

УДК 533.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФFUЗИОННЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С ПОТОКАМИ

Ю. И. Троицкая

Построена асимптотическая теория, описывающая нелокальные эффекты, обусловленные процессом слабой диффузии, при резонансном взаимодействии квазигармонических волн малой, но конечной амплитуды с потоками разной физической природы, в случае произвольного соотношения между нелинейностью и диффузией.

Исучено взаимодействие внутренних гравитационных волн с плоскопараллельными стратифицированными сдвиговыми потоками в нелинейно-диссипативном критическом слое (КС), формирующемся в окрестности резонансного уровня, в котором скорость потока совпадает с фазовой скоростью волны. Показано, что совместное действие радиационной силы во внутренней области КС и диффузии завихренности во внешней области приводит к установлению течения, в котором асимптотические значения средней завихренности по разные стороны от КС постоянны, но различны по величине. При выполнении условия линейной динамической устойчивости (число Ричардсона $Ri > 1/4$) возникающие перепады завихренности оказываются сравнимыми по порядку величины с её невозмущённым значением. Возникает волна, отражённая от неоднородности завихренности в КС. С ростом амплитуды падающей волны средняя завихренность со стороны падения стремится к пороговому значению линейной устойчивости (число Ричардсона $Ri > 1/4$), а коэффициент отражения — к минус единице.

В режиме нелинейного диссипативного КС исследовано квазистационарное асимптотическое поведение течения, формирующегося при падении внутренней гравитационной волны на динамически устойчивый стратифицированный по скорости и плотности поток, скорость которого на некотором уровне совпадает с фазовой скоростью волны. Показано, что диффузия завихренности приводит к формированию нелокальной переходной области от КС к невозмущённому течению, названной диффузионным пограничным слоем (ДПС). При этом происходит смещение КС навстречу падающей волне. Для средних полей найдено автомодельное решение, справедливое в случае постоянного перепада завихренности на КС, определены его параметры в зависимости от внутреннего числа Рейнольдса в КС, которое определяет соотношение между нелинейными и диффузионными эффектами для волнового поля в резонансной области. Определена структура и временная динамика ДПС, формирующегося при обтекании неровной поверхности потоком стратифицированной жидкости, меняющим направление на некотором уровне.

Показано, что при нелинейном резонансном взаимодействии электронов плазмы с волной Ленгмюра диффузия электронов в пространстве скоростей приводит к существенной нелокальной деформации их функции распределения за пределами области захвата. Определён вид деформированной функции распределения и вычислен декремент нелинейного затухания Ландау волны конечной амплитуды при произвольном соотношении частоты столкновений электронов и периода колебаний захваченных электронов.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование взаимодействия волн с потоками занимает значительное место в различных областях физики: механике жидкости и газа, включая геофизическую гидродинамику, физике плазмы, астрофизике. Наиболее интенсивным является резонансное взаимодействие, при котором фазовые скорости волн совпадают со скоростями определённой части частиц потока. Примером такого взаимодействия является линейное и нелинейное затухание Ландау продольных волн пространственного заряда на электронах разреженной плазмы [1]. Аналогом этого эффекта в общей теории нелинейных волн является адиабатическое взаимодействие длинных и коротких волн в условиях группового синхронизма [2]. Необходимость рассмотрения резонансного взаимодействия волн с потоками возникает и в гидродинамике при исследовании устойчивости плоскопараллельных потоков [3, 4]. При этом в задачах геофизической гидродинамики становятся существенными эффекты плавучести, обусловленные

плотностной стратификацией жидкости [3, 5, 6]. К рассмотрению аналогичного резонансного взаимодействия волн и частиц сводится и задача о нелинейном взаимодействии спиральной волны со звёздами вблизи радиуса коротации в дисках галактик [7].

Наиболее просто волны малой амплитуды в потоках можно описать в линейном приближении, пренебрегая диссипативными эффектами (столкновениями частиц, вязкостью и т. п.). В этом случае уравнение, описывающее гармонические волновые возмущения (линеаризованное уравнение Власова, уравнение Релея, уравнение Тейлора—Гольдштейна и т. п.), имеет особенность в резонансной точке. Это означает, что в некоторой её окрестности линейное бездиссипативное приближение неприменимо, и необходимо учитывать ряд дополнительных факторов: конечность амплитуды волновых полей (нелинейность), диссипацию, конечность ширины спектра волновых полей или комбинацию этих факторов. При этом область, в которой существенны указанные факторы, в гидродинамике называется критическим слоем (нелинейным, диссипативным, нестационарным или диссипативно-нелинейным и т. п. в зависимости от учтённых факторов). В физике плазмы критическому слою (КС) можно поставить в соответствие область захваченных частиц.

Если перечисленные выше факторы достаточно слабы, то их влияние существенно только внутри резонансной области. Во внешней области для волновых полей применимо линейное бездиссипативное стационарное приближение. При этом для описания взаимодействия волны с потоком можно использовать метод сращиваемых асимптотических разложений, разработанный применительно к задачам гидродинамики [8].

К настоящему времени наиболее изучено резонансное взаимодействие волн с потоками в бездиссипативном приближении. При этом энергообмен волны с потоком имеет место в узкой резонансной области (КС, область захвата и т. п.). В этой же области происходит деформация распределения частиц (образование плато на функции распределения частиц плазмы, выравнивание профиля завихренности сдвигового потока и т. п.).

Бездиссипативное приближение применимо для достаточно быстро протекающих процессов. Для изучения асимптотики поведения системы волна—поток на больших временах необходимо учитывать диффузию частиц потока в пространстве, в котором задано их распределение. В случае частиц плазмы это пространство скоростей, в случае адиабатического взаимодействия длинных и коротких волн — пространство волновых чисел коротких волн, в случае КС в сдвиговом потоке — физическое пространство. При этом возникает новый нелинейный эффект. Нелинейное взаимодействие волн с частицами или потоком приводит к существенной деформации функции распределения в резонансной области, т. е. распределение становится неравновесным. Диффузия частиц в пространстве скоростей, стремящаяся восстановить равновесие, приводит к глобальной деформации всего распределения частиц. Причём сколь угодно слабая диффузия на достаточно больших временах приводит к принципиальному изменению картины деформации среднего распределения частиц по сравнению с бездиссипативным случаем. Это сильный нелинейный эффект, который определяет главным образом нелинейные свойства рассматриваемой системы.

Совместное действие нелинейности и диффузии было впервые рассмотрено в гидродинамической задаче о квазистационарном КС в плоскопараллельном потоке однородной несжимаемой жидкости, скорость которого меняется в поперечном направлении [9]. Впоследствии этот эффект был рассмотрен в случае слабостратифицированной жидкости [10] и в случае сильной устойчивой стратификации [11].

В настоящей работе будут рассмотрены особенности эффекта нелокальной деформации среднего распределения частиц на примерах из различных областей физики. В разделе 1 будет рассмотрен пример из геофизической гидродинамики — диссипативный нелинейный критический слой в динамически устойчивом стратифицированном сдвиговом потоке. В разделе 2 будет рассмотрена нелокальная деформация распределения электронов горячей плазмы при резонансном взаимодействии с продольной волной пространственного заряда.

1. НЕЛИНЕЙНЫЙ ДИССИПАТИВНЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛОЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

1.1. Стационарный критический слой

1.1.1. Постановка задачи. Внешняя задача, скейлинг. Рассмотрим двумерное течение стратифицированной несжимаемой жидкости с учётом вязкости и теплопроводности. В приближении Буссинеска оно описывается системой уравнений для завихренности и плотности, которую можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + J(\Delta \psi, \psi) - \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\Delta \Delta \psi}{\text{Re}_0}, \quad \frac{\partial b}{\partial t} + J(b, \psi) = \frac{\Delta b}{\text{Re}_0 \text{Pr}}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, $J(a, b) = \partial(a, b)/\partial(x, z)$ — оператор Якоби, $x = x_{\text{dim}}/L_0$, $z = z_{\text{dim}}/L_0$ — безразмерные горизонтальная и вертикальная координаты, L_0 — характерный масштаб течения, $t = t_{\text{dim}}U_0/L_0$ — безразмерное время, U_0 — характерная скорость течения, $\psi = \psi_{\text{dim}}/(U_0L_0)$ — безразмерная функция тока, $b = (\rho - \rho_0)g/(N_0^2L_0\rho_0)$ — безразмерная плотность, ρ_0 — невозмущённая плотность, g — ускорение свободного падения, N_0 — характерная частота плавучести, $\text{Re}_0 = U_0L_0/\nu$ — число Рейнольдса, определённое по параметрам среднего течения, $\text{Pr} = \nu/\nu_T$ — число Прандтля, ν и ν_T — коэффициенты кинематической вязкости и диффузии.

Рассмотрим возмущение в виде гармонической плоской волны малой амплитуды ϵ на фоне среднего течения с профилем скорости $U(z)$, стратифицированного по плотности по закону $b_0(z)$. В этом случае решение системы (1) можно искать в виде разложения в ряд по степеням ϵ . При этом

$$\begin{aligned} \psi &= \int U(z) dz + \epsilon \text{Re} \left\{ \Psi^{(1)}(z) \exp[i(\omega t - kx)] \right\} + \epsilon^2 \Psi^{(2)} + \dots, \\ b &= \int b_0(z) dz + \epsilon \text{Re} \left\{ b^{(1)}(z) \exp[i(\omega t - kx)] \right\} + \epsilon^2 b^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ω и k — частота и волновое число возмущения.

В первом порядке по ϵ и в нулевом порядке по Re_0^{-1} (в линейном бездиссипативном приближении) функция $\Psi^{(1)}(z)$ удовлетворяет уравнению Тейлора—Гольдштейна

$$\frac{d^2 \Psi^{(1)}}{dz^2} + \frac{d^2 U/dz^2}{c - U} \Psi^{(1)} + \left[\frac{N^2}{(c - U)^2} - k^2 \right] \Psi^{(1)} = 0. \quad (3)$$

Здесь $N^2 = db_0/dz$ — квадрат нормированной частоты плавучести, $c = \omega/k$ — фазовая скорость волны.

Уравнение (3) имеет особенности в точке $U(z_c) = c$, а его решение — точку ветвления при $z = z_c$: при числе Ричардсона $\text{Ri} > 1/4$ функция $\Psi^{(1)} \sim (z - z_c)^{1/2 \pm i\mu}$, где $\mu = \sqrt{\text{Ri} - 1/4}$. Это означает, что в окрестности КС уравнение (3) и его решения, вообще говоря, несправедливы. В малой окрестности КС необходимо учесть дополнительные факторы: диссипацию [12–16], нелинейность [17–19] (см. также обзоры [6, 20] и ссылки в них) или нестационарность [21–23]. Области, в которых существенны диссипация, нелинейность или нестационарность, называют соответственно вязким, нелинейным и нестационарным критическими слоями; их вертикальные масштабы составляют [19]

$$\delta_{\text{vis}} = (\text{Re}_0 k dU/dz)^{-1/3}; \quad \delta_{\text{nl}} = \epsilon^{2/3}; \quad \delta_t = (|\partial \psi / \partial t| / |\psi|) (k dU/dz)^{-1}. \quad (4)$$

В настоящей работе рассматривается совместное действие нелинейности и вязкости в стационарном КС, т. е. $\delta_{\text{vis}} \sim \delta_{\text{nl}} \gg \delta_t$. Если амплитуда волны мала, а число Рейнольдса велико, так что δ_{vis} и

δ_{nl} малы, то задачу можно решать методом сращиваемых асимптотических разложений. При этом внутреннее разложение внешнего решения представляет собой сумму средних полей и решения уравнения Тейлора—Гольдштейна (3), представленного в виде разложения Фробениуса:

$$\psi_{\pm} = \varepsilon^{2/3} c_{\pm} z + \Gamma_{\pm} z^2/2 + \dots + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \left[A_{\pm}^{(n)} |z|^{1/2+i\mu_{\pm}} \left(1 + \alpha_1^{(n)} z + \dots \right) + B_{\pm}^{(n)} |z|^{1/2-i\mu_{\pm}} \left(1 + \beta_1^{(n)} z + \dots \right) e^{i\xi n} \right] \right\}. \quad (5)$$

Здесь индексы $+$ и $-$ относятся к решениям выше и ниже КС, $\xi = k(x - ct)$ — нормированная горизонтальная «бегущая» координата. Слагаемые $\Gamma_{\pm} z^2/2$ соответствуют значениям завихренности по разные стороны от КС, т. е. имеется скачок завихренности на КС, аналогичный полученному в [9, 10], возникающий, как это будет показано ниже, в нулевом порядке по ε . Кроме того, в решении (5) учитываются высшие гармоники, появление которых связано с нелинейностью КС. Причём подобно тому, как скачок завихренности возникает в нулевом порядке по ε , высшие гармоники имеют тот же порядок, что и основная. Это свойство сингулярных возмущений.

Задача состоит в нахождении связи между величинами с индексами $+$ и $-$, т. е. правил обхода. Для этого необходимо найти внутреннее решение. Из (5) следует, что вертикальная внутренняя (внутри КС) координата должна быть определена следующим образом: $\eta = z/\varepsilon^{2/3}$ (см. [9]), а внутреннее решение надо искать в виде рядов по степеням $\varepsilon^{2/3}$:

$$\psi = \varepsilon^{4/3} \left(\Phi + \varepsilon^{2/3} \varphi_1 + \dots \right); \quad b = \varepsilon^{2/3} \left(B + \varepsilon^{2/3} b_1 + \dots \right).$$

В нулевом порядке по ε уравнения для Φ и B имеют вид

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \eta^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \operatorname{Ri} \frac{\partial b}{\partial \xi} = \lambda \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4}, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\lambda}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2}. \quad (6b)$$

Здесь $\operatorname{Ri} = N_-^2/\Gamma_-^2$ — число Ричардсона при $\eta \rightarrow -\infty$, $\lambda = (\operatorname{Re}_0 \Gamma_- \varepsilon^2)^{-1}$ — параметр, характеризующий отношение вязкости и нелинейности (более точно $\lambda = (\delta_{\text{vis}}/\delta_{nl})^3$).

Из вида уравнений (6) ясно, что λ имеет смысл обратного внутреннего числа Рейнольдса ($\operatorname{Re}_i = \lambda^{-1}$), определённого по амплитуде волнового возмущения в окрестности КС. Предел $\lambda \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Re}_i \ll 1$) соответствует вязкому линейному течению в окрестности КС, а $\lambda \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re}_i \gg 1$) — невязкому нелинейному течению.

Граничные условия для Φ и B определяются условиями сращивания с внешним решением. Внутреннее решение очевидно зависит от амплитуд гармоник волнового поля вне КС ($A_{\pm}^{(n)}, B_{\pm}^{(n)}$), т. е. от постановки задачи. В [11] рассмотрена задача о падении волны на КС, её отражения с коэффициентом R и прохождения с коэффициентом T . Такой постановке задачи соответствуют следующие амплитуды гармоник при $\eta \rightarrow \pm\infty$:

$$\left| B_+^{(1)} \right| = 1; \quad A_+^{(1)} = R; \quad B_-^{(1)} = T; \quad A_-^{(1)} = 0; \\ A_+^{(n)} = R_n; \quad B_-^{(n)} = T_n; \quad B_+^{(n)} = A_-^{(n)} = 0, \quad (7)$$

где $n = 2, 3, \dots$, R_n и T_n — амплитуды n -х гармоник, излучаемых соответственно вверх и вниз от КС. В [11] использована нормировка на амплитуду падающей волны. Учитывалось также, что КС излучает волны высших гармоник.

1.1.2. Особенности асимптотического поведения средних полей при переходе через стационарный критический слой. Ряд интегральных соотношений может быть получен без решения системы (6). Так, чтобы найти выражение для скачка завихренности, проинтегрируем уравнение (6а) по η от $-\infty$ до η и два раза и усредним по ξ . С учётом периодичности решения по ξ и поведения полей на бесконечности (см. (5) и (7)) после несложных преобразований получим

$$2\lambda(\Gamma_+ - 1) = \mu_+(1 - |R|^2) - \mu_-|T|^2 + \mu_+ \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|^2 - \mu_- \sum_{n=1}^{\infty} |T_n|^2. \quad (8)$$

Уравнение (8) показывает, что радиационная сила, равная разности волновых потоков импульса выше и ниже КС (левая часть (8)), в стационарном течении компенсируется вязкой силой, равной разности вязких напряжений выше и ниже КС (правая часть (8)). В результате формируется течение, в котором завихренность при удалении вверх и вниз от КС стремится к некоторым постоянным, которые, вообще говоря, различны. Аналогично из уравнения (6б) можно получить $N_-^2 = N_+^2, N_-^2 = 1$. Отсутствие скачка градиента плотности при переходе через КС связано с тем, что волновые потоки массы выше и ниже КС одинаковы (равны нулю), поэтому в стационарном состоянии должны быть равны и диффузионные потоки, а значит, и градиенты плотности.

Итак, резонансное взаимодействие волны с потоком в резонансной области при учёте диффузии завихренности, обусловленной вязкостью, приводит к появлению перепада завихренности при переходе через КС. Это означает, что возникают возмущения среднего профиля скорости, растущие при удалении от КС, т. е. возмущения средних полей становятся нелокальными. Как отмечалось в [3, 6], возникает вопрос о практической реализуемости такого течения. Рост возмущения с удалением от КС означает, что возмущение среднего течения становится нелокальным, и вопрос о его реализуемости должен решаться с учётом граничных условий на бесконечности (этот вопрос рассматривается в разделе 2).

1.1.3. Характеристики волновых полей в нелинейном диссипативном критическом слое. По результатам численного решения системы (6) были построены зависимости от λ всех величин, входящих в формулу (8): Γ_+ (рис. 1), нормированного коэффициента прохождения $|T| e^{\pi\mu_-}$ (рис. 2) и $|R|$ (рис. 3), а также фазы коэффициента отражения ϕ_R (рис. 4) при четырёх значениях числа Ричардсона: $Ri = 0,5; 1; 2; 3$ (подробности численной процедуры см. в [11]).

Зависимость $\Gamma_+(\lambda)$ в широком диапазоне значений λ можно описать простой формулой. Действительно, из рис. 2 и 3 легко видеть, что для всех $Ri \geq 1$ при $\lambda \geq 0,15$ справедливы неравенства $|R|^2 \ll 1; |T|^2 \ll 1$. Но в этом случае из (8) следует

$$\lambda(\Gamma_+) = \frac{\sqrt{Ri - 1/4}}{2(\Gamma_+ - 1)}. \quad (9)$$

На рис. 1 эта зависимость отмечена пунктиром. Видно, что почти при всех значениях λ она совпадает с зависимостью, полученной в результате численного расчёта. Отличия имеются лишь в узкой области вблизи $\lambda = 0$, т. е. в сильно нелинейном режиме.

Как из численного расчёта, так и из формулы (9) следует, что при стремлении λ к нулю Γ_+ стремится к значению $2Ri^{1/2}$, при котором число Ричардсона выше КС $Ri_+ = 1/4$, а $\mu_+ = 0$. Однако характер зависимости, следующий из (9), отличается от полученного численно. В последнем случае, как видно из рис. 2–4, коэффициент отражения R стремится к минус единице, а коэффициент прохождения T — к нулю. Этот численный результат можно пояснить с помощью следующих качественных рассуждений. При стремлении Ri_+ к $1/4$ поле волны, пропорциональное $z^i \sqrt{Ri_+ - 1/4}$, становится всё менее осциллирующим. Это означает, что эффективная вертикальная длина волны выше КС стремится к бесконечности. В то же время ниже КС число Ричардсона не близко к $1/4$, и длина волны конечна.

Таким образом, возникает ситуация, эквивалентная отражению волн на границе раздела сред с сильно отличающимися показателями преломления при переходе волны из оптически менее плотной среды в более плотную. Из вида асимптотики волнового поля (5) ясно, что роль вертикальных компонент волновых векторов вблизи КС играют параметры μ_{\pm} . Но тогда коэффициенты отражения и прохождения имеют вид

$$R = -1 + O(\mu_+/\mu_-), \quad T = O(\mu_+/\mu_-). \quad (10)$$

С учётом (10) из формулы (8) следует, что $\lambda = O\left\{\mu_+^2/[\mu_- (2\text{Ri}^{1/2} - 1)]\right\}$. При этом комплексная амплитуда волнового поля выше КС есть малая величина порядка μ_+ :

$$\varphi_{1+} = \eta^{1/2-i\mu_+} + [-1 + O(\mu_+/\mu_-)] \eta^{1/2+i\mu_+} \approx \eta^{1/2} O(\mu_+/\mu_-) - 2i\mu_+ \eta^{1/2} \ln \eta.$$

В этом случае естественными внутренними переменными, в которых амплитуды волновых полей порядка единицы, являются следующие функции: $\eta_{\text{new}} = \eta/\mu_+^{2/3}$; $\varphi_{\text{new}} = \varphi/\mu_+^{4/3}$; $b_{\text{new}} = b/\mu_+^{2/3}$. В новых переменных скачок завихренности остаётся тем же, а поля φ_{new} и b_{new} удовлетворяют системе (6), в которой λ_{new} порядка $\lambda\mu_+^{-2}$, или $\lambda_{\text{new}} = O\left[(\text{Ri} - 1/4)^{-1/2}/(2\text{Ri}^{1/2} - 1)\right]$, т. е. с ростом Ri параметр λ_{new} убывает (КС становится всё более нелинейным).

Итак, с ростом числа Рейнольдса, определяемого по амплитуде падающей волны ($\lambda \rightarrow 0$), Γ_+ стремится к $2\text{Ri}^{1/2}$, при котором $\text{Ri}_+ = 1/4$. При этом возникает отражённая волна, коэффициент отражения которой близок к единице, находящаяся в противофазе с падающей. В результате амплитуда эффективного волнового поля существенно меньше, чем у падающей волны, причём при увеличении амплитуды падающей волны суммарное поле остаётся неизменным (λ_{new} не зависит от λ). В результате при $\lambda \rightarrow 0$ течение внутри КС не меняется, а число Рейнольдса этого течения Re_i , определяемое параметром λ_{new} , а не λ , остаётся неизменным и небольшим. Оценка внутреннего числа Рейнольдса Re_i по λ для $\text{Ri} = 0,5$ даёт $\text{Re}_i \approx 10$, для $\text{Ri} = 1$ — $\text{Re}_i \approx 30$, для $\text{Ri} = 2$ — $\text{Re}_i \approx 60$, для $\text{Ri} = 3$ — $\text{Re}_i \approx 100$.

1.2. Нелинейный квазистационарный диссипативный критический слой в стратифицированном сдвиговом потоке

1.2.1. Постановка задачи. Итак, при переходе волны конечной амплитуды через КС в вязком потоке формируется профиль средней скорости со скачком завихренности

$$\langle \Omega \rangle / \Omega_0 = 1 + \Gamma + \Delta\Gamma \text{sign}(z - z_c) / 2, \quad (11)$$

где $\tau = t\epsilon^{2/3}$, Ω_0 — невозмущённая завихренность, z — вертикальная координата, z_c — координата КС, $\Delta\Gamma$ — нормированный скачок завихренности, Γ — константа. Оказывается, что $\Delta\Gamma$ больше по порядку величины, чем возмущение амплитуды ϵ , вызвавшее его. Возмущение скорости, соответствующее возмущению завихренности (11), неограниченно растёт при удалении от критического слоя. Чтобы ограничить этот рост, необходимо выйти из рамок стационарного приближения и учесть временную зависимость, как это предложено в [3, 6] и реализовано в [24].

Следует также принять во внимание, что скачок завихренности $\Delta\Gamma$ в (11) может быть получен в рамках стационарного приближения, но Γ — произвольная постоянная стационарной задачи. Это значит, что завихренность по разные стороны от КС ($\Gamma_+ = 1 + \Gamma + \Delta\Gamma/2$ и $\Gamma_- = 1 + \Gamma - \Delta\Gamma/2$) может быть вычислена только в рамках нестационарной задачи, где Γ может быть определено, причём результат

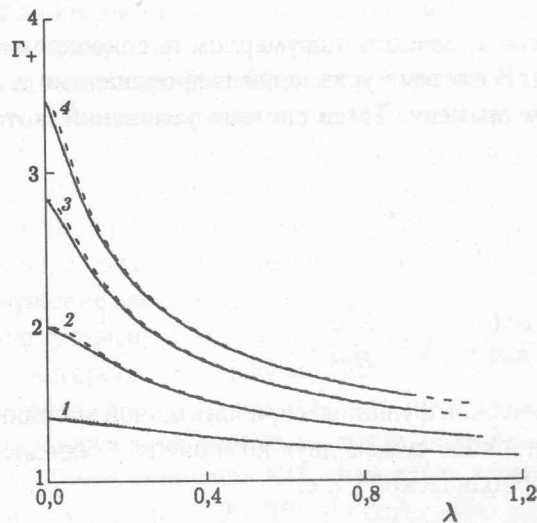


Рис. 1. Зависимость завихренности выше критического слоя от λ для различных чисел Ричардсона: кривая 1 соответствует $Ri = 0,5$; 2 — $Ri = 1$; 3 — $Ri = 2$; 4 — $Ri = 3$. Число Прандтля $Pr = 0,71$. Пунктирные линии — функции $\Gamma_+(\lambda)$, рассчитанные по формуле (9)

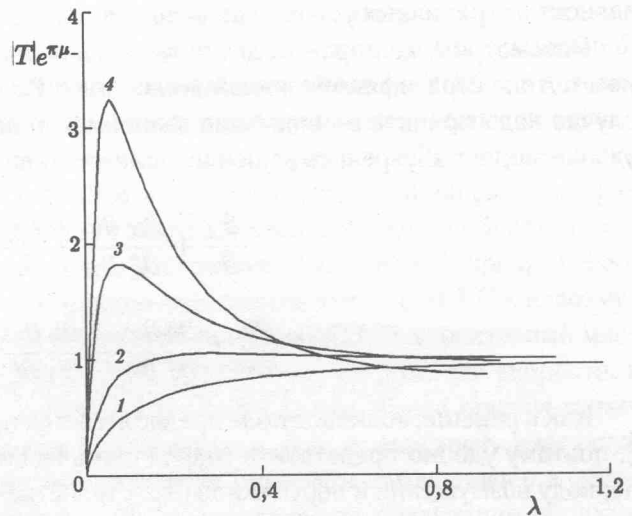


Рис. 2. Зависимость нормированного коэффициента прохождения от λ для различных чисел Ричардсона: кривая 1 соответствует $Ri = 0,5$; 2 — $Ri = 1$; 3 — $Ri = 2$; 4 — $Ri = 3$. Число Прандтля $Pr = 0,71$

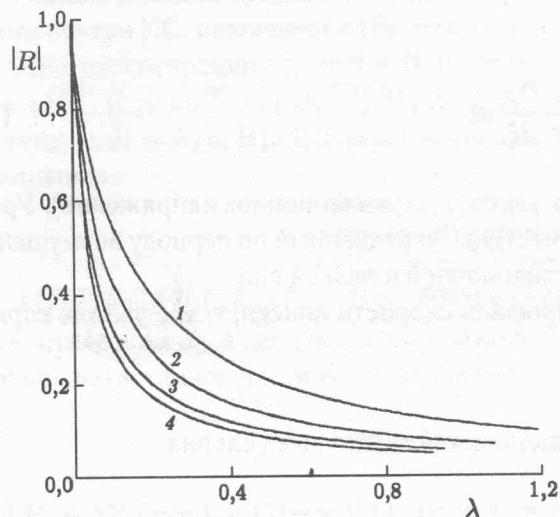


Рис. 3. Зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от λ для различных чисел Ричардсона: кривая 1 соответствует $Ri = 0,5$; 2 — $Ri = 1$; 3 — $Ri = 2$; 4 — $Ri = 3$. Число Прандтля $Pr = 0,71$

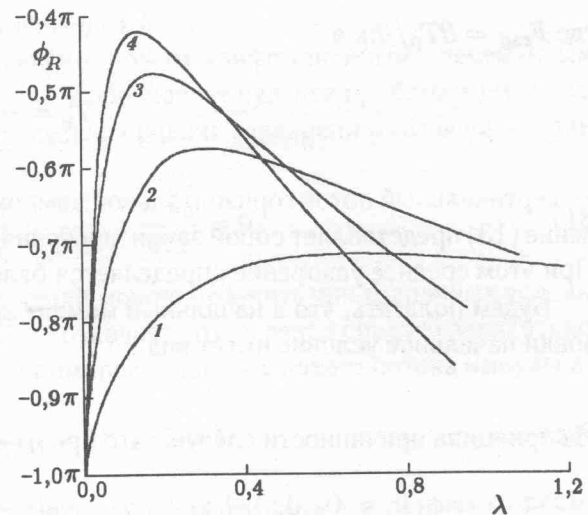


Рис. 4. Зависимость фазы коэффициента прохождения ϕ_R от λ для различных чисел Ричардсона: кривая 1 соответствует $Ri = 0,5$; 2 — $Ri = 1$; 3 — $Ri = 2$; 4 — $Ri = 3$. Число Прандтля $Pr = 0,71$

зависит от граничных условий во внешней области КС.

Рассмотрим, как происходит установление скачка завихренности в двумерном плоскопараллельном потоке стратифицированной жидкости с $Ri > 1/4$. В системе уравнений гидродинамики в этом случае надо принять во внимание зависимость полей от времени. Тогда система уравнений, которой удовлетворяет внутреннее решение, принимает вид (ср. с (6а, б))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - Ri \frac{\partial b}{\partial \xi} &= \lambda \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial b}{\partial \tau} + \frac{\partial b}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\lambda}{Pr} \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2}, \quad \chi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Как и раньше, волновое поле предполагается периодической функцией горизонтальной координаты ξ , поэтому удобно представить гидродинамические поля в виде суммы двух компонент — средней по периоду возмущения и переменной (пространственно-периодической), т. е.

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ b \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0(\eta, \tau) \\ b_0(\eta, \tau) \\ \chi_0(\eta, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi'(\eta, \xi, \tau) \\ b'(\eta, \xi, \tau) \\ \chi'(\eta, \xi, \tau) \end{bmatrix}.$$

Уравнения для средних полей легко могут быть получены усреднением уравнений системы (12) по периоду возмущений. При этом уравнение для средней горизонтальной компоненты скорости имеет вид:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} - \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} = F_{\text{rad}}, \quad (13)$$

где $F_{\text{rad}} = \partial T_p / \partial \eta$, а

$$T_p = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi \quad (14)$$

— вертикальный поток горизонтальной компоненты импульса (или радиационное напряжение). Уравнение (13) представляет собой закон движения жидкой частицы, усреднённый по периоду возмущения. При этом среднее ускорение определяется балансом радиационной и вязкой сил.

Будем полагать, что в начальный момент времени профиль скорости линеен, т. е. с учётом нормировки начальное условие имеет вид

$$u_0 = \eta.$$

Из принципа причинности следует, что при $\eta \rightarrow \pm\infty$ выполняются граничные условия

$$u_0(\eta \rightarrow \pm\infty, \tau) = \eta. \quad (15)$$

Уравнения для средней плотности аналогичны (13)–(15).

Рассмотрим качественно эволюцию среднего потока на больших временах. Будем полагать, что временная изменчивость полей в окрестности КС определяется только диффузионными процессами. Это предположение правомочно, поскольку при $Ri > 1/4$ течение устойчиво. Очевидно, что КС становится квазистационарным на временах, когда характерный масштаб диффузионного расплывания $\sqrt{\lambda\tau}$ (диффузионная длина) велик по сравнению с масштабом δ КС, т. е.

$$\tau \gg \delta^2 / \lambda. \quad (16)$$

Для квазистационарных внутренних волн хорошо известно [25], что поток импульса T_p в них постоянен по η вне КС, т. е. производная $\partial T_p / \partial \eta$ отлична от нуля лишь в окрестности КС толщиной δ . Качественно картина деформации среднего течения выглядит следующим образом. В КС на течение действует радиационная сила. Под действием вязкости происходит диффузия завихренности от КС, причём на достаточно больших временах диффузионный масштаб много больше δ . Допустим, следуя работе [11], что волна распространяется из области $\eta > 0$. В этом случае (см. [11]) направление радиационной силы в КС таково, что при деформации профиля скорости завихренность в области $\eta > 0$ больше, а при $\eta < 0$ — меньше её невозмущённого значения, а достаточно далеко от КС (при $\eta \rightarrow \pm\infty$) возмущение завихренности отсутствует. При этом формируется переходная область от КС к невозмущённому течению, которую мы назвали диффузионным пограничным слоем (ДПС), характерный масштаб которого — диффузионная длина $\sqrt{\lambda\tau}$. КС представляет собой точку на профиле скорости, в которой по определению скорость постоянна и равна фазовой скорости волны. Такое течение может быть реализовано только в случае, если КС смещается в сторону $\eta > 0$, т. е. навстречу падающей волне. Такое смещение КС отмечалось в численных экспериментах [26–28] и наблюдалось в лабораторных условиях [29, 30]. В общем виде закон смещения КС можно записать следующим образом: $\eta = s(\tau)\sqrt{\lambda\tau}$.

При описании гидродинамических полей в окрестности смещающегося КС удобно перейти к «бегающей» вертикальной координате

$$h = \eta - s(\tau)\sqrt{\lambda\tau}. \quad (17)$$

Кроме того, рассматривая диффузионные процессы, удобно вместо временной переменной τ пользоваться величиной $\nu = 1/(2\sqrt{\lambda\tau})$, обратной диффузионной длине.

Оценки показывают, что на больших временах (при $\nu \ll 1$) уравнения, описывающие течение жидкости внутри КС, совпадают с (6а, б) с точностью до замены $\eta \rightarrow h$.

При рассмотрении течений в ДПС естественно перейти к новым «диффузионным» переменным: $\beta = \nu b^{(0)}$, $V = \nu u^{(0)} = \nu \partial \varphi^{(0)} / \partial h$, $X = \chi^{(0)}$. Здесь индекс 0 обозначает нулевое приближение по параметру ν , $H = h/\nu$. В [24] показано, что в нулевом порядке по ν средняя завихренность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial H^2} + 2\nu \frac{\partial X_0}{\partial \nu} + 2 \left(H + \frac{s}{2} - \frac{\nu ds}{2 d\nu} \right) \frac{\partial X_0}{\partial H} = 0. \quad (18)$$

Из условий сращивания внешнего и внутреннего решений можно получить три граничных условия на критическом слое для внешнего решения. Первое из них означает, что перепад средней завихренности на квазистационарном КС равен перепаду среднего нормированного волнового потока импульса:

$$X_0(+0, \nu) - X_0(-0, \nu) = \Gamma_+ - \Gamma_- = \Xi(\nu), \quad (19)$$

где $\Xi = [T_p(+\infty) - T_p(-\infty)]/\lambda$. Второе и третье граничные условия $V_0(\pm 0, \nu) = 0$ имеют простой физический смысл: в системе отсчёта, движущейся вместе с волной, средняя скорость потока в КС по определению равна нулю.

С учётом (15) и выражения для H граничные условия для скорости и завихренности на бесконечности имеют вид

$$V_0(\pm\infty, \nu) = H + s/2, \quad X_0(\pm\infty, \nu) = 1. \quad (20)$$

Рассмотрим примеры точных и приближённых решений полученных уравнений.

1.2.2. Автомодельная деформация среднего течения в диффузионном пограничном слое.

Пример точного решения. В простейшем случае постоянного скачка потока импульса при переходе

через КС можно найти автомодельное решение уравнения (18). В этом случае X_0 и V_0 не зависят от ν , и для X_0 получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 X_0}{dH^2} + 2 \left(H + \frac{s}{2} \right) \frac{dX_0}{dH} = 0, \quad (21)$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям (20), имеет вид

$$X_0(H) = 1 + C_{\pm} \int_{\pm\infty}^{H+s/2} e^{-H_1^2} dH_1. \quad (22)$$

Интегрируя (22) по H с учётом граничных условий (20) на бесконечности имеем

$$V_0(H) = H + \frac{s}{2} + C_{\pm} \left[\left(H + \frac{s}{2} \right) \int_{\pm\infty}^{H+s/2} e^{-H_1^2} dH_1 + \frac{e^{-(H+s/2)^2}}{2} \right]. \quad (23)$$

Используя граничные условия на критическом слое, можно найти завихренности Γ_+ и Γ_- по разные стороны от него:

$$X_0 = \begin{cases} \Gamma_+ = \frac{e^{-s^2/4}}{e^{-s^2/4} - sJ}, & H = +0; \\ \Gamma_- = \frac{e^{-s^2/4}}{e^{-s^2/4} + s(\sqrt{\pi} - J)}, & H = -0. \end{cases} \quad (24)$$

Уравнение, связывающее скачок завихренности $\Xi = \Gamma_+ - \Gamma_-$ и s , имеет вид

$$\sqrt{\pi} e^{-s^2/4} s = \Xi \left(e^{-s^2/4} - sJ \right) \left[e^{-s^2/4} + s(\sqrt{\pi} - J) \right]. \quad (25)$$

Зависимость $s(\Xi)$ изображена на рис. 5а, а зависимости $\Gamma_{\pm}(\Xi)$ — на рис. 5б.

При малых и больших Ξ можно найти достаточно простые выражения для $s(\Xi)$ и $\Gamma_{\pm}(\Xi)$. Так, при $\Xi \ll 1$ указанные зависимости имеют вид $s = \Xi/\sqrt{\pi}$, $\Gamma_{\pm} = 1 \pm \Xi/2$, а при $\Xi \gg 1$ — $s = \sqrt{2\Xi}$, $\Gamma_+ = \Xi$, $\Gamma_- = e^{-\Xi/2}/\sqrt{2\pi\Xi}$.

Зависимость $V_0(H)$ при нескольких значениях Ξ изображена на рис. 6, а на рис. 7 показана временная эволюция профилей $u_0(\eta, \tau)$, соответствующая зависимости (23) при одном значении Ξ . Видно, что происходит диффузия завихренности из КС и его смещение навстречу падающей волне.

Таким образом, в случае постоянного перепада потока импульса на КС мы полностью ответили на вопросы, сформулированные в начале этого параграфа: 1) как может реализоваться нелокальная деформация профиля скорости, в которой возмущения растут при удалении от КС (ДПС и КС, смещающийся навстречу падающей волне); 2) чему равны значения завихренности по разные стороны от КС (формула (25)).

1.2.3. Особенности нелокальной деформации среднего профиля скорости при излучении волн конечной амплитуды в потоках с резонансными слоями. Рассмотрим теперь более реалистичный источник волнового возмущения, например волнистую поверхность во внешней области течения. Тогда легко видеть, что потоки импульса по обе стороны от КС, а также их перепад на КС будут зависеть от времени. Действительно, волна, излучаемая источником во внешней области течения, распространяется по направлению к ДПС, частично отражается от неоднородного профиля завихренности и частично проходит. Затем прошедшая волна взаимодействует с КС: частично отражается, частично проходит, частично поглощается. После этого волна, прошедшая через КС, взаимодействует

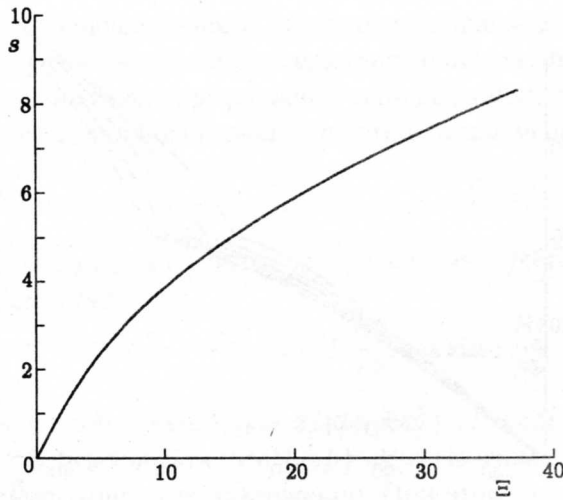


Рис. 5а. Зависимость константы в законе движения КС от скачка завихренности

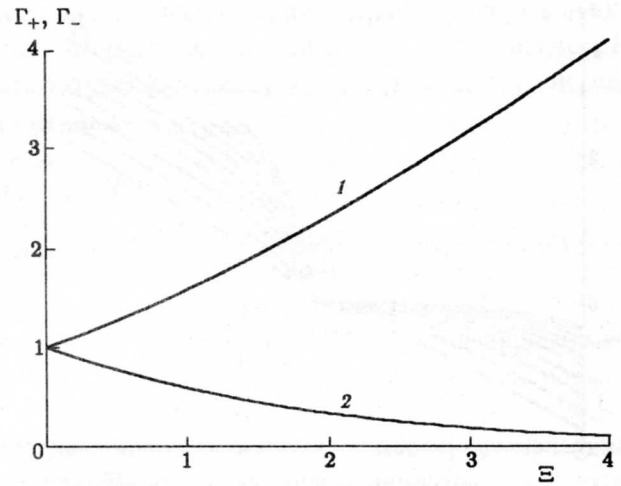


Рис. 5б. Зависимость средней завихренности по разные стороны от КС от Ξ . Кривая 1 — средняя завихренность Γ_+ со стороны падения волны; 2 — средняя завихренность Γ_- со стороны прошедшей волны

с ДПС ниже КС. Поскольку профиль скорости в ДПС зависит от времени, то коэффициент отражения также зависит от времени. Это означает, что волновой поток импульса, который равен алгебраической сумме потоков в падающей и отражённой волнах, зависит от времени. В этом случае не удаётся получить простого автомодельного профиля скорости в ДПС, и необходимо решать уравнение (18) вместе с уравнением для волновых возмущений в ДПС. При этом невозможно получить решение задачи в общем виде, но в некотором достаточно широком диапазоне параметров потока может быть найдено приближённое решение.

Во-первых, если число Ричардсона не близко к $1/4$, то амплитуда волны, прошедшей через КС, очень мала, поэтому потоком импульса в прошедшей волне ($T_p(-\infty)$) можно пренебречь и считать, что перепад волнового потока импульса приблизительно равен $T_p(+\infty)$, т. е. $\Xi = T_p(+\infty)/\lambda$. Во-вторых, поскольку зависимость волнового потока импульса от времени возникает из-за отражения волны от зависящего от времени профиля скорости в ДПС, то можно ожидать, что зависящая от времени компонента волнового потока импульса мала, когда мал коэффициент отражения. Как показано в [11] (см. также рис. 3), коэффициент отражения волны от КС и ДПС $\mathcal{R} < 0,1$ для умеренных чисел Ричардсона (не близких к $1/4$) и $\lambda > 0,2$. Тогда решение можно искать в виде ряда по степеням \mathcal{R} . Такая процедура подробно описана в [24]. В нулевом порядке по \mathcal{R} перепад завихренности на КС не зависит от времени. При этом поля скорости в ДПС описываются автомодельными зависимостями (23). Для нахождения \mathcal{R} необходимо вычислить коэффициент отражения волны от неоднородного профиля завихренности в ДПС r и коэффициент отражения от КС R . Комплексная величина r определялась в [24] на основании рассмотрения волновых полей в ДПС, а процедура нахождения коэффициента R описана выше.

Полученный в результате коэффициент отражения имеет вид суммы двух слагаемых:

$$\mathcal{R} = R \cos[2\mu \ln \tau + \phi_1] + r \cos[2(\mu - \mu_+) \ln \tau + \phi_2].$$

Аналогичный вид имеют в первом порядке по \mathcal{R} все средние характеристики течения в окрестности КС: перепад завихренности, её значения по разные стороны от КС, закон смещения КС и т. п.

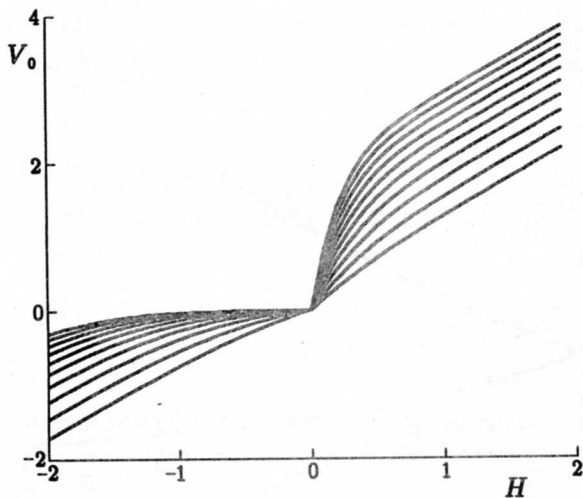


Рис. 6. Профиль средней скорости в ДПС. Нормированный скачок завихренности принимает значения от 1 (нижняя кривая) до 10 (верхняя кривая)

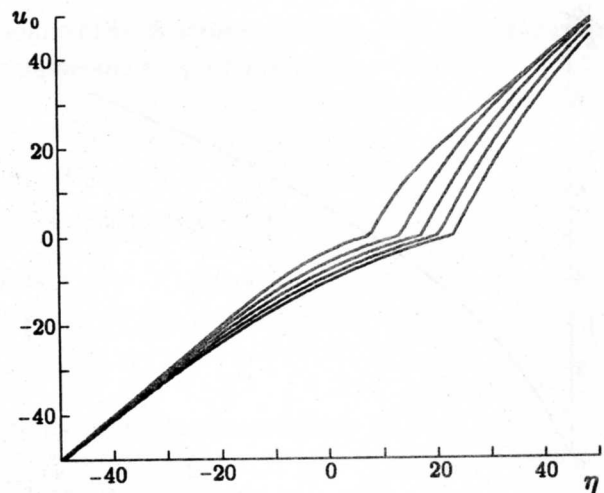


Рис. 7. Средние профили скорости в ДПС для моментов времени $\tau = 50; 100; 150; 200$ и 250 (соответствующие кривые отсчитываются слева направо). Скачок завихренности $\Xi = 2$

2. О ДЕФОРМАЦИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАТУХАНИИ ЛАНДАУ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ В СЛАБОСТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

Хорошо известно, что резонансное взаимодействие волн с частицами в плазме приводит к деформации функции распределения f . Рассмотрим, как в этом случае проявляются нелокальные эффекты, обусловленные диффузией в пространстве скоростей, вызванной столкновениями частиц. При этом будем использовать интеграл столкновений в форме Фоккера—Планка. Подобная модель была использована в [31] и обоснована в [32].

Рассмотрим в простейшей постановке задачу о распространении продольной волны пространственного заряда в плазме. Пусть потенциал электрического поля

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 \cos[k(x - ct)]. \tag{26}$$

Тогда кинетическое уравнение имеет вид [32]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{3}{2\tau_D} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} v_T^2 + v f \right), \tag{27}$$

где $\tau_D = m^2 c^3 / (8\pi e^4 n L)$, v_T — тепловая скорость электронов, e и m — заряд и масса электрона, L — кулоновский логарифм, n — концентрация плазмы, c — фазовая скорость ленгмюровских волн с дисперсионным соотношением $\omega^2 = \omega_0^2 + 3v_T^2 k^2$, ω_0^2 — электронная плазменная частота.

Как показано в [32], интеграл столкновений, входящий в (27), справедлив в достаточно узкой области в пространстве скоростей вдали от тепловой скорости. В общем случае, строго говоря, необходимо использовать интеграл столкновений Ландау [1]. Однако здесь для простоты будет принята модель, в которой интеграл Фоккера—Планка используется во всём пространстве скоростей (аналогично [31]) как наиболее простое выражение, удовлетворяющее требованиям размерности и сохраняющее основные черты интеграла столкновений Ландау [1]: дивергентную форму и свойства диффузии в пространстве скоростей.

Основной задачей настоящего параграфа является анализ деформации функции распределения при резонансном взаимодействии волна—частица. При этом мы будем использовать квазистатическое приближение, справедливое, если декремент линейного затухания Ландау $\gamma_L \ll 1/\tau_D$. Тогда в системе отсчёта, сопровождающей волну, в безразмерных переменных

$$\tilde{V} = (v - c)/v_T, \quad \xi = kx$$

уравнение для функции распределения с учётом выражения (26) для потенциала электрического поля примет вид

$$\tilde{V} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \varepsilon \sin \xi \frac{\partial f}{\partial \tilde{V}} = \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{V}} \left[(C + \tilde{V}) f + \frac{\partial f}{\partial \tilde{V}} \right], \quad (28)$$

где $\varepsilon = e\tilde{\Phi}_0/(mv_T^2)$, $\mu = 3/(2\tau_D kv_T^2)$, $C = c/v_T$.

Будем считать, что $\{\varepsilon, \mu\} \ll 1$. В этом случае задача допускает решение методом сращиваемых асимптотических разложений. При этом существует глубокая аналогия между динамикой захваченных электронов и движением частиц в КС — плазменно—гидродинамическая аналогия [33, 34]. Причём в [35] была показана не просто качественная применимость плазменно—гидродинамической аналогии, но и доказана тождественность эволюционных уравнений, описывающих взаимодействие волна—поток в бесстолкновительной плазме и плоскопараллельном потоке невязкой жидкости.

Из этой аналогии следует, что при решении задачи можно воспользоваться схемой, предложенной в [9]. При этом надо искать решение уравнения для функции распределения в виде разложения по степеням $\varepsilon^{1/2}$. В [9] было показано, что при учёте диффузии завихренности на КС формируются перепады её среднего значения порядка $\varepsilon^{1/2}$. Аналогичные скачки функции распределения при переходе через область захваченных частиц возникают при учёте диффузии распределения электронов в пространстве скоростей, т. е. деформация является нелокальной. Вид функции распределения следует из решения внешней задачи. Используя условие нормировки, можно показать, что при $C \gg 1$ с точностью до $\varepsilon^{1/2}$

$$f(\tilde{V}) = f_0 \left\{ \left[1 - \varepsilon^{1/2} (F_+ - F_-) \frac{e^{-C^2/2}}{C} \right] + \varepsilon^{1/2} \left[F_- + \theta(\tilde{V}) e^{-(\tilde{V}+C)^2/2} (F_+ - F_-) \right] \right\}, \quad (29)$$

где $\theta(\tilde{V})$ — единичная функция,

$$f_0 = \frac{ne^{-(\tilde{V}+C)^2/2}}{\sqrt{2\pi} v_T}$$

— равновесная функция распределения электронов (см. рис. 8). Видно, что деформация функции распределения имеет место не только в резонансной области, но и за её пределами, т. е. является нелокальной. Заметим, что распределение (29) характеризуется ненулевой средней скоростью в покоящейся системе отсчёта, которая пропорциональна скачку функции распределения. Действительно, средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{v_T}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{V} + C) f(\tilde{V}) d\tilde{V} = c(F_+ - F_-) \sqrt{\varepsilon}. \quad (30)$$

Скачок функции распределения $F_+ - F_-$ зависит от параметра $\lambda = \mu/\varepsilon^{3/2}$, определяющего отношение эффективного периода столкновений электронов и периода колебаний захваченных электронов. Параметр λ полностью эквивалентен параметру нелинейности, имеющему смысл числа Рейнольдса внутри КС и определяющему соотношение нелинейных и диффузионных эффектов. Скачок функции распределения определяется параметром λ . Зависимость $F_+ - F_-$ от λ представлена на рис. 9.

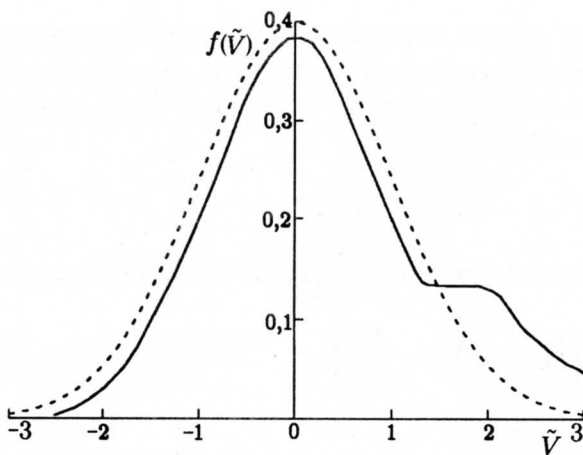


Рис. 8. Схема нелокальной деформации функции распределения (29) при учёте диффузии частиц в пространстве скоростей. Пунктиром показана равновесная функция распределения электронов f_0

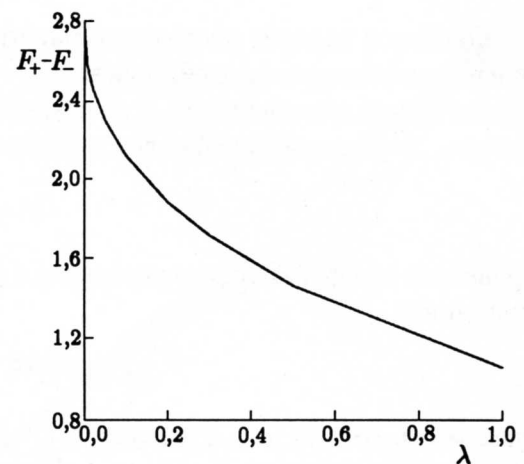


Рис. 9. Зависимость скачка функции распределения от λ

Подобная нелокальная деформация функции распределения была найдена в работе [36] при численном решении двумерного кинетического уравнения, используемого для моделирования нагрева электронной компоненты плазмы под действием СВЧ излучения в условиях циклотронного резонанса. Ранее рассмотрение влияния столкновений на резонансное затухание плазменной волны было проведено в [32] и повторено в [37] в режиме сильно нелинейной волны, который в обозначениях этой статьи соответствует малым значениям параметра нелинейности λ . Здесь рассмотрен более общий случай произвольного λ , соответствующий произвольному соотношению эффектов конечной амплитуды волны и частоты столкновений. При этом случай малых λ здесь получен как предельный переход в задаче с конечным λ . Полученное решение принципиально отличается от решения [32] прежде всего наличием скачка средней функции распределения при переходе через критический уровень.

Скачок функции распределения определяет декремент нелинейного затухания Ландау γ , что с точностью до обозначений аналогично результатам [9]. Действительно, вычислим γ аналогично [32]. Очевидно, что при достаточно слабом затухании $\gamma = \dot{W}/(2W)$. Здесь \dot{W} — среднее на периоде волны затухание её энергии. В системе отсчёта, где волна покоится, $\dot{W} = c \langle \partial \tilde{\Phi} / \partial x \rho \rangle$, где $\rho = e \int_{-\infty}^{\infty} f dv$ — плотность заряда, $W = \tilde{\Phi}_0^2 k^2 / (16\pi)$ — средняя плотность энергии волны. Отсюда сразу видно, что декремент γ пропорционален $\int_{-\infty}^{\infty} \langle f \partial \tilde{\Phi} / \partial x \rangle dv$. Усредним теперь по периоду волны кинетическое уравнение (27):

$$\left\langle \varepsilon \sin \xi \frac{\partial f}{\partial \tilde{V}} \right\rangle = \mu \frac{d}{d\tilde{V}} \left((C + \tilde{V}) \langle f \rangle + \frac{d\langle f \rangle}{d\tilde{V}} \right).$$

Аналогично процедуре вывода соотношения (8) проинтегрируем это уравнение сначала по \tilde{V} от $-\infty$ до текущего значения \tilde{V} , что приводит к уравнению

$$\varepsilon \langle f \sin \xi \rangle = \mu \left((C + \tilde{V}) \langle f \rangle + \frac{d\langle f \rangle}{d\tilde{V}} \right).$$

Теперь проинтегрируем это уравнение по \tilde{V} от $-\infty$ до $+\infty$, тогда с учётом граничных условий на бес-

конечности получим

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f \sin \xi \rangle d\tilde{V} = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} (C + \tilde{V}) \langle f \rangle d\tilde{V}. \quad (31)$$

В левой части (31) стоит величина, пропорциональная γ . Очевидно, она отлична от нуля только в случае асимметричной функции распределения. Сравнивая (31) и (30), легко видеть, что декремент γ пропорционален скачку функции распределения $F_+ - F_-$.

После преобразований, аналогичных [32], можно получить выражение для γ :

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \lambda (F_+ - F_-) \gamma_L, \quad \gamma_L = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_0 \frac{c^2}{v_T^2} e^{-c^2/(2v_T^2)}. \quad (32)$$

Будем называть функцию $\Phi_L(\lambda) = 4\lambda(F_+ - F_-)$ скачком фазы. Происхождение этого термина связано с тем, что при получении формулы (32) можно формально положить

$$\frac{1}{\omega - kv} = P \frac{1}{\omega - kv} + i\Phi_L(\lambda)\delta(\omega - kv),$$

где $\delta(\omega - kv)$ — дельта-функция.

Зависимость $\Phi_L(\lambda)$ показана на рис. 10. Видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ (линейный режим) $\Phi_L \rightarrow \pi$, а при $\lambda \rightarrow 0$ (нелинейный режим) $\Phi_L \sim \lambda$, поскольку при этом, как следует из рис. 9, $(F_+ - F_-) \rightarrow \text{const}$. Заметим, что $\lambda \sim \varepsilon^{-3/2}$, т. е. в слабодиссипативном пределе

$$\gamma \sim \varepsilon^{-3/2}.$$

Этот результат согласуется с полученным в работе [32], хотя численный коэффициент отличается по величине. При $\lambda \gg 1$ можно показать [38], что γ стремится к постоянному значению, равному декременту линейного затухания Ландау.

Итак, главный результат этого раздела состоит в демонстрации нелокального эффекта деформации функции распределения за счёт диффузии в пространстве скоростей, обусловленной столкновениями частиц. Кроме того, получен закон затухания волны конечной амплитуды при произвольном соотношении частоты столкновений и периода колебаний резонансных электронов, захваченных электрическим полем продольной волны пространственного заряда. Подобное взаимодействие полностью эквивалентно взаимодействию волн с однородным сдвиговым потоком в окрестности КС, в котором соотношение нелинейности и диссипации произвольно.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе рассмотрено взаимодействие волн с потоками в случаях, когда имеется узкая резонансная область, в которой скорости частиц потока близки к фазовой скорости волны. В такой области происходит существенное возрастание амплитуд и градиентов волновых полей, в результате чего становятся существенными нелинейные и диффузионные (диссипативные) эффекты. Здесь рассмотрены случаи, когда соотношение нелинейных и диффузионных (диссипативных) эффектов произвольно, т. е. волновые поля внутри резонансной области являются, вообще говоря, сильно нелинейными. Напротив, вне резонансной области нелинейность и диссипация пренебрежимо малы. В этом

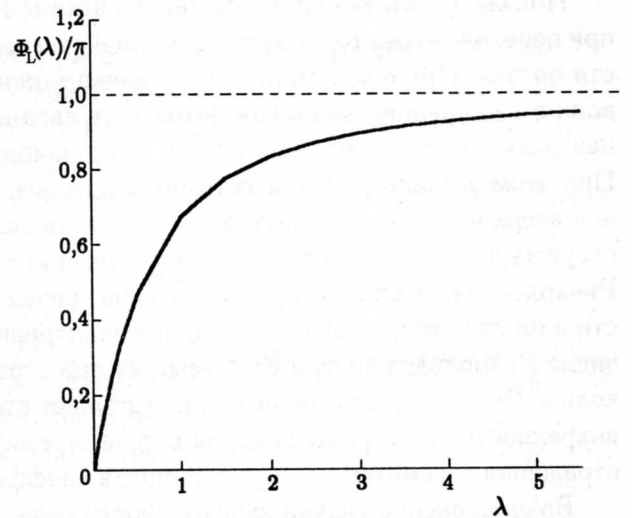


Рис. 10. Зависимость «скачка фазы» от параметра нелинейности

случае для описания волновых полей может быть использован метод сращиваемых асимптотических разложений. Появление резонансных областей означает возникновение неравновесности распределения частиц потока, усреднённого по волновым возмущениям, а диффузионные процессы приводят к нелокальному эффекту деформации всего распределения частиц (а не только его узкой резонансной области).

В качестве примера, демонстрирующего особенности таких процессов, подробно исследовано нелинейно-диссипативное резонансное взаимодействие внутренних гравитационных волн малой амплитуды ϵ с потоками жидкости или газа, в которых скорость и плотность неоднородны по вертикали, в окрестности критического слоя (КС), где фазовая скорость волны совпадает со скоростью потока. Рассмотрен случай динамически устойчивого потока, в котором градиентное число Ричардсона $Ri > 1/4$.

Показано, что за счёт нелинейного взаимодействия внутренней гравитационной волны с течением при переходе через КС в нулевом порядке по амплитуде волны возникает скачок средней завихренности потока. Происхождение этого скачка можно пояснить следующим образом. За счёт поглощения волн в КС средний волновой поток импульса испытывает скачок, т. е. в КС действует горизонтальная радиационная сила, которая в стационарном случае должна быть уравновешена вязкой силой. При этом устанавливается течение, в котором асимптотические значения завихренности при удалении вверх и вниз от КС постоянны, но различны. Скачок градиента плотности при переходе через КС отсутствует, т. к. отсутствует вертикальный поток массы во внутренних волнах. Таким образом, числа Ричардсона по разные стороны от КС различны. Кроме того, на КС существуют скачки средних скорости и плотности порядка $\epsilon^{2/3}$. Скачок завихренности зависит от λ (обратного значения вертикального числа Рейнольдса внутри КС) и растёт при стремлении λ к нулю, т. е. с ростом амплитуды падающей волны. Волна, падающая на КС, испытывает отражение и частично проходит. При $\lambda \rightarrow 0$ средняя завихренность со стороны падения волны стремится к значению, при котором $Ri = 1/4$, коэффициент отражения стремится к минус единице, а коэффициент прохождения — к нулю.

Возникновение скачка завихренности (или излома профиля скорости) в окрестности КС означает, что возмущение средней скорости растёт при удалении от КС, но в силу принципа причинности на большом расстоянии от КС эти возмущения должны стремиться к нулю. Течение, удовлетворяющее этим условиям, реализуется при учёте нестационарного процесса диффузии завихренности из критического слоя за счёт вязкости. При этом формируется переходная область от КС к невозмущённому течению — диффузионный пограничный слой (ДПС), а область резонансного взаимодействия волны с потоком (КС) смещается по направлению к падающей волне.

Рассмотрена нелокальная деформация функции распределения электронов в плазме с учётом столкновений. Показано, что учёт диффузии распределения частиц в пространстве скоростей приводит к деформации функции распределения не только в резонансной области, но и во всем пространстве скоростей. Найдена форма деформированной функции распределения и вычислен декремент нелинейного затухания Ландау продольной волны пространственного заряда конечной амплитуды при произвольном соотношении частот столкновений и колебаний захваченных электронов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 00–15–99399, 00–15–96772).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1981.
2. Басович А. Я., Таланов В. И. // Нелинейные волны. Самоорганизация. 1985. С. 147.
3. Маслоу С. А. // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. М.: Мир, 1981. С. 218.
4. Craik A. D. D. Wave interactions and fluid flows. Cambridge University Press, 1985.

5. Триттон Д. Дж., Девис П. А. // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. М.: Мир, 1981. С. 271.
6. Maslowe S. A. // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1986. V. 18. P. 405.
7. Шухман И. Г. Вопросы теории нелинейных и диссипативных процессов в динамике гравитирующих систем, жидкости и плазмы: Дисс. ... д. ф.-м. н. Иркутск, 1986.
8. Ван Дайк М. Теория возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
9. Haberman R. // *Stud. Appl. Math.* 1972. V. 51, No. 2. P. 139.
10. Haberman R. // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. P. 727.
11. Troitskaya Yu. I. // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 233. P. 25.
12. Koppel D. // *J. Math. Phys.* 1964. V. 5. P. 963.
13. Hazel P. // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 30. P. 775.
14. Baldwin P., Roberts P. H. // *Mathematics.* 1970. V. 17. P. 102.
15. Bowman M. R., Thomas L., Thomas R. H. // *Planet. Space Sci.* 1980. V. 28. P. 119.
16. Van Duin C. A., Kelder H. // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 169. P. 293.
17. Kelly R. E., Maslowe S. A. // *Stud. Appl. Math.* 1970. V. 49. P. 302.
18. Maslowe S. A. // *Stud. Appl. Math.* 1972. V. 51, No. 1. P. 1.
19. Maslowe S. A. // *Boundary Layer Meteorol.* 1973. V. 5. P. 45.
20. Stewartson K. // *J. Appl. Math.* 1981. V. 27. P. 133.
21. Booker J. R., Bretherton F. P. // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. P. 513.
22. Miles J. W. // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10, pt. 4. P. 496.
23. Hovard L. N. // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10, pt. 4. P. 509.
24. Troitskaya Yu. I., Reznik S. N. // *Phys. Fluids.* 1996. V. 8, No. 12. P. 3313.
25. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1, 2. М.: Мир, 1981.
26. Geller M., Tanaka, Fritts D. // *J. Atm. Sci.* 1976. V. 33. P. 2276.
27. Fritts D. // *J. Atm. Sci.* 1978. V. 35. P. 397.
28. Fritts D. // *J. Atm. Sci.* 1979. V. 36. P. 12.
29. Кооп G. // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 113. P. 347.
30. Кооп G., McGee B. // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 172. P. 453.
31. Lennard A., Bernstein I. // *Phys. Rev.* 1957. V. 108. P. 546.
32. Захаров В. Е., Карпман В. И. // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 43, № 2. С. 490.
33. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1, 2. М.: Атомиздат, 1975.
34. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. // *Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова.* М.: Наука, 1979. С. 68.
35. Реутов В. П. // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1980. Т. 16, № 12. С. 1266.
36. Суворов Е. В., Шалашов А. Г. Численное решение двумерного кинетического уравнения для моделирования ЭЦР нагрева: Препринт ИПФ РАН № 462. Н. Новгород, 1998. 26 с.
37. Галеев А. А., Сагдеев Р.З. // *Вопросы теории плазмы. Вып. 7 М.: Энергоатомиздат, 1973, с.3.*
38. Троицкая Ю. И. Диффузионные и радиационные эффекты при нелинейном резонансном взаимодействии волн с потоком: Дисс. ... д. ф.-м. н., Н. Новгород, 1998.

Институт прикладной физики РАН,
г. Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию
6 апреля 2001 г.

ASYMPTOTIC MODELS OF DIFFUSION EFFECTS DUE TO NONLINEAR RESONANCE INTERACTION OF WAVES WITH FLOWS*Yu. I. Troitskaya*

We develop an asymptotic theory describing nonlocal effects, caused by weak-diffusion processes, in the case of a resonance interaction of quasi-harmonic waves of small but finite amplitudes with flows of various physical nature under the conditions of an arbitrary relation between the nonlinearity and diffusion.

We analyze the interaction of inner gravity waves with plane-parallel stratified shear flows in the nonlinearly-dissipative critical layer (KL) formed in the vicinity of the resonance level where the flow velocity is equal to the phase velocity of the wave. It is shown that the combined effect of the radiation force in the inner region of the KL and vorticity diffusion to the outer region results in the formation of a flow in which the asymptotic values of average vorticity at different sides of the KL are constant but different. If the criterion of the linear dynamic stability is satisfied (the Richardson number $Ri > 1/4$), the resulting vorticity steps are comparable to the unperturbed vorticity. As a result, a wave reflected from the inhomogeneity of the vorticity in the KL is formed. The average vorticity from the incidence side approaches the linear-stability threshold (Richardson number $Ri > 1/4$) and the reflection coefficient, to -1 with increasing amplitude of the incident wave.

In the regime of nonlinear dissipative KL, we study quasi-stationary asymptotic behavior of the flow formed by an inner gravity wave incident on a dynamically stable flow with velocity and density stratification, whose velocity at some level is equal to the phase velocity of the wave. It is shown that the vorticity diffusion results in the formation of a nonlocal transition region from the KL to the unperturbed flow, which is called the diffusive boundary layer (DBL). In this case, the KL is shifted toward the incident wave. We obtain a self-similar solution for the average fields, which is valid in the case of a constant vorticity step in the KL, and determine its parameters depending on the inner Reynolds number in the KL, which describes the relation between the nonlinear and diffusive effects for the wave field in the resonance region. We determine the structure and temporal dynamics of the DBL formed by a rough surface streamlined by a stratified fluid whose velocity changes direction at some level.

It is shown that in the case of the nonlinear resonance interaction of plasma electrons with a Langmuir wave, the electron diffusion in the velocity space leads to a significant nonlocal distortion of the electron distribution function outside the region of trapping. We determine the distorted distribution function and calculate the decay rate of the nonlinear Landau damping of a finite-amplitude wave for an arbitrary ratio of the electron collision rate and the oscillation period of the trapped electrons.