Статья в УФН

О структуре уравнений Максвелла в области линейного взаимодействия электромагнитных волн в плавнонеоднородных анизотропных и гиротропных средах

А. Г. Шалашов, Е. Д. Господчиков

Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова, 46, 603950 Нижний Новгород, Россия

ags@appl.sci-nnov.ru, eggos@mail.ru

Аннотация

Линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородных средах рассматривается как проявление поляризационного вырождения решений уравнений Максвелла. Выяснено, что само наличие поляризационного вырождения двух нормальных волн накладывает сильные ограничения на компоненты диэлектрического тензора среды в области эффективного взаимодействия. Это позволило дать универсальную классификацию возможных типов взаимодействия волн и соответствующих волновых уравнений, не зависящую от конкретной модели линейной среды.

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 52.35.Hr

Содержание

1. Введение

Линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородных средах является одним из важнейших фундаментальных процессов в физике плазмы, кристаллооптике, электродинамике метаматериалов и т. п. В каждой из этих областей проблема линейного взаимодействия, как правило, рассматривается независимо исходя из конкретных свойств диэлектрического отклика среды и, зачастую, геометрии задачи. Даже в больших обзорных работах разнообразные проявления линейного взаимодействия систематизируются исходя из сходства описывающих их уравнений, которые в каждом конкретном случае могут быть получены самыми различными способами [1]. В данной работе предпринята попытка взглянуть на проблему с другой стороны – рассматривая линейную недиссипативную среду общего вида с неизвестным заранее тензором диэлектрической проницаемости, мы выясняем, каким условиям должен отвечать диэлектрический отклик, чтобы в неограниченной плавнонеоднородной среде существовали эффективно взаимодействующие моды. При этом мы исходим из предположения, что линейное взаимодействие двух векторных электромагнитных волн может происходить только в окрестности точек поляризационного вырождения, в которых для одного волнового вектора $\mathbf{k}(\omega)$ существуют два линейно независимых решения волновых уравнений. Оказывается, что одного этого условия (которое, по существу, может рассматриваться как определение линейного взаимодействия) достаточно, чтобы наложить весьма сильные ограничения на компоненты тензора диэлектрической проницаемости и дать универсальную классификацию возможных типов линейного взаимодействия волн, не зависящую от конкретной модели среды. Под взаимодействием мы будем понимать линейную связь нормальных волн, возникающую вследствие нарушения приближения геометрической оптики в окрестности точки поляризационного вырождения.

2. Классическое определение линейного взаимодействия и трудности, возникающие для уравнений Максвелла

Традиционно вслед за классическими работами Гинзбурга [2] и Баддена [3] сложился следующий взгляд на проблему линейного взаимодействия, см. например [4]. Если вне области взаимодействия две распространяющиеся моды с комплексными амплитудами E_1 и E_2 описываются некоторыми волновыми уравнениями $\widehat{D}_1 E_1 = 0$ и $\widehat{D}_2 E_2 = 0$, то в области взаимодействия поле определяется связанной системой вида

$$\widehat{D}_1 E_1 = \eta E_2, \quad \widehat{D}_2 E_2 = \eta^* E_1, \tag{1}$$

где η – константа связи. С физической точки зрения такие уравнения описывают распространение двух мод, разделенных в $\mathbf{r}$- или $\mathbf{k}$-пространстве слоем непрозрачности с толщиной, пропорциональной $|\eta|$. Процесс взаимодействия волн проявляется как «туннелирование» излучения через область непрозрачности, эквивалентное просачиванию квантомеханической частицы через одномерный потенциальный барьер [5].

Напомним читателю физику этого процесса [4, 6, 7]. В плавнонеоднородной среде, свойства которой мало меняются на расстояниях порядка длины волны, волновым операторам $\widehat{D}_1$ и $\widehat{D}_2$ можно сопоставить их Фурье-образы $D_1(\omega,\mathbf{k})$ и $D_2(\omega,\mathbf{k})$, при этом исходной системе связанных волн соответствует дисперсионное уравнение

$$D_1(\omega,\mathbf{k})\,D_2(\omega,\mathbf{k}) = |\,\eta\,|^2 .$$

Это дисперсионное уравнение определяет две моды уравнений (1), которые в рамках приближения геометрической оптики распространяются независимо друг от друга (вдали от области взаимодействия эти моды непрерывно переходят в две моды, удовлетворяющие «невзаимодействующим» дисперсионным уравнениям $D_1(\omega,\mathbf{k}) = 0$ и $D_2(\omega,\mathbf{k}) = 0$). Однако, приближение геометрической оптики нарушается в ограниченных областях пространства, в которых волновые числа двух мод сближаются так, что среда перестает быть плавной на масштабах длины волны биений, то есть

$$|\,\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\,|\,L << 2\pi ,$$

где L – масштаб неоднородности среды. Это условие реализуется только в окрестности кратных корней дисперсионного уравнения, то есть в окрестности определенных выше точек поляризационного вырождения векторных волновых мод. Для качественного понимания такие точки удобно представить как результат пересечения двух «невзаимодействующих» дисперсионных соотношений $D_1(\omega,\mathbf{k}^0) = 0$ и $D_2(\omega,\mathbf{k}^0) = 0$. Действительно, нетрудно убедиться, что если параметр взаимодействия достаточно мал, $|\,\eta\,|\,L << 2\pi\,|\,\partial D(\omega,\mathbf{k}^0)/\partial\mathbf{k}\,|$, то область нарушения геометрической оптики локализуется в окрестности общего корня $\mathbf{k}^0$ «невзаимодействующих» дисперсионных соотношений. Внутри этой области поле должно находиться из исходных волновых уравнений (1) без применения приближения геометрической оптики. Вдали от указанной области эти точные решения асимптотически представляются в виде линейных комбинаций геометро-оптических мод с определенными линейными связями между их амплитудами. Это означает, что падающее в виде одной моды излучение проходит через область взаимодействия и/или отражается от нее в виде двух когерентных мод, распространяющихся вдали от области взаимодействия независимо, но имеющие фиксированные отношения амплитуд, которые зависят от условий прохождения волной области нарушения геометрической оптики. Именно этот процесс обычно и подразумевают под линейным взаимодействием волн.

Было опубликовано большое число работ, в которых феноменологическая по сути модель (1) использовалась в качестве отправной точки для исследования, например, эффектов трехмерной неоднородности на процессы линейного взаимодействия электромагнитных волн в сложных средах [8]. Нетрудно убедиться, что учет дополнительных размерностей в волновых операторах не меняет одномерного характера линейного взаимодействия, а лишь уточняет значение константы связи, которая, по сути, вычисляется в рамках геометрической оптики. Между тем уравнения Максвелла не всегда приводят к уравнениям вида (1) для взаимодействующих волн. Формальная причина заключается в том, что в области взаимодействия $\eta \to 0$ для достаточно широкого круга задач. В этом случае геометро-оптическая константа связи должна быть заменена на дифференциальный оператор, что приводит к принципиально неодномерному характеру линейного взаимодействия волн в свободном пространстве [9]. Отметим, что само условие взаимодействия волн при этом не изменяется – эффективное взаимодействие возможно лишь в окрестности точек поляризационного вырождения. Одним из мотивов, побудившим нас написать данную статью, явилось желание найти условия применимости широко используемого приближения (1) к уравнениям Максвелла в плавнонеоднородных средах и, главное, показать ограниченность этой модели во всех остальных случаях.

3. Тензор диэлектрической проницаемости в точке поляризационного вырождения в базисе собственных поляризаций

В этом разделе мы рассмотрим однородную среду, заданную тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega)$ в некоторой декартовой системе координат x_1, x_2, x_3. Для распространяющихся в этой среде плоских электромагнитных волн вида $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ уравнения Максвелла можно представить как систему линейных алгебраических уравнений относительно декартовых компонент электрического поля E_j:

$$\left(k^2\delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2\varepsilon_{ij}\right)E_j = 0\,, \tag{2}$$

где $k_0 = \omega / c$ – вакуумное значение волнового вектора, соответствующее заданной частоте излучения, $k = |\,\mathbf{k}\,|$, δ_{ij} – символ Кронекера, индексы i и j пробегают значения от 1 до 3 и обозначают проекции векторных величин на соответствующие координатные оси, по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. Условие существования нетривиального решения системы (2) определяет дисперсионное уравнение

$$\det\left(k^2\delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2\varepsilon_{ij}\right) = 0\,,$$

связывающее $\mathbf{k}$ и ω для собственных мод среды. Допустим, что имеет место поляризационное вырождение, т.е. для некоторого $\mathbf{k}(\omega)$, удовлетворяющего дисперсионному уравнению, существуют два линейно независимых вектора $\mathbf{E}$, являющиеся решениями системы волновых уравнений (2). Покажем, что это условие накладывает достаточно сильные ограничения на компоненты тензора диэлектрической проницаемости и на возможные поляризацию и направление распространения электромагнитных мод.

Предположим для определенности, что в среде отсутствует диссипация. Тогда тензор диэлектрической проницаемости является эрмитовым, поэтому он может быть «диагонализован» с помощью некоторой унитарной матрицы перехода:

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{d}} = U_{im}^{-1}\varepsilon_{mn}U_{nj} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь U_{nj} и U_{im}^{-1} обозначают соответственно элементы матрицы перехода и обратной к ней матрицы. Столбцы матрицы перехода могут быть интерпретированы как компоненты трех в общем случае комплексных векторов, определяемых в исходной декартовой системе координат как $\mathbf{e}_i = (U_{1i}, U_{2i}, U_{3i})$ где $i = 1,2,3$. В силу унитарности матрицы перехода комплексное скалярное произведение этих векторов отвечает условию ортонормированности

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv U_{ki}U_{kj}^* = U_{ki}U_{jk}^{-1} = \delta_{ij}.$$

Таким образом, матрица перехода, диагонализующая тензор диэлектрической проницаемости недиссипативной среды, определяет некоторый ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Заметим, что отсутствие диссипации в среде является достаточным, но не необходимым условием приведенного ниже анализа. Наши выкладки останутся верными и для диссипативной среды, если ее диэлектрический тензор можно привести к виду (3) в некотором ортонормированном базисе (мы нигде не используем свойство действительности $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{d}}$, выделяющее эрмитовы среды). Примером такой диссипативной среды является магнитоактивная плазма со столкновениями, см. раздел 6.

Анализ системы волновых уравнений существенно упрощается после перехода к представлению поля через проекции на новые базисные вектора $\mathbf{E} = \mathscr{E}_j \mathbf{e}_j$ или

$$E_i = U_{ij}\mathscr{E}_j, \quad \mathscr{E}_j = U_{ij}^* E_i.$$

В дальнейшем собственные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ тензора диэлектрической проницаемости мы будем называть *собственными поляризациями среды*, а вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3)$ – представлением электрического поля в базисе собственных поляризаций среды. Нетрудно убедиться, что комплексный вектор собственной поляризации путем умножения на сохраняющую нормировку константу $e^{i\varphi}$ может быть приведен к виду $\mathbf{e}_i = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – два ортогональных действительных вектора, $a^2 + b^2 = 1$. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяют эллиптическую поляризацию электрического поля с амплитудой $\mathscr{E}_i$. Действительному или приводимому к действительному путем умножения на комплексную константу $e^{i\varphi}$ вектору $\mathbf{e}_i$ отвечает линейная поляризация поля ($\mathbf{b}=0$).

Волновое уравнение (2) в базисе собственных поляризаций среды примет вид:

$$D_{ij}\mathscr{E}_j = 0\,, \quad D_{ij} = U^{-1}_{im}\left(k^2\delta_{mn} - k_m k_n - k_0^2\varepsilon_{mn}\right)U_{nj}\,. \tag{4}$$

Заметим, что поляризации нормальных мод, определяемые как собственные вектора матрицы D_{ij}, в общем случае не совпадают с собственными поляризациями среды, определяемыми как собственные вектора матрицы ε_{ij}, Волновой оператор можно представить в виде, инвариантном относительно выбора исходной декартовой системы координат:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} (1-|\kappa_1|^2)\,n^2-\varepsilon_1 & -n^2\kappa_1^*\kappa_2 & -n^2\kappa_1^*\kappa_3 \\ -n^2\kappa_2^*\kappa_1 & (1-|\kappa_2|^2)\,n^2-\varepsilon_2 & -n^2\kappa_2^*\kappa_3 \\ -n^2\kappa_3^*\kappa_1 & -n^2\kappa_3^*\kappa_2 & (1-|\kappa_3|^2)\,n^2-\varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $n = ck/\omega$ – показатель преломления среды, $\kappa_j = \mathbf{e}_j\cdot\mathbf{k}/k = U_{ij}k_i/k$ – коэффициенты разложения единичного орта вдоль направления волнового вектора по векторам собственных поляризаций среды (то есть координаты $\mathbf{k}/k$ в новом базисе). Коэффициенты κ_i могут принимать комплексные значения, связанные условием нормировки

$$|\kappa_1|^2 + |\kappa_2|^2 + |\kappa_3|^2 = 1\,. \tag{6}$$

Из (5), в частности, следует, что дисперсионное уравнение $\det D_{ij} = 0$ может быть представлено в следующем симметризованном инвариантном виде:

$$\left(\varepsilon_2 - n^2\right)\left(\varepsilon_3 - n^2\right)\varepsilon_1|\kappa_1|^2 + \left(\varepsilon_1 - n^2\right)\left(\varepsilon_3 - n^2\right)\varepsilon_2|\kappa_2|^2 + \left(\varepsilon_1 - n^2\right)\left(\varepsilon_2 - n^2\right)\varepsilon_3|\kappa_3|^2 = 0\,. \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что решение этого уравнения отвечает конечным показателям преломления n^2. Таким образом, мы исключим из рассмотрения электростатические волны, отвечающие $n^2\to\infty$ (как правило, при этом становится существенной пространственная дисперсия среды).

Как уже отмечалось, тройку чисел $(\mathscr{E}_1,\mathscr{E}_2,\mathscr{E}_3)$ формально можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. В случае поляризационного вырождения существует два линейно независимых вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}$, удовлетворяющих линейным волновым уравнениям (5). Очевидно, что любая линейная комбинация векторов $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(1)}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}$ также будет решением системы волновых уравнений. Таким образом, в случае поляризационного вырождения существует выделенное направление $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(1)}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}$ такое, что любой вектор, лежащий в ортогональной плоскости, $\boldsymbol{\mathcal{E}}\perp\boldsymbol{\tau}$, является решением волнового уравнения. С точки зрения волновых уравнений (5) три собственных вектора среды равноправны, поэтому без ограничения общности можно задать одну проекцию вектора $\boldsymbol{\tau}$, например, $\tau_3 = -1$. Тогда из условия ортогональности $\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ следует, что $\mathcal{E}_3 = \tau_1 \mathcal{E}_1 + \tau_2 \mathcal{E}_2$, где τ_1 и τ_2 некоторые, в общем случае комплексные, константы. Подставляя это выражение в систему (5), получаем

$$\begin{cases} (D_{11} + \tau_1 D_{13})\, \mathcal{E}_1 + (D_{12} + \tau_2 D_{13})\, \mathcal{E}_2 = 0 \\ (D_{21} + \tau_1 D_{23})\, \mathcal{E}_1 + (D_{22} + \tau_2 D_{23})\, \mathcal{E}_2 = 0 \\ (D_{31} + \tau_1 D_{33})\, \mathcal{E}_1 + (D_{32} + \tau_2 D_{33})\, \mathcal{E}_2 = 0 \end{cases}.$$

Эти соотношения должны выполняться для любых $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Очевидно, что это возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты при $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ обращаются в нуль:

$$D_{11} + \tau_1 D_{13} = D_{12} + \tau_2 D_{13} = D_{21} + \tau_1 D_{23} = D_{22} + \tau_2 D_{23} = D_{31} + \tau_1 D_{33} = D_{32} + \tau_2 D_{33} = 0. \quad (8)$$

Заметим, что эти равенства автоматически обеспечивают выполнение дисперсионного уравнения (7). Рассмотрим все ситуации, при которых возможно выполнение указанных равенств.

Пусть $n^2 = 0$. Тогда из определения (5) следует, что все недиагональные компоненты тензора D_{ij} зануляются, а из условий (8) следует, что и диагональные компоненты также равны нулю, кроме того $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Таким образом, этот случай соответствует полному поляризационному вырождению, при котором все компоненты $D_{ij} = 0$, поэтому любая поляризация поля удовлетворяет системе волновых уравнений. В дальнейшем будем полагать, что $n^2 > 0$.

Пусть τ_1 и τ_2 оба не равны нулю. Тогда из эрмитовости тензора D_{ij} и условий (8) следует, что

$$|\tau_2|^2\, D_{11} = |\tau_1|^2\, D_{22} = |\tau_1 \tau_2|^2\, D_{33} = \tau_1 \tau_2^* D_{12} = -\tau_1 |\tau_2|^2\, D_{13} = -\tau_2 |\tau_1|^2\, D_{23}.$$

Из соотношений для недиагональных членов $D_{ij} = -n^2 \kappa_i^* \kappa_j$ $(i \neq j)$ можно получить связь поляризационных коэффициентов κ_i в точке поляризационного вырождения,

$$\kappa_1 = -\tau_1 \kappa_3, \quad \kappa_2 = -\tau_2 \kappa_3.$$

С учетом этих соотношений находим, что для всех диагональных элементов выполняется соотношение $D_{ii} = -|\kappa_i|^2 n^2$, например, $D_{11} = -\tau_1 D_{13} = n^2 \kappa_1^* (\tau_1 \kappa_3) = -n^2 \kappa_1^* \kappa_1$. Отсюда следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = n^2$, т.е. рассматриваемый случай соответствует полной изотропии диэлектрического отклика среды. Компоненты поля при этом связаны с условием поляризационного вырождения $\boldsymbol{\mathcal{E}} \perp \boldsymbol{\tau}$ где $\boldsymbol{\tau} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$. Очевидно, что $\boldsymbol{\tau}$ есть просто волновой вектор $\mathbf{k}$ в базисе собственных поляризаций, поэтому в исходной декартовой системе координат приведенное условие эквивалентно естественному для изотропной среды условию поперечности поля $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$.

Пусть только одно число из τ_1 и τ_2 не равно нулю, например, для определенности, $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Тогда из условий (8) следует, что

$$D_{21} = D_{31} = D_{12} + \tau_2 D_{13} = 0 \tag{9}$$

$$D_{11} = D_{22} + \tau_2 D_{23} = D_{32} + \tau_2 D_{33} = 0, \tag{10}$$

Соотношения (9), эквивалентные условию $\kappa_2^* \kappa_1 = \kappa_3^* \kappa_1 = 0$, могут выполняться в двух случаях: $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$ или $\kappa_1 = 0$. Рассмотрим сначала первый случай. Из условия нормировки (6) следует, что $|\kappa_1| = 1$, т.е. в этом случае вектор собственной поляризации $\mathbf{e}_1$ должен быть параллелен волновому вектору $\mathbf{k}$. При этом из соотношений (10) получаем, что $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = n^2$. Нетрудно убедиться, что при этом $D_{ij} = 0$, то есть данный случай соответствует полному поляризационному вырождению. Во втором случае, $\kappa_1 = 0$, соотношения (10) можно переписать как

$$n^2 - \varepsilon_1 = 0, \quad |\kappa_3|^2 \, n^2 - \varepsilon_2 = \tau_2 n^2 \kappa_2^* \kappa_3, \quad \tau_2 (|\kappa_2|^2 \, n^2 - \varepsilon_3) = n^2 \kappa_3^* \kappa_2,$$

в двух последних соотношениях мы воспользовались связью $|\kappa_2|^2 + |\kappa_3|^2 = 1$. Исключая τ_2, окончательно можно получить следующие условия:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_2 |\kappa_2|^2 + \varepsilon_3 |\kappa_3|^2} = n^2 \quad \text{при} \quad \kappa_1 = 0.$$

Заметим, что в этом случае вектор собственной поляризации $\mathbf{e}_1$ ортогонален волновому вектору $\mathbf{k}$. Определяя τ_2 находим, что поляризация вырожденных нормальных мод ортогональна вектору $\boldsymbol{\mathcal{E}} \perp \boldsymbol{\tau}$ где $\boldsymbol{\tau} = (0, \varepsilon_2 \kappa_2, \varepsilon_3 \kappa_3)$. Нетрудно убедиться, что в исходной декартовой системе координат это условие эквивалентно соотношению $\varepsilon_{ij} k_i E_j = 0$, которое следует непосредственно из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

И, наконец, пусть $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$. Тогда D_{33} может принимать любое значение, а все остальные компоненты тензора D_{ij} равны нулю. Это эквивалентно условию $\kappa_2^* \kappa_1 = \kappa_3^* \kappa_1 = \kappa_3^* \kappa_2 = 0$, которое выполняется, если любые два из входящих в него коэффициентов равны нулю. Отсюда с учетом нормировки (6) следует, что один из векторов собственных поляризаций $\mathbf{e}_i$ должен быть параллелен волновому вектору, при этом соответствующий коэффициент $|\kappa_i| = 1$. Нетрудно убедиться, что

$$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = n^2 \quad \text{при} \quad |\kappa_1| = 1,$$
$$\varepsilon_1 = n^2,\ \varepsilon_2 = 0 \quad \text{при} \quad |\kappa_2| = 1,$$
$$\varepsilon_1 = n^2,\ \varepsilon_2 = n^2 \quad \text{при} \quad |\kappa_3| = 1.$$

Заметим, что ε_3 может принимать любое значение, что снимает полное поляризационное вырождение, рассмотренное выше. Поляризация вырожденных мод ортогональна вектору собственной поляризации среды $\mathbf{e}_3$.

С точностью до перестановок индексов мы перебрали все возможные комбинации параметров, при которых может реализоваться поляризационное вырождение. Подытожим полученные результаты. Можно выделить пять характерных случаев, в которых возникает поляризационное вырождение.

(a) Поляризационное вырождение в условиях частичного вырождения анизотропии реализуется, когда один из векторов собственных поляризаций среды сонаправлен с волновым вектором, соответствующий ему элемент диагонализованного тензора диэлектрической проницаемости отличен от нуля, при этом элементы тензора диэлектрической проницаемости, соответствующие двум другим векторам собственных поляризаций, равны между собой:

$$\mathbf{e}_i \parallel \mathbf{k},\ \ \varepsilon_i \neq 0,\ \ \varepsilon_j = \varepsilon_k = n^2 \quad (j \neq k \neq i), \tag{a}$$

Равенство собственных значений диэлектрического тензора квадрату показателя преломления автоматически следует из приведенных выше условий. Поляризации вырожденных мод ортогональны вектору собственной поляризации $\mathbf{e}_i$. Строго говоря, для выполнения условия $\varepsilon_j = \varepsilon_k$ требуется не только изотропность диэлектрического отклика в плоскости, ортогональной $\mathbf{e}_i$, но и отсутствие гиротропии вдоль $\mathbf{e}_i$. Для краткости мы будем использовать понятие «частичного вырождения анизотропии», подразумевая при этом и одновременное вырождение гиротропии среды.

(b) Поляризационное вырождение без вырождения анизотропии реализуется в окрестности резонанса среды, когда один из векторов собственных поляризаций среды сонаправлен с волновым вектором, соответствующий ему элемент тензора диэлектрической проницаемости равен нулю, а два других элемента тензора диэлектрической проницаемости не равны между собой (при этом один элемент автоматически равен квадрату показателя преломления):

$$\mathbf{e}_i \parallel \mathbf{k},\ \ \varepsilon_i = 0,\ \ \varepsilon_j = n^2,\ \ \varepsilon_k \neq n^2 \quad (j \neq k \neq i). \tag{b}$$

Поляризации вырожденных мод ортогональны вектору собственной поляризации $\mathbf{e}_k$.

(c) Если волновой вектор сонаправлен с одним из векторов собственных поляризаций среды, соответствующий элемент тензора диэлектрической проницаемости равен нулю (резонанс среды), а два других элемента тензора диэлектрической проницаемости равны между собой,

$$\mathbf{e}_i \parallel \mathbf{k}\,,\;\; \varepsilon_i = 0\,,\;\; \varepsilon_j = \varepsilon_k = n^2 \quad (j \neq k \neq i), \tag{c}$$

то реализуется *полное* поляризационное вырождение, при котором любая поляризация поля удовлетворяет системе волновых уравнений. Рассматриваемый случай соответствует лишь частичному вырождению анизотропии среды, поскольку в среде остается выделенное направление $\mathbf{e}_i$.

(d) Если все три компоненты диагонализованного диэлектрического тензора равны,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = n^2\,, \tag{d}$$

то реализуется поляризационное вырождение в условиях полного вырождения анизотропии среды. Очевидно, что при отсутствии пространственной дисперсии это условие реализуется для всех направлений распространения волн. Поляризации вырожденных мод ортогональны $\mathbf{k}$. Заметим, что в специальном случае резонанса среды при $n^2 = 0$ полное вырождение реализуется одновременно и для поляризации волн, и для анизотропии среды.

Из приведенных условий следует, что в точке поляризационного вырождения волновой вектор параллелен некоторому вектору собственной поляризации среды. Если мы рассматриваем распространяющиеся волны с действительным $\mathbf{k}$, то параллельный ему вектор собственной поляризации должен быть *действительным* или приводиться к действительному. Другими словами, одна из собственных поляризаций среды должна быть линейной и ориентированной вдоль направления распространения вырожденных мод. Но это не единственно возможная ситуация.

(e) Поляризационное вырождение возможно одновременно и без вырождения анизотропии, и без резонанса среды. При этом в отличие от всех предыдущих случаев волновой вектор *ортогонален* одному из векторов собственных поляризаций среды, а на компоненты диагонализованного тензора диэлектрической проницаемости наложены следующие условия:

$$\mathbf{e}_i \perp \mathbf{k}\,,\;\; \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_j \varepsilon_k}{\varepsilon_j\,|\kappa_j|^2 + \varepsilon_k\,|\kappa_k|^2} = n^2 \quad (j \neq k \neq i). \tag{e}$$

Для действительного вектора собственной поляризации $\mathbf{e}_i$ приведенные условия определяют вектор $\mathbf{k}$ (первое условие задает плоскость, второе – направление в этой плоскости и модуль $\mathbf{k}$) и не накладывают никаких дополнительных условий на компоненты диэлектрического тензора и на поляризацию нормальных мод, кроме условий разрешимости уравнений (e). Но в общем случае вектор $\mathbf{e}_i$ может быть не приводимым к действительному комплексным вектором. В этом случае первое условие однозначно определяет направление волнового вектора $\mathbf{k} \parallel \mathrm{Re}\,\mathbf{e}_i \times \mathrm{Im}\,\mathbf{e}_i$, поэтому второе условие дает дополнительную связь между собственными значениями диэлектрического тензора. Этот случай более удобно исследовать в представлении главных оптических осей, рассмотренном в следующем разделе.

Рассмотрим наиболее типичные случаи, возможные в недиссипативной среде. Среда может обладать осью гиротропии и быть изотропной в плоскости поперек этой оси. Наиболее распространенным примером такой среды является плазма в магнитном поле. Тогда один из векторов собственных поляризаций среды действителен и направлен вдоль оси гиротропии, а два других вектора собственных поляризаций комплексны. Из приведенных условий следует, что линейное взаимодействие волн с действительным $\mathbf{k}$ возможно, только если волновой вектор параллелен или ортогонален к оси гиротропии[1]. Если среда представляет собой одно- или двухосный кристалл, тогда все три вектора собственных поляризаций среды действительны и направлены вдоль главных оптических осей кристалла. Линейное взаимодействие распространяющихся волн возможно, если волновой вектор параллелен или ортогонален к главным оптическим осям. И, наконец, если в анизотропном кристалле есть направление гиротропии, не совпадающее с главными оптическими осями (например, индуцированное произвольно направленным внешним магнитным полем), то все три вектора собственных поляризаций среды являются комплексными (не приводимыми к действительным). Тогда единственная возможность для линейного взаимодействия распространяющихся волн реализуется через случай (e) с комплексным $\mathbf{e}_i$. Описание этого довольно экзотического случая требует несколько иного формализма, приведенного в следующем разделе.

4. Тензор диэлектрической проницаемости в точке поляризационного вырождения в базисе главных оптических осей

---

[1] В этом легко убедиться. Пусть $\mathbf{e}_1 \in \mathrm{R}$ направлен вдоль оси гиротропии, и $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ являются комплексными. Тогда из условия ортонормированности данных векторов следует, что $\mathbf{e}_2 = \cos\gamma\,\mathbf{a} + i\sin\gamma\,\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}_3 = \sin\gamma\,\mathbf{a} - i\cos\gamma\,\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_1$ образуют ортонормированную тройку *действительных* векторов. Условия (a)-(c) возможны только при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_1$, то есть при распространении вдоль оси гиротропии. Допустим, что условия (e) выполняется при $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_2$, то есть $\mathbf{k} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{b}$. Тогда автоматически $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_1$, то есть случай (e) сводится к случаю вырождения анизотропии (a). Поэтому без ограничения общности достаточно рассматривать случай (e) при $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_1 \in \mathrm{R}$, то есть распространение поперек оси гиротропии.

В этом разделе мы рассмотрим альтернативный способ описания условий поляризационного вырождения, основанный на представлении поля через линейные поляризации, то есть в базисе действительных векторов. По сравнению с рассмотренным выше этот способ несколько более физичный, поскольку явно разделяет эффекты гиротропии и анизотропии, однако в большинстве случаев приводит к более сложным уравнениям линейного взаимодействия. Тем не менее способ оказывается более удобным и информативным при анализе одного специального случая – выделенного в предыдущем разделе случая (е), к котором волновой вектор *ортогонален* одному из векторов собственных поляризаций среды.

Разделим эрмитов тензор диэлектрической проницаемости на симметричную и антисимметричную часть:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad \varepsilon''_{ij} = e_{ijk} g_k ,$$

здесь ε'_{ij} и ε''_{ij} – это, соответственно, симметричная и антисимметричная матрицы с действительными коэффициентами, e_{ijk} – единичный антисимметричный тензор, по индексу k подразумевается суммирование. Во втором соотношении мы воспользовались известным фактом, что в трехмерном пространстве антисимметричный тензор может быть задан трехмерным вектором. В данном случае это действительный вектор $\mathbf{g}$ с декартовыми компонентами g_k, известный как вектор гирации [10]. Симметричную часть ε'_{ij} можно диагонализовать с помощью перехода к новому действительному ортогональному базису $\mathbf{e}'_i$, который определяет направления главных оптических осей среды [10]. Совокупность базисных векторов образует матрицу перехода U'_{ij}. Подчеркнем, что в отличие от рассмотренного в основной статье базиса собственных поляризаций среды, базис главных оптических осей по построению всегда действителен (отвечает линейным поляризациям).

Рассмотрим волновые уравнения в базисе главных оптических осей. Электрическое поле представим в виде разложения по ортогональным линейным поляризациям $\mathbf{E} = \mathscr{E}'_j \mathbf{e}'_j$. В новом базисе антисимметричная часть диэлектрического тензора естественно определяется тем же вектором гирации $\mathbf{g}$, компоненты которого пересчитываются как $G_j = U'_{ij} g_i$. В результате полный диэлектрический тензор в новом базисе имеет следующий вид

$$U'^{-1}_{im} \varepsilon_{mn} U'_{nj} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & iG_3 & -iG_2 \\ -iG_3 & \varepsilon'_2 & iG_1 \\ iG_2 & -iG_1 & \varepsilon'_3 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий волновой оператор может быть построен по аналогии с (5):

$$
D'_{ij} = \begin{pmatrix} (1-\kappa_1'^2)\,n^2 - \varepsilon_1' & -n^2\kappa_1'\kappa_2' + iG_3 & -n^2\kappa_1'\kappa_3' - iG_2 \\ -n^2\kappa_1'\kappa_2' - iG_3 & (1-\kappa_2'^2)\,n^2 - \varepsilon_2' & -n^2\kappa_2'\kappa_3' + iG_1 \\ -n^2\kappa_1'\kappa_3' + iG_2 & -n^2\kappa_2'\kappa_3' - iG_1 & (1-\kappa_3'^2)\,n^2 - \varepsilon_3' \end{pmatrix}.
$$

$\kappa'_j = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{k}/k$ – действительные координаты единичного орта вдоль направления волнового вектора в новом базисе.

Далее можно ввести вектор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, -1)$, определяющий плоскость поляризации вырожденных мод, и полностью повторить логику раздела 3. В частности, условия (8) в системе главных оптических осей примут вид:

$$
\begin{cases}
n_2^2 + n_3^2 - \varepsilon_1' = \tau_1\left(iG_2 + n_1 n_3\right) & (11.1) \\
n_1^2 + n_3^2 - \varepsilon_2' = -\tau_2\left(iG_1 - n_2 n_3\right) & (11.2) \\
iG_2 - n_1 n_3 = -\tau_1\left(n_1^2 + n_2^2 - \varepsilon_3'\right) & (11.3) \\
iG_1 + n_2 n_3 = \tau_2\left(n_1^2 + n_2^2 - \varepsilon_3'\right) & (11.4) \\
iG_3 - n_1 n_2 = \tau_2\left(iG_2 + n_1 n_3\right) & (11.5) \\
iG_3 + n_1 n_2 = \tau_1\left(iG_1 - n_2 n_3\right) & (11.6)
\end{cases}
$$

где $n_i = n\kappa_i$ – координаты вектора $\mathbf{k}/k_0$ в новом базисе. Условия совместности этих уравнений определяют дополнительные ограничения на поляризацию, волновой вектор и компоненты ε_{ij} в точке поляризационного вырождения. Так, уравнения (11.5) и (11.6) определяют вектор $\boldsymbol{\tau}$. Подставляя этот вектор в (11.3)-(11.4) и исключая множитель $(n_1^2 + n_2^2 - \varepsilon_3')$, находим условие совместности (11.3)-(11.6):

$$
n_1 n_2 n_3 \left(G_1 n_1 + G_2 n_2 + G_3 n_3\right) = 0 .
$$

Аналогично, подставляя вектор $\boldsymbol{\tau}$ в (11.1)-(11.2) и приравняем нулю мнимую часть, получим

$$
G_1 G_2 G_3 = n_1 n_2 n_3 \left(G_1 n_1 + G_2 n_2 + G_3 n_3\right) = 0 .
$$

Таким образом, для совместности приведенных уравнений волновой вектор должен быть *ортогонален* либо одной из главных оптических осей, либо вектору гирации, кроме того, вектор гирации должен быть ортогонален одной из главных оптических осей.

Пусть τ_1 и τ_2 оба не равны нулю. Возможны два случая: $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}'_i$ или $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$. Рассмотрим, для определенности, $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}'_1$, то есть $n_1 = 0$. Из уравнения (11.5) следует, что $\tau_2 = G_3/G_2$ – действительная величина. Приравняв к нулю мнимую часть в (11.2) получаем, что $G_1 = 0$, то есть вектор гирации должен быть ортогонален той же оптической оси $\mathbf{e}'_1$, что и волновой вектор. Из (11.6) находим $\tau_1 = -iG_3/n_2 n_3$, после чего исключая $\boldsymbol{\tau}$ из уравнений, получаем условия поляризационного вырождения в виде:

$$\begin{cases} \left(n^2-\varepsilon_1'\right)n_3 n_2 = G_2 G_3 \\ \left(n^2-\varepsilon_1'\right)\left(n_3^2-\varepsilon_2'\right) = G_3^2 \\ \left(n^2-\varepsilon_1'\right)\left(n_2^2-\varepsilon_3'\right) = G_2^2 \end{cases},$$

где $n^2 = n_2^2 + n_3^2$. Решая эту систему уравнений относительно $n_{2,3}$ и ε_1, получаем модуль и направление волнового вектора, а также дополнительное условие на тензор диэлектрической проницаемости среды:

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2'^2 G_2^2 + \varepsilon_3'^2 G_3^2}{\varepsilon_2' G_2^2 + \varepsilon_3' G_3^2}, \quad \kappa_2'\varepsilon_2' G_2 + \kappa_3'\varepsilon_3' G_3 = 0, \quad \varepsilon_1' - n^2 = \frac{G_2^2}{\varepsilon_3'} + \frac{G_3^2}{\varepsilon_2'}.$$

Из первых двух соотношений можно получить условия, по форме совпадающее с (e):

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2'\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\kappa_2'^2 + \varepsilon_3'\kappa_2'^2}.$$

Условие на направление можно также интерпретировать в инвариантном виде как $\mathbf{k} \perp \hat{\varepsilon}'\mathbf{g}$. Теперь рассмотрим второй случай, $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$. Одна из компонент G_i должна быть равна нолю, пусть $G_1 = 0$. Исключая $\boldsymbol{\tau}$ из уравнений (11.1)-(11.6) и учитывая условие ортогональности $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$ (то есть $G_2 n_2 + G_3 n_3 = 0$), можно получить:

$$\begin{cases} \left(G_2^2 + n_1^2 n_3^2\right)\left(n^2 - \varepsilon_2'\right) = G_2 n_2 \left(G_2 n_2 + G_3 n_3\right) = 0 \\ \left(G_3^2 + n_1^2 n_2^2\right)\left(n^2 - \varepsilon_3'\right) = G_3 n_3 \left(G_2 n_2 + G_3 n\right) = 0 \\ \left(n^2-\varepsilon_1'\right) n_2 n_3 = G_2 G_3 \end{cases},$$

где $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Отсюда $\varepsilon_2' = \varepsilon_3' = n^2$ и $\varepsilon_1' - n^2 = G_2^2 / n_2^2 = G_3^2 / n_3^2$. В негиротропных средах ($\mathbf{g} = 0$) этот случай отвечает полному вырождению анизотропии (d). По видимому, оба рассмотренных выше случая отвечают случаю (e) с комплексным вектором собственной поляризации ($\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i \in \mathrm{C}$), поскольку полностью определяют волновой вектор и задают одно дополнительное условие на компоненты диелектрического тензора.

Пусть только одно число из τ_1 и τ_2 не равно нулю, например, для определенности, $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Тогда из уравнений (11.3) и (11.6) следует, что $G_2 = G_3 = n_1 n_2 = n_1 n_3 = 0$, то есть, $\mathbf{e}_1' \parallel \mathbf{g}$ и либо $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$, либо $\mathbf{k} \parallel \mathbf{g}$. Заметим, что из условия $\mathbf{e}_1' \parallel \mathbf{g}$ следует, что один из векторов собственных поляризаций среды действителен, совпадает с главной оптической осью $\mathbf{e}_1'$ и отвечает собственному значению ε_1', кроме того $G_1 = \pm |\mathbf{g}|$. В случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$ условия совместности сводятся к

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_2'\varepsilon_3' - g^2}{\varepsilon_2'\kappa_2'^2 + \varepsilon_3'\kappa_2'^2} = n^2.$$

Этот случай отвечает случаю (e) с действительным вектором собственной поляризации ($\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i \in \mathrm{R}$), поскольку определяет только волновой вектор (модуль и направление). В случае $\mathbf{k} \parallel \mathbf{g}$ условия совместности сводятся к

$$\varepsilon_1' = 0\,,\ \left(n^2 - \varepsilon_2'\right)\left(n^2 - \varepsilon_3'\right) = g^2\,.$$

Этот случай отвечает случаю (b) или при $\mathbf{g} \to 0$ случаю (c).

И, наконец, пусть $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$. Тогда из уравнений (11.3)-(11.5) следует, что среда становится негиротропной, $\mathbf{g} = 0$, и этот случай сводится либо к случаю (a), либо к частному случаю (b).

Итак, мы нашли некоторые ограничения на диэлектрический тензор среды в точке поляризационного вырождения. Результаты данного анализа приведены в таблице 1. Видно, что представление главных оптических осей позволяет получить несколько более детальную информацию о структуре диэлектрического тензора в точке поляризационного вырождения, поскольку он основан на более детальной модели диэлектрического отклика, в которой гиротропные эффекты описываются отдельным вектором $\mathbf{g}$. Следующий шаг заключается в построении укороченных волновых уравнений в окрестности точки поляризационного вырождения в плавнонеоднородной среде. Такой анализ можно провести для обоих расмотренных представлений поля, однако использование главных оптических осей приводит к гораздо более громоздким выкладкам по сравнению с более грубым описанием через собственные поляризации среды. Методика анализа при этом одинакова. Поэтому в следующем разделе мы ограничились анализом волновых уравнений в представлении собственных поляризаций среды.

5. Эталонные уравнения, описывающие линейное взаимодействие волн в окрестности точек поляризационного вырождения

Как известно, поляризационное вырождение снимается в пространственно неоднородной среде. Рассмотрим слабо неоднородную среду без пространственной дисперсии, заданную эрмитовым тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$, изменяющимся в пространстве медленно по сравнению с длиной электромагнитной волны вдали от области взаимодействия,

$$k_0 L >> 1\,,$$

здесь L – характерный масштаб изменения диэлектрических свойств среды. Приведенное условие позволяет выделить в среде нормальные волны, распространяющиеся независимо в приближении геометрической оптики [6, 7]. Однако в окрестности точек поляризационного вырождения, найденных в разделе 3, приближение геометрической оптики может нарушаться, в результате чего между нормальными волнами в плавнонеоднородной среде появляется связь (линейное взаимодействие). В этом случае распределение электромагнитного поля может быть описано эталонными волновыми уравнениями, получаемыми путем «укорочения» уравнений Максвелла в окрестности точек поляризационного вырождения. В этом разделе мы найдем и классифицируем такие уравнения.

В каждой пространственной точке применим процедуру диагонализации тензора $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, описанную в разделе 3. В результате получим диагональную матрицу $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{d}}(\mathbf{r})$ с элементами $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ и матрицу перехода $U_{ij}(\mathbf{r})$, составленную из векторов собственных поляризаций среды $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$. Все эти величины плавно зависят от координат с характерным масштабом изменения L. Может оказаться, что масштаб изменения $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$ разный. Например, в условиях вырождения анизотропии $\varepsilon_i \approx \varepsilon_j$ могут меняться существенно медленнее поворота векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$. В таких случаях под L подразумевается наименьший из масштабов. Пусть существует точка в пространстве, в которой выполняется одно из найденных в разделе 3 условий поляризационного вырождения для плоской электромагнитной волны с некоторым фиксированным волновым вектором $\mathbf{k}^0$. Рассмотрим окрестность этой точки, предполагая, что компоненты тензора диэлектрической проницаемости и вектора собственных поляризаций среды непрерывны и мало отличаются от соответствующих величин точке поляризационного вырождения,

$$U_{ij}(\mathbf{r}) = U_{ij}^0 + \delta U_{ij}(\mathbf{r}), \qquad |\,\delta U_{ij}\,| << |\,U_{ij}^0\,|,$$

или

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_i^0 + \delta\mathbf{e}_i(\mathbf{r}), \qquad |\,\delta\mathbf{e}_i\,| << |\,\mathbf{e}_i^0\,|.$$

Точка поляризационного вырождения может быть удалена на бесконечность или вовсе не существовать, как, например, в случае, когда среда плавно переходит в вакуум [1]. Это обстоятельство, однако, не мешает рассматривать «окрестность» данной точки, определенную как область пространства, где параметры среды и поля почти удовлетворяют условиям поляризационного вырождения. Заметим, что требование непрерывности векторов собственных поляризаций среды снимает неоднозначность выбора этих векторов в случаях, соответствующих вырождению анизотропии среды.

Как и в однородной среде, будем искать волновое поле в представлении собственных поляризаций среды

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathcal{E}_i(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_i(\mathbf{r})\exp\bigl(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t\bigr),$$

где $\mathscr{E}_i(\mathbf{r})$ – медленные на масштабе длины волны функции. Уравнения для медленных амплитуд волнового поля могут быть получены формальной заменой в уравнениях (4) волнового вектора на дифференциальный оператор

$$\mathbf{k} \to \widehat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^0 - i\partial / \partial \mathbf{r} .$$

При этом в окрестности точки поляризационного вырождения пространственная производная мала по сравнению с «несущим» волновым вектором $\mathbf{k}^0$, поэтому при вычислении квадратичных операторов можно ограничиться членами первого порядка малости:

$$\widehat{k}_1\widehat{k}_1 = \widehat{k}_1\widehat{k}_2 = \widehat{k}_2\widehat{k}_2 = 0,\ \widehat{k}_1\widehat{k}_3 = -ik_0 n\partial / \partial x_1,\ \widehat{k}_2\widehat{k}_3 = -ik_0 n\partial / \partial x_2, \quad \widehat{k}_3\widehat{k}_3 = k_0^2 n^2 - 2ik_0 n\partial / \partial x_3 .$$

Здесь мы выбрали декартову систему координат так, чтобы ось x_3 была параллельна волновому вектору $\mathbf{k}^0$, показатель преломления $n = |\mathbf{k}^0| / k_0$ вычисляется в точке поляризационного вырождения. В результате система укороченных волновых уравнений примет следующий вид:

$$\widehat{D}_{ij}\mathscr{E}_j = 0 , \quad \widehat{D}_{ij} = U_{mi}^* \widehat{K}_{mn} U_{nj} - k_0^2 \varepsilon_{ij}^{\mathrm{d}} , \tag{12}$$

где

$$\widehat{K}_{mn} = k_0 n \begin{pmatrix} k_0 n - 2i\partial / \partial x_3 & 0 & i\partial / \partial x_1 \\ 0 & k_0 n - 2i\partial / \partial x_3 & i\partial / \partial x_2 \\ i\partial / \partial x_1 & i\partial / \partial x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что производные по координатам в операторе $\widehat{D}_{ij}$ действуют не только на волновое поле, но и на компоненты векторов собственных поляризаций среды, определяемых матрицей U_{nj}. Однако, ограничившись только членами нулевого и первого порядка малости по δU_{ij}, волновой оператор (12) нетрудно переписать в виде, в котором производные по координатам действуют только на волновое поле:

$$\widehat{D}_{ij} = U_{mi}^{0*} U_{nj}^0 \widehat{K}_{mn} - k_0^2 \varepsilon_{ij}^{\mathrm{d}} + \delta D_{ij} ,\ \ \delta D_{ij} = k_0^2 n^2 (\delta U_{mi}^* \sigma_{mn} U_{nj} + U_{mi}^{0*} \sigma_{mn} \delta U_{nj}) , \tag{13}$$

где $\sigma_{mn} = \delta_{mn} - \delta_{3m}\delta_{3n}$. Слагаемое δD_{ij} описывает «шировую» часть волнового оператора, связанную с поворотом выделенных направлений среды – оптических осей или оси гиротропии. Этот член может быть несколько упрощен, если воспользоваться свойством ортонормированности векторов $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$ в каждой точке пространства. Действительно, из равенства $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij}$ с точностью до членов первого порядка следует соотношение $U_{ni}^0 \delta U_{nj}^* + \delta U_{mi} U_{mj}^{0*} = 0$, из которого следует, что матрица σ_{mn} в (13) может быть заменена на более простую матрицу $\sigma_{mn} = -\delta_{3m}\delta_{3n}$ у которой все элементы равны нулю за исключением последнего элемента на диагонали.

То обстоятельство, что за исключением некоторых специальных случаев производными от векторов собственных поляризаций среды (12) можно пренебречь по сравнению с производными от компонент электрического поля, имеет ясный физический смысл. Действительно, учитываемые в (12) члены имеют вид $(x_i / L)\mathscr{E}_j$ и $(k_0^{-1}\partial / \partial x_i)\mathscr{E}_j$, где L – масштаб неоднородности диэлектрического отклика среды. Сопоставляя эти члены, нетрудно убедиться, что волновое поле изменяется на характерном масштабе $L/\sqrt{k_0 L} << L$, то есть быстро по сравнению изменением дисперсионных свойств среды. Вектора собственных поляризаций среды меняются на масштабе L, поэтому их производные могут быть отброшены по сравнению с первыми производными от амплитуды поля $\mathscr{E}_j\, \partial U_{ij} / \partial x_k << U_{ij}\, \partial \mathscr{E}_j / \partial x_k$.

Перейдем к анализу случаев поляризационного вырождения, найденных в разделе 3. В случаях (a), (b) и (c) на базис собственных векторов среды наложено условие $\mathbf{e}_i = (0,0,1)$, так как ось x_3 направлена вдоль несущего волнового вектора $\mathbf{k}^0$. Нетрудно убедиться, что с точностью до перестановок индексов унитарная матрица U_{ij}^0 в этом случае имеет общий вид

$$U_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\varphi - i\sin\gamma\sin\varphi & \sin\gamma\cos\varphi + i\cos\gamma\sin\varphi & 0 \\ \cos\gamma\sin\varphi + i\sin\gamma\cos\varphi & \sin\gamma\sin\varphi - i\cos\gamma\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координатные оси x_1 и x_2 всегда можно повернуть относительно оси x_3 так, что $\varphi = 0$; при этом координатные оси направлены вдоль осей эллипсов собственных поляризаций среды в плоскости (x_1, x_2). Оставшийся параметр γ характеризует отношение главных осей эллипсов собственных поляризаций среды. В дальнейшем будем работать именно в такой системе координат, обозначив ее (x, y, z), где ось $z = x_3$ направлена вдоль волнового вектора и, одновременно, вдоль действительного собственного вектора среды. После подстановки приведенной выше матрицы U_{ij}^0 при $\varphi = 0$ в (13), система волновых уравнений $\widehat{D}_{ij}\mathscr{E}_j = 0$ редуцируется к следующему укороченному виду:

$$\begin{cases} \widehat{D}_{11}\mathscr{E}_1 + \widehat{D}_{13}\mathscr{E}_3 = 0 \\ \widehat{D}_{22}\mathscr{E}_2 + \widehat{D}_{23}\mathscr{E}_3 = 0 \\ \widehat{D}_{13}^*\mathscr{E}_1 + \widehat{D}_{23}^*\mathscr{E}_2 = \varepsilon_3\mathscr{E}_3 \end{cases}, \tag{14}$$

где

$$\widehat{D}_{11} = n^2 - \varepsilon_1 - 2ink_0^{-1}\partial / \partial z,$$

$$\widehat{D}_{22} = n^2 - \varepsilon_2 - 2ink_0^{-1}\partial / \partial z,$$

$$\widehat{D}_{13} = n^2\left(\delta e_{3x}\cos\gamma - i\delta e_{3y}\sin\gamma\right) + ink_0^{-1}\left(\cos\gamma\,\partial/\partial x - i\sin\gamma\,\partial/\partial y\right),$$

$$\widehat{D}_{13}^{*} = n^2\left(\delta e_{3x}\cos\gamma + i\delta e_{3y}\sin\gamma\right) + ink_0^{-1}\left(\cos\gamma\,\partial/\partial x + i\sin\gamma\,\partial/\partial y\right),$$

$$\widehat{D}_{23} = n^2\left(\delta e_{3x}\sin\gamma + i\delta e_{3y}\cos\gamma\right) + ink_0^{-1}\left(\sin\gamma\,\partial/\partial x + i\cos\gamma\,\partial/\partial y\right),$$

$$\widehat{D}_{23}^{*} = n^2\left(\delta e_{3x}\sin\gamma - i\delta e_{3y}\cos\gamma\right) + ink_0^{-1}\left(\sin\gamma\,\partial/\partial x - i\cos\gamma\,\partial/\partial y\right).$$

При выводе мы воспользовались соотношениями $\widehat{D}_{11} = -\varepsilon_3$, $\widehat{D}_{12} = \widehat{D}_{21} = 0$, $\widehat{D}_{31} = \widehat{D}_{13}^{*}$, $\widehat{D}_{32} = \widehat{D}_{23}^{*}$, здесь звездочка обозначает эрмитово сопряжение оператора. Заметим, что продольная производная (вдоль волнового вектора) входит только в диагональные операторы $\widehat{D}_{11}$ и $\widehat{D}_{22}$, а все недиагональные операторы содержат только поперечные производные. Линейное взаимодействие волн определяется только поперечными возмущениями $\delta\mathbf{e}_3$ собственного вектора $\mathbf{e}_3$ (напомним, что $\mathbf{e}_3^0 \parallel \mathbf{k}^0$). Заметим, что компонента $\mathscr{E}_3$ определяет продольное электрическое поле $E_z = \mathscr{E}_3$.

Случай (а). В случае поляризационного вырождения в условиях частичного вырождения анизотропии в силу условий (а) в окрестности точки поляризационного вырождения выполняются условия $|n^2 - \varepsilon_1|$, $|n^2 - \varepsilon_2| << 1$, при которых все члены вида $\widehat{D}_{ij}\mathscr{E}_k$ в уравнениях (14) являются малыми величинами одного порядка. С другой стороны, среда должна находиться вдали от продольного резонанса, поэтому можно считать $\varepsilon_3 \sim 1$, точнее $|\widehat{D}_{13}^{*}|, |\widehat{D}_{23}^{*}| << \varepsilon_3$. Отсюда в силу последнего уравнения системы (14) следует, что продольное электрическое поле мало, $\mathscr{E}_3 << \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$. Отбросив малую компоненту электрического поля, получаем систему двух не связанных уравнений $\widehat{D}_{11}\mathscr{E}_1 = 0$ и $\widehat{D}_{22}\mathscr{E}_2 = 0$. В этом приближении две поперечные моды с поляризациями, совпадающими с двумя собственными поляризациями среды, распространяются независимо в соответствии с уравнениями геометрической оптики. Физически это означает, что взаимодействие определяется отброшенными членами более высоких порядков, и происходит на геометрооптических масштабах порядка L, а не $L/\sqrt{k_0 L}$ как предполагалось при выводе укороченных уравнений. Уравнение для взаимодействующих геометрооптических мод в этом случае может быть записано в форме (1):

$$\begin{cases} \left(d/dl - ik_0 n_1\right)E_1 = \eta\, E_2 \\ \left(d/dl - ik_0 n_2\right)E_2 = \eta^{*} E_1 \end{cases},$$

где производная берется вдоль геометрооптической трассы l; $E_{1,2}$ и $n_{1,2}$ – амплитуды нормальных мод и их показатели преломления соответственно; η – коэффициент связи между модами, см., например, [1, 7]. Как уже отмечалось в разделе 2, в рассматриваемом случае взаимодействие мод носит одномерный характер – эффект «накапливается» вдоль луча.

Случай (b). Совершенно иной характер имеют волновые уравнения в случае поляризационного вырождения в окрестности резонанса среды. В силу условий (b) один из диагональных операторов $\widehat{D}_{11}$ или $\widehat{D}_{22}$ является не малым, пусть для определенности это будет $\widehat{D}_{22}$ (то есть $\varepsilon_2 \neq n^2$ в точке вырождения мод). Все остальные слагаемые в (14) одного порядка и малы по сравнению с $\widehat{D}_{22}$. Отсюда следует, что компонента $\mathscr{E}_2 << \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_3$ может быть отброшена. Уравнения (14) примут вид:

$$\begin{cases} \widehat{D}_{11}\mathscr{E}_1 + \widehat{D}_{13}\mathscr{E}_3 = 0 \\ \widehat{D}_{13}^*\mathscr{E}_1 - \varepsilon_3\mathscr{E}_3 = 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Уравнения такого типа были разобраны в работах [9, 11-14]. Уравнения описывают линейное взаимодействие с масштабом $L/\sqrt{k_0 L} << L$, малым по сравнению с масштабом неоднородности среды. В локализованной области линейного взаимодействия достаточно ограничиться линейными по координатам вариациями коэффициентов в уравнениях (15). В этом случае путем квадратичных фазовых замен эти уравнения могут быть сведены к двумерной задаче, то есть полностью исключить одну из координат (продольную) из уравнений. Можно показать, что линейная трансформация в этом случае носит принципиально двумерный характер (появляются новые эффекты, отсутствующие в одномерной геометрии) и выделить параметр, управляющий переходом от одномерного к двумерному случаю [12]. Стереотипное представление о линейном взаимодействии как подбарьерном туннелировании волн через одномерный потенциальный барьер адекватно описывает лишь специальный случай, в котором параметры среды меняются в пространстве так, что формируется плоскопараллельная область непрозрачности, разделяющая взаимодействующие моды. Более подробное описание для общего случая можно найти в [9]. Частные случаи взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн в плазме рассмотрены в [12, 13] для двумерно неоднородного случая, в [14] для трехмерно неоднородного случая.

Случай (c). В случае полного поляризационного вырождения в силу условий (c) в окрестности точки поляризационного вырождения выполняются условия $|n^2 - \varepsilon_1|$, $|n^2 - \varepsilon_2|, |\varepsilon_3| << 1$, при которых все члены в уравнениях (14) являются малыми величинами одного порядка. Поэтому, эти условия описывают три взаимодействующие моды, при этом связь между поперечными по отношению к направлению распространения компонентами полей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ осуществляется через продольное поле $\mathscr{E}_3$.

Случай (d). Случай полного вырождения анизотропии неудобно анализировать с помощью уравнений, получающихся в результате диагонализации диэлектрического тензора. Рассмотрим другой путь. В силу условий (d) в точке поляризационного вырождения тензор диэлектрической проницаемости имеет вид $\varepsilon_{ij} = n^2\delta_{ij}$ в базисе векторов собственных поляризаций среды, в точности такой же вид сохраняется и в любом другом ортогональном базисе. Выберем декартову систему координат (x, y, z) с осью z, направленной вдоль несущего волнового вектора. Тогда в окрестности точки вырождения в нулевом порядке из волнового уравнения следует, что $E_z = 0$ и, следовательно, этой компонентой волнового поля в уравнениях первого порядка для поперечных компонент полей можно пренебречь. Поэтому достаточно учесть только ту часть тензора диэлектрической проницаемости, которая описывает диэлектрические свойства среды в плоскости, ортогональной волновому вектору, то есть

$$\varepsilon_{ij}^{2\mathrm{D}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}.$$

В недиссипативной среде этот тензор является эрмитовым и, поэтому, может быть диагонализован в некотором унитарном базисе $\mathbf{e}_1'(\mathbf{r}), \mathbf{e}_2'(\mathbf{r})$, который непрерывным образом меняется в окрестности точки вырождения. Поперечное электрическое поле можно выразить через новый базис как $\mathbf{E}_\perp = \mathscr{E}_i'(\mathbf{r})\,\mathbf{e}_i'(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$. Применяя процедуру, аналогичную описанной в начале этого раздела, можно найти укороченные волновые уравнения для новых амплитуд электрического поля $\mathscr{E}_i'(\mathbf{r})$ вблизи точки полного вырождения анизотропии. Данные уравнения распадаются на два независимых:

$$\begin{cases} (n^2 - 2ink_0^{-1}\partial/\partial z - \varepsilon_1')\mathscr{E}_1' = 0 \\ (n^2 - 2ink_0^{-1}\partial/\partial z - \varepsilon_2')\mathscr{E}_2' = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, случай полного вырождения анизотропии аналогичен рассмотренному выше случаю (а), в котором поляризационного вырождение происходит в условиях частичного вырождения анизотропии. Отличие от случая (а) заключается только в том, что собственные числа $\varepsilon_1', \varepsilon_2'$ и собственные поляризации $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ ищутся не для всего тензора диэлектрической проницаемости, а только для его «поперечной» части.

Случай (е). Рассмотрим, наконец, последний случай, в котором несущий волновой вектор ортогонален одной из собственных поляризаций среды. Общий анализ этой задачи приводит к очень громоздким выкладкам, поэтому мы ограничимся важным частным случаем, отражающим всю основную физику. В значительном числе приложений можно считать, что хотя бы одна из собственных поляризаций среды линейная, то есть отвечает действительному вектору $\mathbf{e}_i$. Как уже отмечалось выше, нетривиальный случай (е) реализуется, только если волновой вектор ортогонален действительному вектору собственной поляризации. Допустим для определенности, что $\mathbf{k}^0 \perp \mathbf{e}_1^0$ и $\mathbf{e}_1^0 \in \mathrm{R}$, и направим ось x вдоль $\mathbf{e}_1^0$ и ось z вдоль несущего волнового вектора $\mathbf{k}^0$. При этих условиях унитарная матрица U_{ij}^0 в наиболее общем виде определяется двумя свободными параметрами и может быть представлена как

$$U_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi}\cos\gamma & e^{i\varphi}\sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Подставив эту матрицу в (13) можно получить оператор $\widehat{D}_{ij}$ и соответствующую ему систему волновых уравнений $\widehat{D}_{ij}\mathscr{E}_j = 0$. Эта система, которую для экономии места мы не будем приводить, имеет весьма сложный вид, в котором «завязаны» все три компоненты вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Однако систему можно упростить, если выделить взаимодействующие моды. Для этого вспомним, что в окрестности точки поляризационного вырождения $\boldsymbol{\mathcal{E}} \perp \boldsymbol{\tau}$. В рассматриваемом случае также $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{e}_1^0$, поэтому волновое поле можно разложить по трем ортогональным векторам $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}_1^0$ и $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{e}_1^0$:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathscr{E}_1 \mathbf{e}_1^0 + \mathscr{E}_u \mathbf{u} + \mathscr{E}_\tau \boldsymbol{\tau},$$

где $\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u} = (0, \varepsilon_3\cos\gamma, \varepsilon_2\sin\gamma)$, $\boldsymbol{\tau} = (0, -\varepsilon_2\sin\gamma, \varepsilon_3\cos\gamma)$. При подстановке поля в таком виде в укороченные волновые уравнения, компонента $\mathscr{E}_\tau$ будет мала в окрестности точки вырождения, поэтому ей можно пренебречь. Для оставшихся двух компонент получается система уравнений

$$\begin{cases} \left(\Delta_1 - \dfrac{2in}{k_0}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\mathscr{E}_1 + \eta\left(\delta e_{1z}^* - \dfrac{in}{k_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}_u = 0 \\ \eta\left(\delta e_{1z} - \dfrac{in}{k_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}_1 + \left(\Delta_u + \delta\Delta_u - \dfrac{2in}{k_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \eta\cos\varphi\dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\right)\mathscr{E}_u = 0 \end{cases}, \qquad (16)$$

где $\eta = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1/\varepsilon_2\varepsilon_3)^2\sin\gamma\cos\gamma$, $\delta\Delta_u = 2n^2\eta\left(\varepsilon_2\sin\gamma\,\mathrm{Re}(\delta e_{3z}) + \varepsilon_3\cos\gamma\,\mathrm{Re}(\delta e_{2z})\right)$,

$$\Delta_1 = n^2 - \varepsilon_1,\ \Delta_u = n^2 - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_2\sin^2\gamma + \varepsilon_3\cos^2\gamma}.$$

Приведенные уравнения описывают линейное взаимодействие двух мод, которые вне области взаимодействия переходят в моды с дисперсионными соотношениями $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_u = 0$. Линейное взаимодействие возникает вследствие анизотропии среды поперек оси x и/или гиротропии вдоль оси x. Действительно, при $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ коэффициент связи $\eta = 0$ и моды в данном приближении распространяются независимо; можно убедиться, что учет следующих порядков приводит к одномерному взаимодействию, описываемому уравнениями вида (1). Кроме того, связь между модами пропадает при $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi/2$ – это соответствует случаю частичного вырождения анизотропии (а). Напомним, что все коэффициенты в уравнениях (16) являются в области взаимодействия малыми величинами, плавно меняющимися в пространстве с масштабом L. При $\eta \neq 0$ характерный масштаб области линейного взаимодействия, как и в случае взаимодействия в окрестности резонансов среды (b), определяется как $L/\sqrt{k_0 L} << L$, при этом линейное взаимодействие может носить существенно неодномерный характер.

Заметим, что выводы разделов 3 и 4 относительно точек поляризационного вырождения остаются справедливыми для сред с пространственной дисперсией. В частности, они могут быть применены также и для магнитных сред, поскольку любая линейная среда, характеризующихся тензорами диэлектрической и магнитной восприимчивостей, может быть эквивалентно описана как «немагнитная» среда с пространственной дисперсией [7]. Однако выводы данного раздела относятся только к средам без пространственной дисперсии, поэтому не применимы к магнитным средам.

6. Примеры

В качестве первого примера рассмотрим распространение высокочастотных волн в холодной магнитоактивной плазме. Если частота излучения много выше всех ионных частот и частоты соударений, рассматриваемая среда описывается гиротропным тензором диэлектрической проницаемости [6]

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_{\perp} = 1 - \omega_{pe}^2/(\omega^2 - \omega_{ce}^2)$, $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, $g = \omega_{ce}\omega_{pe}^2/\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)$, ω_{ce} и ω_{pe} – циклотронная и плазменная частоты электронов. Данный тензор написан в стиксовой системе координат, в которой оси x_3 и x_2 направлены, соответственно, вдоль внешнего магнитного поля и поперек $\mathbf{k}$. Вектора собственной поляризации среды и соответствующие диагональные элементы диэлктрического тензора можно определить как

$$\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 0), \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_{\perp} - g = 1 - \omega_{pe}^2/\omega(\omega - \omega_{ce}),$$

$$\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}, 0), \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\perp} + g = 1 - \omega_{pe}^2/\omega(\omega + \omega_{ce}),$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1), \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_{\parallel},$$

Прежде всего, отметим, что плазма изотропна в плоскости, ортогональной магнитному полю, а условие «частичного вырождения анизотропии» $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ фактически сводится к условию вырождения гиротропии $g \to 0$. Это условие реализуется в трех случаях: при выходе излучения в вакуум $\omega_{pe} << \omega, |\omega \pm \omega_{ce}|$, при слабой замагниченности $\omega_{ce} << \omega$ и, наоборот, в сильном магнитном поле $\omega_{ce} >> \omega, \omega_{pe}$. В первых двух случаях линейное взаимодействие волн происходит в условиях полного вырождения анизотропии (d), во третьем случае – в условиях частичного вырождения анизотропии (a), при этом излучение должно находиться вне области плазменной отсечки. Случай (b) реализуется в окрестности отсечки на плазменной частоте $\omega \to \omega_{pe}$, при этом в сильном магнитном поле $\omega_{ce} >> \omega_{pe}$ происходит переход к случаю полного поляризационного вырождения (c). Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что случай (e) в магнитоактивной плазме возможен лишь при $\omega_{pe} = 0$ или $\omega_{ce} = 0$, то есть, как самостоятельный случай не реализуется. С физической точки зрения это можно проинтерпретировать как следствие отсутствия пересечения дисперсионных веток обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся поперек магнитного поля. Таким образом, за исключением случая полного вырождения анизотропии волновой вектор взаимодействующих мод всегда выстраивается вдоль магнитного поля. Учет столкновительной диссипации волн [6] не меняет картины, поскольку векторы $\mathbf{e}_i$ при этом не изменятся (эффективная частота соударений войдет только в диагональные элементы ε_i, сделав их комплексными), а появившаяся мнимая часть волнового вектора будет сонаправлена с действительной частью.

Рассмотрим волновые уравнения в наиболее интересном случае (b), описывающие в данном контексте линейное взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн в окрестности плазменной отсечки. Пусть в некоторой точке выполняются условия $\varepsilon_1 = n^2$ и $\varepsilon_3 = 0$, тогда в окрестности этой точки можно ограничиться линейными вариациями:

$$k_0(\varepsilon_1 - n^2) = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \qquad k_0 \varepsilon_3 = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$

где $a_1 = k_0 \partial\varepsilon_1/\partial x,\ b_1 = k_0 \partial\varepsilon_3/\partial x$ и т.д. считаются постоянными константами. В результате уравнения (15) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} in\big(\partial/\partial x - i\,\partial/\partial y\big)\mathscr{E}_3 = \sqrt{2}\big(a_1 x + a_2 y + a_3 z + 2in\partial/\partial z\big)\mathscr{E}_1 \\ in\big(\partial/\partial x + i\,\partial/\partial y\big)\mathscr{E}_1 = \sqrt{2}\big(b_1 x + b_2 y + b_3 z\big)\mathscr{E}_3 \end{cases}.$$

Часто при решении задач, связанных с магнитным удержанием плазмы, можно считать, что плотность равновесной плазмы быстро перераспределяется вдоль магнитных силовых линий, поэтому хорошим приближением является условие $\nabla\varepsilon_3 \perp \mathbf{B}$. В этом случае $b_3 = 0$, кроме того заменой $\mathscr{E}'_{1,3} = \mathscr{E}_{1,3}\exp(ik_z z + ia_3 z^2/4n)$ координата вдоль магнитного поля исключается из уравнений, задача становится двумерной:

$$\begin{cases} in\left(\partial/\partial x - i\partial/\partial y\right)\mathscr{E}_3' = \sqrt{2}\left(a_1 x + a_2 y - 2nk_z\right)\mathscr{E}_1' \\ in\left(\partial/\partial x + i\partial/\partial y\right)\mathscr{E}_1' = \sqrt{2}\left(b_1 x + b_2 y\right)\mathscr{E}_3' \end{cases}.$$

Эти уравнения описывают распространение независимых фурье-гармоник по z, общее решение волновых уравнений строится как их суперпозиция. Нетрудно видеть, что в приведенных выше уравнениях член с волновым числом k_z может быть учтен сдвигом начала координат вдоль осей x и y, после чего для каждой фурье-гармоники получается одна и та же система уравнений. После поворота координатных осей и масштабирования эта система может быть сведена к эталонному виду:

$$\begin{cases} i\left(\partial/\partial x - i\partial/\partial y\right)\mathscr{E}_3'' = \left(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha\right)\mathscr{E}_1'' \\ i\left(\partial/\partial x + i\partial/\partial y\right)\mathscr{E}_1'' = \left(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\right)\mathscr{E}_3'' \end{cases}.$$

Решения этих уравнений найдены и проанализированы в работах [12]. Степень «двумерности» взаимодействия волн определяется параметром $\alpha = \frac{1}{2}\arctan[(a_2 b_1 - a_1 b_2)/(a_1 b_1 + a_2 b_2)]$, при $\alpha \to 0$ происходит переход к одномерной задаче. В сильных полях плотность плазмы может меняться вдоль магнитного поля, при этом интересным оказывается случай $\nabla\varepsilon_3 \parallel \mathbf{B}$. В этом случае, заменой $\mathscr{E}_{1,3}' = \mathscr{E}_{1,3}\exp[ik_0(a_1 x + a_2 y)z/2n]$ из уравнений исключаются поперечные координаты x, y, после чего задача становится одномерной.

В качестве другого примера рассмотрим двухосный кристалл, у которого $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_3$. В этом случае единственная возможность для поляризационного вырождения реализуется в условиях (е), причем данные условия можно выполнить только для $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_1$. В кристалле с постоянными направлениями оптических осей уравнения (16) принимают вид

$$\begin{cases} in\eta\,\partial\mathscr{E}_u/\partial x = \left(k_0\Delta_1 - 2in\,\partial/\partial z\right)\mathscr{E}_1 \\ in\eta\,\partial\mathscr{E}_1/\partial x = \left(k_0\Delta_u - 2in\,(\partial/\partial z - \eta'\,\partial/\partial y)\right)\mathscr{E}_u \end{cases},$$

где $\eta' = \eta\varepsilon_2\varepsilon_3/\varepsilon_1$. Разложив в окрестности линейного взаимодействия

$$k_0\Delta_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z,\ k_0\Delta_u = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

и выполнив замену

$$\mathscr{E}_{1,u}' = \mathscr{E}_{1,u}\exp[ix\xi/2n],\ \xi = (a_1 - b_1)y/\eta' + a_1 z,$$

из уравнений можно исключить координату x:

$$\begin{cases} \eta\left(\xi/2 + in\partial/\partial x\right)\mathscr{E}_u' = \left(a_2 y + a_3 z - 2in\partial/\partial z\right)\mathscr{E}_1' \\ \eta\left(\xi/2 + in\partial/\partial x\right)\mathscr{E}_1' = \left(b_2 y + b_3 z - 2in(\partial/\partial z - \eta'\,\partial/\partial y)\right)\mathscr{E}_u' \end{cases}.$$

Рассматривая эти уравнения для отдельной фурье-гармоники по x, можно привести их к следующему виду:

$$\begin{cases} z'\mathscr{E}_u' = \left(c_2 y' + c_3 z' - ic_2'\partial/\partial y' - ic_3'\partial/\partial z'\right)\mathscr{E}_1' \\ z'\mathscr{E}_1' = \left(d_2 y' + d_3 z' - id_2'\partial/\partial y' - id_3'\,\partial/\partial z'\right)\mathscr{E}_u' \end{cases}.$$

Здесь мы повернули оси координат так, что $z' = \xi / a_1$. Важно отметить, что при $\eta \neq 0$ дифференциальные операторы в приведенных уравнениях линейно независимы, то есть $w = c_2'd_3' - c_3'd_2' \neq 0$. Это позволяет заменой

$$\mathscr{E}_{1,u}'' = \mathscr{E}_{1,u}' \exp[i\,(c_2'd_2 - c_2d_2')\,y'z'/w + i\,(c_2d_3' - c_3'd_2)\,y'^2/2w]$$

исключить координату y' из уравнений:

$$\begin{cases} z'\mathscr{E}_u'' = \left(c_3''z' - ic_2'\partial/\partial y' - ic_3'\partial/\partial z'\right)\mathscr{E}_1'' \\ z'\mathscr{E}_1'' = \left(d_3''z' - id_2'\partial/\partial y' - id_3'\,\partial/\partial z'\right)\mathscr{E}_u'' \end{cases}.$$

Полученная система волновых уравнений описывает независимое распространение фурье-гармоник по y' в одномерно неоднородной среде. Таким образом, линейное взаимодействие волн в трехмерно неоднородном кристалле с постоянными направлениями оптических осей можно представить как одномерный процесс в некоторой эффективной плоскослоистой среде. Несмотря на одномерный характер, это взаимодействие не является «геометрооптическим», так как оно происходит на быстром масштабе $L/\sqrt{k_0L} << L$.

7. Заключение

Таким образом, мы убедились, что линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородной безграничной среде может проходить по двум сценариям. В случае одновременного вырождения анизопропии и гиротропии среды [случаи (a) и (d)] линейное взаимодействие волн реализуется на «медленном» масштабе, равном масштабу вариации параметров среды. Это можно описать как взаимодействие двух геометроопических мод, связанных скалярной константой (1). Поскольку взаимодействие происходит вдоль лучей, процесс конверсии волн носит одномерный характер. В окрестности резонансов среды [случаи (b) и (c)], а также в специальном случае поперечного распространения (e) реализуется сценарий быстрого взаимодействия волн – в этом случае конверсия происходит на мелком масштабе, на котором приближение геометрической оптики уже не работает. При этом в гиротропных средах как правило взаимодействие волн носит существенно неодномерный характер. В анизотропных средах без гиротропии взаимодействие волн всегда может быть описано как одномерный (на мелком масштабе) процесс в некоторой эффективной плоскослоистой среде.

Работа выполнена в рамках государственного контракта № 14.740.11.0607 с Министерством образования и науки РФ при поддержке РФФИ (гранты № 09-02-00972 и 10-02-00441).

Литература

[1] Железняков В В, Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *УФН* **141** 257 (1983).

[2] Ginzburg V L *J Phys USSR* **7** 289 (1943);
Гинзбург В Л *ЖЭТФ* **18** 487 (1948).

[3] Budden K G *Proc Roy Soc Lond A* **215** 215-233 (1952);
Budden K G *Lectures on Magnetoionic Theory*(London: Blackie,1964).

[4] Cairns R A and Lashmore-Davies C N *Phys. Fluids* **26** 1268 (1983);
Kaufman A N and Friedland L *Phys Lett A* **123** 387 (1987);
Friedland L and Kaufman A N *Phys Fluids* **30** 3050 (1987);
Friedland L, Goldner G, Kaufman A N *Phys Rev Lett A* **58** 1392 (1987);
Железняков В В *ЖЭТФ* **73** 560 (1977).

[5] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика, нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989).

[6] Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (Москва: Наука, 1961)

[7] Железняков В В, *Излучение в Астрофизической плазме* (Москва: Янус-К, 1997).

[8] Littlejohn R G, Flynn W G *Chaos* **2** 149 (1992);
Tracy E R, Kaufman A N *Phys. Rev. E* **48** 2196 (1993);
Tracy E R, Kaufman A N, Brizard A J *Phys. Plasmas* **10** 2147 (2003);
Nassiri-Mofakham N, Sabzevari B, *J. Plas. Phys.* **72** 71 (2006);
Tracy E R, Kaufman A N, Jaun A, *Phys. Plasmas* **14**, 082102 (2007).

[9] Shalashov A G, Gospodchikov E D *Physical Review E* **78** 065602(R) (2008).

[10] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (Москва: Наука, 2005).

[11] Weitzner H *Phys. Plasmas* **11** 866 (2004).

[12] Gospodchikov E D, Shalashov A G and Suvorov E V *Plasma Phys. Contr. Fusion* **48** 869 (2006);
Shalashov A G, Gospodchikov E D and Suvorov E V *JETP* **103** 480 (2006);
Gospodchikov E D, Shalashov A G and Suvorov E V *Fusion Science and Technology* **53** 261 (2008).

[13] Popov A Yu and Piliya A D *Plasma Phys. Rep.* **33** 109 (2007);
Popov A Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** 1599 (2007);
Popov A Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 035008 (2010).

[14] Shalashov A.G, Gospodchikov E D *Plasma Phys. Contr. Fusion* **52** 115001 (2010).

Таблица 1. Условия поляризационного вырождения в представлениях собственных поляризаций среды и главных оптических осей. Заметим, что в ряде случаев в правой колонке таблицы (представление главных оптических осей) встречаются величины без «штрихов», соответствующие представлению собственных поляризаций среды. Это означает, что указанные величины совпадают в обоих представлениях. Это возможно либо при $\mathbf{g} = 0$, когда оба представления полностью тождественны, либо при $\mathbf{g} \parallel \mathbf{e}'_i$, когда совпадают орты $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$.

Случай	Представление собственных поляризаций среды	Представление главных оптических осей
(a)	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \; \varepsilon_i \neq 0, \; \varepsilon_j = \varepsilon_k$	$\mathbf{g} \to 0, \; \mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \quad \varepsilon_i \neq 0, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_k$
(b)	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \; \varepsilon_i = 0, \; \varepsilon_j \neq \varepsilon_k$	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}'_i \parallel \mathbf{g}, \; \varepsilon_i = 0, \quad \left(n^2 - \varepsilon'_j\right)\left(n^2 - \varepsilon'_k\right) = g^2$
(c)	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \; \varepsilon_i = 0, \; \varepsilon_j = \varepsilon_k$	$\mathbf{g} \to 0, \quad \mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \quad \varepsilon_i = 0, \; \varepsilon_j = \varepsilon_k$
(d)	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$	$\mathbf{g} \to 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$
(e)	$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i, \quad \varepsilon_i = \dfrac{\varepsilon_j \varepsilon_k}{\varepsilon_j \mid \kappa_j \mid^2 + \varepsilon_k \mid \kappa_k \mid^2}$	$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}'_i, \quad \mathbf{k} \perp \hat{\varepsilon}' \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \perp \mathbf{e}'_i,$ $\varepsilon'_i = \dfrac{G_j^2}{\varepsilon'_k} + \dfrac{G_k^2}{\varepsilon'_j} + \dfrac{\varepsilon'^2_j G_j^2 + \varepsilon'^2_k G_k^2}{\varepsilon'_j G_j^2 + \varepsilon'_k G_k^2}$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{g}, \; \mathbf{g} \perp \mathbf{e}'_i, \; \varepsilon'_j = \varepsilon'_k, \; \varepsilon'_i - \varepsilon'_j = G_j^2 / \varepsilon'_j \kappa_j^2$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i \in \mathrm{R}, \quad \mathbf{g} \parallel \mathbf{e}'_i, \quad \varepsilon_i = \dfrac{\varepsilon'_j \varepsilon'_k - g^2}{\varepsilon'_j \kappa'^2_j + \varepsilon'_k \kappa'^2_k}$

On a structure of the Maxwell equations in the region of linear coupling of electromagnetic waves in weakly ingomogeneous anisotropic and gyrotropic media

A.G. Shalashov and E.D. Gospodchikov

Institute of Applied Physics of Russian Academy of Sciences
Ulyanova street 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

Abstract

Linear interaction of electromagnetic waves in weakly inhomogeneous media is considered as manifestation of the polarisation degeneracy of the Maxwell equations. It is shown that the condition of polarisation degeneracy of two nowmal waves implies strong constraints on elements of a dielectric tensor in a vicinity of the interaction region. This allows formulating of universal (not dependent on a particular model of a linear medium) classification for possible types of linear wave coupling and corresponded wave equations.

Tel. +7 831 4160623
Fax. +7 831 4160616
e-mails: ags@appl.sci-nnov.ru, eggos@mail.ru

Автореферат

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 52.35.Hr

О структуре уравнений Максвелла в области линейного взаимодействия электромагнитных волн в плавнонеоднородных анизотропных и гиротропных средах

А. Г. Шалашов, Е. Д. Господчиков

Линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородных средах рассматривается как проявление поляризационного вырождения решений уравнений Максвелла. Выяснено, что само наличие поляризационного вырождения двух нормальных волн накладывает сильные ограничения на компоненты диэлектрического тензора среды в области эффективного взаимодействия. Это позволило дать универсальную классификацию возможных типов взаимодействия волн и соответствующих волновых уравнений, не зависящую от конкретной модели линейной среды. Показано, что линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородной безграничной среде может проходить по двум сценариям. В случае одновременного вырождения анизопропии и гиротропии среды линейное взаимодействие волн реализуется на «медленном» масштабе, равном масштабу вариации параметров среды. Это можно описать как взаимодействие двух геометрооптических мод, связанных скалярной константой. Поскольку взаимодействие происходит вдоль лучей, процесс конверсии волн носит одномерный характер. В окрестности резонансов среды, а также в специальном случае «поперечного» распространения реализуется сценарий быстрого взаимодействия волн – в этом случае конверсия происходит на мелком масштабе, на котором приближение геометрической оптики не работает. При этом взаимодействие носит существенно неодномерный характер.