

УДК 532.5

## О ПРИМЕНЕНИИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ЗАМЫКАНИЯ К ОПИСАНИЮ ЭВОЛЮЦИИ СКАЧКА ПЛОТНОСТИ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2016 г. Е. В. Ежова<sup>1,2</sup>, С. С. Зилитинкевич<sup>1,2,3,4</sup>, Г. В. Рыбушкина<sup>1</sup>,  
И. А. Соустова<sup>1,2</sup>, Ю. И. Троицкая<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной физики РАН  
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

<sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

<sup>3</sup>Финский метеорологический институт Хельсинки, Финляндия  
(Meteorological Institute, PO Box 503, 00101 Helsinki, Finland)

<sup>4</sup>Департамент физики, Университет Хельсинки, Финляндия  
E-mail: soustova@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 20.02.2015 г., после доработки 05.06.2015 г.

В рамках модернизированной теории турбулентного замыкания, учитывающей анизотропию и взаимную трансформацию кинетической и потенциальной энергии турбулентных флюктуаций для устойчиво стратифицированной жидкости, исследован процесс эволюции автомодельного турбулентного скачка плотности. Численный расчет, проведенный на основе системы уравнений для средней плотности, кинетической и потенциальной энергий турбулентных флюктуаций, показал наличие резких изменений в вертикальных профилях частоты плавучести, масштаба турбулентности, кинетической и потенциальной энергий при сильной анизотропии турбулентности. Расчеты вертикальных профилей соответствующих энергетических и пространственных параметров скачка, проведенные при более слабой анизотропии, не обнаружили аналогичных резких изменений и показали качественное соответствие с известным аналитическим решением, описывающим эволюцию скачка плотности в пресноводном бассейне, полученным ранее [5, 8] в рамках гипотезы о локальном подобию турбулентности, примененной в сочетании с уравнением баланса кинетической энергии турбулентных флюктуаций

**Ключевые слова:** турбулентность, стратификация, скачок плотности.

DOI: 10.7868/S0002351516030032

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что квазиоднородный турбулентный слой в верхнем слое природных водоемов и залегающий под ним термоклин – область резко возрастающей с глубиной плотности (область устойчивой стратификации) – являются типичными для вертикальной структуры океанов, морей и озер. В области термоклина реально существует слабая перемежающаяся турбулентность, возможным источником которой могут быть обрушающиеся внутренние волны, распространяющиеся вниз от границы скачка. Сама перемежающаяся турбулентность влияет на перенос тепла, солей и плотности жидкости в этой области [1–9]. Аналогичные области с резко устойчивой стратификацией температуры существуют и в атмосфере – это области температурной инверсии (холодный, более плотный воздух располагается под теплым, более легким воздухом) с обра-

зованием так называемых шапок инверсии. Существование таких областей, препятствующих вертикальным перемещениям воздуха, способствуют образованию туманов, смога, облаков и в целом загрязнению атмосферы [10]. При этом турбулентность, которая может быть связана с обрушающимися внутренними волнами, амплитуда которых растет с высотой атмосферы, влияет на формирование таких инверсных слоев и на процессы, связанные с их образованием. Учет таких областей с устойчивой стратификацией плотности может быть важным при параметризации внутренних подсеточных масштабов в глобальных климатических численных схемах. Поэтому задачи, связанные с различными моделями турбулентности устойчиво стратифицированной жидкости и газа, а также описанием эволюции таких скачков плотности, вызывают интерес широкого круга исследователей.

Так, изучению процессов тепло- и массообмена между атмосферой и океаном и выяснению механизма формирования термоклина посвящено большое количество исследований [1–8]. В работах [5, 8] была предложена аналитическая модель формирования термоклина в пресноводном бассейне на основе гипотезы о локальном подобии турбулентности, уравнения теплопроводности и уравнения баланса кинетической энергии турбулентности, порождаемой внутренними волнами; масштаб турбулентности при этом отождествлялся с амплитудой внутренней волны. Эта модель позволила объяснить и рассчитать процесс образования температурного скачка – участка температурного профиля с резким градиентом, а также получить хорошее соответствие с результатами лабораторного эксперимента [6]. В последнее время активно обсуждается модель турбулентного замыкания, основанная на уравнениях баланса кинетической и потенциальной энергий турбулентности, а также на уравнениях для вертикальных потоков импульса и плавучести в устойчиво стратифицированной жидкости [7, 8]. Эта модель допускает существование турбулентности при любом значении градиентного числа Ричардсона  $Ri$ . Аналогичные результаты были ранее получены в работе [9], где на основе кинетического подхода определены выражения для турбулентных потоков импульса и энергии в стратифицированной среде с учетом анизотропии турбулентности, и показано, что учет двухсторонней трансформации кинетической и потенциальной энергии турбулентных пульсаций может объяснить поддержание турбулентности внутренними волнами при любых значениях числа Ричардсона, в том числе и в условиях сильной стратификации, типичной для термоклина в океане, либо для областей температурной инверсии в атмосфере.

Целью настоящей работы является анализ предложенного в работах [5, 7–9] механизма формирования турбулентного скачка плотности в рамках этой усовершенствованной модели полуэмпирической теории турбулентности.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем, следуя [9], исходить из системы уравнений гидродинамики теплопроводной стратифицированной несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \frac{\nabla p}{\rho_0} - g \frac{\rho_1}{\rho_0} = \mu \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u, \nabla)\rho = \kappa \Delta \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (3)$$

где  $\rho_0(z)$  – гидростатическое распределение плотности,  $\rho_1 = \rho - \rho_0$  и  $p_1 = p - p_0$  отклонение

плотности и давления соответственно от гидростатических значений,  $u$  – скорость жидкости,  $\mu$  и  $\kappa$  – коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности. Представляя далее гидродинамические величины в виде суммы средних и пульсационных значений, из уравнений (1)–(3) (после применения операции осреднения по турбулентным флуктуациям) получим уравнение Рейнольдса в виде [ср. 7–9]:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{\langle \rho_1 \rangle g}{\rho_0} \delta_{i3} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \quad (5)$$

где  $\langle u \rangle = u - u'$ ,  $\langle p \rangle = p - p'$ ,  $\langle \rho_1 \rangle = \rho_1 - \rho_1'$ ,  $\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$  – тензор турбулентных напряжений,  $F_i = \langle u'_i \rho_1' \rangle$  – турбулентный поток массы.

Для замыкания уравнений Рейнольдса дополним систему (4)–(5) уравнениями для кинетической  $e \sim \langle u'_i u'_i \rangle / 2$  и потенциальной  $\Pi \sim \langle (\rho')^2 \rangle$  энергий турбулентности. Воспользуемся гипотезами замыкания, полученными в [9] на основании кинетического подхода для турбулентного потока массы, турбулентного потока импульса, а также выражениями для третьих моментов турбулентных флуктуаций соответствующих гидродинамических величин:

$$\langle \rho' u'_i \rangle = -LU \left[ \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} + g_i \frac{\langle \rho'^2 \rangle}{\langle u \rangle^2 \rho_0} - \frac{g \beta_i}{\rho_0 \langle u \rangle^2} \right], \quad (6)$$

$$\langle u'_i u'_j \rangle = -LU \left( \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) + U^2 \delta_{ij}, \quad (7)$$

$$\langle u'_i \sum_{j=1}^3 u'_j{}^2 \rangle = -5LU \frac{\partial \langle u \rangle^2}{\partial x_i}, \quad (8)$$

$$\langle u'_i \rho_1'^2 \rangle = -LU \frac{\partial \langle \rho_1'^2 \rangle}{\partial x_i}, \quad (9)$$

где  $\beta_x = \beta_y = 0$ , а  $\beta_z = \langle \rho'^2 \rangle R$ ,  $L$  – характерный масштаб длины,  $U$  – характерный масштаб скорости. Здесь  $R$  определяется выражением:

$$R = -\frac{1}{4\pi} \int dr_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|r - r_1|} \frac{\partial}{\partial z_1} B_\rho(r - r_1), \quad (10)$$

где  $B_\rho(r - r_1)$  – коэффициент корреляции поля плотности. Параметр  $R$  описывает анизотропию турбулентности и определяется отношением го-

ризонального и вертикального масштабов корреляции поля плотности; так,  $R \approx 1$  при  $L_z \ll L_r$  (случай сильно анизотропной турбулентности) и  $R \sim (L_r/L_z)^2 < 1$  при  $L_z \sim L_r$  (слабая анизотропия). Заметим, что наличие двух последних (не градиентных) слагаемых в правой части соотношения (6) является принципиальным отличием от стандартных градиентных гипотез турбулентного замыкания в стратифицированной жидкости [8].

В отсутствие среднего течения ( $\langle u \rangle = 0$ ), при учете полученных в [9] соотношений замыкания, система уравнений Рейнольдса (4)–(5) принимает вид:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} L \sqrt{e} \left( \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \frac{3g}{2e\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle (1-R) \right). \quad (11)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = L \sqrt{e} \frac{g}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \frac{3g}{2e\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle (1-R) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_e L \sqrt{e} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{C e^{3/2}}{L}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial t} = 2 \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} L \sqrt{e} \left\{ \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \frac{3g}{2e\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle (1-R) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_{\rho^2} L \sqrt{e} \frac{\partial \langle \rho'^2 \rangle}{\partial z} - \frac{D \sqrt{e} \langle \rho'^2 \rangle}{L}. \quad (13)$$

Слагаемые, пропорциональные  $(1-R)$  в правых частях системы (11)–(13), учитывают анизотропию турбулентности в стратифицированной среде и определяют отличие от стандартных градиентных гипотез замыкания. Уравнения (12) и (13) описывают соответственно изменения плотностей кинетической и потенциальной энергий турбулентности,  $C$  и  $D$  – константы, характеризующие диссипацию турбулентной энергии,  $\kappa_e$ ,  $\kappa_{\rho^2}$  – безразмерные константы. Следуя [5, 8], будем полагать, что, в отличие от стандартных градиентных гипотез замыкания, масштаб турбулентности  $L$  (масштаб Осмидова [2, 5, 8]) не является заданным, а определяется кинетической энергией турбулентности и частотой Вэйсяля–Брента; при этом  $L = \sqrt{e}/N$ . Такое определение масштаба турбулентности соответствует постановке задачи [5, 8] об образовании и дальнейшей эволюции турбулентного термоклина, порождаемого опрокидыванием обрушающихся внутренних волн. При этом масштаб турбулентности  $L$  отождествляется с амплитудой внутренней волны, которая может генерироваться на границе между термоклином и перемешанным слоем

Выберем для удобства направление оси  $z$  вертикально вниз, тогда в уравнениях (11)–(13) нужно сделать замену  $z \rightarrow -z$ . Аналогично [5, 8] будем искать стационарное решение системы (11)–(13), по-

лагая, что все переменные зависят от одной координаты  $\zeta = z - \dot{h}t$  ( $\dot{h} = \frac{dh}{dt} = V$  – постоянная скорость заглубления границы пикноклина, ось  $z$  направлена вниз). Перейдем к безразмерным переменным  $\xi = \zeta(1+C)^{1/2} / (\kappa_e^{1/2} l_h)$ ,  $\tilde{\Pi} = \Pi / (l_h N_h)^2$ ,  $\lambda = L/l_h v = N/N_h$ , где  $N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d \langle \rho \rangle}{d \zeta}$  – частота плавучести,  $\Pi = \frac{g^2 \langle \rho'^2 \rangle}{2\rho_0^2 N^2}$  – плотность потенциальной энергии турбулентности, а  $l_h$  и  $N_h$  это характерные значения амплитуды турбулентных флюктуаций (которые в работах [5, 8] отождествляются с характерной амплитудой внутренней волны  $l_h$ ) на верхней границе термоклина и частоты плавучести  $N_h$ , определяемой потоком тепла через верхнюю границу термоклина. Тогда уравнения (11)–(13) примут вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ v^3 \lambda^2 - 3\tilde{\Pi} v (1-R) \right\} = -E_* v^2, \quad (14)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \lambda^2 v^2 \frac{d(\lambda^2 v^2)}{d\xi} \right) = -\frac{E_*}{1+C} \frac{d(\lambda^2 v^2)}{d\xi} + \lambda^2 v^3 - 3\tilde{\Pi} v \frac{(1-R)}{1+C}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \lambda^2 v \frac{d(\tilde{\Pi} v^2)}{d\xi} \right) = -\frac{\kappa_b E_*}{\kappa_{\rho^2} (1+C)} \frac{d(\tilde{\Pi} v^2)}{d\xi} + D \frac{\kappa_b}{\kappa_{\rho^2} (1+C)} \tilde{\Pi} v^3 - \frac{\kappa_b}{\kappa_{\rho^2} (1+C)} (\lambda^2 v^5 - 3\tilde{\Pi} v^3 (1-R)), \quad (16)$$

где  $E_* = \sqrt{1+C} \frac{V}{\kappa_e l_h N_h}$  – безразмерная скорость роста пикноклина. Заметим, что в [5, 8] исследование динамики термоклина проводилось на основе уравнений (14) и (15), в которых следует положить потенциальную энергию  $\tilde{\Pi} = 0$ .

Для системы (14)–(16) граничные условия таковы (ср. [5, 8]): на границе движущегося термоклина задается характерный масштаб турбулентных флюктуаций, т.е.  $l = l_h$  (характерная амплитуда внутренней волны) и частота плавучести  $N = N_h$  ( $N_h \sim Q_h$  – поток тепла через верхнюю границу термоклина), т.е. в безразмерных переменных эти граничные условия имеют вид:

$$\lambda = v = 1 \text{ при } \xi = 0.$$

При этом кинетическая энергия турбулентных флюктуаций стремится к нулю далеко от границы термоклина:

$$e = \lambda^2 v^2 \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

В качестве граничных условий для потенциальной энергии примем:

$$\tilde{\Pi} = 0 \text{ при } \xi = 0, \tilde{\Pi}v^2 \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

### 3. АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ПИКНОКЛИНА ПРИ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ( $R = 1$ )

Рассмотрим эволюцию слоя скачка в случае сильной анизотропной турбулентности, когда типичные неоднородности плотности имеют форму “блинов”, т.е.  $L_z \ll L_r$ . Согласно модели замыкания [9], в этом случае параметр анизотропии  $R$  равен единице. При  $R = 1$  система (14)–(16) принимает вид

$$\frac{d}{d\xi}(v^3\lambda^2) = -E_*v^2, \quad (17)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\lambda^2v^2\frac{d(\lambda^2v^2)}{d\xi}\right) = -\frac{E_*}{1+C}\frac{d(\lambda^2v^2)}{d\xi} + \lambda^2v^3, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\left(\lambda^2v\frac{d(\tilde{\Pi}v^2)}{d\xi}\right) &= -\frac{\kappa_b E_*}{\kappa_{\rho^2}(1+C)}\frac{d(\tilde{\Pi}v^2)}{d\xi} + \\ &+ D\frac{\kappa_b}{\kappa_{\rho^2}(1+C)}\tilde{\Pi}v^3 - \frac{\kappa_b}{\kappa_{\rho^2}(1+C)}\lambda^2v^5, \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения (17), (18) имеют вид, полностью аналогичный уравнениям в [5, 8], при этом изменение потенциальной энергии турбулентных флуктуаций (19) не влияет на распределение кинетической энергии. Последнее слагаемое в правой части (18) определяется скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности, а первое – скоростью изменения энергии турбулентности при движении термоклина. Как показано в [5, 8], система (17), (18) имеет аналитическое решение при условии, что первое слагаемое в правой части уравнения (18) для кинетической энергии турбулентности опущено, т.е. распределение кинетической энергии турбулентности по вертикали предполагается стационарным. При этом полученное в [5, 8] аналитическое решение хорошо передает тенденцию изменения аналогичных параметров в лабораторном эксперименте [6]. Оценки характерных значений параметра  $E_*$  для условий реального океана подтверждает это предположение лишь в ряде случаев. В этой связи мы исследовали численно решение системы (17), (18) с учетом последнего (нестационарного) слагаемого в (18). Результаты расчетов приведены на рис. 1. Видно, что учет слагаемых, связанных с нестационарностью уравнения баланса кинетической энергии турбулентности, приводит к возникновению резких изменений в вертикальных профилях соответствующих величин ниже границы эволюционирующего скачка

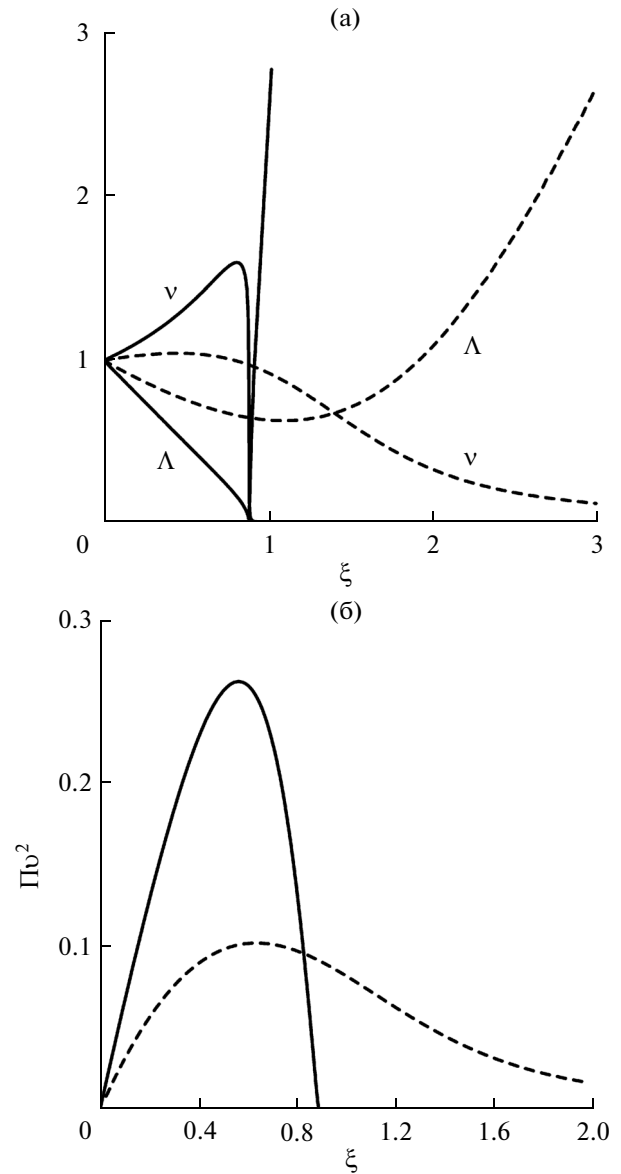
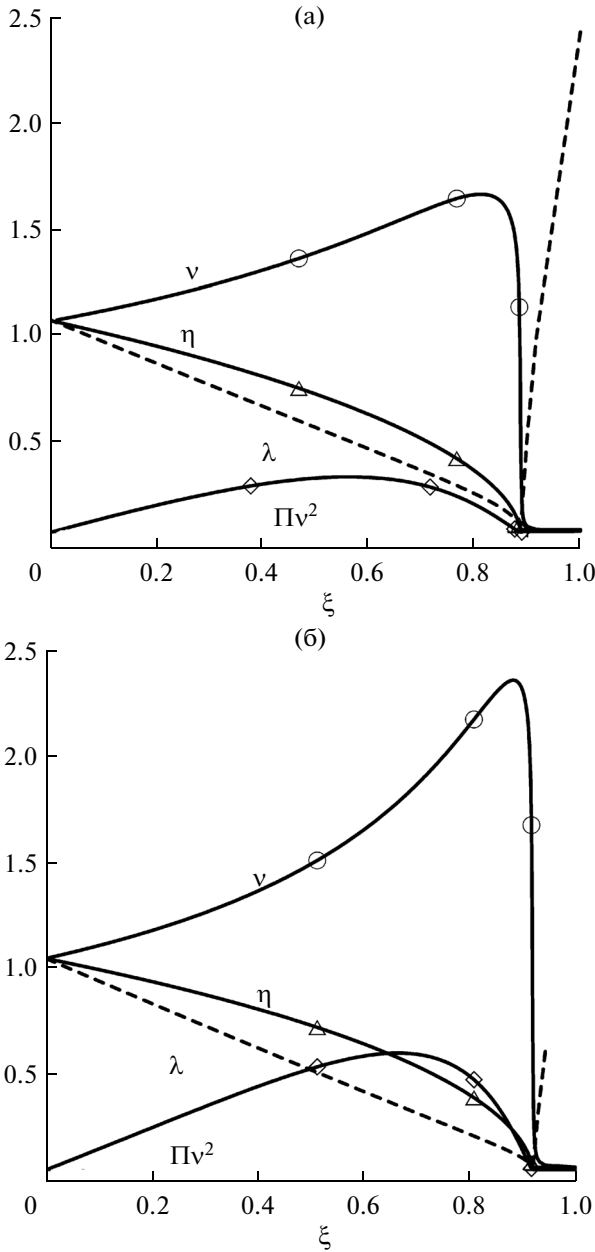


Рис. 1. а – Профили частоты плавучести и турбулентного масштаба с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые кривые) слагаемого со скоростью в уравнении (18). б – Профили потенциальной энергии с учетом (сплошная кривая) и без учета (штриховая кривая) слагаемого со скоростью в уравнении (19).  $E_* = 0.66, C = 0.09, D = 0.09, R = 1$ .

плотности, что говорит об ограниченности аналитической модели, предложенной в [5, 8] при сильно анизотропной турбулентности ( $R = 1$ ).

На рис. 2 показаны профили частоты плавучести, масштаба турбулентности, кинетической и потенциальной энергии для различных значений параметра  $E_*$ . Видно, что величина параметра  $E_*$  качественно не меняет характера соответствующих зависимостей, в то время как учет нестационарности уравнений баланса кинетической и по-



**Рис. 2.** Профили частоты плавучести  $v$ , масштаба турбулентности  $\lambda$ , кинетической  $\eta$  и потенциальной  $Pv^2$  энергии при  $E_* = 0.66$  (а) и  $E_* = 0.45$  (б) и  $C = 0.09$ ,  $D = 0.09$ ,  $R = 1$ .

тенциальной энергий турбулентных флюктуаций является принципиальным.

Для выяснения причины возникновения резких изменений на профилях характерного масштаба турбулентности  $\sim \lambda(\xi)$ , частоты плавучести  $\sim v(\xi)$  и кинетической энергии турбулентности  $\sim \eta(\xi)$  обратимся к уравнениям системы (11) и (12) при  $R = 1$ . Рассмотрим для простоты случай, когда коэффициенты турбулентной диффузии постоянны ( $L\sqrt{e} = L\sqrt{e_0}$ ) и найдем решение получающейся

при этом предположении линейной системы для случая, когда все переменные зависят от  $\zeta = z - Vt$ , где  $V$  – скорость движения скачка плотности. Распределение градиента плотности  $N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}$  и кинетической энергии турбулентности  $e$  при этом определяются системой линейных уравнений в обыкновенных производных, решение которой имеет вид:

$$N^2 = N_0^2 \exp\left(-\frac{V\zeta}{L\sqrt{e_0}}\right), \tag{20}$$

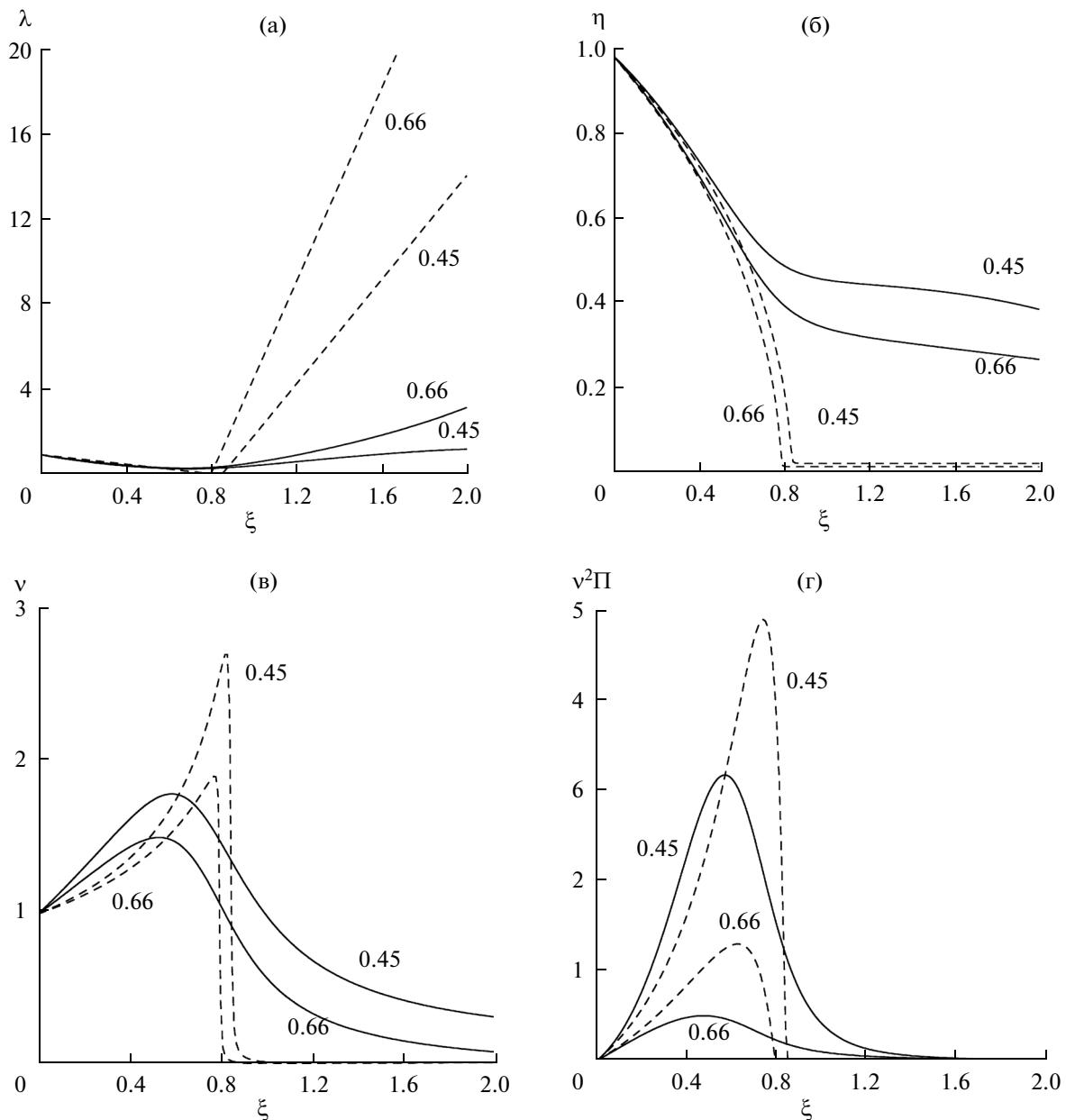
$$e = e_0 \exp\left(-\frac{V\zeta}{L\sqrt{e_0}}\left(\frac{1}{2\kappa_e} + \sqrt{\frac{1}{4\kappa_e^2} + \frac{Ce_0}{\kappa_e V^2}}\right)\right) + \frac{(LN_0)^2}{(\kappa_e - 1)\frac{V^2}{e_0} - C} \exp\left(-\frac{V\zeta}{L\sqrt{e_0}}\right). \tag{21a}$$

При этом стационарное (без учета слагаемого  $\frac{\partial e}{\partial t}$ ) распределение кинетической энергии турбулентности определяется выражением:

$$e = e_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{C}\zeta}{\sqrt{\kappa_e}L}\right) + \frac{(LN_0)^2}{(\kappa_e - 1)\frac{V^2}{e_0} - C} \exp\left(-\frac{V\zeta}{L\sqrt{e_0}}\right), \tag{21б}$$

Из сравнения этих решений видно, что при  $C \ll \frac{V^2}{\kappa_e e_0}$  в решениях (21а, б) определяющими будут слагаемые с существенно разными масштабами: первый масштаб  $z_1 = L\sqrt{\kappa_e}/C$ , характеризующий стационарный вертикальный профиль кинетической энергии турбулентности в (21б), не зависит от скорости заглупления пикноклина, второй масштаб  $z_2 = L\sqrt{e_0}/V$  зависит от скорости заглупления термоклина и определяет нестационарный профиль кинетической энергии турбулентности в решении (21б); при этом  $z_1 \gg z_2$ , что и соответствует плавному стационарному и резкому нестационарному вертикальному распределению кинетической энергии турбулентности в данной линейной системе при сделанных выше предположениях.

Более строгий анализ исходной нелинейной системы (11)–(13) показал, что введение на фоне полученного в [5] аналитического решения даже малой поправки, связанной с нестационарными слагаемыми в (12), приводит к появлению логарифмически расходящихся добавок в окрестно-



**Рис. 3.** Профили частоты плавучести  $\nu$ , масштаба турбулентности  $\lambda$ , кинетической и потенциальной  $\Pi$  энергии при разных значениях параметра  $E_*$  ( $E_* = 0.66$ ,  $E_* = 0.45$ ), при  $R = 1$  (штриховые кривые) и  $R = 0.7$  (сплошные кривые),  $C = 0.09$ ,  $D = 0.09$ .

сти точки  $\xi = \sqrt{6}E_*/2$  и степенных – в окрестности  $\xi = 0$ , что также подтверждает ограниченность применимости аналитических решений [5].

#### 4. АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ПИКНОКЛИНА ПРИ КОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ( $R < 1$ )

Учтем теперь конечную анизотропию турбулентных пульсаций плотности, полагая в (14)–(16)  $R < 1$ . При этом в процессе эволюции пикно-

клина становится принципиальной взаимная трансформация кинетической и потенциальной энергии турбулентности. Для удобства проведения численного интегрирования системы (14)–

(16) были введены новые переменные:  $U = \frac{5e}{3\nu} \times$

$$\times \left( \frac{de}{d\xi} \right) + E_*e, \quad W = \frac{e}{\nu} \left( \frac{d\Pi}{d\xi} \right) + E_*\Pi - E_*\langle \gamma \rangle^2 / \alpha,$$

$$\nu = \sqrt{\frac{d\langle \gamma \rangle}{d\xi}}, \quad \alpha = \frac{g^2}{l_h^2 N_h^4}. \quad \text{В результате система (14)–}$$

(16) свелась к системе пяти уравнений первого порядка:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{5}e(U - E_*e)\left(\frac{d\langle\gamma\rangle}{d\xi}\right)^{1/2}, \quad (22)$$

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{1}{4}\left(-\frac{E_*\gamma}{e} + \sqrt{\left(\frac{E_*\gamma}{e}\right)^2 + 6g^2\frac{\alpha\Pi(1-R)}{e}}\right)^2, \quad (23)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = -E_*\gamma + Cev, \quad (24)$$

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = \left(\frac{W - E_*\Pi + E_*\gamma^2/\alpha}{e}\right)v, \quad (25)$$

$$\frac{dW}{d\xi} = D\Pi v. \quad (26)$$

Система (22)–(26) решалась численно методом пристрелки с граничными условиями  $e(\xi = 0) = 1$ ,  $\frac{d\gamma}{d\xi}(\xi = 0) = 1$ ,  $\Pi(\xi = 0) = 0$ . При  $\xi \rightarrow \infty$  значения  $e$  и  $\Pi$  должны были быть больше нуля.

На рис. 3 показаны характерные профили  $\lambda(\xi)$ ,  $v(\xi)$ ,  $\eta(\xi) = \sqrt{e}$ ,  $\Pi(\xi)v^2(\xi)$ , полученные в результате численного интегрирования системы (20)–(24) для различных значений параметра анизотропии  $R$  и скорости заглубления пикноклина, определяемой параметром  $E_*$ . Штриховая линия соответствует сильной анизотропии при  $R = 1$ , сплошные кривые построены при умеренной анизотропии и  $R = 0.7$ . Видно, что даже при учете нестационарных слагаемых в уравнениях для распределения энергий турбулентных флюктуаций, при  $R < 1$  резких изменений в профилях соответствующих величин не наблюдается; при этом получающиеся распределения качественно близки к аналитическим зависимостям [5].

Действительно, при  $R = 0.7$  (слабая анизотропия) параметр  $\lambda(\xi)$ , соответствующий характерному масштабу турбулентности (определяемому в данной постановке задачи амплитудой внутренней волны), является растущей функцией от  $\xi$  при любых значениях  $E_*$ . параметр  $v(\xi) \sim N$  имеет более сложную зависимость: при  $\xi \approx \sqrt{6}E_*/2$  она достигает максимума, и затем монотонно стремится к нулю; кинетическая энергия турбулентности монотонно спадает с ростом  $\xi$ , аналогичным образом ведет себя и потенциальная энергия турбулентности. Однако в случае сильной анизотропии турбулентности ( $R = 1$ ), в вертикальных профилях соответствующих энергетических и гидродинамических параметров турбулентного эволюционирующего скачка плотности появляются скачкообразные изменения, связанные с наличием двух разных масштабов. Это масштаб, обусловленный движением скачка плотности, и

масштаб, определяемый релаксацией кинетической энергии турбулентности к стационарному значению, определяемому равенством источника (потока кинетической энергии турбулентных флюктуаций, переносимой волнами) и “стока” этой энергии (диссипации ее за счет турбулентной вязкости). Существование таких разных масштабов может быть важным при построении климатических численных моделей взаимодействия верхнего слоя океана и атмосферы.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследован процесс эволюции скачка плотности в рамках новой модели турбулентного замыкания, учитывающей анизотропию турбулентности в устойчиво стратифицированной среде. Показано, что в условиях сильно анизотропной турбулентности учет нестационарных слагаемых в уравнениях для распределения энергий турбулентных флюктуаций приводит к более резким изменениям пространственных и энергетических характеристик турбулентности в области ниже скачка плотности, что может играть важную роль для параметризации подсеточных масштабов в численных климатических моделях.

Показано, что при конечной анизотропии турбулентных пульсаций в этом случае нет резких изменений пространственных и энергетических характеристик турбулентности, а качественный вид профилей этих величин в области скачка совпадает с полученными в работах [5, 8] аналитическими зависимостями.

Численный анализ предложенной модели динамики скачка плотности выполнялся при поддержке гранта правительства Российской Федерации (11. G.34. 31. 0048) и проекта РФФИ № 15-05-02430. Работа Соустовой И.А., Зилитинкевича С.С. и Троицкой Ю.И. по интерпретации результатов численного анализа была частично поддержана грантами правительства Российской Федерации (11. G.34. 31. 0048) и грантом РФ (соглашение № 15-17-20009).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Китайгородский С.А., Миропольский Ю.З.* К теории деятельного слоя океана // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. № С. 639–646.
2. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, Москва. 1977. 431 с.
3. *Баренблатт Г.И.* Об автомодельности распределения температуры и солёности в верхнем термоклине // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. № 11. С. 1160–1166.
4. *РФФИ (№ 15-05-02430 С.С., Крейман К.Д., Фельзенбаум А.И.* Турбулентность, теплообмен и автомодельность температурного профиля в термоклине // ДАН. 1988. Т. 300. С. 1226–1230.

5. Зилитинкевич С.С., Миронов Д.В. Теоретическая модель эволюции термоклина в пресноводном бассейне // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. С. 969–978.
6. Deardorff J.W., Willis G.E., Stockton B.N. Laboratory studies of the entrainment zone of convectively mixed-layer // J. Fluid Mech. 1980. V. 100. № 1. P. 41–64.
7. Zilitinkevich S.S., Elperin T., Kleorin N., Rogachevskii I. Energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure model for the stably stratified flows. Pt I: Steady-state, homogeneous regimes // Boundary-Layer Meteorol. 2007. V. 125. P. 167–192.
8. Зилитинкевич С.С. Атмосферная турбулентность и планетарные пограничные слои. М.: ФИЗМАТ-ЛИ, 2013. 251с.
9. Островский Л.А., Троицкая Ю.И. Модель турбулентного переноса и динамика турбулентности в стратифицированном сдвиговом потоке // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23. № 10. С. 1031–1040.
10. Mahrt L. Stably stratified atmospheric boundary layers // Annu. Rev. Fluid. Mech. 2014. V. 46. P. 23–45.

## On the Application of a Turbulence Closure Modified Model to the Description of the Density Jump Evolution in a Stably Stratified Medium

E. V. Ezhova<sup>a, b</sup>, S. S. Zilitinkevitch<sup>a–d</sup>, G. V. Rybushkina<sup>a</sup>, I. A. Soustova<sup>a, b</sup>, and Yu. I. Troitskaya<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

<sup>b</sup> Lobachevsky State University, pr. Gagarina 23, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

<sup>c</sup> Finnish Meteorological Institute, PO BOX 503, 00101 Helsinki, Finland

<sup>d</sup> Division of Atmospheric Sciences, University of Helsinki, Finland

e-mail: soustova@hydro.appl.sci-nnov.ru

Received February 20, 2015; in final form, June 5, 2015

**Abstract**—The self-similar turbulent density jump evolution has been studied in the scope of a turbulence closure modernized theory which takes into account the anisotropy and mutual transformation of the turbulent fluctuation kinetic and potential energy for a stably stratified fluid. The numerical calculation, performed using the equations for the average density and kinetic and potential energies of turbulent fluctuations, indicates that the vertical profiles of the buoyancy frequency, turbulence scale, and kinetic and potential energies drastically change when the turbulence anisotropy is strong. The vertical profiles of the corresponding energy and spatial discontinuity parameters, calculated at a weaker anisotropy, indicate that similar drastic changes are absent and a qualitative agreement exists with the known analytical solution, which describes the density jump evolution in a freshwater basin and was obtained previously [5, 8] in the scope of a turbulence local-similarity hypothesis applied in combination with the budget equation for the turbulent fluctuation kinetic energy.

**Keywords:** turbulence, stratification, density jump