

УДК 551.466.8

## КВАЗИЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ПО ПЛОТНОСТИ ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА НАД СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. И. Троицкая, С. Н. Резник

Исследована деформация профиля скорости ветра за счёт резонансного взаимодействия с волнами, излучаемыми при обтекании статистически однородного поля возвышений поверхности. Рассмотрен ветер, вектор скорости которого меняет своё направление в пределах слоя конечной толщины. При больших числах Ричардсона и малых числах Фруда в квазилинейном приближении выведены уравнения для компонент скорости среднего течения. Показано, что модуль скорости ветра не меняется во времени, а угол, определяющий направление ветра, удовлетворяет уравнению простых волн Римана. Деформация потока определяется средней силой волнового сопротивления, действующей на единицу площади поверхности. Деформацию испытывает профиль скорости ветра в слое от поверхности до уровня, на котором ветер меняет направление на противоположное. На больших временах вектор скорости в этом слое стремится к направлению, противоположному его направлению у поверхности.

Исследование взаимодействия внутренних волн со средними течениями представляет собой важную практическую задачу. Такие задачи возникают, например, при исследовании динамики ветра над горным массивом. Известно, что наиболее эффективно обмен энергией и импульсом между внутренними волнами и средними течениями происходит в окрестности критических уровней (критических слоев), где фазовая скорость волн совпадает со скоростью среднего течения и взаимодействие носит резонансный характер. Критический слой для внутренних волн в стратифицированном сдвиговом потоке с учётом нелинейности, вязкости и диффузии рассматривался в работах [1–4], где было показано, что основным нелинейным эффектом, существенным на больших расстояниях от критического слоя (КС), является деформация среднего течения. В [5] было показано, что КС для различных гармоник внутренних волн, излучаемых неоднородностями границы, возникают всегда в случае, если поток меняет направление с высотой, как это обычно бывает в атмосферных условиях.

В настоящей работе исследуется деформация потока, меняющего направление с высотой, над статистически-однородным случайным полем возвышений поверхности, моделирующим топографические неоднородности. При этом излучается широкий спектр внутренних волн, резонансно взаимодействующих с потоком в велапаузе. Исследование такого взаимодействия может быть проведено в рамках квазилинейного приближения, как это было сделано в [6] для пакета внутренних волн, распространяющегося на фоне двумерного течения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сдвиговой поток над случайно-неоднородной поверхностью. Выберем систему координат так, что ось  $z$  направлена вертикально вверх,  $\vec{x}_0$  и  $\vec{y}_0$  — единичные орты в горизонтальной плоскости. Поле возвышений поверхности характеризуется случайной функцией  $z = \zeta(\mathbf{x}, y)$ . Профиль скорости ветра имеет вид

$$\vec{U}(z, t) = U(z, t)\vec{x}_0 + V(z, t)\vec{y}_0.$$

Ю. И. Троицкая, С. Н. Резник

Зависимость плотности ветрового потока от высоты характеризуется частотой плавучести  $N(z, t)$ . В начальный момент времени  $N = \left( -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{1/2}$ , где  $\rho_0(z)$  — невозмущённая плотность.

Допустим, что характерная высота возвышений поверхности мала, так что для описания волновых возмущений справедливо линейное приближение. Представим гидродинамические поля в виде

$$u = U(z, t) + \tilde{u}(x, y, z, t), \quad v = V(z, t) + \tilde{v}(x, y, z, t), \quad \rho = R(z, t) + \tilde{\rho}(x, y, z, t),$$

где  $u$  и  $v$  — проекции скорости течения соответственно на оси  $x$  и  $y$ ,  $\rho$  — плотность,  $U, V$  и  $R$  — усреднённые по ансамблю реализаций компоненты горизонтальной скорости потока и плотности,  $\tilde{u}, \tilde{v}$  и  $\tilde{\rho}$  — возмущения горизонтальных компонент скорости и плотности, возникающие при обтекании потоком неоднородностей подстилающей поверхности.

Усредняя полные уравнения гидродинамики по ансамблю реализаций в приближении Буссинеска [7, 8]\* и пренебрегая вязкостью, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{u} \tilde{w} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{v} \tilde{w} \rangle &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{\rho} \tilde{w} \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{w}$  — вертикальная компонента скорости возмущений.

Уравнения (1) имеют простой физический смысл: изменение компонент средней скорости со временем обусловлено радиационной силой

$$\vec{F}^r = \left( \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{u} \tilde{w} \rangle, \frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{v} \tilde{w} \rangle \right),$$

а изменение плотности — градиентом вертикального волнового потока массы.

Пусть характерная высота возмущений достаточно мала (оценки приведены ниже). Тогда уравнение для вертикальной компоненты скорости возмущений имеет вид (см. [8])

$$\frac{D^2}{Dt^2} \Delta \tilde{w} - \frac{D}{Dt} \left[ U'' \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + V'' \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right] + N^2 \Delta_h \tilde{w} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}.$$

Здесь и далее  $[\dots]'' = \frac{d^2}{dz^2} [\dots]$ .

Граничными условиями для уравнения (2) является линеаризованное условие непротекания на поверхности

$$\tilde{w}|_{z=0} = \left( U(0, t) \frac{\partial}{\partial x} + V(0, t) \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta(x, y) \quad (3)$$

и условие убывания возмущений при удалении от поверхности.

\*Приближение Буссинеска означает пренебрежение градиентом плотности в инерционных слагаемых уравнений гидродинамики.

Представим волновые возмущения в виде интегралов Фурье–Стилтьеса

$$\bar{w}(x, y, z, t) = \int_{\bar{k}} d\bar{w}_k(\bar{k}, z, t) e^{i(k_x x + k_y y)},$$

$$\zeta(x, y) = \int_{\bar{k}} d\bar{\zeta}_k(\bar{k}) e^{i(k_x x + k_y y)}.$$

Будем считать, что характерный временной масштаб изменения волновых возмущений достаточно велик, так что

$$\left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right| \ll |(k_x U + k_y V) \bar{w}|. \quad (4)$$

В этом случае можно воспользоваться квазистационарным приближением. Тогда, применяя к (2) и (3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам, с учётом (4) получим, что  $d\bar{w}_k(z, t)$  удовлетворяет уравнению Тейлора–Гольдштейна:

$$d\bar{w}_k'' + \left( \frac{N^2(k_x^2 + k_y^2)}{(k_x U + k_y V)^2} - \frac{k_x U'' + k_y V''}{k_x U + k_y V} - (k_x^2 + k_y^2) \right) d\bar{w}_k = 0 \quad (5)$$

с граничным условием на поверхности

$$d\bar{w}_k|_{z=0} = i(k_x U(0, t) + k_y V(0, t)) d\bar{\zeta}_k.$$

При  $z \rightarrow \infty$  нужно использовать условие ограниченности возмущений, которое в приближении Буссинеска эквивалентно ограниченности потоков энергии [7]. Уравнение (5) имеет особенность при  $z = z_c(\bar{k}, t)$ , где

$$(\bar{k}, \vec{U}(z_c, t)) = 0. \quad (6)$$

В окрестности этого уровня реализуется КС для гармоник с волновым вектором  $\bar{k}$ . Введём полярные координаты  $(q, \theta)$ , тогда

$$k_x = q \cos \theta,$$

$$k_y = q \sin \theta.$$

Представим компоненты скорости среднего течения в виде

$$U = |\vec{U}| \sin \Psi, \quad (7)$$

$$V = |\vec{U}| \cos \Psi,$$

где угол  $\Psi(z, t) > \Psi(0, t) = \Psi_1$  определяет направление скорости среднего течения.

Условие (6) в полярных координатах имеет вид

$$\sin(\theta + \Psi) = 0, \quad (8)$$

так что критический уровень для гармоник, волновой вектор которой образует угол  $\theta$  с осью  $x$ , расположен на уровне  $z$ , удовлетворяющем условию  $\theta = -\Psi(z, t)$ .

\*Условие (4) может нарушаться в окрестности КС, где  $k_x U + k_y V = 0$ . Однако на временах, когда справедливо квазистационарное приближение, учёт нестационарности волновых полей в окрестности КС даёт только правило обхода (см. оценки п. 3).

Для того чтобы исследовать эволюцию среднего течения, найдём средние значения вертикальных потоков горизонтальных компонент волнового импульса  $\langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle$ ,  $\langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle$ , а также проекции радиационной силы  $\frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle$ , входящие в (1). Представим возмущения скорости в виде

$$d\tilde{w}_k = F(\vec{k}, z, t) d\zeta_k. \quad (9)$$

Тогда  $F$  удовлетворяет уравнению Тейлора–Гольдштейна (5) с граничным условием

$$F|_{z=0} = i(k_x U(0, t) + k_y V(0, t)).$$

Его решение в полярных координатах имеет вид

$$F = iq \frac{B(z, q, \theta, t)}{B(0, q, \theta, t)} \sin[\theta + \Psi(0, t)],$$

где  $B(z, q, \theta, t)$  — произвольное решение уравнения (5), ненарастающее при  $z \rightarrow \infty$  и зависящее от параметров  $q$  и  $\theta$  и  $t$ .

Запишем для удобства уравнение (5) в полярных координатах:

$$B'' + \frac{N^2(z, t)}{|\vec{U}(z, t)|^2 \sin^2[\theta + \Psi(z, t)]} B - \left( \frac{(|\vec{U}(z, t)| \sin[\theta + \Psi(z, t)])''}{|\vec{U}(z, t)| \sin[\theta + \Psi(z, t)]} + q^2 \right) B = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) может иметь, вообще говоря, дискретный спектр действительных собственных чисел  $q_n(\theta, t)$  и соответствующих им собственных решений  $B(z, q_n, \theta, t)$ , удовлетворяющих уравнению

$$B(0, q_n, \theta, t) = 0, \quad (11)$$

которое определяет функцию  $q_n(\theta, t)$ . Следует заметить, что соответствующие собственным числам  $q_n(\theta, t)$  собственные моды не являются сингулярными, т.е. не имеют КС [9].

Предположим, что скорость ветра в начальный момент времени разворачивается на угол больше  $\pi$  при изменении  $z$  от 0 до  $\infty$ . В этом случае для любой гармоникки излучаемого волнового поля найдётся уровень, на котором скорость ветра перпендикулярна  $\vec{k}$ , т.е. критический уровень. Спектр таких волн, как показано в [10, 5], непрерывен, дискретный спектр отсутствует, и деформация потока будет определяться его резонансным взаимодействием с волнами в их КС. Из линеаризованной системы уравнений гидродинамики можно получить

$$\begin{aligned} d\tilde{u}_k &= \left\{ \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \frac{dF_k}{dz} + \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \frac{k_x V' - k_y U'}{k_x U + k_y V} F_k \right\} id\zeta_k, \\ d\tilde{v}_k &= \left\{ \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \frac{dF_k}{dz} - \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \frac{k_x V' - k_y U'}{k_x U + k_y V} F_k \right\} id\zeta_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Пользуясь статистической однородностью распределения  $\zeta(x, y)$ , с помощью (12), (9) получим

$$\begin{pmatrix} \langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle \\ \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{pmatrix},$$



где

$$\begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \operatorname{Im} \left[ \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right] G_\zeta(\vec{k}), \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \operatorname{Im} \left[ \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \end{pmatrix} \frac{k_x V' - k_y U'}{k_x U + k_y V} |F_k|^2 \right] G_\zeta(\vec{k}).$$

Для статистически однородной случайной функции  $\zeta(x, y)$  имеем

$$\langle d\tilde{\zeta}(\vec{k}_1) d\tilde{\zeta}^*(\vec{k}_2) \rangle = 2\pi^2 G_\zeta(\vec{k}) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2.$$

Как было показано выше, волновое поле на больших временах (когда справедливо квази-стационарное приближение) определяется вкладом собственных мод, образующих дискретный спектр волновых чисел, и волн непрерывного спектра, имеющих КС в потоке. В рассматриваемом нами случае дискретный спектр отсутствует, поэтому остаётся получить выражения для компонент потока импульса, вносимых волнами непрерывного спектра. Покажем, что для этого типа волн  $P_{2x} = 0$ ,  $P_{2y} = 0$ . Знаменатель подынтегрального выражения в (13) обращается в нуль при  $k_x U + k_y V = 0$ , или при  $\theta \rightarrow -\Psi(z, t)$ , однако это — устранимая особенность. Чтобы показать это, рассмотрим поведение функции  $B(z, q, \theta, t)$ , которой пропорциональна функция  $F_k$ , при  $\theta \rightarrow -\Psi(z, t)$ , или при  $z \rightarrow z_c(\theta, t)$ , т. е. вблизи КС. Уравнение (10) преобразуется тогда к виду

$$B'' + \frac{Ri_c}{(z - z_c)^2} B = 0, \quad Ri_c = \frac{N^2(z_c, t)}{|\vec{U}(z_c, t)|^2 \Psi'(z_c, t)^2},$$

где

$$\Psi'(z_c, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(z_c, t),$$

а линейно-независимые решения этого уравнения имеют вид

$$B(z, q, \theta, t) \propto (z - z_c)^{1/2 \pm i\mu_c}, \quad \mu_c = \sqrt{Ri_c - 1/4}.$$

Тогда

$$|B(z, q, \theta, t)|^2 \propto |z - z_c(\theta, t)| \sim |\theta + \Psi(z, t)|,$$

полюс в подынтегральном выражении (13) отсутствует, само подынтегральное выражение действительно, и  $P_{2x} = P_{2y} = 0$ , а компоненты потока импульса определяются величинами  $P_{1x}$ ,  $P_{1y}$ .

Таким образом, с учётом (13) система (1) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[ \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right], \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[ \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right].$$

Для полной постановки задачи необходимо ещё задать начальные условия для системы (14):

$$U(0, z) = U_0(z),$$

$$V(0, z) = V_0(z).$$

Заметим сразу, что система (14) имеет интеграл движения — энергию среднего течения. Действительно, умножив первое уравнение системы на  $U$ , а второе — на  $V$  и сложив их, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{U^2 + V^2}{2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{k_x U + k_y V}{k_x^2 + k_y^2} \frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[ \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right].$$

Учитывая, что  $\frac{d}{dz} \operatorname{Im} \left[ \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right] = \phi(\vec{k}) \delta(k_x U(z, t) + k_y V(z, t))$ , получим в правой части нуль. Таким образом, в квазилинейном приближении модуль скорости потока на каждом уровне  $z$  остаётся постоянным. Это может быть объяснено следующим образом. При фиксированном  $z$  вклад в радиационную силу, действующую на среднее течение, даёт гармоника, волновой вектор которой удовлетворяет условию  $(\vec{k}, \vec{U}(z, t)) = 0$ . При этом вклад этой гармоники в радиационную силу направлен вдоль волнового вектора  $\vec{k}$  (см. (13)), поэтому работа, совершаемая радиационной силой над потоком в единицу времени,

$$\left( \vec{F}_k^r, \vec{U}(z, t) \right) = 0, \quad (15)$$

и энергия среднего течения не изменяется:  $|\vec{U}(z, t)| = |\vec{U}(z)|$ . Отметим, что это происходит вследствие того, что все генерируемые поверхностью гармоники имеют нулевую горизонтальную фазовую скорость. Если бы на фоне потока распространялся цуг волн, имеющих различные фазовые скорости, то при фиксированном  $z$  радиационная сила определялась бы гармоникой, волновой вектор которой удовлетворяет условию черенковского резонанса  $(\vec{k}, \vec{U}(z, t)) = \omega(\vec{k})$ , где  $\omega$  — частота, и равенство (15) не выполнялось бы. Таким образом, энергия среднего течения сохраняется лишь в случае квазистационарных внутренних волн, т. е. после окончания переходного процесса. Решение системы (14) будет рассмотрено в следующем параграфе.

Рассмотрим теперь деформацию средней плотности. Для этого вычислим поток массы  $\langle \bar{\rho} \bar{w} \rangle$ , входящий в (1). Из уравнений гидродинамики следует

$$d\bar{\rho}_k = - \frac{d\bar{w}_k}{i(k_x U + k_y V)} \frac{dR}{dz}.$$

Теперь аналогично (13) получим

$$\langle \bar{\rho} \bar{w} \rangle = - \frac{1}{2\pi^2} \frac{d\rho_0}{dz} \operatorname{Im} \int_0^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y G_\zeta(\vec{k}) \frac{|F_k(z, t)|^2}{k_x U + k_y V}. \quad (16)$$

Принимая во внимание, что  $|F_k(z, t)|^2 \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow z_c$  (см. выше процедуру вычисления  $P_{2x}$ ,  $P_{2y}$  из (13)), легко видеть, что вертикальный поток массы в квазистационарных внутренних волнах равен нулю ( $\langle \bar{\rho} \bar{w} \rangle = 0$ ), средняя плотность  $R$  не меняется и  $N(z, t) = N(z)$ .

## 2. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РИЧАРДСОНА

Пусть в начальный момент времени характерное число Ричардсона

$$Ri = \left( \frac{NL}{U_{\max}} \right)^2 \gg 1,$$

где  $U_{\max}$  — максимальная скорость потока в момент  $t = 0$ ,  $L$  — масштаб сдвигового слоя в момент  $t = 0$ . В этом случае решение системы (14) может быть найдено в ВКБ-приближении. Будем считать, что характерное число Фруда  $Fr = U_{\max}/Na \ll 1$ , где  $a$  — масштаб корреляционной функции неоднородностей поверхности (см. (21)). Тогда для всех гармоник, вносящих существенный вклад в спектр возмущений, уравнение (5) упрощается и принимает вид

$$F_k'' + \left( \frac{N^2}{|\bar{U}(z)|^2 \sin^2[\theta + \Psi(z, t)]} - q^2 \right) F_k = 0. \quad (17)$$

Граничное условие имеет вид

$$F_k(0) = |\bar{U}(0)|iq \sin(\theta + \Psi_1). \quad (18)$$

В ВКБ-приближении решение уравнения (17), удовлетворяющее граничному условию (18) и условию излучения при  $z \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$F_k = \begin{cases} iq|\bar{U}(0)| \sin(\theta + \Psi_1) \left| \frac{f(0, t)}{f(z, t)} \right|^{1/2} \exp \left\{ i \int_0^z f dz \right\}, & z < z_c(\theta, t), \\ 0, & z > z_c(\theta, t), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$f = \frac{N(z)}{|\bar{U}(z)| \sin[\theta + \Psi(z, t)]}, \\ \Psi(z_c, t) = -\theta.$$

Отметим, что амплитуды отражённой от сдвигового слоя и прошедшей через КС волн ослабляются в  $\exp(-\pi\sqrt{Ri})$  раз [8], т.е. пренебрежимо малы. С помощью (19) получим

$$\text{Im} \left[ \frac{dF}{dz} F^* \right] = \begin{cases} \text{Im} \left[ \frac{dF_k}{dz} F_k^* \right] = -q^2 N(0) |\bar{U}(0)| |\sin(\theta + \Psi_1)|, & z < z_c(\theta, t), \\ 0, & z > z_c(\theta, t). \end{cases} \quad (20)$$

Будем считать, что спектр корреляционной функции неоднородностей имеет вид

$$G(q, \theta) = \bar{G}(qa)\Phi(\theta), \quad (21)$$

где  $a$  — масштаб корреляционной функции неоднородностей поверхности.

Подставляя (20) и (21) в выражения для потоков (13) и учитывая, что при фиксированном  $z$  вклад в потоки дают гармоники с  $z_c(\theta) > z$ , получим

$$\begin{pmatrix} \langle \bar{u}\bar{w} \rangle \\ \langle \bar{v}\bar{w} \rangle \end{pmatrix} = \frac{N(0) |\bar{U}(0)|}{2\pi^2} \int_{-\Psi_1(t)-\pi}^{-\Psi(z, t)} d\theta |\sin(\theta + \Psi_1)| \Phi(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \int_0^\infty q^2 G(qa) dq.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \langle \bar{u}\bar{w} \rangle \\ \langle \bar{v}\bar{w} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{|\bar{U}(z)|} \begin{pmatrix} \cos \Psi(z, t) \\ -\sin \Psi(z, t) \end{pmatrix} |\sin[\Psi(z, t) - \Psi_1]| \Phi(-\Psi) \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z}, \quad (22)$$

$$\alpha = N(0) |\bar{U}(0)| \beta, \quad \beta = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty q^2 G(qa) dq. \quad (23)$$

Используя (22) и определение  $\Psi$  (7), получим уравнение для  $\Psi(z, t)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \frac{|\sin[\Psi(z, t) - \Psi(0, t)]|}{|\bar{U}(z)|} \Phi(-\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Заметим, что в силу этого уравнения  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, t) = 0$ , поэтому далее без ограничения общности можно положить  $\Psi_1 = \Psi(0, 1) = 0$ .

Делая замену переменных по формулам  $d\xi = \frac{|\bar{U}(z)|}{\beta|\bar{U}(0)|} dz$ ,  $T = N(0)t$ , получим уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = |\sin(\Psi)| \Phi(-\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (24)$$

с начальным условием  $\Psi(\xi, 0) = \Psi_0(\xi)$ .

Это — уравнение простых волн, его решение можно выписать в неявной форме:

$$\Psi = \Psi_0 \left( \xi + \sin(\Psi) \Phi(-\Psi) T \right), \quad 0 < \Psi < \pi. \quad (25)$$

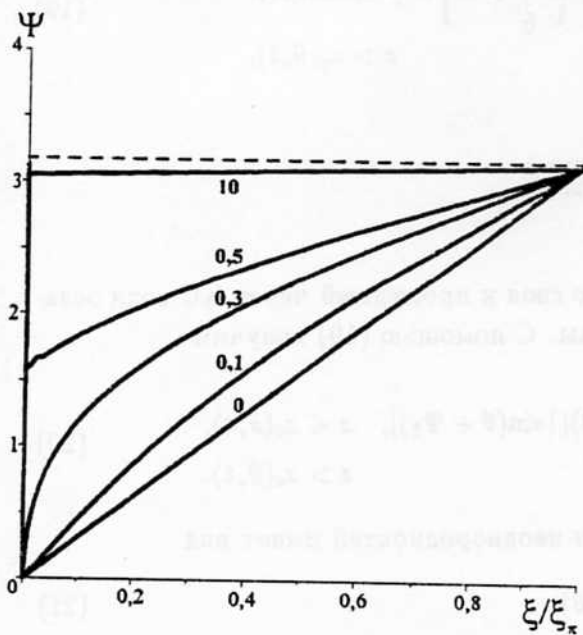


Рис. 1. Зависимость  $\Psi(z)$  в различные моменты времени  $T$  (величина  $T$  — у кривых).

Из (25) видно, что координата  $\xi_\pi$  (или, соответственно,  $z_\pi$ ), при которой угол  $\Psi = \pi$ , не меняется со временем. Выше этого уровня деформации потока не происходит, т. к. все излучаемые поверхностью гармоники волнового поля поглощаются в критических слоях на нижележащих уровнях. Таким образом, деформации подвергается лишь слой, внутри которого скорость потока в момент  $t = 0$  меняет направление на противоположное по отношению к направлению ветра вблизи поверхности Земли.

Для примера выберем

$$\Psi_0 = \pi \frac{\xi}{\xi_\pi}, \quad \Phi = 1.$$

Соответствующие профили  $\Psi \left( \frac{\xi}{\xi_\pi} \right)$  представлены на рис. 1 в различные моменты безразмерного времени  $T$ . Видно, что с течением времени происходит укручение первоначального профиля  $\Psi(\xi)$ , а это означает, что характерная величина сдвига

скорости растёт, что может привести к дестабилизации первоначально устойчивого потока. Аналогичный результат был получен в [6] при рассмотрении двумерной задачи о поглощении пакета внутренних волн в критических слоях стратифицированного сдвигового потока.



## 3. ПРИМЕНИМОСТЬ РЕШЕНИЯ

Оценим границы применимости полученного решения. Характерное число Ричардсона в трёхмерном течении имеет вид

$$Ri = \frac{N^2}{(U_z^2 + V_z^2)} = \frac{N^2}{|\vec{U}(z)|_z^2 + |\vec{V}(z)|_z^2 \Psi_z^2}.$$

Поскольку в начальный момент  $Ri \gg 1$  ( $|\vec{U}(z)|_z^2 \ll N^2$ ), то коэффициент отражения волны от КС перестаёт быть малым при

$$\Psi_z \sim N/U_m, \quad (26)$$

где  $U_m$  — характерная скорость потока,  $L$  — масштаб сдвигового слоя.

С помощью (25) находим

$$\Psi_z = \frac{\Psi'_0}{1 - \Psi'_0 \beta_1 (\cos \Psi) t} \sim \frac{1}{L \left(1 - \frac{\beta_1}{L} t\right)}, \quad (27)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{|\vec{U}(0)|},$$

а  $\alpha$  определяется формулой (23). Учитывая, что

$$\bar{G}(qa) = \sigma_\zeta^2 a^2 f(qa),$$

где  $\sigma_\zeta^2 = \langle \zeta^2 \rangle$  — дисперсия высоты неоднородностей поверхности,  $f(qa)$  — безразмерная функция ( $f(0) = 1$ ), получим

$$\beta_1 \sim \frac{N \sigma_\zeta^2}{a}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), с учётом (26) найдём, что отражённой от КС волной можно пренебречь при

$$t \ll \frac{La}{N \sigma_\zeta^2} \left(1 - Ri_0^{-1/2}\right).$$

Величина  $\tau = La/N \sigma_\zeta^2$  является характерным временем изменения средней скорости потока.

Квазистационарное приближение для волновых возмущений справедливо на временах, много больших характерного времени установления КС. При  $Fr \sim 0,1$  время установления критического слоя  $t_q$  порядка  $\frac{30}{N} \sqrt{Ri}$  [11]. Тогда  $t_q$  оказывается порядка  $30L/U_m$ . Можно показать, что время установления квазистационарного волнового поля на масштабе сдвигового слоя для волновых гармоник, не имеющих КС в потоке, того же порядка. Таким образом, уравнение (24) описывает эволюцию потока на временах  $t$ , удовлетворяющих неравенству

$$30 \sqrt{Ri_0} \ll Nt \ll \frac{La}{\sigma_\zeta^2} \left(1 - Ri_0^{-1/2}\right). \quad (29)$$

Видно, что дисперсия высоты неоднородностей, при которой может выполняться (29), должна удовлетворять неравенству  $\sigma_\zeta/a \ll \sqrt{Fr}/30 \sim 0,05$ . Подставляя характерные для атмосферы параметры  $L = 10000$  м,  $Ri = 100$ ,  $a = 1000$  м,  $\sigma_\zeta = 10$  м, получим диапазон значений  $300 \ll T \ll 10^5$ .

Отметим, что в константу  $\beta$ , определяющую скорость деформации потока, входит множитель

$$\int_0^{\infty} q^2 \bar{G}(qa) dq,$$

которому, в свою очередь, пропорциональны компоненты силы волнового сопротивления, действующего на единицу поверхности при малых числах Фруда:

$$\left( \begin{array}{c} \langle \bar{u}\bar{w} \rangle \\ \langle \bar{v}\bar{w} \rangle \end{array} \right) \Big|_{z=0}^{cont} = \frac{N(0)|\bar{U}(0)|}{2\pi^2} \int_{-\Psi_1-\pi}^{-\Psi_1} d\theta |\sin(\theta + \Psi_1)| \Phi(-\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \int_0^{\infty} q^2 \bar{G}(qa) dq.$$

Таким образом, деформация профиля скорости ветра определяется силой волнового сопротивления, действующего на подстилающую поверхность. Деформации подвергается слой ниже уровня  $z_{\pi}$ , на котором ветер имеет направление, противоположное его направлению вблизи поверхности Земли. Выше этого уровня профиль скорости остаётся неизменным. С течением времени скорость потока стремится принять направление, противоположное направлению скорости ветра вблизи поверхности Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 95-05-15325а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Haberman R. // Stud. Appl. Math. 1972. V. 51. № 2. P. 139.
2. Haberman R. // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. P. 727.
3. Troitskaya Yu. I. // J. Fluid Mech. 1991. V. 233. P. 25.
4. Reznik S. N., Troitskaya Yu. I. // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 12. P. 3313.
5. Резник С. Н., Троицкая Ю. И. Волновое сопротивление локализованной топографической неоднородности в стратифицированном сдвиговом ветре с велопаузой. // Препринт № 400. — Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1996. — 29 с.
6. Цимринг Л. Ш. // Океанология. 1982. Т. 22. С. 540.
7. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978.
8. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеоиздат. 1981. — 302 с.
9. Маслоу С. А. Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях. — В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб. — М.: Наука, 1984. С. 218.
10. Резник С. Н., Троицкая Ю. И. // Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана. 1996. Т. 1. С. 133.
11. Резник С. Н. Волновое сопротивление локализованной неоднородности дна в стратифицированном сдвиговом потоке с нестационарным критическим слоем. // Препринт № 421. — Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997. — 21 с.

Институт прикладной физики  
РАН, Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию  
22 мая 1998 г.

## A QUASI-LINEAR MODEL OF DEFORMATION OF THE STRATIFIED FLOW OVER BOTTOM TOPOGRAPHY

*S. N. Reznik, Yu. I. Troitskaya*

Investigated is deformation of the wind velocity profile due to resonant interaction with waves radiated by the flow over random topography. The wind changes its direction within a layer of finite thickness. For the large Richardson number and the small Froude number the equation of the velocity components of the mean flow are derived in quasi-linear approximation. The modulus of the wind velocity is not shown to change its value, but the angle defining the wind direction obeys the Riemann simple wave equation. The deformation of the wind velocity profile takes place within the layer from the Earth surface to the level where the wind changes its direction to the opposite one. At large time periods, the wind velocity vector tends to the direction opposite to the near-surface one.