МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2013

УДК 532.59

© 2013 г. О. А. ДРУЖИНИН, Ю. И. ТРОИЦКАЯ

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ТУРБУЛЕНТНЫМ ФОНТАНОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Проводится численное моделирование фонтана в жидкости со стратификацией плотности методом крупных вихрей. Фонтан формируется при проникновении турбулентной вертикальной струи сквозь пикноклин. Струйное течение инициировано постановкой граничного условия в виде направленного вертикально вверх потока жидкости нейтральной плавучести с осесимметричным гауссовым профилем средней скорости и заданным уровнем флуктуаций. Покано, что при числе Фруда Fr, превышающем критическое значение, фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. Преобладает осесимметричная мода автоколебаний, когда верхушка фонтана периодически обрушается, генерируя пакеты внутренних волн, распространяющихся к периферии области счета. Характерная частота внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана и монотонно уменьшается с ростом Fr. Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от Fr в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием теоретической модели Ландау для моды неустойчивости в режиме мягкого самовозбуждения.

Ключевые слова: стратификация, затопленная плавучая струя, пикноклин, турбулентность, автоколебания, внутренние волны.

Фонтаном называют струю тяжелой жидкости, имеющую начальный импульс, направленный вверх, и распространяющуюся в легкой жидкости. Струя тормозится под действием силы плавучести (силы тяжести) и достигает максимальной высоты (точки поворота), а затем жидкость движется вниз от точки поворота, формируя противоток, и радиально растекается на уровне своей плавучести. Динамика фонтанов привлекает интерес благодаря многочисленным практическим приложениям в гидродинамике и геофизике [1].

Течение, подобное фонтану, может формироваться в жидкости со стратификацией, близкой к двухслойной, когда легкая жидкость вносится в нижний слой жидкости на некотором расстоянии от скачка плотности (пикноклина). Тогда даже при отсутствии начального импульса под действием силы плавучести жидкость ускоряется и приобретает положительный вертикальный импульс. В случае турбулентного фонтана вовлечение окружающей жидкости приводит к тому, что при подходе к пикноклину всплывающая жидкость имеет плотность, близкую к плотности жидкости в нижнем слое. Таким образом, формируется струя нейтральной (по отношению к жидкости в нижнем слое) плавучести, имеющая ненулевой вертикальный импульс. Если ее скорость достаточно велика, то струя тяжелой жидкости проникает в область выше пикноклина, формируя фонтан. Подобные фонтаны могут возникать, например, при всплывании струй сбросовых вод в океане в окрестности подводных коллекторов при наличии сезонного термоклина [2–4].

Другой важный пример таких фонтанов – струи, состоящие из газовых пузырьков и выходящие из разломов земной коры на дне океана. Можно ожидать существования подобного явления вблизи подводных источников пресной воды.

Динамика фонтанов изучалась в лабораторных физических экспериментах и в численном моделировании [5–7]. Результаты этих исследований показывают, что динамика струи определяется числами Фруда Fr и Рейнольдса Re, основанными на осевой скорости и диаметре струи, скачке плавучести и кинематической вязкости жидкости. При малых Fr и Re фонтан представляет собой стационарное течение, которое с ростом этих параметров теряет устойчивость. В зависимости от Fr и Re возможно самовозбуждение различных неустойчивых мод колебаний фонтана.

Колебания фонтанов способны излучать внутренние волны, если частота колебаний ниже частоты плавучести. В свою очередь, можно ожидать проявления этих внутренних волн на поверхности воды, что делает возможной дистанционную диагностику подводных плавучих струй. Экспериментальные указания на возможность поверхностных проявлений внутренних волн, связанных с подводным коллектором сточных вод, приведены в [3]. Внутренние волны, вызванные взаимодействием плавучей струи с пикноклином, обнаружены в лабораторном эксперименте [8], в котором выполнялось условие масштабного моделирования по числу Fr для типичной прибрежной сбросовой системы. Результаты указали на то, что при воздействии всплывающих струй возможна генерация внутренних волн в пикноклине. Результаты лабораторных экспериментов и теоретического анализа в [9] показали, что всплывающая струя при взаимодействии с пикноклином совершает квазипериодические колебания в вертикальной плоскости, эффективно генерирующие внутренние волны. Установлено, что источником внутренних волн является осесимметричная, глобальная мода колебаний струи. Заметим, что аналогичная ситуация может возникнуть в случае выхода затопленного фонтана на свободную поверхность. Например, лабораторные эксперименты [10, 11] показывают, что возможна генерация поверхностных волн плоским затопленным фонтаном.

Прямое численное моделирование фонтана, образующегося при проникновении ламинарной струи тяжелой жидкости сквозь пикноклин, показало, что при числе Fr, превышающем некоторое критическое значение, течение становится неустойчивым, и фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине [12]. Основной пик в частотном спектре внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана, которая монотонно уменьшается с ростом Fr. Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от Fr в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием теоретической модели конкуренции взаимодействующих мод в режиме мягкого самовозбуждения.

Необходимо отметить, что в перечисленных выше исследованиях рассматривалось относительно небольшое число Re струи (Re $< 10^4$ в лабораторных экспериментах и Re $< 10^3$ в численных экспериментах). На практике, однако (например, в геофизических приложениях), число Рейнольдса, как правило, достаточно велико (Re $> 10^5$), и течения являются турбулентными.

Цель настоящей работы – численное моделирование динамики фонтана, образующегося при проникновении сквозь пикноклин вертикальной турбулентной струи со значением числа Re, близким к натурным (Re $\sim 10^5$) с использованием метода крупных вихрей.

1. Основные уравнения и описание численного метода. Рассматривается жидкость с устойчивой стратификацией плотности со скачком плотности (пикноклином), расположенным на некотором горизонте $Z = Z_0$. Профиль плотности задается в виде [12]

$$R_0(Z) = \rho_0\left(1 + 0.5\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\left[1 - \tanh\frac{2(Z - Z_0)}{D_0}\right]\right)$$

На нижней границе при $Z = 0$ вертикально вверх втекает струя со средним профилем скорости

$$u(x, y, t) = U_0 \exp(-4(x^2 + y^2)) \tag{1.1}$$

Под действием сил плавучести струя тормозится в окрестности пикноклина, прогибает его и проникает в верхний слой менее тяжелой жидкости на некоторую конечную высоту (до точки поворота). Далее, подобно течению в обычном фонтане, жидкость в струе движется вниз от точки поворота, формируя противоток, и затем радиально растекается в плоскости на горизонте нейтральной плавучести.

Безразмерные переменные определяются как

$$(x, y, z) = \frac{(X, Y, Z)}{D_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{U_0}, \quad \rho = \frac{R - R_0(z)}{\Delta\rho}$$

где u_i — компоненты вектора скорости ($i = x, y, z$), R — плотность жидкости.

Для интегрирования уравнений динамики жидкости применяется метод крупных вихрей. В этом методе мгновенные поля скорости и плотности представляются в виде суммы крупномасштабных (или фильтрованных) полей и подсеточных флуктуаций. Влияние флуктуаций на динамику крупномасштабных полей (т.е. напряжения Рейнольдса) учитывается с помощью гипотез замыкания (обзор методов LES представлен в [13]).

Фильтрованные LES-уравнения Навье—Стокса в приближении Буссинеска и условие несжимаемости жидкости для крупномасштабных полей в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\delta_{iz}}{\mathrm{Fr}^2}\rho \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

где δ_{iz} — символ Кронекера. Уравнение для поля плотности жидкости записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + U_z \frac{d\rho_{ref}}{dz} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{\rho j}}{\partial x_j} \tag{1.3}$$

где потоки (напряжения Рейнольдса) τ_{ij} и $\tau_{\rho j}$ моделируются с помощью процедуры замыкания, обсуждаемой ниже. Исходный профиль безразмерной плотности в (1.3) имеет вид

$$\rho_{ref}(z) = 1 + 0.5[1 - \tanh 2(z - z_0)] \tag{1.4}$$

где $z_0 = Z_0/D_0$ — горизонт залегания пикноклина. В уравнении (1.3) пренебрегается изменением $\rho_{ref}(z)$, обусловленным молекулярной диффузией. Числа Рейнольдса Re и Фруда Fr в (1.2) определяются как

$$\mathrm{Re} = \frac{U_0 D_0}{\nu}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{U_0}{N_0 D_0} \tag{1.5}$$

$$N_0 = \left(-\frac{g}{\rho_0}\frac{dR_0}{dZ}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{D_0}\right)^{1/2}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости, N_0 — размерная частота плавучести в центре пикноклина. Из (1.2)—(1.4) следует, что безразмерная частота плавучести в центре пикноклина равна $N_m = 1/\mathrm{Fr}$.

В настоящей работе используется модель LES-замыкания, основанная на уравнении для кинетической энергии подсеточной турбулентности, $k = 1/2\tau_{ii}$ [14, 15]. Уравнение для k записывается в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu_t\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)+\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-c_1\frac{k^{3/2}}{l}+\frac{\nu_t}{\mathrm{Fr}^2}\left(\frac{d\rho_{ref}}{dz}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) \tag{1.6}$$

где турбулентная вязкость задается как

$$\nu_t = c_2 l k^{1/2} \tag{1.7}$$

В (1.7) $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.93$ постоянные коэффициенты, и масштаб длины l равен пространственному шагу сетки. Потоки τ_{ij} и $\tau_{j\rho}$ выражаются как

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\tau_{kk}=-\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.8}$$

$$\tau_{\rho j}=-\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_t}\frac{\partial\rho}{\partial x_j} \tag{1.9}$$

В настоящей работе числа Pr и Pr_t полагаются равными единице.

Уравнения (1.2), (1.3), (1.6) решаются в прямоугольной области с размерами $-30 \le x \le 30$, $-30 \le y \le 30$ и $0 \le z \le 30$. На боковых вертикальных границах области счета, в плоскости (y, z) при $x = \pm 30$, и на верхней горизонтальной границе, в плоскости (x, y) при $z = 30$ ставятся условия Неймана (нулевого сдвига) для всех переменных. На нижней границе, в плоскости (x, y) при $z = 0$, для скорости задается условие, соответствующее направленной вертикально вверх струе нейтральной плавучести (относительно окружающей жидкости) с гауссовым профилем (1.1), на который накладываются флуктуации, в виде

$$U_i^b(x,y,t)=\exp(-4(x^2+y^2))(\delta_{iz}+U_{fi}(x,y,t)) \tag{1.10}$$

Поле флуктуаций U_{fi} представлено в виде суммы независимых фурье-гармоник со случайными фазами и однородным, широким амплитудным пространственно-временным спектром и амплитудой в 30% от осевой средней скорости. Амплитуда флуктуаций задается достаточно большой для того, чтобы максимально ускорить переход течения в струе в режим развитой турбулентности. Это связано с ограниченным размером области счета по вертикали. Для плотности ставится граничное условие Неймана. Число Рейнольдса струи задается равным $8 \cdot 10^4$, и на расстоянии около 10 исходных диаметров от нижней границы течение в струе становится турбулентным. Значение z_0 в (1.4), определяющее горизонт залегания пикноклина, полагается достаточно большим (равным 15 в безразмерных единицах длины), таким, что влиянием переходных процессов, связанных с установлением турбулентного течения в струе, создаваемого граничным условием (1.10), можно пренебречь.

Уравнения (1.2), (1.3), (1.6) дискретизуются с помощью метода конечных разностей второго порядка точности на однородной разнесенной (“шахматной”) сетке, состоящей из $400 \times 400 \times 200$ узлов по координатам x, y и z соответственно. Интегрирование осуществляется с использованием метода Адамса–Башфорфа [12] второго порядка точности с шагом по времени $\Delta t = 0.015$. Используется метод расщепления [16], и уравнение Пуассона для давления решается с помощью косинус-преобразования по координатам x и y (с использованием быстрого преобразования Фурье) и метода Гаусса по координате z.

Как это будет видно из численных результатов, фонтан генерирует внутренние волны, распространяющиеся в пикноклине к границам области счета (вертикальным плоскостям (y, z) при $x = \pm 30$ и (x, z) при $y = \pm 30$). Для того чтобы избежать отражения внутренних волн от вертикальных границ, в правые части уравнений (1.2) и (1.3) для U_z и ρ добавляются слагаемые $[-F(x, y)U_z]$ и $[-F(x, y)\rho]$, где функция $F(x, y) = 1$ в узком слое (толщиной в одну безразмерную единицу длины) вблизи вертикальных границ, и обращается в ноль в остальной области счета. Таким образом, достигается затухание внутренних волн на границах, и влиянием отраженных волн можно пренебречь [17].

2. Результаты численного моделирования. Численное моделирование проводилось для значений Fr на входе струи (при $z = 0$) в интервале $0 < \mathrm{Fr}(0) < 20$ и $\mathrm{Re} = 8 \cdot 10^4$ при одинаковых граничных условиях, обсуждаемых выше. В начальный момент времени поля скорости и плотности $U(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$ полагались равными нулю. Затем адиабатически (пропорционально множителю $1 - \exp(-t)$, где t — время) "включалось" граничное условие для скорости (1.10). Переходные процессы заканчивались, и статистически стационарное распределение полей скорости и плотности достигалось к моменту времени $t \approx 800$. С этого момента времени проводилось вычисление усредненных по времени полей и среднеквадратичных флуктуаций и накопление данных для расчета временных спектров пульсаций. Вычисления проводились на временном интервале $800 < t < 1800$, включающем не менее 5–6 периодов внутренних волн, генерируемых в пикноклине.

При достаточно малых z (при $z < z_0$) влияние стратификации мало, и струя распространяется в практически однородной по плотности жидкости. Поскольку число Рейнольдса достаточно велико ($\mathrm{Re} = 8 \cdot 10^4$), под действием исходных флуктуаций струя быстро (на расстоянии нескольких диаметров по z) становится турбулентной. На фиг. 1, *а* представлены профили средней скорости $\langle U_z(x,0,z)\rangle$, полученные в численном моделировании для различных чисел Фруда и нормированные на осевую скорость $\langle U_z(0,0,z)\rangle$ и диаметр струи, вычисляемый на различных расстояниях по z как

$$D(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\langle U_z(0,0,z)\rangle} \int_{-L_x}^{L_x} \langle U_z(x,0,z)\rangle\, dx \qquad (2.1)$$

Профили скорости хорошо описываются автомодельным решением [17]

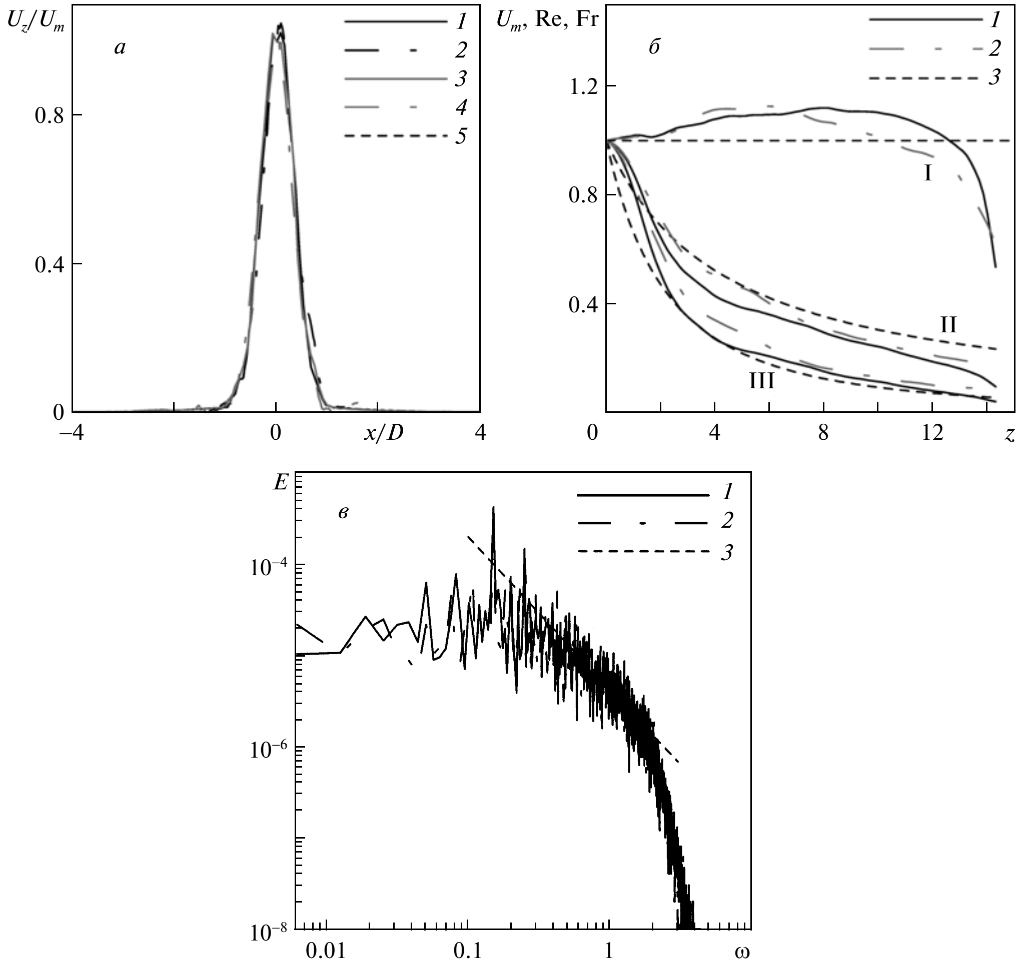
$$\langle U_z(x,y,z)\rangle = U_m(z)\exp\left(-4\frac{x^2+y^2}{D^2(z)}\right) \qquad (2.2)$$

где $U_m(z) = \langle U_z(0,0,z)\rangle$. Зависимости осевой скорости и чисел Re и Fr от z, нормированные на их соответствующие исходные значения при $z = 0$, показаны на фиг. 1, *б*. В области, достаточно удаленной от пикноклина (при $z < 12$), эти зависимости хорошо описываются выражениями

$$U_m(z) = \frac{U(0)D(0)}{0.23z+1}, \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(0), \quad \mathrm{Fr}(z) = \frac{\mathrm{Fr}(0)}{(0.23z+1)^2} \qquad (2.3)$$

которые следуют из закона сохранения потока импульса турбулентной струи с коэффициентом расширения 0.23. Это значение коэффициента близко к общепринятому значению (0.22) для осесимметричной турбулентной затопленной струи [18].

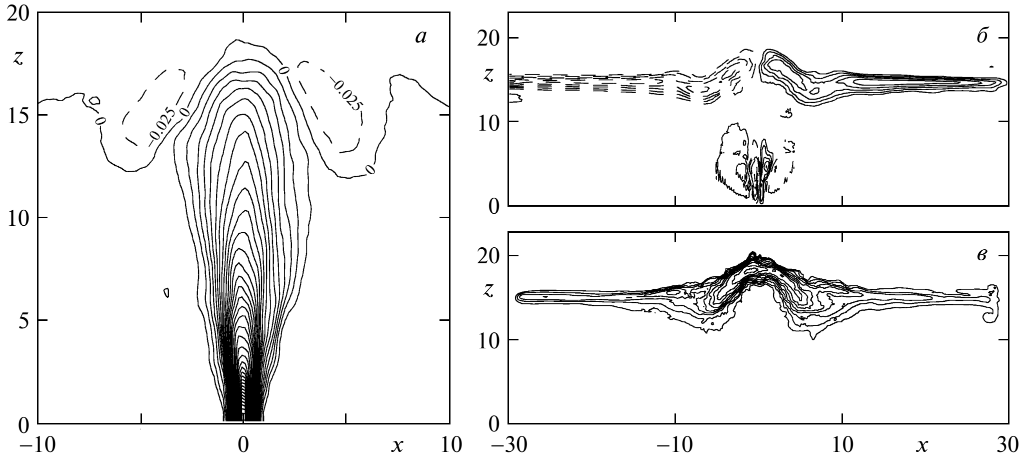
На фиг. 1, *в* представлен частотный спектр флуктуаций скорости струи $E(\omega)$, полученный в численном моделировании для $\mathrm{Fr}(0) = 15$. Спектр рассчитывался и усред-



Фиг. 1. Профили средней вертикальной компоненты скорости $\langle U_z(x,0)\rangle$ для Fr(0) = 5 и 15 при разных z (*а*); зависимости средней осевой скорости (I) и чисел Re (II) и Fr (III) от z (*б*) и частотный спектр флуктуаций скорости (*в*) для различных Fr: *а* – *1* – $z = 3$, Fr(0) = 5; *2* – $z = 12$, Fr(0) = 5; *3* – $z = 3$, Fr(0) = 15; *4* – $z = 12$, Fr(0) = 15; *5* – (2.2); *б* – *1* – Fr(0) = 3; *2* – Fr(0) = 15; *3* – (2.3); *в* – *1* – Fr(0) = 15; *3* – $\omega^{-5/3}$

нялся по временным реализациям в пяти точках с координатами ($x = 0$, $y = 0$, $z = 12$), ($x = 0$, $y = \pm 0.45$, $z = 12$), и ($x = \pm 0.45$, $y = 0$, $z = 12$). Видно, что спектр хорошо описывается колмогоровской асимптотикой, характерной для развитой турбулентности $\omega^{-5/3}$ в области частот $0.2 < \omega < 2$. Расчеты для различных чисел Фруда показывают, что спектры практически не зависят от Fr.

Результаты на фиг. 1, *б* и асимптотика (2.3) показывают, что Fr быстро спадает с ростом z. Таким образом, при подходе к пикноклину локальное значение Fr(z) значительно меньше исходного Fr(0). Ввиду этого в качестве характеристики течения в струе при подходе к пикноклину, непосредственно определяющей свойства фонтана,



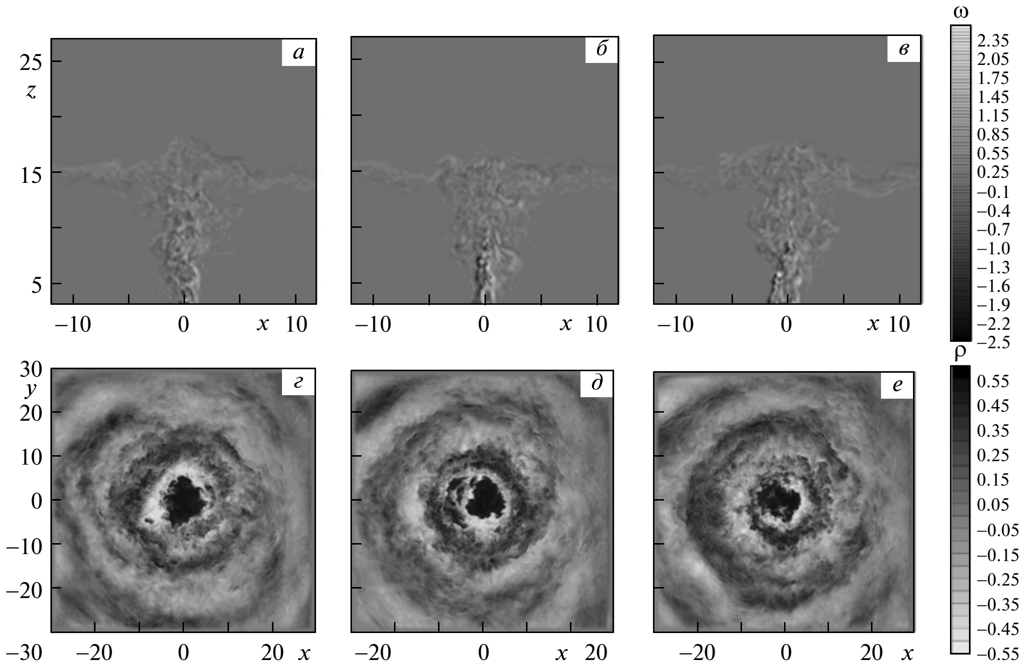
Фиг. 2. Распределения средних вертикальной $\langle U_z \rangle$ (*а*) и горизонтальной $\langle U_x \rangle$ (*б*) компонент скорости и среднеквадратичных флуктуаций плотности ρ' (*в*) в центральной плоскости (x, z) для числа Fr(0) = 15: инкременты изолиний: *а*–*в* – 0.025; 0.01; 0.04

бралось значение Fr = Fr(12). Необходимо отметить также, что автомодельное решение (2.2), (2.3) хорошо "работает" в области, достаточно удаленной как от пикноклина, при $z < 12$. При Fr(0) > 15 амплитуда осцилляций фонтана достаточно велика (порядка 1), и динамика фонтана также изменяет свойства струи вблизи пикноклина. Следовательно, для оценки Fr(12) решение (2.3) не использовалось. Число Фруда при $z = 12$ вычислялось как $\mathrm{Fr}(12) = \mathrm{Fr}(0)\langle U_z(12)\rangle / D(12)$, где $\langle U_z(12)\rangle$ и $D(12)$ – средняя осевая скорость и диаметр струи, определяемый в (2.1).

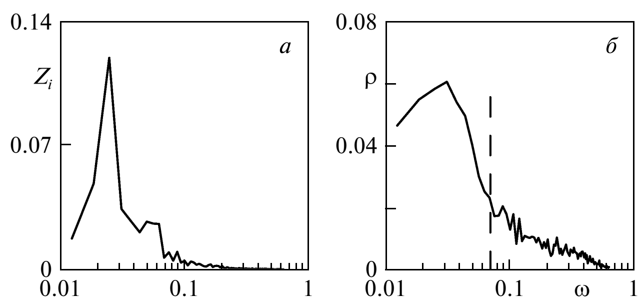
Средние поля вертикальной и горизонтальной компонент скорости и среднеквадратичных флуктуаций плотности на фиг. 2, полученные в численном моделировании для Fr(12) = 1.5, показывают, что под действием стратификации струя тормозится в окрестности пикноклина и проникает в верхний слой жидкости на некоторую высоту Z_m до точки поворота. От точки поворота жидкость в струе движется вниз, образуя противоток относительно восходящего потока, и далее растекается в горизонтальной плоскости на уровне пикноклина z_0. Таким образом, в области $z_0 < z < Z_m$ формируется фонтан.

Результаты вычислений показали, что при Fr(0) < 3 среднее течение в фонтане стационарно. При увеличении Fr стационарный режим теряет устойчивость, и фонтан начинает совершать низкочастотные автоколебания, которые, в свою очередь, генерируют внутренние волны в пикноклине. На фиг. 2, *в* автоколебания проявляются в наличии значительных флуктуаций плотности в области верхушки фонтана. При этом фонтан блуждает в окрестности центра струи и периодически обрушается, генерируя пакеты внутренних волн в пикноклине, которые распространяются от центра к границам области счета (фиг. 3).

В численном моделировании рассчитывались пространственно-осредненные частотные спектры Z_i осцилляций изопикнической поверхности $\left(Z_{\rho=1.5}(x,y) - z_0\right)$ с значением плотности, соответствующим центру невозмущенного пикноклина $\rho_{ref}(z_0) = 1.5$, и

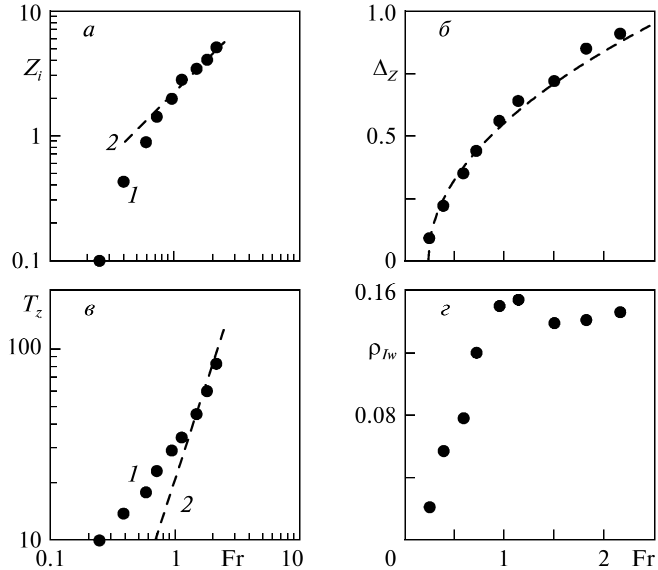


Фиг. 3. Распределение компоненты завихренности ω_y в центральной плоскости (x, z) в моменты времени $t = 1440, 1485, 1530$ (*а*–*в*) и отклонения плотности ρ от ее среднего значения на горизонте пикноклина в горизонтальной плоскости (x, y) при $t = 1530, 1620, 1710$ (*г*–*е*); $\mathrm{Fr}(0) = 11$



Фиг. 4. Спектры колебаний изопикны $\rho = 1.5$ (*а*) и пульсаций плотности ρ (*б*) для $\mathrm{Fr}(12) = 1.5$

спектры внутренних волн (фиг. 4). Спектры Z_i осреднялись по 10 точкам, эквидистантно расположенным на горизонтальной оси в интервале $-5 < x < 5$ при $y = 0$. Спектры внутренних волн осреднялись по 9 точкам, расположенным на окружности с радиусом 20 безразмерных единиц с центром на оси фонтана на горизонте пикноклина $z = z_0 = 15$. Штриховая линия на фиг. 4, *б* отмечает максимальное значение частоты



Фиг. 5. Зависимости от Fr(12) высоты фонтана Z_m (*а*), дисперсии смещения изопикны $Z_{\rho=1.5}$ в области верхушки фонтана Δ_Z (*б*), периода осцилляций T_Z колебаний изопикны $Z_{\rho=1.5}$ (*в*) и амплитуды внутренних волн ρ_{IW} (*г*): *1* – Z_m, *2* – Fr (*а*); *1* – T_Z, *2* – Fr^2 (*в*)

плавучести. Результаты для различных Fr показывают, что частота основного пика в спектрах уменьшается, и амплитуда пика возрастает с увеличением числа Фруда. Во всех случаях основной пик в спектре внутренних волн совпадает по частоте с пиком в спектре Z_i осцилляций интерфейса плотности.

Для того чтобы выяснить, каким образом основные характеристики течения, такие как высота фонтана, дисперсия и характерный период осцилляций верхушки фонтана и амплитуда внутренних волн, зависят от Fr, вычисления проводились для $3 \le \mathrm{Fr}(0) \le 20$ (фиг. 5).

Высота фонтана Z_m определялась как максимальное вертикальное отклонение изопикны $Z_{\rho\,=\,1.5}(x,\ y = 0)$ относительно исходного уровня пикноклина, усредненное по времени. Видно, что при достаточно больших Fr ($\mathrm{Fr}(12) > 1$) высота фонтана растет с увеличением числа Фруда как $Z_m \sim \mathrm{Fr}$, что согласуется с известной асимптотикой [1] для турбулентного фонтана тяжелой жидкости в однородной по плотности легкой жидкости.

Дисперсия осцилляций верхушки фонтана Δ_Z определялась по осцилляциям изопикны $Z_{\rho=1.5}(x, y = 0)$ и осреднялась по 10 точкам. Поведение дисперсии Δ_Z на фиг. 5, *б* довольно неплохо аппроксимируется стационарным решением уравнения Ландау [19], описывающего рост амплитуды возмущения в режиме мягкого самовозбуждения при малой надкритичности в виде

$$\Delta_Z = \left(\alpha\left(\mathrm{Fr} - \mathrm{Fr}_c\right)\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

где $\alpha = 0.4$ и $\mathrm{Fr_c} = 0.24$ (штриховая кривая на фиг. 5, *б*). Таким образом, результаты численного моделирования указывают на то, что стационарное течение теряет устойчивость благодаря бифуркации Андронова–Хопфа, приводящей к развитию нестационарного решения. При этом доминирует осесимметричная мода автоколебаний фонтана, соответствующая режиму обрушений (фиг. 3).

Характерный временной масштаб (период) осцилляций верхушки фонтана определялся по спектру Z_i осцилляций изопикнической поверхности $\left(Z_{\rho=1.5}(x,y) - z_0\right)$ в виде

$$T_Z = \left(\int Z_i(\omega) d\omega\right)^{-1} \int Z_i(\omega)\omega^{-1} d\omega \tag{2.5}$$

Из фиг. 5, *в* видно, что период осцилляций верхушки фонтана монотонно растет с ростом Fr и при $\mathrm{Fr}(12) > 1$ пропорционален Fr^2. Эта асимптотика получается, если предположить, что частота осцилляций верхушки фонтана определяется масштабом скорости U и скачком плавучести $g\Delta\rho/\rho$. Тогда для безразмерного периода осцилляций находим

$$T_Z \sim \frac{\rho U^2}{D g \Delta\rho} \sim \mathrm{Fr}^2 \tag{2.6}$$

Такая же асимптотика для периода осцилляций верхушки фонтана, образующегося при распространении струи тяжелой жидкости в однородной легкой жидкости, наблюдается в эксперименте [6].

Амплитуды внутренних волн определялись по осредненным спектрам в виде

$$\rho_{Iw} = \int \rho(\omega) d\omega \tag{2.7}$$

Из фиг. 5, *г* видно, что амплитуда ρ_{Iw} увеличивается в области $0.25 < \mathrm{Fr} < 1$ и слабо меняется при больших числах Fr. Рост ρ_{Iw} обусловлен увеличением амплитуды осцилляций верхушки фонтана, а его насыщение, по-видимому, связано с нелинейными эффектами, в том числе и с обрушением волн.

Обсуждаемые выше результаты качественно согласуются с данными лабораторного эксперимента в [9]. В этом эксперименте рассматривалось струйное течение с $\mathrm{Re} \sim 10^4$, распространяющееся вертикально вверх в жидкости с температурной стратификацией в виде пикноклина. В области пикноклина проводилась подводная съемка течения и выполнялось синхронное измерение возбуждаемых им внутренних волн. Экспериментальные результаты показали, что струя при взаимодействии с пикноклином совершает квазипериодические колебания в вертикальной плоскости, эффективно генерирующие внутренние волны с частотами в окрестности $0.7N_{\max}$ (где $N_{\max}$ – максимальное значение частоты плавучести). Установлено, что при этом преобладает осесимметричная мода колебаний. Численные результаты на фиг. 3, 4 в целом согласуются с этими экспериментальными данными. Более подробное сравнение с лабораторным экспериментом затруднительно, так как толщина пикноклина в лабораторном эксперименте порядка диаметра струи на горизонте пикноклина. В численном эксперименте безразмерная толщина пикноклина порядка единицы, т.е. много меньше диаметра струи вблизи горизонта пикноклина $\mathrm{D}(12) \approx 5$ (фиг. 2). Кроме того, число Рейнольдса в лабораторном эксперименте почти на порядок меньше значения $8 \cdot 10^4$, рассматриваемого в численном моделировании, что чрезвычайно важно для количественного сравнения спектров колебаний струи.

Заключение. Численное моделирование динамики фонтана, образующегося при проникновении турбулентной, вертикальной струи сквозь пикноклин в стратифицированной жидкости, показало, что при числе Фруда Fr, превышающем некоторое критическое значение, течение становится неустойчивым, и фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. Преобладает осесимметричная мода автоколебаний. Частота внутренних волн совпадает с частотой колебаний верхушки фонтана и уменьшается с ростом числа Фруда. Зависимость амплитуды колебаний верхушки фонтана от Fr в численном моделировании хорошо согласуется с предсказанием модели Ландау для моды неустойчивости в режиме мягкого самовозбуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 11-05-00455, 13-05-91175).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turner J.S.* Jets and plumes with negative or reversing buoyancy // J. Fluid Mech. 1966. V. 26. Pt. 4. P. 779–792.
2. *Koh R. C. Y., Brooks N.H.* Fluid Mechanics of waste-water disposal in the ocean // Annu. Rev. Fluid Mech. 1975. V. 7. P. 187–211.
3. *Keeler R., Bondur V., Gibson C.* Optical satellite imagery detection of internal wave effects from a submerged turbulent outfall in the stratified ocean // Geophis. Res. Letters. 2005. V. 32. P. L12610.
4. *Бондур В.Г., Журбас В.М., Гребенюк Ю.В.* Математическое моделирование турбулентных струй глубинных стоков в прибрежные акватории // Океанология. 2006. Т. 46. № 6. С. 805–820.
5. *Kaye N.B., Hunt G.R.* Weak fountains // J. Fluid Mech. 2006. V. 558. P. 319–328.
6. *Williamson N., Srinarayana N., Armfield S.W., McBain G.D., Lin W.* Low Reynolds-number fountain behaviour // J. Fluid Mech. 2008. V. 608. P. 297–317.
7. *Lin W., Armfield S.W.* Direct simulation of weak axisymmetric fountains in a homogeneous fluid // J. Fluid Mech. 2000. V. 403. P. 67–88.
8. *Троицкая Ю.И., Сергеев Д.А., Ежова Е.В., Соустова И.А., Казаков В.И.* Автогенерация внутренних волн всплывающими струями в стратифицированном бассейне // Докл. РАН. 2008. Т. 419. № 5. С. 691–695.
9. *Ежова Е.В., Сергеев Д.А., Кандауров А.А., Троицкая Ю.И.* Нестационарная динамика турбулентных осесимметричных струй в стратифицированной жидкости. 1. Экспериментальное исследование // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 4. С. 461–470.
10. *Карликов В.П., Трушина О.В.* Об автоколебаниях плоских затопленных фонтанов // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 3. С. 340–344.
11. *Карликов В.П., Толоконников С.Л., Трушина О.В.* О возможной классификации автоколебательных режимов фонтанирования плоских вертикальных затопленных струй тяжелой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 3. С. 23–35.
12. *Дружинин О.А., Троицкая Ю.И.* Генерация внутренних волн фонтаном в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 147–158.
13. *Глазунов А.В.* Вихреразрешающее моделирование турбулентности с использованием смешанного динамического локализованного замыкания. I. Формулировка задачи, описание модели и диагностические численные тесты // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45. № 1. С. 7–28.
14. *Yoshizawa A., Horiuti K.* A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows // J. Phys. Soc. Jap. 1985. V. 54. № 8. P. 2834–2839.

15. *Furbey C., Tabor G., Weller H.G., Gosman A.D.* A comparative study of subgrid scale models in homogeneous isotropic turbulence // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 5. P. 1416–1429.
16. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
17. *Brucker K. A., Sarkar S.* A comparative study of self-propelled and towed wakes in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2010. V. 652. P. 373–404.
18. *Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю. и др.* Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 716 с.
19. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Нижний Новгород
Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию
26.X.2012