

УДК 532.5

ЛАБОРАТОРНОЕ, ЧИСЛЕННОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ДАЛЬНОМ СЛЕДЕ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2006 г. О. А. Дружинин, В. В. Папко, Д. А. Сергеев, Ю. И. Троицкая

*Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail" yulia@Rydro.applsci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 13.12.2005 г., после доработки 13.03.2006 г.

Проводится лабораторный эксперимент с использованием метода Particle Image Velocimetry, численное и теоретическое моделирование течения в дальнем следе за сферой, буксируемой при больших числах Рейнольдса и Фруда в жидкости с солевой стратификацией плотности в виде пикноклина. Рассматривается конфигурация, где ось протяжки находится под пикноклином. Параметры течения, профили плотности и средней скорости и исходное поле флуктуаций скорости в численном моделировании задаются на основе данных лабораторного эксперимента. Получены распределения поля скорости жидкости в различные моменты времени и зависимости от времени интегральных параметров течения в следе, таких как средняя скорость на оси и поперечная ширина следа. Результаты численного моделирования находятся в хорошем качественном и количественном согласии с данными лабораторного эксперимента. Проведено сравнение результатов лабораторного эксперимента и численного моделирования с предсказаниями квазилинейной квазидвумерной теоретической модели. Временная эволюция средней скорости на оси и поперечной ширины следа, полученная в рамках модели, хорошо согласуется с экспериментальными данными. Результаты численного моделирования показывают также, что под действием флуктуаций скорости в следе происходит эффективное возбуждение внутренних волн в пикноклине, пространственный период которых совпадает с характерным периодом вихревой структуры следа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Течение в следе за сферой, буксируемой в стратифицированной жидкости при больших числах Рейнольдса и Фруда, привлекает большой интерес исследователей и изучалось как теоретически, так и экспериментально [1–10]. Результаты этих исследований показывают, что в области дальнего следа, т.е. на расстоянии, много большем диаметра сферы, течение представляет собой цилиндрическую турбулентную струю, средняя горизонтальная скорость которой сонаправлена со скоростью тела. Экспериментальные исследования показывают также, что поле обтекания вблизи сферы и внутренние волны, излучаемые сферой при больших числах Фруда, не оказывают влияния на дальний след. Известно, что в области дальнего следа скорость жидкости значительно меньше (порядка нескольких процентов) скорости сферы, и числа Рейнольдса и Фруда течения в дальнем следе значительно меньше чисел Рейнольдса и Фруда сферы, $Re = UD/\nu$ и $Fr = 2U/ND$, (где U и D – скорость и диаметр сферы, ν – кинематическая вязкость жидкости, N – характерное значение частоты плавучести).

Как правило, условия эксперимента таковы, что изменением средней скорости вдоль горизонталь-

ной оси течения в рассматриваемой области можно пренебречь и рассматривать его как периодическое по горизонтальной координате x . Основными измеряемыми характеристиками при этом являются зависимости от времени максимума средней скорости U_m и поперечной (по координате y) и вертикальной (по z) ширины следа $L_{y,z}$ [3–10]. Результаты этих исследований показывают, что в зависимости $U_m(t)$ можно выделить три временных интервала. На достаточно малых временах (при $Nt < 1$) влияние стратификации мало и скорость спадает как в нестратифицированном трехмерном следе, $U_m \sim t^{-2/3}$. Далее наступает переходная стадия (так называемый “Non-equilibrium” или NEQ режим [6]) при $Nt = O(10)$, когда происходит коллапс вертикальных пульсаций скорости в следе под действием сил плавучести. При этом скорость спадает медленнее, чем в нестратифицированном случае, $U_m \sim t^{-0.25}$. На достаточно больших временах $Nt = O(100)$ поле течения в следе можно рассматривать как квазидвумерное, т.е. происходящее в горизонтальных (x, y)-плоскостях, так как вертикальная компонента скорости жидкости пренебрежимо мала по сравнению с горизонтальной компонентой. На этой стадии скорость спадает быстрее, чем в нестратифицированном следе как $U_m \sim t^{-0.76}$.

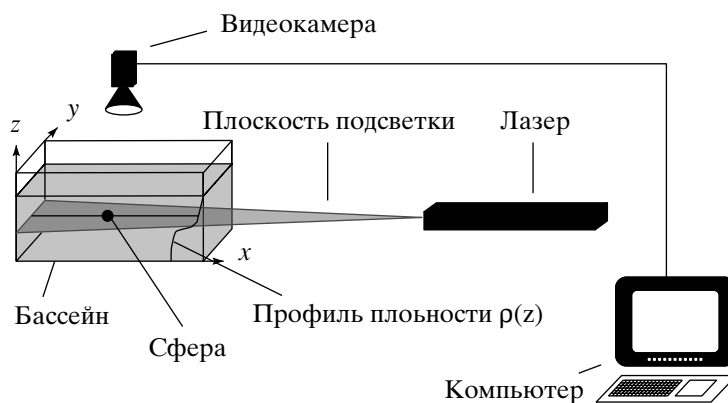


Рис. 1. Схема лабораторного эксперимента.

Результаты [3–10] показывают, что по мере трансформации течения в следе под действием сил плавучести формируется квазидвумерная вихревая структура, которая напоминает дорожку Кармана и состоит из крупномасштабных вихрей, вертикальный масштаб которых много меньше горизонтального, располагающихся в шахматном порядке в окрестности оси следа.

В работах [11, 12] исследовалась структура линий тока течения в следе и было высказано предположение о том, что динамика параметров следа определяется развитием гидродинамической неустойчивости квазидвумерной струи. На основе этой гипотезы в работе [12] была предложена теоретическая модель течения в следе на достаточно больших временах. В рамках этой модели дальний след в стратифицированной жидкости рассматривается как квазидвумерное струйное течение, динамика которого определяется развитием гидродинамической неустойчивости. Результаты модели хорошо согласуются с экспериментальными данными [5–10].

В последнее время проводилось также прямое численное моделирование течения в области дальнего следа в жидкости с постоянной частотой плавучести [13] и со стратификацией в виде пикноклина [14]. При этом исходное поле скорости в следе задавалось в виде суммы двух компонент – средней скорости и флуктуаций. Профиль средней скорости задавался в виде гауссовой функции согласно экспериментальным данным. Поле флуктуаций задавалось в виде совокупности независимых случайных Фурье-гармоник со спектром мощности, имеющим максимум в окрестности волнового числа, соответствующего наиболее неустойчивой моде, и экспоненциально спадающего в области больших волновых чисел. Результаты этих исследований находятся в хорошем качественном согласии с известными экспериментальными данными и дают детальную картину течения не только в горизонтальной, но и вертикальной плоскостях

включая внутренние волны, возбуждаемые струей. Необходимо отметить, что в вышеуказанных работах [13, 14] исходные параметры течения не были привязаны к спектру флуктуаций скорости в дальнем следе в лабораторном эксперименте.

Целью данной работы является лабораторное исследование и численное и теоретическое моделирование течения в дальнем следе за сферой, буксируемой в жидкости со стратификацией плотности в виде пикноклина при больших числах Рейнольдса и Фруда. При этом рассматривается конфигурация течения, где ось протяжки сферы находится в области под пикноклином. Такая конфигурация не изучалась в выше упомянутых работах. В данной работе измерения скорости в следе за сферой проводятся с помощью метода Particle Image Velocimetry (PIV). Параметры течения в численном моделировании соответствуют параметрам течения в области дальнего следа в лабораторном эксперименте. При этом в отличие от предыдущих исследований [13, 14], исходные профили средней скорости и плотности и спектр флуктуаций скорости задаются на основе экспериментальных данных. Таким образом, соответствие параметров и начальных условий в численном моделировании с лабораторными данными позволяет провести не только качественное, но и количественное сравнение с экспериментом. Проводится также сравнение экспериментальных и численных результатов с предсказаниями квазилинейной модели [11, 12].

2. МЕТОДИКА И ПАРАМЕТРЫ ЛАБОРАТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Основой установки является бассейн с размерами $(3 \times 2 \times 0.5 \text{ м})$, оборудованный тросовой системой буксировки тел с различными скоростями, сканирующим датчиком измерения плотности (электропроводности), а также системой для PIV и PTV (Particle Tracing Velocimetry) измерений. PIV

методы используют интегральные способы анализа изображения и позволяют получать значение скорости в любой точке пространства в отличие от PTV, которые могут определить скорость только в точке нахождения частицы (трассера). Подробно методы и математические алгоритмы обработки, используемые для PIV методов, описаны в [11, 15].

В бассейне создавалась солевая стратификация пикноклинового типа с профилем плотности, показанным на рис. 2. Исследовалось двумерное поле скорости течения, создаваемого телом на горизонте протяжки под пикноклином (штриховая линия на рис. 2). Частота плавучести

$$N = \left(-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

на горизонте протяжки (при $z = -21$ см) равнялась 0.5 рад/с.

В качестве трассеров использовались частицы полистирола размером 0.8 мм нейтральной плавучести (плотность 1.04 г/см³) белого цвета. Частицы перед экспериментом были откалиброваны по плотности с точностью до 0.07%. Таким образом, разброс их расстояний от горизонта протяжки не превышал 1.5 см. Подсветка в горизонтальной плоскости на уровне протяжки создавалась с помощью специально изготовленной системы, состоящей из твердотельного лазера видимого диапазона (LCS-DTL-316 с длиной волны непрерывного излучения $\lambda = 532$ нм и мощностью 200 мВт), короткофокусной цилиндрической линзы и юстировочной системы управления лазером. Толщина слоя подсветки составляла в среднем 5 мм. Движение частиц в плоскости подсветки снимались сверху на видеокамеру Panasonic NV-MX500EN.

Область наблюдения имела размеры 47 см в продольном (x) и 37 см в поперечном (y) направлениях. Конечные размеры области наблюдения накладывают ограничение на длительность измерений, т.к. по мере уширения следа в поперечном направлении границы следа приближаются к границам области наблюдения. В этом случае корректное определение параметров следа затруднительно. Поэтому время наблюдения в данном эксперименте ограничивалось $t = 80$ с. Буксировка сферы диаметром 3.8 см осуществлялась с постоянной скоростью 70 см/с. Соответствующие числа Рейнольдса и Фруда сферы равны 13300 и 75. Используемая концентрация частиц позволяла получать значения поля скорости на сетке, состоящей из 720 узлов. Размер окна усреднения, по которому определялась скорость, равнялся 1.5×1.5 см². Время отсчитывалось от момента прохода сферы через левую границу области наблюдения.

Интегральные параметры течения в следе в заданный момент времени t вычислялись следующим образом [6–8]. Сначала вычислялся попе-

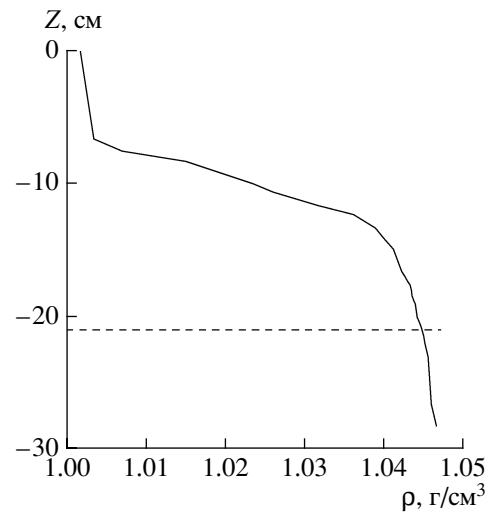


Рис. 2. Исходный профиль плотности в эксперименте.

речный профиль средней горизонтальной компоненты скорости $\langle U_x \rangle$ с помощью осреднения по горизонтальной координате x в виде

$$\langle U_x \rangle(y) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} U_x(x, y) dx, \quad (2.2)$$

где $L_x = 43$ см — горизонтальный размер области осреднения. Затем профиль $U(y)$ аппроксимировался гауссовой функцией в виде:

$$U(y) = U_m \exp\left(-\left(\frac{(y - y_0)}{l_y}\right)^2\right), \quad (2.3)$$

где параметры U_m и L_y — скорости на оси следа и поперечная ширина следа в данный момент времени.

Поскольку одной из основных целей настоящей работы является проведение сравнения между экспериментальными данными и прогнозами прямого численного моделирования, начальные условия в численном моделировании должны соответствовать параметрам течения в эксперименте. В связи с тем, что в численном моделировании в начальный момент времени задается течение в виде трехмерной турбулентной струи с цилиндрическим профилем скорости, данные, получаемые из эксперимента, должны соответствовать области следа, где эффекты стратификации незначительны.

Параметры течения в следе в момент времени $t = 0.6$ с использовались в качестве начальных условий в прямом численном моделировании. На рис. 3 показаны профили средней горизонтальной и компоненты скорости и флуктуаций. Для того чтобы определить, насколько значителен эффект сил плавучести на динамику течения в следе в этот момент времени, по данным экспери-

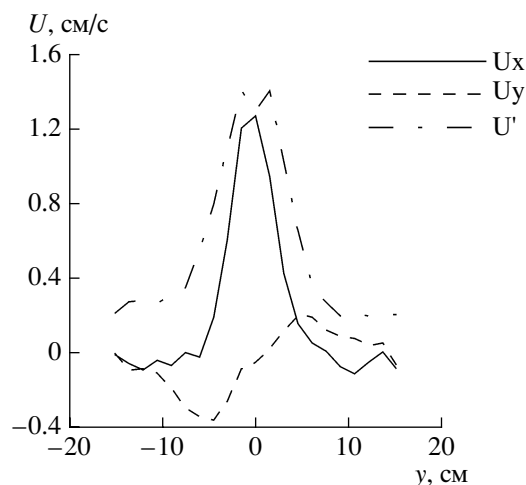


Рис. 3. Профили горизонтальной и поперечной компонент средней скорости и флуктуаций в плоскости протяжки эксперименте в момент времени $t = 0.6$.

мента вычислялся также профиль средней поперечной компоненты скорости в виде $U_y(y) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} U_y(x, y) dx$ (штриховая линия на рис. 3).

Рисунок показывает, что в рассматриваемый момент времени в горизонтальной плоскости на уровне протяжки имеется ненулевая компонента поперечной скорости, положительная при $y > 0$ и отрицательная при $y < 0$. Такое поведение $U_y(y)$ говорит о том, что в плоскости протяжки жидкость в среднем движется от оси струи. Можно предположить, что такой характер течения обусловлен коллапсом перемешанной, трехмерной области следа. Известно, что на первой стадии коллапса [16] среднюю поперечную скорость жидкости можно оценить как $L_y N^2 T$, где L_y – поперечный масштаб перемешанной области. Поскольку на горизонте струи $N \approx 0.5$ рад/с, и ширина струи $L_y \approx 4$ см, получаем оценку для скорости 0.5 см/с. Эта оценка неплохо согласуется с экспериментальными данными на рис. 3, из которого видно, что максимум скорости $U_y \approx 0.35$ см/с. Соответственно можно оценить сплющивание следа под действием сил плавучести как $U_y t / L_y \sim N^2 t^2 \approx 0.03$, т.е. порядка 3%. Приведенная оценка показывает, что в рассматриваемый момент времени $t = 0.6$ с влияние сил плавучести на динамику течения и поле флуктуаций скорости незначительно.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Для того чтобы проводить численное моделирование в безразмерных переменных, пространственные координаты и скорость нормируются на масштабы длины и скорости, $L_0 = 3.8$ см и $U_0 =$

$= 1.27$ см/сек. Соответствующий масштаб времени равен $T_0 = L_0 / U_0 = 3$ с. Эти масштабы определяются диаметром сферы и средней скоростью на оси следа в эксперименте. Рассматривается струйное течение с исходным профилем средней горизонтальной компонентой скорости в виде:

$$U_{ref} = -\exp(-4[y^2 + (z + 1.3)^3]), \quad (3.1)$$

где y и z – поперечная и вертикальная координаты соответственно. Значение координаты $z = -1.3$ в безразмерных переменных соответствует вертикальному положению центра струи в лабораторном эксперименте (-21 см). Поскольку профиль средней скорости в лабораторном эксперименте в момент времени 0.6 с хорошо описываются к гауссовой функции, исходный профиль (3.1) является хорошей аппроксимацией данных эксперимента. Исходный профиль средней плотности, задаваемый в численном моделировании, аналогичен профилю на рис. 2 в лабораторном эксперименте. В безразмерных переменных центр пикноклина располагается на горизонте $z = 1.3$, где безразмерное значение частоты плавучести равно $N = 3.9$.

Поле скорости жидкости в начальный момент времени задается в виде суммы исходной средней скорости U_{ref} (3.1) и флуктуаций. Поле флуктуаций задается в виде суммы независимых Фурье-гармоник с изотропным спектром мощности в виде $E(k) = E_0(k/k_p) \exp(-k/k_p)$, где k – модуль волнового числа и $k_p = 2$ – волновое число, соответствующее максимуму $E(k)$ в начальный момент времени. Параметры E_0 и k_p – задаются согласно спектру флуктуаций скорости в момент времени $t = 0.2$ (или 0.6 с в размерных единицах) в лабораторном эксперименте (рис. 4). Начальное распределение флуктуаций скорости задается пропорциональным исходному профилю (3.1), что также соответствует данным эксперимента (рис. 3).

Уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска и условие несжимаемости жидкости записываются в безразмерных переменных в виде:

$$\begin{aligned} \partial_t U_i + U_j \partial_j U_i + U_{ref} \partial_x U_i + \\ + \delta_{ix} (U_y \partial_y U_{ref} + U_z \partial_z U_{ref}) = \\ = -\partial_i P + \frac{1}{\text{Re}} \partial^2 U_i + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \delta_{ix} (\partial_{yy}^2 U_{ref} + \partial_{zz}^2 U_{ref}) - \delta_{iz} \text{Ri} \rho', \\ \partial_j U_j = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнение для плотности жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho' + U_j \partial_j \rho' + U_{ref} \partial_x \rho' + U_z \frac{d\rho_{ref}}{dz} = \\ = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\partial^2 \rho' + \frac{d^2 \rho_{ref}}{dz^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.5)–(3.7) $U_i (i = x, y, z)$ и ρ' – отклонения скорости и плотности жидкости от исходных профилей U_{ref} и ρ_{ref} . Отклонение плотности нормировано на относительный скачок плотности жидкости в пикноклине в эксперименте, $\Delta\rho_0 = 0.0464$ (рис. 3). Таким образом, полные скорость и плотность равны $[U_{ref}(y, z) + U_i]$ и $(\rho_{ref} + \Delta\rho_0 \rho')$ соответственно. Число Рейнольдса и глобальное число Ричардсона рассматриваемого течения определяются в виде

$$\text{Re} = \frac{U_0 L_0}{\nu} \quad (3.5)$$

и

$$\text{Ri} = \frac{g \Delta\rho_0 L_0}{\rho_0 U_0^2}, \quad (3.6)$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости и g – ускорение гравитации. Число Фруда течения равно $\text{Fr} = \text{Ri}^{-1/2}$. В численном моделировании число Рейнольдса задается достаточно большим ($\text{Re} = 400$), таким что эффектами вязкой диффузии исходных профилей U_{ref} и ρ_{ref} можно пренебречь. Это значение также близко к числу $\text{Re} = 480$ в эксперименте в рассматриваемый момент времени $t = 0.2$. Число Прандтля Pr полагается равным единице, что оправдано в рассматриваемом случае турбулентного струйного течения.

Глобальное число Ричардсона полагается равным $\text{Ri} = 15$. Нужно отметить, что это значение меньше экспериментального значения ($\text{Ri} \approx 100$). Выбор параметра Ri в численном моделировании ограничен разрешением больших градиентов плотности и скорости, возникающих в процессе счета, и устойчивостью схемы. Однако, как показывают результаты предыдущих исследований [14], при $\text{Ri} \gg 1$ выбор значения числа Ричардсона мало влияет на динамику течения на достаточно больших временах ($Nt > 1$, где $N \sim \sqrt{\text{Ri}}$).

Для того чтобы производить вычисления в области, ограниченной по вертикальной координате (z) и обеспечивать необходимое разрешение поля течения, используется отображение по z в виде [14]:

$$\xi = \text{th} \frac{z}{9}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) находим:

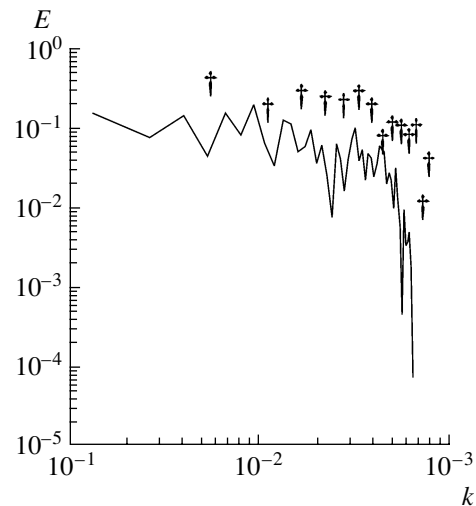


Рис. 4. Спектры кинетической энергии жидкости в плоскости протяжки ($z = 0$) в численном моделировании в начальный момент времени и в лабораторном эксперименте при $t = 0.2$ (символы).

$$z = 4.5 \ln \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right), \quad (3.8)$$

так что $-1 \leq \xi \leq 1$ при $-\infty < z < \infty$. Производные по z в уравнениях (3.2)–(3.4) записываются в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{1 - \xi^2}{9} \right) \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.9)$$

Уравнения (3.2)–(3.4) дискретизируются в прямоугольной области с размерами $0 \leq x \leq 48, -12 \leq y \leq 12$ и $-1 \leq \xi \leq 1$ с помощью метода конечных разностей второго порядка точности на однородной “шахматной” сетке, состоящей из $640 \times 320 \times 240$ узлов в x, y и $\zeta(z)$ направлениях соответственно [17, 18]. Слагаемые в левой части уравнений (3.2) и (3.4) $U_{ref} \partial_z U_i$ и $U_{ref} \partial_x \rho$, ответственные за адвекцию полей скорости $U_{ref}(y, z)$, вычисляются с помощью Фурье-интерполяции по координате x . Интегрирование осуществляется с использованием метода Адамса–Башфорфта [18] с шагом по времени $\Delta t = 0.0075$. Предполагается, что течение является x -периодическим. Это предположение не влияет на сравнение с экспериментом и обосновано тем, что в рассматриваемом случае вариациями статистических характеристик средних полей и флуктуаций по оси x можно пренебречь. В поперечном (y) и вертикальном (z) направлениях (при $y = \pm 12$ и $\xi = \pm 1$) ставятся условия (Неймана) нулевого сдвига. Такая постановка задачи также соответствует лабораторным условиям, где поля быстро спадают с расстоянием от оси следа. Используется метод расщепления [17, 18], и уравнение Пуассона для давления решается с помощью FFT преобразования Фурье по координате x , косинус-преобразова-

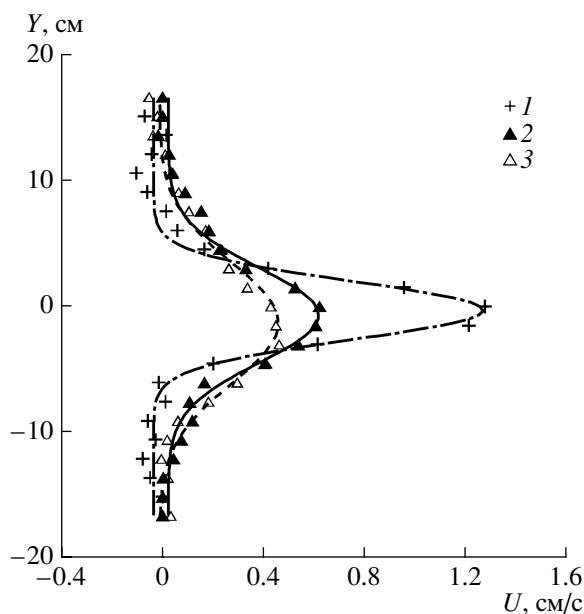


Рис. 5. Поперечные профили средней горизонтальной скорости в эксперименте в моменты времени $t = 0.2$ (1), 2.63 (2), и 6 (3). Сплошные кривые соответствуют аппроксимации гауссовой функцией (2.3).

ния по координате y , и метода Гаусса по координате z .

Для того чтобы сравнивать результаты численного счета с данными лабораторного эксперимента, вычислялись зависимости от времени таких интегральных параметров течения, как максимум средней горизонтальной скорости

$$U_m(t) = \max\{\langle U_x \rangle\}$$

и масштабы длины в поперечном и вертикальном направлениях

$$\begin{aligned} L_y(t) &= \frac{1}{U_m} \int \langle U_x \rangle(y, z = -1.3, t) dy, \\ L_z(t) &= \frac{1}{U_m} \int \langle U_x \rangle(y = 0, z, t) dz, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где угловые скобки означают усреднение по координате x в рассматриваемой области счета. Поле флуктуаций вычисляется как среднеквадратичное отклонение от среднего поля.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 5 представлены профили средней горизонтальной компоненты скорости $\langle U_x \rangle(y)$, полученные в эксперименте в различные моменты времени в плоскости на горизонте протяжки сферы. Рисунок показывает, что профили скорости хорошо аппроксимируются гауссовой функцией (2.3) (сплошная и штриховые линии), что согласуется с результатами предыдущих исследований [6–9].

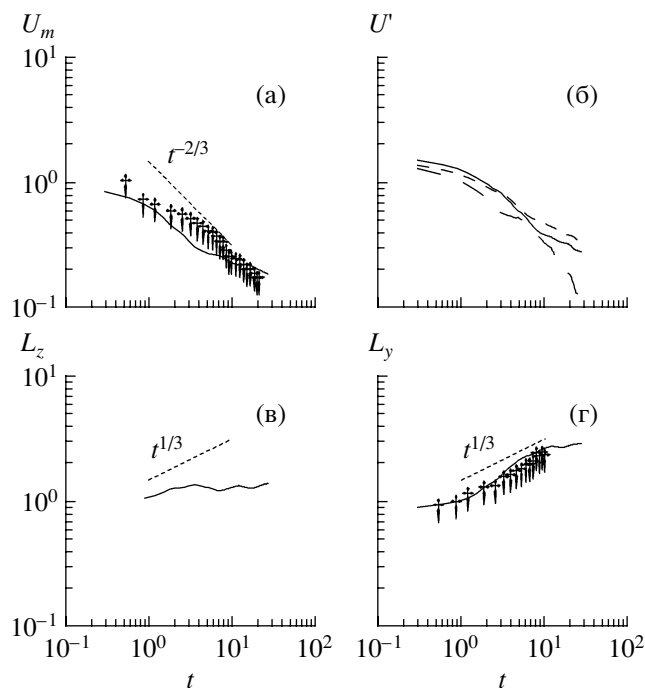


Рис. 6. Зависимости от времени (а) максимума средней скорости и (б) ее флуктуаций, (в) вертикального и (г) поперечного масштабов длины. Символы соответствуют экспериментальным данным.

На рис. 6 представлены зависимости от времени максимума горизонтальной компоненты средней скорости (а), горизонтальной, поперечной и вертикальной компонент флуктуаций скорости на горизонте протяжки на оси струи при $y = 0$ и $z = -1.3$ (сплошная линия и линии с коротким и длинным штрихом соответственно) (б), и вертикального (в) и поперечного масштабов длины (г). Символы соответствуют экспериментальным данным. Рисунок показывает хорошее согласие между численными и экспериментальными данными. Из рисунка видно, что максимум средней скорости в следе спадает медленнее, чем в нестратифицированном случае (соответствующие асимптотики для скорости $t^{-2/3}$ и длины $t^{1/3}$ изображены на рис. 6 в виде точечных линий).

Рис. 6б показывает, что горизонтальная и поперечная компоненты флуктуаций скорости одного порядка и уменьшаются со временем, в то время как вертикальная компонента спадает быстрее и становится на порядок меньше x и y компонент при $t > 10$. Такое поведение флуктуаций скорости говорит о том, что под действием сил плавучести происходит коллапс вертикальных пульсаций скорости. Об этом говорит также поведение вертикального масштаба длины течения L_z (рис. 6в), который растет как в нестратифицированном случае (пропорционально $t^{1/3}$) на малых временах (при $t < 3$) и далее мало меняется.

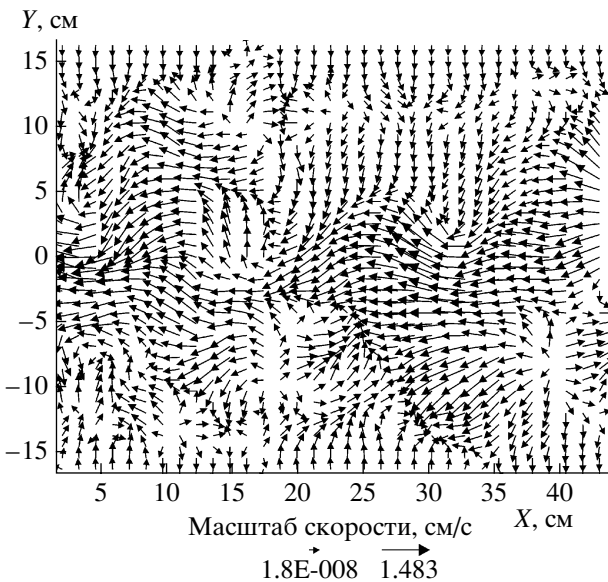


Рис. 7. Поле скорости течения в плоскости протяжки сферы в эксперименте в момент времени $t = 2.63$.

Рис. 6г показывает, что рост поперечного масштаба длины, наблюдаемый в эксперименте и в численном моделировании, хорошо описывается асимптотикой $t^{1/3}$. Данные лабораторного эксперимента и результаты численного моделирования на рис. 6 качественно также согласуются с результатами предыдущих исследований [6–9, 13, 14].

На рис. 7 показано поле скорости в лабораторном эксперименте. Из рисунка видно, что след характеризуется вихревой структурой, пространственный период которой (в горизонтальном направлении) составляет около 20 см. Такой же пространственный период наблюдается в поле завихренности в численном моделировании, представленном на рис. 8. На рисунке показаны y, z и x компоненты поля завихренности в плоскостях (x, z) при $y = 0$ (а), (x, y) при $z = -1.3$ (на горизонте протяжки) (б), и (x, y) при $x = 24$ (в). Распределение z -компоненты завихренности, представленное на рисунке 8б, имеет период, примерно равный пяти безразмерным единицам (по оси x), что соответствует размерному периоду $5L_0 \approx 20$ см.

Рис. 8 показывает, что поле завихренности имеет трехмерную структуру и асимметрично относительно плоскости протяжки. Рисунок 8а показывает, что распределение y -компоненты завихренности в плоскости (x, z) в области $z > -1.3$ (над плоскостью протяжки) характеризуется наличием разнополярных слоев, располагающихся под углом $10^\circ\text{--}30^\circ$ по отношению к горизонтальной оси. Из рис. 8 также видно, что распределение x -компоненты завихренности в области над плоскостью протяжки (при $z > -1.3$) характеризуется слоистой структурой. Слоистая структура поля завихренности наблюдалась в предыдущих экс-

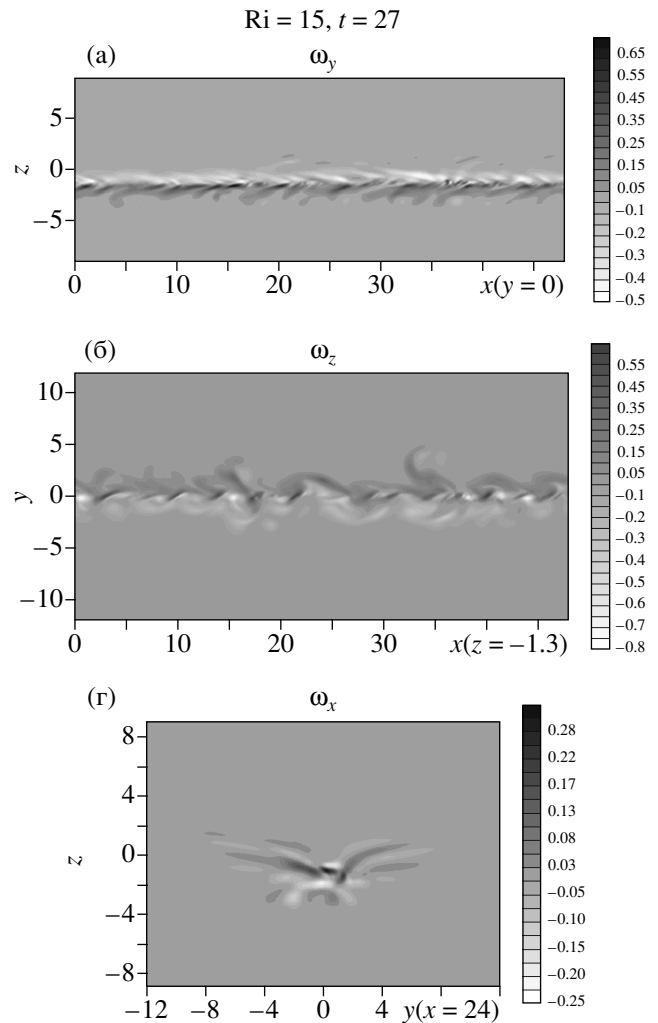


Рис. 8. Поле завихренности в численном моделировании в момент времени $t = 27$.

периментальных и численных исследованиях [8, 14], где было выдвинуто предположение о том, что слои завихренности соответствуют внутренним волнам, возбуждаемым струей. Об этом говорит и структура поля плотности, полученная в численном моделировании в моменты времени $t = 9$ и 27 , представленная на рис. 9. Рисунок показывает, что под действием флуктуаций скорости в струе происходит возбуждение внутренних волн, пространственный период которых практически совпадает с периодом поля завихренности (рис. 8б).

Зависимость от времени флуктуаций плотности на горизонте пикноклина при $z = 1.3$ и $y = 0$ представлена на рис. 10. Рисунок показывает, что амплитуда флуктуаций плотности растет со временем и достигает максимума при $Nt \approx 30$, что соответствует моменту времени $t \approx 7$ (в безразмерных единицах), когда вертикальные пульсации скорости становятся много меньше горизонтальных и рост вертикального пространственного

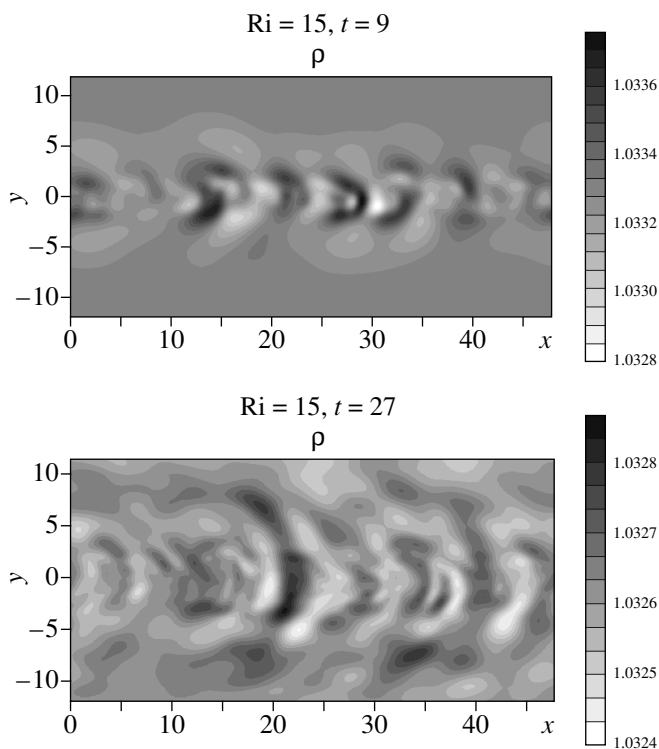


Рис. 9. Поле плотности на горизонте пикноклина ($z = 1.3$) в численном моделировании при $t = 9$ и 27 .

масштаба следа прекращается (рис. 6б, 6в). Таким образом, коллапс вертикальных пульсаций скорости в следе под действием сил плавучести сопровождается возбуждением пульсаций плотности в пикноклине, т.е. происходит переход кинетической энергии турбулентности в энергию внутренних волн.

Вертикальный профиль флуктуаций плотности в момент времени $t = 27$ представлен на рис. 11. Рисунок показывает, что профиль характеризуется наличием нескольких локальных пиков, что говорит о том, что возбуждается несколько мод внутренних волн. Поскольку при $z \approx -1.3$ и $z \approx 1.3$ амплитуда флуктуаций максимальна и минимальное значение флуктуаций плотности (при $z = 0$) составляет порядка половины максимального значения, можно заключить, что наиболее интенсивно возбуждаются первая и вторая моды.

Как показывает рис. 6б, 6в, на достаточно больших временах ($t > 10$) течение в следе становится квазидвумерным, так как вертикальные пульсации скорости жидкости подавляются действием сил плавучести. На этой стадии течение в следе можно исследовать с помощью квазилинейной модели квазидвумерных течений, развитой в [11, 12].

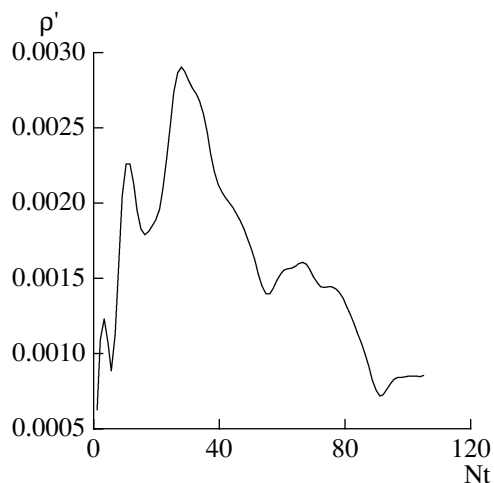


Рис. 10. Зависимость от времени флуктуаций плотности на горизонте пикноклина при $z = 1.3$ и $y = 0$ в численном моделировании (локальная частота плавучести $N = 3.9$).

5. КВАЗИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ СЛЕДА

Рассмотрим эволюцию дальнего следа в рамках квазилинейной модели [11, 12]. Эта модель применима для описания течения в следе на таких временах, когда можно пренебречь полями скорости в следе, вызванными выравниванием неоднородностей плотности (явлением “коллапса следа”) и влиянием внутренних волн на динамику следа. В этом случае можно считать, что основные движения в следе соответствуют квазидвумерной моде [11, 12] и могут быть описаны в рамках системы квазидвумерных уравнений. Дальнейшее решение задачи удобно проводить в переменных завихренность (Ω) – функция тока (ψ), где ψ вводится по формулам

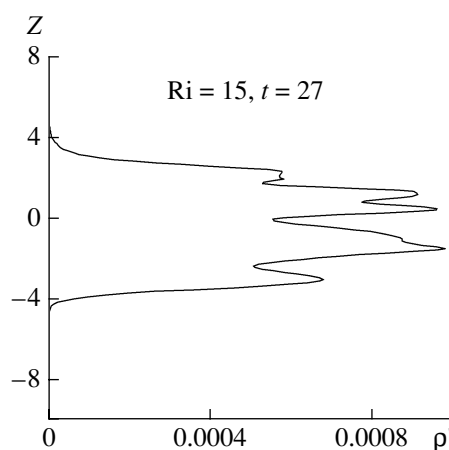


Рис. 11. Вертикальный профиль флуктуаций плотности в численном моделировании в момент времени $t = 27$ при $y = 0$.

$$\langle u \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \langle v \rangle = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.1)$$

Тогда система уравнений движения примет вид [11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K_T \Omega + \\ + 2 \left(2 \frac{\partial^2 K_T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 K_T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 K_T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) &+ \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{Tz} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right), & \end{aligned} \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega. \quad (5.2б)$$

Здесь K_T и K_{Tz} – горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной вязкости.

Будем искать решение системы (5.2а, б) в виде суммы среднего течения, не зависящего от продольной координаты x и его возмущений, которые представим в виде сумм неоднородных гармонических волн:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \psi_0(y, t) + \\ + \operatorname{Re} \sum_k a(k, t) \psi_1(y, t, k) \exp(ikx + i\phi_k), & \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, t) &= \Omega_0(y, t) + \\ + \operatorname{Re} \sum_k a(k, t) \Omega_1(y, t, k) \exp(ikx + i\phi_k), & \end{aligned} \quad (5.3б)$$

Здесь k – волновое число k -й гармоники возмущения. Примем гипотезу случайных фаз возмущений, т.е. будем считать фазу ϕ_k случайной функцией k . Тогда статистическое усреднение приведет к системе уравнений квазилинейного приближения, аналогичного тому, которое используется в физике плазмы. Применимость этого приближения обсуждается в [11, 12].

Уравнения для средних полей можно получить усреднением системы (5.2а,б) по x , которое в этом случае эквивалентно статистическому усреднению. Они имеют вид

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial t} + \overline{\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (K_T \Omega_0),$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = \Omega_0.$$

Здесь ψ_1 и Ω_1 – возмущения функции тока и завихренности, входящие в формулы (5.3 а,б) в виде сумм гармоник; $\overline{\dots}$ означает осреднение по x (и по случайным фазам гармоник), в отличие от $\langle \dots \rangle$, означающего осреднение по ансамблю турбулентных пульсаций.

С учетом разложения возмущений функции тока и завихренности в ряды Фурье и связи комплексных амплитуд функции тока и завихренности после стандартных преобразований можно привести уравнение для Ω_0 к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_0}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{2} \sum_k k |a(k, t)|^2 \operatorname{Im} \left(\psi_1^*(y, t, k) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) &= \\ = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (K_T \Omega_0). & \end{aligned}$$

Здесь символ $*$ означает комплексное сопряжение.

Отсюда легко получить уравнение для средней скорости $U = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y^2} \frac{1}{2} \sum_k k |a(k, t)|^2 \operatorname{Im} \left(\psi_1^*(y, t, k) \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_T \frac{\partial U}{\partial y} \right). & \end{aligned} \quad (5.4)$$

При этом ψ_1 удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 \right) a \right) &+ \\ + ika \left(U \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \psi_1 \right) &= \\ = a \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) K_T \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - k^2 \psi_1 \right) &+ 2a \psi_1 k^2 K_{Tyy}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Допустим, что возмущения с характерным временным масштабом T_{dis} являются существенно более быстрыми функциями времени, чем среднее течение с характерным временным масштабом T_{avr} , т.е. $\mu = T_{dis}/T_{avr} \ll 1$. В [11–12] обсуждается применимость этого предположения в задаче об эволюции следа, которая решается в квазилинейном приближении, и показано, что в

задаче о следе применимость ВКБ-аппроксимации является более мягким условием, чем применимость квазилинейного приближения.

Коэффициенты уравнения (5.5) и функция $a(k, t)$ зависят от медленной переменной $t = \mu t$. Будем искать решение (5.5) в виде:

$$\psi_1 = (\Phi_0 + \mu\Phi_1 + \dots) \exp\left(-i\frac{\Theta}{\mu}\right). \quad (5.6)$$

Обозначим $\omega = \frac{d\Theta}{d\tau}$, тогда $\Theta = \mu \int_0^t \omega dt$. В нулевом порядке μ^0 уравнение для Φ^0 имеет вид:

$$ik\left(\left(\frac{\omega}{k} - U\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Phi_0\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)K_T\left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0\right) + 2\Phi_0 k^2 K_{Ty} = 0, \quad (5.7)$$

$$\Phi_0|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (5.8)$$

Решение граничной задачи (5.7), (5.8) на собственные функции и собственные числа дает дисперсионное соотношение и форму моды возмущения.

Из уравнения порядка μ^1 можно получить уравнение, описывающее зависимость амплитуды возмущения a от времени. Действительно, в первом порядке по μ имеем:

$$ika\left(\left(\frac{\omega}{k} - U\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - k^2 \Phi_1\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Phi_1\right) + a\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2\right)K_T\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - k^2 \Phi_1\right) + 2\Phi_1 ak^2 K_{Ty} = (5.9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(a\left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0\right)\right),$$

$$\Phi_1|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Из условия разрешимости уравнения (5.9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \Phi_0\right)\right) dy = 0 \quad (5.10)$$

следует уравнение для a . Здесь $\psi(y, t)$ – решение уравнения, сопряженного с уравнением 0-го порядка (5.7). С учетом (5.6) уравнение (5.4) для U можно переписать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \sum_k k |a(k, t)|^2 \exp\left(2 \int_0^t \text{Im} \omega dt\right) \text{Im}\left(\Phi_0(y, t, k) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_T \frac{\partial U}{\partial y}\right). \quad (5.11)$$

Итак, замкнутая система уравнений квазилинейного приближения включает в себя: 1) уравнение (5.11) для средней скорости, зависящее от амплитуды возмущений $a(k, t)$, комплексной амплитуды функции тока Φ_0 и мнимой части частоты $\text{Im}\omega$; 2) граничную задачу (5.7)–(5.8) для определения функции Φ_0 и собственной частоты ω , которые зависят от U , входящего в коэффициенты уравнения (5.7); 3) уравнение для амплитуды (5.10).

Система уравнений квазилинейного приближения решалась численно. Уравнение (5.11) для средней продольной скорости решалось методом исключения Гаусса. Граничная задача (5.7)–(5.8) решалась на каждом шаге для каждой спектральной гармоники, и вычислялись собственные числа $s(k)$ и собственные функции $\Phi_0(k, y)$. Также находилось решение уравнения, сопряженного к (5.7), и вычислялась функция $\psi(k, y)$, которая использовалась при нахождении функции $a(k, t)$ в

уравнении (5.10). При этом его решение можно записать в виде:

$$a(k, t) = a_0(k) \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \chi_0 dy} dt \right\},$$

$$\text{где } \chi_0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - K^2 \Phi_0.$$

Функции $a(k, t)$, Φ_0 , $\text{Im}\omega$ использовались на каждом шаге по времени для вычисления волнового потока импульса (второе слагаемое в уравнении (5.11)). Эта процедура довольно громоздка, но она требует существенно меньших затрат ма-

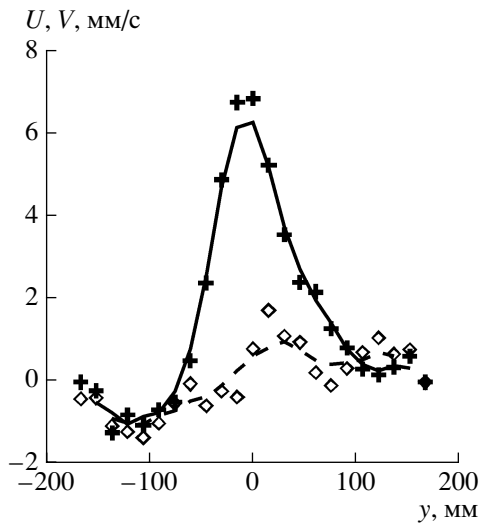


Рис. 12. Профили средних продольной (сплошная кривая) и поперечной (пунктирная кривая) скоростей, измеренных при $t = 3.6$.

шинного времени по сравнению с прямым численным моделированием.

Расчеты эволюции параметров в рамках квазилинейной модели были выполнены для условий, соответствующих эксперименту, описанному в п. 2. При этом учитывалось, что модель применима только для дальнего следа, и в качестве начальных условий выбирались параметры следа при $t = 3.6$. Измеренные профили средних продольной и поперечной скоростей показаны на рис.12. Видно, что поперечная скорость, описывающая “растекание” неоднородностей плотности в следе (явление коллапса), много меньше продольной. В связи с этим мы предположили, что эволюцию следа можно считать квазидвумерной и использовать развитую модель.

Начальный спектр возмущений функции тока $a_0(k)$, входящий в уравнения модели, определялся из эксперимента. Для этого вычислялся спектр флуктуаций поперечной скорости на оси следа $v_0(k)$ с учетом выражения (5.1), связывающего функцию тока и поперечную компоненту скорости $a_0(k) = v_0(k)/ik$. Начальный профиль средней поперечной скорости выбирался гауссовым с параметрами, соответствующими экспериментально измеренным при $t = 3.6$. Полученные зависимости нормированных скорости на оси и полуширины следа от безразмерного времени показаны на рис. 13. Там же приведены такие же зависимости, полученные в лабораторном эксперименте и численном моделировании, приведенные выше на рис. 6. Рис. 13 показывает хорошее согласие

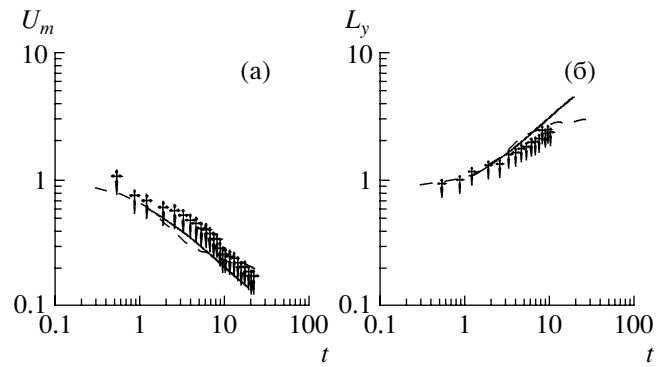


Рис. 13. Зависимости от времени (а) максимума средней скорости и (б) ее поперечного масштаба длины. Символы соответствуют экспериментальным данным, штриховые кривые – численному эксперименту, сплошные линии – расчетам в рамках квазилинейной модели.

модельного решения с численными и экспериментальными данными.

Следует заметить, что, строго говоря, формальные условия применимости квазилинейного приближения нарушаются для параметров данных численного и лабораторного экспериментов, поскольку кинетическая энергия флуктуаций скорости была сравнима с энергией среднего течения. Хорошее согласие квазилинейной теории и эксперимента указывает на то, что в основном эволюция среднего течения обусловлена детектированием возмущений, развивающихся в следе за счет сдвиговой неустойчивости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью данной работы является проведение лабораторного эксперимента и прямого численного и теоретического моделирования турбулентного дальнего следа за сферой в жидкости со стратификацией плотности в виде пикноклина. Рассматривается не исследованная ранее конфигурация течения, где ось протяжки сферы находится под пикноклином. В лабораторном эксперименте используется метод Particle Image Velocimetry, позволяющий измерять распределение двумерного поля скорости жидкости в плоскости протяжки сферы в различные моменты времени. Таким образом, экспериментальные измерения дают как зависимости от времени интегральных параметров течения (средней скорости на оси и поперечной ширины следа), так и спектры поля флуктуаций скорости в различные моменты времени.

В отличие от предыдущих исследований [13, 14], параметры течения, профили плотности и средней скорости и исходное поле флуктуаций скорости в

численном моделировании задаются на основе данных лабораторного эксперимента, что обуславливает не только качественное, но и хорошее количественное согласие численных результатов с экспериментальными данными. Результаты численного моделирования показывают также, что под действием флуктуаций скорости в следе происходит эффективное возбуждение внутренних волн в пикноклине, пространственный период которых совпадает с характерным периодом вихревой структуры следа. Подобный эффект ранее наблюдался экспериментально в случае, когда ось протяжки находилась на горизонте залегания пикноклина [10]. С другой стороны, экспериментальные и численные результаты [4–9, 13] показывают, что возбуждение внутренних волн следом малоэффективно в случае линейной стратификации. По-видимому, процесс возбуждения внутренних волн следом существенно зависит как от модовой структуры, так и от спектра флуктуаций скорости в следе.

Проведено также сравнение результатов лабораторного эксперимента и численного моделирования с предсказаниями квазилинейной квазидвумерной теоретической модели. Сравнение показывает, что временная эволюция средней скорости на оси и поперечной ширины следа хорошо описываются моделью. Это свидетельствует о том, что основным физическим процессом, определяющим динамику интегральных параметров следа на рассматриваемой стадии эволюции является рост квазидвумерной вихревой моды за счет гидродинамической неустойчивости и ее воздействие на среднее течение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 04-05-64264) и Фонда содействия отечественной науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin J.T., Pao Y.H.* Wakes in stratified fluid // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1979. V. 11. P. 317.
2. *Lin Q., Boyer D.L., Fernando H.J.S.* Turbulent wakes of linearly stratified flow past a sphere // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4. P. 1687–11694.
3. *Lin Q., Lindberg W.R., Boyer D.L., Fernando H.J.S.* Stratified flow past a sphere // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 240. P. 315–354.
4. *Chomaz J.M., Bonneton P., Butet A., Hopfinger E.J.* Vertical diffusion of the far-wake of a sphere moving in a stratified fluid // *Phys. Fluids A.* V. 5. P. 2799–2806.
5. *Spedding G.R., Browand F.K., Fincham A.M.* Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a towed sphere in a stably stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 314. P. 53–103.
6. *Spedding G.R.* The evolution of initially turbulent bluff-body wakes at high internal Froude number // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 337. P. 283–301.
7. *Spedding G.R.* Anisotropy in turbulence profiles of stratified wakes // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 8. P. 2361–2372.
8. *Spedding G.R.* Vertical structure in stratified wakes with high initial Froude number // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 454. P. 71–112.
9. *Bonnier M., Eiff O.* Experimental investigation of the collapse of a turbulent wake in a stably stratified fluid // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14. № 2. P. 791–801.
10. *Robey H.F.* The generation of internal waves by a towed sphere and its wake in a thermocline // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9. № 11. P. 3353–3367.
11. *Баландина Г.Н., Панко В.В., Сергеев Д.А., Троицкая Ю.И.* Эволюция дальнего турбулентного следа за телом, буксируемым в стратифицированной жидкости при больших числах Рейнольдса и Фруда // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2004. Т. 40. № 1. С. 112–127.
12. *Троицкая Ю.И.* Квазилинейная модель эволюции дальнего турбулентного следа за движущимся телом в стратифицированной жидкости при больших числах Рейнольдса и Фруда // *Препринт ИПФ РАН,* 2002. № 610.
13. *Gourlay M.J., Arendt S.C., Fritts D.C., Werne J.* Numerical modeling of initially turbulent wakes with net momentum // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 8. P. 2361–2372.
14. *Дружинин О.А.* Коллапс и автомодельность турбулентной струи в пикноклине // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2003. Т. 37. № 5. С. 697–117.
15. *Fincham A.M., Spedding G.R.* Low-cost, high-resolution DPIV for turbulent flows // *Exps. Fluids.* 1997. V. 23. P. 449–462.
16. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность и промежуточная асимптотика // *Л.: Гидрометеоздат* 1982. С. 255.
17. *Белоцерковский О.М.* Численные методы в механике сплошных сред // *М.: Наука* 1984. С. 135
18. *Флетчер Г.К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей // *М.: Мир* 1991. Т. 1. С. 81.

Engl