

УДК 551.465.15

## МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА И ДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

ОСТРОВСКИЙ Л. А., ТРОИЦКАЯ Ю. И.

На основании кинетического подхода получены выражения для турбулентных потоков импульса, массы, энергии и других гидродинамических величин в стратифицированной среде, вид которых однозначно определяется предположением о близости функции распределения к гауссовой. Рассматривается поведение турбулентности в сдвиговом стратифицированном потоке, а также в поле инерционно-гравитационной внутренней волны. Показано, что учет «двухсторонней» трансформации кинетической и потенциальной энергии пульсаций позволяет объяснить возможность поддержания турбулентности слабыми сдвигами, типичными для внутренних волн в основной толще океана.

Мелкомасштабные движения существуют в океане и атмосфере практически повсеместно. Несмотря на относительно малую энергоемкость, они играют важную роль в энергообмене геофизических процессов, обеспечивая, в частности, сток энергии для течений и волновых движений более крупных масштабов.

Наиболее распространенный подход к описанию взаимодействия турбулентности с крупномасштабными движениями связан с использованием системы уравнений Рейнольдса [1, 2]. В силу нелинейности уравнений гидродинамики эта система незамкнута: в уравнение для любого момента входит более высокий момент. Поэтому необходимо привлекать те или иные гипотезы замыкания; обычно используют градиентные аппроксимации для потоков импульса, плавучести и других величин, вводимые по аналогии с теорией молекулярного переноса [2]. Такой подход во многих случаях оказывается эффективным, однако он имеет и очевидные недостатки. В частности, эти аппроксимации вводятся независимо для различных физических величин, связанных, вообще говоря, уравнениями гидродинамики. Это в свою очередь приводит к значительной неопределенности даже в отношении качественных выводов теории.

В кинетической теории газов известна последовательная математическая процедура получения выражений для вязких напряжений и молекулярных потоков тепла через градиенты скорости и температуры. При этом решается уравнение для одночастичной функции распределения [3]. Аналогичный подход уже довольно давно используется в теории гидродинамической турбулентности [4—6]. Здесь также записывается уравнение для одноточечной функции распределения  $f$  — кинетическое уравнение. Используя затем только одну гипотезу замыкания в уравнении для  $f$ , можно получить согласующиеся друг с другом выражения для потоков различных гидродинамических величин. Для этого необходимо, записав уравнение для  $f$ , найти адекватную аппроксимацию «интеграла столкновений» (его роль здесь играют слагаемые, связанные с пульсациями давления и пульсационными компонентами вязких сил [4]), решить полученное уравнение и, наконец, зная функцию распределения,

вычислить напряжения Рейнольдса по известным формулам теории вероятностей.

В настоящей работе такой кинетический подход применяется для описания турбулентности в стратифицированной жидкости и ее поведения в поле сдвиговых течений и внутренних волн<sup>1</sup>. При этом для получения общих выражений для турбулентных потоков импульса, плотности, энергии и других гидродинамических величин не требуется, вообще говоря, использовать какую-либо аппроксимацию интеграла столкновений. Необходимо только, чтобы внешний масштаб турбулентности был мал по сравнению с масштабом осредненного движения и чтобы функция распределения слабо отличалась от гауссовой. Однако соответствующие выкладки чрезвычайно громоздки (см. [8]). Здесь мы ограничимся более простым подходом, связанным с  $\tau$ -аппроксимацией «интеграла столкновений», в которой член, связанный с пульсациями давления, представляется выражением  $-(f-f_0)/\tau$ , где  $f_0$  — гауссова функция. Эта аппроксимация не была обоснована в задачах гидродинамической турбулентности и вводилась в [9] по аналогии с кинетической теорией разреженных газов. Однако, как показано в [8], она дает ту же структуру выражений для турбулентных потоков, что и более строгая процедура, из которой вытекают аналогичные результаты, относящиеся к поведению турбулентности в поле сдвиговых течений.

**1. Кинетическое уравнение для стратифицированного турбулентного потока.** Будем исходить из следующей формы уравнений гидродинамики для стратифицированной жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{g} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} &= \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \rho &= \kappa \Delta \rho, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_0(z)$  — гидростатическое распределение плотности,  $\nu$  и  $\kappa$  — соответственно коэффициенты молекулярной вязкости и молекулярной диффузии плотности,  $p$  — отклонение давления от гидростатического. Здесь стратификация считается достаточно слабой для того, чтобы было справедливо приближение Буссинеска; кроме того, ограничимся для простоты уравнением баланса полной плотности (без отдельного учета баланса температуры и солености).

Введем функцию распределения как плотность вероятности распределения скорости и плотности в данной точке в данный момент времени. По определению

$$f(\mathbf{v}, \lambda, \mathbf{r}, t) = \langle \delta(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}) \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \lambda) \rangle, \quad (2)$$

$\delta$  — функция Дирака, угловые скобки означают вероятностное осреднение. Дифференцируя (2) по  $t$ , подставляя выражения для  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  и  $\partial \rho / \partial t$  из системы (1) и делая несложные преобразования, получим (пока незамкнутое) уравнение для  $f$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \mathbf{r}} - \frac{(\lambda - \rho_0)}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= \\ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial \mathbf{r}} - \nu \Delta \mathbf{u}' \right) \right\rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\langle \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) (-\kappa \Delta \rho') \right\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Мы уже использовали такой подход для описания взаимодействия внутренних волн со случайным полем течений [7] в «бесстолкновительном» варианте, когда поле скорости можно считать «замороженным» за время взаимодействия. Здесь же рассматривается «сильно столкновительная» модель, адекватно описывающая гидродинамическую турбулентность.

Здесь  $p' = p - \langle p \rangle$ ,  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle$ ,  $\rho' = \rho - \langle \rho \rangle$  — пульсационные составляющие давления, скорости, плотности. Пульсации давления описываются уравнением Пуассона, легко следующим из исходной системы (1):

$$\Delta p' = -\rho_0 [\operatorname{div}(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}]' - g \frac{\partial \rho'}{\partial z},$$

решение которого имеет вид

$$p' = p'_1 + p'_2 = \frac{1}{4\pi} \rho_0 \int d\mathbf{r}_1 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \operatorname{div}[(\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t), \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t)]' + \frac{g}{4\pi} \int d\mathbf{r}_1 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \frac{\partial}{\partial z_1} \rho'(\mathbf{r}_1, t). \quad (4)$$

Здесь  $[\operatorname{div}(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}]' = [\operatorname{div}(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}] - \langle [\operatorname{div}(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}] \rangle$ . Видно, что выражение (4) разбивается на два слагаемых, имеющих различную физическую природу. Первое представляет собой пульсации давления, обусловленные хаотическим движением частиц жидкости, второе — случайным смещением их от равновесного уровня в стратифицированной жидкости. Соответствующие слагаемые в уравнении (3) выражаются через двухточечную функцию распределения:

$$J_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \frac{\partial p'_1}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{\rho_0} \right\rangle = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int d\mathbf{r}_1 \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \int d\mathbf{v}_1 \left( \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right)^2 [f_{2\mathbf{v}} - ff_{\mathbf{v}}], \quad (5)$$

$$J_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \frac{\partial p'_2}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{\rho_0} \right\rangle = \\ = -\frac{g}{4\pi \rho_0} \int d\mathbf{r}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_1 - \rho(\mathbf{r}_1, t)) f_{2\lambda} d\lambda_1. \quad (6)$$

Слагаемые в (3), описывающие действие вязкости и молекулярной диффузии на одноточечную функцию распределения  $f$ , также выражаются через двухточечную:

$$J_v = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle -\nu \Delta \mathbf{u}' \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \right\rangle = \\ = -\nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \lim_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int \int_{V_\infty} \mathbf{v}_1 [f_{2\mathbf{v}} - ff_{\mathbf{v}}] d\mathbf{v}_1, \quad (7)$$

$$J_\kappa = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\langle -\kappa \Delta \rho' \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \right\rangle = \\ = -\kappa \frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 [f_{2\lambda} - ff_\lambda] d\lambda_1. \quad (8)$$

В выражениях (5) — (8) получены функции распределения: двухточечная по скорости

$$f_{2\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \lambda, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) \delta(\rho - \lambda) \rangle,$$

двухточечная по плотности

$$f_{2\lambda}(\mathbf{v}, \lambda, \lambda_1, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \delta(\rho - \lambda) \delta(\rho_1 - \lambda_1) \rangle.$$

Кроме того, обозначено

$$f_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1, t) = \langle \delta(\mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t) - \mathbf{v}_1) \rangle, \quad f_\lambda(\lambda_1, \mathbf{r}_1, t) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}_1, t) - \lambda_1) \rangle.$$

Вывод выражений (5) — (8) приведен в [8]. Слагаемые  $J_p$ ,  $J_v$ ,  $J_\kappa$  аналогичны интегралам столкновений в кинетической теории газов. Простые оценки показывают, что  $J_p \sim f/\tau_p$ , где  $\tau_p = \rho_0 U/g \langle \rho'^2 \rangle^{1/2}$ ,  $U^2$  — дисперсия

скорости,  $\langle \rho'^2 \rangle$  — дисперсия плотности,  $J_x, J_v \sim f/\tau_v$ , где  $\tau_v \sim U^2/\varepsilon$ ;  $\varepsilon$  — скорость диссипации турбулентной энергии. Члены в левой части кинетического уравнения (3) имеют порядок  $f/T$  и  $Uf/l$ , где  $T$  и  $l$  — временной и пространственный масштабы среднего движения. Наконец,  $J_p \sim f/\tau$ , где  $\tau \sim L/U$ ,  $L$  — внешний масштаб турбулентности.

Аналогично [9] примем для  $J_p$   $\tau$ -аппроксимацию:

$$J_p = -(f - f_0)/\tau.$$

Здесь  $\tau = L/U$ ,  $f_0 = \frac{1}{(2\pi U^2)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi \langle \rho'^2 \rangle)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{v} - \langle \mathbf{u} \rangle)^2}{2U^2} - \frac{(\lambda - \langle \rho \rangle)^2}{2\langle \rho'^2 \rangle}\right\}$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} d\lambda$ ,  $\langle \rho \rangle = \int \lambda f d\mathbf{v} d\lambda$  — средние значения скорости и плотности, а  $U^2 = 1/3 \int (\mathbf{v} - \langle \mathbf{u} \rangle)^2 f d\mathbf{v} d\lambda$ ,  $\langle \rho'^2 \rangle = \int (\lambda - \langle \rho \rangle)^2 f d\mathbf{v} d\lambda$  — соответственно дисперсии этих величин.

Уравнение для  $f$  тогда принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\lambda - \rho_0}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{f - f_0}{\tau} + J_p + J_v + J_x, \quad (9)$$

где  $J_p, J_v, J_x$  даются формулами (6) — (8).

Рассматриваем далее такие процессы, для которых  $\tau \ll \{\tau_p, \tau_v, T, l/U\}$ . Эти неравенства часто характерны для геофизических ситуаций. Они означают, как уже отмечалось, малость внешнего масштаба турбулентности по сравнению с масштабами осредненных движений, а также малость времени релаксации функции распределения турбулентного течения к гауссовой по сравнению с характерными временами ее изменения за счет вязкого затухания, работы сил плавучести и переноса средним течением. Сделаем оценки выполнимости этих неравенств для типичных параметров океанской турбулентности [2]:  $L = 10$  см,  $U = 0,5$  см/с,  $\langle \rho'^2 \rangle^{\text{н}} = 10^{-6}$  г/см<sup>3</sup>, тогда  $\tau = 50$  с,  $\tau_p = 500$  с. Условие  $\tau \ll \tau_v$  автоматически выполняется в развитой турбулентности. Временной масштаб осредненных процессов должен превышать 50 с, а пространственный — 10 см.

Для внутренних волн в океане эти условия почти всегда выполняются. В этом случае в уравнении (9) все члены, кроме  $-(f - f_0)/\tau$ , — порядка малого параметра  $\mu = \tau/\{\tau_v, \tau_p, T\}$  и можно искать решение (9) в виде разложения

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots \quad (10)$$

Этот метод известен в кинетической теории газов как метод Чепмена — Энскога [10]. В разложении (10) отношение каждого последующего члена к предыдущему принимает значения порядка  $\mu$ ;  $f^{(0)}$  удовлетворяет уравнению нулевого приближения, следующему из (9):  $f^{(0)} = f_0$ , т. е. решением нулевого приближения является гауссова функция. Решение уравнения первого приближения имеет вид

$$f^{(1)} = -\tau \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} + \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\lambda - \rho_0}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - J_p[f_0, f_{02\lambda}] - J_v[f_0, f_{02\mathbf{v}}] - J_x[f_0, f_{02\lambda}] \right\}. \quad (11)$$

В выражении (11) в интегралы  $J_p, J_v, J_x$  входят двухточечные гауссовы функции  $f_{0\lambda}, f_{0\mathbf{v}}$ .

Подставляя их в (6) — (8), получим

$$J_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{f_0 (\lambda - \langle \rho \rangle) \beta}{\langle \rho'^2 \rangle} \right) \frac{\mathbf{g}}{\rho_0},$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \frac{\partial}{\partial z_1} \langle \rho'(\mathbf{r}, t) \rho'(\mathbf{r}_1, t) \rangle,$$

$$\begin{aligned}
 J_v &= \frac{\varepsilon}{3U^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( (v - \langle u \rangle) \frac{\partial f}{\partial v} \right), \\
 \varepsilon &= - \lim_{r_1 \rightarrow r} v \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \langle u'_i(r, t) u'_i(r_1, t) \rangle, \\
 J_x &= \frac{\Gamma}{\langle \rho'^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( (\lambda - \langle \rho \rangle) \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right), \\
 \Gamma &= - \lim_{r_1 \rightarrow r} x \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \langle \rho'(r, t) \rho'(r_1, t) \rangle.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом,  $f^{(1)}$  выражается через  $f_0$ . По известной функции распределения можно найти выражение для всех одноточечных моментов по стандартным формулам теории вероятностей

$$\left\langle \rho'^{m_1} \prod_{i=1}^3 u_i'^{m_i} \right\rangle = \int (f^{(0)} + f^{(1)}) (\lambda - \langle \rho \rangle)^{m_1} \prod_{i=1}^3 (v_i - \langle u_i \rangle)^{m_i} dv d\lambda.$$

Выпишем в явном виде выражения для вторых и третьих моментов. Так, турбулентный поток импульса равен

$$\langle u'_i u'_j \rangle = U^2 \delta_{ij} - LU \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right). \tag{13}$$

Выражение для турбулентного потока массы имеет вид

$$\langle \rho' u'_i \rangle = -LU \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} + g_i \frac{\langle \rho'^2 \rangle}{U^2 \rho_0} - \frac{g \beta_i}{\rho_0 U^2} \right). \tag{14}$$

Выражение для  $\beta$  дается формулой (12). Для статистически-однородного поля плотности  $\beta_x = \beta_y = 0$ , а  $\beta_z = \langle \rho'^2 \rangle R$ , где

$$R = - \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \frac{\partial}{\partial z_1} B_\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \tag{15}$$

Здесь  $B_\rho$  — коэффициент корреляции поля плотности,  $R$  зависит от соотношения вертикального  $L_z$  и горизонтального  $L_r$  масштабов корреляции поля плотности, а именно  $R \approx 1$  при  $L_z \ll L_r$ ,  $R \sim (L_r/L_z)^2$  при  $L_z \gg L_r$ .

В выражение (14) для  $\langle \rho' u'_i \rangle$  входит дополнительное по сравнению с градиентными гипотезами слагаемое  $(g_i \langle \rho'^2 \rangle - \beta_i g) / \rho_0 U^2$ . Сравним его с «градиентным» слагаемым  $\partial \langle \rho \rangle / \partial x_i$  при значениях параметров, характерных для основной толщи океана [2]:  $\partial \langle \rho \rangle / \partial z = 9 \cdot 10^{-7}$  г/см<sup>3</sup>·м,  $[N = 3 \cdot 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>],  $\langle \rho'^2 \rangle^{1/2} = 10^{-6}$  г/см<sup>3</sup>;  $U = 0,5$  см/с; тогда дополнительное слагаемое будет того же порядка ( $\sim 4 \cdot 10^{-7}$  г/см<sup>3</sup>·м), что и градиентное. Из дальнейшего видно, что наличие дополнительного по сравнению с градиентными гипотезами слагаемого в выражении для потока массы приводит к ряду существенных различий в результатах, даваемых этими моделями.

Выражения для турбулентных потоков кинетической энергии и флуктуаций плотности имеют обычный «градиентный» вид:

$$\left\langle \sum_{j=1}^3 u_j'^2 u'_i \right\rangle = -5LU \frac{\partial U^2}{\partial x_i}, \tag{16}$$

$$\langle \rho'^2 u'_i \rangle = -LU \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x_i}. \tag{17}$$

Система уравнений Рейнольдса, замкнутая в соответствии с выражениями (13)–(17), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} + g_i \frac{\langle \rho \rangle - \rho_0}{\rho_0} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( L \sqrt{b} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right), \\ \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial}{\partial x_i} L \sqrt{b} \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} + \frac{3}{2b\rho_0} (g_i \langle \rho'^2 \rangle - g\beta_i) \right), \quad (18) \\ \frac{\partial b}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial b}{\partial x_i} - L \sqrt{b} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{g}{\rho_0} L \sqrt{b} \times \\ \times \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \frac{3}{2b\rho_0} (g \langle \rho'^2 \rangle - g\beta_z) \right) - \frac{Cb^{3/2}}{L} = \frac{5}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( L \sqrt{b} \frac{\partial b}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} L \sqrt{b} \times \\ \times \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} + (g_i \langle \rho'^2 \rangle - g\beta_i) \frac{3}{2b\rho_0} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} L \sqrt{b} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Здесь  $b=3U^2/2$ ; по повторяющимся индексам производится суммирование.

**2. Эволюция турбулентности в поле стратифицированного сдвигового течения.** В качестве примера приложения развитой теории рассмотрим задачу об эволюции однородной турбулентности, в которой все моменты выше первого не зависят от координат, в устойчиво стратифицированном стационарном сдвиговом потоке с профилем скорости  $u=U_0(z)x_0$ , где  $U'_{0z}=\text{const}$  и постоянной частотой Брента - Вайсяля ( $N^2 = \frac{gd\rho_0}{\rho_0 dz} = \text{const}$ ).

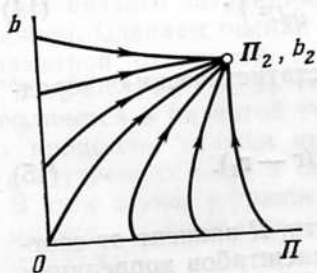


Рис. 1. Фазовая плоскость системы (20)

Как известно [1], условие нарастания турбулентности в таком потоке имеет вид  $Ri < 1/\kappa_p$ , где  $Ri = N^2/U_{0z}^2$ ;  $\kappa_p$  — отношение коэффициента турбулентного переноса к коэффициенту турбулентной вязкости [1]. В градиентных полуэмпирических гипотезах замыкания  $\kappa_p$  обычно предполагается постоянным, тогда условие (19) дает ограничение на нарастание турбулентности по числу Ричардсона  $Ri$ . Однако, как показывают натурные и лабораторные эксперименты [1],  $\kappa_p$  является убывающей функцией  $Ri$ . Если это убывание достаточно быстрое, так что всюду  $Ri \kappa_p < 1$ , то условие (19) выполняется при любом  $Ri$ . Развита здесь модель дает именно такую спадающую зависимость  $\kappa_p(Ri)$ .

Баланс турбулентной энергии определяется уравнениями для средней кинетической энергии  $b$  и для средней потенциальной энергии  $\Pi = \langle \rho'^2 \rangle g^2 / 2N^2 \rho_0^2$ :

$$\frac{db}{dt} = U_{0z}^2 L \sqrt{b} - N^2 L \sqrt{b} \left( 1 - \frac{3\Pi}{b} (1-R) \right) - \frac{Cb^{3/2}}{L}, \quad (20)$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = N^2 L \sqrt{b} \left( 1 - \frac{3\Pi}{b} (1-R) \right) - \frac{Db^{3/2}\Pi}{L}.$$

Положим внешний масштаб турбулентности постоянным ( $L = \text{const}$ ). Это простое предположение часто делается при решении задач об эволюции турбулентности в океане [2]. Параметр  $R$  определяется формулой (15). Для скорости диссипации турбулентной энергии  $\epsilon_t = \langle v \langle \partial u_i' / \partial x_i \rangle \rangle$

$\langle \partial x_j + \partial u_j' / \partial x_i \rangle^2$  и скорости диффузии турбулентных флуктуаций плотности  $\Gamma_i = \langle \kappa (\partial \rho' / \partial x_i)^2 \rangle$  приняты колмогоровские аппроксимации  $\varepsilon_i = C b^{3/2} / L$ ,  $\Gamma_i = D b^{3/2} \Pi / L$  ( $C$  и  $D$  — эмпирические константы).

При этих условиях фазовая плоскость системы (20) имеет вид, изображенный на рис. 1. Независимо от величины  $Ri$  на фазовой плоскости имеются два состояния равновесия. Одно из них ( $\Pi_1 = b_1 = 0$ ) — неустойчивое состояние равновесия типа седла, а второе ( $\Pi_2, b_2$ ) — устойчивое типа узла. Все фазовые траектории стремятся к точке  $\Pi_2, b_2$ , т. е. независимо от начальных условий устанавливается равновесное состояние потока с ненулевой энергией пульсаций. Согласно [11], численные значения постоянных, входящих в (20), таковы:  $C = D = 0,09$ . Выражение для энергии турбулентности в стационарном состоянии имеет вид

$$b_2 = \frac{U_{0z}^2 L^2}{2C} (1 - Ri(4 - 3R) + [(1 - Ri(4 - 3R))^2 + 12(1 - R)Ri]^{1/2}),$$

$$\Pi_2 = \frac{U_{0z}^2 L^2}{C} - b_2.$$

Зависимость стационарных значений нормированных кинетической и потенциальной энергий от  $Ri$  изображена на рис. 2. Характерное время установления этого стационарного состояния  $\sim 1/(U_{0z}\sqrt{C})$ .

Обсудим подробнее роль дополнительного слагаемого в выражении для потока плавучести (см. формулу (14)). Как видно из (20), градиентное слагаемое  $-N^2 L \sqrt{b}$  в выражении для потока массы описывает переход энергии из кинетической в потенциальную. Дополнительное же слагаемое  $\frac{3\Pi}{V\sqrt{b}}(1-R)N^2$  имеет противоположный градиентному знак и описывает переход энергии из потенциальной в кинетическую за счет работы сил плавучести. Если число Ричардсона велико ( $Ri \gg 1$ ), то за достаточно короткое время ( $\sqrt{b}/(LN^2)$ ) происходит уравнивание величины энергии, переходящей из кинетической в потенциальную и наоборот, за счет работы силы плавучести. При этом между кинетической и потенциальной энергией турбулентности устанавливается соотношение  $b = 3\Pi(1-R)$ , а кинетическая энергия удовлетворяет уравнению

$$\frac{db}{dt} = L\sqrt{b} \frac{3(1-R)}{4-3R} U_{0z}^2 - \frac{b^{3/2}(3(1-R)C+D)}{(4-3R)L}, \quad (21)$$

в которое не входит  $Ri$ . Таким образом, при больших  $Ri$  эволюция турбулентности не зависит от числа Ричардсона.

Вычислим турбулентное число Прандтля в стационарном состоянии. По определению

$$\kappa_p = \frac{\langle \rho' w' \rangle dU_0/dz}{\langle u' w' \rangle d\rho_0/dz} = 1 - \frac{3\Pi}{b}(1-R).$$

Из системы (20) получаем

$$\kappa_p = (4 - 3R + 1/Ri - ((4 - 3R) + 1/Ri)^2 - 4/Ri)^{1/2} / 2.$$

Зависимость  $\kappa_p(Ri)$  убывающая, причем при  $Ri \gg 1$

$$\kappa_p(Ri) = 1 / [(4 - 3R)Ri].$$

Условие генерации турбулентности ( $Ri < 1/\kappa_p$ ) выполняется при любом  $Ri$ , т. е. порога генерации турбулентности по числу Ричардсона нет. Зависимость  $\kappa_p(Ri)$  представлена на рис. 3. Экспериментальные точки взяты из [1]; видно, что теория правильно описывает тенденцию поведения  $\kappa_p$  в зависимости от  $Ri$ .

**3. Эволюция турбулентности в поле внутренней волны.** Переменный сдвиг скорости во внутренней волне также может поддерживать мелко-

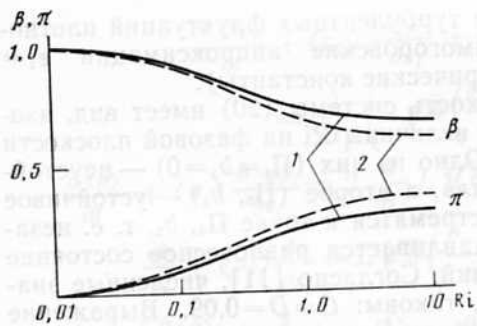


Рис. 2

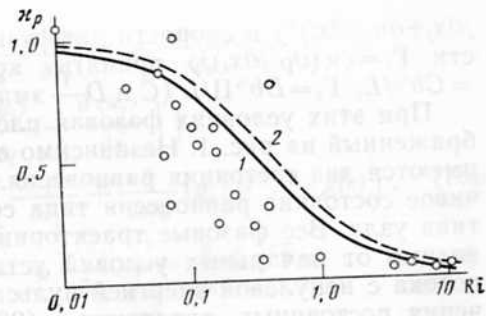


Рис. 3

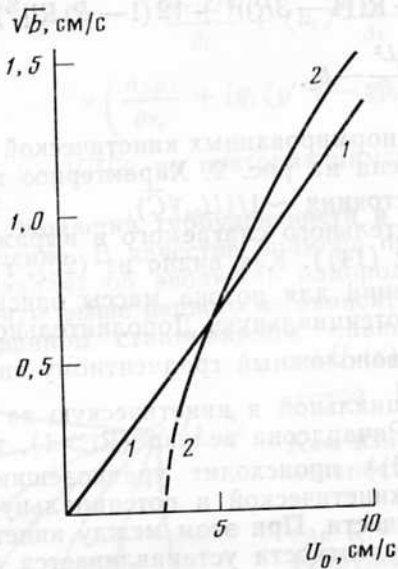


Рис. 4

Рис. 2. Зависимость безразмерных кинетической  $\beta = b/U_0^2 L^2$  и потенциальной  $\pi = \Pi/U_0^2 L$  энергий турбулентности в стационарном состоянии от  $Ri$ : 1 —  $R=0,3$ , 2 —  $R=0,5$

Рис. 3. Зависимость  $\xi_p(Ri)$  при  $R=0,3$  (1) и  $R=0,5$  (2). Экспериментальные точки взяты из сводного графика [1]

Рис. 4. Зависимость максимального значения  $\sqrt{b}$  в поле внутренней инерционно-гравитационной волны от амплитуды горизонтальной скорости в волне  $U_0$ : 1 — при использовании модели (13), (14), 2 — при использовании градиентных гипотез ( $\alpha_p=0,1$ )

масштабную турбулентность. Пусть в отсутствие волны жидкость стратифицирована с постоянной частотой Брента — Вайсяля  $N_0$ . Рассмотрим гармоническую внутреннюю инерционно-гравитационную волну, поле горизонтальной скорости в которой имеет вид

$$u_x = U_0 \cos(\omega t - kx - \kappa z), \quad u_y = U_0 \frac{f}{\omega} \sin(\omega t - kx - \kappa z).$$

Будем считать для простоты, что  $k \ll \kappa$ ; тогда  $\left| \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial u_y}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial \omega}{\partial z} \right|$ , что позволяет учесть только вертикальный турбулентный поток горизонтальной компоненты импульса

$$\langle u'_x \omega' \rangle = -L \sqrt{b} \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \langle u'_y \omega' \rangle = -L \sqrt{b} \frac{\partial u_y}{\partial z}.$$

Волновое возмущение частоты Брента — Вайсяля имеет вид

$$N^2 = -N_0^2 U_0 k / \omega \sin(\omega t - kx - \kappa z).$$

Пренебрегая турбулентной диффузией, можно записать уравнение для  $\Pi$  и  $b$  в виде

$$\frac{db}{dt} = L \sqrt{b} U_0^2 \kappa^2 \left[ \cos^2(\omega t - kx - \kappa z) + \frac{f^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t - kx - \kappa z) \right]$$



$$- Ri_0 \left( 1 - \frac{kU_0}{\omega} \sin(\omega t - kx - \kappa z) \left( 1 - \frac{3\Pi}{b} (1-R) \right) \right) - \frac{Cb^{3/2}}{L},$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = LV \bar{b} U_0^2 \kappa^2 Ri_0 \left( 1 - \frac{kU_0}{\omega} \sin(\omega t - kx - \kappa z) \left( 1 - \frac{3\Pi}{b} (1-R) \right) - \frac{Cb^{3/2}\Pi}{L} \right). \quad (22)$$

Здесь  $Ri_0 = N_0^2 / (U_0 \kappa)^2$ .

Для численного решения системы (22) были выбраны значения параметров, близкие к измеренным в натуральных экспериментах Санфорда [13]:  $N = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $\kappa = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ ,  $\omega = 1,1f$ ,  $f = 7 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ ,  $U_0$  изменяется в пределах  $1 \div 10 \text{ см/с}$ . Выбор частоты волны, близкой к инерционной, обусловлен тем, что именно в этом низкочастотном диапазоне сдвиги скорости максимальны, и, следовательно, наиболее эффективен рассматриваемый в работе механизм поддержания мелкомасштабной турбулентности, связанный с непосредственной передачей энергии сдвига скорости турбулентным пульсациям. Зависимость максимального значения  $\sqrt{b}$  в поле внутренней инерционно-гравитационной волны от амплитуды горизонтальной скорости в волне  $U_0$  изображена на рис. 4. Там же для сравнения приведен график зависимости  $\sqrt{b}(U_0)$ , полученный при использовании тех же параметров из градиентных гипотез. Видно сильное различие этих двух зависимостей в области малых значений  $U_0$ .

Из выражений (13), (14), используемых для замыкания уравнений Рейнольдса, следуют и качественные различия в поведении турбулентности в поле внутренней инерционно-гравитационной волны по сравнению с результатами применения градиентных гипотез. Так, из последних следует, что при  $f^2/\omega^2 < \kappa_p Ri < 1$  имеет место «срыв» турбулентности: в некоторые моменты времени ее энергия обращается в нуль и для новой «вспышки» необходима слабая турбулентная «затравка». Срыв обусловлен тем, что при некоторых значениях фазы волны сдвиг скорости недостаточен для того, чтобы выполнить условие поддержания турбулентности. Возможность срыва турбулентности отмечалась и в [12]. Как показано выше, модель (13), (14) не дает порогового значения числа Ричардсона, поэтому срыва турбулентности не происходит ни при каком значении  $Ri$ . Действительно, при большом  $Ri$  ( $Ri \gg 1$ ,  $Ri \gg \omega/\kappa U_0 \sqrt{C}$ ) энергия турбулентности удовлетворяет уравнению, аналогичному (21):

$$\frac{db}{dt} = L \sqrt{b} \frac{3(1-R)}{4-3R} U_0^2 \kappa^2 (\cos^2(\omega t - \kappa z - kx) + \frac{f^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t - kx - \kappa z)) - \frac{b^{3/2}C}{L}, \quad (23)$$

в которое  $Ri$  не входит. Если период волны велик по сравнению с временем нарастания турбулентности (т. е. при  $\omega/\kappa U_0/\sqrt{C} \ll 1$ ), легко записать квазистационарное решение уравнения (23):

$$b = \frac{L^2 \kappa^2 U_0^2}{C(4-3R)} 3(1-R) \left( \cos^2 \omega t + \frac{f^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t \right). \quad (24)$$

Видно, что энергия турбулентности, задаваемая формулой (24), не обращается в нуль, а поэтому здесь срыва не происходит.

На наш взгляд, выводы развитой здесь теории, учитывающей двухсторонний обмен между кинетической и потенциальной энергией, свидетельствуют в пользу объяснения повсеместного присутствия турбулентности в толще океана, связанного с возможностью ее поддержания внутренними волнами и сдвиговыми течениями при любых числах Ричардсона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. С. 318—357, 436.
2. Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоздат, 1981. С. 26—29, 237—240.
3. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. С. 32—48.
4. Lundgren T. S. Distribution functions in the statistical theory of turbulence//Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 5. P. 969—977.
5. Монин А. С. Уравнения турбулентного движения//ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1057—1067.
6. Онуфриев А. Т. О модельном уравнении для плотности вероятности в полуэмпирической теории турбулентного переноса//Турбулентные течения. М.: Наука, 1977. С. 110—117.
7. Николаева Ю. И., Островский Л. А. Резонансное затухание внутренних волн на случайном поле течений в океане//Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т. 22. № 3. С. 310—318.
8. Троицкая Ю. И. К теории турбулентной вязкости в стратифицированной жидкости. Препринт № 143 ИПФ АН СССР. Горький. 1986. 30 с.
9. Lundgren T. S. Model equation for nonhomogeneous turbulence//Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 3. P. 485—497.
10. Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. С. 281—289.
11. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1983. С. 227—322.
12. Островский Л. А., Соустова И. А., Цимринг Л. Ш. Воздействие внутренних волн в океане на мелкомасштабную турбулентность. Препринт № 31 ИПФ АН СССР. Горький, 1981. 13 с.
13. Sanford T. B. Observations of the vertical structure of internal waves//J. Geophys Res. V. 80. № 27. P. 3861—3871.

Академия наук СССР  
Институт прикладной физики

Поступила в редакцию  
13.V.1986

### A MODEL OF TURBULENT TRANSFER AND DYNAMICS OF TURBULENCE IN A STRATIFIED SHEAR FLOW

OSTROVSKY L. A., TROITSKAYA Yu. I.

Expressions for turbulent fluxes of momentum, mass, energy and other hydrodynamical characteristics in a stratified medium are derived using a kinetic approach. The form of the derived expressions is unambiguously determined by the assumption that the distribution function is close to the Gaussian one. The evolution of turbulence in a stratified shear flow and in an inertial-gravity internal wave field is investigated. It is shown that the possibility of maintaining the level of turbulence in weak shear flows typical for internal waves in the middle ocean layers can be explained taking into account the effect of mutual transformation of the potential and kinetic energy of turbulent pulsations.