geq 0$), следует, что $m \geq 0$. Значение параметра m задается граничным условием, определяющим форму излучаемой “самоподобной” волны: $\in(z=0, \theta) = \Psi(\theta)$. При $m < 1/4\delta$ ($\delta \geq 0$), решения уравнений (2.9), с точностью до произвольной положительной константы для $\Psi(\theta)$, имеют вид:

$$Z(z) = \exp(-mz), \quad \Psi(\theta) = -\exp\left(-\frac{|\theta|}{2\delta}\right) sh\left(\frac{\sqrt{1-4m\delta}}{2\delta}\theta\right), \quad (2.10)$$

и, следовательно,

$$\in(z, \theta) = -\exp\left(-\frac{|\theta|}{2\delta}\right) sh\left(\frac{\sqrt{1-4m\delta}}{2\delta}\theta\right) \exp(-mz). \quad (2.11)$$

Легко видеть, что из выражения (2.11) при $m = 0$, следует решение для стационарной волны (2.7). При $m < 1/4\delta$, но $m \neq 0$, самоподобное решение (2.11) описывает асимметричный разнополярный импульс; при $m = 1/4\delta$ его форма имеет вид:

$$\in(z, \theta) = -\exp\left(-\frac{|\theta|}{2\delta}\right) \left(\frac{\theta}{2\delta}\right) \exp\left(-\frac{z}{4\delta}\right), \quad (2.12)$$

а при $\delta = 0$ импульс (2.11) содержит разрыв: $\in(z, \theta) = -\exp[-m|\theta|] sign\theta \exp(-mz)$.

При $m > 1/4\delta$ самоподобное решение описывает периодическую по θ волну (с периодом $\theta_0 = \frac{4\pi\delta}{\sqrt{|1-4m\delta|}}$). Каждый ее период также является асимметричным разнополярным импульсом, определяемым выражением:

$$\in(z, \theta) = -\exp\left(-\frac{|\theta|}{2\delta}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{|1-4m\delta|}}{2\delta}\theta\right) \exp(-mz), \quad -\frac{2\pi\delta}{\sqrt{|1-4m\delta|}} \leq \theta \leq \frac{2\pi\delta}{\sqrt{|1-4m\delta|}}. \quad (2.13)$$

Для линейной диссипативной среды ($\delta \rightarrow \infty$) самоподобное решение – это линейно-затухающая гармоническая волна с частотой ω ; из выражения (2.13) при $m = \delta \rightarrow \infty$

$$\text{получаем: } \epsilon(z, \theta) = \exp(-mz) \sin \theta = \exp\left(-\frac{\alpha \omega^2 x}{2C_0^3}\right) \sin \omega \tau .$$

Профили “самоподобных” импульсов (2.11)-(2.13) приведены на Рис.2.3 При $\gamma < 0$ имеем: $\delta < 0$, $z < 0$, $m < 0$, но $mz > 0$ и $m\delta > 0$; в этом случае профили “самоподобных” импульсов соответствуют инвертированным импульсам (2.11)-(2.13).

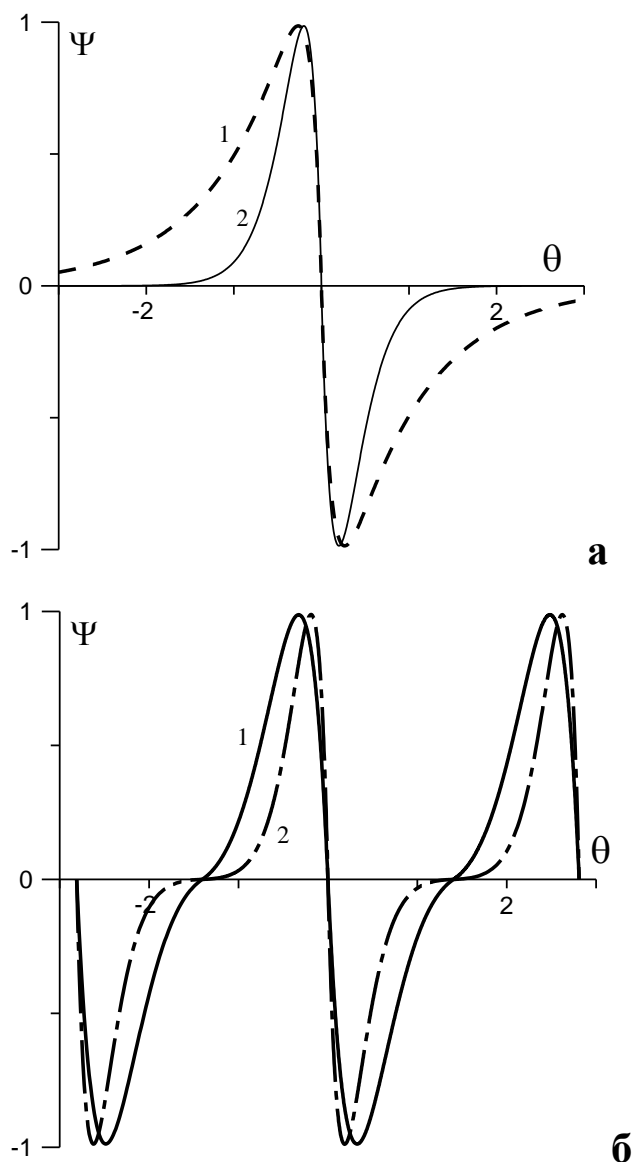


Рис.2.3. Профили “самоподобных” импульсов (а) при $\delta = 10^{-1}$: 1 – $m = 1$; 2 – $m = 2,5$ и периодической волны (б) при: 1 – $\delta = 2 \cdot 10^{-1}$, $m = 2.25$, 2 – $\delta = 10^{-1}$, $m = 3$.

2.1.4. Нелинейная эволюция первоначально гармонической волны.

При произвольном граничном условии точного аналитического решения уравнения (2.5), по-видимому, не существует, поэтому для первоначально синусоидальной волны [

$\varepsilon(x=0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ или $\varepsilon(z=0, \theta) = \sin \theta$], мы его решим численно. Для этого учтем нечетную симметрию отражения уравнения (2.5): в недиспергирующей среде с четной нелинейностью положительный и отрицательный полупериоды первоначально асимметричной волны, в частности, синусоидальной, искажаются асимметрично [2,40,42,55,56]. В соответствии с этим свойством, решение волнового уравнения (2.5) можно представить в виде разложения в ряд Фурье только по гармоникам $\sin(n\theta)$ - это упрощает процедуру расчета нелинейного искажения волны:

$$\varepsilon(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \sin(n\theta), \quad (2.14)$$

где $a_n(z)$ - амплитуды гармоник волны $\varepsilon(z, \theta)$.

Представляя выражение для $|\varepsilon(z, \theta)|$ также в виде ряда Фурье

$$|\varepsilon(z, \theta)| = \frac{b_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z) \cos(k\theta),$$

находим связь коэффициентов $b_k(z)$ и $a_n(z)$:

$$b_k(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \sin(n\theta) \cos(k\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z) \left[\frac{1 - (-1)^{n+k}}{n^2 - k^2} \right]. \quad (2.15)$$

Теперь, подставляя выражения (2.14), (2.15) в уравнение (2.5), получаем линейную систему связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_n(z)$:

$$\frac{da_n(z)}{dz} = -\frac{2n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) \left[\frac{[1 - (-1)^{n-k}]k}{n^2 - k^2} \right] - \delta n^2 a_n(z), \quad (2.16)$$

при этом из граничного условия имеем: $a_1(z=0) = 1$, $a_{n>1}(z=0) = 0$.

Система уравнений (2.16) позволяет численно решить волновое уравнение (2.5), ограничивая число гармоник n в зависимости от требуемой точности решения задачи. На Рис.2.4 показаны профили первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при различных параметрах δ . При $\delta \leq 1$ имеем сильное нелинейное искажение волны, а при $\delta > 1$ нелинейные искажения малы и волна распространяется практически линейно. Напомним, что в идеальной разномодульной среде (при $\delta = 0$), вследствие движения положительных и отрицательных полупериодов волны с относительной скоростью $\Delta C_{\pm} = (E_1 / \rho)^{1/2} - (E_2 / \rho)^{1/2} = C_0[(1 - \gamma)^{1/2} - (1 + \gamma)^{1/2}] \cong -\gamma C_0$, в ее профиле сразу же (при сколь угодно малом расстоянии z) образуются “перехлесты” и неоднозначности (при $\gamma > 0$ вблизи точек $\theta_{2n+1} = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а вблизи точек $\theta_{2n} = 2\pi n$ возникают “нулевые зоны”, в которых $\varepsilon(z, \theta) \equiv 0$ [6]. (Как обычно [2,40,42], “перехлесты” и

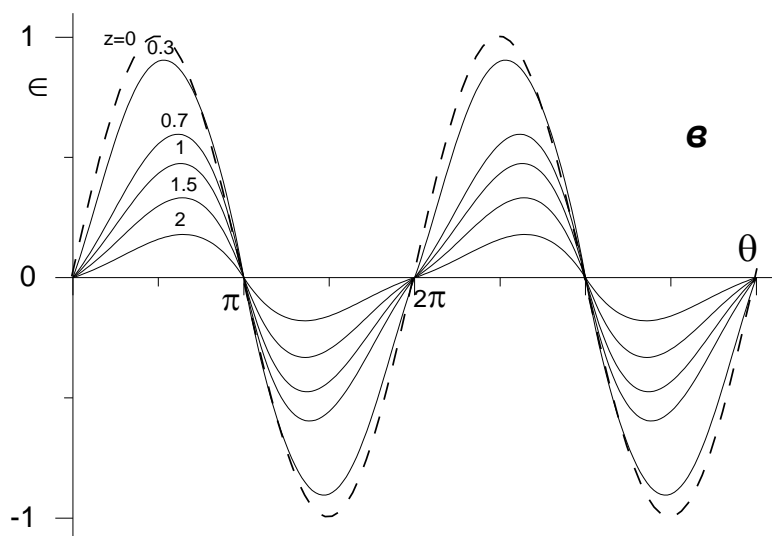
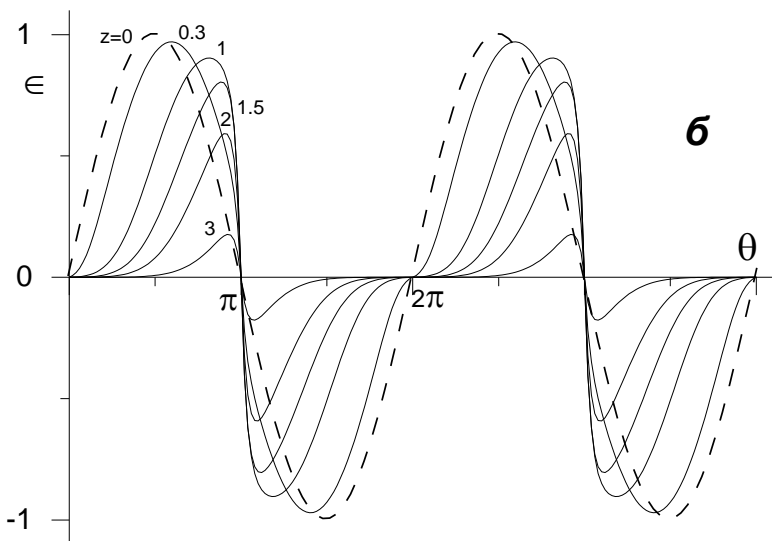
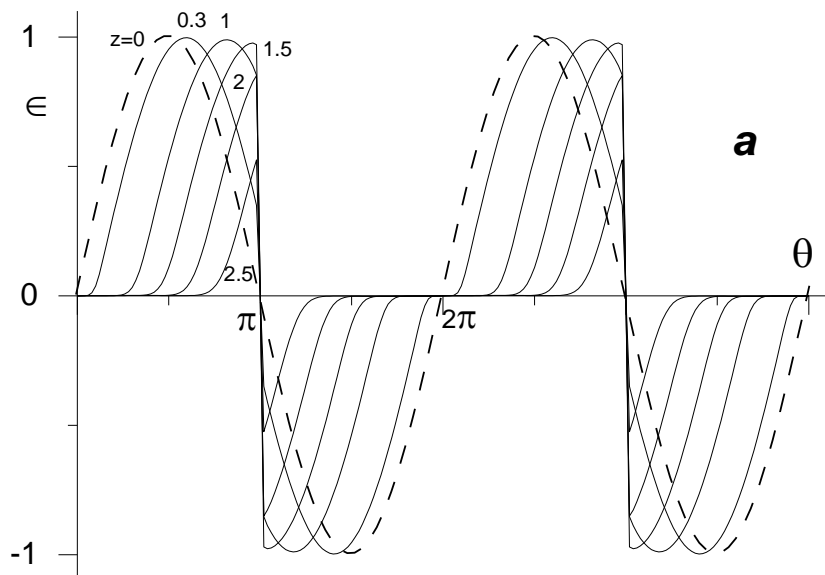


Рис.2.4. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при различных параметра δ : а - 10^{-2} , б - 10^{-1} , в - 1.

неоднозначности устраняются введением в профиль волны разрывов - здесь в точках $\theta = (2n+1)\pi$ [6].) При $\delta \neq 0$, “перехлестов” и неоднозначностей в волне, конечно, не образуется, а формируется плавные “ударные” фронты (при $\delta < 1$), ширина $\Delta\theta$ которых порядка δ , при этом и “нулевые зоны” из-за вязкости также “заглаживаются” и исчезают. В результате, на расстояниях $z > 1$ на каждом периоде волны (вблизи точек $\theta = (2n+1)\pi$) формируются разнополярные импульсы, близкие к “самоподобным” (2.13).

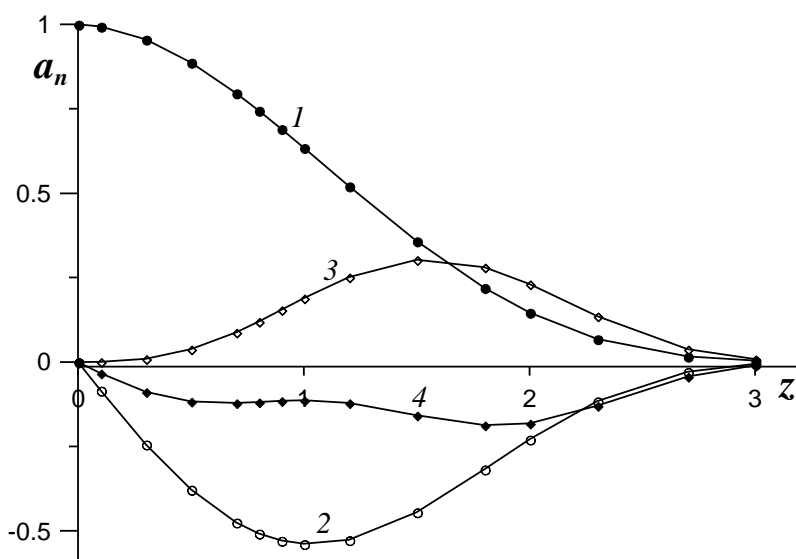


Рис.2.5. Зависимости амплитуд волны основной частоты и первых трех ее высших гармоник от расстояния z при $\delta = 10^{-2}$.

На Рис.2.5 показаны зависимости амплитуд волны основной частоты и ее высших гармоник от расстояния z . Видно, что амплитуда $a_1(z)$ первой гармоники уменьшается - за счет генерации высших гармоник и линейной диссипации среды, а амплитуды 2-ой, 3-ей и т.д. гармоник – вначале растут, причем, в начале распространения амплитуды четных гармоник значительно превышают амплитуды гармоник нечетных, а затем – также уменьшаются, асимптотически стремясь к нулю. Здесь, также как и в идеальной среде (без линейной диссипации) [6], амплитуды высших гармоник пропорциональны амплитуде исходной волны, однако, в идеальной разномодульной среде волна $\epsilon = \epsilon(z, \theta)$ затухает до нуля на конечном расстоянии, а в среде с линейной диссипацией затухание волны (на конечном расстоянии) всегда конечно.

2.2. Распространение акустических волн в однородных средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией.

Далее мы рассмотрим распространение акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией [12].

2.2.1 Уравнение состояния и волновое уравнение для однородной разномодульной среды с релаксацией.

Уравнение состояния однородной разномодульной среды с релаксацией можно получить по аналогии с уравнением состояния среды с квадратичной упругой нелинейностью и такой же релаксацией [42] - в последнем нелинейное слагаемое, пропорциональное ε^2 , следует заменить на $\gamma|\varepsilon|$ [6]:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|] + mC_0^2\rho \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt', \quad (2.17)$$

где $E = \frac{E_1 + E_2}{2}$, $\gamma = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2}$ - параметр разномодульной нелинейности, $|\gamma| \ll 1$,

$C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ - фазовая скорость низкочастотной волны, ρ - плотность, m - безразмерный параметр, определяющий силу релаксации (т.е. диссипацию и дисперсию среды), $0 < m \ll 1$, τ_0 - время релаксации. Если время релаксации τ_0 много меньше периода волны $T = 2\pi/\omega$ (ω - частота волны), то ее распространение происходит также, как в вязкой среде с низкочастотной скоростью $C_0 = C(\omega \rightarrow 0)$. Если же $\omega\tau_0 \gg 1$, релаксационные процессы в среде “заморожены” и волна будет распространяться со скоростью $C_\infty = C(\omega \rightarrow \infty) = C_0[1 + (m/2)] > C_0$, так что $m = \frac{2(C_\infty - C_0)}{C_0} > 0$ [42].

Уравнению состояния (2.17) отвечает реологическая модель однородной разномодульной среды с релаксацией [48,60] (Рис.2.6). Модель представляет собой однородную цепочку из одинаковых масс и одинаковых звеньев, каждое из которых является параллельным соединением стандартного линейного вязко-упругого тела и нелинейного (в данном случае - разномодульного) элемента.

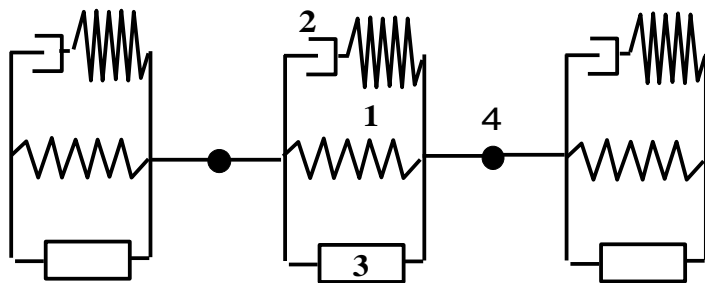


Рис.2.6. Реологическая модель однородной нелинейной среды с релаксацией: 1 - линейные пружины, 2 - демпфер, 3 - нелинейный элемент, 4 - масса.

Подставляя (2.17) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [1,2], получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\gamma C_0^2 \frac{\partial^2 |\varepsilon|}{\partial x^2} + m C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt'. \quad (2.18)$$

Переходя в (2.18) к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x_1$ [42], получим эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau'} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}\right) d\tau'. \quad (2.19)$$

Подставляя в линеаризованное ($\gamma = 0$) уравнение (2.19) $\varepsilon(x, t) \sim \exp j[\omega t - k(\omega)x]$, получим выражения для фазовой скорости $C = C(\omega)$ и коэффициента затухания $\beta = \beta(\omega)$ волны с частотой ω [42]:

$$C(\omega) = C_0 \left[1 + \frac{m}{2} \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 + (\omega/\Omega)^2} \right], \quad \beta(\omega) = \frac{m\Omega}{2C_0} \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 + (\omega/\Omega)^2}, \quad (2.20)$$

где $\Omega = \tau_0^{-1}$ - частота релаксации, $C_0 = C(\omega \rightarrow \infty)/[1 + (m/2)]$ - низкочастотный предел скорости волны.

Вводя безразмерные переменные $\varepsilon = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \Omega\tau$, $z = x\gamma\Omega/2C_0$, получим:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + h \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial \varepsilon(\theta')}{\partial \theta'} \exp[-(\theta - \theta')] d\theta', \quad (2.21)$$

где ε_0 - начальная амплитуда волны, $h = \frac{m}{\gamma}$ - параметр, характеризующий отношение

релаксации к нелинейности. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma, h \geq 0$.

При решении волнового интегро-дифференциального уравнения (2.21) удобно перейти к эквивалентному дифференциальному уравнению. Для этого продифференцируем уравнение (2.21) по θ и полученный результат сложим с (2.21) [42]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} \right) = h \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}. \quad (2.22)$$

2.2.2. Стационарные волны.

В начале, мы исследуем стационарное решение уравнения (2.22). Приравнивая к нулю производные по z , и интегрируя (2.21) с условиями $\varepsilon(\theta = \mp\infty) = \pm 1$, $\frac{d\varepsilon(\theta = \mp\infty)}{d\theta} = 0$,

получим:

$$h \frac{d\varepsilon}{d\theta} - \frac{d|\varepsilon|}{d\theta} + (1 - |\varepsilon|) = 0. \quad (2.23)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\epsilon(\theta) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{\theta - \theta_0}{h-1}\right), & \epsilon(\theta) > 0, \theta - \theta_0 \leq 0; \\ \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{h+1}\right) - 1, & \epsilon(\theta) < 0, \theta - \theta_0 \geq 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

где $\theta_0 = \text{const}$.

В случае $h > 1$ решение (2.24) однозначно и непрерывно, но несимметрично и имеет скачок производной при $\epsilon(\theta) = 0$ (Рис.2.7):

$$\left. \frac{d\epsilon(\theta)}{d\theta} \right|_{\epsilon \rightarrow \pm 0} = -\frac{1}{h \mp 1}. \quad (2.25)$$

При $h = 1$ на положительной ветви решения (2.24) возникает разрыв, но оно остается однозначным (Рис.2.8):

$$\epsilon(\theta) = \begin{cases} 1, & \epsilon(\theta) > 0, \theta - \theta_0 \leq 0; \\ \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) - 1, & \epsilon(\theta) < 0, \theta - \theta_0 \geq 0. \end{cases}$$

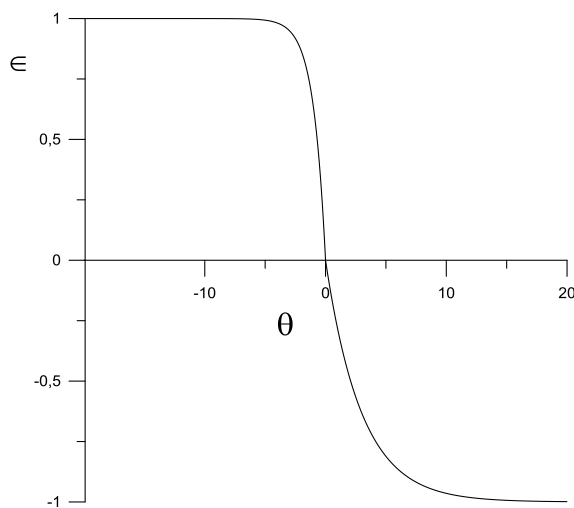


Рис.2.7. Форма стационарной волны при $h = 2$.

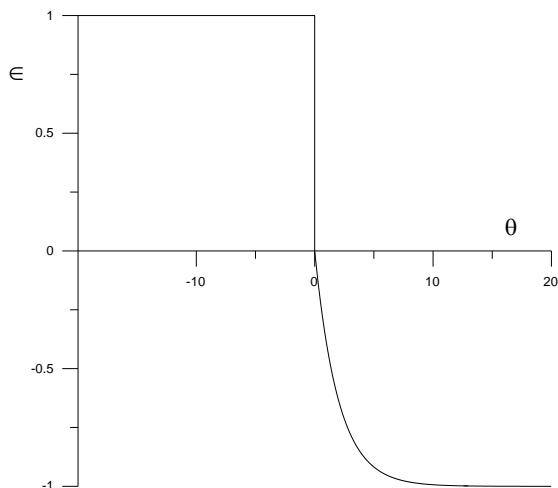


Рис.2.8. Форма стационарной волны при $h = 1$.

Здесь (при $h \geq 1$), также как и в среде с квадратичной нелинейностью [42], форма стационарной волны (2.24) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить. При $h < 1$ этот баланс нарушается и решение (2.24) становится “абсурдным” и неоднозначным: его положительная ветвь – пунктирная линия на Рис.2.9, направлена в другую (положительную по θ) сторону и не удовлетворяет условиям при $\theta = -\infty$ (так же, как и в среде с квадратичной нелинейностью и релаксацией [42]). Для устранения этого “абсурда” и неоднозначности в профиль волны необходимо ввести разрыв, используя правило равенства площадей, и “изменить направление” положительной ветви в доразрывной области [42]. Форма стационарной волны при $h = 0.5$ показана на Рис.2.9

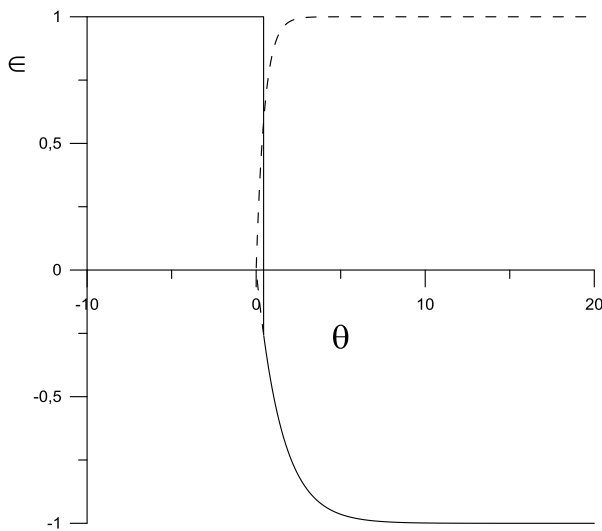


Рис.2.9. Форма стационарной волны при $h = 0.5$.

2.2.3. Самоподобные импульсные и периодические волны.

При $h \geq 1$ уравнение (2.22) имеет точные самоподобные решения в виде одиночных разнополярных возмущений (импульсов) и периодических волн. Поиск таких решений проведем методом разделения переменных, полагая, что:

$$\epsilon(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta), \quad (2.26)$$

где $Z(z) > 0$, $Z(z = 0) = 1$.

Самоподобное решение (2.26) описывает, вообще говоря, затухающую волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ при распространении. Примерами “самоподобных” волн являются стационарные волны и солитоны - в нелинейных средах и гармонические волны - в средах линейных. В разномодульной среде “самоподобные” волны (2.26) распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью. Подставляя

(2.26) в (2.22) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для $Z = Z(z)$ и $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$\frac{Z'_z}{Z} = \frac{h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi'|_{\theta} - |\Psi|''_{\theta\theta}}{\Psi + \Psi'_{\theta}} = -k \leq 0. \quad (2.27)$$

При таком выборе знака коэффициента k ($k \geq 0$) решение пространственного уравнения $Z(z) = \exp(-kz)$ не нарастает по координате $z > 0$. Значение коэффициента k задается граничным условием, определяющим форму излучаемой “самоподобной” волны: $\in (z = 0, \theta) = \Psi(\theta)$. Очевидно, что при $k = 0$ получим уже рассмотренное стационарное незатухающее решение (2.24).

Уравнение для временной части $\Psi = \Psi(\theta)$ волны имеет вид:

$$h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi|''_{\theta\theta} + k\Psi'_{\theta} - |\Psi'|_{\theta} + k\Psi = 0. \quad (2.28)$$

Фактически, нелинейное уравнение (2.28) – это два линейных уравнения: одно - для положительной $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ части и другое - для отрицательной $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$ части функции $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$(h-1)\Psi''_{1\theta\theta} + (k-1)\Psi'_{1\theta} + k\Psi_1 = 0, \quad (2.29)$$

$$(h+1)\Psi''_{2\theta\theta} + (k+1)\Psi'_{2\theta} + k\Psi_2 = 0. \quad (2.30)$$

Из уравнения (2.28) следует, что в нулевых точках θ_0 , в которых $\Psi_{1,2}(\theta_0) = 0$, для производных $\Psi'_{1,2\theta}(\theta_0)$ выполняется соотношение:

$$\frac{\Psi'_{1\theta}(\theta_0)}{\Psi'_{2\theta}(\theta_0)} = \frac{h+1}{h-1}. \quad (2.31)$$

При поиске решений уравнения (2.28) мы будем полагать, что функции, описывающие положительную $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ и отрицательные $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$ части волны, удовлетворяют условию непрерывности в нулевых точках θ_0 и условию (2.31).

При $(k \pm 1)^2 - 4kh \geq 0$, корни $\lambda^+_{1,2}$ и $\lambda^-_{1,2}$ соответствующих уравнениям (2.29), (2.30) характеристических уравнений определяются выражениями:

$$\lambda^+_{1,2} = \frac{-(k-1) \pm \sqrt{(k+1)^2 - 4kh}}{2(h-1)} \geq 0, \quad (2.32)$$

$$\lambda^-_{1,2} = \frac{-(k+1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4kh}}{2(h+1)} \leq 0. \quad (2.33)$$

В этом случае положительная и отрицательная части самоподобного импульсного возмущения определяются выражениями (Рис.2.10):

$$\Psi_1(\theta \leq 0) = -C_1 \exp\left(-\frac{k-1}{2(h-1)}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k+1)^2 - 4kh}}{2(h-1)}\theta\right) \geq 0, \quad (2.34)$$

$$\Psi_2(\theta \geq 0) = C_2 \exp\left(-\frac{k+1}{2(h+1)}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k-1)^2 - 4kh}}{2(h+1)}\theta\right) \leq 0, \quad (2.35)$$

где $C_1 = \text{const}$, $C_2 = -C_1 \sqrt{\frac{(k+1)^2 - 4kh}{(k-1)^2 - 4kh}} < 0$.

При $h=1$ самоподобное возмущение, также как и стационарная волна, содержит разрыв (Рис.2.11):

$$\Psi_1(\theta \leq 0) = -C_1 \exp\left(\frac{k}{k-1}\theta\right) \geq 0,$$

$$\Psi_2(\theta \geq 0) = C_2 \exp\left(-\frac{k+1}{4}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k-1)^2 - 4k}}{4}\theta\right) \leq 0, \quad (2.36)$$

где $C_2 = -C_1 \frac{k-1}{\sqrt{(k-1)^2 - 4k}} < 0$.

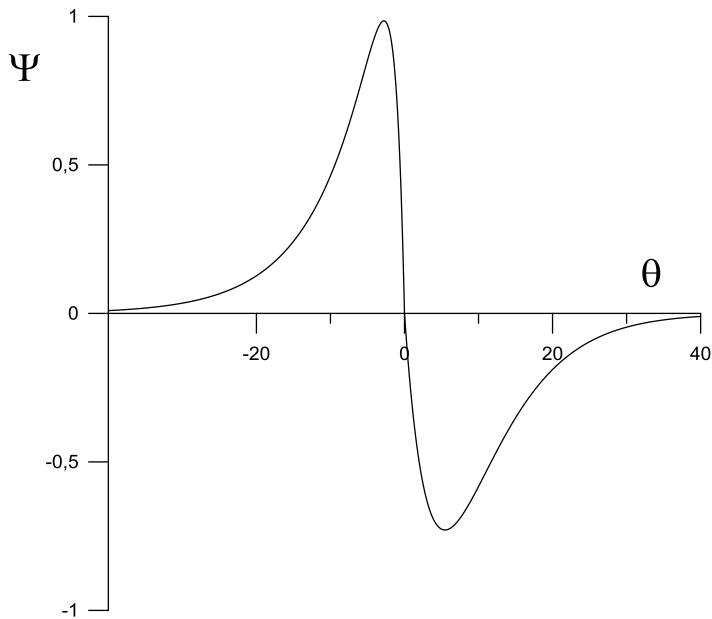


Рис.2.10. Форма самоподобного импульса при $h=2$, $k=0.1$.

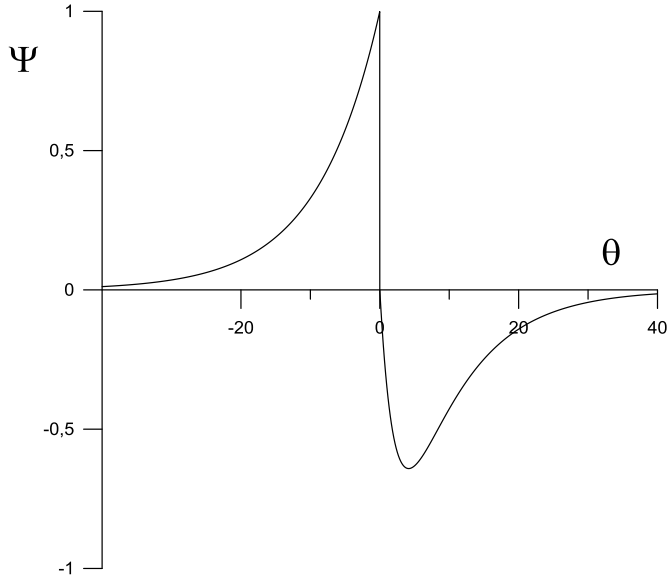


Рис.2.11. Форма самоподобного импульса при $h=1$, $k=0.1$.

При $(k \pm 1)^2 - 4kh < 0$, уравнение (2.22) имеет самоподобное периодическое решение. Здесь мы также будем полагать, что функции, описывающие положительную $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ и отрицательные $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$ части волны $\in(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta)$, удовлетворяют условию непрерывности в нулевых точках θ_0 и условию (2.31):

$$\Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2)] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2)] = 0, \quad \Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\Psi'_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]}{\Psi'_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]} = \frac{h+1}{h-1}, \quad \frac{\Psi'_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{\Psi'_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]} = \frac{h+1}{h-1}, \quad (2.38)$$

где $\theta_{1,2}$ - периоды функций $\Psi_{1,2}(\theta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Такое периодическое решение (для одного периода волны) имеет вид (Рис.2.12):

$$\Psi_1(\theta) = -C_1 \exp\left(-\frac{k-1}{2(h-1)}\theta\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4kh - (k+1)^2}}{2(h-1)}\theta\right) \geq 0, \quad -\pi \leq \frac{\sqrt{4kh - (k+1)^2}}{2(h-1)}\theta \leq 0, \quad (2.39)$$

$$\Psi_2(\theta) = C_2 \exp\left(-\frac{k+1}{2(h+1)}\theta\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4kh - (k-1)^2}}{2(h+1)}\theta\right) \leq 0, \quad 0 \leq \frac{\sqrt{4kh - (k-1)^2}}{2(h+1)}\theta \leq \pi, \quad (2.40)$$

где $\theta_1 = \frac{2\pi(h-1)}{\sqrt{4kh - (k+1)^2}}$, $\theta_2 = \frac{2\pi(h+1)}{\sqrt{4kh - (k-1)^2}}$, $k(h) = h - \sqrt{h^2 - 1} \leq 1$, $C_2 = -C_1 \sqrt{\frac{h-1}{h+1}} < 0$.

Частота $\omega(h)$ периодической самоподобной волны $\Psi(\theta)$ определяется выражением:

$$\omega(h) = \frac{2\pi\Omega}{\theta_1 + \theta_2} = k(h)\Omega. \quad (2.41)$$

На Рис.2.13 приведены графики зависимостей коэффициента $k = k(h)$ от параметра h . Формы одного периода самоподобных периодических волн при $h = 1.5$, $h = 2$ и $h = 3$

приведены на Рис.2.12 С ростом параметра h коэффициент k и частота $\omega(h)$ уменьшаются.

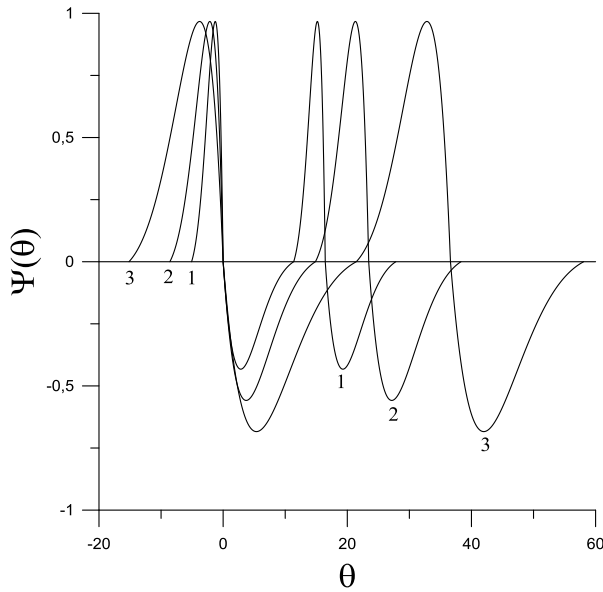


Рис.2.12. Формы самоподобных периодических волн при $h = 1.5$ (1), $h = 2$ (2) и $h = 3$ (3).

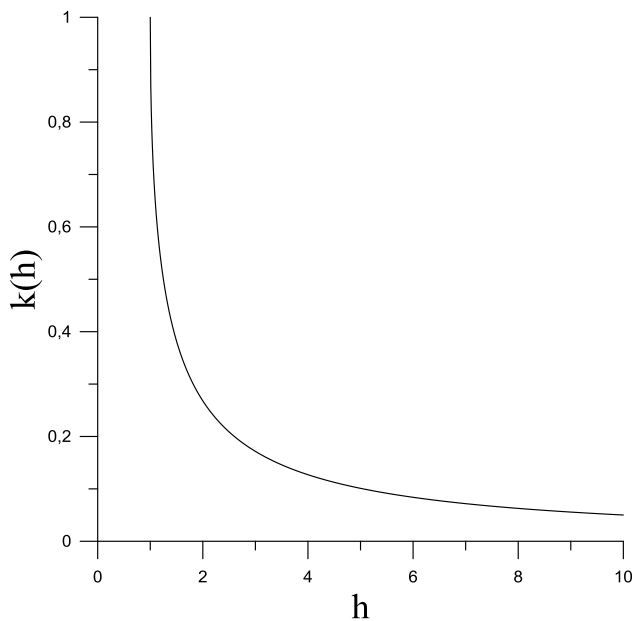


Рис.2.13. Зависимости коэффициента $k = k(h)$ от h .

2.2.4. Эволюция акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией.

Здесь мы рассмотрим распространение и эволюцию первоначально гармонических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией [13]. Граничное условие зададим в виде: $\varepsilon(x=0,t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$. Вводя безразмерные переменные $e = \varepsilon / \varepsilon_0$, $\theta = \omega t$, $z = x\gamma\omega / 2C_0$, из уравнения (2.19) получим:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta} + h \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial e(\theta', z)}{\partial \theta'} \exp[-\mu(\theta - \theta')] d\theta', \quad (2.42)$$

где $e(z=0, \theta) = \sin \theta$, $\mu = \Omega/\omega$, $\Omega = \tau_0^{-1}$ - частота релаксации, $h = m/\gamma$ - параметр, характеризующий отношение релаксации к нелинейности.

При распространении в нелинейной среде гармоническая волна будет искажаться и в ее спектре возникнут высшие гармоники, при этом все они будут взаимодействовать друг с другом, а соотношения между их амплитудами и фазами будут изменяться [2,40,42]. Разномодульная нелинейность и релаксационные дисперсия и диссипация затрудняют учет этих взаимодействий и возможность получения аналитического и численного решений волнового уравнения (2.42). А между тем, закономерности нелинейных волновых процессов, в особенности амплитудные зависимости высших гармоник, возникающих при распространении гармонической волны в нелинейной среде, отражают нелинейные свойства среды, поэтому выявление этих закономерностей составляет основу для нелинейной акустической диагностики нелинейных сред и материалов. Для разномодульной среды амплитуды высших гармоник первоначально гармонической волны пропорциональны ε_0 , в отличие от среды с квадратичной нелинейностью, где, в первом приближении, возникает только вторая гармоника с амплитудой, пропорциональной ε_0^2 [2,40,42]. В эксперименте, процедура измерения и установления амплитудных зависимостей высших гармоник производится при помощи спектроанализатора, поэтому теоретические расчеты искажения первоначально гармонической волны должны приводить к выражениям для амплитуд спектральных компонент нелинейной волны. Приближенные аналитические решения уравнения (2.42) и выражения для амплитуд спектральных компонент нелинейной волны можно получить для низкочастотных (НЧ) и высокочастотных (ВЧ) волн.

В низкочастотном (НЧ) приближении ($\mu \gg 1$) уравнение (2.42) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta} + h \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^3 e}{\partial \theta^3} \right). \quad (2.43)$$

Это уравнение является аналогом уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргера для среды с квадратичной нелинейностью и линейными диссипацией и дисперсией [42]. Решая его методом возмущений, получим при $z \ll 1$, $hz/\mu^2 \ll 1$:

$$e(\theta, z) \cong \left(1 - \frac{hz}{\mu} \right) \sin(\theta + hz/\mu^2) - \frac{8z}{3\pi} \sin 2(\theta + hz/\mu^2) - \frac{16z}{15\pi} \sin 4(\theta + hz/\mu^2) + \dots \quad (2.44)$$

В этом приближении дисперсия фазовой скорости не проявляется и волна основной частоты затухает как в среде с вязкой диссипацией ($1 - hz/\mu \cong \exp[-hz/\mu] = \exp[-m\omega^2 x/2\Omega C_0]$), при этом в среде генерируются четные гармоники, они распространяются с НЧ скоростью $C_0(1 + m/2\mu^2) \cong C_0$, их амплитуды пропорциональны $\gamma \varepsilon_0 x$.

В высокочастотном (ВЧ) приближении ($\mu \ll 1$) уравнение (2.42) имеет вид:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta'} - \mu h e, \quad (2.45)$$

где $\theta' = \theta + hz$.

В этом приближении дисперсия среды также не проявляется, волна распространяется с ВЧ скоростью $C_\infty = C_0[1 + (m/2)] > C_0$, а релаксационное затухание волны не зависит от ее частоты и определяется множителем $\exp(-\mu h z) = \exp(-m\Omega x/2C_0)$. Точное решение уравнения (2.45) для одного периода волны имеет вид:

$$e(z, \theta') = \exp(-\mu h z) \cdot \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta' \leq z; \\ \sin(\theta' - z), & z \leq \theta' \leq \pi + z; \\ \sin(\theta' + z), & \pi - z \leq \theta' \leq 2\pi - z; \\ 0, & 2\pi - z \leq \theta' \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.46)$$

Как следует из этого выражения, при распространении первоначально гармонической волны в ней сразу же (при $z=0$) вблизи точек $\theta' = \pi + 2\pi n$, $n=0,1,2,\dots$ (если $\gamma > 0$) возникают неоднозначности, которые устраняются введением в профиль волны разрывов в этих точках [6] (Рис.2.14). Амплитуда разрывов равна $e_S(z) = \exp(-\mu h z) \cdot \sin z$. (При $\gamma < 0$ неоднозначности возникают вблизи точек $\theta' = \pi n$.) В результате волна $e(z, \theta')$ затухает не только из-за частотно-независимого поглощения, но и за счет нелинейных потерь на разрыве, причем из-за последних волна затухает “до нуля” на конечном расстоянии $z_0 = \pi$. Таким образом, здесь, также, как и в среде с квадратичной нелинейностью (и релаксацией) [42], постоянство, т.е. частотная независимость, коэффициента затухания не предотвращает образования в профиле ВЧ волны неоднозначностей.

Спектральное представление разрывной волны (2.46) имеет вид:

$$e(z, \theta') = \exp(-\mu h z) \cdot \left[[\cos z - \pi^{-1}(z \cos z - \sin z)] \sin \theta' + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin z + (-1)^n \sin n z}{n^2 - 1} \sin n \theta' \right]. \quad (2.47)$$

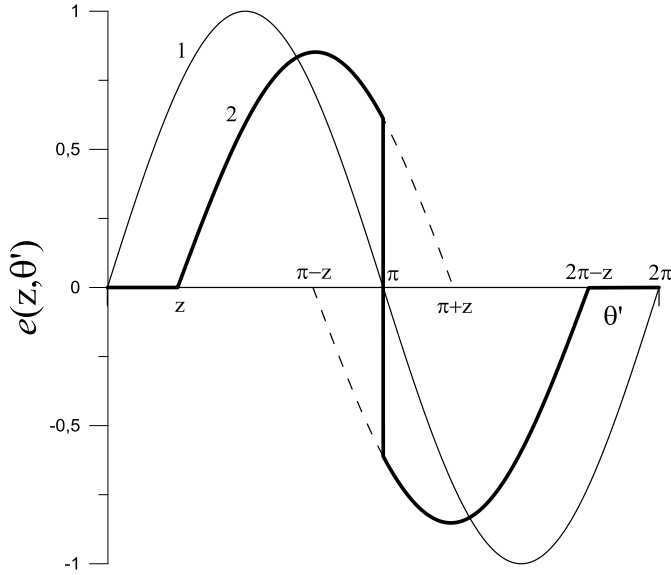


Рис.2.14. Эволюция формы одного периода ВЧ синусоидальной волны: 1 – профиль синусоидальной волны ($z = 0$), 2 – профиль волны при $z > 0$.

Из выражения (2.47) следует, что амплитуда первой гармоники уменьшается, а амплитуды высших - вначале растут, достигают максимумов и затем также уменьшаются.

Для волн промежуточных частот ($\omega \approx \Omega$, $\mu \approx 1$) уравнения (2.42) можно решить численно. Отметим, однако, что предложенный ниже метод численного решения уравнения (2.42) применим только для волн не очень высоких частот, когда параметры μ и h не очень малы и в волне не образуется неоднозначностей.

2.2.5. Схема численного решения нелинейного волнового уравнения.

Численное решение уравнения (2.42) для первоначально гармонической волны $e(z = 0, \theta) = \sin \theta$ будем искать спектральным методом [43,57], полагая, что:

$$e(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(z) \cos n\theta + b_n(z) \sin n\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \sin[n\theta + \Psi_n(z)], \quad (2.48)$$

$$\text{где } a_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(\theta, z) \cos n\theta d\theta, \quad b_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(\theta, z) \sin n\theta d\theta, \quad a_0(z) = 0,$$

$$e_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}, \quad \text{tg} \Psi_n(z) = a_n(z) / b_n(z).$$

Из выражения (2.48) следует, что локальная фазовая скорость $C(n\omega, z)$ гармонической составляющей волны $e(\theta, z)$ на частоте $n\omega$ определяется производной $\frac{1}{n} \frac{d\Psi_n(z)}{dz}$:

$$C(n\omega, z) = \frac{C_0}{1 - \frac{\gamma}{2n} \frac{d\Psi_n(z)}{dz}}, \quad \frac{\Delta C(n\omega, z)}{C_0} = \frac{C(n\omega, z) - C_0}{C_0} \cong \frac{\gamma}{2n} \frac{d\Psi_n(z)}{dz}, \quad (2.49)$$

при этом, вообще говоря, функции $\Psi_n(z)/n$, $C(n\omega, z)$ и $\Delta C(n\omega, z)/C_0$ зависят от частоты $n\omega$, от параметра $h = m/\gamma$ и от расстояния z . Таким образом, в однородной разномодульной среде с релаксацией могут проявляться эффекты нелинейной дисперсии, а дисперсия фазовой скорости $C(n\omega, z)$ определяет эффективность генерации и взаимодействия гармонических составляющих нелинейной волны $e(z, \theta)$.

Вследствие того, что нелинейное слагаемое $\partial|e|/\partial\theta$ в уравнении (2.42) является неаналитическим, схема численного решения этого уравнения, основанная на простой подстановке ряда (2.48) в (2.42), напрямую не проходит. Это связано с тем, что при разложении неаналитической периодической функции $f[e(\theta, z)] = |e(\theta, z)|$ в ряд Фурье по $\sin n\theta$ и $\cos n\theta$ не удается установить связь коэффициентов этого ряда с коэффициентами $a_n(z)$ и $b_n(z)$ ряда (2.48). Для преодоления этой “преграды” мы поступим следующим образом. Периодически продолжим четную функцию $f[e(z, \theta)] = |e(z, \theta)| \leq p(z) \leq 1$ по $e(z, \theta)$ с периодом $T = 2p(z)$ и представим ее в виде ряда Фурье по $\cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)]$:

$$|e(z, \theta)| = p(z) \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)]}{(2m+1)^2} \right], \quad (2.50)$$

где $p(z)$ - некоторая функция от z , удовлетворяющая условию $p(z) \geq \max_{-\pi < \theta < \pi} |e(z, \theta)|$.

Рассмотрим две вспомогательные периодические функции $\cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)]$ и $\sin[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)]$ и разложим их в ряды Фурье по θ :

$$\cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)] = D_0^m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^m(z) \sin(n\theta) + D_n^m(z) \cos(n\theta)], \quad (2.51)$$

$$\sin[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)] = B_0^m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^m(z) \sin(n\theta) + B_n^m(z) \cos(n\theta)], \quad (2.52)$$

где $D_0^m(z)$, $C_n^m(z)$, $D_n^m(z)$ и $B_0^m(z)$, $A_n^m(z)$, $B_n^m(z)$ - коэффициенты этих рядов.

Подставляя выражение (2.51) в (2.50), получим:

$$|e(z, \theta)| = N_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [M_n(z) \sin(n\theta) + N_n(z) \cos(n\theta)], \quad (2.53)$$

$$\text{где } N_0(z) = \frac{p(z)}{2} - \frac{4p(z)}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_0^m(z)}{(2m+1)^2}, \quad M_n(z) = -\frac{4p(z)}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_n^m(z)}{(2m+1)^2},$$

$$N_n(z) = -\frac{4p(z)}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_n^m(z)}{(2m+1)^2}.$$

Подставляя выражения (2.48) и (2.53) в уравнение (2.42), получим систему связанных уравнений для амплитуд $a_n(z)$ и $b_n(z)$ ряда (2.48):

$$\frac{da_n}{dz} = \frac{4n}{\pi} N_n(z) + \frac{hn^3}{\mu^2 + n^2} b_n - \frac{h\mu n^2}{\mu^2 + n^2} a_n, \quad (2.54)$$

$$\frac{db_n}{dz} = -\frac{4n}{\pi} M_n(z) - \frac{h\mu n^2}{\mu^2 + n^2} b_n - \frac{hn^3}{\mu^2 + n^2} a_n. \quad (2.55)$$

Далее рассмотрим два очевидных тождества:

$$\frac{\partial}{\partial z} \cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)] = -\pi(2m+1) \sin[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)] \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e(z, \theta)}{p(z)} \right), \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sin[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)] = \pi(2m+1) \cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)] \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e(z, \theta)}{p(z)} \right). \quad (2.57)$$

Подставляя в левую часть тождества (2.56) выражение (2.51), а в его правую часть – выражения (2.48) и (2.52), получим связь коэффициентов $C_n^m(z)$ и $D_n^m(z)$ с коэффициентами $A_k^m(z)$ и $B_k^m(z)$:

$$\frac{dD_0^m(z)}{dz} = -\frac{2m+1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_k(z)}{p(z)} \right) + B_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_k(z)}{p(z)} \right) \right), \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_n^m(z)}{dz} = & -\frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^n \left(A_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)} \right) + B_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)} \right) \right) - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{k+n}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_k(z)}{p(z)} \right) + B_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)} \right) \right) + \\ & + \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{k+n}(z)}{p(z)} \right) + B_{n+k}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_k(z)}{p(z)} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_n^m(z)}{dz} = & -\frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^n \left(-A_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)} \right) + B_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)} \right) \right) - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)} \right) + B_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{n+k}(z)}{p(z)} \right) \right) - \\ & - \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{k+n}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_n(z)}{p(z)} \right) + B_{k+n}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_n(z)}{p(z)} \right) \right), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Аналогично, подставляя в левую часть тождества (2.57) выражение (2.52), а в его правую часть – выражения (2.48) и (2.51), получим аналогичную связь коэффициентов $A_n^m(z)$ и $B_n^m(z)$ с коэффициентами $C_k^m(z)$ и $D_k^m(z)$:

$$\frac{dB_0^m(z)}{dz} = \frac{2m+1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_n(z)}{p(z)} \right) + D_n^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_n(z)}{p(z)} \right) \right), \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_n^m(z)}{dz} &= \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^n \left(C_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)} \right) + D_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)} \right) \right) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{k+n}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_k(z)}{p(z)} \right) + D_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)} \right) \right) - \\ &- \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{k+n}(z)}{p(z)} \right) + D_{n+k}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_k(z)}{p(z)} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_n^m(z)}{dz} &= \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^n \left(-C_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)} \right) + D_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)} \right) \right) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)} \right) + D_k^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{n+k}(z)}{p(z)} \right) \right) + \\ &+ \frac{2m+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_{k+n}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{b_n(z)}{p(z)} \right) + D_{k+n}^m(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{a_n(z)}{p(z)} \right) \right), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Уравнения (2.53)-(2.55), (2.58)-(2.63) представляют полную систему дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов $a_n(z)$ и $b_n(z)$ ряда Фурье (2.48) и для определения профиля нелинейной волны $e = e(z, \theta)$ на расстоянии z . При численном решении задачи общее число этих уравнений определяется точностью вычислений - количеством гармоник или коэффициентов Фурье в рядах (2.48), (2.50), т.е. максимальными значениями чисел m и n , необходимых для достижения заданной точности. В такой схеме относительная погрешность вычисления $|e(z, \theta)|$ по формуле (2.50) определяется выражением:

$$\begin{aligned} s(z, R) &= \frac{4}{\pi^2} \left| \sum_{m=R+1}^{\infty} \frac{\cos[\pi(2m+1)e(z, \theta)/p(z)]}{(2m+1)^2} \right| \frac{p(z)}{\max_{-\pi < \theta < \pi} |e(z, \theta)|} \leq \\ &\leq \frac{4}{\pi^2} \frac{p(z)}{\max_{-\pi < \theta < \pi} |e(z, \theta)|} \sum_{m=R+1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}, \end{aligned}$$

где R - число членов ряда (2.50), учитываемых при численном счете.

Из этого выражения видно, что для того, чтобы погрешность $s(z, R)$ была как можно меньше, нужно чтобы функция $p = p(z)$ было как можно ближе к амплитуде волны $e(z, \theta)$. В начале счета, в первой итерации, естественно, следует положить $p(z) = p(0) = 1$, провести вычисления волны $e(z, \theta)$ и определить ее амплитуду, т.е. $\max |e(z, \theta)|$, которая, по мере распространения волны, уменьшается. Затем, во второй итерации, при

уточненном вычислении волны $e(z, \theta)$, функцию $p = p(z)$ нужно положить равной найденной амплитуде $\max|e(z, \theta)|$. Таким образом, функцию $p(z)$ нужно “подстраивать” под амплитуду волны $e(z, \theta)$, при этом погрешность счета будет практически постоянной и можно рассчитывать форму волны $e(z, \theta)$ на больших расстояниях z с высокой точностью. В проведенных ниже расчетах - $\max n = 200$, $R = 50$, так что максимальная относительная ошибка $s(z, R)$ составляет $2 \cdot 10^{-3}$.

2.2.6. Результаты численного счета.

Здесь приведены результаты численного расчета профилей первоначально гармонических относительно низкочастотных волн на различных расстояниях z , а также показаны закономерности генерации их высших гармоник. На Рис.2.15 показана эволюция НЧ волны при $\mu = 10$, $h = 2$. Видно, что с ростом расстояния z волна искажается и затухает, при этом ее нулевые точки почти не смещаются. Последнее связано со слабой дисперсией НЧ волн в релаксирующей среде. При $z > 2$ форма волны практически не изменяется, что свидетельствует о формировании самоподобной волны, не изменяющей своей формы при распространении. Форма такой волны обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта волны, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить. На Рис.2.16 приведены зависимости амплитуд $e_n(z)$ и фаз $\Psi_n(z)/n$ первых пяти гармоник НЧ волны от расстояния z . Видно, что амплитуда первой гармоники уменьшается, а амплитуды высших - вначале растут, достигают максимумов и затем также уменьшаются, при этом вначале генерируются четные гармоники, а затем - нечетные. На малых расстояниях $z \leq 2$ фазы гармоник изменяются по-разному, а при $z > 3$ все они линейно зависят от z , так что $\frac{1}{n} \frac{d\Psi_n(z)}{dz} = const < 0$. Это соответствует распространению сформированной

самоподобной волны: ее гармоники, согласно выражению (2.49), распространяются с одинаковой скоростью $C(n\omega, z) = const$, так что форма волны $e(z, \theta)$ не зависит от z , несмотря на то, что она затухает. При повышении частоты затухание и дисперсия фазовой скорости возрастают, волна затухает сильнее (Рис.2.17) и имеет место заметный сдвиг нулевых точек; при $z > 1$ форма волны также стремится к самоподобной. Здесь, при $\mu = 3$ и $h = 4$ (Рис.2.18), амплитуды и фазы высших гармоник качественно ведут себя также, как и при $\mu = 10$, $h = 2$, но амплитуды гармоник существенно меньше, а $\frac{1}{n} \frac{d\Psi_n(z)}{dz} = const > 0$.

Аналогичные закономерности проявляются и при распространении еще более высокочастотных волн при $\mu = 1$, $h = 6$ (Рис.2.19, Рис.2.20). Из Рис.2.15 - Рис.2.20

следует, что для сформировавшихся самоподобных волн разных частот значения скоростей $C(n\omega, z)$ различны: $\Delta C(n\omega, z)/C_0 \cong -3.8 \cdot 10^{-2} \gamma$ - при $\mu = 10, h = 2$; $\Delta C(n\omega, z)/C_0 \cong 1.5 \cdot 10^{-2} \gamma$ - при $\mu = 3, h = 4$ и $\Delta C(n\omega, z)/C_0 \cong 1.5 \cdot 10^{-1} \gamma$ - при $\mu = 1, h = 6$. Это свидетельствует о том, что на стадии формирования самоподобных волн проявляется нелинейная дисперсия среды, т.е. имеет место зависимость фазовой скорости гармонических составляющих самоподобной волны от ее частоты и от параметра разномодульной нелинейности среды.

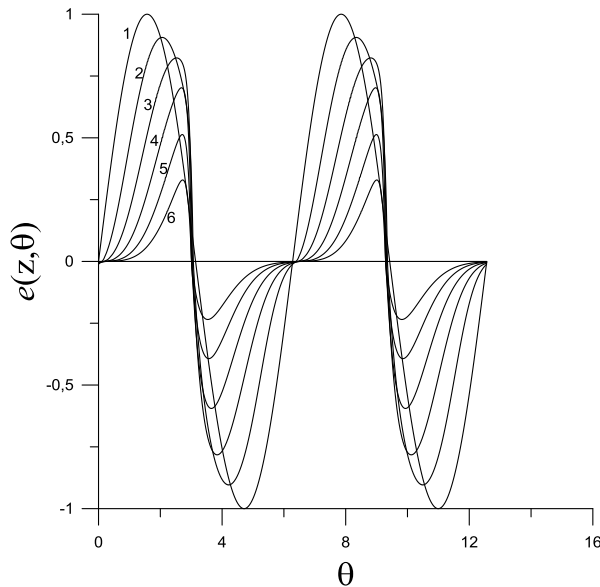


Рис.2.15. Эволюция первоначально гармонической волны при $\mu = 10, h = 2, z = 0 - 1, z = 0.5 - 2, z = 1 - 3, z = 1.5 - 4, z = 2 - 5, z = 2.5 - 6$.

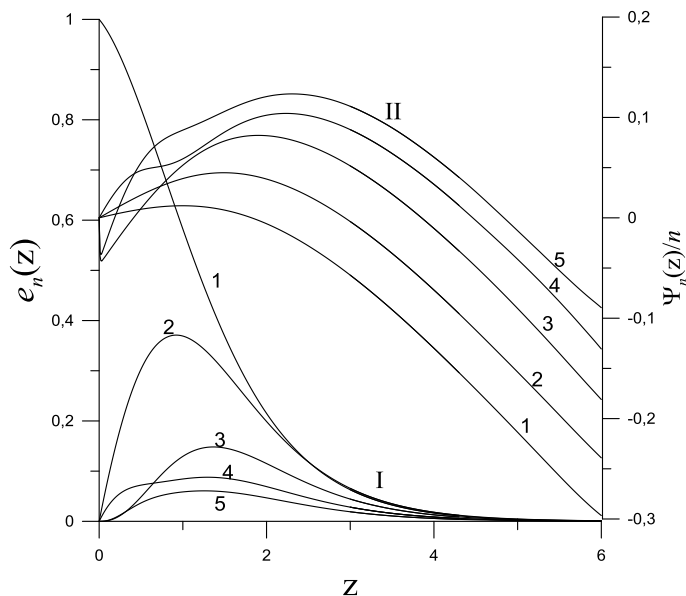


Рис.2.16. Зависимости амплитуд (I) и фаз (II) первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от расстояния z при $\mu = 10, h = 2$.

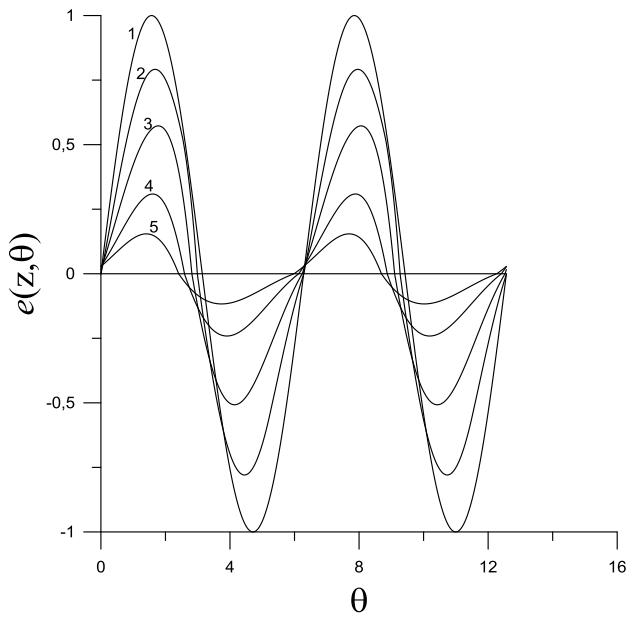


Рис.2.17. Эволюция первоначально гармонической волны при $\mu = 3$, $h = 4$ и различных z : $z = 0$ - 1, $z = 0.2$ - 2, $z = 0.5$ - 3, $z = 1$ - 4, $z = 1.5$ - 5.

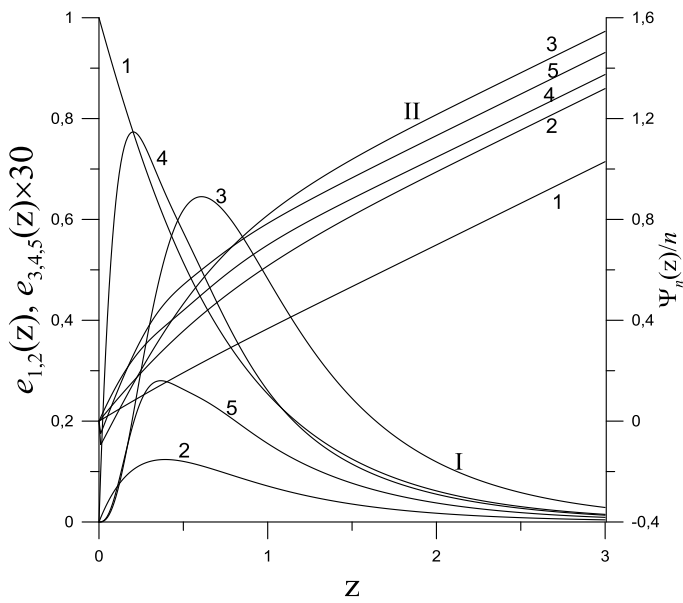


Рис.2.18. Зависимости амплитуд и фаз первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от расстояния z при $\mu = 3$, $h = 4$.

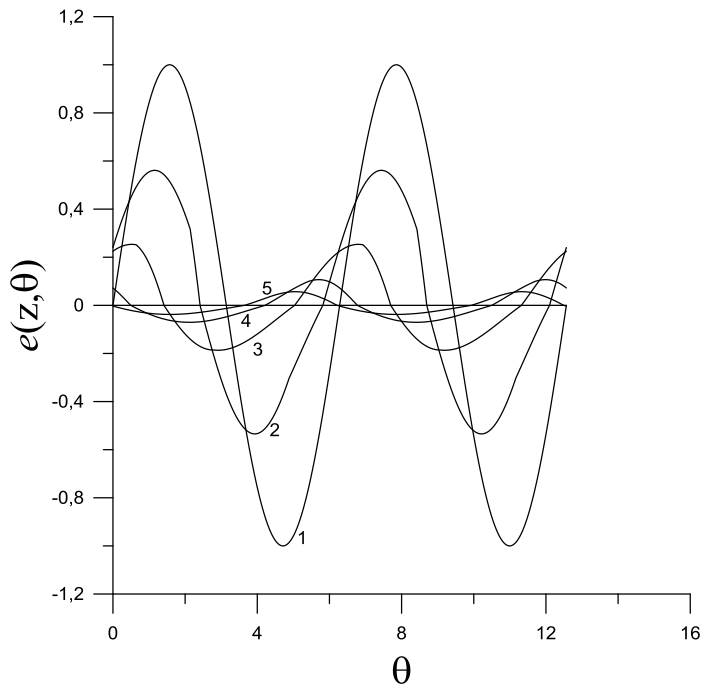


Рис.2.19. Эволюция первоначально гармонической волны при $\mu = 1$, $h = 6$ и различных z : $z = 0$ - 1, $z = 0.2$ - 2, $z = 0.5$ - 3, $z = 0.8$ - 4, $z = 1$ - 5.

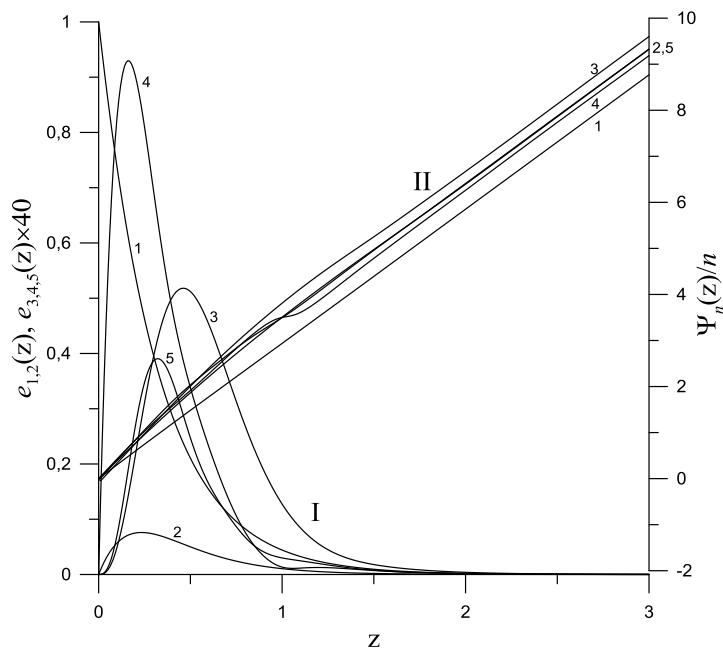


Рис.2.20. Зависимости амплитуд и фаз первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от расстояния z при $\mu = 1$, $h = 6$.

2.3. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией.

Здесь мы рассмотрим распространение акустических волн в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией [14].

2.3.1. Уравнение состояния и волновое уравнение для микронеоднородной среды с разномодульной нелинейностью и релаксацией.

Реологическая модель микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией показана на Рис.2.21 [9,36,48,60]. Она состоит из одномерной, неоднородной цепочки последовательно соединенных точечных масс M , линейных идеально-упругих пружинок и относительно редких нелинейных (в данном случае, разномодульных) вязко-упругих элементов. В этой модели однородные участки цепочки, состоящие из масс и жестких упругих пружинок (с коэффициентами упругости κ), соответствуют областям бездефектного идеально-упругого твердого тела, а части цепочки, состоящие из нелинейных вязко-упругих элементов, соответствуют “мягким” нелинейным дефектам с линейной упругостью $\kappa_d = \xi\kappa \ll \kappa$, ξ - относительная упругость дефектов, $\xi \ll 1$. Здесь предполагается, что жесткие и мягкие элементы такой цепочки имеют одинаковую длину $l \ll \Lambda$, при этом число всех элементов на длине L равно N ($L = Nl \gg l$), а число дефектов $N_d = \nu N$, так что безразмерный коэффициент ν соответствует относительной (линейной) концентрации дефектов ($\nu = N_d / N$). В соответствии с реологической моделью, уравнение состояния одного разномодульного дефекта описывается уравнением:

$$\sigma(\varepsilon_d) = \xi E[\varepsilon_d - \gamma|\varepsilon_d|] + \alpha \dot{\varepsilon}_d, \quad (2.64)$$

где $E = \kappa l$ - модуль упругости бездефектной среды, ε_d - деформация дефекта, α и γ - коэффициент вязкости и параметр разномодульной нелинейности, $|\gamma| \ll 1$. Для определенности, мы будем полагать, что $\gamma > 0$.

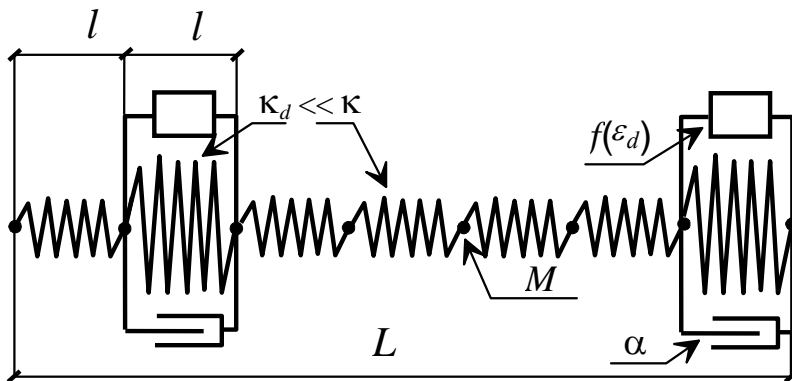


Рис.2.21. Реологическая модель микронеоднородной нелинейной среды с релаксацией. Для разномодульной среды $f(\varepsilon_d) = -\xi E \gamma |\varepsilon_d|$.

При $\omega \ll (\xi\kappa/M)^{1/2}$, ω - частота деформирования, при малой концентрации дефектов ($m = \nu/\xi \ll 1$) уравнения состояния микронеоднородной среды имеет вид [9,36]:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \nu R(\varepsilon) - \nu \gamma \mathcal{R}[R(\varepsilon)]], \quad (2.65)$$

$$R(\varepsilon) = \frac{\Omega}{\xi} \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[-\Omega(t - t_1)] dt_1, \quad \varepsilon(R) = \frac{\xi}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial t} + \xi R, \quad \gamma \xi R[|R(\varepsilon)|] \ll R(\varepsilon), \quad (2.66)$$

где $\Omega = \xi E / \alpha$ - релаксационная частота дефекта, ν - концентрация дефектов ($\nu \ll 1$), $|\varepsilon| \ll |\gamma| \ll 1$.

Уравнение состояния (2.65) содержит два релаксационных слагаемых - линейное $\nu R(\varepsilon)$ и нелинейное $\nu \gamma \xi R[|R(\varepsilon)|]$, причем нелинейное слагаемое, в отличие от однородных сред [42], не совсем независимо от линейного, - нелинейность микро неоднородной среды зависит от ее линейных релаксационных свойств. Нелинейное слагаемое становится независимым от линейного только при $\alpha \rightarrow 0$, когда $\Omega \rightarrow \infty$. В этом случае из уравнения (2.65) получаем:

$$\sigma(\varepsilon) = E[(1 - m)\varepsilon - \gamma m |\varepsilon|], \quad (2.67)$$

так что параметром нелинейности разномодульной микро неоднородной среды в квазистатике (при $\omega \ll \Omega$) является величина $\gamma m / (1 - m) \cong \gamma m \ll 1$. Линейная и нелинейная релаксация микро неоднородных сред обусловлены вязкостью дефектов, причем нелинейная релаксация проявляется дважды: первый раз за счет линейной, поскольку нелинейная функция $|R(\varepsilon)|$ в уравнении (2.65) определяется линейным откликом дефектов, и, второй раз, релаксацией самой нелинейной функции $|R(\varepsilon)|$. Именно вязкость дефектов и является причиной дисперсии, т.е. частотной зависимости и линейных и нелинейных акустических свойств микро неоднородных сред. С ростом частоты ω акустического воздействия "жесткость" вязко-упругих дефектов увеличивается, а их деформация уменьшается; это приводит к увеличению линейного модуля упругости и коэффициента затухания среды, а также к уменьшению ее нелинейности на высоких частотах, т.е. к дисперсии нелинейности.

Подставляя уравнение состояния (2.65) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [1,2], получим волновое уравнение для ε :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\nu C^2 \left(\frac{\partial^2 R(\varepsilon)}{\partial x^2} + \gamma \xi \frac{\partial^2 R[|R(\varepsilon)|]}{\partial x^2} \right), \quad (2.68)$$

где $C = (E / \rho)^{1/2}$ - скорость волны для среды без дефектов.

Граничное условие зададим в виде: $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$.

Переходя в уравнении (2.67) к переменным $\tau = t - x / C_0$, $x' = x$, получим одноволновое эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\nu}{2C_0\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R(\varepsilon) + \frac{\nu\gamma\xi}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} R[|R(\varepsilon)|] = 0, \quad (2.69)$$

где $\varepsilon(R) = \frac{\xi}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \xi R$.

Прежде, чем приступить к решению этого уравнения, оценим, как это принято в теории нелинейных волн [42], отношения нелинейного слагаемого к линейным:

$$\frac{\nu\gamma\xi}{2C_0} \frac{\partial(R[|R(\varepsilon)|])/\partial\tau}{\partial\varepsilon/\partial x} \approx \frac{\gamma m \Omega^2}{2(\omega^2 + \Omega^2)}, \quad (2.70)$$

$$\text{Re} = \gamma\xi\Omega \frac{\partial(R[|R(\varepsilon)|])/\partial\tau}{\partial^2 R(\varepsilon)/\partial\tau^2} \approx \frac{\gamma\Omega^2}{\omega(\omega^2 + \Omega^2)^{1/2}}, \quad (2.71)$$

где Re - акустическое число Рейнольдса для микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией.

Из выражений (2.70), (2.71) видно, что для разномодульной среды эти отношения не зависят от амплитуды волны. Из выражения (2.71) также следует, что для заметного развития нелинейных процессов в микронеоднородной разномодульной среде необходимо

выполнение условия: $\text{Re} = \frac{\gamma\Omega^2}{\omega(\omega^2 + \Omega^2)^{1/2}} > 1$. Таким образом, наиболее благоприятный

режим, с точки зрения максимального проявления нелинейных свойств среды, будет иметь место для низкочастотных (НЧ) волн ($\omega \ll \Omega$), когда $\text{Re} = \gamma\Omega/\omega > 1$. В высокочастотном (ВЧ) диапазоне, при $\omega \geq \Omega$, проявление нелинейных процессов будет мало заметно (поскольку $\text{Re} \ll 1$).

Из довольно сложного интегро-дифференциального уравнения (2.69.2.69), после некоторых преобразований [42], заключающихся в умножении на Ω^{-1} и дифференцировании по τ уравнения (2.69) и сложении полученного уравнения с исходным, получим следующие более простые эволюционные уравнения для деформации $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ и “релаксатора” $R = R(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau \partial x} - \frac{m}{2C_0\Omega} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma m \xi}{2C_0} \frac{\partial |R(\varepsilon)|}{\partial \tau} = 0, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + R \right] - \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} - \gamma |R| \right] = 0. \quad (2.73)$$

В безразмерных переменных $Q(z, \theta) = R(x, \theta)/R_0$, $R_0 = \varepsilon_0 \mu / \xi \sqrt{1 + \mu^2}$, $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta) / \varepsilon_0$, $\theta = \omega \tau$, $\mu = \Omega / \omega$, $z = \gamma m \omega x / 2C_0$ уравнения (2.72), (2.73) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e + \frac{1}{\mu} \frac{\partial e}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{\gamma \mu} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\partial |Q(e)|}{\partial \theta}, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma \mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\gamma \mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} - |Q| \right] = 0, \quad (2.75)$$

где $e(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{\partial Q(z, \theta)}{\partial \theta} + \mu Q(z, \theta) \right)$.

В линейном приближении ($\gamma = 0$) уравнения (2.68), (2.69), (2.72) - (2.75) соответствуют волновым уравнениям для однородной среды с релаксацией [42]. Однако, в отличие от аналогичных уравнений для однородной среды с безынерционной квадратичной нелинейностью и релаксацией [42], уравнения (2.68), (2.69), (2.72) - (2.75) характеризуются инерционной, т.е. частотно-зависимой, разномодульной нелинейностью. Из-за этих отличий закономерности нелинейных волновых процессов в однородной и микронеоднородной средах будут различными. Покажем это на простом примере распространения гармонической волны и генерации ее высших гармоник.

2.3.2. Генерация гармоник НЧ и ВЧ волн.

Уравнение (2.75) будем решать методом возмущений, полагая, что

$$Q(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z) \sin[n\theta + n\Psi_n(z)], \quad \sum_{n=2}^{\infty} q_n^2(z) \ll q_1^2(z),$$

$$|Q(z, \theta)| \cong q_1(z) |\sin[\theta + \Psi_1(z)]| = q_1(z) \left[\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2 - 1)} \cos[2n(\theta + \Psi_1(z))] \right].$$

В этом приближении в разномодульной среде генерируются только четные гармоники (потому что, нелинейность - четная), при этом все они определяются волной основной частоты.

На малых расстояниях $z \ll \gamma/\mu$, $z \ll \gamma/2p$ волна $e(z, \theta)$ содержит основную гармонику (ее амплитуда экспоненциально уменьшается) и p высших четных гармоник (их амплитуды растут пропорционально z):

$$e(z, \theta) = \exp\left(-\frac{\mu z}{\gamma(1+\mu^2)}\right) \sin\left(\theta + \frac{z}{\gamma(1+\mu^2)}\right) + \frac{8z}{\pi\sqrt{1+\mu^{-2}}} \sum_{n=1}^p \frac{2n}{(4n^2-1)\sqrt{1+4n^2\mu^{-2}}} \sin\left[2n\theta - 2n \cdot \arctg\left(\frac{1}{\mu}\right) - \arctg\left(\frac{2n}{\mu}\right)\right]. \quad (2.76)$$

Из выражения (2.76) следует, что амплитуда $\varepsilon_{2n}(x)$ деформации гармоники с номером $2n$ определяется выражением: $\varepsilon_{2n}(x) \propto \gamma \varepsilon_0 n k x / (4n^2 - 1) N_{2n}(\omega/\Omega)$, где $k = \omega/C_0$,

$N_{2n}(\omega/\Omega) = [1 + (\omega/\Omega)^2]^{1/2} [1 + (2n\omega/\Omega)^2]^{1/2} \geq 1$. (Для сравнения, в однородной среде с безынерционной квадратичной нелинейностью амплитуда первой гармоники определяется тем же выражением (2.76): $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_0 \exp[-\beta(\omega)x]$, а амплитуда второй - выражением, отличным от (2.76): $\varepsilon_2(x) \propto \Gamma \varepsilon_0^2 kx$, $\Gamma = const$ - параметр квадратичной нелинейности [42].) Таким образом, эффективный параметр нелинейности микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией для процесса генерации гармоники с номером $2n$ определяется выражением: $\gamma_{eff}(\omega/\Omega) = \gamma N_{2n}^{-1}(\omega/\Omega)$, т.е. из-за релаксации с ростом частоты ω первичной волны параметр нелинейности уменьшается в $N_{2n}(\omega/\Omega)$ раз. Это свойство – дисперсия нелинейности, характерно и для других микронеоднородных сред с релаксацией. Вместе с линейными релаксационными поглощением и дисперсией, дисперсия нелинейности ограничивает крутизну фронта волны и предотвращает образования в ней неоднозначностей. Далее, в П.2.3.3, мы покажем это на примере стационарной волны.

На больших расстояниях, при $z \gg \frac{\gamma(4 + \mu^2)(1 + \mu^2)}{3\mu^3}$, $\frac{16\gamma\sqrt{1 + \mu^2}}{\pi} \ll 1$, волна $e(z, \theta)$

определяется выражением:

$$e(z, \theta) = \exp\left(-\frac{\mu z}{\gamma(1 + \mu^2)}\right) \times \left\{ \sin\left(\theta + \frac{z}{\gamma(1 + \mu^2)}\right) + \frac{16\gamma\sqrt{1 + \mu^2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin\left[2n\left(\theta + \frac{z}{\gamma(1 + \mu^2)} - \arctg\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\right] \right\}. \quad (2.77)$$

В этом случае, соотношения между амплитудами и фазами гармонических составляющих волны не зависят от расстояния. Это соответствует тому, что на больших расстояниях (при $16\gamma\sqrt{1 + \mu^2}/\pi \ll 1$) первоначально гармоническая волна стремится к самоподобной, не меняющей своей формы при распространении, при этом коэффициент затухания и скорость распространения гармоник (и волны в целом) определяются выражениями:

$$\beta(\mu) = \frac{m\Omega}{2C_0(1 + \mu^2)}, \quad C(\mu) = \frac{C_0}{1 - m/2(1 + \mu^2)}. \quad (2.78)$$

2.3.3. Стационарные волны.

Рассмотрим стационарную волну типа симметричного скачка, когда $\varepsilon(z, \eta = \mp\infty) = \pm\varepsilon_0$, $R(z, \eta = \mp\infty) = \pm R_0 = \pm\varepsilon_0/\xi$, $\eta = \Omega\tau$. Стационарная волна является самоподобной, т.к. ее

форма не меняется при распространении. Полагая в уравнении (2.73) $R(z, \eta) = R(\eta)$, $Q(\eta) = R(\eta)/R_0$, получим уравнение для $Q(\eta)$:

$$\frac{d^2 Q}{d\eta^2} + \frac{dQ}{d\eta} + \gamma(1 - |Q|) = 0, \quad (2.79)$$

где $Q(\eta = \mp\infty) = \pm 1$, $\frac{dQ(\eta = \pm\infty)}{d\eta} = 0$, $e(\eta) = \frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon_0} = \frac{\partial Q(\eta)}{\partial \eta} + Q(\eta)$.

Решение уравнения (2.79), с точностью до малых слагаемых, пропорциональных γ , имеет вид:

$$Q(\eta) = \begin{cases} 1 - \exp(\gamma\eta), & \eta \leq 0, \\ -1 + \exp(-\gamma\eta), & \eta \geq 0, \end{cases} \quad e(\eta) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma)\exp(\gamma\eta), & \eta \leq 0, \\ -1 + (1 - \gamma)\exp(-\gamma\eta), & \eta \geq 0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Форма стационарной волны $e = e(\eta)$ (Рис.2.22) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить. При увеличении релаксационной частоты Ω крутизна фронта волны $e = e(\tau)$ растет и при $\Omega \rightarrow \infty$ стремится к бесконечно крутому перепаду: $e(\tau) = -\text{sign } \tau$. Отметим, что здесь форма стационарной волны не содержит неоднозначности, в отличие от стационарной волны в однородной среде с безынерционной (частотно-независимой) нелинейностью и линейной релаксацией [12,42]. Это связано с нелинейной релаксацией микронеоднородной среды, приводящей к уменьшению эффектов нелинейности при увеличении крутизны фронта $de(\tau)/d\tau$ волны.

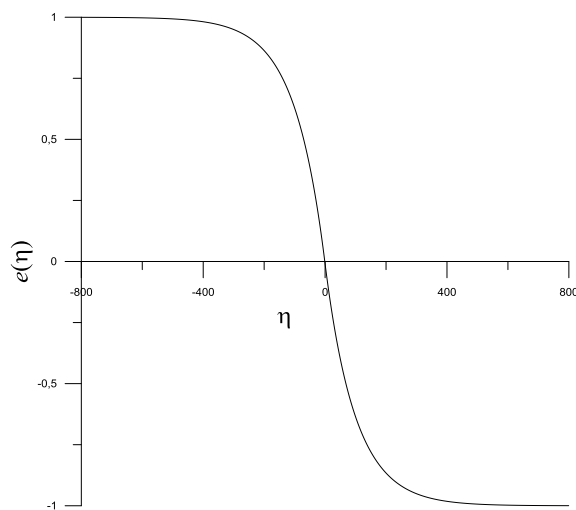


Рис.2.22. Форма стационарной волны $e = e(\eta)$ при $\gamma = 10^{-2}$.

2.3.4. Самоподобные волны.

Кроме стационарной волны, в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией возможны и другие виды самоподобных волн. Однако, в общем виде, определение их формы – довольно сложная задача. Здесь мы приведем самоподобные решения для НЧ и ВЧ волн.

В НЧ приближении (при $\mu \gg 1$, $\gamma\mu^2 \gg 1$) имеем $Q(z, \theta) \cong e(z, \theta)$, а уравнение (2.75) упрощается и сводится к уравнению:

$$\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial e}{\partial \theta} - |e| \right] = 0. \quad (2.81)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (2.5); его самоподобные решения находятся методом разделения переменных.

Самоподобные решения для разнополярных импульсных возмущений имеют вид:

$$e(\theta, z) = -\exp(-pz) \exp[-(\gamma\mu/2)|\theta|] \operatorname{sh}[\sqrt{1 - (4p/\gamma\mu)}(\gamma\mu/2)\theta], \quad (2.82)$$

где $0 < p \leq \gamma\mu/4$. Если положить $p = \gamma\mu/4$, то из (2.82) получим:

$$\Psi(\theta) = -(\gamma\mu\theta/2) \exp[-(\gamma\mu/2)|\theta|]. \quad (2.83)$$

При $\gamma\mu \rightarrow \infty$ возмущение (2.82) содержит разрыв: $e(z, \theta) = -\exp[-p|\theta|] \operatorname{sign} \theta \exp(-pz)$.

Уравнение (2.81) также имеет периодическое самоподобное решение:

$$e(z, \theta) = -\exp(-pz) \exp[-(\gamma\mu/2)|\theta|] \sin[\sqrt{(4p/\gamma\mu) - 1}(\gamma\mu/2)\theta], \quad (2.84)$$

где $|\theta| \leq \frac{2\pi}{\gamma\mu\sqrt{(4p/\gamma\mu) - 1}}$, $p > \gamma\mu/4$.

Для определения формы самоподобных ВЧ волн, получим из волнового уравнения (2.68) эволюционные уравнения в системе координат $\zeta = t - x/C$, $x' = x$, движущейся с высокочастотной скоростью C :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\nu}{2C} \frac{\partial}{\partial \zeta} R(\varepsilon) + \frac{\nu\gamma\xi}{2C} \frac{\partial}{\partial \zeta} R[|R(\varepsilon)|] = 0, \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(R + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\nu}{2\xi C} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \zeta} R + R + \gamma|R| \right) = 0. \quad (2.86)$$

В безразмерных переменных $Q(z, \theta) = R(x, \theta)/R_0$, $R_0 = \varepsilon_0\mu/\xi\sqrt{1+\mu^2}$, $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$, $\theta = \omega\zeta$, $z = \gamma\mu\omega x/2C$, $\mu = \Omega/\omega$ уравнение (2.86) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(Q + \frac{2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{Q}{\gamma} + |Q| \right) = 0, \quad (2.87)$$

$$\text{где } e(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(\frac{\partial Q(z, \theta)}{\partial \theta} + \mu Q(z, \theta) \right).$$

Здесь, при $\mu \ll 1$, имеем $e(z, \theta) \cong \frac{\partial Q(z, \theta)}{\partial \theta}$ и из (2.87) получаем линейное уравнение:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\mu}{\gamma} e, \quad (2.88)$$

решение которого имеет вид:

$$e(z, \theta) = \exp[-(\mu/\gamma)z] \Psi(\theta), \quad (2.89)$$

где $\Psi(\theta)$ - произвольная функция, зависящая от θ .

Таким образом, в ВЧ диапазоне ($\omega \gg \Omega$), где дисперсия фазовой скорости и нелинейность среды пренебрежимо малы, а коэффициент затухания не зависит от частоты ω волны ($\mu z/\gamma = m\Omega x/2C$), волна любой формы будет самоподобной.

2.3.5. Эволюция НЧ гармонических волн: численное решение.

Получить точное аналитическое решение нелинейного волнового уравнения (2.75.2.75) для первоначально гармонической волны $e(z=0, \theta) = \sin \theta$ не представляется возможным, но его можно решить численно. (Схема численного решения эволюционного уравнения с разномодульной нелинейностью подробно изложена в П.2.2.5.) Решение уравнения (2.75) будем искать спектральным методом, полагая, что:

$$e(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(z) \cos n\theta + b_n(z) \sin n\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \sin[n\theta + \Psi_n(z)], \quad (2.90)$$

$$\text{где } a_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(z, \theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(z, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad a_0(z) = 0,$$

$$e_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}, \quad \text{tg} \Psi_n(z) = a_n(z)/b_n(z).$$

Далее приведены результаты численного расчета профилей первоначально гармонических НЧ волн (при $\text{Re} \geq 1$) на различных расстояниях z , а также показаны закономерности генерации их высших гармоник. На Рис.2.23 показана эволюция НЧ волны при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$, $\text{Re} = 10$. Видно, что с ростом расстояния z волна искажается и затухает, при этом ее нулевые точки не смещаются. Последнее связано со слабой дисперсией НЧ волн в релаксирующей среде. При $z > 2$ форма волны практически не изменяется, что свидетельствует о формировании самоподобной волны, описываемой выражением (2.84). На Рис.2.24 приведены зависимости амплитуд $e_n(z)$ первых пяти гармоник НЧ волны от расстояния z . Видно, что амплитуда первой гармоники уменьшается, а амплитуды высших - вначале растут, достигают максимумов и затем также уменьшаются, при этом

вначале генерируются четные гармоники, а затем - нечетные. При повышении частоты ($\mu = 3 \cdot 10^2$, $\text{Re} = 3$ и $\mu = 10^2$, $\text{Re} = 1$) затухание волны увеличивается (Рис.2.25 - Рис.2.28), а эффективность генерации высших гармоник уменьшается; при $z > 1$ форма волны также стремится к самоподобной. Здесь амплитуды высших гармоник качественно ведут себя также, как и при $\mu = 10^3$, но их амплитуды заметно меньше (Рис.2.26, Рис.2.29).

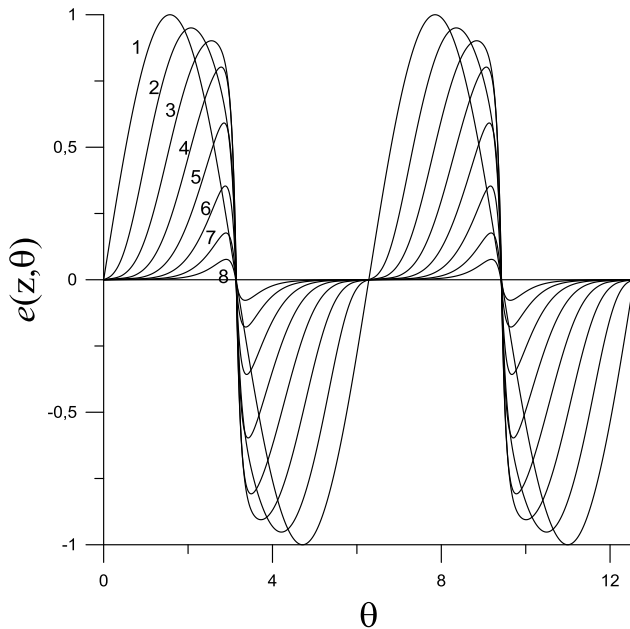


Рис.2.23. Эволюция первоначально гармонической НЧ волны при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z : $z = 0 - 1$, $z = 0.5 - 2$, $z = 1 - 3$, $z = 1.5 - 4$, $z = 2 - 5$, $z = 2.5 - 6$, $z = 3 - 7$, $z = 3.5 - 8$.

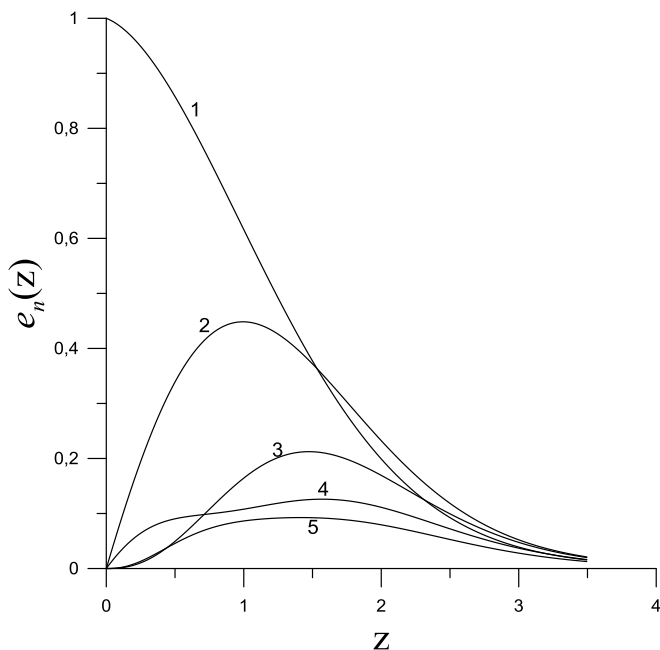


Рис.2.24. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической НЧ волны от расстояния z при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$.

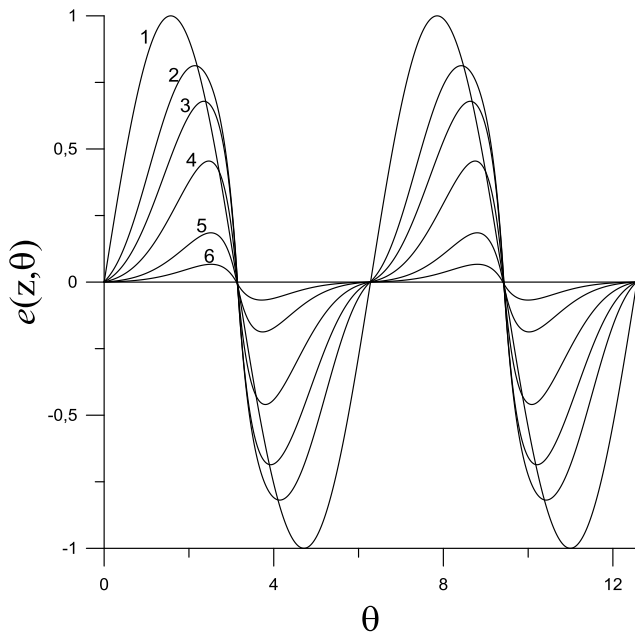


Рис.2.25. Эволюция первоначально гармонической НЧ волны при $\mu = 3 \cdot 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z : $z = 0 - 1$, $z = 0.6 - 2$, $z = 1 - 3$, $z = 1.6 - 4$, $z = 2.6 - 5$, $z = 3.6 - 6$.

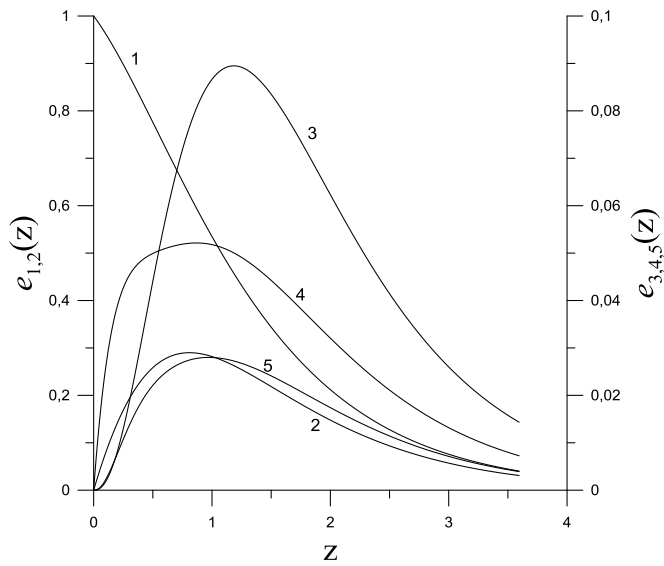


Рис.2.26. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической НЧ волны от расстояния z при $\mu = 3 \cdot 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$.

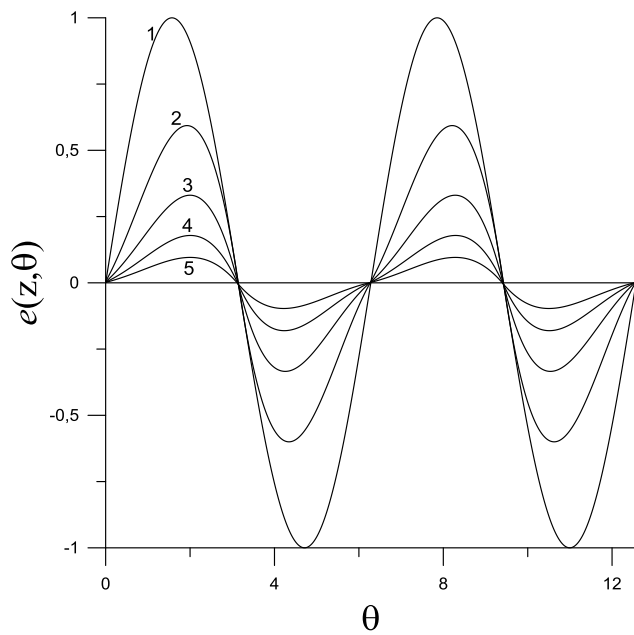


Рис.2.27. Эволюция первоначально гармонической НЧ волны при $\mu = 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z : $z = 0 - 1$, $z = 0.5 - 2$, $z = 1 - 3$, $z = 1.5 - 4$, $z = 2 - 5$.

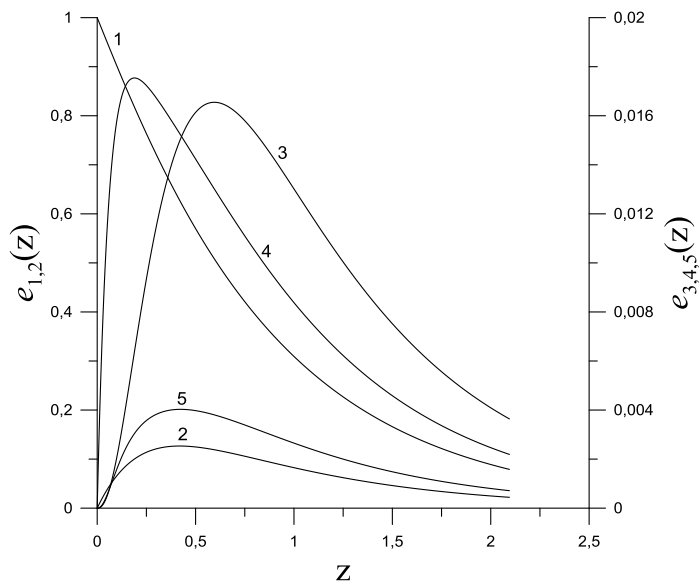


Рис.2.28. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической НЧ волны от расстояния z при $\mu = 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$.

2.4. Заключение.

Во второй главе приведены результаты теоретического и численного исследований распространения и эволюции продольных акустических волн в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью. Для разномодульной среды с вязкой диссипацией найдены самоподобные решения и предложен спектральный метод для численного расчета эволюции волны. Для однородной разномодульной среды с релаксацией также найдены самоподобные решения и предложен спектральный метод для

расчета эволюции первоначально гармонических волн. Для микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией получены самоподобные решения для НЧ и ВЧ волн. В НЧ диапазоне самоподобные волны соответствуют самоподобным волнам в однородной разномодульной среде с вязкой диссипацией. В ВЧ диапазоне, где дисперсия фазовой скорости и нелинейность среды пренебрежимо малы, а коэффициент затухания не зависит от частоты, волна любой формы будет самоподобной. Численным методом исследована эволюция первоначально гармонических НЧ волн. Показано, что в процессе распространения волны ее форма стремится к самоподобной. Полученные результаты могут найти применение при создании нелинейных методов акустической диагностики разномодульных сред, в частности, конструкционных материалов, содержащих трещины.

Глава III. Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью.

Акустические свойства многих микронеоднородных твердых тел, в частности, поликристаллов, характеризуются гистерезисной нелинейностью, приводящей к амплитудно-зависимому внутреннему трению (АЗВТ) [7,62-64,68-78]. По-видимому, общей причины гистерезисного поведения различных материалов не существует, но можно утверждать, что гистерезис в зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ связан с наличием в их структуре различных нелинейных дефектов – дислокаций, трещин, границ зерен и т.д. [2,5,31,58-60,62-74].

Первое аналитическое описание механического гистерезиса для объяснения АЗВТ материалов с, так называемой, несовершенной упругостью, было предложено Давиденковым в 1938 году [68]. В 1956 г., на основе струнной модели дислокации Келера [75], Гранато и Люкке была создана дислокационная теория амплитудно-зависимого поглощения [7,70]. В работах [68] и [7,70] уравнение состояния поликристалла описывается гистерезисной функцией $\sigma = \sigma(\varepsilon)$: площадь петли гистерезиса определяет амплитудно-зависимые (нелинейные) потери, а среднее (по периоду циклической деформации) значение производной $\langle \sigma_\varepsilon(0) - \sigma_\varepsilon(\varepsilon_m) \rangle$ - дефект модуля упругости (ε_m - амплитуда деформации). В гистерезисных средах наблюдаются эффекты АЗВТ – нелинейные декремент затухания и дефект модуля упругости; они одинаковым образом зависят от амплитуды волны. Другим проявлением гистерезисной нелинейности среды (на малых расстояниях от излучателя) является одинаковая степенная (с показателем степени гистерезисной нелинейности) зависимость амплитуд высших гармоник от амплитуды волны основной частоты [58,67,88].

В феноменологическом гистерезисном уравнении состояния Давиденкова [68] амплитудно-зависимое внутреннее трение связывалось с микропластической деформацией материала. (Под микропластической деформацией понимаются такая пластическая (необратимая) деформация, которая имеют место при малом уровне напряжения, существенно меньшем макроскопического предела текучести материала.) В микроскопической теории Гранато-Люкке [7,70] гистерезис в зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ связывается с последовательным и лавинообразным отрывом дислокаций от внутренних точек закрепления (примесных атомов) при нагрузке и последующим одновременным их закреплением (на них же) при разгрузке, при этом нагрузочные ветви кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ - нелинейны, а разгрузочные – линейны. В диапазоне упругих деформаций ($\varepsilon_m < \Gamma = const$) теория Гранато-Люкке предсказывает монотонно растущие, пропорционально $(\Gamma/\varepsilon_m)\exp(-\Gamma/\varepsilon_m)$, зависимости нелинейных потерь и дефекта модуля упругости от

амплитуды ε_m , что, вообще говоря, наблюдается не для всех поликристаллических твердых тел. Так, например, в меди наблюдались линейная [76], квадратичная [77] и экспоненциальная [78] зависимости нелинейных потерь от амплитуды деформации ε_m , что связано с большой чувствительностью АЗВТ к малому изменению концентрации примесей и плотности дислокаций.

Предложенная позднее несколько видоизмененная теория поглощения [79] предполагает, что движение дислокаций, оторвавшихся от примесных атомов, ограничивается не только их линейным натяжением, но и полем упругих напряжений примесных атомов. Отрывающиеся от примесных атомов дислокации вновь перезакрепляются на соседних [80] – этот механизм ограничивает увеличение длины сегментов дислокации и рост площади петель гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Такое ограничение приводит в начале к линейной зависимости нелинейных потерь от амплитуды ε_m , а затем к их насыщению, при этом разгрузочные ветви кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ также, как и нагрузочные, становятся нелинейными. Линейные зависимости гистерезисных потерь от амплитуды ε_m и их насыщение наблюдались в поликристаллических отожженной меди [81] и цинке [82,83]. Насыщение гистерезисных потерь наблюдалось также в монокристалле меди [71], свинце [84], алюминии [89], индии [90,91] и в сплавах меди (с эффектом памяти формы) [92].

При распространении в поликристалле интенсивной гармонической акустической волны, гистерезисная нелинейность, кроме эффектов АЗВТ, приводит также к генерации высших гармоник [58,64,67]. Поведение гармоник при гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ качественно отличается от поведения гармоник при гладкой зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, определяемой пятиконстантной теорией упругости [2,55,56] и описывающей деформирование однородных твердых тел и тех же поликристаллов, но при малых напряжениях, недостаточных для отрыва дислокаций от примесных атомов. Гистерезисная зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, следующая из теории Гранато-Люкке, не всегда правильно описывает наблюдающиеся в эксперименте с поликристаллами амплитудные зависимости эффектов АЗВТ и генерации гармоник, в видоизмененной же теории [79] аналитического выражения для гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ не получено. Заметим, однако, что именно уравнение состояния наиболее полно характеризует нелинейные свойства среды, поскольку именно уравнение состояния позволяет в полной мере исследовать нелинейные волновые процессы и описать не только эффекты АЗВТ - нелинейные потери и дефект модуля упругости, но и любые другие характеристики этих процессов. В связи с этим важно также отметить, что для каждого конкретного материала

гистерезисную зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ можно реконструировать на основе анализа экспериментально установленных для него амплитудных зависимостей эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник (обратная задача), что дает возможность решать и прямую задачу о нелинейном распространении волн в таком материале.

В третьей главе рассматривается распространение периодических волн и импульсных возмущений в безграничных средах и резонаторах с гистерезисной нелинейностью [15-19,24-26].

3.1. Распространение пилообразных акустических волн в средах с гистерезисной нелинейностью.

Различают два основных типа акустических гистерезисов – упругий (или гистерезис отрыва) и неупругий (пластический или гистерезис трения) [62-64,68,88]; они существенно отличаются друг от друга. Для упругого гистерезиса - $\sigma(\varepsilon = 0) = 0$, а для неупругого - $\sigma(\varepsilon = 0) \neq 0$ и $\varepsilon(\sigma = 0) \neq 0$. (Уравнение состояния с неупругим гистерезисом можно применять только для описания установившихся периодических волн, а для описания переходных процессов и распространения однополярных возмущений оно не пригодно [64]). Гистерезисная нелинейность качественно отличается и от “классической” квадратичной упругой нелинейности [1,2], поэтому и закономерности нелинейных эффектов, возникающих при распространении интенсивных акустических волн в гистерезисных и негистерезисных средах, также качественно отличаются друг от друга. Это проявляется в том, что первоначально одинаковые волны в таких средах искажаются по-разному. Знание этих закономерностей необходимо для описания и объяснения результатов экспериментальных исследований нелинейных волновых процессов в различных средах и определения нелинейного уравнения состояния среды. Для установления закономерностей нелинейного распространения акустических волн желательно располагать достаточно простыми и точными решениями нелинейных волновых уравнений, что, конечно, не всегда возможно. Наиболее простые и точные решения нелинейных волновых уравнений удается получить для идеальных недиспергирующих сред с безынерционной упругой квадратичной нелинейностью: решения таких уравнений соответствуют простым волнам [2,40,42]. Методом “сшивания” простых волн можно получить и профили “непростых” волн в средах с безынерционной гистерезисной нелинейностью [64-66].

Вначале мы проведем теоретическое исследование и сравнительный анализ распространения и эволюции пилообразных волн в среде с квадратичной упругой нелинейностью и в средах с упругим и неупругим гистерезисами. Здесь, на основе анализа точных решений для пилообразных волн и их спектральных характеристик, мы определим

и сравним амплитудные закономерности нелинейных акустических эффектов в таких средах. Ранее, подобные исследования для гистерезисных сред проводились для первоначально гармонических волн [64,67], где удалось установить амплитудные зависимости нелинейных эффектов на малых и больших расстояниях от излучателя. Для пилообразных периодических волн, спектр которых содержит множество кратных гармоник, такие закономерности удастся установить на любых расстояниях.

3.1.1. Пилообразные волны в среде с упругой квадратичной нелинейностью.

Уравнение состояния нелинейной среды для продольных напряжений σ и деформаций ε (без учета линейной диссипации) можно представить в виде:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)], \quad (3.1)$$

где E - модуль упругости, $f(\varepsilon)$ - нелинейная функция, $|f_\varepsilon(\varepsilon)| \ll 1$.

Подставляя уравнение (3.1) в уравнение движения (2.3), получим одномерное уравнение для простых волн деформации $\varepsilon(x, t)$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \{f(\varepsilon)\}, \quad (3.2)$$

где $\tau = t - x/C_0$, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$, U - смещение, $\varepsilon(x, t) = U_x(x, t)$, ρ - плотность.

Граничное условие для одного периода ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) периодической пилообразной волны зададим в следующем виде (Рис.3.1):

$$\varepsilon(0, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \begin{cases} \theta, & -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2; \\ \pi - \theta, & \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\theta = \omega\tau$, ω - частота волны.

Вначале кратко опишем распространение пилообразной волны (3.3) в среде с упругой квадратичной нелинейностью, когда $f(\varepsilon) = (\gamma/2)\varepsilon^2$, γ - параметр нелинейности, $|\gamma\varepsilon| \ll 1$.

До координаты $x \leq x_S = \pi/|\gamma|k\varepsilon_0$ (или $z \leq z_S = \varepsilon_0^{-1}$) образования неоднозначности и возникновения разрыва в пилообразной волне, форма одного ее периода определяется выражением:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \varepsilon_0 z}, & \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z); \\ \frac{\pi - \theta}{1 - \varepsilon_0 z}, & \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $z = \gamma k x / \pi$, $k = \omega / C_0$, $\theta_m^\pm(z) = \pm \frac{\pi}{2} [1 + \varepsilon_0 z]$ - фазы "изломов" пилообразной волны (3.4).

Амплитуда $\varepsilon_m(z)$ такой волны остается неизменной и равной первоначальной ε_0 .

После возникновения разрыва (при $z > z_S$) волна перестает быть простой и уже не является решением уравнения (3.2). Однако и при $z > z_S$ волна $\varepsilon(z, \theta)$ также будет пилообразной, а ее форма и амплитуда $\varepsilon_m(z)$ будут определяться следующими выражениями:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon_0 \theta}{1 + \varepsilon_0 z}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad \varepsilon_m(z) = \frac{2\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0 z}. \quad (3.5)$$

Эволюция формы одного периода пилообразной волны (3.3) на различных расстояниях z показана на Рис.3.1.

Представим пилообразные волны (3.4), (3.5) в виде рядов Фурье. До ($z \leq z_S$) и после ($z > z_S$) образования разрывов соответственно имеем:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{8\varepsilon_0}{\pi^2(1 + \varepsilon_0 z)(1 - \varepsilon_0 z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta_m^+(z)}{n^2} \sin n\theta, \quad z \leq z_S, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{4\varepsilon_0}{\pi(1 + \varepsilon_0 z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\theta, \quad z > z_S. \quad (3.7)$$

Из выражений (3.6), (3.7) видно, что все гармоники пилообразной волны (и до и после возникновения в ней разрыва) распространяются с одной и той же скоростью, равной C_0 . Это соответствует тому, что среда с квадратичной упругой нелинейностью не обладает нелинейной дисперсией. На Рис.3.2 и Рис.3.3 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от расстояния z (при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$) и от ε_0 (при $z = 2 \cdot 10^4$). Из Рис.3.2 видно, что с ростом z амплитуда $\varepsilon_1(z)$ первой гармоники монотонно уменьшается: при $z \leq z_S = \varepsilon_0^{-1} = 10^4$ ее энергия уходит на генерацию высших гармоник, а при $z > z_S$ происходит нелинейное затухание волны. Амплитуды $\varepsilon_{2n}(z)$ четных гармоник вначале растут от нуля, достигают максимумов, а затем уменьшаются, при этом до координаты образования разрыва $z \leq z_S$ амплитуды $\varepsilon_{2n \geq 4}(z)$ испытывают пространственные биения (до нуля). Амплитуды $\varepsilon_{2n+1}(z)$ нечетных гармоник – уже вначале не равные нулю, при $z \leq z_S$ также испытывают пространственные биения (также до нуля), а далее, при $z > z_S$, - монотонно затухают. С ростом номера гармоники n частота биений увеличивается.

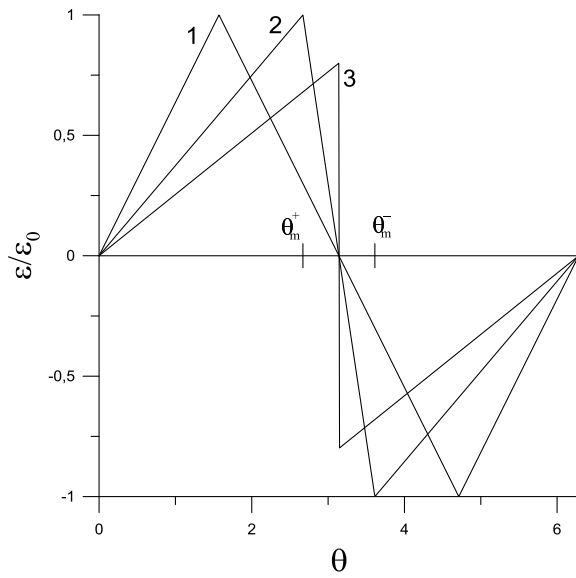


Рис.3.1. Форма пилообразной волны в среде с упругой квадратичной нелинейностью на различных расстояниях z : $z = 0$ - 1, $z < z_S$ - 2, $z > z_S$ - 3.

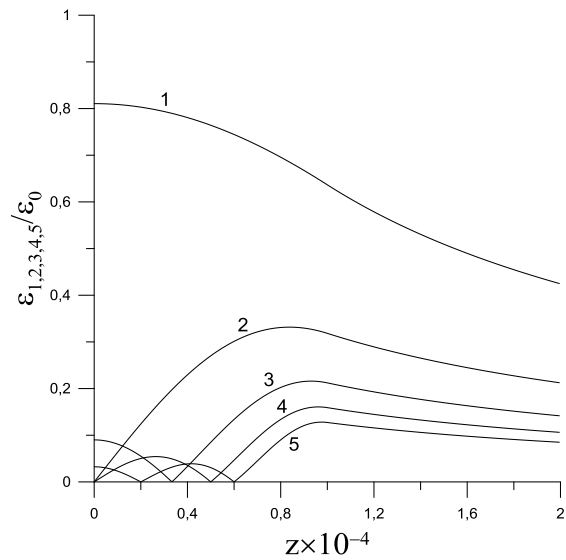


Рис.3.2. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от расстояния z при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$.

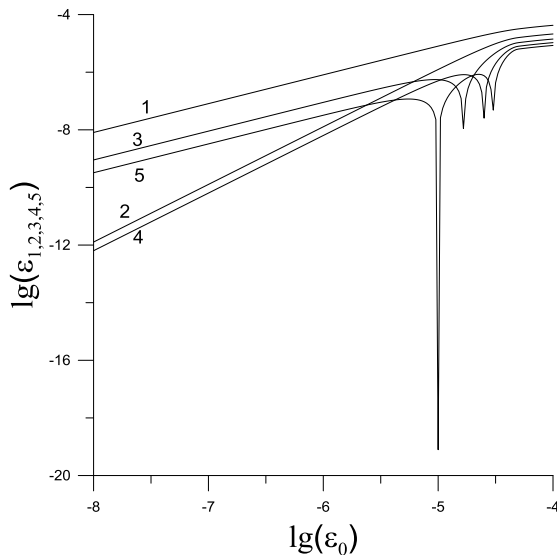


Рис.3.3. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от ε_0 при $z = 2 \cdot 10^4$.

Из выражений (3.6) и Рис.3.3 следует, что при увеличении ε_0 амплитуды $\varepsilon_n(z)$ - растут, причем, в начале, $\varepsilon_{2n}(z) \propto \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_{2n+1}(z) \propto \varepsilon_0$, затем в зависимостях амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$ от ε_0 наблюдаются биения, а после образования разрыва ($\varepsilon_0 \geq \varepsilon_S = 5 \cdot 10^{-5}$) амплитуды $\varepsilon_n(z)$ не зависят от ε_0 : $\varepsilon_n(z) \propto (nz)^{-1}$. Координаты z_0 нулевых амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z_0) = 0$ определяются из уравнения: $\sin n\theta_m^+(z_0) = 0$. В этих точках фазы высших гармоник изменяются на π . Механизм таких биений связан с резонансными трехволновыми взаимодействиями бесконечно большого числа кратных гармоник, составляющих непрерывно изменяющуюся форму периодической пилообразной волны. После образования разрыва форма пилообразной волны не меняется, поэтому биений амплитуд высших гармоник не наблюдается. Отметим, что для амплитуд $B_n(y)$ высших гармоник, возникающих при распространении в такой же среде первоначально гармонической волны (решение Бесселя-Фубини [40,42]) никаких биений не наблюдается; эти амплитуды определяются выражением: $B_n(y) = \frac{J_n(ny)}{ny} \geq 0$, где $y = \gamma\varepsilon_0 kx \leq 1$, $J_n(ny)$ - функция Бесселя. В этом случае все гармоники нелинейной волны также распространяются со скоростью C_0 .

3.1.2. Пилообразные волны в среде с упругим гистерезисом.

Далее рассмотрим распространение пилообразной волны (3.3) в среде с упругим квадратичным гистерезисом, аналогичным гистерезису Гранато-Люкке [7,70], для которого нелинейная функция $f(\varepsilon)$ имеет вид [67]:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^2, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\gamma_2 \varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\gamma_3 \varepsilon^2, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ \gamma_4 \varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_m = \varepsilon_m(z)$ - амплитуда деформации, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$, $|\gamma_{1-4} \varepsilon_m| \ll 1$. В гистерезисных средах кроме взаимодействия гармоник, имеет место эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения; они определяются параметрами гистерезисной нелинейности [67]. Здесь, для упрощения расчетов, параметры гистерезисной нелинейности γ_1 , γ_2 и γ_3 , γ_4 при растяжении ($\varepsilon > 0$) и сжатии ($\varepsilon < 0$) среды полагаются попарно одинаковыми: $\gamma_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \gamma_4$.

Для сред с гистерезисной нелинейностью каждой ветви гистерезиса соответствует своя простая волна. Методом “сшивания” таких простых волн можно определить и форму всей нелинейной волны в гистерезисной среде [64,65]. Здесь она также будет пилообразной, но в ней сразу же, на сколь угодно малом расстоянии от излучателя, образуются неоднозначности, которые устраняются “сшиванием” простых волн в точках $\varepsilon(z, \theta) = \pm \varepsilon_m(z)$ и введением в профиль волны разрывов вблизи точек, где $\varepsilon(z, \theta) = 0$ [64].

Один период такой волны определяется следующим выражением (Рис.3.4):

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \cdot \begin{cases} \frac{\theta}{1 + \varepsilon_0 z}, & \theta_{S1}(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z); \\ \frac{\pi \sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2} - \theta}{1 + \mu \varepsilon_0 z}, & \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_{S2}(z); \\ \frac{\pi - \theta}{1 + \varepsilon_0 z}, & \theta_{S2}(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z); \\ \frac{\theta - \pi \sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2} - \pi}{1 + \mu \varepsilon_0 z}, & \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_{S1}(z) + 2\pi, \end{cases} \quad (3.9)$$

где $z = \gamma_1 kx / \pi$, $\mu = \gamma_2 / \gamma_1$, а значения фаз разрывов $\theta_{S1,2}(z)$ и фаз $\theta_m^\pm(z)$, при которых $\varepsilon(z, \theta_m^\pm(z)) = \pm \varepsilon_m(z)$, соответственно, равны:

$$\theta_{S1}(z) = \pi \left[\sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2} - 1 \right] \left(1 + \sqrt{\frac{1 + \mu \varepsilon_0 z}{1 + \varepsilon_0 z}} \right)^{-1}, \quad \theta_{S2}(z) = \theta_{S1}(z) + \pi, \quad (3.10)$$

$$\theta_m^+(z) = \frac{\pi(1 + \varepsilon_0 z)}{2\sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2}}, \quad \theta_m^-(z) = \theta_m^+(z) + \pi, \quad \theta_{S1}(z) < \theta_m^+(z).$$

Из-за гистерезисных потерь амплитуда $\varepsilon_m(z)$ такой пилообразной волны затухает по закону:

$$\varepsilon_m(z) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z / 2}}. \quad (3.11)$$

Разложим периодическую пилообразную волну (3.9) в ряд Фурье; из-за нечетности гистерезисной функции (3.8) он не содержит четных гармоник:

$$\varepsilon(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(z) \cos(n\theta) + b_n(z) \sin(n\theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(z) \sin[n\theta + \psi_n(z)],$$

где $\varepsilon_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}$, $\operatorname{tg} \psi_n(z) = a_n(z) / b_n(z)$, $a_{2n}(z) = 0$, $b_{2n}(z) = 0$,

$$a_{2n-1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{s1}(z)}^{\theta_{s2}(z)} \varepsilon(z, \theta) \cos[(2n-1)\theta] d\theta, \quad b_{2n-1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{s1}(z)}^{\theta_{s2}(z)} \varepsilon(z, \theta) \sin[(2n-1)\theta] d\theta,$$

$$a_{2n-1}(z) = -\frac{4\varepsilon_0}{(2n-1)\pi} \frac{\sqrt{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z / 2} - 1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 z)(1 + \mu\varepsilon_0 z)}} \sin(2n-1)\theta_{s1}(z) +$$

$$+ \frac{4(1 - \mu)\varepsilon_0^2 z}{(2n-1)^2 \pi^2 (1 + \mu\varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \cos(2n-1)\theta_{s1}(z) + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{4\varepsilon_0[2 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z]}{(2n-1)^2 \pi^2 (1 + \mu\varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \cos(2n-1)\theta_m^+(z),$$

$$b_{2n-1}(z) = \frac{4(1 - \mu)\varepsilon_0^2 z}{(2n-1)^2 \pi^2 (1 + \mu\varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \sin(2n-1)\theta_{s1}(z) +$$

$$+ \frac{4\varepsilon_0}{(2n-1)\pi} \frac{\sqrt{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z / 2} - 1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 z)(1 + \mu\varepsilon_0 z)}} \cos(2n-1)\theta_{s1}(z) +$$

$$+ \frac{4\varepsilon_0[2 + (\mu + 1)\varepsilon_0 z]}{(2n-1)^2 \pi^2 (1 + \mu\varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \sin(2n-1)\theta_m^+(z).$$

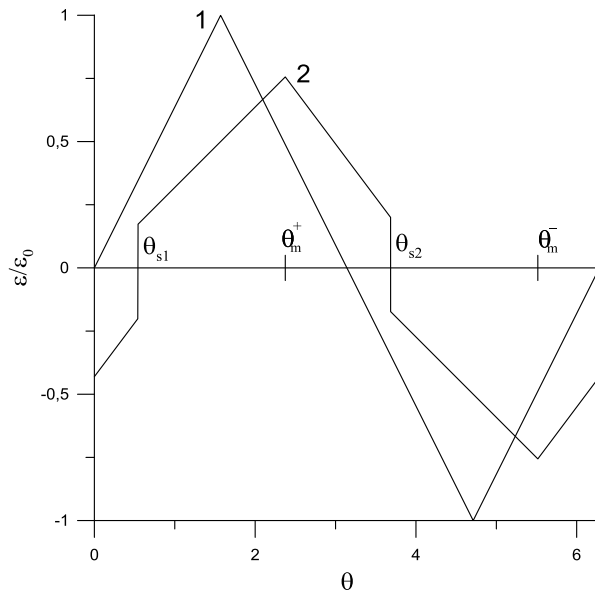


Рис.3.4. Форма пилообразной волны в среде с упругим гистерезисом при $z = 0 - 1$ и $z > 0 - 2$.

На Рис.3.5, Рис.3.6 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_{2n-1}(z)$ первых трех нечетных гармоник от расстояния z (при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$) и от ε_0 (при $z = 3 \cdot 10^5$) при $\mu = 0.5$. Из Рис.3.5 видно, что с ростом z амплитуда $\varepsilon_1(z)$ первой гармоники из-за нелинейных потерь и генерации высших гармоник монотонно уменьшается. Амплитуда $\varepsilon_3(z)$ третьей гармоники – вначале не равная нулю, сначала уменьшается до минимума, а далее немного растет и вместе с амплитудой $\varepsilon_5(z)$ пятой гармоники медленно и монотонно затухает. Соответственно ведут себя и производные фаз этих гармоник.

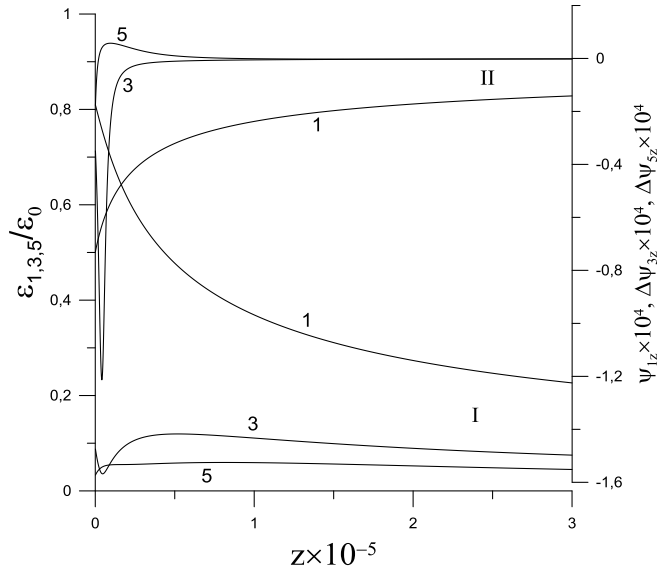


Рис.3.5. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ - I и производных фаз $\psi_{1,z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$ - II для первых трех нечетных гармоник от расстояния z при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$.

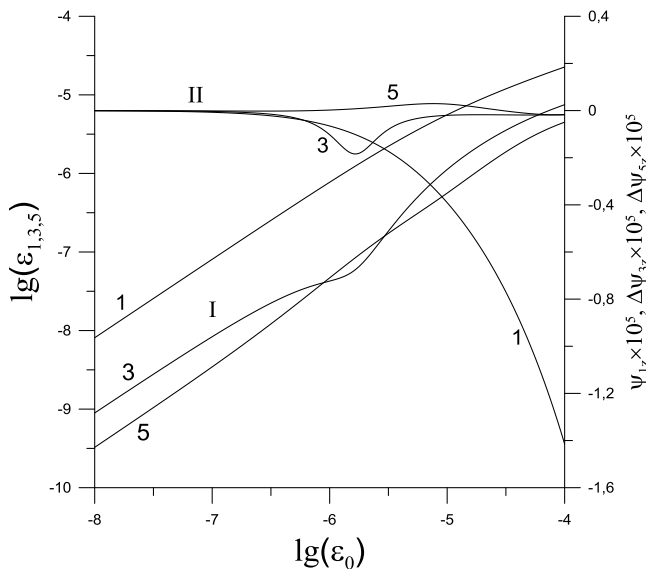


Рис.3.6. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ - I и производных фаз $\psi_{1,z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$ - II для первых трех нечетных гармоник от ε_0 при $z = 3 \cdot 10^5$.

Из Рис.3.5 видно, что производная $\psi_{1,z}(z)$ монотонно изменяется по z , при этом $\psi_{1,z}(z) < 0$, а производные $[\Delta\psi_{2n-1\geq 3}(z)]_z = \psi_{2n-1,z}(z)/(2n-1) - \psi_{1,z}(z)$ изменяются немонотонно. Из Рис.3.5 также видно, что минимум амплитуд $\varepsilon_{2n-1}(z)$ совпадают с экстремумами производных $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$. Эти производные определяют зависимости изменения фазовых скоростей $C_1(z)$ и $C_{2n-1}(z)$ гармоник волны от z и от начальной амплитуды ε_0 :

$$\eta(\varepsilon_1) = \frac{\Delta C_1(z)}{C_0} = \frac{C_1(z) - C_0}{C_0} = a\psi_{1,z}(z) < 0,$$

$$\eta_{2n-1\geq 3}(\varepsilon_1) = \frac{C_{2n-1}(z) - C_1(z)}{C_0} = a[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z, \quad (3.13)$$

где $a = \gamma_1 / \pi$.

Из выражений (3.13) и Рис.3.5 следует, что распространение сильной и слабых гармоник с частотами ω и $(2n-1)\omega$, соответственно, происходит с близкими ($|\eta(\varepsilon_1)| \ll 1$, $|\eta_{2n-1}(\varepsilon_1)| \ll 1$), но различными фазовыми скоростями $C_1(z)$ и $C_{2n-1}(z) > C_1(z)$, значения которых зависят от расстояния z и амплитуды ε_0 . Это соответствует тому, что в гистерезисной среде, описываемой уравнением (3.8), проявляется нелинейная дисперсия [40]. Об этом свидетельствует и вторая серия зависимостей амплитуд $\varepsilon_{2n-1}(z)$ и производных фаз $\psi_{1,z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$ от начальной амплитуды ε_0 при $z = 3 \cdot 10^5$ (Рис.3.6). Из Рис.3.6 видно, что при увеличении ε_0 амплитуды $\varepsilon_{2n-1}(z)$ - растут, причем, в начале, $\varepsilon_{2n-1}(z) \propto \varepsilon_0$, а в конце, из-за нелинейных потерь, - $\varepsilon_{2n-1}(z) \propto \varepsilon_0^{1/2}$, при этом в середине, при $\varepsilon_0 \approx 10^{-6}$, в зависимости $\varepsilon_3(z)$ от ε_0 имеет место “провал”. Из Рис.3.6 видно, что при увеличении ε_0 производные $\psi_{1,z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$ также ведут себя по-разному: $\psi_{1,z}(z) < 0$ и монотонно уменьшается, а $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$ - изменяются немонотонно и имеют экстремумы. Из сравнения Рис.3.5 и Рис.3.6 также можно заметить, что положение “провала” амплитуды $\varepsilon_3(z)$ совпадает с “провалом” производной $[\Delta\psi_3(z)]_z$. Максимальные отличия значений $\psi_{1,z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2n-1}(z)]_z$ и, соответственно, скоростей $C_1(z)$ и $C_{2n-1}(z)$, имеют место при больших амплитудах ε_0 , а при малых ε_0 они исчезают.

3.1.3. Пилообразные волны в среде с неупругим гистерезисом.

Рассмотрим теперь распространение пилообразной волны (3.3) в среде с неупругим гистерезисом, аналогичным гистерезису Давиденко [68], для которого нелинейная функция $f(\varepsilon)$ имеет вид [64]:

$$f(\varepsilon) = \alpha \varepsilon_m \varepsilon + \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 \varepsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\beta_2 \varepsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

где α , $\beta_{1,2}$ - параметры нелинейности, $|\alpha| \varepsilon_m \ll 1$, $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $|\beta_{1,2}| \varepsilon_m \ll 1$.

В этом уравнении первое (негистерезисное) слагаемое $\alpha \varepsilon_m \varepsilon$ определяет дефект модуля (или нелинейную поправку к скорости распространения волны), а второе (гистерезисное) – амплитудно-зависимые потери и генерацию гармоник. Один период пилообразной волны в такой среде определяется следующим выражением (Рис.3.7):

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{1 + \varepsilon_0 z} \left(\theta - \frac{\pi \alpha}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2] \right), & \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z); \\ \frac{1}{1 + \mu \varepsilon_0 z} \left(\pi - \theta + \frac{\pi \alpha}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2] \right), & \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi, \end{cases} \quad (3.15)$$

где $z = \beta_1 kx / \pi$, $\mu = \beta_2 / \beta_1 \geq 0$, а значения фаз $\theta_m^\pm(z)$, соответственно, равны:

$$\theta_m^+(z) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_0 z}{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2} + \frac{\alpha \pi}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2],$$

$$\theta_m^-(z) = \pi + \frac{\pi}{2} \frac{1 + \mu \varepsilon_0 z}{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2} + \frac{\alpha \pi}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z / 2].$$

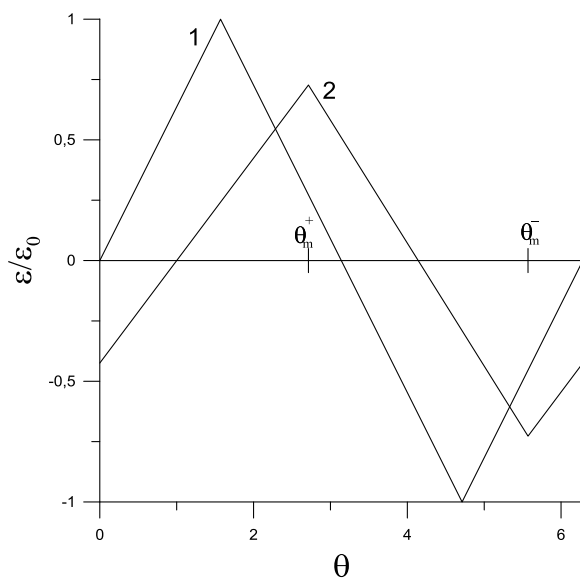


Рис.3.7. Форма пилообразной волны в среде с неупругим гистерезисом при $z = 0 - 1$ и $z > 0 - 2$.

В такой среде, при $\beta_{1,2} \geq 0$, разрывов в волне не образуется, а ее амплитуда $\varepsilon_m(z)$ определяется выражением: $\varepsilon_m(z) = \frac{\varepsilon_0}{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z / 2}$. Разложим периодическую волну

(3.15) в ряд Фурье:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{4\varepsilon_0[2 + (\mu + 1)\varepsilon_0 z]}{\pi^2(1 + \varepsilon_0 z)(1 + \mu\varepsilon_0 z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\Phi(z)}{n^2} \sin n[\theta - \Psi(z)], \quad (3.16)$$

$$\text{где } \Phi(z) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_0 z}{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z / 2}, \quad \Psi(z) = \frac{\pi\alpha}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z / 2].$$

Из выражения (3.16) следует, что скорость распространения гармоник пилообразной волны зависит от начальной амплитуды ε_0 и от расстояния z , однако все гармоники бегут с одной и той же скоростью:

$$C(z) = C_0 \left[1 - \frac{\alpha\varepsilon_0}{2 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z} \right] = C_0 [1 - \alpha\varepsilon_m(z) / 2]. \quad (3.17)$$

Таким образом, в среде с неупругим гистерезисом (3.15) нелинейной дисперсии нет и эволюция пилообразной волны качественно происходит также, как и в среде с упругой квадратичной нелинейностью, с той лишь разницей, что в среде с неупругим гистерезисом в волне разрывов не образуется, но, из-за гистерезисных потерь, волна нелинейно затухает. На Рис.3.8 и Рис.3.9 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_{2n-1}(z)$ первых пяти гармоник от расстояния z (при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$) и от ε_0 (при $z = 3 \cdot 10^5$) при $\mu = 0.5$. Из Рис.3.8 видно, что с ростом z амплитуды $\varepsilon_{1,3}(z)$ первой и третьей гармоник из-за гистерезисных потерь монотонно уменьшаются. Амплитуда $\varepsilon_5(z)$ пятой гармоники вначале уменьшается до нуля, а далее немного растет и вместе с амплитудами $\varepsilon_{1,3}(z)$ медленно и монотонно затухает. Амплитуды же четных гармоник $\varepsilon_{2,4}(z)$, вначале равные нулю, растут, достигают максимума и затем монотонно затухают. Соответственно ведут себя и зависимости амплитуд гармоник от ε_0 при $z = \text{const}$.

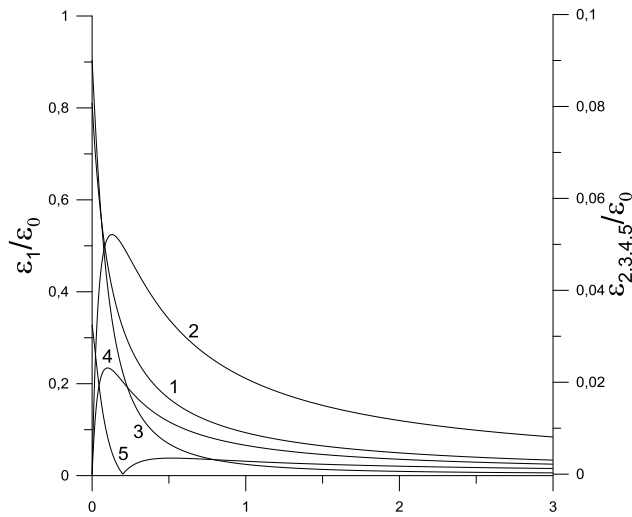


Рис.3.8. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от расстояния z при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$.

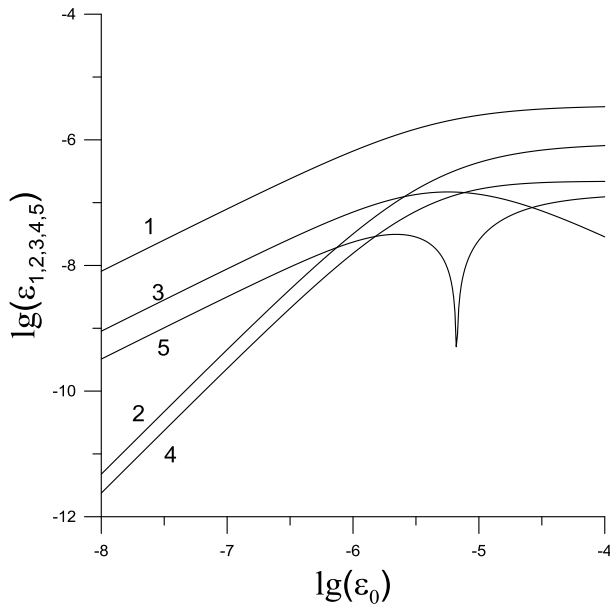


Рис.3.9. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от ε_0 при $z = 3 \cdot 10^5$.

Из Рис.3.9 видно, что при увеличении ε_0 амплитуды $\varepsilon_{2n-1}(z)$ - растут, причем, в начале, $\varepsilon_{2n-1}(z) \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2n}(z) \propto \varepsilon_0^2$, а в конце, из-за нелинейных потерь, -

$$\varepsilon_1(z) = \frac{4(1+\mu)}{\pi^2 \mu z} \sin\left(\frac{\pi}{1+\mu}\right) \propto z^{-1}. \text{ Координаты } z_0 \text{ нулевых амплитуд } \varepsilon_{n \geq 2}(z_0) = 0$$

определяются из уравнения: $\sin n\Phi(z_0) = 0$. Здесь биения амплитуд высших гармоник также связаны с резонансными взаимодействиями кратных гармоник, составляющих непрерывно изменяющуюся форму периодической пилообразной волны.

3.2. Акустические волны в средах с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

Здесь предложено феноменологическое гистерезисное (упругого вида) уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением амплитудно-зависимых потерь и проведено теоретическое и численное исследование нелинейных процессов, возникающих при распространении акустических волн в таких средах.

3.2.1. Уравнение состояния поликристалла с насыщением гистерезисных потерь.

Уравнение состояния поликристалла, аналогичное гистерезисному уравнению Гранато-Люкке [7,70], но учитывающее насыщение нелинейных потерь и нелинейность ветвей разгрузки [67], можно представить в виде:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f_i(\varepsilon)], \quad (3.18)$$

$$f_i(\varepsilon) = \frac{1}{2(1 + \gamma_0|\varepsilon|)} \begin{cases} \gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0, i = 1; \\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0, i = 2; \\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0, i = 3; \\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0, i = 4, \end{cases} \quad (3.19)$$

где E - модуль упругости; $f_i(\varepsilon)$ - гистерезисная функция, индексы i соответствуют номеру ветви гистерезиса; $|f_i(\varepsilon)| \ll |\varepsilon|$, $|f'_{i\varepsilon}(\varepsilon)| \ll 1$; γ_0 и γ_{1-4} - безразмерные параметры; $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 \geq 0$, $|\gamma_i\varepsilon_m| \ll 1$.

Отличие гистерезисного уравнения (3.19), от предложенного в работе [67], заключается в наличии множителя $(1 + \gamma_0|\varepsilon|)^{-1}$, ответственного за ограничение движения дислокаций и насыщение нелинейных потерь; этот множитель, однако, существенно влияет и на дефект модуля упругости и на генерацию высших гармоник. Форма гистерезиса (3.19) изображена на Рис.3.10, из которого видно, что с ростом параметра γ_0 форма гистерезиса изменяется, а его площадь и средний наклон уменьшаются.

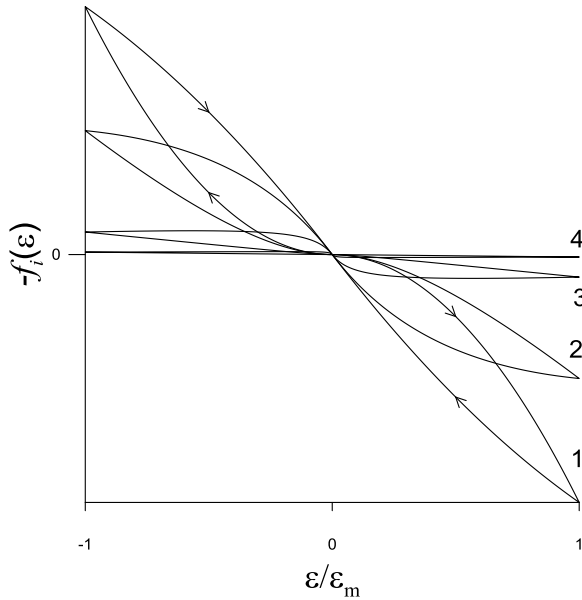


Рис.3.10. Качественный вид гистерезисной функции $f_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon_m = 10^{-4}$ и различных параметрах γ_0 : 1 - $\gamma_0 = 0$, 2 - $\gamma_0 = 10^4$, 3 - $\gamma_0 = 10^5$, 4 - $\gamma_0 = 10^6$.

Из уравнения (3.19) можно получить выражение для амплитудно-зависимого декремента:

$$\begin{aligned} \delta_h(\varepsilon_m) &= \frac{1}{\varepsilon_m^2} \left[\int_0^{\varepsilon_m} [f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)] d\varepsilon + \int_0^{-\varepsilon_m} [f_4(\varepsilon) - f_3(\varepsilon)] d\varepsilon \right] = \\ &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_0^2 \varepsilon_m} \left[1 + \frac{\gamma_0 \varepsilon_m}{2} - \frac{1 + \gamma_0 \varepsilon_m}{\gamma_0 \varepsilon_m} \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_m) \right] > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из этого выражения следует, что при $\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1$ - $\delta_h(\varepsilon_m) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m / 12 \propto \varepsilon_m$, а при $\gamma_0 \varepsilon_m \gg 1$ - $\delta_h(\varepsilon_m) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) / 4\gamma_0 = const$, что соответствует насыщению нелинейных потерь.

3.2.2. АЗВТ и генерация высших гармоник при распространении гармонической волны.

Здесь мы учтем линейную дисперсию фазовой скорости, что соответствует распространению акустических волн в стержне радиуса R . Подставляя уравнение (3.18) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$, U - смещение, и учитывая геометрическую дисперсию фазовой скорости в стержне [85-87], получим одномерное волновое уравнение для продольной деформации $\varepsilon(x, t) = U_x(x, t)$:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -C_0^2 [f_i(\varepsilon)]_{xx} + \nu^2 r_0^2 [\varepsilon_{tt} - C_t^2 \varepsilon_{xx}]_{xx}, \quad (3.21)$$

где $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ - скорость низкочастотной продольной волны, C_t - скорость сдвиговой волны, ρ - плотность, ν - коэффициент Пуассона, $r_0 = R/\sqrt{2}$.

Граничное условие зададим в виде: $\varepsilon(x=0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$. Подставляя в линейризованное уравнение (3.21) $\varepsilon(x, t) \propto \exp[i(\omega t - k(\omega)x]$ получает дисперсионное соотношение и выражение для фазовой скорости $C(\omega)$ низкочастотных продольных волн в стержне:

$$k(\omega) = \pm \left[\frac{\omega}{C_0} + \beta \omega^3 \right], \quad C(\omega) = C_0 [1 - \beta C_0 \omega^2], \quad (3.22)$$

где $\beta = (\nu^2 r_0^2 / 2C_0^3) [1 - (C_t / C_0)^2] = \nu^2 (1 + 2\nu) R^2 / 8(1 + \nu) C_0^3$, $\beta C_0 \omega^2 \ll 1$.

Геометрическая (линейная) дисперсия фазовой скорости акустических волн не влияет на эффекты АЗВТ – декремент затухания и дефект модуля упругости, но уменьшает эффективность генерации высших гармоник в гистерезисной среде. Решение уравнения (3.21) будем искать методом возмущений, полагая, что:

$$\varepsilon(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) \sin[n\theta + \psi_n(x)], \quad (3.23)$$

где $\theta = \omega\tau + \Phi(x)$, $\tau = t - x/C_0$, $\varepsilon_n(x)$, $\Phi(x)$ и $\psi_n(x)$ - медленно-меняющиеся функции

координаты x , $\psi_1 = 0$, $\left| \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n(x, \theta) \right| \ll |\varepsilon_1(x, \theta)|$, $\varepsilon_m(x) \cong \varepsilon_1(x)$. Конечно, в общем случае

амплитуды $\varepsilon_n(x)$ и фазы $\Phi(x)$, $\psi_n(x)$ гармоник нелинейной волны $\varepsilon(x, \theta)$ зависят не только от координаты x , но и от начальной амплитуды ε_0 .

Подставляя разложение (3.23) в уравнение (3.21) и оставляя в правой части этого уравнения слагаемое только на основной частоте, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d\varepsilon_n}{dx} \sin[n\theta + \psi_n] + \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} \right) \cos[n\theta + \psi_n] \right] = \\ = -\frac{1}{2C_0} \frac{d}{d\tau} \{f_i(\varepsilon_1)\} - \beta \omega^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varepsilon_n \cos[n\theta + \psi_n]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Разложим нелинейную функцию $f_i(\varepsilon_1, \text{sign } \dot{\varepsilon}_1)$ в уравнении (3.24) в ряд Фурье:

$$f_i(\varepsilon_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varepsilon_1) \cos n\theta + b_n(\varepsilon_1) \sin n\theta,$$

$$\text{где } a_n(\varepsilon_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(\varepsilon_1) \cos n\theta d\theta, \quad b_n(\varepsilon_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(\varepsilon_1) \sin n\theta d\theta.$$

Выделяя в уравнении (3.24) слагаемые с одинаковыми частотами, получаем уравнения для амплитуд $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_{n \geq 2}(x)$ и фаз $\Phi(x)$, $\psi_{n \geq 2}(x)$:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} \cos \psi_n - \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} + \beta \omega^3 n^3 \right) \sin \psi_n = \frac{a_n(\varepsilon_1) n \omega}{2C_0}, \quad (3.25)$$

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} \sin \psi_n + \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} + \beta \omega^3 n^3 \right) \cos \psi_n = -\frac{b_n(\varepsilon_1) n \omega}{2C_0}. \quad (3.26)$$

Для амплитуд и фаз первых трех гармоник уравнения (3.25), (3.26) имеют следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dz} = -\frac{1}{2\gamma_0^2} \left[1 + \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{2} - \frac{(1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right], \quad (3.27)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\gamma_0^2 \varepsilon_1} \left[\frac{\pi}{2} - \gamma_0 \varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{\gamma_0^2 \varepsilon_1^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \left[1 - \frac{b}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] - \frac{\pi b}{8\gamma_0} - m, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_2}{dz} \cos \psi_2 - \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} + 8m \right) \sin \psi_2 = \\ -\frac{1}{3\gamma_0^2} \left\{ c\gamma_0 \varepsilon_1 - 6 \left[d - \frac{c}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] \left[1 - \frac{\pi}{2\gamma_0 \varepsilon_1} + \frac{2 - (\gamma_0 \varepsilon_1)^2}{2\gamma_0 \varepsilon_1} \frac{\ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_2}{dz} \sin \psi_2 + \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} + 8m \right) \cos \psi_2 = \\ + \frac{2d}{\gamma_0^2} \left[\frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_0 \varepsilon_1} + \frac{(1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_3}{dz} \cos \psi_3 - \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} + 27m \right) \sin \psi_3 = \\ -\frac{3}{\gamma_0^2} \left[\frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{12} + \frac{5}{6} - \frac{1}{\gamma_0 \varepsilon_1} - \frac{2}{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2} - \frac{[(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 4](1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{2(\gamma_0 \varepsilon_1)^3} \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_3}{dz} \sin \psi_3 + \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} + 27m \right) \cos \psi_3 = \\ + \frac{3}{\gamma_0^2} \left[1 - \frac{b}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] \left[\frac{[4 - 3(\gamma_0 \varepsilon_1)^2] \ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}]}{2(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} - \frac{\pi}{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2} + \frac{2}{(\gamma_0 \varepsilon_1)} + \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{6} \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $z = a\omega x / C_0$, $a = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\pi}$, $b = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}$, $c = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}$,

$$d = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad m = \frac{\beta C_0 \omega^2}{a}.$$

Из уравнений (3.27), (3.28) можно определить локальные амплитудно-зависимые декремент затухания $\alpha(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1^{-1}(z)[d\varepsilon_1(z)/dz]$ и относительное изменение фазовой скорости $\eta(\varepsilon_1) = \Delta C(\varepsilon_1)/C_0 = [C(\varepsilon_1) - C_0]/C_0 = a[d\Phi(z)/dz] < 0$ волны основной частоты:

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{1}{2\gamma_0^2\varepsilon_1} \left[1 + \frac{\gamma_0\varepsilon_1}{2} - \frac{(1+\gamma_0\varepsilon_1)\ln(1+\gamma_0\varepsilon_1)}{\gamma_0\varepsilon_1} \right], \quad (3.33)$$

$$\frac{\eta(\varepsilon_1)}{a} + m = \frac{1}{2\gamma_0^2\varepsilon_1} \left[\frac{\pi}{2} - \gamma_0\varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \left[1 - \frac{b}{\gamma_0\varepsilon_1} \right] - \frac{b\pi}{8\gamma_0}. \quad (3.34)$$

На Рис.3.11 показаны графики зависимостей $\alpha(\varepsilon_1)$ и $[|\eta(\varepsilon_1)|/a] + m$, а также их отношения $r(\varepsilon_1) = \alpha(\varepsilon_1)/\{[|\eta(\varepsilon_1)|/a] + m\}$, от амплитуды ε_1 при различных параметрах γ_0 и при $b = 1/2$.

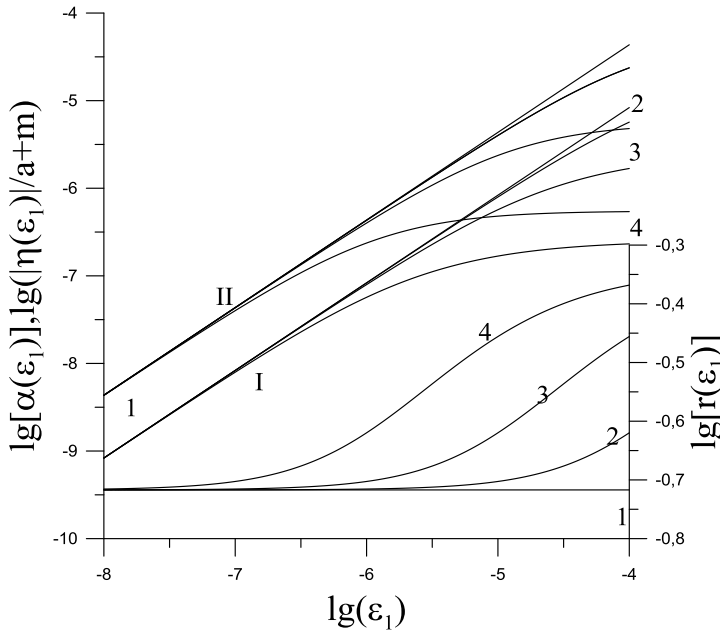


Рис.3.11. Зависимость $\alpha(\varepsilon_1)$ - I, $[|\eta(\varepsilon_1)|/a] + m$ - II и $r(\varepsilon_1)$ - III от ε_1 при различных параметрах γ_0 : 1 - $\gamma_0 = 0$, 2 - $\gamma_0 = 10^4$, 3 - $\gamma_0 = 10^5$, 4 - $\gamma_0 = 10^6$ и $b = 1/2$.

Из Рис.3.11 видно, что с ростом ε_1 коэффициенты $\alpha(\varepsilon_1)$ и $[|\eta(\varepsilon_1)|/a] + m$ также растут: при $\gamma_0\varepsilon_1 \ll 1$ - $\alpha(\varepsilon_1) \sim |\eta(\varepsilon_1)|/a \propto \varepsilon_1$, а при $\gamma_0\varepsilon_1 \gg 1$ они демонстрируют насыщение. При $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0\varepsilon_1 \ll 1$ - $r(\varepsilon_1) = const$, а при $\gamma_0\varepsilon_1 > 10^{-1}$ отношение $r(\varepsilon_1)$ начинает заметно расти и также стремится к насыщению.

В общем случае аналитических решений системы уравнений (3.27) – (3.32) получить не удастся, поэтому в начале мы рассмотрим простой частный случай, а затем приведем численное решение этих уравнений. На малых расстояниях (при $\varepsilon_0 z \ll 1$ и $\gamma_0 = 0$) получаем:

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0 z}{12} \right), \quad \Phi_z(z) = -m - \bar{b}_1 \varepsilon_0, \quad \delta(\varepsilon_0) = \varepsilon_0/12, \quad \psi_{2z}(z) = -3m + \bar{b}_1 \varepsilon_0,$$

$$\psi_{3z}(z) = -12m + (3/2)\bar{b}_1\varepsilon_0, \quad \varepsilon_2(z) = \varepsilon_0^2 \sqrt{\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2} \frac{\sin[(3m - \bar{b}_1\varepsilon_0)z]}{3m - \bar{b}_1\varepsilon_0}, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_3(z) = \varepsilon_0^2 \sqrt{\bar{a}_3^2 + \bar{b}_3^2} \frac{\sin[(12m - 3\bar{b}_1\varepsilon_0/2)z]}{12m - 3\bar{b}_1\varepsilon_0/2},$$

$$\text{где } \bar{b}_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{b}{3}, \quad \bar{a}_2 = -\frac{\pi c}{8} - \frac{d}{3}, \quad \bar{b}_2 = -\frac{d}{6}, \quad \bar{a}_3 = \frac{1}{20}, \quad \bar{b}_3 = -\frac{b}{5}.$$

Из этих выражений видно, что при $m \gg \bar{b}_1\varepsilon_0$ линейная дисперсия фазовой скорости препятствует генерации гармоник в гистерезисной среде – амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ обратно пропорциональны дисперсионному параметру m , при этом с ростом z амплитуда $\varepsilon_1(z)$ первой гармоники уменьшается (из-за гистерезисных потерь), а амплитуды высших гармоник $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$ осциллируют из-за интерференции “вынужденной” и собственной волн, бегущих с разными фазовыми скоростями $C(\omega)$ и $C(n\omega)$ [42]. Частоты пространственных осцилляций амплитуд $\varepsilon_{2,3}(z)$ составляют, соответственно, $3m - \bar{b}_1\varepsilon_0$ и $12m - 3\bar{b}_1\varepsilon_0/2$. Из выражений (3.35) также следует, что на малых расстояниях $[(3m - \bar{b}_1\varepsilon_0)z \ll \pi]$ при увеличении амплитуды ε_0 волны основной частоты амплитуды высших гармоник $\varepsilon_{n \geq 2}$ растут монотонно: $\varepsilon_{n \geq 2} \propto \varepsilon_0^2$.

3.2.3. Результаты численного счета.

Далее приведем результаты численного решения уравнений (3.27) – (3.32), полагая, для упрощения расчетов $d = 0$, что соответствует случаю одинаковых гистерезисных потерь для синусоидальной волны в фазе сжатия и растяжения: $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4$. На Рис.3.12 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ первых трех гармоник от расстояния z (при $\varepsilon_0 = \text{const}$) при различных параметрах γ_0 и фиксированных параметрах b , c и m : $b = 1/2$, $c = 1/5$, $m = 5 \cdot 10^{-5}$. Из Рис.3.12 видно, что с ростом z амплитуда ε_1 первой гармоники монотонно уменьшается - из-за гистерезисных потерь, при этом с ростом параметра γ_0 скорость уменьшения $\varepsilon_1(z)$ падает. Амплитуды же $\varepsilon_{2,3}(z)$ второй и третьей гармоник (при $\gamma_0 = 0$) вначале испытывают пространственные осцилляции (биения), что связано с линейной дисперсией фазовой скорости: между “вынужденной” и собственной волнами с частотой $n\omega$ периодически по координате z возникает расфазировка, равная πq ($q = 1, 2, \dots$), что и приводит к биениям амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$. С ростом z амплитуды этих биений

уменьшаются (опять же из-за гистерезисных потерь волны основной частоты) и $\varepsilon_{2,3}(z)$ стремятся к постоянным значениям.

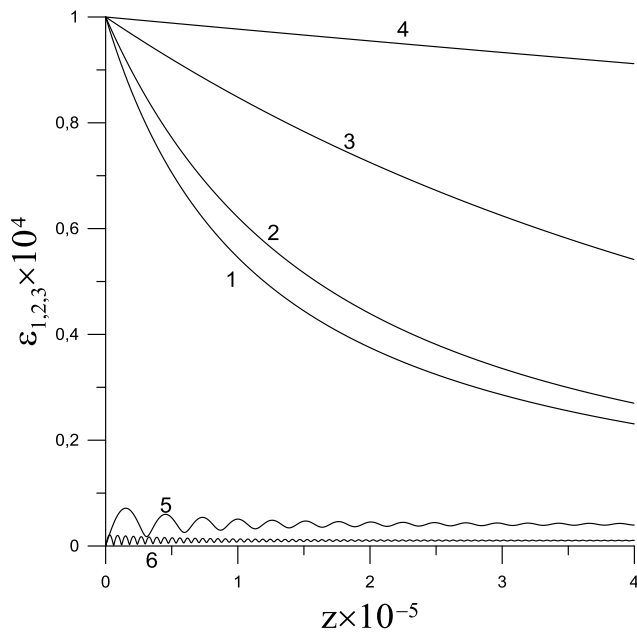


Рис.3.12. Зависимости амплитуд $\varepsilon_1(z)$ от z при $\gamma_0 = 0$ - 1, $\gamma_0 = 10^4$ - 2, $\gamma_0 = 10^5$ - 3, $\gamma_0 = 10^6$ - 4, и амплитуд $\varepsilon_{2,3}(z)$ - 5, 6 от z при $\gamma_0 = 0$.

На Рис.3.13 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ первых трех гармоник от ε_0 (при $z = const$) при различных параметрах γ_0 . Из Рис.3.13 видно, что при увеличении ε_0 амплитуды $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ - растут, причем, в начале, $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$, затем для амплитуды ε_1 наблюдается отклонение от линейной зависимости – из-за гистерезисных потерь, а амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ достигают некоторых локальных максимумов, уменьшаются, опять растут и так несколько раз, т.е. при увеличении ε_0 амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ испытывают осцилляции, при этом соотношения между амплитудами $\varepsilon_{2,3}(z)$ могут меняться.

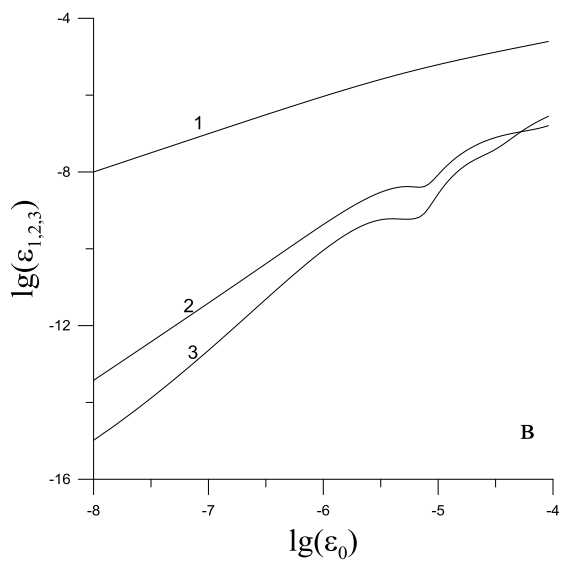
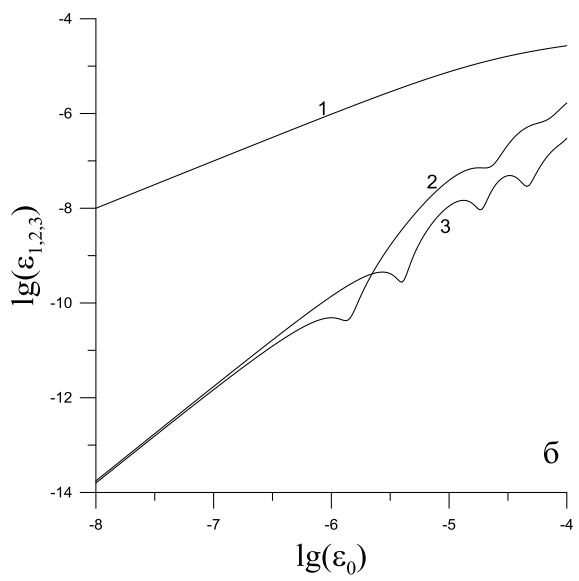
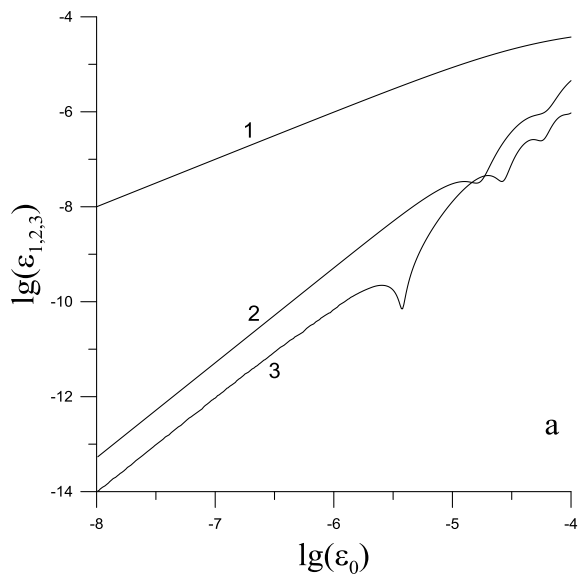


Рис.3.13. Зависимости амплитуд $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ от ε_0 при $\gamma_0 = 0$, $z = 2 \cdot 10^5$ - а, $\gamma_0 = 10^4$, $z = 4 \cdot 10^5$ - б, $\gamma_0 = 10^5$, $z = 10^6$ - в.

Такие осцилляции связаны с проявлением нелинейной дисперсии гистерезисной среды: сильная волна накачки и ее слабые гармоники распространяются с фазовыми скоростями $C_1(z)$ и $C_{n \geq 2}(z)$ по-разному зависящими от амплитуды ε_1 сильной волны (или от начальной амплитуды ε_0). На достаточно большом расстоянии z , при увеличении ε_0 между “вынужденной” и собственной волнами с частотой $n\omega$ возникает расфазировка, что и приводит к биениям амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$ высших гармоник - они также осциллируют из-за интерференции “вынужденной” и собственной волн, бегущих с разными фазовыми скоростями $C_1(z)$ и $C_{n \geq 2}(z)$. Зависимости скоростей $C_1(z)$ и $C_{n \geq 2}(z)$ от z и ε_0 определяются производными фаз $\Phi_z(z)$ и $\psi_{nz}(z)$ (Рис.3.14):

$$\frac{\Delta C_1(z)}{C_0} = \frac{C_1(z) - C_0}{C_0} = a \frac{d\Phi(z)}{dz} \ll 1, \quad \frac{C_n(z) - C_1(z)}{C_0} = \frac{a}{n} \frac{d\psi_n(z)}{dz} \ll \ll 1. \quad (3.36)$$

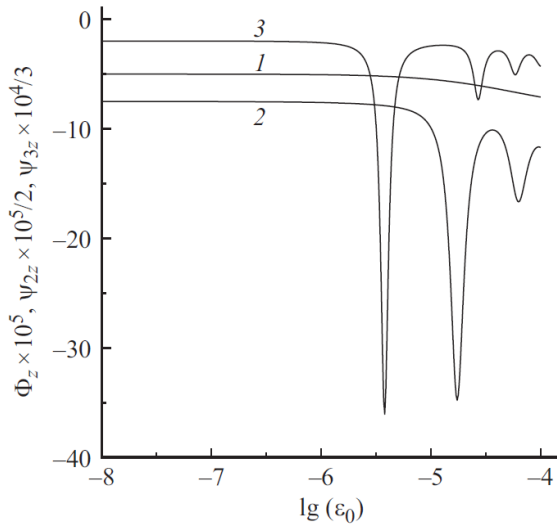


Рис.3.14. Зависимости $\Phi_z(z)$ - 1 и $\psi_{nz}(z)/n$ - 2, 3 от ε_0 при $\gamma_0 = 0$, $z = 2 \cdot 10^5$.

Из Рис.3.14 видно, что производная $\Phi_z(z)$ монотонно изменяется при увеличении ε_0 , а производные $\psi_{2,3z}(z)$ - немонотонны, они имеют несколько максимумов, при этом минимумы амплитуд $\varepsilon_{2,3}(z)$ при изменении ε_0 совпадают с максимумами производных $\psi_{2,3z}(z)$. Наконец отметим, что при достаточно больших параметрах $\gamma_0 = 10^6$ и $z = 3 \cdot 10^6$ в зависимости $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_0)$ имеют место два линейных участка, где $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, что и свидетельствует о насыщении нелинейных потерь при больших значениях $\gamma_0 \varepsilon_1$ (Рис.3.14). В этом случае при относительно больших амплитудах $\varepsilon_0 \geq 3 \cdot 10^{-6}$ для амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$

имеют место не квадратичные, а линейные зависимости от ε_0 , что связано с изменением степени гистерезисной нелинейности (3.2) с 2 на 1: $f_i(\varepsilon) \propto (\gamma_i/\gamma_0)\varepsilon$.

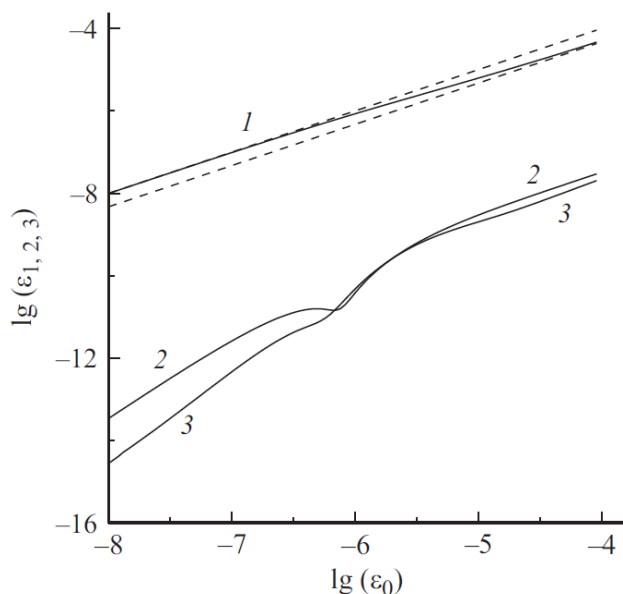


Рис.3.15. Зависимости амплитуд $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ от ε_0 при $\gamma_0 = 10^6$, $z = 3 \cdot 10^6$. Пунктирные линии соответствуют линейным зависимостям $\varepsilon_1(z)$ от ε_0 .

3.3. Нелинейные эффекты в резонаторе с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

Более интенсивно, чем в безграничной среде (при заданной амплитуде ε_0), нелинейные волновые процессы протекают в резонаторе при его возбуждении на частоте, близкой к резонансной [42,55,56,61,88]. Из-за отражений от границ резонатора, в нем устанавливается волна, имеющая не бегущую, а стоячую структуру. В высокодобротных резонаторах амплитуда резонансных колебаний значительно превышает амплитуду колебаний излучателя и может достигать достаточно высоких значений, при которых гистерезисная нелинейность поликристаллических твердых тел проявляется весьма заметно. При рассмотрении нелинейных колебаний в стержневом резонаторе, мы будем учитывать линейную дисперсию фазовой скорости продольных волн, связанную с конечным радиусом R стержня. Здесь мы исследуем нелинейные волновые процессы в стержневом резонаторе с жесткой и мягкой границами и с гистерезисной нелинейностью (3.19). С таким резонатором удобно проводить экспериментальные исследования нелинейных эффектов, при этом на жесткой границе располагается пьезокерамический излучатель акустических колебаний, а на мягкой – приемник [58].

3.3.1. АЗВТ и генерация высших гармоник в резонаторе с гистерезисной нелинейностью.

Подставляя (3.18) в уравнение движения (2.3) и учитывая линейную диссипацию [1] и геометрическую дисперсию продольных (вдоль оси x) акустических волн в стержне [85-87], получим одномерное волновое уравнение для смещения $U = U(x, t)$:

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} - \nu^2 r_0^2 [U_{tt} - C_t^2 U_{xx}]_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon)]_x + \alpha U_{xxt}, \quad (3.37)$$

где $\varepsilon = U_x$, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ - скорость низкочастотной продольной волны, C_t - скорость сдвиговой волны, ρ - плотность, α - коэффициент линейной диссипации, ν - коэффициент Пуассона, $r_0 = R/\sqrt{2}$, R - радиус стержня.

Для резонатора с жесткой ($x = 0$) и мягкой ($x = L$) границами граничные условия имеют вид:

$$U(x = 0, t) = A_0 \cos \Omega t, \quad U_x(x = L, t) = 0, \quad (3.38)$$

где A_0 и Ω - амплитуда и частота возбуждения резонатора, L - его длина.

Из уравнений (3.37), (3.38) находим линейное дисперсионное соотношение и собственные волновые числа K_p и резонансные частоты Ω_p резонатора в низкочастотном приближении ($\Omega/\Omega_d \ll 1$):

$$K(\Omega) = \frac{\Omega}{C_0} \left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_d} \right)^2 \right], \quad K_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L} = (2p-1)K_1, \quad \Omega_p = \frac{\pi C_0 (2p-1)}{2L} (1 - m_p), \quad (3.39)$$

где $\Omega_d = \frac{2C_0}{\nu r_0} \sqrt{\frac{1+\nu}{1+2\nu}}$, $m_p = \left(\frac{\pi \nu r_0 (2p-1)}{4L} \right)^2 \frac{1+2\nu}{1+\nu} \ll 1$, p - номер моды, $p = 1, 2, 3, \dots$

Из выражений (3.39) видно, что при $m_p \ll 1$, собственные числа K_p и резонансные частоты Ω_p такого резонатора пропорциональны нечетным числам $2p-1$, поэтому $2\Omega_p \neq \Omega_{2p}$, а $3\Omega_p \cong \Omega_{3p-1}$. Таким образом, при возбуждении в нелинейном резонаторе с жесткой и мягкой границами колебаний на частоте $\Omega \cong \Omega_p$, возникающие в нем колебания на частоте $2\Omega \cong 2\Omega_p$ будут нерезонансными (из-за граничной дисперсии), а на частоте $3\Omega \cong 3\Omega_p$ - близкими к резонансным (из-за слабой геометрической дисперсии).

Для решения системы уравнений (3.18), (3.19), (3.37), (3.38) используем замену [88]:

$$V(x, t) = U(x, t) - A_0 \cos \Omega t, \quad (3.40)$$

при которой граничные условия для $V(x, t)$ становятся нулевыми:

$$V(x = 0, t) = 0, \quad V_x(x = L, t) = 0. \quad (3.41)$$

Будем рассматривать вынужденные колебания резонатора вблизи резонанса моды с номером p , когда $|U(x,t)|, |V(x,t)| \gg A_0$. Подставляя (3.40) в (3.37), получим волновое уравнение, в правой части которого находятся слагаемые, описывающие нелинейность, линейную диссипацию и внешнюю силу:

$$V_{tt} - C_0^2 V_{xx} - \nu^2 r_0^2 [V_{tt} - C_t^2 V_{xx}]_{xx} = -C_0^2 [f(V_x)]_x + \alpha V_{xxt} + A_0 \Omega^2 \cos \Omega t. \quad (3.42)$$

Считая эти слагаемые малыми, будем искать решение уравнения (3.42) в виде, близком к решению однородного уравнения:

$$V(x,t) = V_1(x,t) + W(x,t) = V_0 \sin K_p x \cos \mathcal{G} + \sum_{n=2}^{\infty} V_n(x) \sin(n\mathcal{G} + \varphi_n), \quad (3.43)$$

$$\text{где } V_1(x,t) = V_0 \sin K_p x \cos \mathcal{G}, \quad W(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n(x) \sin(n\mathcal{G} + \varphi_n) \quad - \text{ малая}$$

поправка, $|W(x,t)| \ll |V_1(x,t)|$, $|W_x(x,t)| \ll |\varepsilon_1(x,t)|$, $\mathcal{G} = (\Omega_p + \delta)t + \varphi_1$, V_0 и φ_1 - амплитуда и фаза колебаний на частоте Ω , $V_n(x)$ и φ_n - амплитуда и фаза колебаний на частоте $n\Omega$, $\delta = \Omega - \Omega_p$, $|\delta| \ll \Omega_p / p$.

Из выражения (3.43) следует, что:

$$\varepsilon(x,t) = V_{1x}(x,t) + W_x(x,t) = \varepsilon_m \cos K_p x \cos \mathcal{G} + \sum_{n=2}^{\infty} V_{nx}(x) \sin(n\mathcal{G} + \varphi_n), \quad (3.44)$$

где $\varepsilon_1(x,t) = V_{1x}(x,t) = \varepsilon_m \cos K_p x \cos \mathcal{G}$, $\varepsilon_m \cong V_0 K_p$ - амплитуда деформации в резонаторе на частоте $\Omega = \Omega_p + \delta$, $\varepsilon_m(x) \cong \varepsilon_m |\cos K_p x|$.

Подставляя (3.43), (3.44) в (3.42), получим линейное неоднородное уравнение для $W(x,t)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям $W(x=0,t) = W_x(x=L,t) = 0$:

$$W_{tt} - C_0^2 W_{xx} - \nu^2 r_0^2 [W_{tt} - C_t^2 W_{xx}]_{xx} - \alpha W_{xxt} = -C_0^2 [f(\varepsilon_1)]_x + \alpha \Omega_p K_p^2 V_0 \sin K_p x \sin \mathcal{G} + 2\delta \Omega_p V_0 \sin K_p x \cos \mathcal{G} + A_0 \Omega_p^2 \cos(\mathcal{G} - \varphi_1). \quad (3.45)$$

Чтобы решение уравнения (3.45) не нарастало во времени, должно выполняться условие ортогональности его правой части собственным функциям оператора, стоящего в левой части [88]. Это эквивалентно отсутствию в правой части уравнения (3.45) Фурье-компонент с волновым числом K_p и частотой Ω . В общем виде, однако, получить аналитическое решение уравнения (3.45) не удастся, поэтому далее мы рассмотрим два предельных режима: $|\gamma_0 \varepsilon_m| \ll 1$ и $|\gamma_0 \varepsilon_m| \gg 1$. В этих режимах удастся получить выражения для характеристик нелинейных колебаний резонатора: амплитудно-

зависимых потерь и сдвига резонансной частоты, амплитуд второй и третьей гармоник частоты накачки.

3.3.2. Мало-амплитудный режим ($\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1$).

Вначале рассмотрим мало-амплитудный режим возбуждения резонатора ($\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1$), когда гистерезисную функцию $f(\varepsilon)$ можно представить в виде:

$$f(\varepsilon) \cong \frac{1 - \gamma_0 |\varepsilon|}{2} \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^2, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\gamma_2 \varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\gamma_3 \varepsilon^2, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ \gamma_4 \varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Для решения задачи о самовоздействии волны в резонаторе, т.е. для определения амплитуды ε_m деформации в резонаторе на частоте возбуждения Ω , выделим в правой части уравнения (3.45) колебания на собственной моде с номером p и с частотой Ω (учитывая, что $|\varepsilon_1| \gg |W_x|$ и $\varepsilon \cong \varepsilon_1$) [88]. Для этого умножим правую часть уравнения (3.45) на $\sin K_p x$ - собственную функцию резонатора, и проинтегрируем ее по x от 0 до L , при этом для нелинейной функции имеем:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} [f(\varepsilon_1)]_x \sin K_p x \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} dx d\vartheta = -\pi L \left\{ \varepsilon_m^2 K_p \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} - \gamma_0 \varepsilon_m^3 K_p \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.47)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{4}{9\pi^2} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{1}{6\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \quad b_1 = \frac{1}{9\pi^2} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4),$$

$$c_1 = \frac{9}{256} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{1}{8\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \quad d_1 = \frac{1}{64\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4).$$

Приравнивая соответствующие Фурье-компоненты в правой части получившегося уравнения к нулю, получим уравнения для определения амплитуды ε_m на частоте Ω :

$$a_1 \varepsilon_m^2 \Omega_p - c_1 \gamma_0 \varepsilon_m^3 \Omega_p + \delta \varepsilon_m = -[\Omega_p A_0 / L] \cos \varphi_1, \quad (3.48)$$

$$b_1 \varepsilon_m^2 \Omega_p - d_1 \gamma_0 \varepsilon_m^3 \Omega_p + \alpha \Omega_p^2 \varepsilon_m / 2C_0^2 = -[\Omega_p A_0 / L] \sin \varphi_1. \quad (3.49)$$

Из этих уравнений находим резонансную кривую резонатора и выражения для нелинейных сдвига резонансной частоты $\delta_{nl} = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$ и коэффициента потерь $\mu_{nl} = \mu_{nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_m = \frac{A_0 \Omega_p / L}{\left[[\delta - \delta_{nl}(\varepsilon_m)]^2 + \frac{\Omega_p^4}{4} [\mu_p + \mu_{nl}(\varepsilon_m)]^2 \right]^{1/2}}, \quad (3.50)$$

$$\delta_{nl}(\varepsilon_m) = -a_1 \varepsilon_m [1 - \gamma_0 (c_1 / a_1) \varepsilon_m] \Omega_p, \quad \mu_{nl}(\varepsilon_m) = 2b_1 \varepsilon_m [1 - \gamma_0 (d_1 / b_1) \varepsilon_m] \Omega_p^{-1}, \quad (3.51)$$

где $\mu_p = \alpha / C_0^2 = (\Omega_p Q_p)^{-1}$ и Q_p - коэффициент линейных потерь и добротность резонатора на частоте Ω_p . Вследствие нелинейности резонатора, зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_m(A_0)$ является нелинейной и неявной, при этом максимальная амплитуда ε_m деформации имеет место при резонансе, когда $\delta = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_m = \frac{2A_0 Q_p / L}{1 + \mu_{nl}(\varepsilon_m) / \mu_p}. \quad (3.52)$$

Для определения амплитуды колебаний $V^{(2)}(x, t)$ в резонаторе на частоте 2Ω найдем Фурье-компоненты гистерезисной функции $f(\varepsilon_1)$ на этой частоте:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1) \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \varepsilon_m^2 \cos^2 K_p x - \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \gamma_0 \varepsilon_m^3 |\cos^3 K_p x|, \quad (3.53)$$

$$\text{где } a_2 = \frac{1}{16}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{1}{6\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4), \quad b_2 = \frac{1}{12\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4),$$

$$c_2 = \frac{1}{5\pi}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{1}{16}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4), \quad d_2 = \frac{1}{20\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4).$$

Уравнение для смещений $V^{(2)}(x, t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} V_{tt}^{(2)} - C_0^2 V_{xx}^{(2)} - \nu^2 r_0^2 [V_{tt}^{(2)} - C_t^2 V_{xx}^{(2)}]_{xx} - \alpha V_{xxt}^{(2)} = \\ = -C_0^2 \left(\varepsilon_m^2 \cos^2 K_p x [a_2 \cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta] - \gamma_0 \varepsilon_m^3 |\cos^3 K_p x| [c_2 \cos 2\vartheta + d_2 \sin 2\vartheta] \right)_x. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Для резонатора с жесткой и мягкой границами при резонансной накачке ее вторая гармоника не является резонансной, поэтому дисперсионным и диссипативным слагаемыми в уравнении (3.54) можно пренебречь. Из уравнения (3.54) находим амплитуду смещения $V_2(L)$ свободной границы резонатора на частоте 2Ω :

$$V_2(L) = \frac{(a_2^2 + b_2^2)^{1/2}}{4} \left[1 - \frac{16\gamma_0}{5\pi} \frac{a_2 c_2 + b_2 d_2}{a_2^2 + b_2^2} \varepsilon_m \right] \varepsilon_m^2 L. \quad (3.55)$$

Аналогичным образом получается уравнение для смещения $V^{(3)}(x, t)$ на частоте третьей гармоники:

$$\begin{aligned} V_{tt}^{(3)} - C_0^2 V_{xx}^{(3)} - \nu^2 r_0^2 [V_{tt}^{(3)} - C_t^2 V_{xx}^{(3)}]_{xx} - \alpha V_{xxt}^{(3)} = \\ = -C_0^2 [\langle f(\varepsilon_1) \rangle_{3\vartheta} + \langle f'_\varepsilon(\varepsilon_1) \rangle_0 \cdot V_x^{(3)}]_x = \\ = -C_0^2 \left(\varepsilon_m^2 \cos K_p x |\cos K_p x| [a_3 \cos 3\vartheta + b_3 \sin 3\vartheta] - \gamma_0 \varepsilon_m^3 \cos^3 K_p x [c_3 \cos 3\vartheta + d_3 \sin 3\vartheta] \right)_x - \end{aligned}$$

$$-C_0^2 \left([a_0 \varepsilon_m |\cos K_p x| - \gamma_0 c_0 \varepsilon_m^2 \cos^2 K_p x] \cdot V_x^{(3)} \right)_x, \quad (3.56)$$

где

$$\langle f(\varepsilon_1) \rangle_{3\vartheta} = \varepsilon_m^2 \cos K_p x |\cos K_p x| [a_3 \cos 3\vartheta + b_3 \sin 3\vartheta] - \gamma_0 \varepsilon_m^3 \cos^3 K_p x [c_3 \cos 3\vartheta + d_3 \sin 3\vartheta],$$

$$\langle f'_\varepsilon(\varepsilon_1) \rangle_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'_\varepsilon(\varepsilon_1) d\vartheta = a_0 \varepsilon_m |\cos K_p x| - \gamma_0 c_0 \varepsilon_m^2 \cos^2 K_p x$$

$$a_3 = \frac{1}{15\pi} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4), \quad b_3 = \frac{1}{60\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4),$$

$$c_3 = \frac{1}{15\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{1}{32} (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4), \quad d_3 = \frac{1}{40\pi} (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4),$$

$$a_0 = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) / 2\pi + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) / 8,$$

$$c_0 = (3/16)(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + (1/2\pi)(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4).$$

Частота третьей гармоники $3(\Omega_p + \delta_{nl})$, в отличие от второй, близка к резонансной частоте Ω_{3p-1} , поэтому решение уравнения (3.56) будем искать в виде собственной моды резонатора с номером $3p-1$:

$$V^{(3)}(x,t) = V_3 \sin K_{3p-1} x \sin(3\vartheta + \varphi_3), \quad (3.57)$$

где $V_3, \varphi_3 = const$.

Умножая уравнение (3.56) на $\sin K_{3p-1} x$ и интегрируя его по x от 0 до L , находим выражение для амплитуды деформации $\varepsilon_3 = K_{3p-1} V_3 = 3K_p V_3$ колебаний на частоте 3Ω при резонансном возбуждении на основной частоте:

$$\varepsilon_3 = \frac{8\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \left(1 - \frac{15\pi}{32} \gamma_0 g \varepsilon_m \right) \varepsilon_m^2 \Omega_p}{5\pi \left[(3\Omega_p / Q_{3p-1})^2 + 4[3(1-q)\delta_{nl}(\varepsilon_m) + \Delta\Omega_{3p-1}]^2 \right]^{1/2}}, \quad (3.58)$$

$$\text{где } q = \frac{36a_0}{35\pi a_1} \left[1 + \gamma_0 \varepsilon_m \left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{35\pi c_0}{144 a_0} \right) \right], \quad g = \frac{a_3 c_3 + b_3 d_3}{a_3^2 + b_3^2}, \quad \Delta\Omega_{3p-1} = 3\Omega_p - \Omega_{3p-1} -$$

дисперсионная расстройка частоты $3\Omega_p$ от соответствующего резонанса Ω_{3p-1} , связанная с линейной дисперсией волн в стержне и отличием граничных условий резонатора от идеальных.

В этом режиме, в начале, когда $\gamma_0 \varepsilon_m \ll \ll 1$, имеют место следующие зависимости:

$\delta_{nl}(\varepsilon_m), \mu_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, $V_2(L), \varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^2$, а затем, при увеличении ε_m , должны наблюдаться

отклонения от них, в частности, для $\delta_{nl}(\varepsilon_m)$ (при $c_1/a_1 > 0$) и $\mu_{nl}(\varepsilon_m)$ - в сторону насыщения.

3.3.3. Режим насыщения ($\gamma_0 \varepsilon_m \gg 1$).

В режиме насыщения, когда на большей части резонатора и на большей части периода волны для деформации $\varepsilon(x,t)$ выполняется условие $\gamma_0|\varepsilon| \gg 1$, гистерезисная функция (3.19) имеет вид:

$$f(\varepsilon) \cong \frac{1}{2\gamma_0} \cdot \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\gamma_2 \varepsilon + (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ \gamma_3 \varepsilon, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\gamma_4 \varepsilon - (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

В этом случае задача о нелинейных колебаниях резонатора решается так же, как и в мало-амплитудном режиме: резонансная кривая резонатора и максимальная амплитуда ε_m деформации определяются теми же уравнениями (3.50) и (3.52), а характеристики колебаний – следующими выражениями:

$$\delta_{nl}(\varepsilon_m) = -a_1 \Omega_p = const, \quad \mu_{nl}(\varepsilon_m) = b_1 \Omega_p^{-1} = const, \quad (3.60)$$

$$V_2(L) = \frac{2(a_2^2 + b_2^2)^{1/2}}{3\pi} \varepsilon_m L, \quad tg \varphi_2 = \frac{a_2}{b_2}, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad (3.61)$$

где $a_1 = \frac{1}{4\pi\gamma_0} \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{4} \right)$, $b_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{4\pi\gamma_0}$,

$$a_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{6\pi\gamma_0}, \quad b_2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{6\pi\gamma_0}.$$

Отметим, что в режиме насыщения имеют место следующие зависимости: $\delta_{nl}(\varepsilon_m) = const$, $\mu_{nl}(\varepsilon_m) = const$, $V_2(L) \propto \varepsilon_m$, а $\varepsilon_3 = 0$. Все они связаны с насыщением гистерезисной нелинейности: $f(\varepsilon) \propto (\gamma_{1-4}/\gamma_0)\varepsilon$. В этом режиме насыщение нелинейных потерь приводит к тому, что вынуждающая сила для колебаний $V^{(3)}(x,t)$ в резонаторе с жесткой и мягкой границами пропорциональна $\cos 3K_p x$, а собственной функцией такого резонатора является $\sin K_{3p-1} x = \sin 3K_p x$, т.е. для колебаний $V^{(3)}(x,t)$ правая часть уравнения (3.45) ортогональна собственной функции этого уравнения, поэтому $\varepsilon_3 = 0$.

3.3.4. Нелинейные эффекты АЗВТ в резонаторе из отожженной меди.

Эффекты гистерезисной нелинейности наблюдаются во многих поликристаллических твердых телах (металлах, сплавах, горных породах), причем часто в разных материалах они проявляются по-разному. В некоторых металлах, например, в

отожженной меди, даже в области не очень больших деформаций ($\varepsilon_m < 10^{-5}$), имеет место насыщение гистерезисных потерь [81]. Здесь приведены результаты экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов АЗВТ в резонаторе из отожженной поликристаллической меди. Эксперимент проводился со стержневым резонатором с жесткой и мягкой границами [81]. Длина стержня L составляла 30 см, его диаметр - 8 мм. Температура отжига меди - 800°C , время отжига около 4 часов. Резонансные частоты $F_p = \Omega_p / 2\pi$ и добротности Q_p первой и второй продольных мод резонатора составляли: $F_1 \cong 3210$ Гц, $Q_1 \cong 210$ и $F_2 \cong 9435$ Гц, $Q_2 \cong 165$. Резонансная частота $F_1 \cong 3210$ Гц соответствуют тому, что скорость C_0 НЧ продольной волны в стержне равна $3,8 \cdot 10^5$ см/с. Измерения нелинейных эффектов проводились при возбуждении резонатора на его первой моде ($p=1$). На Рис.3.16 показан график зависимости амплитуды деформации ε_m стержня (в резонансе) от амплитуды u_0 электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе (в дБ относительно 1 мкВ). Из Рис.3.16 следует, что при малых деформациях ($\varepsilon_m \leq 2 \cdot 10^{-7}$) имеет место линейная зависимость ε_m от u_0 (т.е. $\varepsilon_m \propto u_0$), затем, при $2 \cdot 10^{-7} < \varepsilon_m \leq 2 \cdot 10^{-6}$, зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_m(u_0)$ становится нелинейной, а при $\varepsilon_m > 2 \cdot 10^{-6}$ - опять наблюдается линейная зависимость $\varepsilon_m \propto u_0$. Такое поведение ε_m от u_0 свидетельствует о наличии нелинейных потерь в резонаторе и их насыщении. Из выражения (3.52) и экспериментальной зависимости $\varepsilon_m = \varepsilon_m(A_0)$ (Рис.3.16) определим соответствующую ей зависимость $\mu_{nl} = \mu_{nl}(\varepsilon_m)$. Полагая, что A_0 изменяется пропорционально амплитуде u_0 электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе, из (3.52) получаем формулу для определения нелинейных потерь:

$$\frac{\mu_{nl}(\varepsilon_m)}{\mu_p} = \frac{\varepsilon_{m,1}}{\varepsilon_m} \cdot \frac{u_0}{u_{0,1}} - 1, \quad (3.62)$$

где $\varepsilon_{m,1}$ и $u_{0,1}$ - начальные экспериментальные значения амплитуды деформации стержня и амплитуды напряжения на излучателе, когда эффекты АЗВТ пренебрежимо малы и $\varepsilon_m \propto A_0 \propto u_0$, а ε_m и u_0 - текущие значения амплитуды деформации стержня и амплитуды напряжения на излучателе, когда эффекты АЗВТ проявляются вполне заметно, $\varepsilon_m > \varepsilon_{m,1}$, $u_0 > u_{0,1}$. Зависимость $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_1$ от ε_m приведена на Рис.3.17 На этом же рисунке приведена зависимость $|\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)|/F_1$ от ε_m , где

$\Delta F_{nl}(\varepsilon_m) = 2\pi\delta_{nl}(\varepsilon_m) < 0$. Из Рис.3.17 видно, что в начале (при $\varepsilon_m \leq 4 \cdot 10^{-6}$) - $\mu_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, $\Delta F_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, а затем (при $\varepsilon_m > 4 \cdot 10^{-6}$) - $\mu_{nl}(\varepsilon_m)$ и $\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)$ стремятся к насыщению. Это соответствует теоретическим зависимостям (3.51), (3.60). При достаточно большой амплитуде $\varepsilon_m > 3 \cdot 10^{-7}$ в резонаторе наблюдалась генерация третьей гармоники. (Уровень второй гармоники, из-за ее “нерезонансности”, был мал и недостаточен для надежного измерения.) На Рис.3.18 приведена зависимость амплитуды третьей гармоники ε_3 от резонансной амплитуды ε_m . Из этого рисунка видно, что зависимость ε_3 от ε_m немонотонна, при этом можно выделить три диапазона по амплитуде ε_m , в которых имеют место следующие зависимости: в первом ($3 \cdot 10^{-7} \leq \varepsilon_m \leq 4 \cdot 10^{-6}$) - $\varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^2$, во втором ($4 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon_m \leq 8 \cdot 10^{-6}$) - $\varepsilon_3 \approx const$ и в третьем ($8 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon_m \leq 10^{-5}$) - ε_3 сильно уменьшается. Такое поведение ε_3 качественно соответствует теоретическим зависимостям. Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов можно определить значения параметров гистерезисной нелинейности (3.19). По измеренным нелинейным потерям и сдвигу резонансной частоты в мало-амплитудном режиме находим: $a_1 \cong 3 \cdot 10^3$, $b_1 \cong 1,2 \cdot 10^3$, $\gamma_1 + \gamma_3 \cong 2,4 \cdot 10^4$, $\gamma_2 + \gamma_4 \cong 8 \cdot 10^4$, $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \cong 3,8 \cdot 10^3$. Значение последнего коэффициента можно независимо определить по амплитуде третьей гармоники из выражения (3.58), при этом он оказывается равным $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \cong 3,7 \cdot 10^3$, что достаточно близко к значению $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$, определенному по нелинейным потерям и сдвигу резонансной частоты.

Наконец, определим параметр γ_0 , ответственный за насыщение нелинейных потерь. Из выражения (3.52) следует, что в мало-амплитудном режиме (при $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_p \ll 1$) и в режиме насыщения имеем, соответственно, следующие линейные зависимости $\varepsilon_{m,1}$ и $\varepsilon_{m,2}$ от A_0 :

$$\varepsilon_{m,1} = 2A_0Q_p/L, \quad \varepsilon_{m,2} = \frac{2A_0Q_p/L}{1 + b_1Q_p}. \quad (3.63)$$

Из этих выражений находим: $b_1Q_p = \frac{\varepsilon_{m,1}}{\varepsilon_{m,2}} - 1$. Из Рис.3.16 видно, что $\varepsilon_{m,1}/\varepsilon_{m,2} = 2,75$ и,

следовательно, $\gamma_0 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)Q_1}{4\pi[(\varepsilon_{m,1}/\varepsilon_{m,2}) - 1]} \cong 10^6$.

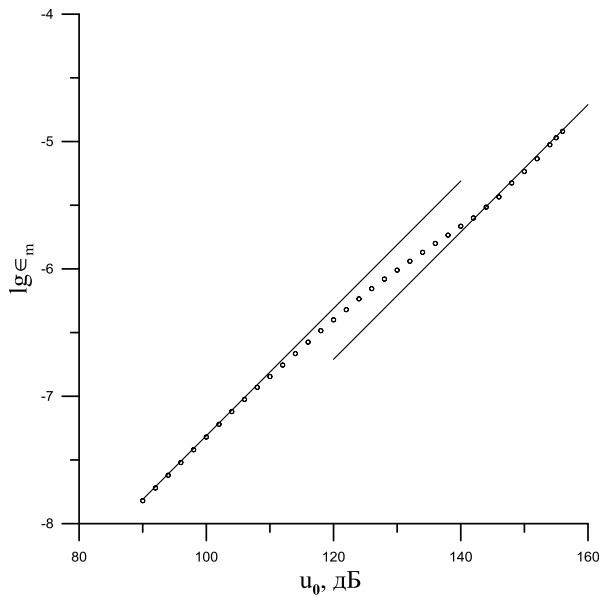


Рис.3.16. Зависимость амплитуды ϵ_m (в резонансе) от амплитуды электрического напряжения u_0 на излучателе (относительно 1 мкВ). Прямые линии соответствуют зависимостям $\epsilon_m \propto u_0$.

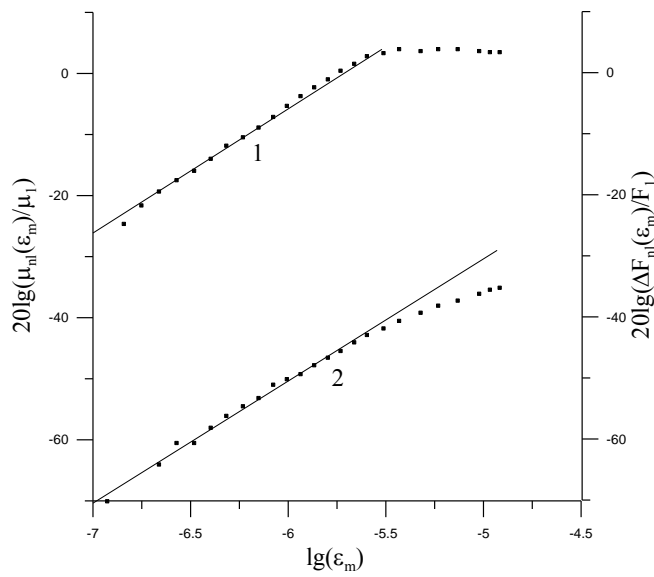


Рис.3.17. Зависимости $\mu_{nl}(\epsilon_m)/\mu_1$ - 1 и $|\Delta F_{nl}(\epsilon_m)|/F_1$ - 2 от амплитуды ϵ_m . Прямые линии соответствуют линейным зависимостям $\mu_{nl}(\epsilon_m)/\mu_1$ и $|\Delta F_{nl}(\epsilon_m)|/F_1$ от ϵ_m .

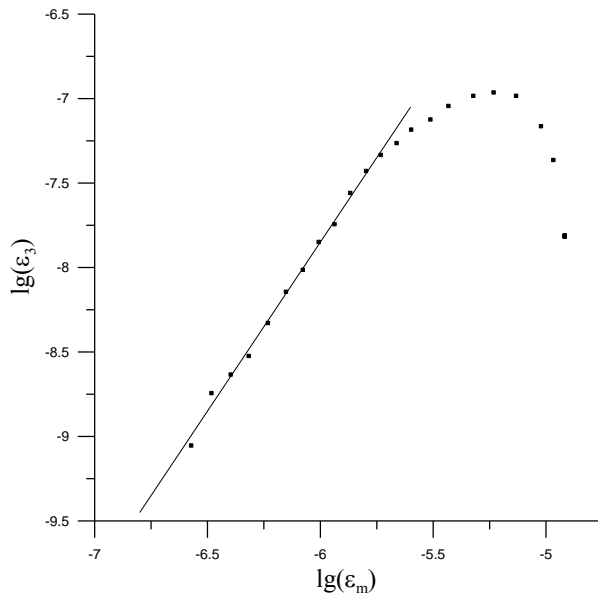


Рис.3.18. Зависимость амплитуды третьей гармоники ε_3 от резонансной амплитуды ε_m .
Прямая линия соответствуют квадратичной зависимости ε_3 от ε_m .

3.4. Распространение однополярных возмущений в средах с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

Рассмотрим распространение однополярных импульсов деформации в среде с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь [18]. Граничное условие зададим в виде симметричного треугольного возмущения:

$$\varepsilon(0, \theta) = 2\varepsilon_0 \cdot \begin{cases} \theta, & 0 \leq \theta \leq 1/2; \\ 1 - \theta, & 1/2 \leq \theta \leq 1, \end{cases} \quad (3.64)$$

где ε_0 и T - амплитуда и длительность возмущения, $\theta = \tau/T$.

Для определенности здесь будет рассмотрено распространение возмущений положительной полярности ($\varepsilon_0 > 0$) в предположении, что $\gamma_{1,2} > 0$. В этом случае, “перехлестов” в однополярных возмущениях не образуется. При решении уравнения (3.2) мы будем пользоваться методом “сшивания” простых волн [64,66], отвечающих каждой ветви гистерезиса (3.19). Точное решение уравнения (3.2) с граничным условием (3.64) записывается в неявной форме и имеет следующий вид:

$$e(z, \theta) = 2 \cdot \begin{cases} \theta - \frac{e(z, \theta)[2 + ae(z, \theta)]}{4[1 + ae(z, \theta)]^2} z, & \dot{e}(z, \theta) > 0; \\ 1 - \theta - \frac{\mu e(z, \theta)[2 + ae(z, \theta)]}{4[1 + ae(z, \theta)]^2} z + \frac{1 + \mu}{4[1 + ae(z, \theta)]^2} \int_0^z e_m(z') dz', & \dot{e}(z, \theta) < 0, \end{cases} \quad (3.65)$$

где $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$, $e_m(z) = \varepsilon_m(z)/\varepsilon_0$, $a = \gamma_0 \varepsilon_0$, $z = y \varepsilon_0$, $y = \gamma_1 x / C_0 T$, $\mu = \gamma_2 / \gamma_1$.

Амплитуда $e_m(z)$ определяется значением деформации $e(z, \theta)$ в точке $\theta = \theta_m(z)$ пересечения переднего ($\dot{e}(z, \theta) > 0$, $0 \leq \theta \leq \theta_m$) и заднего ($\dot{e}(z, \theta) < 0$, $\theta_m \leq \theta \leq \theta^*$) фронтов возмущения, т.е. в его вершине:

$$e_m = 2 \left[\theta_m - \frac{e_m(2 + ae_m)}{4(1 + ae_m)^2} z \right], \quad (3.66)$$

$$e_m = 2 \left[1 - \theta_m - \frac{\mu e_m(2 + ae_m)}{4(1 + ae_m)^2} z + \frac{1 + \mu}{4(1 + ae_m)^2} \int_0^z e_m(z') dz' \right], \quad (3.67)$$

где $\theta_m(z) = \frac{e_m}{2} \left[1 + \frac{2 + ae_m}{2(1 + ae_m)^2} z \right]$, $\theta^*(z) = 1 + \frac{1 + \mu}{4} \int_0^z e_m(z') dz'$ - длительность импульса.

Из выражений (3.66), (3.67) получаем уравнение для определения амплитуды $e_m(z)$:

$$4ae_m^3 + [2(1 - 2a) + (1 + \mu)z]e_m^2 - 2 = 0. \quad (3.68)$$

Асимптотические решения этого уравнения имеют вид: $e_m = 1$ - при $(1 + \mu)z \ll 1$, $a \ll 1$, и $e_m = 1 - (1 + \mu)y/4\gamma_0$ - при $a \gg 1$. На Рис.3.19 и Рис.3.20 приведены формы возмущения $e(z, \theta)$ и зависимости его амплитуды $e_m(z)$ и координаты $\theta_m(z)$ от z при $\mu = 1.5$ и $a = 10$. Видно, что с ростом z треугольное симметричное возмущение (3.64) искажается несимметрично: передний и задний фронты становятся “вогнутыми”, при этом задний фронт сильно затягивается. С ростом z амплитуда $e_m(z)$ возмущения уменьшается, а длительность $\theta^*(z)$ и координата $\theta_m(z)$ - растут. При увеличении параметра $a = \gamma_0 \varepsilon_0$ гистерезисные потери насыщаются и скорости изменения амплитуды $e_m(z)$ и координаты $\theta_m(z)$ - уменьшаются. На Рис.3.21 приведены зависимости амплитуды ε_m и координаты θ_m от начальной амплитуды ε_0 при $y = 3 \cdot 10^5$ и при различных значениях параметра γ_0 . При $\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$, в начале - $\varepsilon_m = \varepsilon_0$, а затем зависимость ε_m от ε_0 становится нелинейной (линии 1, 2, 3), что связано с ростом гистерезисных потерь. При $\gamma_0 \varepsilon_0 > 1$, когда гистерезисные потери насыщаются, зависимость ε_m от ε_0 стремится к линейной: $\varepsilon_m = [1 - (1 + \mu)y/4\gamma_0] \varepsilon_0$ (линия 4). Зависимости θ_m от ε_0 ведут себя аналогично: при малых значениях $\gamma_0 \varepsilon_0$ имеет место сильная зависимость θ_m от ε_0 , а при больших - слабая. Отметим, что в гистерезисной среде без насыщения нелинейных потерь ($\gamma_0 = 0$) форма возмущения (3.64) будет треугольной, но, вообще говоря, несимметричной:

$$e(z, \theta) = 2 \cdot \begin{cases} \frac{\theta}{1+z}, & \dot{e}(z, \theta) > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_m(z); \\ \frac{\sqrt{1+(1+\mu)z/2} - \theta}{1+\mu z}, & \dot{e}(z, \theta) < 0, \quad \theta_m(z) \leq \theta \leq \theta^*(z), \end{cases} \quad (3.69)$$

где $\theta_m(z) = e_m(z)(1+z)/2$, $\theta^*(z) = \sqrt{1+(1+\mu)z/2}$, $e_m(z) = [1+(1+\mu)z/2]^{-1/2}$.

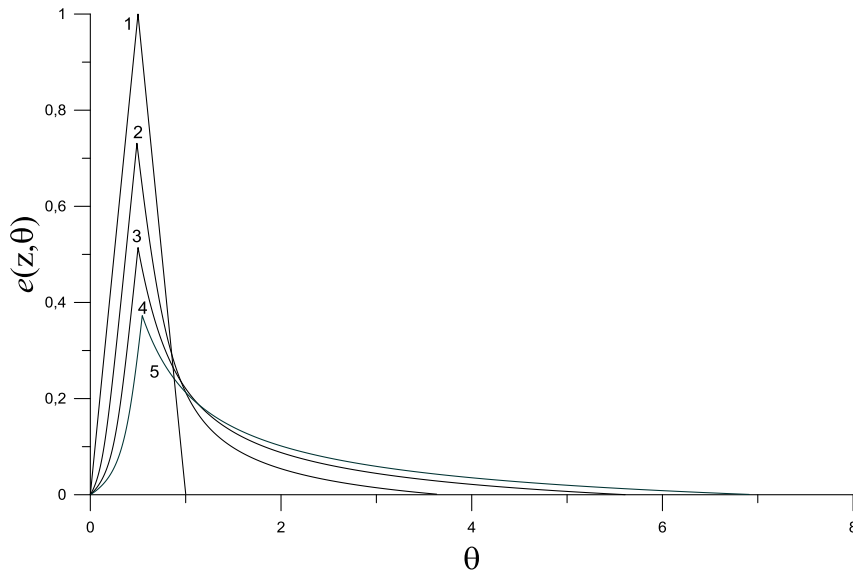


Рис.3.19. Форма импульсного возмущения $e(z, \theta)$ при $\mu=1.5$, $a=10$ и различных z :
 $z=0$ - 1, $z=5$ - 2, $z=10$ - 3, $z=15$ - 4, $z=20$ - 5.

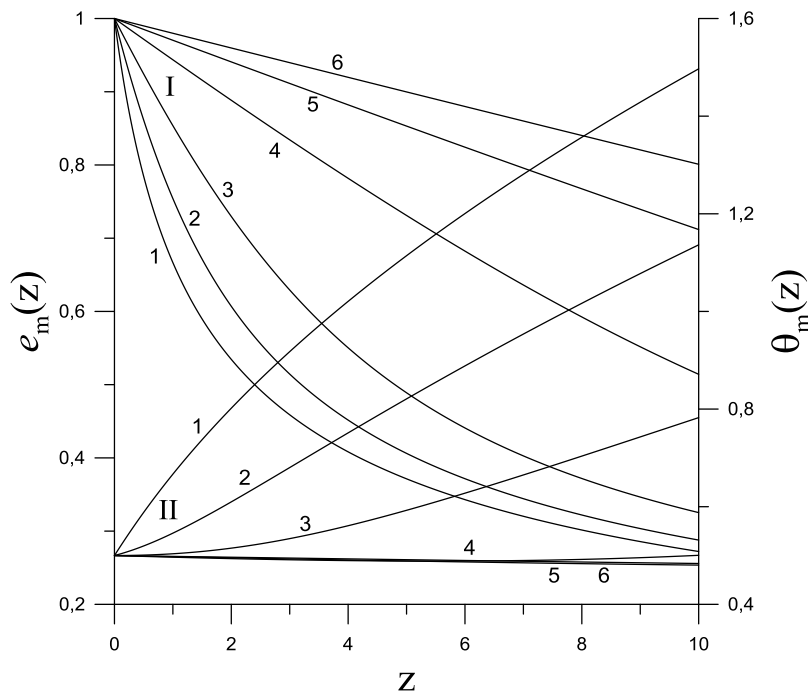


Рис.3.20. Зависимость амплитуды $e_m(z)$ (I) и координаты $\theta_m(z)$ (II) от z при $\mu=1.5$:
 $a=0$ - 1, $a=1$ - 2, $a=3$ - 3, $a=10$ - 4, $a=20$ - 5, $a=30$ - 6.

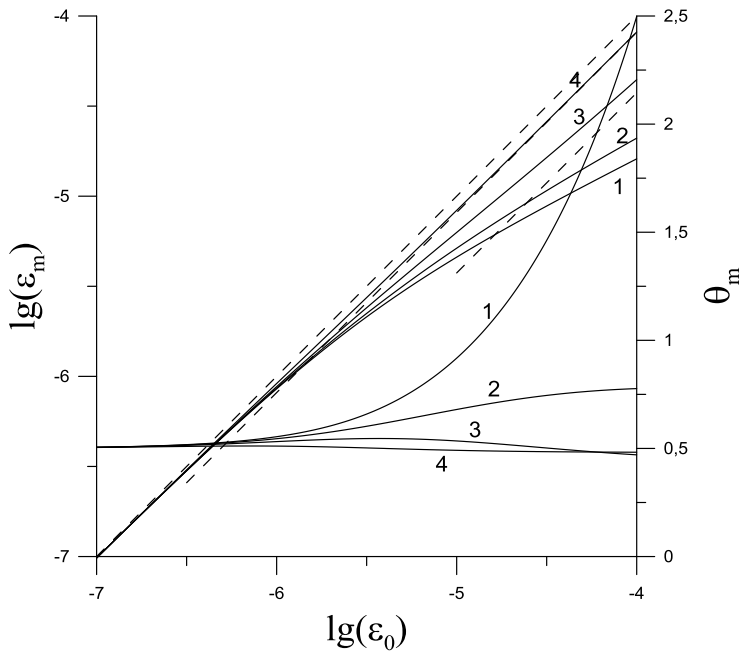


Рис.3.21. Зависимости амплитуды ε_m (I) и координаты θ_m (II) от ε_0 при $\mu = 1.5$, $y = 10^5$ и различных значениях параметра γ_0 : 1 - $\gamma_0 = 0$, 2 - $\gamma_0 = 10^5$, 3 - $\gamma_0 = 3 \cdot 10^5$, 4 - $\gamma_0 = 10^6$. Пунктирные линии соответствуют линейным зависимостям ε_m от ε_0 .

3.5. Волновые процессы в средах с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

Здесь предложено феноменологическое гистерезисное (неупругого вида) уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением амплитудно-зависимых потерь и проведено теоретическое и численное исследование нелинейных процессов, возникающих при распространении акустических волн в таких средах [19].

3.5.1. Неупругий гистерезис с насыщением нелинейных потерь.

Уравнение состояния среды с неупругим квадратичным гистерезисом с насыщением нелинейных потерь можно представить в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)] + \alpha \rho \dot{\varepsilon}, \quad (3.70)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{\beta \varepsilon_m \varepsilon}{1 + \gamma_0 \varepsilon_m} + \frac{1}{2(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)} \begin{cases} \beta_1 \varepsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\beta_2 \varepsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \quad (3.71)$$

где E - модуль упругости, $|f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon| \ll 1$, $|f'_\varepsilon(\varepsilon)| \ll 1$; ε_m - амплитуда деформации; β , $\beta_{1,2}$, γ_0 - параметры гистерезисной нелинейности; $\beta_{1,2} > 0$, $\gamma_0 \geq 0$, $|\beta \varepsilon_m| \ll 1$, $|\beta_{1,2} \varepsilon_m| \ll 1$, ρ - плотность, α - коэффициент линейной диссипации. Качественный вид гистерезисной функции $f(\varepsilon)$ при различных параметрах γ_0 показан на Рис.3.22, из

которого видно, что с ростом параметра γ_0 площадь гистерезиса (3.71) и его наклон уменьшаются, что и соответствует насыщению эффектов АЗВТ.

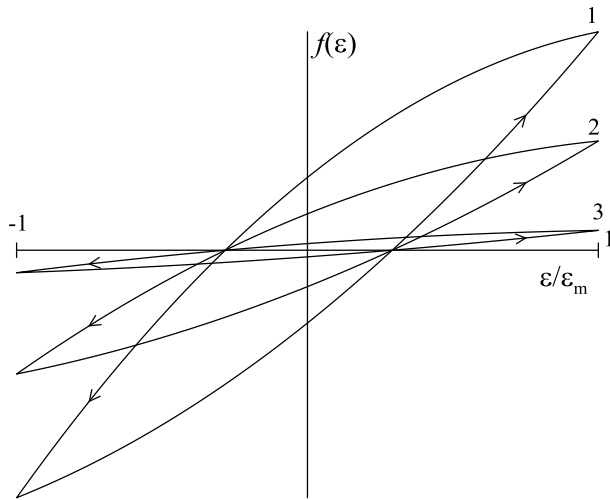


Рис.3.22. Качественный вид гистерезисной функции $f(\varepsilon)$ при различных параметрах γ_0 : 1 - $\gamma_0 = 0$, 2 - $\gamma_0 = \gamma_{01}$, 3 - $\gamma_0 = \gamma_{02} > \gamma_{01}$.

В уравнении (3.71) первое (негистерезисное) слагаемое определяет дефект модуля (или нелинейную поправку к скорости распространения волны), второе (гистерезисное) – амплитудно-зависимые потери, а множитель $(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)^{-1}$ отвечает за насыщение эффектов АЗВТ. При $\gamma_0 = 0$ и $\beta = \beta_1 = \beta_2$ уравнение (3.71) описывает симметричный квадратичный гистерезис Давиденкова [62,63,68], который не объясняет насыщения нелинейных потерь. В этой модели гистерезисное поведение материала связывается с его микропластической деформацией, вызванной необратимым движением дислокаций в поле упругой волны. Из уравнения (3.71) получаем выражение для амплитудно-зависимого декремента поглощения:

$$\eta(\varepsilon_m) = \frac{1}{\varepsilon_m^2} \oint f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_m}{3(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)} > 0 \quad (3.72)$$

Из этого выражения следует, что при $\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1$ - $\eta(\varepsilon_m) = 2(\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_m / 3 \propto \varepsilon_m$, а при $\gamma_0 \varepsilon_m \gg 1$ - $\eta(\varepsilon_m) = 2(\beta_1 + \beta_2) / 3\gamma_0$, что и соответствует насыщению нелинейных потерь.

3.5.2. Эволюция гармонической волны в безграничной среде.

Вначале мы рассмотрим нелинейное распространение первоначально гармонической волны в безграничной среде. Здесь, для того, чтобы наиболее четко проявлялось влияние гистерезисных свойств среды на динамику нелинейных волновых процессов, мы не будем учитывать линейную диссипацию, определяемую слагаемым

$\alpha\rho\dot{\varepsilon}$. Это справедливо для относительно низкочастотных волн достаточно большой амплитуды, когда выполняется условие: $E|f(\varepsilon)| \gg \alpha\rho|\dot{\varepsilon}|$. В этом случае удастся получить точное решение задачи о распространении первоначально гармонической волны.

Подставляя уравнение (3.70) в уравнение движения (2.3) и пренебрегая линейной диссипацией, получим одномерное волновое уравнение для смещений $U(x,t)$:

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon)]_x, \quad (3.73)$$

где $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ - скорость продольной волны.

Переходя в (3.73) к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x' = x$, получим эволюционное уравнение (3.2) для положительных ($\varepsilon_\tau > 0$) и отрицательных ($\varepsilon_\tau < 0$) фронтов волны деформации, бегущей в положительном направлении оси x . Граничное условие зададим в виде: $\varepsilon(x=0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$. При решении уравнения (3.73) мы будем пользоваться методом “сшивания” простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса (3.72) [64-66]. Решение уравнения (3.2) имеет вид (Рис.3.23):

$$e(z, \theta) = \begin{cases} \sin \left(\theta - \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + ae_m(z')} - e(z, \theta) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')} \right), & e_\theta(z, \theta) > 0; \\ \sin \left(\theta - \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + ae_m(z')} + \mu e(z, \theta) \int_0^x \frac{dz'}{1 + ae_m(z')} \right), & e_\theta(z, \theta) < 0, \end{cases} \quad (3.74)$$

где $\theta = \omega\tau$, $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$, $e_m(z) = \varepsilon_m(z)/\varepsilon_0$, $\mu = \beta_2/\beta_1 \geq 0$, $\lambda = \beta/\beta_1$, $z = y\varepsilon_0$, $y = \beta_1 kx/2$, $k = \omega/C_0$, $a = \gamma_0\varepsilon_0$, при этом амплитуда $e_m(z)$ и значения фаз $\theta_m^\pm(z)$, в которых положительный ($e_\theta(z, \theta) > 0$, $\theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z)$) фронт волны переходит в отрицательный ($e_\theta(z, \theta) < 0$, $\theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi$) определяются уравнениями:

$$e(z, \theta_m^\pm(z)) = \pm e_m(z), \quad (3.75)$$

$$\theta_m^\pm(z) = \pm \arcsin e_m(z) + \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + ae_m(z')} \pm e_m(z) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')}. \quad (3.76)$$

Из выражения (3.74) и Рис.3.23 следует, что по мере распространения первоначально гармонической волны она затухает и, искажаясь, превращается в пилообразную; ее амплитуда $e_m(z)$ определяется следующим уравнением:

$$e_m(z) = \cos \left(\frac{1 + \mu}{2} e_m(z) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')} \right). \quad (3.77)$$

Решение уравнения (3.77) имеет вид:

$$\left(a + \frac{1}{e_m}\right) \arccos e_m - a[S(1) - S(e_m)] - \frac{\pi a}{2} \ln e_m = \frac{1+\mu}{2} z, \quad (3.78)$$

$$\text{где } S(e_m) = e_m + \frac{1}{2 \cdot 3^2} e_m^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2} e_m^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^2} e_m^7 + \dots$$

На Рис.3.24 приведены зависимости амплитуды $e_m(z)$ и фазы $\theta_m^+(z)$ от z при $\lambda = 1.5$, $\mu = 0.5$ и различных значениях параметра $a = \gamma_0 \varepsilon_0$. Видно, что с ростом z амплитуда $e_m(z)$, из-за гистерезисных потерь, уменьшается, а фаза $\theta_m^+(z)$ - растет. При увеличении параметра γ_0 скорости изменения амплитуды $e_m(z)$ и фазы $\theta_m^+(z)$ уменьшаются. На Рис.3.25 приведены зависимости амплитуды $\varepsilon_m(z)$ и фазы $\theta_m^+(z)$ от начальной амплитуды ε_0 при $\lambda = 1.5$, $y = 2 \cdot 10^6$ и при различных значениях параметра γ_0 . При $\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$, в начале - $\varepsilon_m = \varepsilon_0$, а затем зависимость ε_m от ε_0 становится нелинейной (линии 1, 2), что связано с ростом гистерезисных потерь. При $\gamma_0 \varepsilon_0 > 1$, когда гистерезисные потери насыщаются, зависимость ε_m от ε_0 стремится к линейной: $\varepsilon_m(z) \propto \varepsilon_0$ (линии 3, 4). Зависимости θ_m^+ от ε_0 ведут себя так, что $\theta_m^+(\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1) = C_1$ и $\theta_m^+(\gamma_0 \varepsilon_0 \gg 1) = C_2 > C_1$, при этом с ростом параметра γ_0 константа C_2 уменьшается.

Поскольку форма нелинейной волны (3.74) при распространении непрерывно изменяется, то изменяется и ее спектральный состав. Разложим периодическую волну (3.74) в ряд Фурье:

$$e(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \sin n[\theta - \psi(z)], \quad (3.79)$$

$$\text{где } e_n(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin e_m(z)} \sin \xi \cdot \left\{ \sin \left[n \left(\xi + \frac{2 \arccos e_m(z)}{(1+\mu)e_m(z)} \sin \xi \right) \right] \left(1 + \frac{2 \arccos e_m(z)}{(1+\mu)e_m(z)} \cos \xi \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \sin \left[n \left(\xi + \frac{2\mu \arccos e_m(z)}{(1+\mu)e_m(z)} \sin \xi \right) \right] \left(1 + \frac{2\mu \arccos e_m(z)}{(1+\mu)e_m(z)} \cos \xi \right) \right\} d\xi,$$

$$\psi(z) = \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + a e_m(z')}.$$

Из выражения (3.79) следует, что скорость распространения гармоник волны зависит от амплитуды $\varepsilon_m(z)$, однако все гармоники распространяются с одной и той же скоростью

$$C(z) = \frac{C_0}{1 + \alpha \varepsilon_m(z) / [2(1 + \gamma_0 \varepsilon_m(z))]}, \text{ и, следовательно, среда с неупругим гистерезисом (3.71)}$$

не обладает нелинейной дисперсией (в отличие от среды с гистерезисом упругим [16,17]).

При $z \ll 1$ форма волны $e(z, \theta)$ близка к исходной – гармонической и из выражений (3.79) получаем:

$$e(z, \theta) = \left(1 - \frac{2(1 + \mu)z}{3\pi\sqrt{1+a}}\right) \sin[\theta - \psi(z)] - \frac{(1 - \mu)z}{4\sqrt{1+a}} \sin 2[\theta - \psi(z)] + \\ + \frac{2(1 + \mu)z}{\pi\sqrt{1+a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+3)} \sin(2n+1)[\theta - \psi(z)], \quad (3.80)$$

где $\psi(z) = \lambda z / (1 + a)$.

На малых расстояниях спектр волны, кроме основной частоты, содержит четную вторую гармонику и все нечетные гармоники, причем для амплитуд ε_n выполняются соотношения: $\varepsilon_2, \varepsilon_{2n+1} \propto \varepsilon_0^2 kx$ - при $a \ll 1$, и $\varepsilon_2, \varepsilon_{2n+1} \propto \varepsilon_0 kx$ - при $a \gg 1$.

При $e_m(z) \ll 1/a$, $z \gg [\pi a / (1 + \mu)] |\ln e_m(z)|$ из выражения (3.74) получаем:

$$e(z, \theta) = \frac{1}{z} \cdot \begin{cases} \theta - \psi(z), & e_\theta(z, \theta) > 0; \\ \mu^{-1}[\pi - \theta + \psi(z)], & e_\theta(z, \theta) < 0, \end{cases} \quad (3.81)$$

$$e(z, \theta) = \frac{2(1 + \mu)^2 e_m(z)}{\pi^2 \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{1 + \mu}\right) \sin n[\theta - \psi(z)], \quad e_m(z) = \frac{\pi}{(1 + \mu)z}, \quad (3.82)$$

$$\text{где, } \psi(z) = \frac{\lambda}{1 + \mu} \left[\pi - 2S(1) + \pi \ln\left(\frac{(1 + \mu)z}{\pi}\right) \right], \quad \theta_m^\pm(z) = \psi(z) \pm \frac{\pi}{1 + \mu}.$$

Здесь спектр волны содержит как четные, так и нечетные гармоники, а для амплитуд ε_n выполняется соотношение: $\varepsilon_n \propto \varepsilon_0 / kx$.

На Рис.3.26 приведены зависимости амплитуд первых пяти гармоник $e_n(z)$ от расстояния z ($\varepsilon_0 = 10^{-4}$) при $\mu = 0.5$. С ростом z амплитуда $e_1(z)$ первой гармоники монотонно уменьшается (из-за гистерезисных потерь и генерации высших гармоник). Амплитуды $e_{n \geq 2}(z)$ высших гармоник вначале растут от нуля, достигают максимумов, а затем затухают, при этом амплитуда $e_5(z)$ пятой гармоники затухает немонотонно, $e_5(z \cong 3.9) = 0$. Соответственно ведут себя и зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z) = \varepsilon_0 e_n(z)$ от ε_0 при $y = const$ (Рис.3.31). Видно, что при увеличении ε_0 амплитуды $\varepsilon_n(z)$ - растут, причем, в начале, $\varepsilon_1(z) \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3,5}(z) \propto \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_4(z) \propto \varepsilon_0^3$, а в конце, из-за насыщения нелинейных потерь, - $\varepsilon_n(z) \propto \varepsilon_0$, при этом амплитуда пятой гармоники испытывает

биение и при $\varepsilon_0^* \cong 6.3 \cdot 10^{-6}$ фактически уменьшается до нуля. Последнее связано с резонансными взаимодействиями бесконечно большого числа кратных гармоник, составляющих непрерывно изменяющуюся периодическую волну (3.74): форма волны изменяется, поэтому соотношения между амплитудами ее гармоник также изменяются. Таким образом, на основе анализа точного решения задачи о распространении и эволюции первоначально гармонической волны в среде с неупругим гистерезисом и с насыщением нелинейных потерь, определены основные закономерности для характеристик нелинейной волны в такой среде. Экспериментальное выявление подобных закономерностей для конкретной среды и их сравнение с теоретическими - для сред с различными гистерезисами (упругим и неупругим), будет способствовать правильному выбору гистерезисного уравнения состояния этой среды.

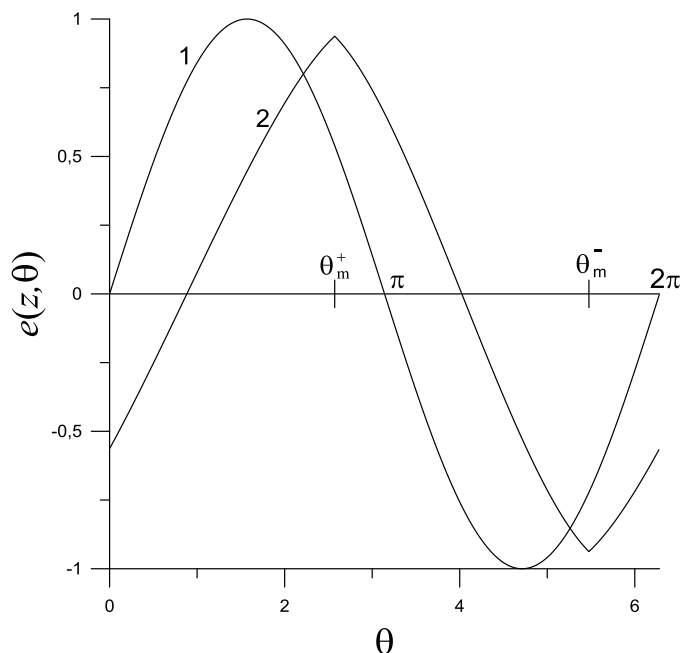


Рис.3.23. Форма одного периода волны $e = e(z, \theta)$ при $\mu = 0.5$, $\lambda = 1.5$, $a = 1$, $z = 0 - 1$ и $z = 1 - 2$.

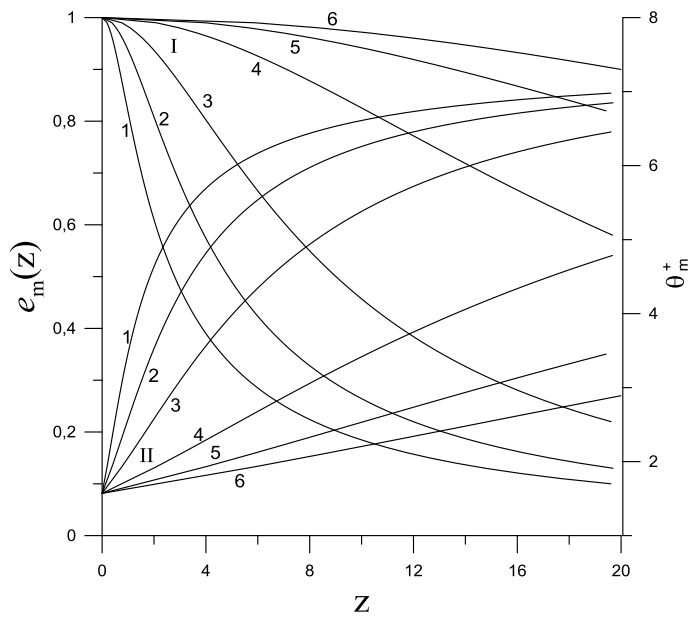


Рис.3.24. Зависимость амплитуды $e_m(z)$ (I) и фазы $\theta_m^+(z)$ (II) от z при $\mu=0.5$, $\lambda=1.5$ и различных значениях a : $a=0$ - 1, $a=1$ - 2, $a=3$ - 3, $a=10$ - 4, $a=20$ - 5, $a=30$ - 6.

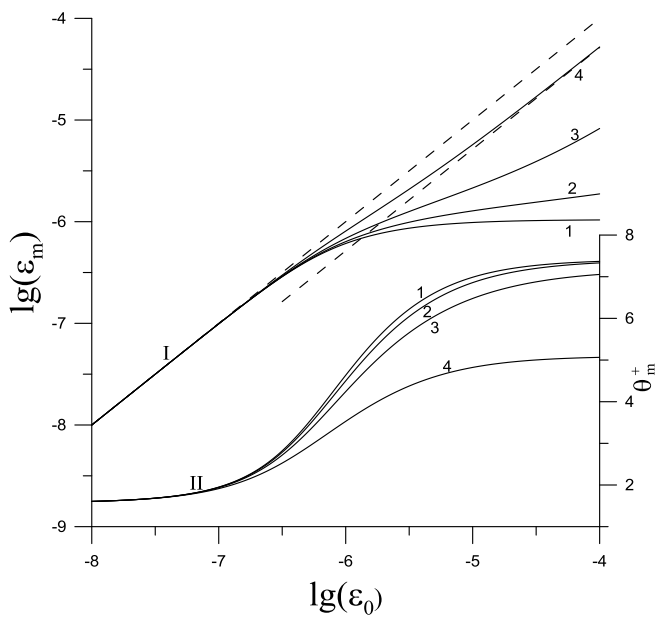


Рис.3.25. Зависимости амплитуды $\epsilon_m(z)$ (I) и фазы $\theta_m^+(z)$ (II) от ϵ_0 при $\mu=0.5$, $\lambda=1.5$, $y=2 \cdot 10^6$ и различных значениях параметра γ_0 : $\gamma_0=0$ - 1, $\gamma_0=10^5$ - 2, $\gamma_0=3 \cdot 10^5$ - 3, $\gamma_0=10^6$ - 4. Пунктирные линии соответствуют зависимости $\epsilon_m(z) \propto \epsilon_0$.

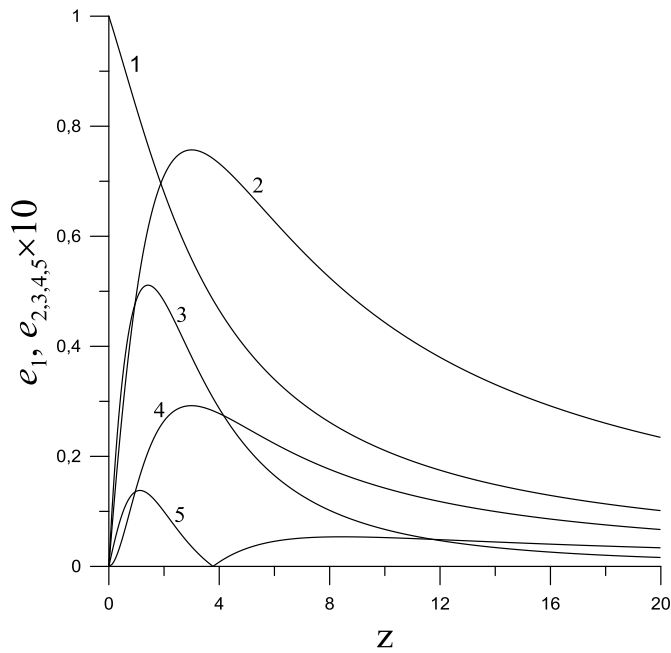


Рис.3.26. Зависимости амплитуд $e_n(z)$ первых пяти гармоник от z при $\mu = 0.5$, $\lambda = 1.5$, $a = 1$.

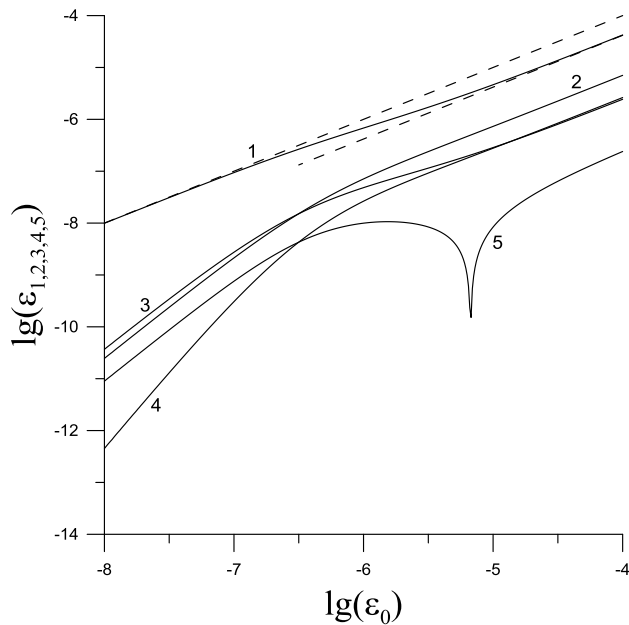


Рис.3.27. Зависимости амплитуд $\epsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от ϵ_0 при $\gamma_0 = 10^6$, $y = 2 \times 10^6$, $\mu = 0.5$, $\lambda = 1.5$. Пунктирные линии соответствуют зависимости $\epsilon_1(z) \propto \epsilon_0$.

3.5.3. АЗВТ и генерация высших гармоник в резонаторе с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

Здесь, также как в П.3.3, мы исследуем нелинейные волновые процессы в стержневом резонаторе с жесткой и мягкой границами и с неупругим гистерезисом (3.71). Опуская промежуточные вычисления, аналогичные изложенным в П.3.3, приведем конечные выражения для основных характеристик нелинейных колебаний резонатора:

резонансной кривой, амплитудно-зависимых потерь $\mu_{nl}(\varepsilon_m)$ и сдвига резонансной частоты $\delta_{nl}(\varepsilon_m)$, а также для амплитуд $V_2(L)$ и ε_3 второй и третьей гармоник при $\delta = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_m = \frac{A_0 \Omega_p / L}{\left[[\delta - \delta_{nl}(\varepsilon_m)]^2 + \frac{\Omega_p^2}{4} [\mu_p + \mu_{nl}(\varepsilon_m)]^2 \right]^{1/2}}, \quad (3.83)$$

$$\delta_{nl}(\varepsilon_m) = -a_1 \Omega_p \varepsilon_m R_1(a), \quad \mu_{nl}(\varepsilon_m) = b_1 \varepsilon_m R_1(a), \quad (3.84)$$

$$V_2(L) = a_2 \varepsilon_m^2 L R_2(a), \quad (3.85)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{4a_3 \Omega_p \varepsilon_m^2 R_3(a)}{15\pi \left[(\Omega_p / Q_{3p-1})^2 + 4[(\Delta\Omega_{3p-1}/3) + (1-q(a))\delta_{nl}(\varepsilon_m)]^2 \right]^{1/2}}, \quad (3.86)$$

где $\mu_p = Q_p^{-1} = \alpha \Omega_p / C_0^2$, $\Delta\Omega_{3p-1} = 3\Omega_p - \Omega_{3p-1}$ - дисперсионная расстройка частоты $3\Omega_p$ от резонансной частоты моды с номером $3p-1$, $a = \gamma_0 \varepsilon_m$, $a_1 = 4\beta/3\pi$,

$$b_1 = 16(\beta_1 + \beta_2)/9\pi^2, \quad a_2 = (\beta_1 - \beta_2)/32, \quad a_3 = 4(\beta_1 + \beta_2)/15\pi, \quad q(a) = \frac{27 R_4(a)}{35 R_1(a)},$$

$$R_1(a) = \frac{3}{2a} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\ln \left[a + \sqrt{a^2 - 1} \right]}{a^2 \sqrt{a^2 - 1}} \right),$$

$$R_2(a) = \frac{16}{\pi a} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{a^2} - \frac{\pi}{2a^3} + \frac{(2-a^2) \ln \left[a + \sqrt{a^2 - 1} \right]}{2a^3 \sqrt{a^2 - 1}} \right), \quad (3.87)$$

$$R_3(a) = \frac{15}{2a^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2a} - \frac{4}{a^2} + \frac{2\pi}{a^3} + \frac{(3a^2 - 4) \ln \left[a + \sqrt{a^2 - 1} \right]}{a^3 \sqrt{a^2 - 1}} \right),$$

$$R_4(a) = \frac{35\pi}{72a} \left(1 - \frac{32}{15\pi a} - \frac{8(3a^2 - 4)}{15\pi a} R_3(a) \right).$$

На Рис.3.28 приведены графики функций $R_{1-4}(a)$ и $q(a)$ от параметра $a = \gamma_0 \varepsilon_m$. Эти функции определяют отличия закономерностей нелинейных эффектов в резонаторе с насыщением гистерезисных потерь и без насыщения (при $\gamma_0 = 0$).

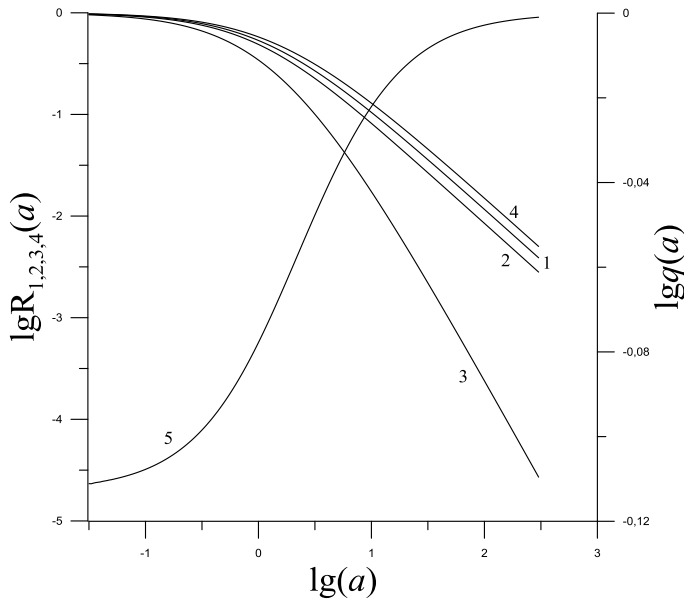


Рис.3.28. Зависимости функций $R_{1-4}(a)$ - (1-4) и $q(a)$ - 5 от параметра a .

Из-за нелинейности резонатора зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_{nl}(\varepsilon_m)$ является нелинейной, при этом максимальная амплитуда ε_m имеет место при резонансе, когда $\delta = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_m = \frac{2A_0 Q_p / L}{1 + \mu_{nl}(\varepsilon_m) / \mu_p}. \quad (3.88)$$

Из выражений (3.87) следует, что при $a \ll 1$ - $R_{1-4}(a) = 1$, $q(a) = 27/35$, а при $a \gg 1$ - $R_1(a) = 3\pi/8a$, $R_2(a) = 8/3\pi a$, $R_3(a) = 5/2a^2$, $R_4(a) = 35\pi/72a$, $q(a) = 1$. Из выражений (3.84) - (3.86) следует, что при $a \ll 1$ - $\delta_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, $\mu_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, $V_2(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m^2$, $\varepsilon_3(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m^2$, а при $a \gg 1$ - $\delta_{nl}(\varepsilon_m) \propto const$, $\mu_{nl}(\varepsilon_m) \propto const$, $V_2(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, $\varepsilon_3(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m^2 R_3(a) = const$. Здесь зависимости $\delta_{nl} = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$, $\mu_{nl} = \mu_{nl}(\varepsilon_m)$ и $V_2 = V_2(\varepsilon_m)$ такие же, как аналогичные характеристики нелинейной волны в безграничной среде. Интересно, однако, сравнить амплитудные зависимости для третьей гармоники. При $a \ll 1$ (и в безграничной среде и в резонаторе) - $\varepsilon_3(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m^2$. При $a \gg 1$ в безграничной среде - $\varepsilon_3(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, а в резонаторе - $\varepsilon_3(\varepsilon_m) = const$. Последнее связано с тем, что при $a \gg 1$ вынуждающая сила для колебаний в резонаторе на частоте третьей гармоники почти пропорциональна $\cos 3K_p x$, а собственной функцией резонатора является $\sin K_{3p-1} x = \sin 3K_p x$, т.е. для колебаний на частоте третьей гармоники правая часть уравнения (3.45) почти ортогональна собственной функции этого уравнения, поэтому

$$\varepsilon_3 = \frac{2a_3 \Omega_p}{3\pi\gamma_0^2 [(\Omega_p / Q_{3p-1})^2 + 4(\Delta\Omega_{3p-1}/3)^2]^{1/2}} = const.$$

Проведем сравнение полученных выше аналитических результатов с экспериментальными для резонатора из отоженной меди (Рис.3.17, Рис.3.18). Здесь, для резонатора с неупругим гистерезисом (3.71), мы получили такие же аналитические зависимости $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_1$, $|\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)|/F_1$ и ε_3 от ε_m , как и для резонатора с упругим гистерезисом (3.19). Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов определим значения параметров нелинейности неупругого гистерезиса (3.71). По нелинейным сдвигу резонансной частоты и потерям в мало-амплитудном режиме (до насыщения) находим: $a_1 \cong 3 \cdot 10^3$, $b_1 \cong 2,4 \cdot 10^3$, $\beta \cong 7,1 \cdot 10^3$, $\beta_1 + \beta_2 \cong 1,3 \cdot 10^4$. Значение коэффициента $\beta_1 + \beta_2$ можно независимо определить по амплитуде ε_3 третьей гармоники из выражения (3.86), при этом он оказывается равным $\beta_1 + \beta_2 \cong 8,7 \cdot 10^4$, что в 6,7 раз больше значения $\beta_1 + \beta_2 \cong 1,3 \cdot 10^4$, определенного по нелинейным потерям. Такое несоответствие, по-видимому, свидетельствует о том, что уравнение состояния отоженной меди не описывается неупругим гистерезисом (3.71). [Напомним, что результаты эксперимента с резонатором из отоженной меди непротиворечиво объяснились в рамках упругого гистерезиса (3.19).] Отмеченное несоответствие, однако, не означает, что уравнение состояния с неупругим гистерезисом (3.17) не соответствует и другим гистерезисным средам, многие из них могут описываться и неупругим гистерезисом. Если же не принимать во внимание третью гармонику, то эффекты АЗВТ и генерацию второй гармоники можно описывать как упругим, так и неупругим гистерезисами [48,60,64].

Определим теперь параметр γ_0 , отвечающий за насыщение нелинейных потерь для неупругого гистерезиса (3.71). Из выражения (3.88) следует, что в мало-амплитудном режиме и в режиме насыщения имеем, соответственно, следующие линейные зависимости $\varepsilon_{m,1}$ и $\varepsilon_{m,2}$ от A_0 :

$$\varepsilon_{m,1} = 2A_0Q_p/L, \quad \varepsilon_{m,2} = \frac{2A_0Q_p/L}{1 + 3\pi b_1Q_p/8\gamma_0}. \quad (3.89)$$

Из этих выражений находим: $\frac{b_1Q_p}{\gamma_0} = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{\varepsilon_{m,1}}{\varepsilon_{m,2}} - 1 \right)$. Из Рис.3.16 видно, что $\varepsilon_{m,1}/\varepsilon_{m,2} = 2,75$

и, следовательно, $\gamma_0 = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)Q_1}{3\pi[(\varepsilon_{m,1}/\varepsilon_{m,2}) - 1]} \cong 3,3 \cdot 10^5$.

3.6. Заключение.

В третьей главе приведены описание и результаты теоретических исследований нелинейных процессов в безграничных средах и в стержневых резонаторах с упругим и

неупругим гистерезисами, в том числе и с насыщением нелинейных потерь. Определены характеристики нелинейных волн в таких средах: амплитудно-зависимые декремент затухания и изменение скорости распространения волны и амплитуды высших гармоник первичной волны. Амплитудные зависимости нелинейных эффектов свидетельствуют о различной динамике волновых процессов в средах и в резонаторах с упругим и неупругим гистерезисами. Показано, что среды с упругим гистерезисом обладают нелинейной дисперсией (в отличие от сред с гистерезисом неупругим). Проведено сравнение результатов экспериментальных и теоретических исследований нелинейных эффектов АЗВТ в резонаторе из отоженной поликристаллической меди, где имеет место насыщение нелинейных потерь и определены эффективные параметры упругого и неупругого гистерезисов для этого металла. Их значения оказались достаточно высокими, что позволяет надеяться на возможность наблюдения эффектов насыщения нелинейных потерь в резонаторах и из других гистерезисных материалов даже при не очень больших амплитудах акустических волн. Обнаружено сильное (в 6,7 раз) количественное несоответствие эффективного параметра нелинейности для неупругого гистерезиса, определенного по нелинейным потерям и по амплитуде третьей гармоники. Это свидетельствует о том, что уравнение состояния отоженной меди не описывается неупругим гистерезисом (3.71), при этом результаты эксперимента с отоженной медью непротиворечиво объяснились в рамках упругого гистерезиса (3.19). Такое несоответствие, однако, не означает, что неупругий гистерезис вообще не пригоден для описания гистерезисных сред; некоторые из них могут описываться и неупругим гистерезисом. Если же не принимать во внимание третью гармонику, то эффекты АЗВТ и генерацию второй гармоники можно описывать как упругим гистерезисом, так и неупругим (конечно, с другими, эффективными параметрами нелинейности) [48,60,64].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ.

1. Получено уравнение состояния водоподобного материала, содержащего систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью. Показано, что такая среда обладает сильной (релаксационной упругой и неупругой) акустической нелинейностью, обусловленной нелинейной зависимостью капиллярного и вязкого давлений в жидкости от диаметра капилляра. Проведено теоретическое исследование нелинейных эффектов в такой среде: генерации второй гармоники и волны разностной частоты, самодемодуляции высокочастотных импульсов, изменения скорости распространения и коэффициента поглощения пробной волны под действием статической нагрузки. Определены частотные зависимости эффективных параметров квадратичной нелинейности среды для этих эффектов.
2. Получены точные решения для самоподобных (не меняющих своей формы при распространении) импульсных и периодических продольных волн в диссипативных и релаксирующих средах с разномодульной нелинейностью. Показано, что в микронеоднородной разномодульной среде, характеризующейся дисперсией нелинейности, профили таких волн не содержат неоднозначностей, в то время как в однородной среде с безынерционной нелинейностью и релаксацией распространение волн (достаточно высоких частот) может сопровождаться образованием неоднозначности их профиля. Результаты численного моделирования распространения первоначально гармонических волн показывают, что их эволюция в таких средах приводит к образованию самоподобных волн.
3. Получены точные решения, описывающие эволюцию пилообразных волн и их спектральных характеристик в недиспергирующих средах с квадратичной упругой и гистерезисной нелинейностью. Показано, что, в отличие от сред с квадратичной нелинейностью и неупругим гистерезисом, среды с упругим гистерезисом обладают нелинейной дисперсией фазовой скорости.
4. На основе анализа результатов экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения предложены модифицированные гистерезисные уравнения состояния, учитывающие насыщение нелинейных потерь в поликристаллических твердых телах. Получены точные решения, описывающие распространение однополярных импульсных возмущений и периодических волн в таких средах. Определены нелинейные декремент затухания и скорость распространения волны на основной частоте, а также закономерности для амплитуд и фазовых скоростей ее высших гармоник.

5. Получены выражения для нелинейных потерь, сдвига резонансной частоты и амплитуд колебаний на частотах второй и третьей гармоник для стержневого резонатора с упругим и неупругим гистерезисами с насыщением гистерезисных потерь. Из сравнения результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных эффектов в резонаторе из отожженной поликристаллической меди определены параметры гистерезисной нелинейности этого металла. Показано, что упругий гистерезис адекватно описывает эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерацию третьей гармоники в резонаторе из отожженной меди, а описание этих же эффектов в рамках неупругого гистерезиса приводит к количественному несоответствию с амплитудой третьей гармоники, генерируемой в резонаторе.

Литература

- 1 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1983. 248 с.
- 2 Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М: Наука, 1966. 520 с.
- 3 Guyer R.A., Johnson P.A. Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class materials//Physics Today, 1999, №4, p.30-36.
- 4 Исакович М.А. Л.И.Мандельштам и распространение звука в микронеоднородных средах//УФН, 1979, Т.129, №3, с.531-540.
- 5 Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики//УФН, 2006, Т.176, №1, с.77-95.
- 6 Назаров В.Е., Островский Л.А. Упругие волны в средах с сильной акустической нелинейностью//Акуст.журн., 1990, Т.36, №1, с.106-110.
- 7 Granato A., Lucke K. Theory of mechanical damping due to dislocations//J. Appl. Phys., 1956, V.27, №5, p.583-593.
- 8 Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 359 с.
- 9 Nazarov V.E., Zaitsev V.Yu., Beliaeva I.Yu. The equation of state of micro-inhomogeneous media and the frequency dependence of their elastic nonlinearity//Acoust. Lett., 1999, V.22, №12, p.236-241.
- 10 Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Нелинейные волновые процессы в пористых водоподобных средах, содержащих систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью//Акуст. журн., 2013, Т.59, №2, с.147-157.
11. Radostin A.V., Nazarov V.E., Kiyashko S.B. Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation//Wave Motion, 2013, V.50, №2, p.191-196.
12. Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В. Самоподобные акустические волны в средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией//Известия вузов. Радиофизика, 2015, Т.58, №2, с 134-141.
13. Назаров В.Е., Кияшко С.В., Радостин А.В. Эволюция акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией//Известия вузов. Радиофизика, 2015, Т.58, №10, с.811-820.
14. Назаров В.Е., Кияшко С.В., Радостин А.В. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией//Известия вузов. Радиофизика, 2016, Т.59, №3 (в печати)
15. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Пилообразные акустические волны в средах с гистерезисной нелинейностью//Известия вузов. Радиофизика, 2015, Т.58, №1, с.31-40.

16. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Акустические волны в средах с гистерезисной нелинейностью и линейной дисперсией//ЖТФ, 2014, Т.84, №3, с.1-7.
17. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Нелинейные акустические эффекты в резонаторе с насыщением гистерезисных потерь//ЖТФ, 2014, Т.84, №10, с.100-106.
18. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Распространение однополярных возмущений в гистерезисных средах с насыщением нелинейных потерь//Письма в ЖТФ, 2014, Т.40, Вып. 15, с.88-92.
19. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Волновые процессы в средах с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь//Известия вузов. Радиофизика, 2016, Т.59, №2 (в печати)
20. Назаров В.Е., Радостин А.В., Кияшко С.Б. Акустические волны в средах с гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией//Тр. 15-ой Научной конференции по радиофизике, Н.Новгород, 2011, ННГУ, с.225-227.
21. Назаров В.Е., Радостин А.В., Кияшко С.Б. Акустические волны в средах с разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией//Тр. 15-ой Научной конференции по радиофизике, Н.Новгород, 2011, ННГУ, с.227-229.
22. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Нелинейные волновые процессы в пористых водоподобных средах, содержащих систему капилляров, частично заполненных вязкой жидкостью//Тр. 16-ой Научной конференции по радиофизике, Н.Новгород, 2012, ННГУ, с.211-212.
23. Назаров В.Е., Радостин А.В., Кияшко С.Б. Акустические волны в средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией//Тр. 17-ой Научной конференции по радиофизике, Н.Новгород, 2013, ННГУ, с.238-240.
24. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Пилообразные акустические волны в средах с гистерезисной нелинейностью//Сб. тр. 1-ой Всероссийской акустической конференции, Москва, 2014, с.74-82.
25. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Распространение однополярных импульсов деформации в гистерезисных средах с насыщением нелинейных потерь//Тр. 18-ой Научной конференции по радиофизике. Н.Новгород, 2014: ННГУ. с.236-237.
26. Назаров В.Е., Кияшко С.Б. Пилообразные волны в средах с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь//Тр. 19-ой Научной конференции по радиофизике. Н.Новгород, 2015. ННГУ, с.228-230.
27. Островский Л.А. Нелинейные свойства упругой среды с цилиндрическими порами//Акуст. журн., 1989, Т.35, №3, с.490-494.
28. Нестеренко В.Ф. Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах//ПМТФ, 1983, №5, с.136-148.

29. Дунин С.З. Затухание волн конечной амплитуды в зернистой среде//Изв. АН СССР. Физика Земли, 1989, №5, с.106-109.
30. Островский Л.А. К нелинейной акустике слабосжимаемых пористых сред//Акуст. журн. 1988, Т.34, №5, с.908-913.
31. Назаров В.Е., Радостин А.В. Адгезионный механизм гистерезисной нелинейности трещиноватых сред//Физика Земли, 2003, №2, с.85-91.
32. Nazarov V.E. Acoustic nonlinearity of cracks partially filled with liquid: Cubic approximation//JASA, 2001, V.109, №6, p.2642-2648.
33. Назаров В.Е., Радостин А.В. Акустическая нелинейность водоподобного материала с капиллярами, частично заполненными жидкостью//Акуст. журн., 2008, Т.54, №4, с.535-539.
34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
35. Тютюкин В.В. Рассеяние плоских волн полостью в изотропной упругой среде//Акуст. журн., 1959, Т.5, №1, с.106-110.
36. Nazarov V.E., Zaitsev V.Yu., Beliaeva I.Yu. Nonlinear transformation of acoustic waves in microinhomogeneous media with relaxation//Acta Acustica. Acustica, 2002, V.88, №1, p.40-49.
37. Назаров В.Е., Радостин А.В. Эволюция акустических волн в микронеоднородных средах с квадратичной упругой нелинейностью и релаксацией//Акуст. журн., 2006, Т.52, №6, с.514-520.
38. Benson R.W., Raelson V.J. From ultrasonics to a new stress-analysis technique. Acousto-elasticity//Product. Egn., 1959, Vol.30, №29, p.56-59
39. Toupin R.A., Bernstein B. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acousto-elastic effect//JASA, 1961, Vol.33, p.216-225.
40. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
41. Кустов Л.М., Назаров В.Е., Сутин А.М. Нелинейное рассеяние звука на пузырьковом слое//Акуст. журн., 1986, Т.32, №6, с.804-810.
42. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука. 1975. 288 с.
43. Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами//Акуст. журн., 1996, Т.42, №3, с. 412-417.
44. Николаев А.В. Сейсмические свойства рыхлых сред//Изв. АН СССР, Физика Земли, 1979, №1, с.72-77.
45. Алешин А.С., Кузнецов В.В. О параметрах нелинейности грунтов//В кн.: Нелинейная сейсмология. Междунар. симп. Тез. докл. М.: Наука. 1986. с.4.

46. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды//ПМТФ, 1985, Т.49, №3, с.419-437.
47. Ostrovsky L.A. Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity//JASA, 1991, V.90, №6, p.3332-3337.
48. Назаров В.Е., Радостин А.В. Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах. Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2007, 256 с.
49. Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading//Journ. of Sound and Vibration, 2012, V.331, p.4464-4480.
50. Khachatryan A. Longitudinal vibrations of prismatic bars made of different-modulus materials//Mechanics of Solids, 1967, V2, №5, p.140-145.
51. Lucchesi M., Pagni A. Longitudinal oscillations of bimodular rods//International Journ. of Structural and Dynamics, 2005, V.5, №1, p.37-54.
52. Yang H., Wang B. An analysis of longitudinal vibration of bimodular rod via smoothing function approach//Journ. of sound and vibration, 2008, V.317, №1, p.419-431.
53. Kharenko D., Padovani C., Pagni A., Pasquinel G., Semin L. Free longitudinal vibrations of bimodular beams//International Journ. of Structural and Dynamics, 2011, V.11, №1, p.23-56.
54. Гусев В.А., Маков Ю.Н. Спектральное представление решения кубично-нелинейного уравнения простой волны Римана//Акуст. журн., 2010, Т.56, №5, с. 591-596.
55. Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные процессы в акустике. - М.: Наука. 1990. 240 с.
56. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. – М.: Физматлит, 2008. 496 с.
57. Fenlon F.N. A recursive procedure for computing the nonlinear spectral interaction of progressive finite-amplitude waves in nondispersive fluids//JASA, 1971, V.50, p.1299-1312.
58. Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M. Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media//Physics of the Earth and Planetary Interiors, 1988, V.50, N1, p.65-73.
59. Guyer R.A., Johnson P.A. Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of granular media including rocks and soil, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2009.
60. Nazarov V.E., Radostin A.V. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids, John Wiley and Sons, 2015, 251 p.
61. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
62. Asano S. Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis//J. Phys. Soc. Jap., 1970, V.29, N4, p.952-963.

63. Лебедев А.Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса//ФТТ, 1999, Т.41, №7, с.1214-1221.
64. Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А. Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть I//Акуст. журн., 2003, Т.49, №3, с.405-415.
65. Назаров В.Е. Распространение однополярного импульса в среде с гистерезисной нелинейностью//Акуст. журн., 1997, Т.43, №2, с.81-85.
66. Gusev V. Propagation of acoustic pulses in material with hysteretic nonlinearity//JASA, 2000, V.107, №6, p.3047-3058.
67. Назаров В.Е., Сутин А.М. Генерация гармоник в твердых нелинейных средах//Акуст. журн., 1989, Т.35, №4, с.711-716.
68. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях//ЖТФ, 1938, Т.8, Вып. 6, с.483-499.
69. Read T.A. The internal friction on single metal crystals//Phys. Rev., 1940, V.58, p.371-380.
70. Ультразвуковые методы исследования дислокаций//Сб. статей. Пер. с англ. и нем. под ред. Л.Г.Меркулова. М.: ИИЛ. 1963. 376 с.
71. Ниблетт Д., Уилкс Дж. Внутреннее трение в металлах, связанное с дислокациями //УФН, 1963, Т.80, №1, с.125-187.
72. Физическая акустика//Под ред. У.Мезона. Т.4, Ч.А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир, 1969. 436 с.
73. Физическая акустика//Под ред. У.Мезона. Т.3, Ч.А. Влияние дефектов на свойства твердых тел. М.: Мир, 1969. 578 с.
74. Лебедев А.Б. Внутреннее трение в процессе квазистатического деформирования кристаллов//ФТТ, 1993, Т.35, №9, с.2304-2340.
75. Koehler J.S. Imperfections in nearly perfect crystals. New York: John Wiley and Sons. 1952. p.197-216.
76. Novick A.S. Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature//Phys. Rev., 1950, V.80, №2, p.249-257.
77. Takahachi S. Internal friction and critical stress of copper alloys//J. Phys. Soc. Jap., 1956, V.11, №12, p.1253-1261.
78. Beshers D.N. Internal friction of copper and alloys//J.Appl.Phys., 1959, V.30, №2. p.252-258.
79. Swartz J.C., Weertman J. Modification of the Keler-Granato-Lucke dislocation damping theory//J. Appl. Phys., 1961, V.32, №10, p.1860-1865].

80. Gelli D. A Qualitative model for amplitude dependent dislocation damping//J. Appl. Phys., 1962, V.33, №4, p.1547-1550.
81. Назаров В.Е. Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность//ФММ, 1991, Т.37, №3, с.172-178.
82. Назаров В.Е. Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка//Акуст. журн. 2000, Т.46, №2, с.228-233.
83. Nazarov V.E. and Kolpakov A.B. Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc//JASA, 2000, V.107, №4, p.1915-1921.
84. Назаров В.Е. Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца//ФММ, 1999, Т.88, №4, с.82-90.
85. Samsonov A.M. Strain solution in solids and how to construct them. Chapman &Hall/CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2001.
86. Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Отражение солитона продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня//ЖТФ, 2001, Т.71, №5, с.1-8.
87. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
88. Назаров В.Е., Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин А.М. Аномальная акустическая нелинейность в металлах//Акуст. журн. 1988, Т.34, №3, с.491-499.
89. Голяндин С.Н., Кустов С.Б., Сапожников К.В., Емельянов Ю.А., Синапи А.Б., Никаноров С.П., Робинсон У.Х. Влияние температуры и деформации на амплитудно-зависимое внутреннее трение высокочистого алюминия//ФТТ, 1998, Т.40, №10, с.1839-1844.
90. Сапожников К.В., Голяндин С.Н., Кустов С.Б. Амплитудная зависимость внутреннего трения и дефекта модуля Юнга поликристаллического индия//ФТТ, 2010, Т.52, №1, с.43-47.
91. Сапожников К.В., Голяндин С.Н., Кустов С.Б. Температурная зависимость внутреннего трения поликристаллического индия//ФТТ, 2010, Т.52, №12, с.2341-2348.
92. Голяндин С.Н., Сапожников К.В., Кустов С.Б. Акустическое исследование процессов старения мартенситной фазы сплавов на основе меди с эффектом памяти формы//ФТТ, 2005, Т.47, №4, с.614-621.