Российская академия наук
Институт прикладной физики

Квантовые состояния света в модели гармонического осциллятора

Т.Р. Ахмеджанов, В.А. Миронов

Нижний Новгород – 2011

Для исследования особенностей квантовых состояний света в модели квантового гармонического осциллятора использованы инвариантные преобразования уравнения Шредингера. Получены решения, отвечающие когерентному и сжатому состояниям света, определена статистика этих состояний. Продемонстрирована возможность получения сжатых когерентных состояний света. Описано возбуждение неклассических состояний света при резонансном воздействии на систему. Рассмотренные процедуры были обобщены на случай двумерного и трехмерного осцилляторов. Обсуждена возможность получения перепутанных состояний для неодномерных задач.

QUANTIM LIGHT IN HARMONIC OSCILLATOR MODEL

T.R. Akhmedzhanov, V.A. Mironov

With the usage of invariant transformations solutions of Schrödinger equation which corresponds to the coherent and squeezed light state were found. Their spectra were calculated. Squeezed coherent state solutions could be also found. Opportunity to excite squeezed coherent states of system in case of resonant field acting on system was demonstrated. These ideas were generalized on the case of two- and three-dimensional system. The specific of more than one dimension situation is an opportunity to get entangled states.

Рецензент д.ф.-м.н. Сатанин А.М.

1. Введение

Гармонический осциллятор является одной из наиболее распространенных моделей в физике. Использование этой модели дает возможность сделать достаточно общие выводы относительно динамики поведения различных (электрических, механических, магнитных и т.д.) систем. Благодаря линейности уравнений Максвелла электромагнитное поле в вакууме можно рассматривать как набор гармонических осцилляторов.

Новые возможности открываются при переходе к квантовомеханическому описанию динамики системы. В оптическом резонаторе удается возбудить практически одну моду поля. Математическое описание динамики квантовой системы основано на уравнении Шредингера. В случае одномерного осциллятора оно имеет следующий вид:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\omega^2}{4}x^2\psi=0 \tag{1.1}$$

Это уравнение в безразмерном виде ($\frac{\hbar}{2m}=1$) широко используется и в классической физике для описания пространственно-временной эволюции волновых пакетов и волновых пучков среде с неоднородным (параболическим) распределением показателя преломления. В квазиоптике эволюция волнового поля рассматривается в продольном (ортогональном к x) направлении z ($t\to z$). Она определяется конкуренцией дифракции и рефракции в неоднородной среде. В квантовой физике роль дифракции играет квантовая дисперсия (обусловленная вторым слагаемым в (1.1)).

Масштабная инвариантность уравнения (1.1) (оно не меняет своего вида при замене $x\to\lambda x$) позволяет записать его в представленном виде (1.1). Коэффициенты выбраны таким образом, чтобы движение центра масс волнового пакета (траектория центрального луча в квазиоптике) $\bar{x}=\int x|\psi|^2dx$ в параболическом потенциале описывалась уравнением осциллятора

$$\ddot{\bar{x}}+\omega^2\bar{x}=0 \tag{1.2}$$

Точкой сверху над средней координатой в уравнении (1.2) обозначена производная $\dot{\bar{x}}=\frac{d\bar{x}}{dt}$. Решение (1.2) при $\omega(t)=\omega_0=const$ можно записать так:

$$\bar{x}=\bar{x}_0\cos(\omega t+\varphi) \tag{1.3}$$

Успешное исследование модели гармонического осциллятора в квантовой физике, по существу, связано с тем, что гамильтониан системы является квадратичной функцией по каноническим переменным. Соответствующие динамические симметрии уравнения (1.1) рассмотрены в [1,2]. Групповой подход также привел к заметному прогрессу в исследовании нестационарных квантовых процессов.

Следует отметить, что в квантовой физике имеется возможность описания процессов в гейзенберговском представлении. В случае классических распределенных волновых систем «гейзенберговский» подход к исследованию уравнения для лучевых траекторий используется лишь в ограниченном виде. В этом подходе в отличие от волнового подхода не удается описать такие важные эффекты, как дифракционное расплывание волнового пакета.

Преимущество волнового подхода связано как с возможностью взаимного идейного обогащения при переносе результатов из одного раздела физики в другой, так и простого модельного обобщения на еще более широкий класс нелинейных систем. Наряду с практическими приложениями нелинейной оптики, здесь, в первую очередь, следует отметить активные исследования локализованного в ловушке бозе-конденсата с помощью нелинейного уравнения Шредингера в параболической потенциальной яме, квантовых солитонов [3,4].

Имеются различия и в постановке задачи в классической и квантовой физике в рамках уравнения (1.1). При исследовании эволюции классического волнового поля решение уравнения (1.1) определяется в соответствии с заданным начальным распределением поля $\psi(x,0)=\psi_0(x)$. В квантовой физике в начальный момент система, как правило, находится в одном из собственных состояний и, следовательно, является собственной функцией гамильтониана. Интерес представляют вероятности нахождения системы в собственных состояниях по истечении времени t.

В рамках предлагаемой работы построен, используя волновой подход, широкий класс динамических решений неодномерного уравнения Шредингера с потенциалом параболического типа. В одномерном случае решения описывают модулированные по ширине волновые пакеты с нестационарной фазой. В квантовой оптике структуры такого типа относятся к фундаментальным состояниям света (когерентному состоянию, сжатому состоянию и т.д.). В параграфе 2 с помощью инвариантных преобразований уравнения (1.1) построены соответствующие решения. Рассмотрено возбуждение этих состояний. Особенности решений двумерного и трехмерного квантового гармонического осциллятора, связанные с возможностью возникновения перепутанного состояния системы, исследованы в параграфе 3.

2. Квантовые состояния в одномерном случае

Наличие инвариантных преобразований (преобразований, не меняющих вида дифференциального уравнения) дает возможность не только сделать общие выводы о динамике системы, но и получить новые решения на основе известных [5,6]. Воспользуемся этим в приложении к уравнению (1.1).

2.1. Инвариантные преобразования. Состояния поля

Рассмотрим уравнение (1.1) при $\omega(t) = \omega_0 = const$. Соответствующая ему функция Лагранжа инвариантна относительно «сдвига» по времени $t \to t + t_0$. Это приводит к сохранению в процессе эволюции системы следующего интегрального соотношения

$$H = \int \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \frac{\omega_0^2}{4} |\psi|^2 \, x^2 \right) dx = const, \tag{2.1}$$

которое в теории волновых систем называется гамильтонианом.

В свою очередь соотношение (1.1) позволяет получить простое уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{x^2} + 4\omega_0^2 \overline{x^2} = 8H \tag{2.2}$$

для второго момента волнового поля $\overline{x^2} = \int x^2 |\psi|^2 dx$. Аналогичное уравнение можно найти для дисперсии волнового пакета $D = \overline{(x - \bar{x})^2}$, центр масс которого движется по классической траектории $\bar{x} = \bar{x}_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Преобразуя (2.2), приходим к следующему уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} D + 4\omega_0^2 D = 8H - 4E, \tag{2.3}$$

где $E = (\dot{\bar{x}}^2 + \omega_0^2 \bar{x}^2)/2$ - энергия классического движения центра масс. Таким образом, дисперсия волновой функции меняется с удвоенной частотой $2\omega_0$ и амплитудой, определяемой, фактически, разностью (см. правую часть выражения (2.3)) энергий классического и «квантового» движений.

2.2 Когерентное состояние поля

Рассмотрим далее когерентные состояния поля. Локализованное около классической траектории $\bar{x}(t)$ решение исходного уравнения (1.1) имеет вид

$$\psi = \phi(\xi, t) \exp(i\varphi_1 \xi + i\varphi_0(t)) \tag{2.4}$$

где $\xi = x - \bar{x}(t)$. Подбирая функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_0(t)$, нетрудно получить, что поведение волновой функции ϕ описывается тем же самым уравнением (1.1) в новых переменных

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \frac{\omega^2(t)}{4}\xi^2\phi = 0 \qquad (2.5)$$

при $\varphi_1 = \dot{\bar{x}}/2$, $\dot{\varphi}_0 = -\frac{\dot{\bar{x}}^2}{4} + \frac{\omega^2(t)}{4}\bar{x}^2$.

Рассмотренное преобразование $(t,x) \to (t,\xi(x,t))$ сохраняет неизменным модуль волнового поля $|\psi| = |\phi|$. В этом смысле (с точностью до фазы волнового поля) можно сказать, что уравнение (1.1) инвариантно относительно перехода в «осциллирующую» систему координат, определяемую уравнением (1.3).

Для иллюстрации выберем стационарное решение уравнения (2.5) соответствующее основному состоянию квантового осциллятора ($\omega(t) = \omega_0 = const$). В результате получим волновую функцию в исходных переменных

$$\psi = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{4}(x-\bar{x}_0)^2 + i\varphi(t)(x-\bar{x}_0) + i\varphi_0\right) \qquad (2.6)$$

где $\bar{x}_0 = x_0\cos(\omega_0 t)$ - решение (1.2) при $\omega(t) = \omega_0 = const$.

В квазиоптике это решение описывает хорошо известную структуру дифракционного волнового поля, локализованного однородно вблизи центрального (опорного) луча на трассе распространения.

В квантовой теории выражение (2.6) представляет собой волновую функцию когерентного состояния. В этом можно убедиться, если переписать (2.6) в виде

$$\psi \sim \exp\left[-\frac{\omega_0^2}{4}(x-z)^2\right], \qquad (2.7)$$

где z - комплексное число, зависящее от t как от параметра, с реальной частью $\operatorname{Re} z = \bar{x}_0$. Видно, что (2.7) является решением уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_0}{2}x\right)\psi = \frac{\omega_0}{2}z\psi, \qquad (2.8)$$

т.е. является собственной функцией оператора уничтожения ($\hat{a} = \frac{\omega}{2}\hat{x} + i\hat{p}$, $\hat{x}$ и $\hat{p}$ - операторы координаты и импульса) в рассматриваемом шредингеровском представлении при собственном значении пропорциональном z. Именно это соотношение (2.8) в операторном виде используется в квантовой оптике для определения когерентных состояний системы.

Заметим, что когерентное состояние может быть реализовано, например, при генерации лазером с идеальной амплитудной стабилизацией, работающим в режиме существенно превышающем порог возбуждения [7]. В этом случае ψ в (2.8) следует рассматривать как волновую функцию фотона. Пусть x соответствует векторному потенциалу электромагнитного поля $\vec{A}$, тогда среднее (классическое) значение $\vec{A} = \bar{x} = x_0 \cos(\omega_0 t)$ совершает гармонические колебания. Электрическое поле $\vec{E} \sim \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ и, следовательно, является переменной канонически сопряженной $x = \vec{A}$. Для нахождения средней напряженности электрического поля $\vec{E}$ следует вычислить среднее значение оператора «импульса» $\left(\hat{p} = -i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$. В результате получаем $\bar{E} = \varphi = \dot{\bar{x}}/2$. Таким образом, величина φ в (2.4), определяющая линейную коррекцию фазы, которая появляется при переходе в осциллирующую систему координат, соответствует классическому электрическому полю.

Гамильтониан когерентного состояния системы

$$H_k = H_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\bar{x}}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{\bar{x}^2}{2}\right) \tag{2.9}$$

больше гамильтониана в осциллирующей системе координат (для уравнения (2.5)) на величину, равную половине «механической» энергии центра масс волнового поля. Видно при достаточно большой амплитуде колебаний вклад классической части (второе слагаемое (2.9)) в гамильтониане может быть основным. Поведение системы в динамическом режиме определяется дисперсионной частью гамильтониана, т.е. H_0.

Имеется и более тонкая характеристика когерентного состояния. Разложим волновую функцию (2.6) по стационарным волновым функциям квантового гармонического осциллятора (2.1) (собственным функциям гамильтониана) с частотой ω_0

$$\psi_n = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(H_n\left(\sqrt{\omega_0 / 2x}\right) / \left(2^n n!\right)^{\frac{1}{2}} \right) \exp\left(-\frac{\omega_0}{4} x^2\right), \tag{2.10}$$

где $H_n(x)$ - полином Эрмита.

Вычисляя скалярное произведение $c_n = \int \psi_n^* \psi_n dx$, для вероятности нахождения частицы на *n*-ом уровне нетрудно получить выражение

$$|c_n|^2 = \frac{1}{n!} E^n \exp(-E), \tag{2.11}$$

которое соответствует пуассоновскому распределению для когерентных состояний. Величина $E = (x_0^2 \omega_0^2 + \dot{x}_0^2)/4\omega_0$ пропорциональна числу квантов N в энергии классического движения. Таким образом, число «мод», формирующих когерентное состояние системы порядка N. Это связано с особенностью пуассоновского распределения, для которого среднее значение равно дисперсии. Исследование распределения фотоотсчетов показывает [7,8], что излучение лазера в сильно надпороговом режиме имеет пуассоновскую статистику.

2.3 Сжатое состояние света

Можно построить и другое (еще одно) динамическое решение уравнения для квантового осциллятора (1.1). Рассмотрим решение автомодельного типа

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{a(t)}} S\left(\frac{x}{a}\right) \exp\left(-i\frac{a_t}{4a}x^2\right), \tag{2.12}$$

где $a_t = \dfrac{da}{dt}$. Проделав необходимы преобразования, нетрудно убедиться в следующем. Если ширина волнового поля определяется уравнением

$$a_{tt} + \omega^2(t) a = \frac{\Omega^2}{a^3}, \tag{2.13}$$

то уравнение для автомодельной функции принимает вид

$$iS_t + \frac{1}{a^2} S_{\eta\eta} - \frac{\Omega^2}{4a^2}\eta^2 S = 0, \tag{2.14}$$

где $\eta = x/a(t)$. Это уравнение (2.14) преобразуется к исходному уравнению (1.1) осциллятора с новой частотой

$$iS_\tau + S_{\eta\eta} - \frac{\Omega^2}{4}\eta^2 S = 0, \tag{2.15}$$

в котором время τ определяется соотношением $d\tau = dt/a^2$.

Заметим, что в системе уравнений (2.13) и (2.14), описывающих динамику «гофрированных» волновых пакетов, Ω является свободным параметром. Таким образом, выбирая $\Omega = const$, задача сводится к исследованию эволюции волнового поля в стационарной среде. Для $\Omega = const$ переход к автомодельным переменным сопровождается повышением симметрии рассматриваемой системы: уравнение (2.15) инвариантно относительно сдвига времени ($\tau \to \tau + \tau_0$), а при $\Omega = 0$ еще и трансляции в пространстве ($\eta \to \eta + \eta_0$). Однородность по τ лагранжиана уравнения (2.15) приводит к сохранению в процессе эволюции системы интегрального соотношения типа (2.1). Это означает, что для рассматриваемого автомодельного (частного) решения исходного уравнения (1.1) с нестационарным потенциалом оно имеет интегральный инвариант аналогичного вида.

Преобразование (2.12) довольно хорошо известно в теории волновых процессов. В квазиоптике его называют линзовым преобразованием, поскольку при $\Omega = 0$ оно устанавливает соответствие между решением исходного уравнения (1.1) в вакууме и линзоподобной среде. В приложении к квантовой теории поля его называют конформным преобразованием.

С целью иллюстрации особенностей автомодельного решения уравнения (2.15), рассмотрим для простоты случай преобразования (2.12), (2.13) без изменения частоты $\omega(t) = \omega_0 = \Omega$. Используя стационарное решение уравнения (2.15), соответствующее основному состоянию квантового осциллятора, найдем соответствующую динамическую волновую функцию

$$\psi = \left(\frac{\omega_0}{2\pi a^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{4} \frac{x^2}{a^2} - i \frac{a_t}{4a} x^2 \right). \tag{2.16}$$

Решение нелинейного уравнения (2.13) для ширины волнового пакета a(t) удается представить (см., например, [9]) в виде

$$a = \left(u^2 + \frac{\Omega^2 v^2}{w^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

где u и v – два линейно независимых решения уравнения типа (1.2) с начальными условиями $u(0) = A$, $\dot{u}(0) = B$, $v(0) = 0$, $v(0) \neq 0$, вронскиан $w = u\dot{v} - \dot{u}v = const$. В рассматриваемом случае $\omega_0 = \Omega$ решение (2.17) удобно записать следующим образом

$$a = \sqrt[4]{K} \left(\cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{K} \sin^2 \omega_0 t \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Приведенное решение соответствует начальному условию $a(t = 0) = \sqrt[4]{K}$, $a_t(t = 0) = 0$, т.е. первоначально плоскому фазовому фронту волновой функции ψ. Оно описывает периодическое изменение ширины волнового пакета в интервале от $a(t=0)=a_{\max}=\sqrt[4]{K}$ до $a\left(t=\pi/2\omega_0\right)=a_{\min}=1/\sqrt[4]{K}$. Таким образом, параметр $K=\left(\frac{a_{\max}}{a_{\min}}\right)^2$ характеризует модуляцию дисперсии амплитуды волновой функции (в случае однородного по ширине волнового пакета $K=1$. Величину K называют коэффициентом сжатия.

Отметим, что решение (2.18) для дисперсии волновой функции $D=a^2$ удовлетворяет уравнению (2.3) в рассматриваемом случае (т.е. (2.1) уравнению (2.2)) при гамильтониане (2.1), равном

$$H=\frac{1+K}{2\sqrt{K}}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим распространение гофрированных волновых пучков в среде с неоднородным (в поперечном направлении) распределением показателя преломления среды. В параболическом профиле период колебаний ширины (фокусировки и последующей расфокусировки) не зависит от амплитуды (несмотря на то, что уравнение (2.13) нелинейно) и в два раза меньше периода колебаний центра масс. При $K=1$ соответствующее решение описывает однородный волновой пучок, в котором дифракционное расплывание скомпенсировано рефракцией в неоднородной среде. Для более широких волновых пакетов ($K>1$) дифракционные эффекты (эффекты квантовой дисперсии) уменьшаются и они первоначально фокусируются. Минимальный размер локализации волнового поля определяется параметрами задачи и может оказаться довольно малым ($\sim 1/\sqrt{K}$) для «широких» волновых пучков ($K\gg 1$).

В квантовой оптике (для осциллятора поля) такие состояния называют сжатым вакуумом. Оно описывается собственной функцией оператора $\mu(t)\hat{a}+\nu(t)\hat{a}^{+}$ для комплексных функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ при условии $|\mu|^2-|\nu|^2=1$[8]. Учитывая, что волновая функция (2.16) является решением уравнения $\frac{\partial\psi}{\partial x}+\left(\frac{\Omega}{2a^2}+i\frac{a_t}{2a}\right)x\psi=0$, в координатном представлении операторов рождения $\hat{a}^{+}$ и уничтожения $\hat{a}$ нетрудно подобрать соответствующие функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ [10]. Из-за громоздкости этих выражений мы не будем их приводить. Как будет видно далее, проще работать в волновом подходе, используя преобразование сжатия (2.12). Зависимость дисперсии сжатого состояния (2.18) от времени является основной динамической характеристикой процесса. Именно она наиболее просто измеряется экспериментально. В отличие от вакуумного (основного) состояния квантового осциллятора сжатое состояние является динамическим. При увеличении коэффициента сжатия гамильтониан системы (2.19) возрастает. При больших K ($K \gg 1$) он увеличивается пропорционально $\sqrt{K}$.

Более детальное представление о структуре волнового поля в состоянии сжатого вакуума можно получить, если разложить динамическую волновую функцию (2.16) по стационарным волновым функциям (собственным функциям гамильтониана) (2.10) квантового осциллятора. В результате, в силу четности (2.16), для вероятности нахождения частицы на 2n-ом уровне находим

$$\left|C_{2n}\right|^2 = \frac{2(2n!)}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}+1}\right)^{2n}\frac{\sqrt[4]{K}}{\left(\sqrt{K}+1\right)}. \qquad (2.20)$$

При больших коэффициентах сжатия ($K \gg 1$) применение формулы Стирлинга для $n!$ позволяет записать (2.20) в более простом виде

$$\left|C_{2n}\right|^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{K}\sqrt{\pi n}}\exp\left(-\frac{4n}{\sqrt{K}}\right). \qquad (2.21)$$

Таким образом, число «мод», формирующих состояние сжатого вакуума порядка $n \approx \sqrt{K}/4$. Видно, что обогащение «спектрального» состава происходит довольно медленно с возрастанием коэффициента сжатия K (n ~ $\sqrt{K}$).

2.4 Сжатые когерентные состояния света

Последовательно применение рассмотренных выше инвариантных преобразований (перехода в осциллирующую систему координат (2.4) и сжатия (2.12)) позволяет построить новые динамические решения уравнения Шредингера (1.1). По существу, с точностью до переобозначений к тому же самому решению приведет и использование этих преобразований в обратном порядке (сначала сжатие, затем переход в осциллирующую систему координат)[8, 9]. В результате приходим к состояниям света, которые относятся к сжатым когерентным состояниям.

2.5 Возбуждение квантовых состояний света

Имеется заметное различие в постановке задачи возбуждения поля в классическом и квантовом случаях. В классике сторонние источники вводят в правую часть уравнения (1.1). В рамках квазиоптического приближения задачу возбуждения поля можно свести к заданию распределения комплексной функции на плоскости z=0. В квантовой физике «силовое» воздействие на систему описывается введением дополнительного потенциала (скалярного или векторного) в уравнении (1.1).

Очевидно, что возбуждение наиболее эффективно при резонансном воздействии на систему. Проведенное выше исследование показало, что рассматриваемая система имеет две характерные частоты: частота осциллятора ω_0 и частота колебаний дисперсии $2\omega_0$.

Для исследования возбуждения когерентного состояния света добавим в (1.1) нестационарный потенциал $U_0=Fx\cos\omega_0 t$. В результате уравнение для движения центра масс (1.2) примет вид

$$\ddot{\bar{x}} + \omega_0^2 \bar{x} = F\cos\omega_0 t. \qquad (2.24)$$

Оно описывает резонансное возбуждение колебаний на частоте ω_0. В случае системы, находящейся в вакуумном состоянии при t=0, это означает, что амплитуда колебаний центра масс волнового пакета гауссовой формы будет возрастать по линейному закону, дисперсия остается неизменной (как в вакуумном состоянии).

Для исследования возбуждения сжатого вакуумного состояния, дисперсия которого меняется на удвоенной частоте, используем явление параметрического резонанса. Положим в уравнение (1.1)

$$\omega^2 = \omega_0^2(1+\varepsilon\cos(\Omega t)) \;, \qquad (2.25)$$

где $\varepsilon<<1$, ω_0 - средняя частота осциллятора. Подобное «силовое» воздействие моделирует ситуацию, которая имеет место, например, в современной вакуумной электронике при квантовом рассмотрении поведения электронного потока в электрическом или магнитном виглере (периодически неоднородном в пространстве). В квантовой оптике (2.25) описывает влияние дополнительного классического поля на частоте Ω на процессы в системе. Мы уже отмечали выше, что автомодельное преобразование

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{a(t)}} S\left(\frac{x}{a}\right)\exp\left(-i\frac{a_t}{4a}x^2\right) \qquad (2.26)$$

позволяет свести уравнение Шредингера (1.1) с произвольной зависимостью $\omega(t)$ к уравнению с потенциалом, не зависящем от времени

$$iS_\tau + S_{\eta\eta} - \frac{\Omega^2}{4}\eta^2 S = 0, \qquad (2.27)$$

в котором $\eta=x/a(t)$, $\tau=\int dt/a^2$. В рассматриваемом нами случае (2.25) уравнение (2.13) для ширины волнового поля a(t) имеет вид

$$a'' + \omega_0^2(1+\varepsilon\cos(\Omega t))a = \omega_0^2 / a^3. \qquad (2.28)$$

Представим решение этого уравнения (2.28) как и выше $a^2 = u^2 + \omega_0^2 v^2$ через линейно независимые решения линейного уравнения

$$y'' + \omega_0^2(1+\varepsilon\cos(\Omega t))y = 0 \qquad (2.29)$$

с теми же начальными условиями $u(0)=1$, $u'(0)=0$, $v(0)=0$, $v'(0)=1$. Отсюда в условиях параметрического резонанса $\Omega = 2\omega_0$ находим

$$a = \left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\exp(-4\gamma t)\right)^{\frac{1}{2}} \exp(\gamma t), \tag{2.30}$$

где инкремент параметрической неустойчивости равен $\gamma = \dfrac{\omega_0 \varepsilon}{4}$ ($\gamma << \omega$). Для волновой функции, соответствующей основному состоянию квантового гармонического осциллятора (2.27) волновая функция (2.26) представляет собой обобщение (2.16) на случай нестационарного потенциала. Полученное решение описывает возбуждение состояния сжатого вакуума. Дисперсия (2.30) волновой функции (2.26) меняется два раза за период от максимального значения $a_{\max}^2 = \exp(2\gamma t)$ до минимального $a_{\min}^2 = \exp(-2\gamma t)$. Коэффициент сжатия

$$K = \frac{q_{\max}}{q_{\min}} = \exp(\omega_0 \varepsilon t) \tag{2.31}$$

растет со временем экспоненциально.

Аналогичным образом могут быть исследованы и резонансы на частотах $\Omega = {2\omega_0}/{n}$, где n – любое целое число. При этом показатель усиления при n>1 будет более низким [11].

3. Квантовые состояния в неодномерном случае

В этом разделе мы обобщим используемый подход для исследования особенностей эволюции неодномерных (двумерных и трехмерных) квантовых систем.

3.1 Двумерный осциллятор

Для описания квантовомеханической системы двух осцилляторов воспользуемся следующим уравнением:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\omega^2}{4}\left(x^2 + y^2\right)\psi = 0 \tag{3.1}$$

Поведение центра масс волнового пакета $\overline{\vec{r}} = \int \vec{r}\,|\psi|^2\,dxdy$ определяется соотношением

$$\ddot{\overline{\vec{r}}} + \omega_0^2 \overline{\vec{r}} = 0 \tag{3.2}$$

Это означает, что движение центра масс происходит в плоскости xy с частотой ω_0. Имеются следующие интегральные соотношения

$$\varepsilon_1 = \int \left(|\nabla_x \psi|^2 + \frac{\omega_0^2}{4} x^2 \right) |\psi|^2\, dxdy, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_2 = \int \left(\left| \nabla_y \psi \right|^2 + \frac{\omega_0^2}{4} y^2 \right) \left| \psi \right|^2 dxdy, \tag{3.4}$$

$$M = \int \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \psi^* dxdy, \tag{3.5}$$

$$A = \int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - xy \left| \psi \right|^2 \right) dxdy. \tag{3.6}$$

Они представляют собой законы сохранения энергии в направлениях x (3.3) и y (3.4), момента (3.5) и аналог интеграла Рунге-Ленца для кулоновской системы (3.6). В силу важности этих соотношений для исследования поляризации рассматриваемых состояний получим их в гейзенберговском представлении. Соответствующая система уравнений для операторов канонически сопряженных переменных имеет вид

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{p}_1, \ \dot{\hat{p}}_1 = -\omega_0^2 \hat{x}_1, \tag{3.7}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{p}_2, \ \dot{\hat{p}}_2 = -\omega_0^2 \hat{x}_2. \tag{3.8}$$

Отсюда, как и в классическом случае, можно найти интегралы движения (3.3)-(3.6), записанные в операторном виде:

$$\hat{p}_1^2 + \omega_0^2 \hat{x}_1^2 = \hat{\varepsilon}_1, \ \hat{p}_2^2 + \omega_0^2 \hat{x}_2^2 = \hat{\varepsilon}_2, \tag{3.9}$$

$$\hat{x}_1 \hat{p}_2 - \hat{x}_2 \hat{p}_1 = \hat{M}, \tag{3.10}$$

$$\hat{p}_1 \hat{p}_2 - \hat{x}_1 \hat{x}_2 = \hat{A}. \tag{3.11}$$

На основе (3.9) можно ввести оператор разности числа квантов колебаний в ортогональных направлениях $x = x_1$ и $y = x_2$

$$N = \hat{\varepsilon}_1 - \hat{\varepsilon}_2 \tag{3.12}$$

Операторы $\hat{N}$, $\hat{M}$, $\hat{A}$ образуют оператор псевдоспина $\hat{\vec{P}}(\hat{N}, \hat{M}, \hat{A})$, который используют для определения поляризации системы. Соотношения (3.12), (3.5), (3.6) представляют собой обобщение на квантовый случай хорошо известных в классической физике параметров Стокса.

Используя метод разделения переменных и инвариантные преобразования для каждой из переменных, можно найти соответствующие решения (3.1). Здесь имеется и широкий класс класс вихревых решений с $M \neq 0$ [12]. Далее мы более подробно остановимся на другом типе решения, который не записывается в разделяющихся переменных и описывает перепутанные состояния системы. В последующих разделах мы рассмотрим возбуждение перепутанных состояний и их свойства.

3.2 Перепутанные состояния

Для нахождения соответствующего решения уравнения (3.1) поступим следующим образом. Перейдем к новым переменным

$$x = \frac{\varsigma + \eta}{\sqrt{2}}, \ y = \frac{\varsigma - \eta}{\sqrt{2}}, \tag{3.13}$$

сохраняющим вид уравнения (2.32)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varsigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\omega^2}{4}\left(\varsigma^2 + \eta^2\right)\psi = 0. \tag{3.14}$$

Для иллюстрации способа построения решения воспользуемся методом разделения переменных. Рассмотрим следующее решение уравнения (3.14):

$$\psi \sim \eta \exp\left(-\frac{\varsigma^2 + \eta^2}{2}\right). \tag{3.15}$$

Оно описывает основное состояние по ς и первое возбужденное состояние по η. Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\psi \sim x \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) - y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \tag{3.16}$$

Переписывая (3.16) в дираковских обозначениях, находим, что оно имеет вид одного из белловских состояний

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle - \left|0\right\rangle\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{3.17}$$

Состояние (3.17) является хорошо известным примером запутанного состояния. По способу построения оно является чистым. Однако, если взять след от его оператора плотности по, например, второму элементу:

$$\rho_1 = tr_2(\rho) = tr_2\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Как легко видеть $tr(\rho_1^2) < 1$, что, и является критерием перепутанности состояния. Это странное свойство – существование такого состояния всей системы, которое нам известно точно, при том, что ее составная часть находится в смешанном состоянии, является отличительным признаком квантового запутывания [13].

В квантовой оптике используется иногда другая запись:

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{\left|H\right\rangle\left|V\right\rangle - \left|V\right\rangle\left|H\right\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{3.19}$$

где $\left|H\right\rangle$ и $\left|V\right\rangle$ описывают горизонтальные и вертикальные состояния системы.

Отметим, что перепутанное состояние (3.19) может быть «распутано» с помощью обратного преобразования

$$\varsigma = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}}. \qquad (3.20)$$

Исследование поляризации перепутанного состояния (3.17) на основе оператора псевдоспина показывает, что компоненты его равны нулю ($\hat{A}=0$, $\hat{M}=0$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2$). Такое состояние системы является скалярным. Оно описывает скалярный свет. В общей постановке исследование поляризации системы двух фотонов проведено в [14].

3.3 Возбуждение двумерного перепутанного состояния

Для создания перепутанного состояния фотонов используется параметрический процесс вниз-конверсии, в котором один фотон накачки на удвоенной частоте распадается в нелинейной среде на два фотона более низких частот. Рассмотрение особенностей можно проиллюстрировать на основе уравнения (3.1), добавив в него внешнее потенциальное поле на удвоенной частоте. В результате приходим к уравнению

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - \left(\frac{\omega_0^2}{4}(x^2+y^2) + \varepsilon xy\cos 2\omega_0 t\right)\psi = 0, \qquad (3.21)$$

где ε описывает амплитуду накачки на второй гармонике ω_0.

Перейдем, как и выше, к новым переменным (3.13), получим уравнение в разделяющихся переменных

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - \left(\frac{\omega_0^2}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\cos 2\omega_0 t\right)\varsigma^2\psi - \left(\frac{\omega_0^2}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\cos 2\omega_0 t\right)\eta^2\psi = 0. \qquad (3.22)$$

Представляя решение (3.22) в виде $\psi = \psi_1(\varsigma, t)\psi_2(\eta, t)$, приходим к системе двух уравнений

$$i\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varsigma^2} - \left[\frac{\omega_0^2 + \varepsilon\cos 2\omega_0 t}{4}\right]\varsigma^2\psi_1 = 0, \qquad (3.23)$$

$$i\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} - \left[\frac{\omega_0^2 - \varepsilon\cos 2\omega_0 t}{4}\right]\eta^2\psi_2 = 0, \qquad (3.24)$$

того же типа, что мы исследовали ранее. Для решения поставленной задачи перейдем сначала к автомодельным переменным (типа (2.26)), а затем к новой эволюционной переменной, определяемой шириной волнового пакета (см. обозначения к (2.27)). Соответствующее исследование можно провести как и в разделе 2.5.

В результате при возвращении к исходным переменным получим не просто перепутанное, но и сжатое состояние. Характеристики сжатия (коэффициент сжатия) также находятся полностью аналогично разделу 2.5.

Перепутанные состояния представляют собой огромный интерес не только благодаря большому количеству приложений (плотное кодирование, квантовая телепортация и т.д.), но и с фундаментальной точки зрения. Перепутанные частицы коррелируют между собой неожиданным с классической точки зрения образом, что, позволяет использовать эксперименты с ними для проверки гипотез о квантовой нелокальности или существования скрытых переменных [15, 16]. Одной из ключевых проблем при осуществлении экспериментов с перепутанными состояниями является их декогерентизация из-за взаимодействия с окружающей средой. Это обстоятельство предъявляет достаточно сильные требования к температуре, при которой проводится эксперимент ($k_B T \ll \hbar\omega$). Однако, как показано в [17,18], условие на температуру может быть весьма значительно ослаблено, если рассматривать неравновесные состояния системы (в этом случае $\frac{k_B T}{\hbar\omega} \le \frac{\left|\mathrm{Im}(\mu_M)\right|}{\gamma}$, где γ - коэффициент связи между двумя осцилляторами, μ_M - инкремент, соответствующий $\varepsilon/4$ в нашем случае). В такой ситуации перепутанные состояния могут существовать достаточно долго при значительно более высоких температурах – это явление называется «горячее перепутывание» [17].

3.4 Трехмерный осциллятор.

Обобщение на трехмерный случай приводит к следующему уравнению:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi - \frac{\omega_0^2}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\psi = 0, \qquad (3.25)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Для нахождения решения уравнения (3.25), отвечающего перепутанному состоянию, поступим следующим образом. Для него можно последовательно сделать два преобразования поворота. В результате первого преобразования

$$x = \frac{\varsigma + \eta}{\sqrt{2}},\ y = \frac{\varsigma - \eta}{\sqrt{2}},\ z = z \qquad (3.26)$$

уравнение (3.25) в новых переменных переписывается как

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varsigma^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi-\frac{\omega_0^2}{4}\left(\varsigma^2+\eta^2+z^2\right)\psi=0. \qquad (3.27)$$

Как и в двумерном случае, преобразование поворота не меняет вида уравнения (3.25). Еще раз проделаем преобразование поворота:

$$\varsigma=\frac{u+v}{\sqrt{2}},\ z=\frac{u-v}{\sqrt{2}},\ \eta=\eta. \qquad (3.28)$$

В результате приходим в переменных ς, η, v к уравнению

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\psi-\frac{\omega_0^2}{4}\left(u^2+\eta^2+v^2\right)\psi=0 \qquad (3.29)$$

с потенциалом $u^2+v^2+\eta^2$. Для примера возьмем решение уравнения (3.29) в разделяющихся переменных, которое отвечает основному состоянию осцилляторов по v и η и возбужденному состоянию по u:

$$\psi=u\exp\left(-\left(u^2+v^2+\eta^2\right)\right). \qquad (3.30)$$

Возвращаясь к начальным переменным, получаем:

$$\psi=\left(\frac{x+y}{2}+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right). \qquad (3.31)$$

В дираковских обозначениях (3.30) можно записать следующим образом:

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2}|1\rangle|0\rangle|0\rangle+\frac{1}{2}|0\rangle|1\rangle|0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle|1\rangle. \qquad (3.32)$$

Делая другие замены переменных, можно получать другие состояния. Например, сделав замену переменных, описываемую матрицей поворота

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix} \qquad (3.33)$$

можно получить состояние, в которое базовые вектора входят с одинаковым весом:

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle|0\rangle+|0\rangle|0\rangle|1\rangle\right) \qquad (3.34)$$

называемое W-состоянием [15, 19].

3.5 Возбуждение трехмерного осциллятора

Для создания перепутанного состояния трехмерного осциллятора можно, как и раньше, использовать явление параметрического резонанса. Рассмотрим возбуждение W-состояния. Добавим в уравнение Шредингера для трехмерного осциллятора внешнее потенциальное поле на удвоенной частоте:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi-\frac{\omega_0^2}{4}\left(x^2+y^2+z^2+\varepsilon f(x,y,z)\cos\left(2\omega_0 t\right)\right)\psi=0, \qquad (3.35)$$

где $f(x,y,z)$ - функция, описывающая внешнее поле. Фактически задача сводится к тому, чтобы подобрать нужный вид этой функции, чтобы возбудить требуемое состояние (3.34).

Сделав преобразование поворота, описываемое матрицей поворота (3.33) и выбрав в качестве функции f

$$f=-\frac{x^2}{3}-\frac{2z^2}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}xz-\frac{2\sqrt{2}xy}{\sqrt{3}}+\frac{2yz}{\sqrt{3}}, \qquad (3.36)$$

проведем разделение переменных $\psi=\psi_1(u,t)\psi_2(v,t)\psi_3(\eta,t)$:

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial u^2}-\left[\frac{\omega_0^2+\varepsilon\cos 2\omega_0 t}{4}\right]u^2\psi_1=0, \qquad (3.37)$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial v^2}-\left[\frac{\omega_0^2-\varepsilon\cos 2\omega_0 t}{4}\right]v^2\psi_2=0, \qquad (3.38)$$

$$i\frac{\partial\psi_3}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial \eta^2}-\left[\frac{\omega_0^2-\varepsilon\cos 2\omega_0 t}{4}\right]\eta^2\psi_3=0. \qquad (3.39)$$

Далее, как и в одномерном случае, с помощью автомодельного преобразования типа (2.26) в каждом из уравнений (3.37)-(3.39) можно избавиться от явной зависимости параболического потенциала от времени и записать их в виде (2.27). При этом ширины волновых пакетов будут не только осциллировать на удвоенной частоте ($2\omega_0$), но и в условиях параметрического резонанса расти (или убывать) во времени по закону (2.30). Выбирая решение системы уравнений (3.37)-(3.39) в автомодельных переменных в виде $\left|\psi\right\rangle=\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle$, можно убедиться, что при возвращении к исходным переменным (x,y,z), как и в двумерном случае (см. раздел 2.5), получим параметрическим образом возбужденное искомое состояние (3.34).

3. Заключение

В заключении отметим, что использование инвариантных преобразований при нахождении квантовых состояний света дает возможность построить решения уравнения Шредингера с параболическим потенциалом на основе исследования динамики моментов волновой функции (первого момента, описывающего поведение центра масс и второго, описывающего дисперсию). Следует отметить, что имеется другой широкий класс систем с кулоновским потенциалом взаимодействия. В случае атома водорода симметрия задачи такая же, как у четырехмерного осциллятора [20]. К сожалению, нам не удалось воспользоваться, как и выше, инвариантными преобразованиями для нахождения динамических решений кулоновской системы.

В результате проделанной работы получены следующие результаты:

1. С использованием инвариантного преобразования (переход в осциллирующую систему координат) было получено решение уравнения Шредингера, отвечающее когерентному состоянию, определена статистика этого состояния.
2. С помощью автомодельного преобразования получено решение, отвечающее сжатому состоянию света, определена его статистика. При последовательном применении автомодельного преобразования и перехода в осциллирующую систему координат имеется возможность получения сжатых когерентных состояний света.
3. Продемонстрирована возможность возбуждения неклассических состояний света при резонансном воздействии на систему. Показано, что введение дополнительного резонансного потенциала в уравнение Шредингера приводит к возбуждению когерентного состояния, тогда как явление параметрического резонанса может быть использовано для получения сжатого состояния.
4. Рассмотренные процедуры были обобщены на случай двумерного и трехмерного осцилляторов. При этом спецификой данных неодномерных задач является возможность получения перепутанных состояний. В двумерном случае было получено одно из белловских состояний, а в трехмерном – так называемое W-состояние. В процессе возбуждения данные перепутанные состояния становятся сжатыми перепутанными состояниями.

Список литературы

[1] *Малкин А. И., Манько В. И.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука,1979. 319 с.

[2] *Переломов А. М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука,1987. 370 с.

[3] *Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005. 648 с.

[4] *Drummond P. D., Carter S. J.* Quantum-field theory of squeezing in solitons// J. Opt. Soc. Am. B 1987. V. **4**, P. 1565-1573

[5] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[6]*Миллер У*. Симметрия и разделение переменных. М.:Мир,1981. 342 с.

[7] *Скалли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 511 с.

[8] *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2000. 896 с.

[9] *Миронов В.А.* Сжатые состояния света как автомодельные структуры //ЖЭТФ. 2003. Т.123, вып. 1, С.32

[10] *Быков В.П.* Основные особенности сжатого света //УФН. 1991. Т. **161**, вып. 10. С.145

[11] *Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М*. Теоретическая физика. Том I. Механика. – М.:Физматлит, 2004. 224 с.

[12] *Колобов М.И.* Квантовое изображение. М.:Физматлит,2009. 328 с.

[13] *Нильсен М., Чанг И.*Квантовые вычисления и квантовая информация. –М.: Мир,2006. 824 с.

[14] *В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский*. Теоретическая физика. Том IV. Квантовая электродинамика. –М.: Наука, 1989. 728 с.

[15] *Прескилл Дж.* Квантовая информация и квантовые вычисления. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований,2008. 464 с.

[16] *Баумeстер Д., Экерт А., Цайлингер А.* Физика квантовой информации. М.: Постмаркет, 2002. 376 с.

[17] *Vedral V.* Hot entanglement // Nature 2010. V. **468**, P. 769-770

[18] *Galve F., Pachon L.A., Zueco D.* Bringing Entanglement to the High Temperature Limit// Phys. Rev. Lett. 2010. V. **105**. Issue **18** 180501

[19] *Валиев К. А*. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления// УФН. 2005. Т. **175**, С. 3

[20] Х*арт Н*. Геометрическое квантование в действии. – М.:Мир, 1985. 343 с.