

УДК 551.466.2

## ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

© 1997 г. Ю. И. Троицкая

Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию 21.03.95 г., после доработки 24.11.95 г.

Построена модель генерации гравитационно-капиллярных волн на воде конечной глубины турбулентным ветром вблизи порога устойчивости. На основании численной модели генерации волн турбулентным ветром определены пороговые значения скорости трения ветра  $u_{*c}$  и волнового числа наиболее неустойчивого возмущения  $k_c$  в зависимости от глубины жидкости. Вблизи порога устойчивости рассчитаны нелинейные компоненты вязкого декремента волн и их ветрового инкремента. Для этого использован метод, основанный на использовании криволинейных координат, в которых координатные линии близки к линиям тока вне вязких пограничных слоев вблизи поверхности и дна. Вычислены коэффициенты уравнения Гинзбурга–Ландау, справедливого в случае, когда волновое число наиболее неустойчивого возмущения не совпадает со значениями, при которых наблюдаются резонансы со второй гармоникой и средним течением.

Один из распространенных методов исследования волн на поверхности воды связан с использованием эволюционных уравнений [1]. Наиболее простые и универсальные уравнения такого типа получаются для слабо модулированных волн, имеющих малую амплитуду [1]. Такие волны возбуждаются в неустойчивых системах вблизи порога устойчивости, при этом комплексная амплитуда волн удовлетворяет уравнению Гинзбурга–Ландау [2]. При этом для каждой конкретной системы возникает проблема определения коэффициентов этого нелинейного уравнения. Уравнение Гинзбурга–Ландау для поверхностных волн, возбуждаемых ветром вблизи порога устойчивости, определяемого вязкой диссипацией в жидкости бесконечной глубины, было написано в [3]:

$$a_t - i\mu a_{\xi\xi} + iq a_{zz} - i\alpha a |k_c a|^2 = \gamma_l a - \rho a |k_c a|^2 + \beta a_{\xi\xi} + 2v_w a_{zz}. \quad (1)$$

Здесь  $a(\xi, z, t)$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны, имеющий несущие частоту  $\omega_0$  и волновое число  $k_0 = (k_c, 0)$ , соответствующие наиболее неустойчивому возмущению,  $\xi = x - vt$ , где  $v$  – групповая скорость этого возмущения,  $x, z$  – продольная и поперечная по отношению к ветру координаты,  $\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k=k_c}$ ,  $q = v/(2/k_c)$ ,  $\alpha |ak_c|^2$  – нелинейная поправка к частоте,  $v_w$  – кинематиче-

ская вязкость воды. Инкремент ветровых волн в этом случае представляется в виде

$$\gamma = \gamma_l - \rho |k_c a|^2 = \gamma_a^{(0)}(k_c, u_*) - \gamma_a^{(1)}(k_c, u_*) |k_c a|^2 - 2v_w k_c^2 - \gamma_w^{(1)}(k_c) |k_c a|^2. \quad (2)$$

Здесь  $\gamma_a^{(0)}$  – линейный ветровой инкремент поверхностных волн,  $u_*$  – скорость трения ветра,  $\gamma_a^{(1)}(k_c, u_*) |k_c a|^2$ ,  $\gamma_w^{(1)}(k_c, u_*) |k_c a|^2$  – нелинейные добавки к ветровому декременту и вязкому инкременту. Вблизи порога устойчивости

$$\gamma_{(0)}^a = 2v k_c^2 + K(u_* - u_{*c}),$$

$$\text{где } K = \left. \frac{\partial \gamma_a^{(0)}}{\partial u_*} \right|_{u_* = u_{*c}}$$

где  $u_{*c}$  – пороговая скорость ветра,  $\mu \gamma_l = K(u_* - u_{*c})$ , а

$$\rho = \gamma_a^{(1)} + \gamma_w^{(1)}.$$

Значения параметров уравнения (1) определяют устойчивость гармонического возмущения с волновым числом  $k_c$ . Причем ограничение развития неустойчивости может быть обеспечено за счет самомодуляции или самофокусировки [4]. В работе [3] использовано выражение для инкремента ветровых волн, полученное в рамках квазиламинарной модели Майлса [5]. В этом случае пороговые параметры –  $u_{*c} = 4.4$  см/с,  $k_c = 1.8$  см<sup>-1</sup>. Гармонические возмущения с  $k_c = 1.8$  см<sup>-1</sup> оказываются устойчивыми [3]. В [6] ветровой инкре-

мент поверхностных волн рассчитывался в рамках численной модели, учитывающей влияние турбулентных напряжений. Пороговые параметры для волн на глубокой воде  $u_{*c} = 4.95$  см/с,  $k_c = 1$  см<sup>-1</sup> оказываются близкими к параметрам, даваемым моделью Майлса [5]. Но в этом случае гармоническое возмущение с волновым числом  $k_c$  оказывается неустойчивым, а механизмом ограничения неустойчивости является самомодуляция (см. рис. в [3]).

При изменении глубины жидкости изменяются как коэффициенты уравнения Гинзбурга-Ландау, так и пороговые параметры. В настоящей работе приводится расчет этих величин для волн, возбуждаемых турбулентным ветром на поверхности чистой воды произвольной глубины. В разделе 2 в рамках численной модели, развитой в [6], рассчитываются пороговые параметры  $u_{*c}$  и  $k_c$ , а

также линейный ветровой инкремент  $\gamma_a^{(0)}$  и нелинейная поправка к нему  $\gamma_a^{(1)}(k_c, u_{*c})|k_c a|^2$ . При определении коэффициентов уравнения Гинзбурга-Ландау значительные затруднения связаны с расчетом нелинейных поправок к вязкому декременту. В разделах 3-5 изложен принцип вычисления этих поправок, основанный на использовании криволинейных координат, в которых координатные линии близки к линиям тока вне пограничных слоев вблизи дна и поверхности вязкой жидкости, и описана процедура получения этих коэффициентов. В разделе 6 изложены результаты вычисления коэффициентов уравнения (1) и обсуждаются их особенности.

## 2. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СКОРОСТИ ВЕТРА И ВОЛНОВОГО ЧИСЛА ВОЛН НА ВОДЕ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Пусть в слое воды толщиной  $d$  распространяется плоская гармоническая волна с амплитудой  $a$ , фазовой скоростью  $c$  и волновым числом  $k$ , которые связаны линейным дисперсионным соотношением

$$c = \sqrt{(g/k + Tk) \tanh kd}, \quad (3)$$

где  $g$  - ускорение силы тяжести,  $T$  - коэффициент поверхностного натяжения.

Свободная волна в вязкой жидкости затухает с декрементом

$$\gamma_w = 2\nu_w k^2 + \sqrt{\nu_w k c / 2k} / \sinh 2kd. \quad (4)$$

Если над поверхностью воды имеется воздушный поток, то волны на воде вызывают в нем возмущения, которые, в свою очередь, создают поток энергии от ветра к волнам  $\Pi_a$ . В результате мнимая часть частоты волны  $\gamma$ , характеризующая ее нарастание или затухание, оказывается равной  $\gamma = \gamma_a - \gamma_w$ , где  $\gamma_a$  - ветровой инкремент, связанный

с потоком энергии на поверхности воды следующим образом:

$$\gamma_a = 1/2 \Pi_a / E, \quad (5)$$

где

$$E = \frac{ka^2 c^2}{2 \tanh kd} \quad (6)$$

- энергия волны в линейном приближении.

Для вычисления потока энергии от ветра к волнам необходимо рассмотреть возмущения, индуцируемые в воздухе волнами на поверхности воды. Для этого воспользуемся моделью, развитой в [6]. Эта модель включает в себя систему уравнений гидродинамики для величин, осредненных по турбулентным пульсациям, в ортогональных криволинейных координатах  $(s, \theta)$ , в которых одна из координатных линий приближенно совпадает в взволнованной водной поверхности с точностью до величин порядка  $(ka)^2$ . Эти координаты задаются с помощью преобразования

$$\begin{aligned} x &= s + \text{Re}(i a e^{isk - kt}), \\ y &= \theta + \text{Re}(a e^{isk - kt}). \end{aligned}$$

Якобиан этого преобразования  $J = y_s^2 + \theta_s^2$ . Заметим, что такая система координат была предложена в [7] и впоследствии использовалась в [8]. Для аппроксимации турбулентных напряжений  $\sigma_{ij}$ , входящих в систему уравнений гидродинамики для средних величин, использовалась градиентная аппроксимация

$$\sigma_{ij} = \nu(\theta) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} e \delta_{ij}. \quad (7)$$

Здесь  $u_i$  - компоненты скорости, усредненные по турбулентным пульсациям,  $e$  - средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций,  $\nu$  - эффективный коэффициент турбулентной вязкости, для аппроксимации которого была использована эмпирическая формула, полученная в работе [9] на основе экспериментов с турбулентным пограничным слоем на плоской гидродинамически гладкой пластинке

$$\nu(\theta) = \nu_a [1 + \kappa u_* \theta / \nu_a [1 - e^{-(\theta/L)^2}]]. \quad (8)$$

При этих условиях система уравнений гидродинамики в переменных функция тока  $(\psi)$ -завихренность  $(\chi)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\chi J^3)}{\partial t} + J^2(\psi_\theta \chi_s - \psi_s \chi_\theta - J \Delta(\nu \chi)) = \\ = -2\nu_{\theta\theta} \psi_{ss} J - J_\theta((\psi_\theta \nu_\theta)_\theta - \nu_\theta \psi_{ss}) - \end{aligned} \quad (9a)$$

$$- J_s(2\nu_\theta \psi_{\theta s} - \psi_s \nu_{\theta\theta}) + \psi_\theta \nu_\theta (J_\theta^2 + J_s^2) / J,$$

$$\psi_{ss} + \psi_{\theta\theta} = J \chi. \quad (9b)$$



Система (9) должна быть дополнена граничными условиями непротекания

$$\Psi_s|_{\theta=0} = 0 \quad (10a)$$

и прилипания

$$\Psi_{\theta}|_{\theta=0} = -c + kac(1 + c \tanh kd) \operatorname{Re}(e^{iks}) \quad (10b)$$

и условием убывания возмущений при удалении от поверхности. Кроме того, необходимо задать турбулентный поток импульса  $u_*^2$  при  $\theta \rightarrow \infty$ . С использованием градиентных гипотез последнее условие можно записать в виде:

$$\nu \chi_0|_{\theta \rightarrow \infty} = u_*^2.$$

При отсутствии возмущений на поверхности воды ( $s = x, \theta = y$ ) из системы (9) с использованием выражения (7) можно найти невозмущенные профили скорости и завихренности:  $\psi_0(y)$  и  $\chi_0(y)$ . При наличии возмущения на водной поверхности будем искать решение системы в виде:

$$\psi = \psi_0(\theta) + \psi_1(s, \theta), \quad \chi = \chi_0(\theta) + \chi_1(s, \theta),$$

где  $\psi_1$  и  $\chi_1$  — возмущения функции тока и завихренности, средние от которых по  $s$  равны 0. В первом порядке по  $ka$   $\psi_0(\theta)$  и  $\chi_0(\theta)$  совпадают с  $\psi_0(y)$  и  $\chi_0(y)$ , полученными в отсутствие возмущений, а  $\psi_1$  и  $\chi_1$  удовлетворяют линеаризованной системе (9a, 9б).

Зная решение системы (9a, 9б), можно получить выражение для потока энергии от ветра к волнам

$$\Pi_a = \langle (S_{ij} - \delta_{ij}P) U_i n_j \rangle, \quad (11)$$

где оператор  $\langle \dots \rangle = \int_0^{2\pi/k} \dots ds$  означает осреднение по горизонтальной координате  $s$ ,  $S_{ij}$ ,  $U_i$ ,  $P$  — пульсационные компоненты вязких напряжений, скорости и давления —  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle$ ;  $U_i = u_i - \langle u_i \rangle$ ,  $n_1 = y_s / \sqrt{J}$ ,  $n_2 = y_{\theta} / \sqrt{J}$ .

Для вычисления линейного инкремента требуется знать выражение для  $\Pi_a$  с точностью до  $(ka)^2$ . Из (11) следует, что

$$\Pi_a = \langle S_{12}U + (S_{22} - P)W \rangle|_{\theta=0}.$$

Принимая во внимание выражения для компонент скорости

$$U = \psi_y - \langle \psi_y \rangle = \psi_{1\theta} - \psi_{0\theta}(y_{\theta})^{-1}, \quad (12a)$$

$$W = -(\psi_x - \langle \psi_x \rangle) = -\psi_{1s} - \psi_{0s}x_{\theta} \quad (12b)$$

и граничные условия (10a, 10б), легко видеть, что

$$\Pi_a = \frac{cka}{2} \operatorname{Re}[(-P + S_{22})i + S_{12} \tanh kd]. \quad (13)$$

Используя (7) для вычисления турбулентных напряжений и выражение для  $P$ , следующее из урав-

нения для горизонтальной компоненты импульса (см. [6]), а также (5) и (6), можно получить, что ветровой инкремент  $\gamma_a$  равен:

$$\gamma_a = \frac{\rho_a \nu_a}{\rho_w \nu_w} \left\{ \frac{1}{2kac \csc \tanh kd} \operatorname{Re}[\chi_{1\theta} - \chi_1 k c \tanh kd] - 2k^2 + \frac{\Psi_{0\theta\theta}}{c \csc \tanh kd} \right\}. \quad (14)$$

Величины  $\chi_{1\theta}$  и  $\chi_1$ , входящие в (14), находились путем численного решения системы (9), процедура его описана в [6].

Полученная в результате мнимая часть частоты волны  $\gamma = \gamma_a - \gamma_w$  является функцией трех независимых параметров: глубины жидкости  $d$ , волнового числа  $k$  и скорости трения ветра  $u_*$ . Для каждого значения  $d$  вычислялась минимальная скорость трения ветра  $u_{*c}$ , при которой появлялось неустойчивое возмущение с волновым числом  $k_c$ . Зависимость  $u_{*c}$  от  $d$  представлена на рис. 1а, зависимость безразмерного волнового числа  $dk_c(d)$  — на рис. 1б. Видно, что с убыванием глубины жидкости растет величина пороговой скорости ветра, что, очевидно, связано с увеличением вязкой диссипации волн на воде за счет трения о дно.

Вблизи порога генерации вязкий декремент и ветровой инкремент взаимно компенсируются, поэтому существенными становятся нелинейные поправки к этим величинам, которые при малой амплитуде волны пропорциональны ее квадрату (см. формулу (2)). Рассмотрим в этом случае нелинейную поправку к ветровому инкременту. Тогда поток энергии от ветра к волнам необходимо рассчитать с точностью до  $(ka)^4$ . Осциллирующие компоненты вязких напряжений  $S_{ij}$ , компонент скорости  $U_i$  и нормалей к поверхности могут быть представлены в виде:

$$S_{ij} = ka S_{ij}^{(1)} + (ka)^2 S_{ij}^{(2)} + (ka)^3 S_{ij}^{(3)} + \dots$$

$$U_i = ka U_i^{(1)} + (ka)^2 U_i^{(2)} + (ka)^3 U_i^{(3)} + \dots$$

$$n_1 = \frac{y_s}{\sqrt{J}} = (ka) n_1^{(1)} + (ka)^2 n_1^{(2)} + \dots$$

$$n_2 = \frac{y_{\theta}}{\sqrt{J}} = 1 + (ka)^2 n_2^{(2)} + (ka)^3 n_2^{(3)} + \dots$$

Если параметры системы далеки от резонансных значений, то можно предположить, что  $S_{ij}^{(m)} \sim S_{ij}^{(1)}$ ,  $U_i^{(m)} \sim U_i^{(1)}$ . В то же время, как показывает расчет, приведенный в [6], вблизи порога генерации волн на глубокой воде  $S_{ij}^{(3)} \gg S_{ij}^{(1)}$ , а все остальные нелинейные коэффициенты порядка линейных.

Можно предположить, что существует достаточно широкий диапазон глубин жидкости, для которых это условие сохраняется. В этом случае поток энергии от ветра к волнам в порядке  $(ka)^4$  определяется главным образом величиной  $S_{ij}^{(3)}$ , а для составляющих скорости  $U_i$  и нормалей к водной поверхности  $n_j$  можно использовать линеаризованные выражения. Тогда выражение (13) для  $\Pi_a$  остается справедливым, но  $S_{ij}$  и  $P$  должны быть представлены с точностью до  $(ka)^3$ .

Для вычисления этих величин необходимо найти решение системы (9а, 9б) с точностью до  $(ka)^3$ . Поскольку рассматривается гармоническая волна на воде, то волновое возмущение в воздухе  $(\psi_1(s, \theta), \chi_1(s, \theta))$  в требуемом порядке следует искать в виде суммы гармоник. При этом, как показывают численные оценки [6], достаточно учитывать только первую гармонику, а в уравнениях для среднего течения оставлять слагаемые порядка  $(ka)^2$ , описывающие обмен импульсом между волновым полем и средним течением, при условии, что отношение амплитуд возвышения второй гармоники к первой составляет единицы  $ka$ .

Таким образом, в уравнениях для первой гармоники присутствуют слагаемые порядка  $(ka)^3$ , обусловленные присутствием индуцированного течения. В то же время слагаемые, возникающие из-за взаимодействия первой и второй гармоник и имеющие формально тот же порядок  $(ka)^3$ , опускаются. Этот подход называется квазилинейным приближением, и он был использован в [6, 10] для расчета нелинейной поправки к ветровому инкременту волн на глубокой воде. Применимость этого приближения обсуждается ниже (см. раздел 6 и Приложение 2).

В квазилинейном приближении выражения для возмущений турбулентных потоков  $S_{ij}$  и давления  $P$  имеют тот же вид, что и в линейном приближении. Кроме того, нужно учесть, что поправка к энергии  $E$  волновых возмущений порядка  $(ka)^4$  имеет порядок  $E(ka)^2$ , и ею можно пренебречь так же, как и величинами  $U_i^{(3)}$ ,  $n_j^{(3)}$  и т.п. Тогда ветровой инкремент  $\gamma_a$  по-прежнему будет вычисляться по формуле (14), где, однако, поля  $\chi_{10}$ ,  $\chi_1$  и пр. вычисляются в рамках квазилинейного приближения.

На рис. 2 приведены зависимости линейного ветрового инкремента  $\gamma_a^{(0)}$  и коэффициента при нелинейной добавке к нему  $\gamma_a^{(1)}$  (см. формулу (2)) от глубины жидкости. Видно, что при  $d > 1.5$  см  $\gamma_a^{(1)} \gg \gamma_a^{(0)}$ , и все рассуждения, приведенные выше относительно вычисления  $\gamma_a$ , справедливы. При  $d < 1.5$  см  $\gamma_a^{(1)}$  имеет тот же порядок, что и  $\gamma_a^{(0)}$ , поэтому при ее вычислении нельзя использовать

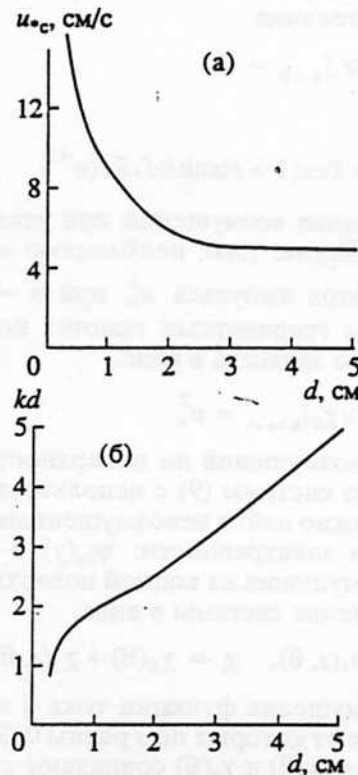


Рис. 1. Пороговые значения скорости трения ветра  $u_{*c}$  (а) и максимально неустойчивого безразмерного волнового числа  $dk_c$  (б) как функции глубины жидкости  $d$ .

формулу (14). В то же время при такой глубине жидкости порог генерации приближается к резонансу между 1-й и 2-й гармониками волн на поверхности воды, когда их фазовые скорости совпадают. В этом случае нелинейная компонента вязкого декремента волн на воде  $\gamma_w^{(1)}$  существенно превосходит  $\gamma_a^{(1)}$ , и этой последней можно пренебречь.

### 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ПОПРАВКА К ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ (КОНСЕРВАТИВНАЯ ЗАДАЧА)

Для того чтобы пояснить принцип расчета нелинейного затухания, рассмотрим более простую консервативную задачу о нелинейной поправке к фазовой скорости периодической волны.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью, равной фазовой скорости волны  $c$ . В отсутствие вязкого затухания периодическая волна в этой системе отсчета является стационарной. Предположим, что поверхность воды задается уравнением

$$y = a \operatorname{Re}(b_1 e^{ik\xi}) + a^2 \operatorname{Re}(b_2 e^{2ik\xi}),$$



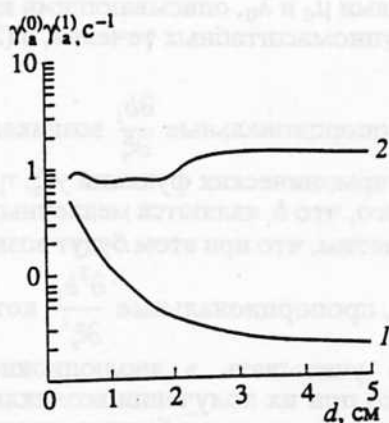


Рис. 2. Линейный ветровой инкремент максимально неустойчивого возмущения  $\gamma_a^{(0)}$  (1) и нелинейная поправка к ветровому инкременту  $\gamma_a^{(1)}$  (2) как функция глубины жидкости  $d$ .

где  $\xi$  — координата вдоль поверхности воды. При этом известна только амплитуда основной волны  $ab_1$ , а амплитуду второй гармоники  $a^2b_2$  следует определить. Рассмотрим задачу в ортогональных координатах  $(\xi, \eta)$ , в которых линия  $\eta = 0$  совпадает с водной поверхностью с точностью до  $(ka)^3$ , а функции  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  являются гармоническими. Преобразование координат от  $(x, y)$  к  $(\xi, \eta)$  тогда имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= \xi + a \operatorname{Re}(b_1 e^{ik\xi + k\eta}) + a^2 \operatorname{Re}(b_2 e^{2(ik\xi + k\eta)}), \\ y &= \eta + a \operatorname{Re}(b_1 e^{ik\xi + k\eta}) + a^2 \operatorname{Re}(b_2 e^{2(ik\xi + k\eta)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Неизвестную величину  $b_2$  будем искать исходя из условия совпадения координатных линий  $\eta = \text{const}$  с линиями тока. Тогда функция тока

$$\psi = -c\eta. \quad (16)$$

Для потенциального течения справедлива формула Бернулли, которая в криволинейных координатах (15) примет вид:

$$\frac{\psi_\eta^2 + \psi_\xi^2}{2I} + gy + p = \text{const}. \quad (17)$$

Здесь  $I$  — якобиан преобразования (15),  $p$  — давление.

На поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному  $P_a$ , а непосредственно под поверхностью

$$p|_{\eta=0} = P_a - \frac{T}{R},$$

где  $R$  — радиус кривизны поверхности. С учетом известного выражения для  $R$  и формулы (16) для  $\psi$  (17) примет вид:

$$\left[ \frac{c^2}{2I} + gy - T \frac{x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}}{I^{3/2}} \right] \Big|_{\eta=0} = \text{const}. \quad (18)$$

Разложим периодическую функцию в левой части (18) в ряд Фурье по  $\xi$  и в ряд Тейлора по  $a$ . Поскольку правая часть не зависит от  $\xi$ , то коэффициенты при всех гармониках должны быть равны нулю. Условие равенства нулю коэффициента при  $ae^{ik\xi}$  дает линейное дисперсионное уравнение (3); условие равенства нулю коэффициента при  $a^2e^{2ik\xi}$  дает связь неизвестной амплитуды второй гармоники  $b_2$  с амплитудой первой гармоники  $b_1$ . Условие равенства нулю коэффициента при  $a^3e^{3ik\xi}$  дает нелинейную поправку к фазовой скорости периодической волны. Эти стандартные, но громоздкие преобразования выполнялись с использованием пакета программ для проведения аналитических преобразований на IBM PC "Mathematika".

Полученное таким способом выражение для фазовой скорости периодической слабонелинейной волны на поверхности тяжелой жидкости имеет вид:

$$c^2 = c_0^2 - \frac{k(8g^2 + gTk^2 + 2T^2k^4)}{8(g - 2Tk^2)}.$$

Оно совпадает с известным выражением, полученным ранее традиционным способом [11]. Заметим, что изложенный способ получения нелинейного дисперсионного соотношения аналогичен использованному в [12] для вывода нелинейного дисперсионного соотношения для волн Герстнера.

#### 4. ПРИНЦИП РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНОГО ЗАТУХАНИЯ

Рассмотрим теперь волновые движения в слое вязкой жидкости глубины  $d$ . Если  $d$  достаточно велико, то в основной толще течение потенциально, а вблизи дна и поверхности имеются узкие пограничные слои толщиной  $\delta_w = (\nu/c_k)^{1/2} \ll d$ , в которых завихренность отлична от нуля. Действующие в них вязкие напряжения, а также нормальные и тангенциальные напряжения в воздушном потоке индуцируют малую дополнительную компоненту скорости, нормальную к поверхности, которая воздействует на потенциальное течение (см. [13]). При этом возникает деформация линий тока этого течения относительно их формы в отсутствие пограничных слоев у дна и поверхности. Эта деформация линий тока и определяет затухание волны [14].

Допустим, что волна поверхности слоя жидкости не является строго периодической, а представляет собой пакет с малой, но конечной шириной спектра, и, кроме того, будем учитывать вязкость жидкости и влияние воздушного потока над ее поверхностью. Тогда движение жидкости вне узких пограничных слоев вблизи дна и поверхности жидкости останется потенциальным, но его линии тока изменятся. Будем использовать криволинейные координаты  $(\xi, \eta)$  с координатными линиями  $\eta = \text{const}$ , близкими к линиям тока. В них

комплексные амплитуды гармоник являются медленными функциями горизонтальной координаты  $\xi$  и времени  $t$ : в соответствии с методом многих масштабов  $b_i(\epsilon t, \epsilon \xi, \epsilon^2 t, \epsilon^2 \xi)$ , где  $\epsilon$  имеет порядок  $ka$ .

Поверхность воды теперь будет задаваться уравнением

$$y = a \operatorname{Re}(b_1 e^{ik\xi}) + a^2 \operatorname{Re}(b_1 e^{2ik\xi}) + a^2 b_0. \quad (19)$$

Будем искать криволинейные координаты в виде:

$$y = \eta + a \operatorname{Re} \left[ (b_1 + \lambda_1) \frac{\sinh k(d + \eta)}{\sinh kd} + \mu_1 \frac{\sinh k\eta}{\sinh kd} + \frac{1}{i} \frac{\partial b_1}{\partial \xi} \left( \frac{\sinh k(d + \eta)}{\sinh kd} \right)'_k \right] e^{ik\xi} + a^2 \operatorname{Re} \left[ (b_2 + \lambda_2) \frac{\sinh 2k(d + \eta)}{\sinh 2kd} + \mu_2 \frac{\sinh 2k\eta}{\sinh 2kd} + \frac{1}{i} \frac{\partial b_2}{\partial \xi} \left( \frac{\sinh 2k(d + \eta)}{\sinh 2kd} \right)'_k \right] e^{2ik\xi} + a^3 \operatorname{Re} \left[ \lambda_3 \frac{\sinh k(d + \eta)}{\sinh kd} + \mu_3 \frac{\sinh k\eta}{\sinh kd} \right] e^{ik\xi} + a^2 \left[ (b_0 + \lambda_0) \frac{d + \eta}{d} + \mu_0 \frac{\eta}{d} \right], \quad (20a)$$

$$x = \xi + a \operatorname{Re} \left[ (b_1 + \lambda_1) \frac{\cosh k(d + \eta)}{i \sinh kd} + \mu_1 \frac{\cosh k\eta}{i \sinh kd} - \frac{\partial b_1}{\partial \xi} \left( \frac{\cosh k(d + \eta)}{\sinh kd} \right)'_k \right] e^{ik\xi} + a^2 \operatorname{Re} \left[ (b_2 + \lambda_2) \frac{\cosh 2k(d + \eta)}{i \sinh 2kd} + \mu_2 \frac{\cosh 2k\eta}{i \sinh 2kd} - \frac{\partial b_2}{\partial \xi} \left( \frac{\cosh 2k(d + \eta)}{\sinh 2kd} \right)'_k \right] e^{2ik\xi} + a^3 \operatorname{Re} \left[ \lambda_3 \frac{\cosh k(d + \eta)}{i \sinh kd} + \mu_3 \frac{\cosh k\eta}{i \sinh kd} \right] e^{ik\xi} + a^2 B_0. \quad (20b)$$

Главные члены в координатах (20a, 20b) представляют собой гармонические функции, в которых  $y$  при  $\eta = 0$  совпадает с поверхностью воды (19), а при  $\eta = -d$  — с поверхностью дна. Слагаемые с коэффициентами  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  описывают влияние вязких пограничных слоев соответственно вблизи поверхности и дна. В дальнейшем при разложениях в ряды мы будем учитывать слагаемые, содержащие  $\mu_i$  и  $\lambda_i$  в степени не выше первой. Последние слагаемые в (20a, 20b) описывают крупномасштабную по сравнению с длиной волны возмущения деформацию координатных линий. При этом  $b_0$  и  $B_0$  связаны условием ортогональности

$$\frac{\partial B_0}{\partial \xi} = \frac{b_0}{d}. \quad (21)$$

Малыми величинами  $\mu_0$  и  $\lambda_0$ , описывающими вязкое затухание крупномасштабных течений, в (21) пренебрегается.

Слагаемые, пропорциональные  $\frac{\partial b_i}{\partial \xi}$  возникают при нахождении гармонических функций  $y(\xi, \eta)$  и  $x(\xi, \eta)$  с учетом того, что  $b_i$  являются медленными функциями  $\xi$ . Заметим, что при этом будут возникать и слагаемые, пропорциональные  $\frac{\partial^2 b_i}{\partial \xi^2}$ , кото-

рые необходимо учитывать в эволюционном уравнении. Однако при их получении возникают значительные затруднения, и они будут написаны в дальнейшем, исходя из феноменологических соображений.

Функция тока будет при этом также отличаться от (16)

$$\psi = -c\eta + \Phi. \quad (22)$$

Это означает, что координатные линии  $\eta = \text{const}$  не полностью совпадают с линиями тока. Отличие функции тока от (16)  $\Phi$  возникает в пограничных слоях вблизи дна и поверхности, и, кроме того, как будет видно из дальнейшего,  $\Phi$  оказывается отличным от нуля и в области потенциального течения из-за зависимости криволинейных координат от времени и наличия среднего течения.

Для потенциального течения вне пограничных слоев вблизи дна и поверхности справедлива формула Бернулли. С учетом зависимости течения и криволинейных координат от времени ее можно записать в виде:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{x_\xi + y_\xi}{I} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{x_\eta + y_\eta}{I} + \frac{\psi_\eta^2 + \psi_\xi^2}{2I} + gy + p = \text{const}. \quad (23)$$

Здесь  $\phi$  — потенциал течения, связанный с функцией тока соотношениями  $\psi_\eta = \phi_\xi$ ;  $\psi_\xi = -\phi_\eta$ ;  $I$  — якобиан преобразования координат (20a, 20b).

Поправки к криволинейным координатам  $\mu_i$  и  $\lambda_i$  можно найти, рассматривая течение в пограничных слоях вблизи дна и поверхности. В этих областях завихренность течения  $\chi$  отлична от нуля и функция  $\Phi$  из (22) и  $\chi$  удовлетворяют системе

$$I \chi_\xi - \Phi_\xi \chi_\eta + (\Phi_\eta - c) \chi_\xi = v_w (\chi_{\xi\xi} + \chi_{\eta\eta}), \quad (24a)$$

$$I \chi = \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta}. \quad (24a)$$

Перейдем теперь к рассмотрению течения вблизи дна и поверхности.

### 5. ТЕЧЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ ДНА И ПОВЕРХНОСТИ

5.1. Течение в пограничном слое вблизи поверхности. Вычисление  $\lambda_i$ . На поверхности воды выполняются граничные условия непротекания и



непрерывности нормальных и тангенциальных напряжений. Условие непротекания в криволинейных координатах, зависящих от времени, имеет вид:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{I} \left[ \frac{\partial Z}{\partial \xi} (\psi_\eta - x_r x_\xi + y_i y_\xi) - \frac{\partial Z}{\partial \eta} (\psi_\xi + x_r x_\eta + y_i y_\eta) \right] \Big|_{Z=0} = 0, \quad (25)$$

где  $Z$  – уравнение поверхности воды. Сравнивая (19) и (20а) и учитывая слагаемые не выше 1-го порядка по  $\lambda_i, \mu_i$ , легко видеть, что оно имеет вид:

$$Z = n(\xi) + \eta = 0, \\ n(\xi) = (a \operatorname{Re}(\lambda_1 e^{ik\xi}) + a^2 \operatorname{Re}(\lambda_2 e^{2ik\xi}) + a^3 \operatorname{Re}(\lambda_3 e^{3ik\xi}) + a^2 \lambda_0) \left( 1 + \frac{ka}{\tanh kd} \operatorname{Re}(b_1 e^{ik\xi}) + \frac{2ka}{\tanh kd} \operatorname{Re}(b_2 e^{2ik\xi} + a^2 \frac{b_0}{d}) \right). \quad (26)$$

Граничное условие (25) может быть значительно упрощено. Прежде всего оно должно быть задано при  $\eta = 0$ , поскольку не должны учитываться слагаемые, пропорциональные  $\lambda_i$  в степени выше 1-й. Представим  $\Phi$  в виде суммы потенциальной  $F$  и вихревой  $f$  компонент. Тогда (25) выполняется, если  $F$  удовлетворяет условию

$$F_\xi|_{\eta=0} = -(x_r x_\eta + y_i y_\eta). \quad (27)$$

Будем считать аналогично [11], что медленная зависимость полей от  $\xi, t$  представляет собой функцию  $\xi - \widehat{v} t$ , где  $\widehat{v}$  – групповая скорость основной волны.

Используя выражение (20а, 20б) для  $x, y$ , можно найти гармоническую функцию, удовлетворяющую граничному условию (27):

$$F = -\int y_i d\xi + a^2 \widehat{v} \frac{|b_1|^2 k d + \eta}{\tanh kd d}. \quad (28)$$

При этом “медленная” составляющая функции  $F - F_0 = U(d + \eta)$ , где

$$U = \frac{\widehat{v} a^2}{d} \left( b_0 + \frac{|b_1|^2 k}{2 \tanh kd} \right), \quad (29)$$

а осциллирующие компоненты функции  $F$  имеют порядок  $a^i b_{ix}, ca^i b_{ix}$ .

Принимая во внимание то, что  $n(\xi)$  имеет порядок  $\lambda_i$ , из (25) с учетом (27) в первом порядке по  $\lambda_i$  можно получить граничные условия для осциллирующей и средней вихревых компонент соответственно

$$f(0) = n(-c + U), \quad (30а)$$

$$f_0(0) = n_0(-c + \widehat{v}). \quad (30б)$$

Второе граничное условие следует из непрерывности тангенциального напряжения на границе раздела вода–воздух:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\psi_\eta}{I} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\psi_\xi}{I} \right) \Big|_{\eta=-n(\xi)} = \frac{\rho_a}{\rho_w} T_a, \quad (31)$$

где  $T_a$  – тангенциальное напряжение в воздухе.

Величина  $f$  определяется решением системы (24), при граничных условиях (30), (31). Отыскивая решение этой задачи в виде разложения в ряды по степеням  $a$ , можно найти выражения для параметров  $\lambda_i$  через  $b_i$ . Для проведения этой процедуры использовался пакет “Mathematika”. При вычислении  $\lambda_i$  мы пренебрегали тангенциальными составляющими вязких напряжений в воздухе, поскольку, как показывает ряд оценок [14], вклад их мал, а учет этих составляющих дает очень громоздкие выражения для  $\lambda_i$ . Коэффициент при  $a e^{ik\xi}$  определяет  $\lambda_1$ , а коэффициент при  $a^2 e^{2ik\xi} - \lambda_2$ . Выражения для этих коэффициентов приведены в Приложении 1.

Немного подробнее обсудим процедуру получения выражения для медленно меняющейся квадратичной по амплитуде вихревой компоненты функции тока  $a^2 f_0$ . Если в этом случае в уравнении (24а) формально оставить члены порядка  $a^2$ , то слагаемыми типа  $c \partial \chi_0 / \partial \xi, \partial \chi_0 / \partial t$  следует пренебречь, так как они имеют более высокий порядок (поскольку зависимость от  $\xi, t$  медленная). Однако это верно лишь в том случае, когда волновой пограничный слой длинноволнового возмущения превосходит глубину жидкости  $d$ . Учитывая медленную зависимость гидродинамических полей от  $\xi - \widehat{v} t$ , легко видеть, что толщина пограничного слоя длинноволнового возмущения с характерным волновым числом  $K$  –

$$\delta_l = (v_w / vK)^{1/2}, \quad (32)$$

(здесь  $v = \widehat{v} + c$  – групповая скорость волн в покоящейся воде). Подставляя в (32) значение коэффициента вязкости воды  $v_w = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$  и характерную величину групповой скорости волн сантиметрового диапазона, возбуждаемых вблизи порога генерации,  $v = 30 \text{ см/с}$ , можно видеть, что условие  $\delta_l \gg d$  при глубине жидкости 1 см выполняется для пакетов с характерным масштабом огибающей более 30 м. Таким образом, более реалистичной является ситуация, когда выполняется обратное неравенство. В этом случае крупномасштабное вихревое движение сосредоточено в узких пограничных слоях вблизи дна и поверхности (оценка для течения вблизи дна идентична приведенной выше). Тогда из системы (24) можно получить уравнение для средних завихренности  $\chi_0$  и вихревой компоненты функции тока  $f_0$  в виде:

$$-(c + \widehat{v})\chi_{0\xi} - v_w \chi_{\eta\eta} = 0,$$

$$f_{0\eta\eta} = \chi_0 - \frac{|b_1|^2 c k^3}{\tanh kd} (e^{m\eta} + e^{m^*\eta}), \quad (33)$$

где  $m^2 = -ick/v_w$ .

Из граничного условия непрерывности тангенциального напряжения (31) следует:

$$f_{0\eta\eta}(0) = 0. \quad (34)$$

В случае, когда огибающая пакета представляет собой гармоническую волну, можно легко найти решение системы (33), (34). Выражение для завихренности в этом случае можно записать в виде:

$$\chi_0 = \text{Re} \left[ 2 \frac{|b_1|^2 c k^3}{\tanh kd} e^{M\eta} \right],$$

где  $M^2 = (-i/\delta_1^2)$ . При  $M = 0$  это выражение совпадает с выражением для средней завихренности, полученных в [15] для периодической поверхностной волны. Здесь может быть легко получено выражение для  $\lambda_0$ , однако мы его в дальнейшем использовать не будем, поскольку оно не дает вклада в декремент, а определяет лишь малую поправку к частоте.

Величина  $\lambda_3$  определяется коэффициентом при  $a^3 e^{ik\xi}$ . Выражение для нее приведено в Приложении 1.

Третье граничное условие на поверхности, непрерывность нормальных напряжений, рассмотрим ниже, а сейчас перейдем к рассмотрению течения вблизи дна и получению выражений для  $\mu_i$ .

5.2. Течение в пограничном слое вблизи дна, вычисление  $\mu_i$ . На дне выполняются условия прилипания и непротекания, которые в системе отсчета, движущейся со скоростью  $c$ , имеют вид:

$$\Psi_y|_{y=-d} = ((-c + \Phi_\eta)u_\eta + \Phi_\xi u_\xi)/I|_{y=-d} = -c, \quad (35a)$$

$$\Psi_x|_{y=-d} = ((-c + \Phi_\eta)x_\eta + \Phi_\xi x_\xi)/I|_{y=-d} = 0. \quad (35b)$$

Как и вблизи поверхности, представим  $\Phi$  в виде суммы потенциальной  $F$  и вихревой  $f$  частей. Величина  $F$  определяется формулой (28), а выражение для  $f$  и  $\chi$  будем искать в виде разложения в ряды по степеням  $a$

$$f = a \text{Re}(f_1(\eta)e^{ik\xi}) + a^2 \text{Re}(f_2(\eta)e^{2ik\xi}) + a^3 \text{Re}(f_3(\eta)e^{3ik\xi}) + a^2 f_0(\eta), \quad (36a)$$

$$\chi = a \text{Re}(\chi_1(\eta)e^{ik\xi}) + a^2 \text{Re}(\chi_2(\eta)e^{2ik\xi}) + a^3 \text{Re}(\chi_3(\eta)e^{3ik\xi}) + a^2 \chi_0(\eta); \quad (36b)$$

$f_i$  и  $\chi_i$  являются медленными функциями  $\xi$  и  $t$ . Форма поверхности дна в криволинейных координатах  $(\xi, \eta)$  ( $\eta = z(\xi)$ ) определяется из решения уравнения  $y = -d$ , где  $y$  задается формулой (20a).

Учитывая слагаемые не выше первого порядка по  $\lambda_i, \mu_i$ , можно получить:

$$z(\xi) = (a \text{Re}(\mu_1 e^{ik\xi}) + a^2 \text{Re}(\mu_2 e^{2ik\xi}) + a^3 \text{Re}(\mu_3 e^{3ik\xi}) + a^2 \mu_0) / \left( 1 + \frac{ka}{\sinh kd} \text{Re}(b_1 e^{ak\xi}) + \frac{2ka}{\sinh kd} \text{Re}(b_2 e^{2ik\xi}) + a^2 \frac{b_0}{d} \right). \quad (37)$$

Решение системы (24а, 24б) с граничными условиями (25а, 25б) на поверхности (37) дает возможность выразить  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  через  $b_1, b_2, b_0$ , вычисляя коэффициенты разложения этих выражений в ряды по степеням  $a$ . Для проведения этой процедуры, как и вблизи поверхности, использовался пакет "Mathematika". Коэффициент при  $a e^{ik\xi}$  дает выражения для  $\mu_1$ , а коэффициент при  $a^2 e^{2ik\xi}$  — выражения для  $\mu_2$ . Они приведены в Приложении 1.

Рассмотрим более подробно квадратичную по амплитуде медленно меняющуюся компоненту. Принимая во внимание, что осредненные по осцилляциям поля зависят от "медленной бегущей" координаты  $\xi - \widehat{v}t$ , из системы (24а, 24б) можно получить уравнения для средней завихренности и вихревой компоненты функции тока

$$v_w \xi_{0\eta\eta} + (\widehat{v} + c)\chi_{0\xi} = \frac{c^2 k^3 |b_1|^2}{2 \sinh^2 kd} e^{-|m|\sqrt{2}(\eta+d)} (m^* - m), \quad (38)$$

$$f_{0\eta\eta} = \chi_0 + \frac{ck^2 |b_1|^2}{2 \sinh^2 kd} (e^{-m(\eta+d)} m + e^{-m^*(\eta+d)} m^*).$$

Следствие граничного условия прилипания (35а) для  $f_0$  имеет вид:

$$f_{0\eta}|_{\eta=-d} = -(b_0 c/d + U/a^2),$$

где  $U$  задается формулой (29).

Если огибающая пакета представляет собой бегущую гармоническую волну, то выражение для горизонтальной скорости, равной сумме потенциальной и вихревой компонент, имеет вид:

$$\Phi_{0\eta} = \text{Re} \left[ \left( \frac{3|b_1|^2 c k^2}{4 \sinh^2 kd} - \frac{b_0 c}{d} \right) e^{-M(\eta+d)} \right] + U(1 - e^{-M(\eta+d)}) + \left[ \frac{e^{-|m|\sqrt{2}(\eta+d)}}{2} - (e^{-m(\eta+d)} + e^{-m^*(\eta+d)}) \right]. \quad (39)$$

Если амплитуда основного возмущения постоянна, то  $M = 0$ , а  $b_0$  без ограничения общности можно положить равным нулю. Тогда  $\Phi_{0\eta}$  переходит в выражение, полученное в [15] для волны с постоянной амплитудой.

Вычисляя коэффициент при  $a^3 e^{3ik\xi}$ , можно определить выражение для  $\mu_3$ . Оно приведено в Приложении 1.



## 7. ПОЛУЧЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Зная все  $\lambda_i, \mu_i$ , можно получить нелинейное эволюционное уравнение для волн на воде, используя уравнение Бернулли (23) и второе динамическое граничное условие непрерывности нормальных напряжений:

$$\left[ p + \sigma_n + T \frac{x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} \right]_{\eta = -n} = p_a, \quad (40)$$

где  $p$  — давление в воде,  $\sigma_n = -v_w \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\Psi_\eta}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\Psi_\xi}{I} \right) \right]$  — нормальное вязкое напряжение,  $p_a$  — нормальное напряжение в воздухе на поверхности воды.

Поскольку  $\sigma_n$  пропорционально  $v_w$ , то при вычислении этой величины нужно учитывать значения функции тока в нулевом порядке по  $\mu_i, \lambda_i$ . В результате

$$\sigma_n = -v_w \frac{(c-U)I_\xi}{I^2} \Big|_{\mu, \lambda, 0}$$

где  $U$  определяется формулой (29).

В линейном приближении по  $\mu_i, \lambda_i$  имеем

$$p(-n) = p(0) - n \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (41)$$

Выражения для  $p(0)$  и  $\partial p / \partial \eta(0)$  можно найти из формулы Бернулли (23). Для этого разложим (23) в ряд по  $\eta$ . Нулевой коэффициент дает выражение для  $p(0)$ , а коэффициент при  $\eta$  дает выражение для  $\partial p / \partial \eta(0)$ . При этом, поскольку величина  $n$  имеет порядок не более  $\lambda_a$  (см. формулу (26)), то при вычислении  $\partial p / \partial \eta(0)$  достаточно учитывать величины нулевого порядка по  $\mu_i, \lambda_i$  не выше второго порядка по  $a$ . Заметим, что в выражение для кривизны поверхности в (40) входит функция  $y(\xi)$ , задаваемая формулой (19), а  $x(\xi)$  определяется формулой (20б) при  $\eta = -n(\xi)$ .

В результате второе динамическое граничное условие примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Psi_\eta \frac{x_\eta x_\xi + y_\eta y_\xi}{I} - \Psi_\xi \frac{x_\eta x_\eta - y_\eta y_\eta}{I} + \frac{\Psi_\xi^2 + \Psi_\eta^2}{2I} + \\ & + g y(0) + T \frac{x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}}{(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{3/2}} \Big|_{\eta = -n} - \frac{v_w (c-U) I_\xi}{I^2} \Big|_{\mu, \lambda, 0} + \\ & + n \left( g y_\eta - \frac{(c-U)^2 I_\eta}{2I^2} \right) \Big|_{\mu, \lambda, 0} + p_a = \text{const}, \end{aligned} \quad (42)$$

$U$  определяется выражением (29).

Вычисляя коэффициенты разложения уравнения (42) в ряд по  $a$ , можно получить нелинейное эволюционное уравнение. Эта громоздкая процедура осуществлялась на ЭВМ с помощью пакета "Mathematika".

Коэффициент при  $a e^{ik\xi}$  определяет известное линейное дисперсионное уравнение с учетом вязкого затухания и генерации волн ветром, а также слагаемые вида  $P b_1$ , где  $\widehat{P}$  — линейный дифференциальный оператор:

$$\widehat{P} = i \left( \frac{\partial}{\partial t} + (v-c) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2} v_k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{v}{2k} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Получение вида оператора  $\widehat{P}$  в рамках описанной процедуры довольно трудоемко, но он легко может быть найден исходя из известного соответствия между дисперсионным соотношением и дифференциальным уравнением для слабонелинейных волн [14]:

$$-i\Delta\omega \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}; \quad i\Delta k \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad i\Delta k_\perp \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\Delta\omega, \Delta k, \Delta k_\perp$  — отклонения частоты и волнового числа в продольном и поперечном направлении. Удобно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью, равной групповой скорости корот-

кой волны, тогда оператор  $\widehat{P} = i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} v_k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{v}{2k} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Коэффициент при  $a^2 e^{2ik\xi}$  определяет уравнение для комплексной амплитуды крутизны 2-й гармоники  $B_2 = b_2 a^2 k$ . В системе отсчета, движущейся со скоростью  $v$ , оно имеет вид:

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} + (v_2 - v) \frac{\partial B_2}{\partial \xi} \right) &= B_2 \frac{(c_2^2 - c^2)k}{c} + \\ &+ B_1^2 \sigma_1 + i B_2 \gamma_2, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $B_1 = b_1 a k$  — амплитуда крутизны 1-й гармоники,  $c_2 = \sqrt{\frac{g + 4Tk^2}{k}} \tanh 2kd$  — фазовая скорость свободной волны с волновым числом  $2k$ ,  $v_2$  — групповая скорость такой волны,  $\gamma_2 = 2ckG_{2a} - (8v_w k^2 + \frac{2k\sqrt{v_w kc}}{\sinh 4kd})$  — разность линейных ветрового инкремента и вязкого декремента второй гармоники. Величина  $G_{2a}$ , рассчитанная в рамках модели [6] при значениях параметров волны  $k = 2k_n(d)$ ,

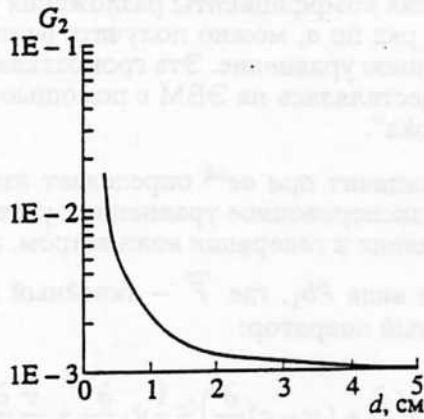


Рис. 3. Ветровой инкремент вынужденной второй гармоники, нормированный на ее частоту  $G_{2a}$ , как функция глубины жидкости  $d$ .

$c_2 = c(2k_n(d))$ , представлена на рис. 3 как функция глубины жидкости.

$$\text{Re}\sigma_1 = \tanh 2kd \left[ \frac{ck}{8} \left( 1 + \frac{3}{\tanh^2 kd} \right) - \frac{3Tk^2}{4c \tanh kd} \right],$$

$$\text{Im}\sigma_1 = \frac{ck^2}{2m} \left( \frac{1 - 2\sqrt{2}}{\sinh^2 kd \sinh 4kd} + \frac{3\sqrt{2} \tanh 2kd}{4 \sinh^2 kd \tanh kd} \right) +$$

$$+ v_w k^2 \tanh 2kd \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{\tanh^2 kd} - \frac{1}{\tanh kd \tanh 2kd} \right).$$

Коэффициент при  $a^2$ , умноженный на медленно меняющуюся функцию, дает соотношение между  $b_0$  и  $b_1$ . При этом не учитывалась диссипация и считалось, что все медленные функции зависят только от "бегущей" координаты  $\xi - \widehat{v} t$ .

$$b_0 = \frac{d|b_1|^2}{(gd - v^2)} \left[ \frac{c^2 k^2}{4} \left( 1 - \frac{3}{\tanh^2 kd} \right) + \frac{k^3 T}{2 \tanh kd} + \frac{\widehat{v} v}{2d \tanh kd} \right]. \quad (44)$$

Это выражение справедливо только вдали от резонанса между групповой скоростью 1-й гармоники и скоростью длинных волн в жидкости глубины  $d$ .

Коэффициент при  $a^3 e^{i k \xi}$  определяет нелинейные поправки к частоте, вязкому декременту и ветровому инкременту. Вместе с коэффициентом при  $a e^{i k \xi}$  эти величины определяют эволюционное уравнение для слабонелинейных волн вблизи порога генерации:

$$i \frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\dot{v}_k}{2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \xi^2} + \frac{v}{2k} \frac{\partial^2 B_1}{\partial z^2} = i K B_1 (u_* - u_{*c}) +$$

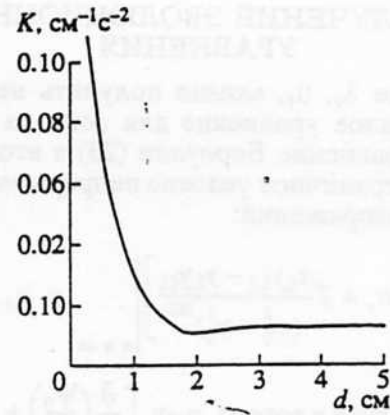


Рис. 4. Зависимость  $K = \left. \frac{\partial \gamma_a^{(0)}}{\partial u_*} \right|_{u_* = u_{*c}}$  от глубины жидкости  $d$ .

$$+ \Sigma_1 |B_1|^2 B_1 + i \rho_1 |B_1|^2 B_1 + i \gamma_a^{(1)} |B_1|^2 B_1 + \quad (45)$$

$$+ \Sigma_2 B_2 B_1^* + i \rho_2 B_2 B_1^* + \Sigma_3 b_0 B_1 + i \rho_3 b_0 B_1.$$

Здесь  $K = \left. \frac{\partial \gamma_a^{(0)}}{\partial u_*} \right|_{u_* = u_{*c}}$ . Зависимость  $K(d)$ , полученная в результате отсчета по модели [6], представлена на рис. 4.

$\gamma_1^{(a)}$  — коэффициент нелинейной поправки к инкременту, изображенный на рис. 2. Величины  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  представляют собой коэффициенты нелинейных поправок к частоте и вязкому декременту. Пакет "Mathematika" дает аналитические формулы для  $\Sigma_1, \Sigma_2, \rho_1, \rho_2$ , по которым проводился расчет их численных значений при параметрах, соответствующих порогу генерации волн в слое жидкости.

В случае, когда на пороге генерации фазовые скорости основной и 2-й гармоник существенно отличаются ( $c_2 \neq c$ ), из уравнения (43) легко может быть найдена простая алгебраическая связь  $B_2$  и  $B_1$ :

$$B_2 = -B_1^2 \frac{\sigma_1 c}{(c_2^2 - c^2)k + \gamma_2 c}. \quad (46)$$

Подставляя (46) и (44) в (45), можно получить для  $B_1$  уравнение Гинзбурга-Ландау в стандартном виде:

$$i \frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\dot{v}_k}{2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial \xi^2} + \frac{v}{2k} \frac{\partial^2 B_1}{\partial z^2} - i K B_1 (u_* - u_{*c}) - (S_1 - i \rho - i \gamma_a^{(1)}) |B_1|^2 B_1 = 0. \quad (47)$$

Здесь  $\rho$  имеет смысл нелинейной поправки к вязкому декременту. На рис. 5а представлена зависимость коэффициента  $S_1(d)$ , а на рис. 5б — зависи-



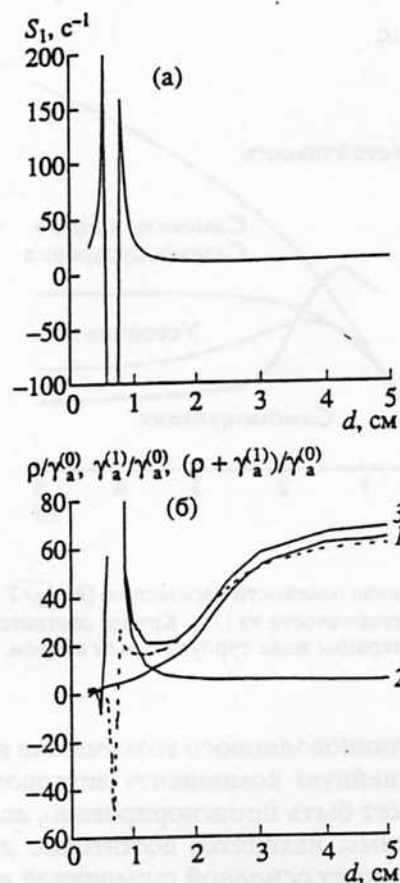


Рис. 5. Зависимость нелинейных коэффициентов уравнения Гинзбурга–Ландау от глубины жидкости: а – нелинейная поправка к частоте  $S_1$ , б – нелинейная поправка к инкременту, нормированная на значение линейного ветрового инкремента: 1 – нормированная нелинейная поправка к ветровому инкременту  $\gamma_a^{(1)}/\gamma_a^{(0)}$ , 2 – нормированная нелинейная поправка к вязкому декременту  $\rho/\gamma_a^{(0)}$ , 3 – сумма величин, изображенных кривыми 1 и 2  $(\gamma_a^{(1)} + \rho)/\gamma_a^{(0)}$ . Пунктир – нормированная нелинейная поправка к ветровому  $\gamma_a^{(1)}/\gamma_a^{(0)}$ , вычисленная с учетом 2-й гармоники.

мости  $\rho(d)$ ,  $\gamma_a^{(1)}(d)$ , а также их сумма, нормированные на значения линейного вязкого инкремента  $\gamma_w^{(0)}(d)$  на пороге устойчивости (или равного ему линейного ветрового инкремента). Пунктиром на рис. 5б представлена зависимость  $\gamma_a^{(1)}/\gamma_a^{(0)}$ , рассчитанная с учетом 2-й гармоники основного возмущения. Краткое описание этого расчета приведено в Приложении 2. Видно, что пунктирная линия и линия (1), изображающая  $\gamma_a^{(1)}/\gamma_a^{(0)}$ , рассчитанное по квазилинейной теории, очень близки везде, кроме окрестности резонанса 1-й и 2-й гармоник. Однако из рис. 5б видно, что вблизи

этого резонанса (при  $d < 1.5$  см) определяющий вклад в сумму  $\gamma_a^{(1)} + \rho$  вносит нелинейная поправка к вязкому декременту, поэтому можно считать, что расчет суммы  $\gamma_a^{(1)} + \rho$  проведен правильно в случае, когда  $\gamma_a^{(1)}$  рассчитывается по квазилинейной теории.

Значения коэффициентов уравнения (47) определяют устойчивость гармонической волны [16]. Если выполняются условия  $\dot{\nu}_k S_1 > 0$  и  $\nu S_1 > 0$ , то она устойчива. При  $\dot{\nu}_k S_1 < 0$  имеет место модуляционная неустойчивость, а при  $\nu S_1 < 0$  – самофокусировка. На рис. 6 изображена плоскость параметров системы  $(k/\sqrt{g/T}, kd)$ , разбитая на области устойчивости, взятая из [11]. Линии смены знака  $\dot{\nu}_k S_1$  определяются уравнениями  $\dot{\nu}_k = 0$ ,  $S_1 = 0$ ,  $S_1 = \infty$ , а последнее условие эквивалентно  $c_2 = c$  и  $\nu^2 = dg$ . Линии смены знака  $\nu S_1$  совпадают с линиями  $S_1 = 0$ ,  $S_1 = \infty$ , поскольку  $\nu$  знака не меняет. На рис. 6 изображены не все линии, а только необходимые в рассматриваемой задаче. На том же рисунке проведена линия, соответствующая пороговым значениям волновых чисел при заданных глубинах. Видно, что при  $kd > 1.8$  для гармонической волны, возбуждаемой на пороге генерации, выполнено условие модуляционной неустойчивости. При  $kd < 1.8$  области устойчивости и неустойчивости быстро сменяют друг друга при малом изменении глубины жидкости. При  $kd \approx 1.7$  линия, соответствующая порогу устойчивости, пересекает кривую  $c_2 = c$ , а при  $kd \approx 1.5$  – линию  $\nu^2 = dg$ . Как видно из рис. 1б, эти значения соответствуют  $d = 0.7$  см и  $d = 0.5$ , при которых, как видно из рис. 5б, значения  $S_1$  и  $\rho$  резко возрастают. В первом случае порог генерации совпадает с резонансом между основной волной и ее второй гармоникой, а во втором – порог совпадает с резонансом между групповой скоростью основной волны и скоростью длинных волн на мелкой воде. В этом диапазоне параметров уравнение Гинзбурга–Ландау не справедливо, и динамика волн описывается более сложной системой связанных уравнений для основной волны, 2-й гармоники и среднего течения.

Автор выражает благодарность В.П. Реутову за постановку задачи и С.В. Шагалову за полезное конструктивное обсуждение. Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 93-05-8075) и фонда Сороса (грант № NOV000).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

$$\lambda_1 = \frac{2b_1k^2}{m^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{4b_2k^2}{m^2} + \frac{b_1^2k^3}{m^2 \tanh kd},$$

$$\lambda_3 = \frac{3|b_1|^2 b_1 k^4}{2m^2} \left(1 + \frac{1}{\tanh^2 kd}\right) +$$

$$+ \frac{2b_1^* b_2 k^3}{m^2} \left(\frac{1}{\tanh kd} - \frac{5}{\tanh 2kd}\right) + \frac{2b_1 k^2 U}{m^2 c} -$$

$$- \frac{4b_0 b_1 k^2}{d},$$

$$\mu_1 = \frac{k b_1}{m \sinh kd},$$

$$\mu_2 = \frac{b_1^2 k^2}{m \sinh^2 kd} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{b_2 k \sqrt{2}}{m \sinh 2kd},$$

$$\mu_3 = \frac{|b_1|^2 b_1 k^3}{\sinh^3 kd |m|} \left\{ -\frac{25}{48} + \frac{121}{240} \sqrt{2} + i \left[ -\frac{13}{48} + \frac{93}{80} \sqrt{2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{b_2 b_1^* k^2}{\sinh kd \sinh 2kd |m|} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{2}}{12} + i \left[ -\frac{11}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right] \right\} -$$

$$- \frac{b_1 k}{d |m| \sinh kd} \left( b_0 + \frac{U}{c} \right) (1+i) \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Обсудим применимость квазилинейного приближения для расчета  $\gamma_1^{(1)}$ . Для этого необходимо вычислить эту величину с учетом 2-й гармоники основного возмущения. Для упрощения расчетов воспользуемся тем, что определяющий вклад в  $\gamma_a$  вносят нормальные напряжения  $P_a$  [14]. Определим величину  $P_a$  с учетом 2-й гармоники. В криволинейных координатах  $(s, \theta)$ , используемых для описания возмущений в воздушном потоке, поверхность воды, задаваемая уравнением (19), с точностью до  $(ka)^2$  имеет вид:

$$\theta = (ka)^2 [(n_2 e^{2ik\xi} + \text{к.с.})/2 + n_0],$$

где  $n_2$  и  $n_0$  определяются из решения уравнений

$$y(\theta, s) = y(\eta, \xi)|_{\eta=0},$$

$$x(\theta, s) = x(\eta, \xi)|_{\eta=0}. \quad (\text{П.1})$$

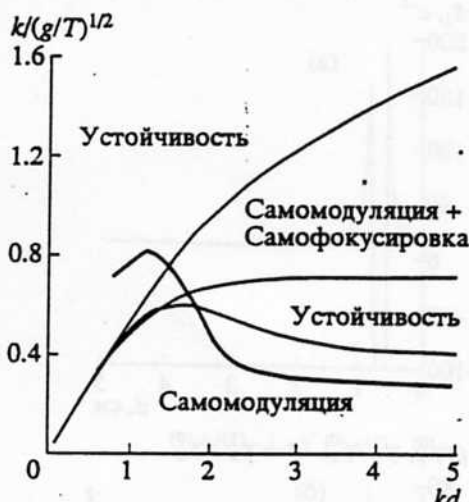


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров  $(k/\sqrt{g/T}, kd)$  на области устойчивости из [11]. Кривая соответствует порогу генерации волн турбулентным ветром.

Влияние длинноволнового возмущения на границе на нелинейную компоненту ветрового инкремента может быть проигнорировано, если параметры системы находятся достаточно далеко от резонанса между основной гармоникой и средним течением. Действительно, поскольку коэффициент турбулентной вязкости велик, то установление пограничного слоя при внесении длинноволнового возмущения на масштабе порядка длины волны основного возмущения происходит достаточно быстро – за время  $t_{уст} = (k\nu_* k)^{-1}$ . Если  $t_{уст}$  меньше характерного периода длинноволнового возмущения  $t_{дл} = (K\nu)^{-1}$ , то можно считать, что профиль скорости остается логарифмическим, однако линии тока получают дополнительный крупномасштабный “изгиб” порядка  $(ka)^2 n_0$ . Это приводит к появлению добавки к  $\gamma_a^{(1)}$  порядка  $\gamma_a^{(0)} (ka)^2 n_0$ , если  $\gamma_a^{(1)} / \gamma_a^{(0)} \gg 1$ , а  $n_0 \sim 1$  (достаточно далеко от резонанса), то эта добавка пренебрежимо мала.

Аналогичные рассуждения для второй гармоники не применимы, поскольку ее поле скорости имеет достаточно сложный вид, и она должна рассчитываться численно. Система (9а, 9б) решалась численно с учетом 2-й гармоники основного возмущения:

$$\Psi = \Psi_0 + (\Psi_1(\theta) e^{iks} + \Psi_2(\theta) e^{2iks} + \text{к.с.})/2,$$

$$\chi = \chi_0 + (\chi_1(\theta) e^{iks} + \chi_2(\theta) e^{2iks} + \text{к.с.})/2.$$



При этом 2-я гармоника удовлетворяет условиям непротекания и прилипания:

$$\Psi_2|_{\theta=0} = -cn_2(ka)^2,$$

$$\Psi_{2\theta}|_{\theta=0} = b_2cka^2/\tanh kd + c(ka)^2(1 - \operatorname{ctanh} kd)/4 - n_2(ka)^2\chi_0(0).$$

Решая систему (П.1), можно найти  $n_2 = (B_2 - (1 + \operatorname{ctanh} kd)/2)/k$ . При вычислении ветрового инкремента  $\gamma_a$  воспользуемся выражением для давления в воздухе на поверхности воды  $P_a$ , рассчитанных с учетом 2-й гармоники по формулам, следующим из уравнений для компонент импульса (см. [6]). При этом

$$P_a|_{\theta=(ka)^2n_2} = P_a(0) + \frac{dP_a}{d\theta}(ka)^2n_2.$$

Выражение для давления следует из уравнения для горизонтальной компоненты импульса, а выражение для градиента давления — из уравнения для вертикальной компоненты импульса. Результат этого расчета  $\gamma_a^{(1)}/\gamma_a^{(0)}$  представлен на рис. 5б.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юэн Г., Лейк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Fabricant A.L. On the nonlinear water waves under a light wind and Landau type equation near the stability threshold // *Wave Motion*. 1980. № 2. P. 355–360.
4. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
5. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows. P. 4 // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 433–448.
6. Реутов В.П., Троицкая Ю.И. О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана*. 1995. Т. 31. № 6. С. 825–834.
7. Benjamin Brook T. Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6. P. 161–205.
8. Chalikov D.V. Numerical simulation of the boundary layer above water waves // *Boundary Layer Meteorology*. 1986. V. 34. P. 63–98.
9. Смольяков А.В. Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // *Акуст. журн.* 1973. Т. 19. Вып. 3. С. 420–425.
10. Jenkins A.D. A quasilinear eddy-viscosity model for the flux of energy and momentum to wind waves using conservation-law equations in a curvilinear coordinate system // *J. Phys. Oceanogr.* 1992. V. 22. № 8. P. 843–858.
11. Kawahara T. Nonlinear self-modulation of capillary-gravity waves on liquid layer // *J. Phys. Soc. Japan*. 1975. V. 38. № 1. P. 265–270.
12. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
13. Longuet-Higgins M.S. Action of a variable stress at the surface of water waves // *Phys. Fluids*. 1969. V. 12. № 4. P. 737–740.
14. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеониздат, 1980. 320 с.
15. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in water waves // *Phil. Trans. A*. 1953. V. 245. P. 535–581.
16. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

## An Evolutionary Equation for Weakly Nonlinear Wind Waves on the Surface of a Finite-Depth Viscous Fluid

Yu. I. Troitskaya

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603600 Russia*

Received March 21, 1995; in final form, November 24, 1995

**Abstract**—A model is constructed for the generation of gravity capillary waves on the surface of finite-depth water by a turbulent wind near the stability threshold. On the basis of the numerical model of wave generation by a turbulent wind, the threshold values of the wind friction velocity  $u_{*c}$  and the wave number of the most unstable disturbance  $k_c$  are determined as functions of depth. The nonlinear viscous decrease rate and wind growth rate of waves are calculated near the stability threshold. For this purpose, a technique is used that is based on the use of curvilinear coordinates with lines close to streamlines beyond viscous boundary layers near the surface and the bottom. The coefficients of the Ginzburg–Landau equation are calculated, which is valid in the case when the wave number of the most unstable disturbance is different from the values at which resonance with the second harmonic and the mean flow is observed.