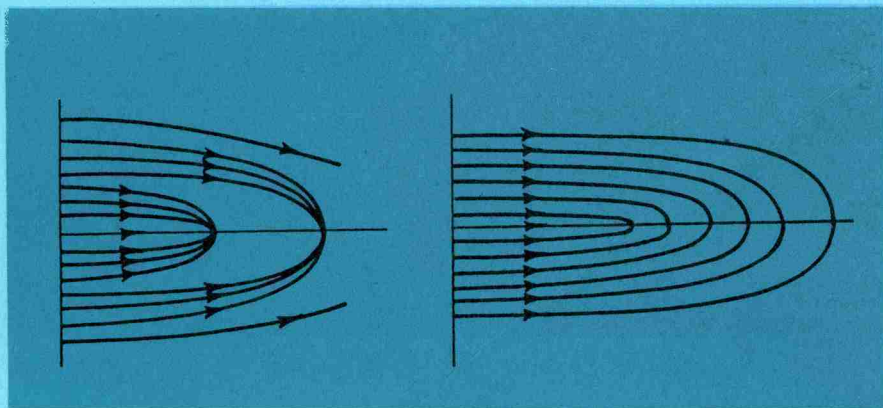




С. Ч. Власов, В. И. Таланов

САМОФОКУСИРОВКА ВОЛН



НИЖНИЙ
НОВГОРОД
1997

Издано по решению Редакционно-издательского совета
Института прикладной физики РАН

УДК 537.86

Власов С. Н., Таланов В. И. Самофокусировка волн / ИПФ РАН.
Нижний Новгород, 1997. 220 с.

Книга посвящена систематическому изложению теории самофокусировки волн. Рассмотрены механизмы нелинейности, приводящие к самофокусировке. К решению самофокусировочных задач применен метод параболического уравнения. Описаны различные проявления самофокусировки – существование однородных волновых каналов, неустойчивость плоских волн, образование в кубичных нелинейных средах областей с аномально большими амплитудами поля – нелинейных фокусов, существование автомодельных пучков, уширение спектров самофокусирующихся импульсов.

Книга предназначена для специалистов в области радиофизики, нелинейной оптики, физики плазмы и динамики волновых полей, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ил. 69, табл. 1, список использованной литературы 224 назв.

Рецензенты

доктор физико-математических наук С. Н. Гурбатов,
доктор физико-математических наук Г. И. Фрейдман

ISBN 5-201-09307-8

© Институт прикладной физики РАН, 1997 г.
Лицензия ЛР № 040840

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
Глава 1. Нелинейная поляризация среды	22
1.1. Локальные механизмы нелинейности	22
1.2. Нелокальные механизмы нелинейности	29
Глава 2. Метод параболического уравнения в задачах самофокусировки и самовоздействия волн в нелинейных средах	33
2.1. Метод параболического уравнения	33
2.2. Обобщенные параболические приближения	37
Глава 3. Однородные волновые пучки	46
3.1. Однородные пучки в кубичных средах. (Параксиальное приближение)	46
3.2. Пучки с эллиптической поляризацией в кубичных нелинейных средах	50
3.3. Особенности однородных волновых пучков в непараксиальном приближении	53
Глава 4. Неустойчивость волн в среде с кубичной нелинейностью	63
4.1. Пространственная и модуляционная неустойчивость линейно поляризованных плоских волн в кубичных средах	63
4.2. Неустойчивость эллиптически поляризованных плоских волн в средах с наведенной анизотропией	67
4.3. Неустойчивость плоских волн при инерционной нелинейности среды	69
4.4. Неустойчивость встречных волн	70
4.5. Неустойчивость волн в интерферометре Фабри – Перо	77
4.6. Особенности неустойчивости плоской волны в среде с нелинейностью высокого порядка	80
4.7. О неустойчивости волновых пучков в нелинейных средах	84
Глава 5. Описание стационарной самофокусировки и самовоздействия надкритических пучков и пакетов	92
5.1. "Безаберрационное" приближение в теории самофокусировки	92
5.2. Численное моделирование эффектов самофокусировки	98
5.3. Стационарная самофокусировка в кубичных средах	100
5.4. Самофокусировка света различных поляризаций	111
5.5. Самофокусировка встречных волновых пучков	113
Глава 6. Некоторые общие свойства самофокусировки волн в кубичных средах	118
6.1. Автомодельные волновые пучки в трехмерном случае	118
6.2. Преобразование фокусировки в параболическом уравнении	123

6.3.	Усредненное описание волновых полей	126
6.4.	Описание стационарных волновых пучков в линейных средах	128
6.5.	Описание частично когерентных полей и полей в статистически неоднородных средах	131
6.6.	Описание волновых пучков в кубических нелинейных средах	133
6.7.	Метод обратной задачи рассеяния для решения задач двумерной самофокусировки	141
Глава 7.	Структура поля в нелинейном фокусе	148
7.1.	Поведение поля в нелинейном фокусе при стационарной самофокусировке	148
7.2.	Коллапс в трехмерном случае	154
7.3.	Структура поля вблизи фокальной точки в непараксиальном приближении	161
7.4.	Об адаптивных схемах для расчета поля в окрестности фокальной точки	165
Глава 8.	Нестационарная самофокусировка	170
8.1.	Самофокусировка волновых пучков при инерционной нелинейности	170
8.2.	Самосжатие поля в резонаторе. Поле в окрестности бегущих фокусов	179
Глава 9.	Самофокусировка в периодических системах	184
9.1.	Пространственно-временная неустойчивость плоской волны в периодической системе	184
9.2.	Неустойчивость плоской волны в периодической системе элементов с релаксирующей нелинейностью	194
9.3.	Неустойчивость эллиптически-поляризованной плоской волны в периодической системе	196
9.4.	Нелинейные квазиоптические волноводы	197
Заключение		206
Литература		208

CONTENTS

Preface	7
Introduction	9
Chapter 1. Nonlinear medium polarization	22
1.1. Local mechanisms of nonlinearity	22
1.2. Nonlocal mechanisms of nonlinearity	29
Chapter 2. The method of the parabolic equation in the problems of spatial and temporal self-focusing in nonlinear media	33
2.1. The method of the parabolic equation	33
2.2. Generalized parabolic approximations	37
Chapter 3. Homogeneous wave beams	46
3.1. Homogeneous beams in cubic media. (Paraxial approximation)	46
3.2. Beams with elliptic polarization in cubic nonlinear media	50
3.3. Characteristic features of homogeneous wave beams in nonparaxial approximation	53
Chapter 4. Wave instability in the medium with cubic nonlinearity	63
4.1. Spatial and modulation instability of plane waves with linear polarization in cubic media	63
4.2. Instability of plane waves with elliptic polarization in media with induced anisotropy	67
4.3. Instability of plane waves due to the medium inertial nonlinearity	69
4.4. Counter-propagating waves instability	70
4.5. Characteristic features of plane wave instability in Fabry-Perot interferometer	77
4.6. Characteristic features of plane wave instability in the medium with the high-order instability	80
4.7. On wave beams instability in nonlinear media	84
Chapter 5. Description of stationary spatial self-focusing and temporal self-trapping of supercritical beams and packets	92
5.1. "Aberrationless" approximation in the theory of self-focusing	92
5.2. Numerical simulation of effects of self-focusing	98
5.3. Stationary self-focusing in cubic media	100
5.4. Self-focusing of light of various polarizations	111
5.5. Self-focusing of counter-propagating wave beams	113
Chapter 6. Some general features of waves self-focusing in cubic media	118
6.1. Self-similar wave beams in the three-dimensional case	118
6.2. Focusing transformation in the parabolic equation	123

6.3. Averaged description of wave fields	126
6.4. Description of stationary wave beams in linear media	128
6.5. Description of partially coherent fields and fields in statistically inhomogeneous media	131
6.6. Description of wave beams in a cubic nonlinear medium . . .	133
6.7. The method of the inverse problem of scattering for the solution of the problems of two-dimensional self-focusing	141
Chapter 7. Field structure in the nonlinear focus	148
7.1. Field behavior in the nonlinear focus due to the stationary self-focusing	148
7.2. Collapse in the three-dimensional case	154
7.3. Field structure near the focal point in the nonparaxial approximation	161
7.4. On the adaptive schemes for field computing in the vicinity of the focal point	165
Chapter 8. Nonstationary self-focusing	170
8.1. Wave beams self-focusing due to inertial nonlinearity	170
8.2. Field self-contraction in the resonator. The field in the vicinity of moving foci	179
Chapter 9. Self-focusing in periodic systems	184
9.1. Spatial-temporal instability of a plane wave in the periodic system	184
9.2. Plane wave instability in the periodic system of elements with relaxing nonlinearity	194
9.3. Instability of an elliptically polarized plane wave in the periodic system	196
9.4. Nonlinear quasioptic waveguides	197
Conclusion	206
References	208

Предисловие

В 1962 году в "Журнале экспериментальной и теоретической физики" появилась небольшая статья Г. А. Аскарьяна "Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы" [1]. В ней наряду с обсуждением различных механизмов воздействия мощного электромагнитного излучения на среду впервые было обращено внимание на то, что "ионизирующее, тепловое и разделяющее воздействие луча интенсивной радиации на среду может быть настолько сильным, что создается перепад свойств среды в луче и вне луча, что вызовет волноводное распространение луча и устранил геометрическую и дифракционную расходимость — это интересное явление можно назвать *самофокусировкой* (курсив Г.А.А.) электромагнитного луча". Так было предсказано новое физическое явление. В ближайшие же годы оно получило теоретическое и экспериментальное подтверждение и до сих пор привлекает внимание физиков. Оказалось, что самофокусировка и родственные ей явления, такие как коллапс, свойственны не только электромагнитным волнам, но проявляются и сопровождают очень многие нелинейные явления в полях различной природы — плазменных, акустических и т. д.

В книге преимущественно на основе оригинальных работ авторов излагается теория самофокусировки электромагнитных волн в нелинейной кубичной среде. Вначале описываются различные механизмы нелинейности, приводящие к самофокусировке. Далее излагается метод параболического уравнения применительно к решению различных самофокусировочных задач. Дается подробная и последовательная теория важнейших проявлений самофокусировки: существования однородных волновых пучков, неустойчивости плоских волн, образования в кубичных нелинейных средах областей с аномально большими значениями полей — нелинейных фокусов. Описываются общие свойства решений параболического уравнения в нелинейных кубичных средах: автомодельность, инвариантность относительно преобразования фокусировки, возможность усредненно-го описания волновых пучков (метод моментов). Наряду со стацио-

нарными описываются также нестационарные явления, имеющие место при самофокусировке в средах с инерционной нелинейностью. В конце книги излагается теория самофокусировки в периодических системах, в частности, описывается метод подавления самофокусировочной неустойчивости, ограничивающей мощность твердотельных лазерных систем. В книге принята гауссова система единиц.

Книга написана на основе исследований, выполненных в Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) и Институте прикладной физики РАН. Частично материал книги был прочитан одним из авторов (В.И.Т.) на радиофизическом факультете ННГУ в курсе асимптотических методов теории дифракции.

Авторы благодарны А. В. Гапонову-Грехову и М. А. Миллеру за постоянный интерес к исследованиям, а также настоящим и бывшим сотрудникам НИРФИ и ИПФ РАН В. И. Беспалову, А. Г. Литваку, В. А. Петрищеву, В. Н. Гольдбергу, Р. Э. Эрм, Л. В. Пискуновой, И. В. Ереминой, Н. Г. Бондаренко, А. И. Макарову, Ю. К. Веревкину, В. Е. Яшину и другим, результаты совместных работ с которыми использованы при написании книги.

Авторы признательны рецензентам Г. И. Фрейдману и С. Н. Гурбатову за полезные рекомендации.

ВВЕДЕНИЕ

В 1962 году Г. А. Аскарьяном было предсказано новое физическое явление — самофокусировка электромагнитных волн. В ближайшие годы оно получило теоретическое и экспериментальное подтверждение. В 1963 году В. И. Талановым на примере плазмы и жидкостей со стрикционной нелинейностью было найдено самосогласованное распределение волна — среда, имеющее характер самофокусирующегося локализованного в пространстве волновода [2]. В 1965 году в опытах Н. Ф. Пилипецкого и А. Р. Рустамова были обнаружены тонкие нити лазерного излучения, выходящие из фокуса линзы при фокусировке луча многомодового рубинового лазера в сероуглероде [3]. Указанные исследования послужили отправным пунктом для обширной серии теоретических и экспериментальных работ по изучению эффекта самофокусировки в последующие годы.

Первой следует отметить работу Ч. Х. Таунса (С. Н. Townes) с сотрудниками [4], в которой было введено понятие критической мощности самофокусировки для аксиально-симметричных пучков. Далее, в работе [5], был развит квазиоптический подход, опирающийся на параболическое уравнение для волновых пучков в слабонелинейной среде, — нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Этот подход позволил, в частности, предсказать явление "схлопывания" пучка, сопровождающееся неограниченным ростом его осевой интенсивности, при мощностях, превышающих критическую мощность самофокусировки. Там же было получено решение НУШ в приближении геометрической оптики, а также продемонстрирована возможность подхода к изучению неоднородных пучков, получившего название безабберационного приближения. Тогда же П. Л. Келли (P. L. Kelley) [6] на основе параболического уравнения выполнил численный эксперимент по самофокусировке сверхкритических пучков, подтвердивший факт "схлопывания" пучка. В работах [7] и [8] было проведено более подробное численное исследование самофокусировки: определены зависимости длины самофокусировки от начальных параметров пучка, исследовано влияние на самофокусировку линейного и многофотонного поглощения.

Об аномально высоких интенсивностях поля при самофокусировке свидетельствовали многочисленные эксперименты по наблюдению вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) в жидкостях при накачках, существенно меньших порога ВКР в плоских волнах. В 1966 году в экспериментах Ч. Ч. Ванга (С. С. Wang) и других [9–10] по наблюдению ВКР в жидкостях было получено качественное подтверждение зависимости длины самофокусировки от мощности и радиуса волнового пучка, а в работе Ч. Х. Таунса с сотрудниками [11] детально описана структура самофокусирующегося пучка (методом фотографирования промежуточных сечений). Тогда же была опубликована работа С. А. Ахманова, А. П. Сухорукова, Р. В. Хохлова [12], развивающая приближение геометрической оптики и безаберрационную теорию самофокусировки, а также серия работ Ю. П. Райзера [13–14] по нестационарной самофокусировке при учете движения среды, обусловленного электрострикцией и нагревом.

Важным моментом в теории самофокусировки, оказавшим в дальнейшем влияние на конструирование мощных лазерных систем, явилось доказательство распада сверхкритического пучка на отдельные нити (неустойчивость по отношению к поперечным возмущениям) [15].

Разработанные теории достаточно хорошо объясняли наблюдавшиеся в экспериментах так называемые "тонкие", или крупномасштабные, "нити" самофокусировки (минимальный поперечный размер порядка 50 мкм). Однако в 1966 году [16] был обнаружен новый тип самофокусировки — сверхтонкие, или мелкомасштабные, нити (диаметром порядка 5 мкм). В случае многомодового рубинового лазера сверхтонкие нити наблюдались как в лазерном свете, так и в стоксовой компоненте ВКР. Мелкомасштабные нити лазерного излучения возникали внутри крупномасштабных, начиная с некоторой длины кюветы. Объяснили природу сверхтонких нитей В. Н. Луговой и А. М. Прохоров [17], они связали сверхтонкие нити со следами фокальных точек, движение которых в нелинейной среде с безынерционной нелинейностью при импульсных сигналах обусловлено зависимостью длины самофокусировки от мощности пучка.

В численном эксперименте [18] была обнаружена многофокусная картина самофокусировки, когда из первоначального пучка, мощность которого много больше критической мощности самофокусировки $P_{кр}$, в каждый фокус поступает критическая мощность $P_{кр}$, а число фокусов примерно равно отношению $P/P_{кр}$. Отдельные треки бегущих фокусов наблюдались В. В. Коробкиным и другими [19] при сверхскоростной развертке изображения сверхтонких нитей.

Значительный интерес представляет выяснение механизмов, приводящих к изменению коэффициента преломления среды в сильном электромагнитном поле. Наряду с "традиционными" механизмами, отмеченными уже в самых первых работах по самофокусировке, — высокочастотным эффектом Керра, электрострикцией, нагревом среды, ионизацией, Г. А. Аскарьян обратил внимание на возможность самофокусировки света при возбуждении атомов и молекул в пучке [20], при индуцированной деформации атомов и молекул среды [21], при возмущениях среды вблизи поглощающих неоднородностей [22] и предсказал самофокусировку звука и гиперзвука [23], в том числе в жидкости с пузырьками газа [24]. Исследование самофокусировки света в средах с кубичной нелинейностью послужило толчком для развертывания интенсивного изучения тепловой самофокусировки и самодефокусировки непрерывного и квазинепрерывного излучения в различных средах [25–26], а также самофокусировки волн в плазме [27–28].

Разработка строгой теории самофокусировки шла в основном по пути исследования нелинейного параболического уравнения с кубичной нелинейностью. Следующим шагом после нахождения однородных решений этого уравнения — плоского и аксиально-симметричного однородных пучков [2, 4] — было установление автомодельных свойств неоднородных решений этого уравнения [29], нахождение новой группы его инвариантных преобразований — преобразования фокусировки [30] и доказательство аналога теоремы вириала, позволившее строго обосновать расходимость поля сверхкритических пучков в нелинейном фокусе и сформулировать достаточный критерий самофокусировки пучков произвольного профиля [31]. В 1978 году была решена задача о характере поведения поля вблизи нелинейного фокуса [32]. Отмеченные выше строгие результаты теории самофокусировки волновых пучков послужили в дальнейшем отправным пунктом в исследованиях коллапса ленгмюровских волн в плазме [33].

Самофокусировке обычно сопутствуют другие нелинейные процессы. Одним из них является эффект сверхуширения [34] спектров сверхкоротких лазерных импульсов. Объяснение как наблюдавшегося ранее слабого уширения спектров в керровских жидкостях, так и эффекта сверхуширения потребовало анализа нестационарной самофокусировки света в средах с мгновенной и инерционной нелинейностью [35–36]. В работе [35] было показано, что самообжатие пучка многократно увеличивает эффект фазовой модуляции по сравнению с одномерным импульсом. Эффект сверхуширения использовался для измерения пиковой мощности [37] и при исследовании характеристик лазерного пробоя оптических стекол ультракороткими импульсами [38–39].

Самофокусировка естественным образом проявляется в мощных лазерных системах, состоящих из следующих друг за другом активных элементов, разделенных воздушными промежутками. Теория распространения волновых пучков в периодических системах нелинейных элементов разработана в [40–41].

Ниже кратко изложены основы теории эффекта самофокусировки волн. Подробное описание этой теории дано в последующих главах.

Нелинейное параболическое уравнение. Рассмотрим сначала стационарные во времени волновые пучки с линейной поляризацией поля

$$E = \frac{1}{2} [E \exp(-ikz + i\omega t) + \text{к. с.}]$$

в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_{NL} = \epsilon_0 [1 + \epsilon' f_{NL}(|E|^2)], \quad \epsilon' = \text{const}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} (\epsilon'_0)^{1/2}.$$

Пусть Λ_{\perp} и Λ_{\parallel} – характерные масштабы изменения комплексной амплитуды поля поперек и вдоль волнового пучка. Тогда, предполагая выполненными условия

$$k_0 \Lambda_{\perp} \gg 1, \quad k_0 \Lambda_{\parallel} \gg k_0 \Lambda_{\perp}^2, \quad \epsilon' f_{NL} \ll 1,$$

можно получить уравнение для медленно меняющейся амплитуды поперечной компоненты поля:

$$2ik_0 E'_z = \Delta_{\perp} E + k_0^2 \epsilon' f_{NL}(|E|^2) E. \quad (\text{B.1})$$

В средах с кубичной нелинейностью $f_{NL}(|E|^2) = |E|^2$ уравнение (B.1) заменой переменных может быть приведено к безразмерному виду

$$2i \Psi'_z = \Delta_{\perp} \Psi + |\Psi|^2 \Psi. \quad (\text{B.2})$$

Эквивалентное (B.2) уравнение в теории самофокусировки впервые было выписано в амплитудно-фазовом представлении в работе [6]. Уравнение (B.1) обобщается на нестационарные поля в диспергирующих средах:

$$2ik_0 E'_z = \Delta_{\perp} E + k_0 v'_{\omega} E''_{\xi\xi} + k_0^2 \epsilon' f_{NL}(|E|^2) E, \quad (\text{B.3})$$

где $v'_{\omega} = \frac{dv}{d\omega}$; $\xi = z - vt$; v – групповая скорость.

Выписанные уравнения, которые принято называть теперь нелинейными уравнениями Шредингера, легко допускают обобщения

на векторные поля, а также на другие типы нелинейностей. Они являются базовыми уравнениями теории самофокусировки.

Однородные волновые пучки*. Отыскивая решение (В.2) в виде бегущей волны $\Psi = \Psi_0(r_\perp) \times \exp(-i\gamma^2 z/2)$, для функции $\Psi_0(r_\perp)$ поперечного распределения поля получим уравнение

$$\Delta_\perp \Psi_0 + [|\Psi_0|^2 - \gamma^2] \Psi_0 = 0. \quad (\text{В.4})$$

Уравнение (В.4) заменой $\Psi_0 = \tilde{e} \gamma$, $r_\perp = \tilde{r} \gamma^{-1}$ приведем к виду

$$\tilde{\Delta}_\perp \tilde{e} + (\tilde{e}^2 - 1) \tilde{e} = 0. \quad (\text{В.5})$$

Самофокусирующимся волновым каналам (уединенным волновым пучкам) отвечают решения уравнений (В.2), (В.4), достаточно быстро спадающие на бесконечности: $\tilde{e} \rightarrow 0$ при $\tilde{r} \rightarrow \infty$. Такое решение для стрикционной нелинейности в виде плоского пучка было получено в [2]. В частности, для кубичной среды оно имеет вид солитона [2]:

$$\tilde{e} = 2^{1/2} \text{ch}^{-1} \tilde{x}. \quad (\text{В.6})$$

Аналогичное решение в виде цилиндрического пучка численно получено Ч. Х. Таунсом с сотрудниками (таунсов пучок) [4]. Мощность аксиально-симметричного пучка не зависит от его ширины и называется критической мощностью самофокусировки**:

$$P_{\text{кр}} = 5,850 \frac{c \varepsilon_0^{1/2}}{4\pi k_0^2 \varepsilon'}.$$

В зависимости от типа нелинейности и характера среды величина $P_{\text{кр}}$ изменяется в широких пределах: десятки киловатт — в жидкостях, единицы мегаватт — в твердых телах, единицы гигаватт — в газах при нормальных давлениях. В плоских пучках критическая мощность зависит от ширины: $P_{\text{кр}} \sim 1/a$.

Поперечная неустойчивость сверхкритических пучков. Одним из фундаментальных результатов теории самофокусировки является открытие поперечной неустойчивости плоской волны в нелинейной среде и наличия оптимального масштаба такой неустойчивости [15]. Волна возмущения $\exp(-ik_\perp r_\perp - ihz)$ в области пространственных

* В дальнейшем стационарными будем называть пучки, не зависящие от времени, и однородными — не зависящие от продольной координаты z .

** В работе [4] допущена неточность в определении $P_{\text{кр}}$, исправленная в работе [11]. Мы приводим уточненное выражение (см. также сноску далее на с. 49).

частот $0 < k_{\perp} < 2\varepsilon' k_0 E_0^2$ нарастает с инкрементом

$$\Gamma = ih = \frac{k_{\perp}}{2k_0} (2\varepsilon' k_0^2 E_0^2 - k_{\perp}^2)^{1/2}, \quad (\text{B.7})$$

где E_0 — амплитуда первоначальной плоской волны. Максимум инкремента $\Gamma_{\max} = \frac{1}{2} \varepsilon' k_0 E_0^2$ достигается при пространственной частоте возмущений $k_{\perp} = k_0 \varepsilon'^{1/2} E_0$, при этом на характерный масштаб возмущений порядка $(\pi/k_{\perp})^2$ приходится мощность плоской волны порядка критической $P_{\text{кр}}$. Эффект неустойчивости в случае неоднородной структуры начального пучка с увеличением его мощности приводит к развалу пучка на отдельные нити самофокусировки, число которых растет пропорционально $P/P_{\text{кр}}$.

Учет эффекта поперечной самофокусировочной неустойчивости играет важную роль в расчетах мощных многокаскадных лазерных систем, поскольку образование нитей самофокусировки может приводить к множественным разрушениям структуры среды. Значение полного максимального инкремента неустойчивости $B = \int \varepsilon' k_0 E_0^2 dz$ в системе получило название интеграла распада. Удовлетворительное функционирование системы может быть обеспечено, если значение этой величины не превышает 4–5 единиц. Представления о неустойчивости плоской волны линейной поляризации обобщаются и на волны произвольной поляризации [15].

Решение задачи о поперечной неустойчивости плоских волн легко обобщается и на модулированные во времени волны с помощью уравнения (B.3) или аналогичных ему уравнений, учитывающих релаксацию нелинейной среды [42, 127].

Усиление эффектов самовоздействия света во встречных пучках накачки впервые обсуждалось в работе [56]. Влияние самофокусировочной неустойчивости на обращение волнового фронта сигнальной волны при четырехволновом взаимодействии рассмотрено в [57]. Проявление неустойчивости в резонаторе Фабри — Перо исследовано в [58].

Самофокусировка сверхкритических пучков. При $P > P_{\text{кр}}$ в пучке преобладает нелинейная рефракция лучей в область сильного поля, что приводит к росту осевой интенсивности. Из-за зависимости $P_{\text{кр}} \approx 1/a$ в плоских пучках этот эффект ограничен, однако в аксиально-симметричных пучках в кубичной среде, где $P_{\text{кр}} = \text{const}$, можно ожидать неограниченного возрастания осевой интенсивности, т. е. образования нелинейного фокуса — особенности поля. На это обстоятельство было обращено внимание в работе [5]. Неограничен-

ный рост интенсивности при самофокусировке в численном эксперименте был продемонстрирован в [6]. Анализ численных данных позволил вывести следующую аппроксимирующую формулу для зависимости положения нелинейного фокуса коллимированного гауссова пучка от его начального радиуса a_0 и мощности P [7]:

$$z_{sf} = \frac{0,366 k_0 a_0^2}{\{(P/P_{кр})^{1/2} - 0,825\}^2 - 0,03}^{1/2}. \quad (B.8)$$

Эта зависимость подтверждена численными данными [8].

Автомодельные решения уравнения самофокусировки. В линейной среде могут существовать волновые пучки с фиксированной структурой поля в разных сечениях (гауссовы пучки). Уравнения (B.2) для кубичной среды допускают существование аналогичных решений, отличающихся в разных сечениях масштабными множителями. Такие пучки принято называть автомодельными. К их числу принадлежат и структуры однородных пучков. Автомодельные решения уравнения (B.2) представляются в виде $\Psi = e \exp(-i\varphi)$:

$$e = \frac{1}{a(z)} \tilde{e}(u, v); \quad \varphi = \frac{s(z)[u^2 + v^2]}{2} + \varphi_0(z), \quad (B.9)$$

где

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{a}, \quad s(z) = C_3 z + C_4, \quad a^2 = \frac{(C_3 z + C_4)^2 + C_1}{C_3},$$

$$2\varphi_0(z) = -\frac{C_2}{C_1^{1/2}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{C_3 z + C_4}{C_1^{1/2}} \right\} + C_5; \quad C_i \ (i = 1, \dots, 5) = \text{const},$$

а амплитудная структура пучков определяется уравнением

$$\Delta_{u,v} \tilde{e} + [C_2 - C_1(u^2 + v^2) + \tilde{e}^2] \tilde{e} = 0, \quad (B.10)$$

допускающим локализованные решения при $C_1 \geq 0$. Локализованные решения всегда дефокусируются. Исключением является таунсов пучок ($C_1 = 0$), радиус которого при предварительной фокусировке пучка обращается в нуль в точке линейного фокуса. Самофокусирующимся автомодельным решениям отвечают нелокализованные поля ($C_1 < 0$). Характер полей в нелинейном фокусе $|\Psi(0, z)| \sim (z_{сф} - z)^{-1/2}$. Однако, в силу нелокального характера, автомодельные структуры с такой особенностью не могут описывать поле в окрестности нелинейных фокусов ограниченных пучков.

Преобразование фокусировки. В работе [30] было показано, что уравнение (В.2) при кубической нелинейности допускает группу преобразований координат и поля

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{1}{F}, \quad s = \frac{\zeta}{z} r, \quad \Psi(\zeta, s) = \frac{z}{\zeta} \Psi_0 \left[z(\zeta), \frac{z}{\zeta} s \right] \exp \left[-i \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) \frac{s^2}{2\zeta} \right], \quad (\text{В.11})$$

эквивалентную фокусировке исходного пучка в сечении $z = 0$ линзой с фокусным расстоянием F . Эти преобразования получили название преобразований фокусировки, или линзовых. Согласно (В.11), подфокусировка пучка не меняет его топологии в нелинейной среде, по крайней мере в области до нелинейного фокуса, в окрестности которого уравнение (В.2) становится, строго говоря, неприменимым. С использованием (В.11) отпадает необходимость в специальном анализе предварительно сфокусированных пучков. Существование группы преобразований (В.11), в силу теоремы Нетер, говорит о наличии у уравнения (В.2) нового интеграла сохранения, отличного от традиционных интегралов энергии и импульса поля. Такой интеграл был получен в [31] сначала вне связи с преобразованием (В.11) при разработке так называемого усредненного описания самофокусирующихся пучков.

Усредненное описание самофокусирующихся пучков (метод моментов). Достаточное условие самофокусировки. Если ввести в рассмотрение усредненные характеристики пучка, описываемого уравнением (В.2):

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_{s_1} |\Psi|^2 ds_{\perp}, \\ r_{\text{и}} &= \frac{1}{W_0} \int_{s_1} r_{\perp} |\Psi|^2 ds_{\perp}, \\ a_{\text{эф}}^2 &= \frac{1}{W_0} \int_{s_1} (r_{\perp} - r_{\text{и}})^2 |\Psi|^2 ds_{\perp}, \end{aligned} \quad (\text{В.12})$$

имеющие смысл полной мощности, положения центра интенсивности и квадрата эффективного радиуса (с точностью до π — эффективного сечения) пучка, то непосредственным дифференцированием можно убедиться, что величины W_0 , $\frac{dr_{\text{и}}}{dz}$ и $\frac{d^2 a_{\text{эф}}}{dz^2}$ являются инвариантами пучка, т. е. не зависят от координаты z . Это означает, в частности, что центр интенсивности пучка в нелинейной среде, как и в линейной [43], всегда движется по прямой, определяемой начальным профилем комплексной амплитуды пучка, а его эффективное сечение

меняется по параболическому закону, определяемому тем же профилем. Нетрудно убедиться, что для величины $I(z) = W_0 a_{\text{эф}}^2$, аналогичной центробежному моменту инерции системы тел с распределенной в пространстве плотностью $\rho = |\Psi|^2$, имеет место аналог теоремы вириала

$$I''_{zz} = 2H, \quad (\text{B.13})$$

где $H = \int_{s_{\perp}} \left(|\nabla \Psi|^2 - \frac{1}{2} |\Psi|^4 \right) ds_{\perp}$ — гамильтониан уравнения (B.2), яв-

ляющийся интегралом движения $H = \text{const}$. Поскольку, по определению, $I \geq 0$, то достаточным условием самофокусировки является отрицательность гамильтониана $H < 0$. При этом величина I обращается в нуль на конечном интервале z . В частности, для волнового пучка, имеющего структуру однородного (таунсова) пучка, условие $H < 0$ выполняется при $P > P_{\text{кр}}$. Условие $H < 0$ является лишь достаточным критерием самофокусировки: в пучках произвольного профиля особенность может возникнуть и при $H > 0$.

Структура поля в окрестности нелинейного фокуса. Строго говоря, изучение особенности в рамках НУШ неправомерно: в ее окрестности это уравнение неприменимо. Однако, как показывают конкретные оценки, такая экстраполяция вполне допустима, так как выход на асимптотику может происходить еще в рамках применимости НУШ. Кроме того, исследование особых решений НУШ принципиально интересно для понимания всей структуры решения: сингулярные поля здесь играют примерно ту же роль, что и солитоны в плоских задачах — на них в конечном итоге разбивается все начальное волновое поле.

Еще в ранних численных экспериментах [7] было отмечено, что около фокусов локализуется мощность, близкая к критической. В численном эксперименте [18] с большой точностью было показано, что в фокус поступает критическая мощность. Основываясь на этом факте, авторы [44] предположили, что структура поля в окрестности фокуса автомодельна и соответствует таунсову пучку. Используя это предположение, авторы [32] показали, что изменение поля перед нелинейным фокусом имеет вид

$$|\Psi(0, z)| \sim \left| \frac{\ln(z_{\text{эф}} - z)}{z_{\text{эф}} - z} \right|^{1/2}. \quad (\text{B.14})$$

Как численный эксперимент, проведенный в [32], так и позднейшие аналитические работы подтвердили этот результат [45].

Вычислительный эксперимент в теории самофокусировки. Обнаружение многофокусной структуры и распределенного коллапса. Первый численный эксперимент в теории самофокусировки был выполнен в 1965 году [6]. Он основывался на уравнениях, предложенных в работе [5]. На основе результатов численных исследований гауссовых пучков, приведенных в работе [7], была дана аппроксимирующая формула (В.8) длины самофокусировки. В этих исследованиях было обращено внимание на необходимость учета при самофокусировке таких факторов, как линейное и многофотонное поглощение, насыщение нелинейности, и рассчитаны структуры соответствующих пучков. В работе [18] для численного анализа уравнений самофокусировки была применена неявная разностная схема. Это позволило рассчитать поле за первым фокусом* и обнаружить в зафокальной области серию фокусов, в каждый из которых поступала мощность, близкая к критической. Общее число фокусов равнялось целой части отношения $P/P_{кр}$. Наличие фокусов, расположенных на одной оси, характерно для пучков с идеальной симметрией. Нарушение симметрии приводит к поперечному развалу пучка и образованию нелинейных фокусов в различных точках поперечного сечения.

Образование многофокусной картины с поступлением в каждый фокус мощности, равной критической, специфично для так называемого критического случая $Ds = 2$, где D — размерность лапласиана в НУШ, s — показатель нелинейности в зависимости $f_{NL}(|E|^2) = \epsilon'|E|^{2s}$. При $Ds > 2$, что отвечает трехмерной самофокусировке в кубичной среде или двумерной самофокусировке в среде с более сильной нелинейностью, фокальные точки превращаются в фокальные нити конечной протяженности (распределенный коллапс), что нашло подтверждение в численном эксперименте [46].

В численных экспериментах [32], выполненных в связи с исследованиями поля в окрестности особенности (фокуса), использованы адаптивные сетки, выбор узлов которых определялся самой структурой поля. Это позволило рассчитать поля до значительных превышений ($\sim 10^3$) начальной амплитуды. Адаптивные сетки, основанные на различных принципах, использовались также в работах [48–50].

Возросшие мощности ЭВМ позволили в последние годы перейти к расчету трехмерной самофокусировки, самофокусировки несимметричных пучков, пучков со сложной радиальной структурой, а также пучков при других типах нелинейности.

* Фактически в этих расчетах присутствовало нелинейное затухание, вносимое численной схемой, благодаря чему прохождение нелинейного фокуса носило неконсервативный характер.

Нестационарная самофокусировка и уширение спектров. Картина нестационарной самофокусировки произвольного пространственно ограниченного импульса в среде с безынерционной нелинейностью $\Delta \varepsilon \approx \varepsilon' |E|^2$ в недиспергирующей среде может быть получена, в принципе, на основе решения стационарной задачи, так как в этом случае время входит лишь как параметр в отношение $P/P_{кр}$. Положение фокусов при этом меняется в функции времени, и они могут вычерчивать в пространстве треки высокой интенсивности. Движение фокусов при нестационарной самофокусировке может быть как прямым, так и обратным и происходить с различной, в том числе и сверхсветовой, скоростью.

В работе [17] было определено связанное с движением фокусов изменение спектра проходящих импульсов. Аналогичные результаты получены в [53].

В диспергирующих средах исследования нестационарной самофокусировки должны проводиться на основе трехмерных уравнений самофокусировки (В.3). При $v'_\omega > 0$ здесь возможно явление трехмерного коллапса волнового сгустка [33], а при $v'_\omega < 0$ — так называемого фрактального коллапса [54].

Одной из наиболее важных особенностей нестационарной самофокусировки является увеличение фазовой самомодуляции импульса, и соответственно уширения его спектра за счет поперечного сжатия пучка. Найденное в [35] выражение для девиации частоты импульса в окрестности нелинейного фокуса

$$\Omega = - \frac{P'_t}{(PP_{кр})^{1/2}} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \quad (\text{В.15})$$

показывает, что в самофокусирующемся пучке более быстрое изменение диэлектрической проницаемости, обусловленное поперечным сжатием канала, увеличивает девиацию в $\frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2$ раз по сравнению с девиацией в однородном канале первоначального радиуса a_0 . В среде с релаксирующей нелинейностью (время релаксации τ) полная девиация частоты может достигать значения порядка $1/\tau$ [55]. В работе [35] отмечалась возможность образования в среде с инерционной нелинейностью, в области за бегущим фокусом, нитевидного канала, экспоненциально сжимающегося в функции проходящей через него энергии.

Уже в первых экспериментах по самофокусировке импульсного излучения лазеров с модулированной добротностью в жидкостях керровского типа обнаружили уширение спектров порядка десятков и сотен ангстрем, объясняющееся фазовой автомодуляцией излу-

ния в тонких нитях самофокусировки вследствие нестационарности диэлектрической проницаемости. В 1970 году был обнаружен новый тип уширения, получивший название аномально большого, или сверхуширения [34, 61]. В экспериментах уширение спектра импульсного излучения неодимового лазера ($\lambda = 1,06$ мкм) после самофокусировки перекрывало всю видимую область. Для дальнего поля характерно также наличие внеосевого излучения в конусе, раствор которого нелинейно растет с увеличением частоты расстройки.

Как самофокусировка, так и преобразование спектра в стеклах связано с малоинерционным механизмом электронной нелинейности ($\tau \approx 10^{-15}$ с). Наблюдаемое уширение спектра, в принципе, достижимо за счет фазовой автомодуляции в сжимающемся канале; антистоксово смещение частоты осевого излучения может быть объяснено изменением знака нелинейности в сверхсильных полях, возникающих в нитях фокусировки. Внеосевое антистоксово излучение объясняется механизмом четырехфотонного взаимодействия накачки с осевым стоксовым излучением при черенковском типе излучения.

Эффект сверхуширения спектров ультракоротких импульсов при самофокусировке нашел многообразное применение. Спектральный континуум может быть использован в спектроскопии короткоживущих состояний. Пороговый характер сверхуширения спектров позволяет использовать этот эффект для измерения коэффициента нелинейности и пороговой интенсивности пробоя прозрачных материалов [38, 39, 62] сверхкороткими импульсами.

Самофокусировка волновых пучков в периодических системах. Уже в первой работе Г. А. Аскарьяна по самофокусировке [1] высказывалось предположение о возможности использования самофокусировки для направленной передачи излучения с малой расходимостью. Позднейшие исследования, однако, показали, что на этом пути есть ряд принципиальных трудностей: наличие критической мощности в самофокусирующихся волноводах, относительно сильное затухание в сплошной среде, захват в режим канализации лишь доли падающей энергии. Тем не менее такая возможность остается при использовании внешней самофокусировки, суть которой состоит в том, что тонкие плоскопараллельные слои нелинейного диэлектрика под действием интенсивного поля пучка приобретают линзовые свойства. Эффект внешней самофокусировки позволяет осуществить построение периодических нелинейных систем, пригодных для канализации мощных световых пучков. Задача о периодической самофокусировке возникает и при изучении открытых резонаторов с нелинейными элементами. В работах [40–41] был выполнен анализ подобных систем с помощью квазиоптических методов. Были иссле-

дованы периодические системы нелинейных слоев, а также периодические системы с комбинированными элементами, включающими линейные и нелинейные фазовые корректоры при различных типах нелинейности: в частности, было показано, что критическая мощность самофокусировки в слоисто-периодической нелинейной среде возрастает примерно пропорционально скважности нелинейных элементов, что позволяет сильно увеличить мощность транспортируемых потоков. Исследование неустойчивости мощной плоской волны, распространяющейся в системе периодически расположенных нелинейных элементов, позволило найти условия, при которых неустойчивость подавляется [59—60].

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ СРЕДЫ

В этой главе приводятся необходимые для описания самофокусировки электромагнитных волн сведения о механизмах нелинейности и характерные величины нелинейных коэффициентов различных сред.

1.1. Локальные механизмы нелинейности

В электродинамике сплошных сред отклик среды на приложенное поле принято характеризовать зависимостью $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}[\mathbf{E}]$ [63–65] наведенной поляризации \mathbf{P} (дипольного момента единицы объема среды) от напряженности электрического поля \mathbf{E} (для немагнитных сред). В слабых полях отклик $\hat{\mathbf{P}}[\mathbf{E}]$ линеен по напряженности поля \mathbf{E} и в общем случае нелокален во времени (временная дисперсия среды) и в пространстве (пространственная дисперсия среды):

$$\mathbf{P}^L[\mathbf{E}] = \hat{\chi}_1^{(L)} \mathbf{E} = \int_0^\infty \int \hat{\chi}_1^{(L)}(t_1, \mathbf{r}_1) \mathbf{E}(t - t_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) dt_1 d\mathbf{r}_1. \quad (1.1)$$

Нелокальный тензор последствия $\hat{\chi}_1^{(L)}(t, \mathbf{r})$ характеризует реакцию среды на мгновенное точечное воздействие $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \delta(t) \delta(\mathbf{r})$, его пространственно-временной спектр

$$\hat{\chi}_1(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty \int \hat{\chi}_1(\tau, \mathbf{s}) \exp(-i\omega\tau + i\mathbf{k}\mathbf{s}) d\tau d\mathbf{s} \quad (1.2)$$

связывает друг с другом спектральные амплитуды $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ и $\mathbf{P}_{\omega, \mathbf{k}}$

$$\mathbf{P}_{\omega, \mathbf{k}}^L = \hat{\chi}_1(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} \quad (1.3)$$

и определяет линейную часть тензора диэлектрической проницаемости среды $\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})$

$$\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + 4\pi \hat{\chi}_1(\omega, \mathbf{k}), \quad D_{\omega, \mathbf{k}} = \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) E_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (1.4)$$

где $D_{\omega, \mathbf{k}}$ — спектральная компонента вектора электрической индукции.

В сильных полях зависимость $P[E]$ становится нелинейной. Ее удобно представить в виде

$$\hat{P}(E) = \hat{P}^L(E) + \hat{P}^{NL}(E), \quad (1.5)$$

отделив линейную часть и представив нелинейное слагаемое в виде разложения по степеням поля E :

$$\hat{P}^{NL}(E) = \hat{\chi}_2^{(3)} : EE + \hat{\chi}_3^{(4)} : EEE + \dots, \quad (1.6)$$

где $\hat{\chi}_i^{(i+1)}$ — тензорные операторы ранга $i+1$, описывающие аналогично (1.1) эффекты пространственно-временной нелокальности нелинейного отклика.

В изотропных средах, рассмотрением которых мы и ограничимся, $\hat{\chi}_2^{(3)} = 0$, и первое отличное от нуля слагаемое в (1.6) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} P_3 = & \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{\infty} dt_3 \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 \hat{\chi}_3^{(4)}(t_1, t_2, t_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ & \times E(t-t_1, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1) E(t-t_1-t_2, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \times \\ & \times E(t-t_1-t_2-t_3, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Среды с такой нелинейностью принято называть кубичными. Переходя к спектральному представлению поля

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

и ограничиваясь для простоты средами с пренебрежимо малой пространственной дисперсией, вместо (1.7) можно написать соотношение

$$\begin{aligned} P_3 = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_3^{(4)}(\omega_a, \omega_b, \omega_c) E_{\omega}(\omega_a) E_{\omega}(\omega_b) \times \\ & \times E_{\omega}(\omega_c) \exp[i(\omega_a + \omega_b + \omega_c)t] d\omega_a d\omega_b d\omega_c, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\hat{\chi}_3^{(4)}(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = \int_0^\infty \hat{\chi}_3^{(4)}(t_1, t_2, t_3) \times \\ \times \exp[-i\omega_a t_1 - i\omega_b(t_1 + t_2) - i\omega_c(t_1 + t_2 + t_3)] dt_1 dt_2 dt_3 \quad (1.9)$$

— тензор нелинейной восприимчивости четвертого ранга.

При воздействии на среду монохроматического поля

$$E(t) = \text{Re} [E_\omega \exp(i\omega t)] = [E_\omega \exp(i\omega t) + E_\omega^* \exp(-i\omega t)] / 2 \quad (1.10)$$

в отклике P_3 можно выделить слагаемые на частоте внешнего поля

$$P(t) = [P_\omega \exp(i\omega t) + P_\omega^* \exp(-i\omega t)] / 2 \quad (1.11)$$

с комплексной амплитудой

$$P_\omega = \frac{3}{4} \hat{\chi}_3^{(4)}(\omega, \omega, -\omega) E_\omega E_\omega E_\omega^* \quad (1.12)$$

Наличием такого слагаемого и объясняются эффекты самовоздействия поля в среде.

Известно много механизмов воздействия поля на среду, ответственных за кубичную нелинейность отклика. Они характеризуются большим диапазоном значений нелинейных восприимчивостей, времен релаксации (установления нелинейной поляризации) и пространственных масштабов отклика. К числу преобладающих механизмов с пространственно локальным откликом в жидкости и газе можно отнести ориентационный эффект Керра [4, 13, 66], связанный с выстраиванием по полю анизотропно поляризуемых молекул; в твердых телах — электронный эффект Керра [67, 68], обусловленный ангармонизмом колебаний связанных электронов в сильных полях; в плазме — релятивистский эффект зависимости массы свободных колеблющихся электронов от амплитуды колебаний [69].

Нелинейности, связанные с нагревом среды проходящим излучением, ионизацией вещества, перемещением его под действием пондермоторных сил (электрострикция), как правило, носят нелокальный характер. Однако и здесь возможны случаи (в частности, для стационарных во времени полей), когда нелинейность становится локальной.

В дальнейшем ограничимся преимущественно рассмотрением эффектов самовоздействия волн в изотропных средах с локальной кубичной нелинейностью. Нелинейная поляризация (1.12) в этом случае может быть представлена в виде [64, 65, 70, 71]

$$P_{\omega,i} = \chi_{ijkl}(\omega, \omega, -\omega) E_{\omega,j} E_{\omega,k} E_{\omega,l}^* \quad (1.13)$$

где $E_{\omega,j}$ ($j = x, y, z$) и $P_{\omega,i}$ — спектральные (на частоте ω) компоненты напряженности электрического поля и нелинейной поляризации, а тензор нелинейной восприимчивости четвертого ранга χ_{ijkl} вследствие изотропности среды имеет лишь три независимые компоненты [71]

$$\begin{aligned} \chi_{xxxx} &= \chi_{yyyy} = \chi_{zzzz}, \\ \chi_{yyzz} &= \chi_{xxyy} = \chi_{zzyy} = \chi_{zzxx} = \chi_{xxzz} = \chi_{yyxx}, \\ \chi_{yzyz} &= \chi_{zyzy} = \chi_{zxzx} = \chi_{xzxz} = \chi_{xyxy} = \chi_{yxyx}, \\ \chi_{yzyz} &= \chi_{zyzy} = \chi_{zxzx} = \chi_{xzxz} = \chi_{yxyx} = \chi_{xyxy}, \\ \chi_{xxxx} &= \chi_{xxyy} + \chi_{xyxy} + \chi_{yxyx} \end{aligned} \quad (1.14)$$

С учетом этих соотношений нелинейная поляризация в кубической нелинейной среде представляется в виде [65, 71]

$$P_{\omega}^{NL} = A(E_{\omega} E_{\omega}^*) E_{\omega} + \frac{B}{2} (E_{\omega} E_{\omega}) E_{\omega}^* \quad (1.15)$$

где

$$A = \chi_{xxyy} + \chi_{xyxy} \quad (1.16)$$

$$B = \chi_{xyxy} \quad (1.17)$$

а полная индукция D_{ω} может быть найдена из соотношения

$$D_{\omega} = \epsilon_0 E_{\omega} + 4\pi P_{\omega}^{NL} \quad (1.18)$$

Для линейно поляризованного поля последнее соотношение позволяет определить нелинейную диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon^{NL} = \epsilon_0 + 4\pi \left(A + \frac{B}{2} \right) |E_{\omega}|^2 = \epsilon_0 \left(1 + \epsilon'_2 |E_{\omega}|^2 \right), \quad (1.19)$$

где коэффициент нелинейности

$$\epsilon'_2 = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \left(A + \frac{B}{2} \right) = \frac{4\pi}{\epsilon_0} (\chi_{xxyy} + \chi_{xyxy} + \chi_{yxyx}) = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \chi_{xxxx} \quad (1.20)$$

выражается через одну диагональную компоненту тензора диэлектрической восприимчивости среды. Часто в нелинейной оптике ис-

пользуется представлением о нелинейном коэффициенте преломления, который по традиции [4, 64, 65] записывается в виде

$$n = n_0 + n_2 \langle E^2 \rangle. \quad (1.21)$$

Здесь $n_0 = \varepsilon_0^{1/2}$ — линейный коэффициент преломления среды; $\langle E^2 \rangle = |E_\omega|^2/2$ — среднеквадратичное значение напряженности электрического поля. Учитывая малость нелинейной поправки, коэффициент нелинейности n_2 легко связать с ε'_2 :

$$n_2 = n_0 \varepsilon'_2 = \frac{4\pi}{n_0} \left(A + \frac{B}{2} \right). \quad (1.22)$$

При описании полей с произвольной поляризацией удобнее перейти к рассмотрению циркулярно поляризованных полей с комплексными амплитудами

$$P_{\mp} = \frac{P_x \mp iP_y}{2^{1/2}}, \quad E_{\mp} = \frac{E_x \mp iE_y}{2^{1/2}}, \quad (1.23)$$

для которых из (1.15) устанавливаются соотношения

$$\begin{aligned} P_{\omega+}^{NL} &= \left[A(|E_+|^2 + |E_-|^2) + B|E_-|^2 \right] E_+ = \chi_+ E_+, \\ P_{\omega-}^{NL} &= \left[A(|E_-|^2 + |E_+|^2) + B|E_+|^2 \right] E_- = \chi_- E_-. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Из этих соотношений следует, что в общем случае эллиптически поляризованных волн, когда $|E_+| \neq |E_-|$, проницаемости χ_+ и χ_- различны, если $B \neq 0$. Различие в коэффициентах преломления циркулярных составляющих эллиптически поляризованной плоской волны

$$n_+ - n_- = \frac{2\pi B}{n_0} (|E_-|^2 - |E_+|^2) \quad (1.25)$$

приводит на пути L к их дополнительной расфазировке на величину

$$\Delta \phi = k_0(n_+ - n_-) L \quad (1.26)$$

и, соответственно, к повороту осей эллипса поляризации на угол

$$\theta = \frac{\Delta \phi}{2} = \frac{k_0(n_+ - n_-) L}{2}. \quad (1.27)$$

Эффект поворота эллипса поляризации впервые описан в работе [72]. Он объясняется наведенной полем анизотропией исходно изотропной среды и наблюдается при $B = 2 \chi_{xyyx} \neq 0$.

На основе соотношений (1.24) можно рассчитать и коэффициент преломления для чисто циркулярно поляризованной волны:

$$n_{\pm} = n_0 + \frac{2\pi A |E_{\pm}|^2}{n_0} = n_0 + n_{20} |E_{\pm}|^2. \quad (1.28)$$

В средах с наведенной анизотропией ($B \neq 0$) коэффициенты нелинейности n_2 и n_{20} соответственно линейно и циркулярно поляризованных полей могут отличаться в несколько раз. Отметим, что в жидкостях и газах такие механизмы, как нагрев, электрострикция, ионизация, к анизотропии нелинейности не приводят.

Дадим необходимую для дальнейшего краткую характеристику некоторых нелинейных механизмов.

В жидкостях и газах заметный вклад в нелинейную поляризуемость вносит ориентационный эффект Керра. Он возникает в средах с анизотропно поляризуемыми молекулами и заключается в преимущественной ориентации осей наибольшей поляризуемости молекул по направлению электрического поля. Теория эффекта устанавливает универсальное соотношение $B = 6A$ [13, 71], при этом $n_2^{(k)} = 4n_{20}^{(k)}$. Величина $n_2^{(k)}$ варьируется в широких пределах в зависимости от степени анизотропии поляризуемости молекул, достигая в сильно нелинейных жидкостях (таких, как сероуглерод CS_2) значений $10^{-11} - 10^{-12}$ ед. СГСЕ.

Время установления керровской нелинейности τ_k по порядку величины совпадает со временем релаксации вращательного движения молекул и сильно зависит от вязкости среды. В атмосферных газах при нормальных условиях оно порядка 10^{-11} с, в жидкостях меняется в широких пределах: $10^{-8} - 10^{-11}$ с.

В твердых телах ориентационный эффект Керра практически отсутствует, а на первый план для коротких импульсов выступает электронная нелинейность, обусловленная ангармонизмом колебательного движения электронов и атомов (электронный эффект Керра). Он является преобладающим в жидкостях и газах со слабо анизотропными молекулами.

Если в нелинейности отсутствует поглощение и дисперсия в широкой полосе частот, начиная с нулевой, то все компоненты тензора χ равны статическим, для которых вследствие изотропии вещества имеет место равенство [65, 71]

$$\chi_{xxyy} = \chi_{xyxy} = \chi_{xyyx},$$

что приводит к соотношениям $A = B$ и $n_2^{(e)} = (3/2) n_{20}^{(e)}$. Таким свойством обладает электронная нелинейность в газах, жидкостях и твер-

дых телах, вызванная деформацией электронных орбит и смещением электронных уровней в сильном высокочастотном поле (эффект Штарка), а также релятивистская нелинейность в плазме, обусловленная зависимостью массы электрона от скорости.

Электронная нелинейность приводит к относительно низким значениям компонент тензора нелинейной восприимчивости ($n_2^{(e)} \approx 10^{-13}$ ед. СГСЕ в твердых телах и жидкостях и уменьшается в более разреженных средах). Однако относительно малое время релаксации ($\tau_e \approx 10^{-15} - 10^{-16}$ с) делает ее преобладающей в установках импульсного излучения большой мощности и малой длительности. В частности, нелинейность оптических элементов ограничивает возможность применения мощных лазерных систем для решения задач управляемого термоядерного синтеза [73].

Расчет коэффициента $n_2^{(e)}$ для электронной нелинейности представляет сложную квантово-механическую задачу. Классический вариант основывается на модели Фойгта [71]. Обычно этот коэффициент определяется по косвенным данным измерений характеристик оптических эффектов, связанных с кубичной нелинейностью среды (генерация оптических гармоник, поворот эллипса поляризации, эффект Керра в статических и переменных полях и т. д.), что возможно из-за слабой дисперсии компонент тензора χ_{ijkl} . Существуют и прямые методы измерения $n_2^{(e)}$ по самовоздействию света [62, 74].

Для стекол характерные значения $n_2^{(e)}$ в диапазоне длин волн $\lambda \approx 0,4 - 1$ мкм имеют порядок единиц 10^{-13} ед. СГСЕ, причем нелинейность меньше для фторборилатных стекол [73]; для жидкостей $n_2^{(e)}$ обычно несколько больше [74]; для атмосферных газов (азот, кислород) при нормальной плотности $n_2^{(e)} \approx (3-6) \times 10^{-17}$ ед. СГСЕ [76].

Расчет релятивистской нелинейности в плазме дает следующее значение [69]:

$$n_2^{(e)} = \frac{3 \omega_p^2 e^2}{4 \omega^4 m^2 c^2 n_0}, \quad (1.29)$$

где $\omega_p = \frac{4\pi N e^2}{m}$ — плазменная частота, N — концентрация электронов, ω — круговая частота, c — скорость света, e и m — заряд и масса электрона. Согласно (1.29), при $\omega \approx 2\omega_p \approx 10^{16}$ с⁻¹ $n_2^{(e)} \approx 6,65 \cdot 10^{-19}$ ед. СГСЕ.

Характерные значения коэффициента n_2 для различных веществ и различных типов нелинейностей, в том числе и для локальной

стрикционной $n_2^{(s)}$ (см. ниже), приведены в таблице. Там же указана длина волны. Следует иметь в виду, что значения n_2 для жидкостей и газов даны расчетные [7, 19] для температуры 20°C и для нормального давления. Для твердых тел значения $n_2^{(e)}$ взяты из экспериментов [14, 16].

Название вещества	λ , мкм	$n_2^{(s)}$	$n_2^{(k)}$	$n_2^{(e)}$
Четыреххлористый углерод	0,589	$0,713 \cdot 10^{-12}$	$0,263 \cdot 10^{-12}$	
Сероуглерод	0,589	$1,49 \cdot 10^{-12}$	$12,81 \cdot 10^{-12}$	
Бензол	0,589	$0,783 \cdot 10^{-12}$	$2,252 \cdot 10^{-12}$	
Нитробензол	0,589	$0,542 \cdot 10^{-12}$	$10,37 \cdot 10^{-12}$	
Ацетон	0,589	$0,442 \cdot 10^{-12}$	$0,405 \cdot 10^{-12}$	
Кварц	1,06			$0,93 \cdot 10^{-13}$
Стекло ГЛС-1	1,06			$(1,16-1,8) \cdot 10^{-13}$
Стекло ED-2	1,06			$1,51 \cdot 10^{-13}$
Азот	1,06		$6 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-17}$
Кислород	1,06		$12 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-17}$
Водород	1,06		$1 \cdot 10^{-17}$	$2,1 \cdot 10^{-17}$
CO ₂	1,06		$60 \cdot 10^{-17}$	$18 \cdot 10^{-17}$

Более полные данные о коэффициентах нелинейности для различных механизмов приведены в таблицах [62, 73, 74, 76].

1.2. Нелокальные механизмы нелинейности

Одной из причин возникновения нелокальной нелинейности диэлектрической проницаемости среды является электрострикция [4], т. е. изменение плотности среды ρ под действием усредненной пондермоторной силы:

$$\mathbf{f} = -\nabla \left(\frac{\rho}{16\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} |E|^2 \right). \quad (1.30)$$

В изотропной плазме с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2} \quad (1.31)$$

пандермоторная сила, действующая на один электрон

$$\mathbf{f} = \nabla \left(\frac{e^2 |E|^2}{4m \omega^2} \right), \quad (1.32)$$

получила название силы Миллера.

Изменение плотности ρ' в жидких и газообразных средах под действием стрикционной силы, как правило, невелико и может быть описано уравнением упругих волн

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \rho' = \text{div } \mathbf{f}, \quad (1.33)$$

где v_s — скорость звука в среде.

В пучке радиуса a установление плотности под действием высокочастотного поля происходит с характерным временем $\tau_s = a/v_s$, равным времени пробега звука поперек пучка. Для коротких импульсов с длительностью $\tau_{\mu} < \tau_s$ этот процесс носит нелокальный нестационарный характер. При $\tau_{\mu} \gg \tau_s$ стрикционная нелинейность становится локальной с коэффициентом

$$n_2^{(s)} = \frac{\rho \epsilon_p'^2}{16\pi n_0 v_s^2}. \quad (1.35)$$

В жидкостях коэффициент $n_2^{(s)}$ может достигать значений порядка 10^{-12} ед. СГСЕ (например, в CS_2 $n_2^{(s)} \approx 1,5 \times 10^{-12}$ ед. СГСЕ [4, 66]), в газах

$$n_2^{(s)} = \frac{(\epsilon - 1)^2}{16\pi \rho v_s^2 n_0} \quad (1.36)$$

и при нормальных условиях имеет порядок 10^{-15} ед. СГСЕ [76].

В плазме

$$n_2^{(s)} = \frac{\omega_p^2 e^2}{8m_e \omega^4 \chi_T T n_0}, \quad (1.37)$$

где χ_T — постоянная Больцмана, T — температура. При $T_e \approx 1$ кэВ, $\omega \approx 2 \omega_p \approx 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $n_2^{(s)} \approx 10^{-16}$ ед. СГСЕ.

В импульсных оптических полях роль стрикционной нелинейности из-за большого времени установления, как правило, незначительна на фоне других нелинейностей. Исключением являются поля в плазме, где сильное увеличение $n_2^{(s)}$ с понижением частоты делает механизм стрикционной нелинейности преобладающим как в стационарном, так и нестационарном режимах. С этим механизмом связан, в частности, коллапс ленгмюровских волн [75].

При стрикционной нелинейности жидкая или газообразная среда при прохождении электромагнитной волны остается изотропной. Поэтому в стационарном случае в (1.15) $B = 0$. В твердых телах описание стрикционной нелинейности усложняется из-за анизотропии деформации среды.

Другим типом нелокальной нелинейности среды является тепловая, обусловленная поглощением энергии волны и нагревом вещества. При нагреве коэффициент преломления меняется как из-за уменьшения плотности вещества при расширении, так и из-за повышения температуры:

$$n'_T = (n'_\rho)_T \Delta \rho + (n'_T)_\rho \Delta T. \quad (1.38)$$

Обычно первый эффект преобладает и коэффициент преломления в поле волны уменьшается, что вызывает ее дефокусировку. Однако в ряде твердых веществ, таких, как сапфир, кварц, кальцит, в определенных интервалах температур $(n'_T)_\rho > 0$ и преобладающий вклад второго слагаемого в (1.38) приводит к $n'_T > 0$, т. е. нелинейность носит фокусирующий характер [18].

Распределение температуры в поле волнового пучка описывается диффузионным уравнением

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{cn \delta |E|^2}{8\pi}, \quad (1.39)$$

где ρ — плотность, χ — коэффициент теплопроводности, δ — коэффициент поглощения, c_p — удельная теплоемкость.

Характерное время установления температуры $\tau_T = \frac{c_p \rho a^2}{\chi}$. При длительности импульса излучения $\tau_{\text{из}} \gg \tau_T$ в пучке устанавливается стационарное распределение, описываемое уравнением

$$\chi \Delta T = - \frac{cn \delta |E|^2}{8\pi}. \quad (1.40)$$

На временах $t \ll \tau_T$ распределение температуры нестационарно и локально связано с интенсивностью поля:

$$T = \frac{cn \delta}{8\pi \rho c_p} \int_0^t |E|^2 dt. \quad (1.41)$$

В жидкостях и газах тепловая нелинейность изотропна, в твердых телах появление термоупругих деформаций из-за неоднородного нагрева приводит к анизотропии оптических характеристик среды.

Из-за сравнительно низкого энергетического порога тепловое самовоздействие наблюдается в слабопоглощающих средах даже в пучках маломощных непрерывных лазеров [77].

Нагрев вещества может сопровождаться целым рядом побочных эффектов, усложняющих тепловое самовоздействие. Это дополнительная диссоциация молекул [20], ионизация атомов [78], конвекция в жидкостях и газах [79], испарение аэрозолей [80] и т. п.

Глава 2

МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ САМОФОКУСИРОВКИ И САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В основе математического аппарата, применяемого при описании волновых пучков и пакетов в нелинейных и неоднородных средах, лежит метод параболического уравнения. Пионерская работа, посвященная этому методу, была опубликована в 1944 году М. А. Леонтовичем при решении задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли [81]. В дальнейшем этот метод успешно применялся в теории распространения волн над неоднородной поверхностью земли [82], теории открытых резонаторов и волноводов [83, 84], в задачах нелинейной оптики [85–87], физики плазмы, сейсмоки, подводной акустики [88, 90, 96], в теории распространения волн в ионосфере [89] и во многих других задачах.

2.1. Метод параболического уравнения

Известны различные приемы перехода от исходных уравнений поля к параболическому. Общим для них является предложенное М. А. Леонтовичем представление решения в виде произведения двух функций: быстро меняющейся функции, служащей геометрическим "костяком" решения, и медленно меняющейся (по терминологии М. А. Леонтовича — "функция ослабления"), передающей остальные характеристики дифракционных и дисперсионных эффектов как результат комплексной диффузии лучевой амплитуды поля.

Простейшей иллюстрацией может служить переход к параболическому уравнению от уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k_0^2 U = 0, \tag{2.1}$$

осуществляемый заменой

$$U = U_0 \exp(-ik_0 z), \quad (2.2)$$

где k_0 — волновое число.

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к уравнению

$$\Delta_{\perp} U_0 + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

где Δ_{\perp} — лапласиан по поперечным координатам x и y .

Пренебрежение в последнем уравнении слагаемым $\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$ переводит его в параболическое уравнение:

$$2ik_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} = \Delta_{\perp} U_0. \quad (2.4)$$

Такая процедура может быть оправдана при выполнении условий

$$k_0 \Lambda_{\perp} \gg 1, \Lambda_{\parallel} \approx k_0 \Lambda_{\perp}^2 \gg \Lambda_{\perp}, \quad (2.5)$$

где Λ_{\perp} и Λ_{\parallel} — соответственно характерные поперечный и продольный масштабы изменения комплексной амплитуды U_0 .

В представлении (2.2) опорным решением является плоская волна. Некоторые обобщения метода Леонтовича на случай произвольных лучевых координат и ряд наглядных иллюстраций этого метода принадлежат Г. Д. Малюжину [91], а также даны в работах [92–95] по дифракции волн на искривленных поверхностях.

Различные обобщения метода параболического уравнения, применимые к описанию волновых пучков и пакетов в слабонеоднородных и нелинейных средах, можно получить, основываясь на дисперсионных соотношениях для волн. Подстановка в (2.4) решения типа плоской волны

$$U_0 = A \exp(-ik_{\perp} r_{\perp} - i\Gamma z) \quad (2.6)$$

приводит к характеристическому уравнению

$$\Gamma = -\frac{k_{\perp}^2}{2k_0} \equiv \Gamma_{pe}. \quad (2.7)$$

Точное значение постоянной распространения Γ согласно (2.3) равно

$$\Gamma_T = -k_0 + (k_0^2 - k_{\perp}^2)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Сопоставление (2.7) и (2.8) показывает, что параболическое уравнение соответствует так называемому малоугловому приближению

$k_{\perp}^2/(2k_0^2) \ll 1$ в описании плоских волн, когда в разложении продольного волнового числа $k_z = k_0 + \Gamma = (k_0^2 - k_{\perp}^2)^{1/2}$ по степеням $k_{\perp}^2/(2k_0^2)$

$$k_z = k_0 - \frac{k_{\perp}^2}{2k_0} - \frac{k_{\perp}^4}{8k_0^3} - \frac{k_{\perp}^6}{16k_0^5} - \dots \quad (2.9)$$

можно ограничиться первыми двумя членами. Оценивая ошибку $\Delta k_z = \Gamma_{pe} - \Gamma_T$ в определении k_z величиной первого отброшенного в (2.9) члена $k_{\perp}^4/(8k_0^3)$, найдем, что оба описания слабо расходятся по фазе на расстояниях таких, что

$$\Delta k_z z = \frac{k_{\perp}^4}{8k_0^3} z \ll \pi \quad (2.10)$$

или

$$z \ll \frac{8\pi}{k_0 \theta_L^4}, \quad (2.11)$$

где $\theta_L = \frac{k_{\perp}}{k_0}$ — угол отклонения волнового вектора плоской волны от направления оси z .

Учитывая, что в волновом пучке с характерным размером Λ_{\perp} переход в зону Фраунгофера определяется условием

$$z > z_d = k_0 \Lambda_{\perp}^2 \approx \frac{k_0}{k_{\perp}^2} \approx \frac{1}{k_0 \theta_{1\max}^2},$$

где $\theta_{1\max}$ — расходимость пучка, из (2.11) найдем, что описание пучка с помощью параболического уравнения будет справедливо вплоть до зоны Фраунгофера, если только его расходимость мала ($\theta_{1\max} \ll 1$).

Обобщение параболического уравнения (2.4) на квазимонохроматические поля в слабо неоднородных диспергирующих средах можно получить, воспользовавшись более общим, чем (2.9), разложением продольного волнового числа

$$k_z = k_0 \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) + \frac{1}{v} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k'_{\omega \omega} (\omega - \omega_0)^2 - \frac{k_{\perp}^2}{2k_0} + \dots, \quad (2.12)$$

где $\delta = \frac{\varepsilon(r)}{\varepsilon_0} - 1$ — относительное изменение диэлектрической проницаемости среды ($|\delta| \ll 1$); $k_0 = k(\omega_0)$, $v = (k'_{\omega})^{-1}$ — групповая скорость.

Параболическое уравнение для разложения (2.12)

$$2ik_0 \left(\frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial U_0}{\partial t} \right) = -k''_{\omega} \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \Delta_{\perp} U_0 + k_0^2 \delta U_0 \quad (2.13)$$

переходом в сопровождающую бегущий импульс систему координат ($z' = z$, $\xi = z - vt$) записывается в виде

$$2ik_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} = k_0 v'_{\omega} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} + \Delta_{\perp} U_0 + k_0^2 \delta U_0. \quad (2.14)$$

Под U_0 обычно понимается одна из поперечных к направлению распространения z компонент напряженности электрического поля E_{\perp} . При этом продольная компонента E_z может быть найдена из уравнения

$$E_z = \frac{1}{ik_0} \left(\operatorname{div}_{\perp} E_{\perp} + \frac{\nabla_{\perp} \varepsilon}{\varepsilon} E_{\perp} \right), \quad (2.15)$$

вытекающего из уравнения $\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$ при условиях (2.5).

Уравнение (2.14) описывает изменение формы пространственно ограниченного волнового импульса как диффузию его амплитуды вдоль оси z относительно центра пакета $z_{\text{ц}} = vt$ вследствие дисперсии и поперек оси z вследствие дифракции. Рефракция лучей учитывается при этом слагаемым $k_0^2 \delta U_0$. Уравнения (2.14), взятые в отдельности без учета дифракции (плоский импульс) и без учета дисперсии (мономатический волновой пучок), подобны друг другу. Это подобие лежит в основе пространственно-временной аналогии в описании волновых пучков и пакетов [42].

Параболическое уравнение (2.14) выписано для изотропной среды. Используя разложения произвольного дисперсионного соотношения $F(\omega, \mathbf{k}) = 0$, аналогичные (2.12), нетрудно обобщить параболическое уравнение на волны в анизотропных средах. Ограничимся случаем наведенной анизотропии, описываемой нелинейной поляризацией (1.15). Полагая

$$\mathbf{E}_{\omega \perp} = \mathbf{E}_{\perp} \exp(-ik_0 z), \quad \mathbf{P}_{\omega \perp}^{NL} = \mathbf{P}_{\perp}^{NL} \exp(-ik_0 z),$$

нетрудно получить уравнение, обобщающее (2.14):

$$2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} = k_0 v'_{\omega} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\perp}}{\partial \xi^2} + \Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \frac{4\pi k_0^2}{\varepsilon_0} \mathbf{P}_{\perp}^{NL}, \quad (2.16)$$

где в нелинейной поляризации

$$\mathbf{P}_{\perp}^{NL} = A(\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}) \mathbf{E}_{\perp} + B(\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}) \mathbf{E}_{\perp}$$

пренебрежено вкладом продольных компонент напряженности электрического поля.

2.2. Обобщенные параболические приближения

Подход Леонтовича, использованный им в первой работе [81], а также его многочисленные более поздние варианты в конкретных задачах (например, в подводной акустике [96]) приводят к параболическому уравнению стандартного вида (2.15), применимому в малоугловом приближении для слабонеоднородных сред $\delta = n^2 - 1 \ll 1$. Известны различные уточнения параболического приближения, применимые к неоднородным средам и сильно расходящимся пучкам.

Основная идея использования параболических уравнений в неоднородных средах с проницаемостью $\epsilon(r)$ [90, 97–99, 101, 102] состоит в выделении опорного экстремального луча, около которого концентрируется поле волнового пучка. Траектория r_0 этого луча удовлетворяет уравнениям геометрической оптики [100]:

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla \epsilon, \quad \frac{1}{R_k} = \frac{1}{2\epsilon} (n \nabla \epsilon),$$

где n — нормаль к r_0 , R_k — радиус кривизны траектории, $d\tau = ds/\epsilon^{1/2}$, s — длина дуги опорного луча.

Введем связанную с кривой r_0 локальную систему координат, состоящую из координат s , ξ (длина по нормали к кривой n) и η (длина по бинормали к кривой b). Используя связь между декартовыми и новыми координатами, а также формулы Френе — Серре, вычислим метрический тензор g_{ik} , необходимый для записи уравнений поля:

$$g_{ss} = \left(1 - \frac{\xi}{R_k}\right)^2 + \frac{\xi^2}{R_T^2} + \frac{\eta^2}{R_T^2} \equiv H^2,$$

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = 1, \quad g_{\eta\xi} = g_{\xi\eta} = 0,$$

$$g_{\eta s} = \frac{\xi}{R_T}, \quad g_{\xi s} = -\frac{\eta}{R_T},$$

где R_T — радиус кручения траектории r_0 . В дальнейшем пренебрежем кручением траектории, вследствие чего в дифференциальные операторы войдут только коэффициенты g_{ii} .

Предположим, что в данном сечении поляризация линейна, совпадает с поляризацией на траектории луча r_0 и определяется из уравнения геометрической оптики.

Будем искать поле в виде

$$E = u(\tau) \frac{E_0(\xi, \eta, \tau)}{[\varepsilon(\tau)/\varepsilon(0)]^{1/4}} \exp \left\{ -ik_n \int_0^\tau [\varepsilon(\tau)/\varepsilon(0)]^{1/2} d\tau \right\}, \quad (2.17)$$

где $u(\tau)$ — единичный вектор поляризации, E_0 — медленно меняющаяся амплитуда поля, k_n — величина волнового вектора в начале среды. Подставляя (2.17) в уравнения электромагнитного поля, предполагая малость изменения показателя преломления на длине волны $k_n^{-1} \varepsilon^{1/2} \frac{d\varepsilon^{1/2}}{ds} \ll 1$, пренебрегая членами порядка $(k_n \Lambda_{\parallel})^{-2}$, где Λ_{\parallel} — характерный масштаб продольного изменения пучка, получим уравнение для медленно меняющейся амплитуды поля:

$$2ik_n \frac{\partial E_0}{\partial \tau} + H^2 \Delta_{\perp} E_0 + \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \frac{H^2 \cdot \partial}{2} \frac{E_0}{\xi} + k_n^2 [H^2 \cdot \varepsilon(r) - \varepsilon(0)] E_0 = 0. \quad (2.18)$$

Для пучков, поперечный масштаб которых Λ_{\perp} вдоль всей траектории много меньше радиуса кривизны ($\Lambda_{\perp} \ll R_k$), в уравнении (2.18) можно провести разложение коэффициентов по отношению ξ/R_k и сохранить члены порядка $(\xi/R_k)^2$:

$$2ik_n \frac{\partial E_0}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} E_0 + k_n^2 \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} - \frac{3\varepsilon}{R_k^2} \right) \xi^2 + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi \partial \eta} \eta \xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} \eta^2 \right] E_0 = 0. \quad (2.19)$$

Отсюда видно, что неоднородная среда оказывает фокусирующее действие на пучок. Линзоподобность связана с двумя эффектами: наличием в разложении $\varepsilon(r)$ по поперечным координатам квадратных членов и ненулевой кривизной траектории луча. В связи с этим фокусирующие члены появляются даже для слоя с линейной

$\left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \equiv 0 \right]$ зависимостью ε от координат. К исследованию уравнения типа (2.19) и его обобщений на нелинейные среды можно применить линзовое преобразование, сводящее его к параболическому уравнению для однородной среды [30, 97, 98], что позволяет рассмотреть, в

частности, целый ряд задач о самовоздействии волн в плавно неоднородных средах.

Для описания сильно расходящихся пучков параболическое уравнение должно быть дополнено членами, учитывающими более высокие, чем вторая, степени поперечных волновых чисел. Покажем это на примере уравнений электромагнитного поля, которые запишем в следующем виде:

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0, \quad (2.20)$$

$$\text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0.$$

Согласно п. 2.1 в первом приближении для поперечных компонент $\mathbf{E}_{\perp 0}$ поля \mathbf{E}_0 имеем

$$2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp 0}}{\partial z} = \Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp 0} + k_0^2(\varepsilon - 1) \mathbf{E}_{\perp 0} \quad (2.21)$$

и (2.15) для E_{z0} .

Выделим в (2.20) "поперечную" часть:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp 0} - 2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp 0}}{\partial z} + k_0^2(\varepsilon - 1) \mathbf{E}_{\perp 0} + \\ + \left[\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\perp 0}}{\partial z^2} - \text{grad}_{\perp} \text{div } \mathbf{E} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Найдем производную $\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{\perp 0}}{\partial z^2}$ из (2.21), подставим ее и E_{z0} из (2.16) в уравнение (2.22), и, опуская члены более высокого порядка по параметрам $k_0 a$ и $\varepsilon - 1$, получим

$$\begin{aligned} 2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp 0}}{\partial z} = \Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp 0} + k_0^2(\varepsilon - 1) \mathbf{E}_{\perp 0} - \\ - \left\{ \frac{1}{4k_0^2} \Delta_{\perp} \left[\Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp 0} + k_0^2(\varepsilon - 1) \mathbf{E}_{\perp 0} \right] - \frac{1}{4} (\varepsilon - 1) \Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp 0} - \right. \\ \left. - \frac{k_0^2(\varepsilon - 1)^2}{4} \mathbf{E}_{\perp 0} + \frac{k_0}{2i} \varepsilon'_z \mathbf{E}_{\perp 0} \right\} + \nabla_{\perp} \left[\frac{(\text{grad}_{\perp} \varepsilon) \mathbf{E}_{\perp 0}}{\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.23) эквивалентно удержанию в разложении k_z по k_{\perp} членов k_{\perp}^4 . В (2.23), кроме поправок, обусловленных продольной диффузией лучевой амплитуды (член порядка $\Delta_{\perp} \Delta_{\perp} \mathbf{E}_{\perp 0}$), имеются поправки, возникающие вследствие векторно-

сти уравнений и неоднородности среды. В некоторых задачах эти поправки играют существенную роль (см. далее гл. 7).

Изложенная процедура может быть продолжена, однако она недостаточно эффективна из-за медленного убывания последующих членов, к тому же, при ее использовании мы остаемся в рамках описания однонаправленного распространения волн, не позволяющего учесть влияние встречной волны. Более эффективным является метод факторизации, который продемонстрируем на примере уравнения Гельмгольца для неоднородной среды [215]:

$$\hat{L}U = [\Delta + k^2 n(r)^2] U = 0. \quad (2.24)$$

Перепишем уравнение (2.24) в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \hat{Q}U = 0, \quad (2.25)$$

где $\hat{Q} = \Delta_{\perp} + k^2 n^2(r)$, а z — некоторое выделенное направление. Положим $\hat{Q} = \hat{h}^2$ и введем в рассмотрение операторы

$$\hat{L}_+ = \frac{\partial}{\partial z} + i\hat{h}, \quad \hat{L}_- = \frac{\partial}{\partial z} - i\hat{h}. \quad (2.26)$$

Их можно назвать соответственно операторами прямых и обратных волн, так как в малоугловом приближении в однородной среде они описывают волновые пучки, распространяющиеся в $+z$ - и $-z$ -направлениях.

Нетрудно убедиться, что

$$\hat{L} = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+), \quad \hat{L}_+ \hat{L}_- - \hat{L}_- \hat{L}_+ = -2i\hat{h}'_z. \quad (2.27)$$

В однородной или продольно-слоистой среде $\hat{h}'_z \equiv 0$, операторы \hat{L}_+ , \hat{L}_- коммутируют друг с другом и $\hat{L} = \hat{L}_+ \hat{L}_- \equiv \hat{L}_- \hat{L}_+$. В этом случае полное поле разбивается на прямую и обратную волны

$$U = U_+ + U_-, \quad (2.28)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\hat{L}_+ U_+ = 0, \quad \hat{L}_- U_- = 0. \quad (2.29)$$

В продольно-неоднородной среде ($\hat{h}'_z \neq 0$) уравнения (2.29) обобщаются на систему связанных уравнений для встречных волновых пучков:

$$\begin{cases} \hat{L}_+ U_+ = \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\hat{h} \right) U_+ = -\frac{1}{2} \hat{h}^{-1} \hat{h}'_z (U_+ - U_-), \\ \hat{L}_- U_- = \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\hat{h} \right) U_- = \frac{1}{2} \hat{h}^{-1} \hat{h}'_z (U_+ - U_-), \end{cases} \quad (2.30)$$

где \hat{h}^{-1} — обратный оператор. Неоднородность среды по координате z приводит как к реверберации, т. е. перерасеянию встречных пучков друг в друга, так и изменению их амплитуд.

Различные описанные в литературе уточнения параболического уравнения связаны со способами аппроксимации псевдодифференциального оператора $\hat{h} = \hat{Q}^{1/2}$ и учетом связи встречных пучков.

Положим

$$\hat{Q} = k_0^2(1 + \hat{q}); \quad \hat{h} = k_0(1 + \hat{q})^{1/2}, \quad (2.31)$$

где $\hat{q} = n^2 - 1 + \frac{1}{k_0^2} \Delta_\perp$. Стандартное параболическое приближение [107] получается при представлении оператора \hat{h} рядом Тейлора

$$\hat{h} = k \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} - \frac{\hat{q}^2}{8} + \frac{\hat{q}^3}{16} + \dots \right), \quad (2.32)$$

если в нем ограничиться двумя первыми слагаемыми:

$$\hat{h} = k(1 + \hat{q}/2). \quad (2.33)$$

Учет последующих слагаемых хотя и улучшает точность аппроксимации, но не является достаточно эффективным: m -е приближение дает точность пропорциональную $|\hat{q}|^{m+1}$; к тому же повышение порядка поперечных производных усложняет вычислительные процедуры.

Заметим, что для плоской волны в слоистой среде оператор \hat{q} может быть представлен в виде

$$\hat{q} = n^2 - 1 - \frac{k_1^2}{k_0^2} = n^2 - 1 - n^2 \sin^2 \theta = n^2 \cos^2 \theta - 1, \quad (2.34)$$

где θ — угол между направлением распространения плоской волны и осью z . С учетом закона Снеллиуса

$$\hat{q} = \cos^2 \theta_0 - 1 = -\sin^2 \theta_0, \quad (2.35)$$

где θ_0 — угол выхода луча из источника, находящегося в слое $n = 1$. Условие $|\hat{q}| \ll 1$, отвечающее стандартному параболическому

уравнению, таким образом соответствует лучам, выходящим из источника под малым углом θ_0 .

Другие известные аппроксимации оператора \hat{h} связаны с представлением квадратного корня рациональной дробью [86, 103–105]

$$(1 + \hat{q})^{1/2} \approx \frac{a_0 + a_1 \hat{q}}{b_0 + b_1 \hat{q}}, \quad (2.36)$$

где коэффициенты выбираются из условия минимизации ошибки в рассматриваемом интервале углов.

Описание волновых пучков при менее жестких, чем в стандартном подходе, ограничениях на расходимость пучков и степень неоднородности среды можно получить также, аппроксимируя оператор \hat{h} из (2.31) операторами \hat{h}_n , удовлетворяющими рекуррентному соотношению

$$\hat{h}_{n+1} = \frac{1}{2} \hat{h}_n^{-1} (\hat{h}_n^2 + \hat{Q}). \quad (2.37)$$

Стационарное значение последовательности (2.37) удовлетворяет уравнению $\hat{Q} = \hat{h}^2$, следующему из (2.31), и \hat{h}_n сходится к нему весьма быстро: $\hat{h}_n \rightarrow \hat{h} = \hat{Q}^{1/2}$. Если оператор \hat{Q} явно от z не зависит, то скорость сходимости $\hat{h}_n \rightarrow \hat{Q}^{1/2}$ можно оценить по скорости сходимости соответствующих собственных значений $h_n \rightarrow h$. Представляя h_n в виде

$$h_n = h(1 - \sigma_n), \quad (2.38)$$

для относительной ошибки σ_n из (2.37) получим рекуррентное соотношение

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_n^2}{1 + \sigma_n}, \quad (2.39)$$

из которого видно, что при больших значениях σ_n ошибки на каждой итерации уменьшаются в два раза, а при $\sigma_n < 1$ — как квадрат ошибки предыдущего приближения. Это позволяет рассчитывать на описание с помощью операторов \hat{h}_n первых номеров сильно расходящихся пучков в средах с большими вариациями коэффициента преломления.

Рассмотрим различные приближения, вытекающие из представления (2.37). В качестве нулевого приближения возьмем $\hat{h}_0 = k_0$.

Тогда последующие приближения дают выражения

$$\hat{h}_1 = k_0 \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} \right), \quad (2.40)$$

$$\hat{h}_2 = \frac{k_0}{2} \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} + \frac{1 + \hat{q}}{1 + \hat{q}/2} \right). \quad (2.41)$$

Подстановка \hat{h}_1 в систему (2.30) приводит к уравнениям, описывающим взаимодействие встречных пучков в продольно-неоднородной среде:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_+}{\partial z} + ik_0 \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} \right) U_+ = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} \right)^{-1} \frac{n'_z}{n} (U_+ - U_-), \\ \frac{\partial U_-}{\partial z} - ik_0 \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} \right) U_- = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{q}}{2} \right)^{-1} \frac{n'_z}{n} (U_+ - U_-). \end{cases} \quad (2.42)$$

Для лучевых амплитуд пучков

$$U_+ = A_+ \exp(-ik_0 z), \quad U_- = A_- \exp(ik_0 z)$$

в слабо неоднородной среде ($n^2 - 1 \ll 1$) из (2.42) получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial A_+}{\partial z} + ik_0 \frac{\hat{q}}{2} A_+ = -\frac{1}{2} \frac{n'_z}{n} [A_+ - A_- \exp(2ik_0 z)], \\ \frac{\partial A_-}{\partial z} - ik_0 \frac{\hat{q}}{2} A_- = -\frac{1}{2} \frac{n'_z}{n} [A_- - A_+ \exp(-2ik_0 z)]. \end{cases} \quad (2.43)$$

Если коэффициент преломления n — плавно меняющаяся функция z , не содержащая пространственных частот порядка $2k_0$, то, усредняя (2.43) по периоду $2\pi/k_0$, получим независимые параболические уравнения, обобщающие стандартное приближение с учетом продольной неоднородности среды:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_+}{\partial z} + ik_0 \frac{\hat{q}}{2} A_+ = -\frac{1}{2} \frac{n'_z}{n} A_+, \\ \frac{\partial A_-}{\partial z} - ik_0 \frac{\hat{q}}{2} A_- = -\frac{1}{2} \frac{n'_z}{n} A_-. \end{cases} \quad (2.44)$$

Если продольной неоднородностью, т. е. зависимостью $n(z)$, можно пренебречь, то уравнения (2.44) становятся эквивалентными традиционному приближению.

Пренебрежение в уравнениях (2.43) встречной волной предполагает отсутствие в вариациях $n(z)$ продольных масштабов порядка $\lambda/2$, которые даже при малой величине $n^2 - 1 \ll 1$ могли бы привести к резонансному рассеянию волн U_{\pm} в U_{\mp} (рассеяние Брегга). В частности, при $n^2 - 1 = \varepsilon' |U|^2 \ll 1$ такое рассеяние связывает прямые и встречные волновые пучки друг с другом системой уравнений параболического типа:

$$\begin{cases} 2ik_0 \frac{\partial A_+}{\partial z} - \Delta_{\perp} A_+ - k_0^2 \varepsilon' (|A_+|^2 + 2|A_-|^2) A_+ = 0, \\ 2ik_0 \frac{\partial A_-}{\partial z} + \Delta_{\perp} A_- + k_0^2 \varepsilon' (|A_-|^2 + 2|A_+|^2) A_- = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

При $\hat{h} = \hat{h}_2$ (второе приближение) уравнения для лучевых амплитуд могут быть представлены в форме

$$\begin{cases} \frac{\partial A_+}{\partial z} + ik_0 \frac{\hat{q}}{2} \left[A_+ - (1 + \hat{q})^{-1} \frac{\hat{q}}{4} A_+ \right] = -\frac{1}{2} \frac{n'_z}{n} A_+, \\ \frac{\partial A_-}{\partial z} - ik_0 \frac{\hat{q}}{2} \left[A_- - (1 + \hat{q})^{-1} \frac{\hat{q}}{4} A_- \right] = -\frac{1}{2} \frac{n'_z}{n} A_-. \end{cases} \quad (2.46)$$

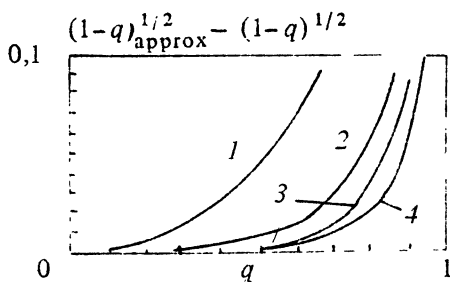
При $n'_z = 0$ продольное волновое число h определяется в этом приближении с точностью $\frac{5}{128} q^4$, где q – собственное значение оператора \hat{q} . Стандартное приближение имеет точность $q^2/8$. При расчете пучков во втором приближении ошибки в фазе будут малы до расстояний $z^{(2)}$, определяемых соотношением $z^{(2)} \leq \frac{128}{5} \pi q^{-4}$. В традиционном приближении ошибки того же порядка будут на существенно меньших расстояниях: $z^{(1)} \approx 8\pi q^{-2}$. Фазовые ошибки, связанные с параболической аппроксимацией, можно оценить по разности

$$(1 - q)^{1/2} - (1 - q)_{\text{аппрокс}}^{1/2}$$

в функции раствора пучка $q = |\sin^2 \theta_0|$.

Для разных способов аппроксимации оператора Гельмгольца эти ошибки показаны на рис. 2.1: кривая 1 для приближения (2.33) – стандартной параболической аппроксимации, кривая 2 для приближения (2.36) при $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = 0,75$, $b_1 = 0,25$ [88], кривая 3 для приближения (2.36) при $a_0 = 0,99987$, $b_0 = 1$, $a_1 = 0,79624$,

Рис. 2.1. Фазовая ошибка при различных способах аппроксимации оператора Гельмгольца: 1 — стандартное параболическое уравнение, 2, 3 — по формуле (2.36), 4 — по формуле (2.41)



$b_1 = 0,30102$ [88], кривая 4 для приближения (2.41). Из рисунка видно, что улучшенные параболические приближения дают значительный выигрыш в точности описания сильно расходящихся пучков по сравнению со стандартным параболическим уравнением.

Другой путь улучшения параболического приближения заключается в разработке алгоритма трансформации решения параболического уравнения, приближающего это решение к точному решению уравнения Гельмгольца [103, 106–107]. В случае регулярных рефракционных волноводов эта процедура позволяет восстановить точное решение. При этом интегральное соотношение между решениями уравнения Гельмгольца $U(z, r)$ и параболического уравнения $A(z, r)$ можно выразить формулой

$$U(z, r) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{1/2} \int_0^\infty A(t, r) \exp \left[\frac{ik_0}{2t} (z^2 + t^2) \right] t^{-1} dt. \quad (2.47)$$

В последующих главах параболическое уравнение широко используется при решении различных задач самофокусировки и самодействия волн. Наряду с этими задачами оно эффективно применялось для других проблем теории нелинейных волн: параметрического взаимодействия волн [210], комбинационного рассеяния, обращения волнового фронта [211–212], захвата и увлечения пакетов высокочастотных волн низкочастотными волнами. Можно надеяться, что плодотворная идея Леонтовича о переходе от эллиптических уравнений для волн к уравнениям эволюционного типа, каким является параболическое уравнение, еще не раз окажется полезной в самых разнообразных задачах теории волн.

В теории нелинейных волн исключительную роль играют солитоны — стационарные состояния, представляющие собой частицеподобные самосогласованные локализованные решения нелинейных уравнений. Аналогичное значение в теории самофокусировки имеют однородные волновые пучки, представляющие моды нелинейных рефракционных волноводов, поперечная структура которых согласована с полем пучка так, что дифракционное распывание точно уравнивается нелинейной рефракцией. Возможность образования таких волноводов была отмечена уже в самой первой работе по самофокусировке волн [1], соответствующие решения для плоских пучков получены в [2], для цилиндрических — в [4]. Как и солитоны в теории нелинейных волн, однородные волновые пучки представляют собой элементарные возбуждения, на которые часто разбиваются первоначальные структуры, если их параметры превышают критические значения. Изучение однородных пучков интересно и с точки зрения передачи энергии через нелинейные среды.

В данной главе излагается теория однородных волновых пучков в нелинейных средах.

3.1. Однородные пучки в кубичных средах. (Параксиальное приближение)

Стационарные ($e^{i\omega t}$) электромагнитные поля в изотропных средах с кубичной нелинейностью вида (1.15) описываются уравнением (2.16) для поперечных компонент поля

$$2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \Delta_{\perp} \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{Q}(\mathbf{E}), \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{Q}(\mathbf{E}) = 4\pi \frac{A}{\epsilon_0} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) \mathbf{E} + 2\pi \frac{B}{\epsilon_0} (\mathbf{E} \mathbf{E}) \mathbf{E}^*. \quad (3.2)$$

Для исследования структур полей однородных пучков удобно перейти к безразмерным амплитудам циркулярно поляризованных полей

$$\Psi_{\pm} = \left(4\pi \frac{A}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} E_{\pm}, \quad E_{\pm} = \frac{E_x \pm i E_y}{2^{1/2}}, \quad (3.3)$$

перепишав (3.1) в виде

$$2ik_0 \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial z} = \Delta_{\perp} \Psi_{\pm} + k_0^2 \left[|\Psi_{\pm}|^2 + (1 + \beta) |\Psi_{\mp}|^2 \right] \Psi_{\pm}, \quad (3.4)$$

где $\beta = \frac{B}{A}$.

Система (3.4) представляет пару связанных через нелинейность уравнений Шредингера для право- и левовращающихся поляризаций. Возможно существование пучков с круговой (Ψ_- или $\Psi_+ = 0$), линейной ($\Psi_- = \Psi_+$) или, в общем случае, эллиптической поляризацией поля.

Полагая $\Psi_+ = \Psi_- = \frac{\Psi}{2^{1/2}}$, для амплитуды поля линейно поляризованных пучков Ψ получим уравнение

$$2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta_{\perp} \Psi + k_0^2 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) |\Psi|^2 \Psi.$$

Пучки с круговой поляризацией описываются уравнением

$$2ik_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta_{\perp} \Psi + k_0^2 |\Psi|^2 \Psi.$$

При одинаковой интенсивности поля коэффициент нелинейности для линейно поляризованных волн в $1 + \frac{\beta}{2}$ раз больше, чем для волн с круговой поляризацией.

Оба уравнения простыми заменами переменных $k_0 z \rightarrow z$, $k_0 r_{\perp} \rightarrow r_{\perp}$, $\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)^{1/2} \Psi \rightarrow \Psi$ или $\Psi_{\pm} \rightarrow \Psi$ приводятся к стандартному виду НУШ:

$$2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta_{\perp} \Psi + |\Psi|^2 \Psi. \quad (3.5)$$

Чтобы найти структуры однородных пучков с линейной или круговой поляризацией, положим в (3.5) $\Psi = \Psi_0(r_{\perp}) \exp[-i(\gamma^2 z/2)]$ и

после замены $\tilde{e} = \gamma^{-1} \Psi_0$, $s = \gamma r_{\perp}$ перепишем уравнение для амплитуды пучка в виде

$$\Delta_{\perp} \tilde{e} + (|\tilde{e}|^2 - 1) \tilde{e} = 0, \quad (3.6)$$

не содержащем искомого параметра γ . Функция \tilde{e} подчиняется условию убывания поля при $s \rightarrow \infty$.

Свойства плоских (двумерных — $\tilde{e}(s_x) \exp[-i(\gamma^2 z/2)]$) и цилиндрических (трехмерных — $\tilde{e}(s) \exp[-i(\gamma^2 z/2)]$) пучков существенно отличаются. В двумерном случае уравнение (3.6) имеет единственное локализованное ($\tilde{e} \rightarrow 0$ при $s_x \rightarrow \infty$) решение:

$$\tilde{e} = 2^{1/2} / \text{ch } s_x \quad \text{или} \quad \Psi_0 = 2^{1/2} / (\gamma \text{ch } \gamma x). \quad (3.7)$$

Параметр γ связан с размерной шириной пучка, a ($\gamma = 1/(k_0 a)$), которая может быть произвольной.

Погонная (на единицу ширины) переносимая таким пучком мощность равна:

$$P_{\text{одн}}^{(2)} = [(c \varepsilon_0^{1/2}) / (2\pi k_0 \varepsilon')] \gamma, \quad (3.8)$$

где коэффициент нелинейности $\varepsilon' = \varepsilon'_2$ определяется выражением (1.20) для линейно поляризованных волн и в $1 + \beta/2$ раз меньше для волн с круговой поляризацией.

В трехмерном случае картина является более сложной. Опишем пучки с вращающейся фазой, у которых $\tilde{e} = e(s) \exp(im\varphi)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), где $s = |s|$ и φ — цилиндрические координаты. Такие пучки характеризуются двумя индексами: радиальным p , показывающим число вариаций поля по координате r , и азимутальным m , описывающим изменение фазы поля при обходе вокруг оси пучка. Структура таких пучков удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 e_{m,p}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial e_{m,p}}{\partial s} - \frac{m^2}{s^2} e_{m,p} - e_{m,p} + |e_{m,p}|^2 e_{m,p} = 0 \quad (3.9)$$

и граничным условиям: ограниченности поля на оси

$$e = A_{m,p} s^{|m|} \quad (3.10)$$

при $s \rightarrow 0$ и убыванию поля на бесконечности

$$e \rightarrow e^{-s}/s \quad (3.11)$$

при $s \rightarrow \infty$.

Такие пучки существуют только при определенных дискретных значениях $A_{m,p}$, образующих счетное множество [108–110, 115]. Величины $A_{m,p}$ являются собственными значениями уравнения (3.9) при граничных условиях (3.10)–(3.11).

Наибольший интерес представляет аксиально-симметричный однородный пучок с индексами $p = m = 0$, который является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 e_{0,0}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial e_{0,0}}{\partial s} - e_{0,0} + |e_{0,0}|^2 e_{0,0} = 0. \quad (3.12)$$

Этот пучок впервые был описан в работе [4] и часто называется таунсовым.

В параксиальном приближении безразмерная мощность аксиально-симметричного пучка $P^{*(3)} = \frac{1}{2} \int_s e_{0,0}^2 s ds d\varphi = 5,850^*$, что в размерных величинах составляет

$$P_{\text{одн}}^{(3)} = \frac{c \varepsilon_0^{1/2}}{4\pi k_0^2 \varepsilon'} P^{*(3)} = \frac{5,850 c \varepsilon_0^{1/2}}{4\pi k_0^2 \varepsilon'} = 0,4655 \frac{c \varepsilon_0^{1/2}}{k_0^2 \varepsilon'}, \quad (3.13)$$

где c — скорость света.

Радиус таунсова пучка произволен. Мощность такого пучка не зависит от радиуса и определяется только параметрами среды и частотой. Ее принято называть критической мощностью самофокусировки $P_{\text{кр}} = P_{\text{одн}}^{(3)}$. Фундаментальная роль этой величины во всей теории самофокусировки волн станет понятной из дальнейших глав.

Свойства пучков высших типов в трехмерном случае близки к свойствам таунсова пучка. Их мощность не зависит от ширины пучков и определяется структурой. Структуры пучков с низшими радиальными индексами ($p = 0, 1$) для нескольких значений азимутальных индексов ($|m| = 0, 1, 2$) показаны на рис. 3.1. Безразмерные мощности равны соответственно

$$P_{0,0}^* = 1,862 \pi, \quad P_{1,0}^* = 7,68 \pi, \quad P_{2,0}^* = 14,2 \pi,$$

$$P_{0,1}^* = 12,2 \pi, \quad P_{1,1}^* = 23,9 \pi, \quad P_{2,1}^* = 36,3 \pi$$

и быстро растут с увеличением индексов.

Пучки с круговой поляризацией обладают теми же свойствами, что и линейно поляризованные пучки, но мощность их при одинако-

* В работе [4] приводится несколько меньшее значение, что связано с меньшей точностью проводимых там расчетов.

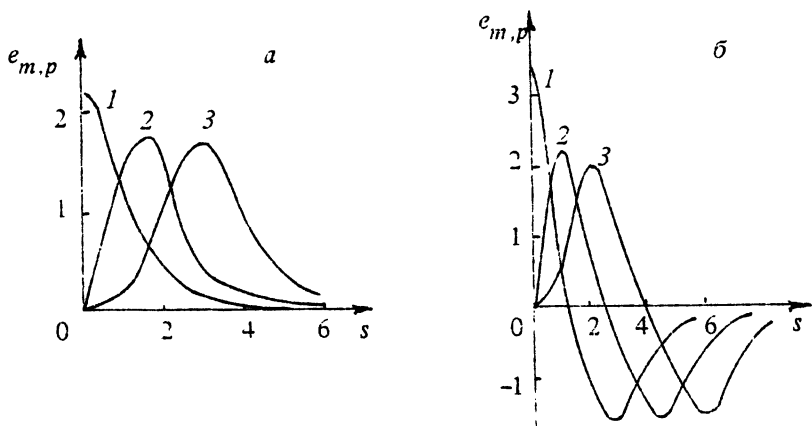


Рис. 3.1. Структура однородных волновых пучков:

- а: 1 - $m=0, p=0$, 2 - $m=1, p=0$, 3 - $m=2, p=0$,
 б: 1 - $m=0, p=1$, 2 - $m=1, p=1$, 3 - $m=2, p=1$

вой структуре в $1 + \beta/2$ раз выше. Это обстоятельство делает пучки с круговой поляризацией неустойчивыми по отношению к возмущениям на встречной поляризации и трансформации их в линейно поляризованные пучки. К возмущениям на той же поляризации пучки с круговой поляризацией более устойчивы, чем пучки с линейной поляризацией (см. далее гл. 4).

3.2. Пучки с эллиптической поляризацией в кубичных нелинейных средах

Выше рассматривались пучки с круговой и линейной поляризациями. В общем случае поляризация пучков эллиптическая. Пучки с эллиптической поляризацией являются "суперпозицией" пучков с круговыми поляризациями E_+ и E_- , распространяющимися вдоль общей оси с разными фазовыми скоростями и различными постоянными распространения $k_0(1 + \gamma_+^2/2)$ и $k_0(1 + \gamma_-^2/2)$. Действительно, решения (3.4) можно искать в виде $\Psi_{\pm} = e_{\pm} \exp[-i(\gamma_{\pm}^2 z/2)]$. При замене $(k_0 r_{\perp})/\gamma_{\pm} \rightarrow s$ функции e_+ и e_- удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} e_+ - e_+ + [|e_+|^2 + (1 + \beta) |e_-|^2] e_+ &= 0, \\ \Delta_{\perp} e_- - \Lambda e_- + [|e_-|^2 + (1 + \beta) |e_+|^2] e_- &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\Lambda = \gamma_-^2 / \gamma_+^2$ — отношение квазиоптических поправок к постоянным распространения. Пучки, описываемые (3.14), можно назвать комбинированными. Их свойства зависят от анизотропии нелинейности — коэффициента β .

Рассмотрим свойства комбинированных пучков в цилиндрической системе координат s и φ . Каждый пучок описывается соответственно функциями $e_+ = e_+^{m,p}(s) \exp(im\varphi)$ и $e_- = e_-^{n,q}(s) \exp(in\varphi)$, где $e_+^{m,p}$ и $e_-^{n,q}$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 e_+^{m,p}}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{de_+^{m,p}}{ds} - \frac{m^2}{s^2} e_+^{m,p} - e_+^{m,p} + \\ & + \left[|e_+^{m,p}|^2 + (1 + \beta) |e_-^{n,q}|^2 \right] e_+^{m,p} = 0, \\ & \frac{d^2 e_-^{n,q}}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{de_-^{n,q}}{ds} - \frac{n^2}{s^2} e_-^{n,q} - \Lambda e_-^{n,q} + \\ & + \left[|e_-^{n,q}|^2 + (1 + \beta) |e_+^{m,p}|^2 \right] e_-^{n,q} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

с граничными условиями (3.10)–(3.11).

Такие пучки можно характеризовать матрицей индексов $\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$ со столбцами азимутальных $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ и радиальных $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ индексов в соответствии с числом осцилляций по азимутальной и радиальной координатам.

Мощность однородных пучков $P \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} = P_{(m,p)}^+ + P_{(n,q)}^-$ и отношение квазиоптических поправок к постоянным распространения Λ при изменении отношения амплитуд пучков на оси $\chi = \frac{e_-^{n,q}(0)}{e_+^{m,p}(0)}$ (либо их производных) могут меняться непрерывно в некотором интервале значений, зависящем от типа пучка и параметра анизотропии.

Поляризация меняется по сечению пучка в широких пределах от линейной (сравнительно медленно поворачивающейся по мере распространения) в точках, где $|e_+^{m,p}| = |e_-^{n,q}|$, до круговой в точках, где $e_+^{m,p}$ или $e_-^{n,q}$ равны нулю.

Простейшим решением системы (3.13) с отличными от нуля амплитудами $e_+^{0,0}$ и $e_-^{0,0}$ является пучок типа $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, состоящий из двух колоколообразных пучков, по структуре близких к таунсову. При увеличении своей ширины этот пучок переходит в связанные плоские волны [72] с эллиптической поляризацией. В среде с ориен-

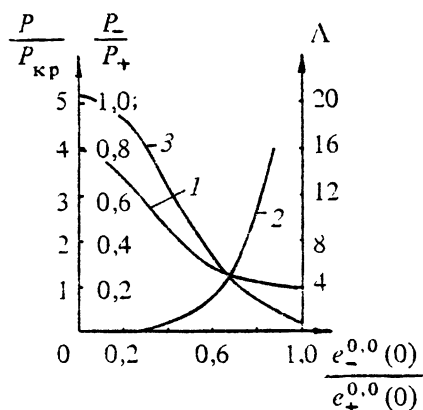


Рис. 3.2. Зависимость мощности однородного комбинированного пучка $\begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$ и его параметра Λ от отношения амплитуд при $\rho=0$ в среде с $\beta=6$: 1 — $P/P_{кр}$, 2 — P_-/P_+ , 3 — Λ

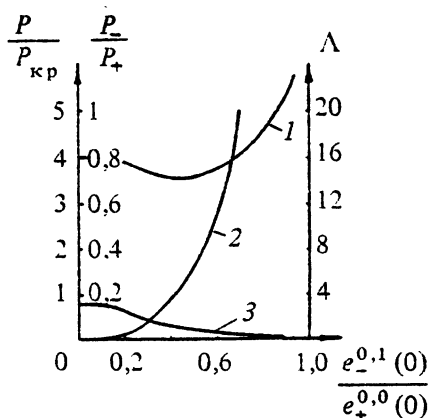
тационной керровской нелинейностью при изменении поляризации на оси от круговой до линейной мощность такого пучка меняется от $4P_{кр}$ до $P_{кр}$. На рис. 3.2 показаны зависимости полной мощности пучка $P = P^+(0,0) + P^-(0,0)$, отношения мощностей $\frac{P^-(0,0)}{P^+(0,0)}$, параметра

Λ как функции отношения амплитуд $\frac{e_-^{0,0}(0)}{e_+^{0,0}(0)}$. В случае электронной нелинейности интервал изменения мощностей уменьшается до $\frac{3}{2}P_{кр} + P_{кр}$, а в случае стрикционной (для жидкостей и газов) стягивается к значению $P_{кр}$. Поляризация пучка при стрикционной нелинейности одинакова по всему сечению пучка и может быть любой.

Следующее по сложности решение — пучок типа $\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix}$ представляет собой суперпозицию пучков $e_+^{0,0}$ и $e_-^{0,1}$. На рис. 3.3 показаны зависимость его мощности P , отношения парциальных мощностей $\frac{P^-(0,1)}{P^+(0,0)}$ и параметра Λ от отношения амплитуд для ориентационной керровской нелинейности. Полная мощность меняется от $3,55P_{кр}$ до $26,3P_{кр}$.

В двумерном случае число комбинированных пучков оказывается конечным [112]. Их можно характеризовать строчкой индексов (m, n) . В случае стрикционной нелинейности имеется только один пучок с произвольной поляризацией и индексами $(0, 0)$, в среде с электронной нелинейностью — три типа пучков: $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Пучок $(0, 0)$ состоит из двух колоколообразных структур, пучки $(1, 0)$

Рис. 3.3. Зависимость мощности однородного комбинированного пучка $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и его параметра Λ от отношения амплитуд при $\rho=0$ в среде с $\beta=6$: 1 — $P/P_{кр}$, 2 — P_-/P_+ , 3 — Λ



и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ представляют суперпозицию мощного колоколообразного пучка одной поляризации (индекс 0) и относительно слабого — другой (индекс 1). Слабый пучок является антисимметричным в отличие от симметричного мощного. При увеличении относительной мощности слабого пучка комбинированные пучки с индексами $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ исчезают. В средах с керровской нелинейностью в двумерном случае существует не более семи типов комбинированных пучков.

Заканчивая описание однородных пучков в параксиальном приближении, подчеркнем, что они в трехмерном случае характеризуются матрицей индексов $\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$, которая лишь в частных случаях сводится к вектору из одной строчки (одному радиальному и одному азимутальному индексу). Параксиальное приближение справедливо при $k_0 a \gg 1$. Структура относительно узких пучков требует уточнения.

3.3. Особенности однородных волновых пучков в непараксиальном приближении

При описании однородных волновых пучков в непараксиальном приближении используется нелинейное волновое уравнение для амплитуды стационарного ($e^{i\omega t}$) электрического поля E_0 :

$$\Delta E_0 - \text{grad div } E_0 + k_0^2 E_0 + k_0^2 Q_0(E_0) = 0 \quad (3.16)$$

с нелинейным членом

$$Q_0 = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} (E_0 E_0) E_0^* + \frac{2\pi B}{\epsilon_0} (E_0 E_0^*) E_0.$$

Простейшие однородные пучки имеют структуру $E_0 = E \exp(-ihz)$. Функция E , зависящая только от поперечных координат, и постоянная распространения h определяются из следующего уравнения:

$$\Delta_{\perp} E + (k_0^2 - h^2) E + k_0^2 Q(E) - \text{grad}_{\perp} F - ihz_0 F = 0, \quad (3.17)$$

решения которого следует подчинить условию достаточно быстрого убывания поля на бесконечности ($r \rightarrow \infty$). При переходе от (3.16) к (3.17) учтено равенство нулю дивергенции электрической индукции. В (3.17) обозначено:

$$F = \text{div}_{\perp} E_{\perp} - ihE_z,$$

$$Q(E) = \frac{4\pi A}{\epsilon_0} (E E^*) E + \frac{2\pi B}{\epsilon_0} (E E) E^*.$$

По сравнению с уравнением для пучков в параксиальном приближении в (3.17) добавился член $\text{grad}_{\perp} F - ihz_0 F$ и изменился коэффициент перед E : появился точный коэффициент $k_0^2 - h^2$ вместо приближенного $2k_0(k_0 - h)$.

Как и волноводные моды в диэлектрическом стержне [113, 114], однородные пучки можно разделить на ТЕ-волны, имеющие поперечные компоненты поля E , ТМ-волны с поперечной компонентой H и гибридные ЕН-волны — суперпозицию ТЕ- и ТМ-волн.

Считая $h > k_0$, перейдем в (3.17) к безразмерным координатам $s_{\perp} = r_{\perp} \gamma k_0$, где $\gamma = (h^2/k_0^2 - 1)^{1/2}$, и нормированным амплитудам полей $e = [(4\pi A)/\epsilon_0]^{1/2} (E/\gamma)$. В результате для e_{\perp} получим

$$\Delta_{\perp} e_{\perp} - e_{\perp} - \text{grad}_{\perp} \left(\text{div}_{\perp} e_{\perp} - \frac{i(1 + \gamma^2)^{1/2}}{\gamma} e_z \right) + (e e^*) e_{\perp} + \frac{\beta}{2} (e e^*) e_{\perp} = 0. \quad (3.18)$$

Уравнение для e_z следует из равенства нулю дивергенции электрической индукции:

$$e_z + \gamma^2 (e e^*) e_z + \frac{\gamma^2 \beta}{2} (e e) e_z^* = - \frac{i\gamma}{(1 + \gamma^2)^{1/2}} \text{div}_{\perp} (e_{\perp} + Q_{\perp}). \quad (3.19)$$

Связь между γ , k_0 и h может быть записана в виде:

$$h = (1 + \gamma^2)^{1/2} k_0. \quad (3.20)$$

При переходе к параксиальному приближению параметр γ становится малым и система (3.18) переходит в (3.14) при $\Lambda = 1$.

Определим мощности $P_{\text{н}}^{(2)}$, $P_{\text{н}}^{(3)}$, переносимые плоскими и цилиндрическими пучками:

$$P_{\text{н}}^{(2)} = P_{\text{одн}}^{(2)} \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) (1 + \gamma^2)^{1/2} \int e_{\perp} e_{\perp}^* dx - \frac{\gamma}{4} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \int \text{Im} (e_{\perp} \text{grad}_{\perp} e_z^*) dx \right], \quad (3.21)$$

$$P_{\text{н}}^{(3)} = \frac{P_{\text{одн}}^{(3)}}{P^{*(3)}} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) (1 + \gamma^2)^{1/2} \int e_{\perp} e_{\perp}^* s ds d\phi - \frac{\gamma}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \int \text{Im} (e_{\perp} \text{grad}_{\perp} e_z^*) s ds d\phi \right]. \quad (3.22)$$

Здесь поля e_{\perp} и e_z являются функциями параметра γ и только в параболическом приближении e_{\perp} перестает зависеть от γ , а продольная компонента становится малой величиной порядка γ . Из этого следует, что с уменьшением γ , т. е. с ростом ширины пучка $a = 1/(k_0 \gamma)$, погонная мощность плоского пучка уменьшается как γ , а цилиндрического, уменьшаясь, стремится к пределу — мощности таунсова пучка. Наличие продольной компоненты и изменение постоянной распространения дают поправку к переносимой мощности в одном порядке по γ .

Уравнения (3.16) могут быть исследованы более подробно, при изотропной нелинейности ($\beta = 0$), когда пучки при одинаковой поперечной структуре имеют различную поляризацию. В точном решении вырождение между различными поляризациями снимается.

В двумерном случае имеют место линейно поляризованные пучки. Пучок ТЕ-типа имеет единственную компоненту электрического поля e_y (рис. 3.4), перпендикулярную направлению распространения, и градиенту показателя преломления. Согласно (3.18), эта компонента описывается уравнением

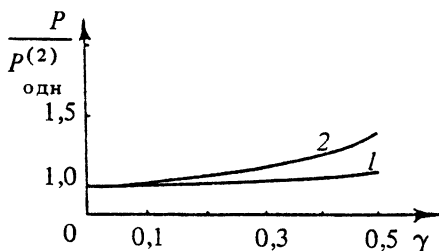


Рис. 3.4. Зависимость погонной мощности плоских однородных пучков от безразмерного поперечного волнового числа γ : 1 — ТЕ-пучки, 2 — ТМ-пучки

$$\frac{d^2 e_y}{ds_x^2} - e_y + e_y^3 = 0. \quad (3.23)$$

Его единственным локализованным решением является функция (3.7), описывающая аналогичный пучок в параксиальном приближении. Погонная мощность пучка

$$P = P_{\text{одн}}^{(2)} (1 + \gamma^2)^{1/2} \quad (3.24)$$

увеличивается с уменьшением ширины, что обусловлено ростом замедления волны.

Другим типом является плоский ТМ-пучок [2, 116], имеющий компоненты e_x и e_z . Его удобно описывать системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_x}{ds_x^2} - e_x + \frac{d}{ds_x} \left(\frac{e_x}{t_0} \frac{dt_0}{ds_x} \right) + (|e_x|^2 + |e_z|^2) e_x = 0, \\ e_z = - \frac{i\gamma}{t_0 (1 + \gamma^2)^{1/2}} \frac{d(t_0 e_x)}{ds_x}, \quad t_0 = 1 + \gamma^2 (|e_x|^2 + |e_z|^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

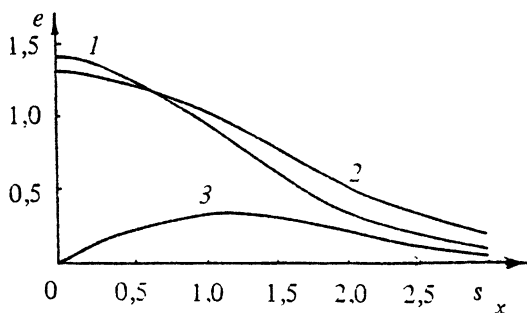
При выводе (3.25) использовалось равенство $\text{div}_{\perp} e_{\perp} - i \frac{(1 + \gamma^2)^{1/2}}{\gamma} e_z = - \frac{e_x}{t_0} \frac{dt_0}{ds_x}$. Для получения численного решения удобно перейти в (3.25) к функции $f = e_x t_0$, определяемой из уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{2\gamma^4}{t_0(3t_0^2 - 2t_0)(1 + \gamma^2)} \left(\frac{df}{ds_x} \right)^2 \right] \frac{d^2 f}{ds_x^2} + \\ + f \left[-1 + \frac{f^2}{t_0^2} + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma^2)t_0^2} \left(\frac{df}{ds_x} \right)^2 - \frac{2\gamma^2}{t_0(3t_0^2 - 2t_0)} \left(\frac{df}{ds_x} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Зависимость погонных мощностей ТЕ- и ТМ-пучков, определенных согласно (3.25), от ширины показана на рис. 3.4. Мощность ТМ-пучка больше отличается от квазиоптического значения, чем мощность ТЕ-пучков. Структуры полей e_y для ТЕ-пучков и e_x, e_z для ТМ-пучков при $\gamma = 0,5$ показаны на рис. 3.5.

В трехмерном случае простейшими пучками являются вращающиеся по азимуту поля $e \exp(im\phi)$. Они характеризуются азимутальным индексом m и радиальным p . Как и в параксиальном приближении, существует счетное множество пучков. Среди них более подробно исследованы симметричные с азимутальным индексом $m = 0$, которые можно разделить на ТЕ- и ТМ-пучки [117–122].

Рис. 3.5. Структура плоских однородных пучков при $\gamma=0,5$: 1 — e_y -компонента у ТЕ-пучков, 2 — e_x -компонента у ТМ-пучков, 3 — e_z -компонента у ТМ-пучков



В ТЕ-пучках имеется единственная компонента e_φ , удовлетворяющая уравнению [120]

$$\frac{d^2 e_\varphi}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{de_\varphi}{ds} - \frac{e_\varphi}{s^2} + e_\varphi^3 = 0 \quad (3.26)$$

с соответствующими граничными условиями (3.10)–(3.11). Мощность их $P_{0,p}$ выражается через мощность пучка $P_{1,p}^*$:

$$P_{0,p} = \frac{P_{\text{одн}}^{(3)} P_{1,p}^*}{P^{*(3)}} (1 + \gamma^2)^{1/2}.$$

Пучки $TM_{0,p}$ имеют e_r - и e_z -компоненты, описываемые системой уравнений (3.18)–(3.19), которую можно переписать в виде

$$\frac{d^2 e_r}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{de_r}{ds} - \frac{e_r}{s^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{e_r}{t_0} \frac{dt_0}{ds} \right) + (|e_r|^2 + |e_z|^2) e_r = 0,$$

$$e_z = - \frac{i\gamma}{t_0 (1 + \gamma^2)^{1/2}} \left[\frac{d(e_r t_0)}{ds} + \frac{e_r t_0}{s} \right],$$

$$t_0 = 1 + \gamma^2 (|e_r|^2 + |e_z|^2). \quad (3.27)$$

При численном интегрировании следует перейти к функции $f = e_r t_0$, что позволяет ограничиться решением уравнений второго порядка. Мощность $TM_{0,p}$ -пучков больше мощности $TE_{0,p}$ -пучков при одинаковом значении γ , т. е. одинаковой ширине. Отметим отличие цилиндрических $TM_{0,p}$ -пучков от плоского TM_0 : в $TM_{0,p}$ -пучке компонента E_z на оси отлична от нуля, в то время как в плоском она в плоскости симметрии равна нулю.

* Следует иметь в виду, что азимутальный индекс при принятой классификации У мод с приблизительно одинаковой поперечной структурой при точном и параксиальном приближении отличается на единицу.

При $m \neq 0$ волновые пучки являются гибридными, имеющими как H_z -, так и E_z -компоненты. Описывая их, перейдем к полям E_+ и E_- (3.3). В средах с отсутствием наведенной анизотропии ($\beta = 0$) существуют пучки с одной из компонент E_+ или E_- , которые в безразмерных переменных удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 e_-}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{de_-}{ds} - \frac{(m-1)^2 e_-}{s^2} - e_- + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} + \frac{m}{s} \right) \left(\frac{e_- dt_0}{t_0 ds} \right) + (|e_-|^2 + |e_z|^2) e_- = 0, \quad (3.28)$$

причем e_z и t_0 связаны с e_- следующим образом:

$$e_z = -\frac{i}{2^{1/2}} \frac{\gamma}{t_0 (1+\gamma^2)^{1/2}} \left[\frac{d(e_- t_0)}{ds} - \frac{(m-1) e_- t_0}{s} \right],$$

$$t_0 = 1 + \gamma^2 (|e_-|^2 + |e_z|^2). \quad (3.29)$$

Интерес представляет пучок с азимутальным $m = 1$ и радиальным $p = 1$ индексами, который при $\gamma \rightarrow 0$ переходит в таунсов пучок с круговой поляризацией, а уравнение (3.28) — в (3.12).

Решение (3.28)–(3.29) можно получить численно. Однако непосредственно интегрировать систему уравнений (3.28)–(3.29) при $\gamma \rightarrow 0$ неудобно, поскольку малый параметр из-за члена $\frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{e_- dt_0}{t_0 ds} \right)$ входит в коэффициент при старшей производной. Эту трудность можно обойти, обратившись к уравнению для продольной компоненты поля [111]:

$$\frac{d^2 e_z}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{de_z}{ds} - \frac{e_z}{s^2} - e_z - \frac{i}{2^{1/2}} \frac{(1+\gamma^2)^{1/2}}{\gamma t_0} \frac{dt_0}{ds} e_- + (|e_-|^2 + |e_z|^2) e_z = 0. \quad (3.30)$$

Путем замены $f = i e_- t_0$, учитывая связь (3.29), получим для f уравнение третьего порядка, в котором коэффициентами являются функции младших производных f :

$$\left[1 - \gamma^2 A_3 \right] \frac{d^3 f}{ds^3} + \left[\frac{1}{s} - \gamma^2 A_2 \right] \frac{d^2 f}{ds^2} - \left[1 + \frac{1}{s^2} - \frac{f^2}{f_0^2} - \gamma^2 A_1 \right] \frac{df}{ds} + \frac{2(1+\gamma^2) f^2}{t_0 (3t_0^2 - 2t_0)} \frac{df}{ds} = 0, \quad (3.31)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 = & - \left\{ 2(1 + \gamma^2)^2 (3t_0^2 - 2t_0)^2 \left[f \frac{d^2 f}{ds^2} + \left(\frac{df}{ds} \right)^2 \right] + \right. \\
 & + \gamma^2 (1 + \gamma^2) (3t_0^2 - 2t_0)^2 \left(\frac{d^2 f}{ds^2} \right)^2 - \gamma^2 (6t_0 - 2) U^2 \left. \right\} \times \\
 & \times \left[t_0 (3t_0^2 - 2t_0)^3 (1 + \gamma^2)^2 \right]^{-1} + 2\gamma^2 U^2 \left[t_0 (3t_0^2 - 2t_0) (1 + \gamma^2) \right]^{-2} - \\
 & - U \left[s t_0 (3t_0^2 - 2t_0) (1 + \gamma^2) \right]^{-1} + \left[2t_0^2 (1 + \gamma^2) \right]^{-1} \left(\frac{d^2 f}{ds^2} \right)^2 + \\
 & + f \frac{d^2 f}{ds^2} \left[t_0 (3t_0^2 - 2t_0) \right]^{-1}; \\
 A_2 = & 2U \left[(1 + \gamma^2) (3t_0^2 - 2t_0) t_0 \right]^{-1}; \\
 A_3 = & \gamma^2 \left(\frac{df}{ds} \right)^2 \left[t_0 (3t_0^2 - 2t_0) (1 + \gamma^2) \right]^{-1}; \quad U = 2f (1 + \gamma^2) \frac{df}{ds} + \gamma^2 \frac{d^2 f}{ds^2} \frac{df}{ds}; \\
 t_0 = & 1 + \gamma^2 \frac{f^2}{t_0^2} + \gamma^4 \left(\frac{df}{ds} \right)^2 \left[2(1 + \gamma^2) t_0^2 \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

При $\gamma \rightarrow 0$ уравнение (3.31) переходит в проинтегрированное по s уравнение (3.12). Локализованные решения (3.31) существуют только при определенных значениях $e_-(0)$ и определенной величине производной $\frac{de_-}{ds}(0)$.

На рис. 3.6 показана зависимость мощности однородного пучка EH_{11} -решения (3.31) от его ширины (параметра γ), нормированной на критическую мощность самофокусировки $P_{кр}$.

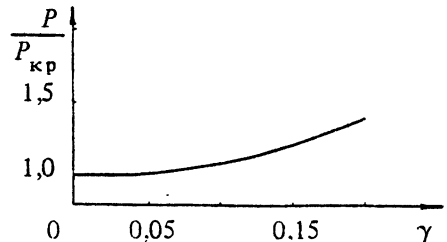
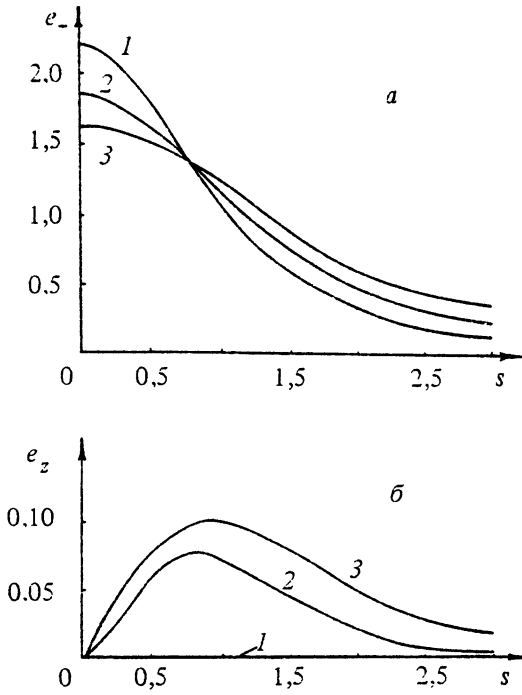


Рис. 3.6. Зависимость мощности однородного цилиндрического пучка от безразмерного поперечного волнового числа γ

Рис. 3.7. Структура поперечной (а) и продольной (б) компонент однородного цилиндрического пучка при различных значениях безразмерного волнового числа γ :

а: 1 - $\gamma=0$, 2 - $\gamma=0,1$, 3 - $\gamma=0,2$,
 б: 1 - $\gamma=0$, 2 - $\gamma=0,1$, 3 - $\gamma=0,2$



На рис. 3.7 показаны структуры полей e_- и e_z при различных значениях параметра γ , связанного с шириной пучка. При сужении пучка и увеличении его мощности значение $e_z(0)$ увеличивается. Поскольку $e_+ = 0$, то поперечная компонента поля по всему сечению поляризована по кругу.

Для сред с электронной и ориентационной керровской нелинейностью строгие решения уравнений Максвелла в виде однородных пучков могут быть найдены для плоских и симметричных цилиндрических пучков.

Уточненное по сравнению с параболическим описание показывает, что комбинированные пучки существуют в более узком классе нелинейных сред и индексов. В частности, они имеют место в средах с нелинейностью без наведенной анизотропии. В плоском случае комбинированный пучок, представляющий суперпозицию ТЕ- и ТМ-волн, имеет колоколообразную структуру поперечных компонент электрического поля. Его мощность является функцией ширины и отношения мощностей ТЕ- и ТМ-составляющих комбинированного пучка. Постоянные распространения ТЕ- и ТМ-составляющих в таком пучке различны.

Аналогичная картина имеет место для цилиндрических $TE_{0,p}$ - и $TM_{0,q}$ -волн. В отличие от двумерного, в цилиндрическом случае число пучков счетно. При топологически одинаковых структурах поперечных компонент TE - и TM -составляющие пучков имеют разные постоянные распространения. Комбинированный пучок вырождается в единый, когда постоянные распространения TE - и TM -составляющих пучков равны, что возможно лишь при топологически неодинаковых структурах. Такие пучки были найдены в работе [119].

Для сред с электронной и ориентационной керровской нелинейностью строгие решения уравнений Максвелла в виде комбинированных однородных пучков не найдены.

В заключение рассмотрим влияние высших нелинейностей, когда учитывается следующий член в разложении нелинейной зависимости ϵ от квадрата амплитуды:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \epsilon_2 |E|^2 - \epsilon_4 |E|^4 \right). \quad (3.32)$$

Ограничимся модельным случаем линейно поляризованного поля с амплитудой e . В безразмерных переменных в параксиальном приближении поле однородного пучка удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\perp} e - e + |e|^2 e - \tilde{\beta} |e|^4 e = 0, \quad \tilde{\beta} = (\epsilon_4 \gamma^2) / \epsilon_2^2. \quad (3.33)$$

Собственным значением является величина поля на оси, связанная с мощностью пучка. Из уравнения (3.33) следует, что мощность в однородном пучке, в отличие от сред с кубической нелинейностью, является функцией отношения длины волны λ к ширине пучка a , которое входит в безразмерный коэффициент при четвертой степени поля

$$\tilde{\beta} \approx (\epsilon_4 \lambda^2) / (\epsilon_2^2 a^2).$$

Существенным отличием сред с $\epsilon_4 > 0$ является то, что в них имеется конечное число пучков каждой симметрии (с одним значением азимутального индекса). Коэффициент $\tilde{\beta}$ может быть столь велик, что локализованных решений не существует. На рис. 3.8, по данным работы [123], приведена зависимость мощности однородного пучка с низшими индексами ($m = 0$, $p = 0$) от коэффициента нелинейности β , нормированная на мощность однородного пучка в кубической среде ($\beta = 0$). При увеличении коэффициента $\tilde{\beta}$ мощность однородного пучка растет и достигает максимума при $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_{кр}$. При больших значениях этого коэффициента однородный пучок не существует.

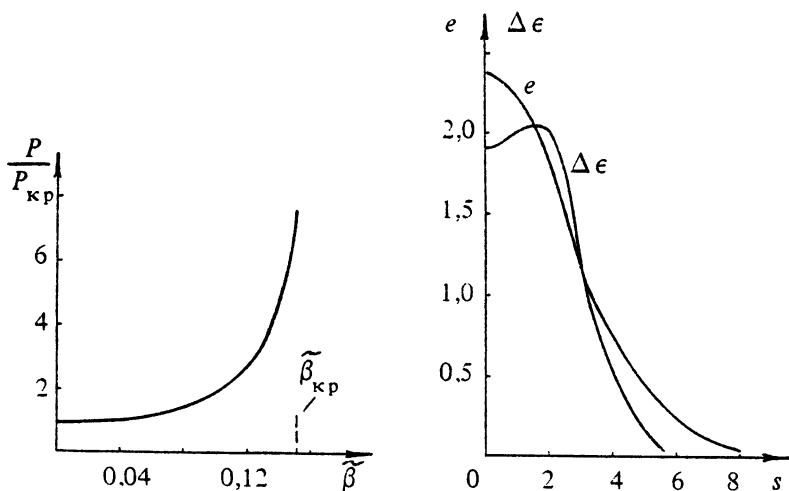


Рис. 3.8. Зависимость мощности однородного цилиндрического волнового пучка от коэффициента нелинейности пятого порядка.

Рис. 3.9. Структура однородного цилиндрического волнового пучка и нормированного приращения диэлектрической проницаемости в среде с нелинейностью пятого порядка при $\tilde{\beta} = 0,12$

Структура пучка показана на рис. 3.9 при $\tilde{\beta} = 0,12 < \tilde{\beta}_{кр} \approx 0,15$. Она имеет колоколообразный вид. Там же изображен профиль нелинейного показателя преломления

$$\Delta \epsilon = |e|^2 - \tilde{\beta} |e|^4.$$

Вблизи оси имеет место минимум проницаемости, так что приосевая часть пучка расфокусируется. Очевидно, такое свойство имеют пучки в некоторой области значений $\beta_m < \beta < \beta_{кр}$.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН В СРЕДЕ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Уже первые эксперименты по самофокусировке света в жидкостях показали, что при мощностях, заметно превышающих критическую, пучок не фокусируется как целое, а распадается на вторичные пучки — нити, длина самофокусировки которых на порядок и более отличается от теоретических оценок длины самофокусировки первоначального пучка [3]. Объяснение этому было дано в работе [15], где показано, что в нелинейной среде амплитудно-фазовые возмущения электромагнитной волны приводят к ее распаду на отдельные пучки, имеющие разные длины самофокусировки в зависимости от масштаба первоначального возмущения, причем существует масштаб наиболее быстро фокусирующегося возмущения, определяемый коэффициентом нелинейности среды, интенсивностью и поляризацией волны. В диспергирующих средах наряду с пространственной возможна и временная (модуляционная) неустойчивость волны при определенных соотношениях между знаком дисперсии и нелинейности [86, 85, 42].

4.1. Пространственная и модуляционная неустойчивость линейно поляризованных плоских волн в кубичных средах

Уравнения, описывающие волновые пучки с линейной поляризацией в кубичных средах, запишем в безразмерных переменных гл. 3:

$$\Delta_{\perp} \Psi + \alpha \Psi''_{\xi\xi} - 2i \Psi'_z + \delta |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (4.1)$$

где коэффициенты $\alpha = \text{sign } v'_{\omega}$ и $\delta = \text{sign } \epsilon'$ зависят от знака дисперсии групповой скорости и нелинейности.

Исследуем устойчивость решения (4.1) типа плоской волны

$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(-i \frac{\gamma^2 z}{2}\right); \quad \gamma^2 = \delta |\Psi_0|^2, \quad (4.2)$$

в котором постоянную амплитуду Ψ_0 можно считать действительной величиной. Для этого подставим в (4.1) возмущенное решение

$$\Psi = (\Psi_0 + e) \exp\left(-i \frac{\gamma^2 z}{2}\right), \quad |e| \ll 1, \quad e = e_1 + ie_2$$

и линеаризуем полученные уравнения для возмущения e , разделив действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} e_1 + \alpha e_1''_{\xi\xi} + 2e_2'_{z\bar{z}} + 2\delta \Psi_0^2 e_1 &= 0, \\ \Delta_{\perp} e_2 + \alpha e_2''_{\xi\xi} - 2e_1'_{z\bar{z}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для определения устойчивости (4.2) представим произвольное возмущение в виде суперпозиции плоских волн типа

$$e_{1,2} = \text{Re} \left[e_{1,2}^0 \exp(-ik_{\perp} r_{\perp} - ik_{\xi} \xi - ihz) \right] \quad (4.4)$$

и найдем из уравнений (4.3) зависимость $h(k_{\perp}, k_{\xi})$:

$$h^2 = \frac{k_s^2 (k_s^2 - \bar{k}^2)}{4}, \quad (4.5)$$

где $k_s^2 = k_{\perp}^2 + \alpha k_{\xi}^2$, $\bar{k}^2 = 2\delta \Psi_0^2$. Безразмерное волновое число k_{ξ} связано с частотой модуляции волны Ω соотношением $k_{\xi} = \frac{\Omega (|v'_{\omega}|)^{1/2}}{v k_0^{1/2}}$. Из представления (4.4) следует, что в кубичной среде при падении на слой слабой волны под углом $\frac{k_{\perp}}{k}$ к направлению мощной волны, возникает слабая волна, распространяющаяся под углом $-\frac{k_{\perp}}{k}$ к направлению мощной волны.

Возмущения устойчивы при $h^2 > 0$ и неустойчивы при $h^2 < 0$, когда одна из волн (4.4) экспоненциально растет. При $\delta > 0$ ($\epsilon' > 0$) неустойчивы возмущения с волновыми числами $0 < k_s^2 < \bar{k}^2 = 2\delta \Psi_0^2$, при $\delta < 0$ — возмущения с $2\delta \Psi_0^2 < k_s^2 < 0$. Последнее условие может быть выполнено лишь при $k_{\perp}^2 < -\alpha k_{\xi}^2$, т. е. в средах с отрицательной дисперсией $\alpha < 0$. Максимальное значение инкремента неустойчивости $\Gamma = ih$ достигается при $k_s^2 = \bar{k}^2/2$ и равно $\Gamma_{\max} = \bar{k}^2/4$. В литературе неустойчивость плоской волны часто характеризуется величиной $B = 2\Gamma_{\max} l$, показывающей усиление возмущений в слое толщиной l . Параметр B носит название интеграла распада [73].

Рассмотрим некоторые частные случаи.

А. Немодулированная волна ($k_z = 0$). В этом случае $k_s^2 = k_{\perp}^2$ и, следовательно, неустойчивость плоской волны по отношению к чисто пространственным возмущениям имеет место лишь в фокусирующих средах ($\epsilon' > 0$). Неустойчивы по z ($h^2 = -\Gamma^2 < 0$) лишь возмущения с поперечными волновыми числами $0 < |k_{\perp}| < \bar{k}$, тогда как возмущения меньшего масштаба $|k_{\perp}| > \bar{k}$ устойчивы ($h^2 > 0$). Инкремент максимален

$\left(\Gamma_{\max} = \frac{\Psi_0^2}{2} \right)$ при $k_{\perp}^2 = \Psi_0^2$, что соответствует масштабу возмущений

$\Lambda_{\perp} \approx \frac{\pi}{\Psi_0}$. Величину $\Lambda_{\parallel} = \frac{1}{\Gamma_{\max}}$ для достаточно интенсивных возмущений падающего пучка можно принять за характерный масштаб развития неустойчивости (возникновения нити). В размерных переменных

$\Lambda_{\perp} = \frac{\lambda_0 c^{1/2}}{(32\pi n \epsilon' I)^{1/2}}$, $\Lambda_{\parallel} = \frac{1}{k_0 \Gamma_{\max}} = \frac{4 \Lambda_{\perp}^2}{\pi \lambda_0}$, где I — плотность потока мощности в волне. Оценка величины Λ_{\parallel} для пучка диаметром 2 мм, мощностью 1 МВт ($I \approx 30$ МВт/см²) при $\epsilon' = 10^{-11}$ ед. СГСЕ, $n = 1,5$, $\lambda_0 = 0,7$ мкм дает значение $\Lambda_{\parallel} \approx 9$ см, согласующееся с экспериментом [124]. Характерный поперечный масштаб неустойчивости возмущения $\Lambda_{\perp} \approx 180$ мкм, естественно, превышает наблюдаемые размеры нитей (20–80 мкм), определяемые их дальнейшей самофокусировкой.

Мощность отдельной нити, оцениваемая как поток энергии через сечение площадью $(\pi \Lambda_{\perp}^2)/4$

$$P_i = \frac{\pi \Lambda_{\perp}^2 I}{4} = \frac{c \lambda_0^2}{128n \epsilon'}$$

с точностью до коэффициента порядка единицы равна критической мощности однородного пучка. Так как P_i не зависит от мощности исходного пучка, то с ростом последней растет лишь число нитей, а не их интенсивность. Для указанных выше параметров среды $P_i \approx 10$ кВт, а плотность потока мощности в нити после ее сужения за счет самофокусировки до размеров 30–40 мкм достигает величины 1 ГВт/см².

Б. Модулированная волна ($k_z^2 = 0$). В этом случае величина $k_s^2 = \alpha k_z^2 = \frac{1}{k_0} v'_{\omega} \frac{\Omega^2}{v^2}$ может быть как положительной ($v'_{\omega} > 0$), так и отрицательной ($v'_{\omega} < 0$). Так как для неустойчивых возмущений

$k_s^2/\bar{k}^2 > 0$, то необходимым условием модуляционной неустойчивости является неравенство*

$$v'_\omega \epsilon' > 0. \quad (4.6)$$

Инкремент модуляционной неустойчивости максимален при $k_s^2 = |\bar{k}|^2/2$, т. е. на частоте модуляции $\Omega = k_0 v [(\epsilon' E_0^2)/(k_0 v'_\omega)]^{1/2}$. Для значений величины $k v'_\omega \approx 10^{-2}$ и тех же параметров среды, которые указаны в п. А, максимум неустойчивости приходится на частоты $\Omega/\omega \approx 10^{-2}$.

В. Волны с пространственно-временной модуляцией. Для синусоидальных возмущений ($k_1^2 > 0$, $k_\xi^2 > 0$) область неустойчивости на плоскости k_1^2 , k_ξ^2 лежит между прямыми $k_1^2 + \alpha k_\xi^2 = 0$ и $k_1^2 + \alpha k_\xi^2 = 2\delta |\Psi_0|^2$. Максимальный инкремент достигается на прямой

$$k_1^2 + \alpha k_\xi^2 = \delta |\Psi_0|^2. \quad (4.7)$$

В зависимости от знаков v'_ω и ϵ' область неустойчивости на плоскости k_1^2 , k_ξ^2 имеет различную геометрию: при $\epsilon' < 0$ и $v'_\omega > 0$ области неустойчивости нет; при $\epsilon' > 0$ и $v'_\omega > 0$ неустойчивы возмущения в конечной области вблизи $k_1^2 = 0$, $k_\xi^2 = 0$; при $v'_\omega < 0$ независимо от знака ϵ' в рассматриваемом приближении (без учета дисперсии нелинейности) область неустойчивости занимает бесконечную полосу между параллельными прямыми в первом квадранте. Ограничение области неустойчивости может произойти из-за эффектов, связанных с дисперсией и релаксацией нелинейности.

Отметим, что неустойчивость плоской волны можно трактовать как параметрическое усиление при двухквантовой накачке. Условие максимума инкремента Γ совпадает с условием синхронизма волны накачки с усиливаемыми волнами в четырехквантовом параметрическом усилителе:

$$k_z(\omega + \Omega, \mathbf{k}_1) + k_z(\omega - \Omega, \mathbf{k}_1) = 2k_H(\omega). \quad (4.8)$$

Учитывая, что при малых Ω , $|\mathbf{k}_1|$ и $\epsilon' |E|^2$

* Неравенство, эквивалентное (4.6), впервые появилось в работе Лайтхилла [125], как граница между областями с гиперболическими и эллиптическими характеристиками для возмущений в задаче о волнах на поверхности жидкости, однако вывода о неустойчивости возмущений и ее параметрах (величине инкремента и ширине области неустойчивости) в последнем случае сделано не было. В дальнейшем, в работах [42, 126, 213], выполненных практически одновременно, было выяснено, что неравенство (4.6) является критерием модуляционной неустойчивости.

$$k_z(\omega \pm \Omega, \mathbf{k}_\perp) = k(\omega) \pm \frac{\Omega}{v} - \frac{v'_\omega \Omega^2}{2v^2} - \frac{k_\perp^2}{2k} + k(\omega) \epsilon' |E_0|^2, \quad (4.9)$$

$$k_H(\omega) = k(\omega) + \frac{k(\omega) \epsilon' |E_0|^2}{2}, \quad (4.10)$$

получим выражение, совпадающее с (4.7). При $k_\perp^2 = 0$ возможно вырожденное параметрическое усиление. Неустойчивость при $k_\perp^2 = 0$ будет только на тех частотах, которые могут параметрически усиливаться при совпадении направления волнового вектора накачки и волновых векторов усиливаемых волн.

Вследствие параметрического характера неустойчивости имеется фазовая синхронизация мод возмущений с накачкой. Из уравнений (4.3) можно определить, что нарастающие и спадающие моды относительно волн накачки имеют постоянный сдвиг фаз, не зависящий от продольной координаты и равный, соответственно,

$$\Delta \varphi_+ = - \operatorname{arctg} \frac{(k_s^2 - \bar{k}^2)^{1/2}}{k_s},$$

$$\Delta \varphi_- = \operatorname{arctg} \frac{(k_s^2 - \bar{k}^2)^{1/2}}{k_s}.$$

В области устойчивости разность фаз возмущений и накачки меняется по мере распространения.

4.2. Неустойчивость эллиптически поляризованных плоских волн в средах с наведенной анизотропией

Как уже отмечалось в гл. 1, жидкости и газы под действием поля становятся анизотропными. Проведенное выше исследование устойчивости плоской линейно поляризованной волны в изотропной нелинейной среде легко обобщается на эллиптически поляризованные волны в таких средах.

Эллиптически поляризованное поле в среде удобно представить как суперпозицию право- и левоциркулярно поляризованных волн, уравнения для медленно меняющихся амплитуд которых в безразмерных координатах имеют вид (3.4)

$$\Delta_\perp \Psi_\pm - 2i \frac{\partial \Psi_\pm}{\partial z} + [|\Psi_\pm|^2 + (1 + \beta) |\Psi_\mp|^2] \Psi_\pm = 0. \quad (4.11)$$

Как и в случае линейно поляризованной волны, можно найти

решения уравнения (4.11) вида $\Psi_{\pm} = (\Psi_{0\pm} + e_{\pm}) \exp\left(-i \frac{\gamma_{\pm}^2 z}{2}\right)$, где $\Psi_{0\pm} - \text{const}$, $\gamma_{\pm}^2 = |\Psi_{\pm}|^2 + (1 + \beta) |\Psi_{\mp}|^2$, e_{\pm} — малое возмущение. При $e_{\pm} = 0$ сумма этих решений описывает, как известно [72], волну с непрерывно поворачивающимся эллипсом поляризации. Вместо характеристического уравнения (4.5) получим характеристическое уравнение

$$h_{1,2}^2 = k_{\perp}^2 (k_{\perp}^2 - \bar{k}_{1,2}^2) / 4, \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{k}_{1,2}^2 &= \left(|\Psi_{0+}|^2 + |\Psi_{0-}|^2 \right) \pm \\ &\pm \left[\left(|\Psi_{0+}|^2 + |\Psi_{0-}|^2 \right)^2 + 4\beta(2 + \beta) |\Psi_{0+} \Psi_{0-}|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

или

$$\bar{k}_{1,2}^2 = \bar{k}^2 F_{1,2}(\beta),$$

где $\bar{k}^2 = (16\pi \epsilon' I) / (c \epsilon_0^{1/2})$ — значение для линейно поляризованной волны с той же плотностью потока мощности,

$$F_{1,2}(T, \beta) = \frac{1}{2 + \beta} \left\{ 1 \pm \left[1 + \beta(\beta + 2)(1 - T^2)^2(1 + T^2)^{-2} \right]^{1/2} \right\}$$

— поправочный коэффициент, зависящий от коэффициента эллиптичности невозмущенной волны — отношения осей эллипса поляризации $T = \frac{|\Psi_{0+}| - |\Psi_{0-}|}{|\Psi_{0+}| + |\Psi_{0-}|} = \frac{1 - R_0}{1 + R_0}$, где $R_0 = \frac{|\Psi_{0-}|}{|\Psi_{0+}|} < 1$ — отношение амплитуд вращающихся волн накачки; для ориентационной нелинейности

$$F_{1,2}(T, \beta) = \frac{1}{8} \left\{ 1 \pm \left[1 + 48(1 - T^2)^2(1 + T^2)^{-2} \right]^{1/2} \right\},$$

для электронной —

$$F_{1,2}(T, \beta) = \frac{1}{3} \left\{ 1 \pm \left[1 + 3(1 - T^2)^2(1 + T^2)^{-2} \right]^{1/2} \right\}.$$

Поскольку $F_1(\beta) > 0$, а $F_2(\beta) > 0$, то только одна пара корней $(\pm i |h_1|)$ уравнения (4.12) отвечает неустойчивым возмущениям при

$0 < k_1^2 < \bar{k}_1^2$. Инкремент максимально растущих возмущений равен $\Gamma_1 = \frac{\bar{k}_1^2}{4}$. При увеличении коэффициента эллиптичности от нуля (линейная поляризация) до единицы (круговая поляризация) граничное значение \bar{k}_1^2 меняется при ориентационной нелинейности от \bar{k}^2 до $\frac{\bar{k}^2}{4}$, при электронной — от \bar{k}^2 до $\frac{2}{3}\bar{k}^2$. Следовательно, волны с круговой поляризацией пространственно более устойчивы; это связано с уменьшением эффективного параметра нелинейности, что уже отмечалось в гл. 1.

Поляризация максимально растущих возмущений отлична от поляризации мощной волны. Для отношения амплитуд волн возмущений $r_0 = \frac{|e_-|}{|e_+|}$ в нарастающей волне из уравнений для нее имеем

$$r_0 = \frac{R_0^2 - 1 + [(1 - R_0^2)^2 + 4(1 + \beta)^2 R_0^2]^{1/2}}{2R_0(1 + \beta)}.$$

Для всех известных анизотропных нелинейностей $\beta > 0$ и $r_0 > R_0$, т. е. поляризация волны возмущений более близка к линейной, чем волна накачки. Эллиптически поляризованная волна, таким образом, поляризационно неустойчива: первоначально однородная по поляризации волна разбивается на области с разной поляризацией*. Поляризационная неустойчивость препятствует повышению порога самофокусировочной неустойчивости при использовании круговой поляризации (см. далее гл. 5).

4.3. Неустойчивость плоских волн при инерционной нелинейности среды

Выше рассматривалась неустойчивость волны в средах, в которых время релаксации пренебрежимо мало. При отсутствии дисперсии это приводит к отсутствию неустойчивости на частотах, отличных от несущей. Но даже в средах без дисперсии неустойчивость на частотах, отличных от несущей, возможна, если время релаксации среды конечно.

Рассмотрим неустойчивость плоской волны в среде с релаксирующей нелинейностью в простейшем случае линейно поляризованного поля, когда нелинейность описывается релаксационным уравнением [35]

* В ограниченном пучке, как следует из уравнений (2.5) (см. гл. 2), мощности пучков на каждой из вращающихся поляризаций сохраняются.

$$\frac{d(\Delta \varepsilon^{NL})}{dt} + \frac{\Delta \varepsilon^{NL}}{\tau_0} = \frac{\varepsilon' |E|^2}{\tau_0}, \quad (4.13)$$

учитывающим время τ_0 установления нелинейной поляризации. Следуя п. 4.1, представим поле в среде в виде волны с амплитудой Ψ_0 и возмущения с амплитудой e

$$\Psi = (\Psi_0 + e) \exp \left(-i \int \frac{\Delta \varepsilon^{NL}}{2} dz \right).$$

Возмущение e представим в виде

$$e = A_k \exp(-i k_{\perp} r_{\perp} + i \Omega t - ihz) + B_k^* \exp(i k_{\perp} r_{\perp} - i \Omega t + ih^* z).$$

Для постоянной распространения найдем

$$h = \pm \frac{|k_{\perp}|}{2} \left(k_{\perp}^2 - \frac{|\Psi_0|^2}{1 + i \Omega \tau_0} \right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

Анализ выражения (4.14) показывает [127], что в средах с релаксационной нелинейностью неустойчивость имеет место и при $k_{\perp}^2 > 2 |\Psi_0|^2$, т. е. вне полосы усиления в среде с мгновенной релаксацией $\tau_0 = 0$, причем максимум усиления достигается на частотах $\Omega_{\max} \approx 1/\tau_0$.

4.4. Неустойчивость встречных волн

Самовоздействие встречных волновых пучков [56, 138] представляет большой интерес, поскольку порождает новые явления, важнейшими из которых являются обращение волнового фронта [128] и гистерезис коэффициента передачи через нелинейную среду [129], дающие возможность построения бистабильных устройств [130–132], управляемых фильтров [133, 134], параметрических генераторов на кубической нелинейности и т. д.

Наличие встречной волны существенным образом влияет на постановку задачи: конвективная (самофокусирующая) неустойчивость плоской волны становится абсолютной [135], так что вместо пространственных инкрементов неустойчивости необходимо определять пороги генерации различных мод и их временные инкременты.

Для изучения самовоздействия встречных пучков воспользуемся двумя связанными параболическими уравнениями (см. гл. 2). В случае кубической нелинейной среды с проницаемостью равной $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \varepsilon' |E|^2)$, записанные в безразмерных переменных

$r_{\perp} = k_0 r_{\perp p}$, $z = k_0 z_p$, они имеют вид

$$\Delta_{\perp} \Psi_{+} - 2i \frac{\partial \Psi_{+}}{\partial z} + (|\Psi_{+}|^2 + 2|\Psi_{-}|^2) \Psi_{+} = 0, \quad (4.15)$$

$$\Delta_{\perp} \Psi_{-} - 2i \frac{\partial \Psi_{-}}{\partial z} + (|\Psi_{-}|^2 + 2|\Psi_{+}|^2) \Psi_{-} = 0. \quad (4.16)$$

Рассмотрим особенности неустойчивости [57] встречных волн в слое нелинейного диэлектрика толщиной $l = k_0 l_p$, начало которого находится при $z = 0$ (рис. 4.1). В слое распространяются навстречу друг другу две линейно поляризованные волны частоты ω_0

$$\Psi_{+} = \Psi_{0+} \exp \left(-i\varphi_{+} - iz - i \frac{\gamma_{+}^2 z}{2} \right), \quad (4.17)$$

$$\Psi_{-} = \Psi_{0-} \exp \left(-i\varphi_{-} + iz + i \frac{\gamma_{-}^2 z}{2} \right), \quad (4.18)$$

с действительными амплитудами Ψ_{0+} , Ψ_{0-} и фазами φ_{+} и φ_{-} . Здесь

$\gamma_{\pm}^2 = |\Psi_{\pm}|^2 + 2|\Psi_{\mp}|^2$ — нелинейные поправки к постоянным распространения. Отражением от слоя, возникающим вследствие разности диэлектрических проницаемостей слоя и окружающего пространства, пренебрежем, считая границу просветленной, а величину $\Delta \epsilon = \epsilon' |E|^2 \ll 1$. Возмущенное присутствием слабой волны решение (4.15)–(4.16) будем искать в виде

$$\Psi_{+} = (\Psi_{+0} + e_{+}) \exp \left(-i\varphi_{+} - iz - i \frac{\gamma_{+} z}{2} \right), \quad (4.19)$$

$$\Psi_{-} = (\Psi_{-0} + e_{-}) \exp \left(-i\varphi_{-} + iz + i \frac{\gamma_{-} z}{2} \right). \quad (4.20)$$

Линеаризуя исходные уравнения, для возмущений e_{+} и e_{-} получим систему

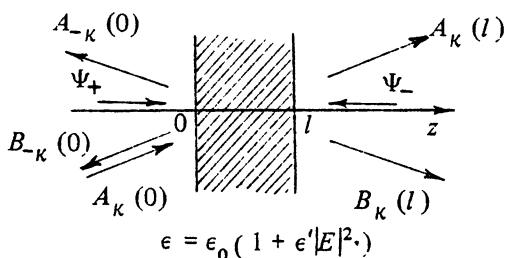


Рис. 4.1. Рассеяние волн нелинейным слоем

$$2i \frac{\partial e_+}{\partial z} = \Delta_{\perp} e_+ + |\Psi_{+0}|^2 e_+ + \Psi_{+0}^2 e_+^* + 2\Psi_{+0} \Psi_{-0} e_-^* + 2\Psi_{+0} \Psi_{-0}^* e_-, \quad (4.21)$$

$$-2i \frac{\partial e_-}{\partial z} = \Delta_{\perp} e_- + |\Psi_{-0}|^2 e_- + \Psi_{-0}^2 e_-^* + 2\Psi_{-0} \Psi_{+0} e_+^* + 2\Psi_{-0} \Psi_{+0}^* e_+, \quad (4.22)$$

решения которой должны удовлетворять граничным условиям

$$e_+ \Big|_{z=0} = A_k \exp(-i \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}), \quad e_- \Big|_{z=l} = 0, \quad (4.23)$$

где A_k — амплитуда внешнего возмущения с поперечным волновым числом \mathbf{k}_{\perp} ($|\mathbf{k}_{\perp}| \ll 1$) на одной из границ слоя.

Будем искать решения (4.21)–(4.22) в виде

$$e_+ = A_k(z) \exp(-i \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}) + B_k(z) \exp(i \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}), \quad (4.24)$$

$$e_- = A_{-k}(z) \exp(-i \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}) + B_{-k}(z) \exp(i \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}). \quad (4.25)$$

Для амплитуд возмущений $A_{\pm k}$ и $B_{\pm k}^*$ получим систему с постоянными коэффициентами, что позволяет искать $A_{\pm k}$ и $B_{\pm k}^*$ в виде $A_{\pm k} = A_{\pm k}(0) \exp(-ihz)$, и $B_{\pm k}^* = B_{\pm k}^*(0) \exp(-ihz)$, где h — постоянные распространения, определяемые из характеристического уравнения четвертого порядка:

$$h_{1,2} = \pm |\Psi_{0+}|^2 \left\{ -v^2 \left[-v^2 + (1 + R_0^2) + (1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2} \right] \right\} / 2, \quad (4.26)$$

$$h_{3,4} = \pm |\Psi_{0+}|^2 \left\{ -v^2 \left[-v^2 + (1 + R_0^2) - (1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2} \right] \right\} / 2, \quad (4.27)$$

$$\text{где } v = \frac{|\mathbf{k}_{\perp}|}{|\Psi_{0+}|}, \quad R_0^2 = \frac{|\Psi_{0-}|^2}{|\Psi_{0+}|^2}.$$

Решение (4.21)–(4.22), описывающее волны возмущений в нелинейной кубичной среде, представляется комбинацией четырех плоских волн, распространяющихся под углами $\pm \mathbf{k}_{\perp}$ к направлению распространения волн накачки, причем волны, распространяющиеся под углами $\pm \mathbf{k}_{\perp}$, имеют сопряженные друг другу фазы.

Граничные условия (4.23) позволяют выбрать такое решение (4.21)–(4.22), которое описывает появление в результате взаимодействия слабой (сигнальной) волны с мощными волнами накачки внутри нелинейной среды волн с амплитудами A_{-k} , B_{-k} и B_k (см. рис. 4.1), которые связаны с падающей волной соотношениями

$$B_k^*(l) = R_{21} A_k, \quad B_{-k}^*(0) = R_{11} A_k,$$

$$A_{\kappa}(l) = R_{22} A_{\kappa}, \quad A_{-\kappa}(0) = R_{12} A_{\kappa}$$

где коэффициенты матрицы рассеяния определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 R_{11} = & -\frac{\exp(i\varphi_+ + i\varphi_-)}{\Delta} \frac{R_0^2 - 1 + [(1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2]^{1/2}}{4R_0} \times \\
 & \times \left\{ (F + 1) \left[1 + \sin h_1 l \sin h_3 l \left(\frac{v^4}{2h_1 h_3} + \frac{8h_1 h_3}{v^4} \right) + 4 \cos h_3 l \cos h_1 l \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{i(F - 1)}{2} \left[\left(\frac{v^2}{2h_3} + \frac{2h_3}{v^2} \right) \sin h_3 l \cos h_1 l - \left(\frac{v^2}{2h_1} + \frac{2h_1}{v^2} \right) \sin h_1 l \cos h_3 l \right] \right\}; \\
 R_{21} = & -\frac{\exp(2i\varphi_+)}{\Delta} i \left[\left(\frac{2h_3}{v^2} - \frac{v^2}{2h_3} \right) \sin h_3 l - F \left(\frac{2h_1}{v^2} - \frac{v^2}{2h_1} \right) \sin h_1 l \right]; \\
 R_{22} = & -i \left(\frac{2h_3}{v^2} + \frac{v^2}{2h_3} \right) \sin h_3 l + iF \left(\frac{2h_1}{v^2} + \frac{v^2}{2h_1} \right) \sin h_1 l - \\
 & - 2 \cos h_3 l + 2F \cos h_1 l; \\
 R_{12} = & \frac{\exp(i\varphi_+ - i\varphi_-)}{\Delta} \frac{F(F - 1)}{8} \frac{[R_0^2 - 1 + (1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}]}{R_0} \times \\
 & \times \left\{ \left(\frac{h_1}{h_3} - \frac{h_3}{h_1} \right) \sin h_3 l \sin h_1 l + i \left[\left(\frac{v^2}{2h_1} - \frac{2h_1}{v^2} \right) \sin h_1 l \cos h_3 l - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{v^2}{2h_3} - \frac{2h_3}{v^2} \right) \sin h_3 l \cos h_1 l \right] \right\}, \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta = & \frac{1}{4} \left(R_0 - \frac{1}{R_0} \right)^2 + 2 + 2 \cos h_1 l \cos h_3 l + \left(\frac{h_1}{h_3} + \frac{h_3}{h_1} \right) \sin h_1 l \sin h_3 l, \\
 F = & \frac{R_0^2 - 1 - [(1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2]^{1/2}}{R_0^2 - 1 + [(1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2]^{1/2}}. \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

Из уравнения (4.22) следует, что фазы коэффициентов рассеяния определяются фазами волн накачки, причем для всех R_{ij} фазы разные. Амплитуды зависят от параметра v , отношения мощностей накачки R_0^2 и интеграла распада $B = \epsilon' |E_+|^2 k_0 l_p$. Выражения упрощаются при больших значениях параметра $v \gg 1$:

$$R_{11} = \frac{\exp(i\varphi_+ + i\varphi_-)}{4R_0\Delta_0} \left\{ 2(1 - R_0^2) \left[1 + 3 \cos \frac{l(1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos v^2 B \right] + 2i \left[(1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2 \right]^{1/2} \times \sin \frac{B(1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}}{2} \right\}, \\ R_{22} = \frac{1 + 14R_0^2 + R_0^4}{4R_0^2\Delta_0} \exp\left(-\frac{iv^2 B}{2}\right), \quad (4.30)$$

где $\Delta_0 = \frac{1}{4} \left(R_0 - \frac{1}{R_0} \right)^2 + 4 \cos^2 \theta$, $\theta = \frac{B(1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2}{4}$. При этом коэффициенты R_{12} и R_{21} стремятся к нулю, как $1/v^2$:

$$R_{12} = \frac{\exp(i\varphi_+ - i\varphi_-)}{4R_0\Delta_0 v^2} \frac{R_0^2 - 1 - (1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}}{R_0^2 - 1 + (1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}} (1 + R_0^4 + 14R_0^2) \times \\ \times \left\{ \cos \frac{B(1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}}{2} - \cos v^2 B - \right. \\ \left. - i \left[\sin v^2 B - \frac{R_0^2 + 1}{(1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}} \sin \frac{B(1 + 14R_0^2 + R_0^4)^{1/2}}{2} \right] \right\}; \\ R_{21} = -\frac{i \exp(2i\varphi_+)}{4\Delta_0 v^2 R_0^2} (1 + 14R_0^2 + R_0^4) \sin \frac{v^2 B}{2}.$$

Таким образом, при $v \gg 1$ или при $k_1^2 \gg |\Psi_+|^2$, т. е. при больших углах падения волны возмущения, отличными от нуля оказываются только коэффициенты: R_{11} — коэффициент отражения во встречную волну с обращенным волновым фронтом и R_{22} — коэффициент прохождения. Этот случай рефракции в слое нелинейного диэлектрика можно рассматривать как один из методов обращения волнового фронта [128]. Из выражения (4.30) следует формула коэффициента отражения при обращении волнового фронта в случае $R_0 = 1$, полученная в работе [128],

$$R_{11} \approx i \operatorname{tg} B. \quad (4.31)$$

Рассматриваемое приближение $k_1^2 \gg |\Psi_+|^2$ соответствует пренебрежению параметрическим взаимодействием между собой волн A_+ , A_- и B_+ , B_-^* , которое и обеспечивает неустойчивость плоской волны в кубических фокусирующих средах.

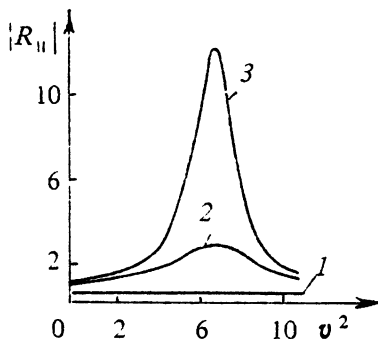
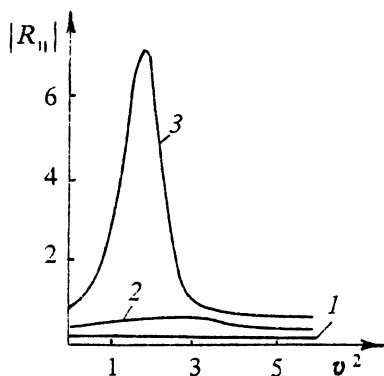


Рис. 4.2. Зависимость амплитуды коэффициента отражения от нормированного угла падения волны при $|\Psi_{-0}| = 0,2 |\Psi_{+0}|$: 1 - $B = 0,8$; 2 - $B = 2,0$; 3 - $B = 3,6$.

Рис. 4.3. Зависимость амплитуды коэффициента отражения от нормированного угла падения волны при $|\Psi_{-0}| = |\Psi_{+0}|$: 1 - $B = 0,4$; 2 - $B = 0,8$; 3 - $B = 0,88$

Перейдем к исследованию влияния этого взаимодействия на рассеяние нелинейным слоем. Для этого рассмотрим зависимость коэффициента отражения R_{11} от нормированного угла v . На рис. 4.2 и 4.3 приведены зависимости $|R_{11}|$ от квадрата угла v^2 при различных значениях интеграла распада B и двух значениях относительной величины встречной волны $R_0 = 0,2; 1$. При малых значениях $B \ll 1$ коэффициент отражения слабо зависит от угла, что соответствует идеальному обращению волнового фронта. С увеличением накачки B он начинает быстро расти и при некотором значении B_{\min} обращается в бесконечность под некоторым углом $v_{\min}(R_0)$. Обращение коэффициента отражения в бесконечность при v_{\min} означает возникновение неустойчивости в системе и начало параметрической генерации. Эта генерация ограничивает те значения коэффициента отражения, которые могут быть получены при обращении волнового фронта с помощью вырожденного четырехфотонного рассеяния в нелинейном слое. При равенстве амплитуд волн накачек ($R_0 = 1$) коэффициент отражения обращается в бесконечность под нормированным углом $v_{\min}^2 \approx 6,5$ при $B_{\min} = 0,9$, коэффициент отражения при далеких углах $v \gg 1$ имеет конечное значение $R_{11}(\infty) \approx 1,2$.

Границы параметрической генерации определяются равенством

$$\Delta(v, B, R_0) = 0. \quad (4.32)$$

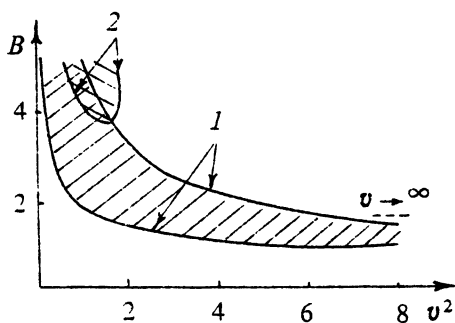


Рис. 4.4. Области неустойчивости на плоскости параметров B и v^2 :
 1 - $|\Psi_{-0}| = |\Psi_{+0}|$, пунктир - сливающиеся границы при $v^2 \rightarrow \infty$,
 2 - $|\Psi_{-0}| = 0,2 |\Psi_{+0}|$.

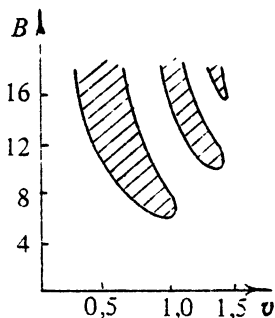


Рис. 4.5. Области неустойчивости на плоскости параметров B и v
 при $|\Psi_{-0}| = 0,1 |\Psi_{+0}|$

На рис. 4.4 и 4.5 показаны первые зоны генерации на плоскости параметров v и B для различных значений величины R_0 . При $R_0 = 1$ эти области простираются неограниченно вправо, переходя в линию (показанную пунктиром), отвечающую условию $B = \frac{\pi}{2}$. При неравных амплитудах волн накачки ($R_0 < 1$) граничные кривые лежат при больших значениях интеграла B и меньших углах v . Несколько первых зон генерации (на рис. 4.5) построены при малом значении амплитуды встречной волны $R_0 = 0,1$. Из этого рисунка видно, что предельная точка (по величине угла v) лежит вблизи границы области неустойчивости интенсивной плоской волны в сплошной нелинейной среде $v = 2^{1/2}$. Для появления генерации необходимо при $v \approx 1$ и $R_0 \ll 1$, когда инкременты пространственной неустойчивости максимальны, выполнение условия

$$\cos\left(\frac{B}{2}\right) \exp\left(\frac{B}{2}\right) \approx -\frac{1}{4R_0^2}, \quad (4.33)$$

следующего из (4.29). Из уравнения (4.29) следует, что порог генерации медленно увеличивается при уменьшении амплитуды встречной волны [24]: $B \approx \ln\left(\frac{1}{R_0}\right)$.

4.5. Неустойчивость волн в интерферометре Фабри – Перо

Выше исследовалась неустойчивость встречных волн в слое при отсутствии отражений как для волн накачки, так и для волн возмущений. Однако часто такое дополнительное отражение имеет место. Примером является интерферометр Фабри – Перо [129, 130, 137], состоящий из двух плоских зеркал, разделенных расстоянием l_p и заполненный нелинейной кубичной средой с проницаемостью (1.15).

Пусть зеркала его имеют действительный коэффициент отражения R_0 и коэффициент пропускания $T_0 = i(1 - R_0^2)^{1/2}$. При возбуждении интерферометра линейно-поляризованной волной с амплитудой Ψ_{in} , падающей на него слева, внутри него распространяются волны с амплитудами Ψ_{+0} и Ψ_{-0} , удовлетворяющие уравнениям (4.15)–(4.16) и граничным условиям

$$\Psi_+ = R_0 \Psi_- + T_0 \Psi_{in} \Big|_{z=0} \quad (4.34)$$

на левом зеркале при $z = 0$ и условиям отражения

$$\Psi_- = R_0 \Psi_+ \Big|_{z=l} \quad (4.35)$$

на правом зеркале при $z = l$. Вправо уходит волна с амплитудой $\Psi_{out} = T_0 \Psi_+(l)$. Поле в интерферометре представляется в виде волн [129] $\Psi = \Psi_{+0} \exp(-i\varphi_+) + \Psi_{-0} \exp(i\varphi_-)$, где $\Psi_{\pm 0}$ – амплитуды встречных волн при $z = 0$, а фазы описываются следующим выражением:

$$\varphi_{\pm} = z + |\Psi_{\pm 0}|^2 + 2|\Psi_{\mp}|^2. \quad (4.36)$$

Используя выражение (4.36), можно найти коэффициент передачи интерферометра K_0 по интенсивности

$$K_0 = \frac{(1 - R_0^2)^2}{1 + R_0^4 - 2R_0^2 \cos[\varphi_+(l) + \varphi_-(l)]}$$

и неявную зависимость амплитуды прошедшей волны от падающей

$$|\Psi_{out}|^2 = |\Psi_{in}|^2 K_0 = |\Psi_{in}|^2 \frac{(1 - R_0^2)^2}{1 + R_0^4 - 2R_0^2 \cos[\varphi_+(l) + \varphi_-(l)]}. \quad (4.37)$$

Кривая, описывающая зависимость выходной интенсивности $|\Psi_{out}|^2$ от входной $|\Psi_{in}|^2$, неоднозначна и заключена между прямыми

$$|\Psi_{out}|^2 = |\Psi_{in}|^2$$

и

$$|\Psi_{out}|^2 = |\Psi_{in}|^2 \frac{(1 - R_0^2)^2}{(1 + R_0^2)^2}.$$

В случае резонанса $\varphi_+(l) + \varphi_-(l) = 2\pi n$, где n — целое число, обеспечивается максимум прозрачности. В случае антирезонанса $\varphi_+(l) + \varphi_-(l) = (2n + 1)\pi$ имеет место минимум прозрачности.

Рассмотрим устойчивость полученных решений относительно возмущений, зависящих от поперечных координат на частоте возбуждающего излучения. Для этого будем искать решения (4.15)–(4.16) в виде (4.17)–(4.18), где возмущения e_+ и e_- удовлетворяют граничным условиям

$$e_+ = R_0 e_- \Big|_{z=0}, \quad e_- = R_0 e_+ \Big|_{z=l} \quad (4.38)$$

В результате вычислений получим равенство, определяющее границы устойчивости в случае резонанса

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - R_0^2)^2 [(1 + R_0^2)^2 + 6R_0^2]}{4R_0^2} + \frac{3(1 - R_0^2)^2}{2} \cos h_1 l \cos h_3 l + \\ & + \left\{ \left[1 + R_0^2 + \frac{((1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2)^{1/2}}{2} \right]^2 \frac{h_1}{h_3} + \right. \\ & \left. + \left[1 + R_0^2 - \frac{((1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2)^{1/2}}{2} \right]^2 \frac{h_3}{h_1} \right\} \sin h_1 l \sin h_3 l = 0 \quad (4.39) \end{aligned}$$

и в случае антирезонанса

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - R_0^2)^2 [(1 + R_0^2)^2 + 6R_0^2]}{4R_0^2} + \left[\frac{5}{2} (1 + R_0^2)^2 + 6R_0^2 \right] \cos h_1 l \cos h_3 l + \\ & + 6(1 - R_0^2)^2 \left(\frac{h_1}{h_3} + \frac{h_3}{h_1} \right) \sin h_1 l \sin h_3 l = 0, \quad (4.40) \end{aligned}$$

где h_1 и h_3 определяются равенствами (4.26), (4.27).

При $R_0 \approx 1$ из (4.39) следует, что величины $|h_{1,3}|l$ малы на пороге неустойчивости. Разлагая $\sin h_{1,3}l$ в ряд, получим выражение для порогового значения B_{\min} вблизи $v^2 \approx 3$, где оно минимально:

$$B_{\min} \geq \frac{1 - R_0^2}{3} \left[1 + \frac{(3 - v^2)^2}{18} \right]. \quad (4.41)$$

Таким образом, отражение от зеркал в резонансе эффективно увеличивает обратную связь и уменьшает порог неустойчивости. Интересно сравнить этот порог с порогом появления гистерезиса [132], который имеет место в зависимости коэффициента передачи (4.37). Для исследования этого удобно перейти к обратной зависимости $|\Psi_{in}|^2 = |\Psi_{out}|^2 (1 + R_0^4 - 2R_0^2 \cos[\varphi_+(l) + \varphi_-(l)] (1 - R_0^2)^{-2}$, которая является однозначной. Условием начала появления гистерезиса является выполнение двух равенств $\frac{d|\Psi_{in}|^2}{d|\Psi_{out}|^2} = 0$ и $\frac{d^2|\Psi_{in}|^2}{d(|\Psi_{out}|^2)^2} = 0$, которые представляют собой систему двух уравнений для определения частотной отстройки $2k_0l$ от 2π и величины B_{\min} , необходимых для гистерезиса. Решая эту систему для коэффициентов отражения зеркал $R_0 \approx 1$, получим, что

$$B_{\min} \geq \frac{4(1 - R_0^2)}{3 \cdot 3^{1/2}(1 + R_0^2) R_0} \approx \frac{2(1 - R_0^2)}{3 \cdot 3^{1/2}} \approx 0,385(1 - R_0^2).$$

Из сравнения с выражением (4.41) следует, что в модели интерферометра Фабри — Перо с плоскими неограниченными зеркалами неустойчивость относительно поперечных пространственных частот имеет более низкий порог, чем гистерезис.

В случае антирезонанса $B_{\min} \approx 1$ и отражение от зеркал не уменьшает порог неустойчивости.

В заключение этого пункта остановимся на случае, когда происходит отражение от экрана за слоем нелинейной среды и граничные условия для возмущений имеют вид

$$e_+ = 0|_{z=0}, \quad e_- = R_0 e_+|_{z=l}.$$

Порог неустойчивости находится из уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 6R_0^2 - 7R_0^4}{4R_0^2} + 2(1 + R_0^2) \cos h_1 l \cos h_3 l + \sin h_1 l \sin h_3 l \times \\ & \times \left\{ \frac{h_1}{h_3} \left[1 + R_0^2 + \frac{((1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2)^{1/2}}{2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{h_3}{h_1} \left[1 + R_0^2 - \frac{((1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2)^{1/2}}{2} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

и также имеет порядок $B_{\min} \approx 1$.

4.6. Особенности неустойчивости плоской волны в среде с нелинейностью высокого порядка

В п. 4.1 рассматривалась модуляционная неустойчивость волн в средах с кубичной нелинейностью. Там было показано, что электромагнитные волны с частотой ω_0 в диэлектрике с дисперсией и кубичной безынерционной поляризацией $P = \alpha_3 E^3$ неустойчивы относительно возмущений на частотах

$$\omega_0 \pm \Omega, \Omega \ll \omega_0, \quad (4.43)$$

если знаки производной групповой скорости по частоте и нелинейности совпадают. В средах, где в поляризации имеются члены более высокого порядка $P \approx \alpha_N E^{2N+1}$ ($N > 1$) неустойчивость может возникнуть на комбинационных частотах Ω_1 и Ω_2 , удовлетворяющих условию [139]

$$2M \omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2, \quad M - \text{целое число} \leq N. \quad (4.44)$$

При этом частоты Ω_1 и Ω_2 могут отличаться друг от друга достаточно сильно. Эффективность взаимодействия возмущений с волной накачки зависит от дисперсии и нелинейности среды. В том случае, когда Ω_1 и Ω_2 мало отличаются от частот $\omega_M = M \omega_0$,

$$\Omega_1 = M \omega_0 + \Omega_p, \quad \Omega_2 = M \omega_0 - \Omega_p, \quad (4.45)$$

$$|\Omega_p| \ll M \omega_0, \quad (4.46)$$

для исследования может быть использован метод медленно меняющихся амплитуд.

Рассмотрим распространение скалярной волны в нелинейной среде, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (4.47)$$

где поляризация среды имеет вид $P = \alpha_p E + \alpha_N E^{2N+1}$. В такой среде, в случае достаточно сильной дисперсии, когда прямая генерация высших гармоник пренебрежимо мала, может распространяться волна $E = U = V \exp(i \omega_0 t - i h z) + \text{к.с.}$ с амплитудой V и постоянной распространения $h^2 = k_0^2(1 + \delta \epsilon_N)$. Величина

$$\delta \epsilon_N = 4\pi \alpha_N |V|^{2N} \left(\frac{C_N}{\epsilon_d} \right), \quad (C_N = \frac{(2N+1)!}{N!(N+1)!}, \epsilon_0 = 1 + 4\pi \alpha_0),$$

описывает изменение проницаемости на несущей частоте. В дальнейшем амплитуду V будем считать действительной.

Возмущенное решение (4.47) представим в виде $E = U + u$, где возмущение u будем считать малым. Пусть $u = u_M \times \exp [iM(\omega_0 t - hz)] + \text{к.с.}$, где u_M — медленно меняющаяся, согласно (4.46), функция. Для u_M запишем параболическое уравнение

$$-2ih_M \frac{\partial u_M}{\partial z} - \left(k_{0M} \frac{\partial^2 k_{0M}}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial^2 u_M}{\partial \tau^2} + (k_{0M}^2 - h_M^2) u_M + A_p u_M + B_p u_M^* = 0, \quad (4.48)$$

где $h_M = Mh$, k_{0M} — волновой вектор в линейной среде на частоте

$$\omega_M, \quad \tau = t - \frac{z}{v_M}, \quad v_M = \left(\frac{\partial k_{0M}}{\partial \omega} \right)^{-1} \text{ — групповая скорость на частоте } \omega_M,$$

$$A_p = 4\pi \frac{\alpha_N}{c^2} \omega_M^2 V^{2N} \frac{(2N+1)!}{(N!)^2}, \quad B_p = 4\pi \frac{\alpha_N}{c^2} \omega_M^2 V^{2N} \frac{(2N+1)!}{(N-M)!(N+M)!}.$$

Найдем решения (4.48) в виде $u_M = w_m \exp (i \Omega_p \tau + Hz)$. Для определения инкремента $G = \frac{H}{h_M}$ имеем дисперсионное уравнение

$$4G^2 + (\Delta + \Omega^2 + A)^2 - B^2 = 0, \quad (4.49)$$

где

$$\Delta = \frac{k_{0M}^2}{h_M^2} - 1$$

— расстройка на частоте ω_M ,

$$\Omega^2 = \Omega_p^2 \left(k_{0M} \frac{\partial^2 k_{0M}}{\partial \omega^2} \right) / h_M^2$$

— квадрат безразмерной частоты,

$$A = \frac{A_p}{h_M^2} = \frac{(N+1) \delta \varepsilon_N}{(1 + \delta \varepsilon_N)}, \quad B = \frac{B_p}{h_M^2} = \frac{N!(N+1)!}{(N-M)!(N+M)!} \frac{\delta \varepsilon_N}{(1 + \delta \varepsilon_N)}.$$

Возвращаясь к исходным размерным переменным, выражение (4.49) для инкремента H запишем в виде

$$H^2 = \frac{1}{4} M^2 k_0^2(\omega) \left\{ B_{MN}^2 (\delta \varepsilon_N)^2 - \left[q + N \delta \varepsilon_N + \frac{k''_{0M}}{k_{0M}} (q+1) \Omega^2 \right]^2 \right\}, \quad (4.50)$$

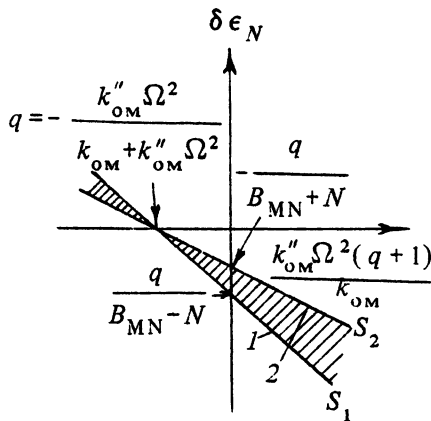


Рис. 4.6. Области модуляционной неустойчивости при $q > 0$:

1 — прямая

$$\delta \epsilon_N = \frac{q}{B_{MN} - N} + \frac{k''_{OM} \Omega^2 (q+1)}{k_{OM} (B_{MN} - N)},$$

2 — прямая

$$\delta \epsilon_N = -\frac{q}{B_{MN} + N} - \frac{k''_{OM} \Omega^2 (q+1)}{k_{OM} (B_{MN} + N)}$$

где $B_{MN} = \frac{N!(N+1)!}{(N+M)!(N-M)!}$, $k''_{OM} = \frac{\partial^2 k_{OM}}{\partial \omega^2}$, $q = \frac{\epsilon_0(\omega M)}{\epsilon_0(\omega)} - 1$ — частотная расстройка линейной части диэлектрической проницаемости. При $M = N = 1$ выражение (4.50) переходит в вытекающее из (4.5) соотношение для инкремента модуляционной неустойчивости вблизи несущей частоты в кубичной среде

$$H^2 = \frac{1}{4} k_0^2(\omega) k''_0 \Omega^2 \left(2 \delta \epsilon_1 + \frac{k''_0}{k_0} \Omega^2 \right). \quad (4.51)$$

Необходимое условие неустойчивости $k''_0 \delta \epsilon_1 < 0$ эквивалентно условию (4.6).

При $N > 1$ неустойчивость вблизи основной частоты ($M = 1$, $B_{MN} = N$) описывается аналогичным соотношением с заменой $\delta \epsilon_1 \rightarrow N \delta \epsilon_N$. Максимальный инкремент в этом случае в N раз выше при одном и том же изменении $\delta \epsilon_1 = \delta \epsilon_N$.

Область неустойчивости вблизи гармоник несущей частоты ($N > 1$, $N \geq M > 1$) расположена на плоскости $\left(\frac{k''_{OM} \Omega^2 (q+1)}{k_{OM}}, \delta \epsilon_N \right)$ между прямыми (рис. 4.6)

$$S_1 : (B_{MN} - N) \delta \epsilon_N - q - \frac{k''_{OM}}{k_{OM}} (q+1) \Omega^2 = 0,$$

$$S_2 : (B_{MN} + N) \delta \epsilon_N + q + \frac{k''_{OM}}{k_{OM}} (q+1) \Omega^2 = 0.$$

Так как всегда $M > 1$, $B_{MN} < N$, то обе прямые имеют отрицательный наклон. Необходимое условие неустойчивости

$$\left[q + \frac{k''_{0M}}{k_{0M}} (q+1) \Omega^2 \right] \delta \varepsilon_N < 0.$$

Как правило, $q > 0$, и в средах с фокусирующей нелинейностью ($\delta \varepsilon_N > 0$) для неустойчивости необходимо $k''_{0M} < 0$, как и при $M = 1$. Однако при $\delta \varepsilon_N < 0$, например в случае оптического пробоя, неустойчивость может возникнуть не только при $k''_{0M} > 0$, но и при $k''_{0M} < 0$. Максимум инкремента вблизи гармоник несущей определяется условием

$$N \delta \varepsilon_N + q + \frac{k''_{0M}}{k_{0M}} (q+1) \Omega^2 = 0$$

и равен

$$H_{\max} = \frac{M k_0}{2} B_{MN} \delta \varepsilon_N. \quad (4.52)$$

С увеличением показателя N инкременты и полосы частот, где наблюдается неустойчивость, растут при одинаковых изменениях $\delta \varepsilon_N$, но максимальный инкремент с ростом номера гармоники уменьшается.

В случае не степенной, а произвольной зависимости поляризации от поля при рассмотрении неустойчивости необходимо разложить поляризацию в ряд по степеням поля E и учесть, что на неустойчивость вблизи частоты ω_M влияют все члены с $N > M$.

Пусть нелинейность описывается двумя членами с разными знаками нелинейности

$$P = \alpha_3 E^3 - \alpha_N E^{2N+1}. \quad (4.53)$$

Функция (4.53) описывает быстрое изменение $P^{NL}(E)$, характерное для многофотонных процессов [140]. Вблизи несущей частоты имеем

$$\delta \varepsilon = 3\alpha_3 |E|^2 - \frac{(2N+1)!}{N!(N+1)!} \alpha_N |E|^{2N} = \delta \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_N, \quad (4.54)$$

$$A = 2\delta \varepsilon_1 + (N+1) \delta \varepsilon_N, \quad B = \delta \varepsilon_1 + N \delta \varepsilon_N \quad (4.55)$$

$$(\delta \varepsilon_1 > 0, \quad \delta \varepsilon_N < 0).$$

Инкремент вблизи несущей будет определяться формулой (4.51), где следует заменить $\delta \varepsilon_1 \rightarrow \delta \varepsilon_1 + N \delta \varepsilon_N$. Необходимое условие неустойчивости

$$(\delta \varepsilon_1 + N \delta \varepsilon_N) k''_0 < 0$$

может выполняться и при $k''_0 > 0$, когда отсутствует модуляционная неустойчивость на кубичной нелинейности, если только $\delta \varepsilon_N < 0$ и $N |\delta \varepsilon_N| > \delta \varepsilon_1$. На комбинационных частотах вблизи ω_M с $M \geq 2$ инкременты описываются по-прежнему формулой (4.49), где коэффициенты A и B определяются только нелинейностью $\alpha_N E^{2N+1}$, а в расстройке Δ следует заменить $\delta \varepsilon_N$ на полное изменение диэлектрической проницаемости (4.54). Необходимое условие неустойчивости запишется в виде

$$\left[q - \delta \varepsilon_1 + (k''_{0M} / k_{0M}) (q + 1) \Omega^2 \right] \delta \varepsilon_N < 0.$$

Достаточным условием при $k''_{0M} > 0$ является превышение нелинейностью $\delta \varepsilon_N$ порогового уровня

$$|\delta \varepsilon_N| > \frac{q - \delta \varepsilon_1}{B_{MN} + N} \equiv |\delta \varepsilon_N|_{кр}.$$

С ростом $|\delta \varepsilon_N|$ полоса частот вблизи ω_0 , в которой наблюдается неустойчивость, смещается в область больших нелинейных расстройек и расширяется.

В частности, развитие модуляционной неустойчивости на комбинационных частотах при нелинейности типа (4.53) может быть одним из механизмов сверхуширения спектров при самофокусировке коротких импульсов света в твердых телах [34, 61, 87, 141, 35, 142, 39]. Если коэффициент α_N достаточно мал и $N \gg 1$, то в значительном интервале изменения интенсивности будет наблюдаться самофокусировка пучка на кубичной нелинейности. Дальнейший рост интенсивности приведет к превышению значения $|\delta \varepsilon_N|_{кр}$ и возникновению модуляционной неустойчивости, полоса которой будет расти с увеличением мощности первоначального пучка.

4.7. О неустойчивости волновых пучков в нелинейных средах

Неустойчивость, достаточно просто анализируемая для плоских волн, проявляется и в волновых пучках [143, 144]. Для иллюстрации

ограничимся примером почти регулярного волнового пучка с линейной поляризацией, описываемого уравнением

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (4.56)$$

Прямое численное решение уравнения (4.56) возможно, но извлечение конкретных результатов из этих решений достаточно сложно. В случае пучков, близких к аксиально-симметричным, удобно представить поле E в виде суммы азимутальных гармоник

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi^{(m)} \exp(im\phi),$$

которые связаны между собой системой уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \Psi^{(m)} - 2i \frac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial z} + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi^{(m+n-k)} \Psi^{(k)*} \Psi^{(n)} = 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

решение которой определяет зависимость каждой гармоники от координат. Эта система по своим свойствам аналогична системе, описывающей параметрическое взаимодействие волн. Если в первоначальном распределении поля амплитуда основной гармоники преобладает, то систему (4.57) можно рассматривать в приближении заданной накачки:

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial r} - 2i \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial z} + |\Psi^{(0)}|^2 \Psi^{(0)} = 0, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \Psi^{(m)} - 2i \frac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial z} + \\ & + 2 |\Psi^{(0)}|^2 \Psi^{(m)} + \Psi^{(0)2} \Psi^{(-m)*} = 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi^{(-m)*}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^{(-m)*}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \Psi^{(-m)*} + 2i \frac{\partial \Psi^{(-m)*}}{\partial z} + \\ & + 2 |\Psi^{(0)}|^2 \Psi^{(-m)*} + \Psi^{(0)2} \Psi^{(m)} = 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

описывая взаимодействие мощной гармоники $m = 0$ с двумя слабыми волнами типов m и $-m$. Уравнения (4.58)–(4.60) являются уравнениями с переменными коэффициентами. Приведем результаты численного решения уравнений (4.58)–(4.60) с начальными условиями

$$\Psi^{(0)} = \Psi_0 \exp(-r^2/2), \quad \Psi^{(m)} = \Psi^{(-m)*} = r^m \exp(-r^2/2a_m^2)$$

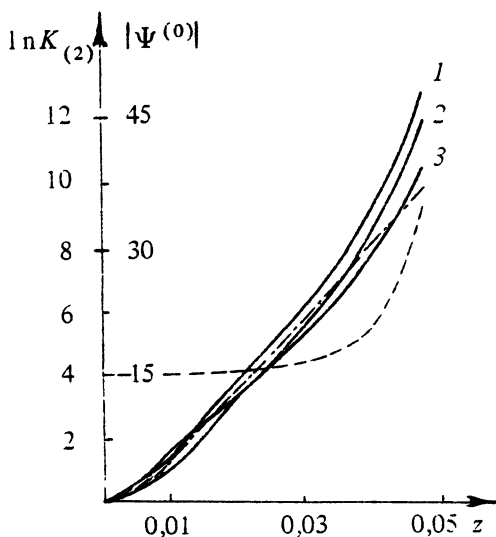


Рис. 4.7. Коэффициент усиления гармоники с азимутальным индексом $m=2$ в поле первоначально гауссова пучка с мощностью $P_0 = 61P_{кр}$ как функция продольной координаты при различных ширинах пучка гармоники в начале среды: 1 — $a_m^2 = 0,125$; 2 — $a_m^2 = 0,0833$; 3 — $a_m^2 = 0,250$. Пунктир — амплитуда поля мощного пучка, штрих-пунктир — усиление в поле плоской волны

при различных Ψ_0 , a_m и $m \leq 4$. Величина Ψ_0 однозначно связана с мощностью основного пучка $P^{(0)}/P_{кр} = (\Psi_0/1,92)^2$, где $P_{кр}$ — критическая мощность коллимированного гауссова пучка (см. далее гл. 5). Параметр a_m характеризует начальную структуру слабых гармоник. Множитель r_m в структуре m -й гармоники гарантирует отсутствие особенности на оси y решений второго и третьего уравнений.

Расчеты показали, что существует пороговая мощность накачки P_{0m} , при превышении которой амплитуда и мощность гармоник $P_m \approx \iiint |\Psi^{(m)}|^2 r dr$ начинает нарастать, причем $P_{01} \approx 3P_{кр}$, $P_{02} \approx 5P_{кр}$, $P_{03} \approx 12P_{кр}$. Скорость нарастания зависит от величины мощности накачки. При $P < P_{0m}$ мощности гармоник убывают.

Характер нарастания гармоник при $P > P_{0m}$ иллюстрирует рис. 4.7, где приведен логарифмический коэффициент усиления

$$\ln K_{(m)} = \ln \left[\iiint |\Psi^{(m)}(z)|^2 r dr / \iiint |\Psi^{(m)}(0)|^2 r dr \right]$$

второй гармоники ($m = 2$) как функция продольной координаты при $P_0 \approx 61P_{кр}$ для значений $a_m^2 = 0,25; 0,125; 0,0833$. На том же рисунке построена штрих-пунктирной кривой функция $2\ln\left(\frac{|\Psi_0|^2 z}{2}\right)$, которая показывает нарастание возмущений в плоской волне с амплитудой, равной амплитуде максимума пучка при $z = 0$, и пунктиром — зависимость поля основной гармоники на оси.

Зависимость коэффициента усиления от продольной координаты можно разделить на три области. Первая (вблизи $z = 0$) — область формирования наиболее быстрорастущих возмущений, где исходные действительные возмущения превращаются в комплексные, оптимально сфазированные с накачкой. Протяженность этой области определяется характером возмущений в начале среды, обращается в нуль, если возмущения оптимальны на входе, и увеличивается, если они далеки от оптимальных.

Вторая область — область усиления этих наиболее быстрорастущих возмущений при неизменности их формы. Третья — вблизи точки образования особенности в пучке основной гармоники.

Во второй области на коэффициент усиления оказывает влияние ограниченность пучка. Часть возмущений идет в сравнительно слабом поле, поэтому коэффициент усиления уменьшается по сравнению с коэффициентом усиления в плоской волне. Но в конце этой области проявляется другой эффект, который становится преобладающим в третьей области: вследствие самофокусировки пучка поле на оси увеличивается и коэффициент усиления гармоник возрастает. Особенно сильно этот эффект проявляется на гармонике $m = 1$. На рис. 4.8 приведены коэффициенты усиления первых гармоник $K_{(1)}$ и $K_{(2)}$ как функции интенсивности поля на оси пучка при $P_0 \approx 9,8P_{кр}$. Коэффициент усиления гармоники $m = 1$ растет с увеличением ин-

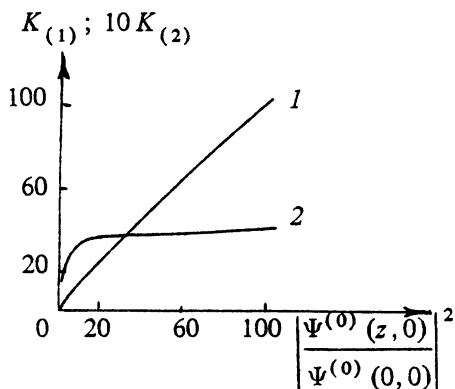


Рис. 4.8. Коэффициент усиления гармоники с различными азимутальными индексами в поле первоначально гауссова пучка с мощностью $P_0 = 9,8P_{кр}$ как функция интенсивности мощного пучка на оси: 1 — $m = 1$, 2 — $m = 2$

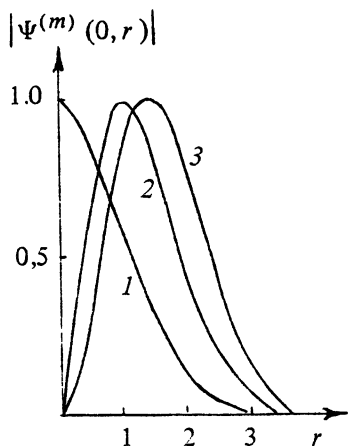


Рис. 4.9. Амплитудная структура различных гармоник на входе в среду:
 1 - $m = 0$, 2 - $m = 1$, 3 - $m = 2$.

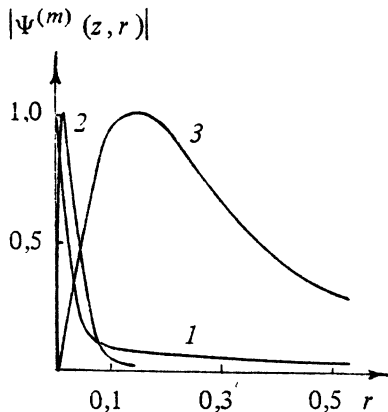


Рис. 4.10. Амплитудная структура различных гармоник вблизи фокальной точки:
 1 - $m = 0$, 2 - $m = 1$, 3 - $m = 2$

тенсивности, почти как линейная функция, и в точке схлопывания обращается в бесконечность. Коэффициент усиления гармоник с $m \geq 2$ при приближении к точке схлопывания остается ограниченным. Разная зависимость $K_{(1)}$ и $K_{(2)}$ обусловлена тем, что гармоники с $m = 1$ захватываются основным пучком. На рис. 4.9 показана структура поля гармоник $m = 0, 1, 2$ на входе в среду, а на рис. 4.10 в том сечении, где интенсивность поля на оси у основной гармоники с $m = 0$ увеличивается в ≈ 200 раз. Пучок гармоники с $m = 1$ по мере фокусировки пучка основной гармоники сжимается, в то время как пучок гармоники с $m = 2$ не успевает следить за полем основной гармоники $m = 0$ и скоро оказывается в сравнительно слабом поле крыльев пучка. Вследствие этого взаимодействие пучков уменьшается и коэффициент усиления остается ограниченным.

Процесс формирования оптимальной структуры достаточно быстро заканчивается лишь при условии действительных возмущений с оптимальным размером a_m . При несовпадении амплитудных распределений с оптимальными процесс формирования наиболее быстро растущих возмущений не успевает закончиться до того момента, когда пучок схлопывается.

Отсутствие области по z (при неоптимальном a_m), в которой успевала бы сформироваться наиболее быстро растущая мода,

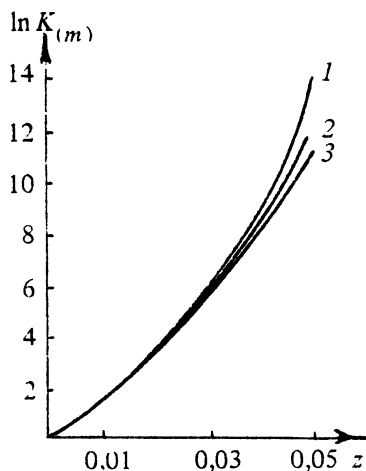
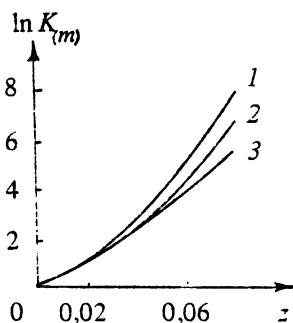


Рис. 4.11. Коэффициент усиления гармоники с различными азимутальными индексами в поле первоначально гауссова пучка с мощностью $P_0 = 27P_{кр}$ как функция продольной координаты:

$$1 - m = 2, a_m^2 = 0,2; \quad 2 - m = 3, a_m^2 = 0,25; \quad 3 - m = 4, a_m^2 = 0,25.$$

Рис. 4.12. Коэффициент усиления гармоники с различными азимутальными индексами в поле первоначально гауссова пучка с мощностью $P_0 = 61P_{кр}$ как функция продольной координаты:

$$1 - m = 2, a_m^2 = 0,125; \quad 2 - m = 3, a_m^2 = 0,166; \quad 3 - m = 4, a_m^2 = 0,166$$

согласуется с оценками разности логарифмов коэффициентов усиления двух наиболее быстро растущих мод на длине существования однородного пучка. Эта разность, согласно [146], много меньше единицы. Для определения полного коэффициента усиления необходимо учитывать как уменьшение коэффициента усиления из-за ограниченности пучка, так и увеличение его из-за роста амплитуды поля основной гармоники на оси. Графики коэффициента усиления для трех гармоник $m = 2, 3, 4$ при мощности $P_0 \approx 27P_{кр}$ и $P_0 \approx 61P_{кр}$ при оптимальных размерах возмущений приведены на рис. 4.11, 4.12. Можно предположить, что распад пучка на отдельные точки схождения произойдет лишь в том случае, если мощность гармоники с индексом m будет больше, чем $2m P_{кр}$ (см. гл. 3), когда на каждый максимум приходится мощность, превышающая мощность таунсова пучка. Условие распада может быть записано в виде

$$P_m(0) K_{(m)} [P_0] > 2m P_{кр}. \quad (4.61)$$

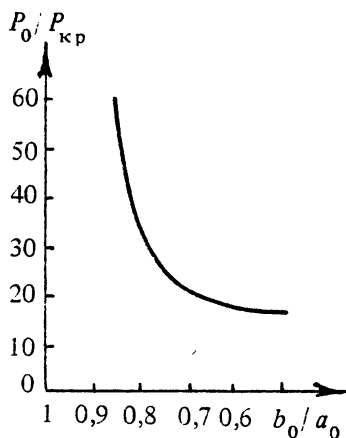
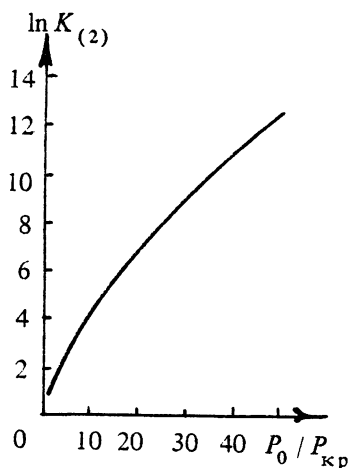


Рис. 4.13. Коэффициент усиления гармоники с азимутальным индексом $m=2$ на участке до нелинейного фокуса как функция мощности пучка накачки.

Рис. 4.14. Зависимость мощности развала пучка с первоначально эллиптическим сечением от отношения полуосей эллипса

Приложим развитую выше теорию к расчету самофокусировки эллиптического пучка с начальным профилем

$\Psi(r) \approx \exp\left(-\frac{x^2}{2a_0^2} - \frac{y^2}{2b_0^2}\right)$. Исходя из условия (4.61), а также пользуясь тем, что в разложении коллимированного пучка с эллиптическим сечением профиля присутствуют только четные гармоники, и зная зависимость коэффициента усиления от мощности для низшей из них ($m=2$, рис. 4.13), можно на плоскости параметров $\frac{b_0}{a_0}$ и $\frac{P_0}{P_{кр}}$ найти

границную кривую, разделяющую области существования одной и нескольких точек схлопывания (см. рис. 4.14). Для появления нескольких точек схлопывания при небольшой эллиптичности необходимо превышение мощности пучка над критической более чем на порядок. Это качественно согласуется с результатами [214].

В заключение данного пункта остановимся на устойчивости однородных волноводов [147, 148]. Волновые однородные пучки, строго говоря, всегда неустойчивы. Это очевидно, если рассмотреть развитие возмущений в виде наклона фазового фронта пучка. Такое возмущение меняет направление распространения пучка, причем отличие возмущенного и невозмущенного пучков может быть велико.

Отличие описывается линейно растущими возмущениями и соответствует преобразованию одного однородного пучка в другой.

Кроме таких линейно нарастающих возмущений, во многих случаях существуют экспоненциально растущие возмущения, приводящие к разрушению пучка. Так, плоские пучки неустойчивы относительно возмущений, нарушающих их двумерный характер. Неустойчивы и трехмерные пучки. Это легко понять на основе метода моментов (см. далее гл. 6). При возмущениях мощности однородный пучок либо расходится, либо схлопывается в точку. Для сред с насыщением пучок в трехмерном случае остается устойчивым относительно экспоненциальных возмущений на несущей частоте [148], что согласуется с физическими соображениями об устойчивости однородных пучков, мощность P которых уменьшается при увеличении их ширины a , т. е. выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial a} < 0$.

ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ САМОФОКУСИРОВКИ И САМОВОЗДЕЙСТВИЯ НАДКРИТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ И ПАКЕТОВ

В гл. 4 показано, что достаточно мощные гладкие пучки в нелинейной среде разбиваются на отдельные фокусирующиеся области. Самофокусировку таких областей можно рассматривать самостоятельно как самофокусировку отдельных пучков, чему и посвящена эта глава. В первом пункте дается "безабберрационное" решение уравнений, полученных в гл. 2. Далее приводятся результаты численного решения этих уравнений и обсуждаются их различные следствия.

5.1. "Безабберрационное" приближение в теории самофокусировки

Представим решение нелинейного скалярного параболического уравнения

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \Psi'_z + |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (5.1)$$

в виде $\Psi = e(r_{\perp}, z) \exp[-i \phi(r_{\perp}, z)]$. Действительные величины — амплитуда $e(r_{\perp}, z)$ и фаза $\phi(r_{\perp}, z)$ — удовлетворяют системе уравнений из работы [5]:

$$2\phi'_z = -(\nabla_{\perp} \phi)^2 + e^2 + \frac{\Delta_{\perp} e}{e}, \quad (5.2)$$

$$e'_z = -\frac{1}{2} e \Delta_{\perp} \phi - (\nabla_{\perp} \phi \cdot \nabla_{\perp} e). \quad (5.3)$$

Следствием системы (5.2)–(5.3) является уравнение для параксиальных лучей

$$\frac{d^2 r_{\perp}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon_{\text{эф}}, \quad (5.4)$$

где

$$\varepsilon_{\text{эф}} = \varepsilon_r(e^2) + \frac{\Delta_{\perp} e}{e}, \quad \varepsilon_r(e^2) = 1 + e^2. \quad (5.5)$$

Согласно уравнению (5.4) первое слагаемое в $\varepsilon_{\text{эф}}$ определяет рефракцию лучей в неоднородном диэлектрике, второе — их дифракционное искривление. Рефракция соответствует концентрации лучей и созданию сильного поля, дифракция препятствует этому.

Уравнение (5.4) вместе с уравнением (5.3), которое может быть переписано в форме $\frac{\partial e^2}{\partial z} + \text{div}_{\perp}(e^2 \nabla_{\perp} \varphi) = 0$, эквивалентны гидродинамическим уравнениям потенциального течения сжимаемой жидкости:

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla_{\perp} w, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_{\perp}(\rho v) = 0,$$

где

$$t \equiv z, \quad v = \frac{dr_{\perp}}{dt}, \quad \rho = e^2, \quad w = -\frac{1}{2} \left[\varepsilon_r(\rho) + \frac{\Delta_{\perp} \rho^{1/2}}{\rho} \right],$$

при этом исходные соотношения (5.2)—(5.3) являются уравнениями для потенциала скоростей φ и плотности ρ . Возможность такой интерпретации отмечена в [85, 86].

Если известен профиль пучка в некотором сечении z нелинейной среды, то по характеру правой части лучевого уравнения (5.4) можно судить о степени фокусирующего воздействия, оказываемого средой на пучок в данном сечении. Для иллюстрации приведем несколько примеров.

А. Гауссов пучок

$$e = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right). \quad (5.6)$$

Подставляя эту функцию в уравнение (5.4), получим

$$\frac{d^2 r_{\perp}}{dz^2} = \left(\frac{1}{a^2} - e^2\right) \frac{x x_0}{2a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - e^2\right) \frac{y y_0}{2b^2}. \quad (5.7)$$

В применении к линейной однородной среде уравнение (5.7) заменой

$$x = a \alpha, \quad y = b \beta \quad (\alpha, \beta - \text{const для лучевой трубки}) \quad (5.8)$$

сводится к известным уравнениям [151] для параметров a и b гауссова пучка (5.6):

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{1}{a^3}, \quad \frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{b^3}. \quad (5.9)$$

Возможность такого сведения указывает на сохранение формы гауссова пучка при распространении в линейной среде [151].

В нелинейной среде уравнение (5.7) применимо лишь на начальном участке луча, так как в дальнейшем форма пучка меняется. Область начальной фокусировки в поперечном сечении пучка определяется условиями

$$e^2 > \frac{1}{a^2}, \quad e^2 > \frac{1}{b^2}. \quad (5.10)$$

В частности, для аксиально-симметричного пучка область фокусировки лежит в круге

$$e^2(r) > \frac{1}{a^2}, \quad (5.11)$$

а для двумерного ($b \rightarrow \infty$) — в полосе

$$e^2(x) > \frac{1}{a^2}. \quad (5.12)$$

Б. Двумерный пучок профиля (3.7):

$$e = A \frac{2^{1/2}}{a} \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Из выражения

$$\varepsilon_{\text{эф}} = 1 + \frac{2}{a^2} A^2 - \frac{1}{a^2} - \left(\operatorname{th}^2 \frac{x}{a} \right) \frac{2}{a^2} (A^2 - 1)$$

следует, что такой пучок фокусируется по всему поперечному сечению при $A > 1$ и расфокусируется при $A < 1$ ($A = 1$ — амплитуда однородного по z пучка). Условия фокусировки и расфокусировки можно переписать соответственно в виде $P > P^{(2)}(a)$ и $P < P^{(2)}(a)$, где $P^{(2)}(a)$ — мощность однородного пучка.

В. Аксиально-симметричный пучок с профилем однородного (таунсова) пучка [4], определяемым из уравнения (3.12)

$$e = A \frac{1}{2} e_{00} \left(\frac{r}{a} \right),$$

как и в двумерном случае, фокусируется по всему сечению $z = \text{const}$ при $A > 1$ и расфокусируется при $A < 1$, что соответствует условиям $P > P_{\text{кр}}^{(3)}$ и $P < P_{\text{кр}}^{(3)}$.

При $e^2 \gg \Lambda_{\perp}^{-2}$, где Λ_{\perp} — характерный поперечный масштаб изменения амплитуды поля в поперечном сечении пучка, в уравнении (5.2) можно пренебречь членом $(\Delta_{\perp} e)/e$ (приближение геометрической оптики). Одним из возможных решений в этом случае являются сферические волны с переменной кривизной фазы и амплитуды

$$\varphi = \frac{K(z)r^2}{2} + \varphi_0(0), \quad e^2 = e_0^2 + r^2(K' + K^2), \quad (5.13)$$

рассмотрение которых позволяет выяснить ряд особенностей структуры пучков в окрестности максимума (минимума) поля. Нетрудно найти, что

$$K(z) = \frac{D(z - z_0)}{1 + D(z - z_0)^2}. \quad (5.14)$$

Постоянные D и z_0 определяются структурой пучка (5.13) на границе нелинейной среды. Пусть при $z = 0$

$$K = K_0, \quad e^2 = e_0^2 + \alpha r^2.$$

Тогда

$$z_0 = -\frac{K_0}{\alpha + K_0^2}, \quad D = \frac{(\alpha + K_0^2)^2}{\alpha}.$$

Пучки, описываемые выражениями (5.13) и (5.14), качественно различны при $D > 0$ ($\alpha > 0$ — расфокусирующий профиль $\varepsilon = 1 + e^2$ при $z = 0$) и при $D < 0$ ($\alpha < 0$ — фокусирующий профиль ε при $z = 0$). Схематически они показаны на рис. 5.1. Точки $z_{1,2} = z_0 \pm |D|^{-1/2}$ на рис. 5.1, б являются фокальными. В их окрестности решение (5.13) неприменимо. Поэтому участки пучка на рис. 5.1, б, разделенные этими точками, должны рассматриваться независимо. Прохождение пучка через фокус требует специального анализа, выходящего за рамки принятого приближения.

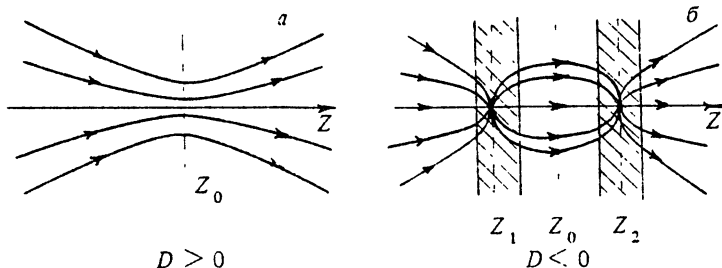


Рис. 5.1. Ход лучей при самофокусировке

Принципиальные стороны явления самофокусировки при учете дифракционного члена $(\Delta_{\perp} e)/e$ в уравнении (5.2) можно выяснить, воспользовавшись следующей аппроксимацией нелинейного слагаемого в $\epsilon_r(e^2)$:

$$e^2 = e_0^2 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \cong e_0^2(z) \left[1 - v \frac{r^2}{a^2(z)}\right],$$

где $v = \text{const}$. Подставляя это выражение в уравнение (5.4) и полагая $r = \alpha a$ ($\alpha = \text{const}$), для радиуса пучка получим уравнение

$$a'' = -\frac{e_0^2 v}{a} + \frac{1}{a^3}.$$

Используя закон сохранения энергии $e_0^2 a^2 = \text{const} = \rho$, это уравнение можно записать в виде

$$a'' = \frac{1 - v\rho}{a^3}, \quad (5.15)$$

откуда видно, что существует критическое значение параметра $\rho = 1/v = \rho_{\text{кр}}$, при котором пучок однороден ($a'' = 0$). Это значение можно отождествить со значением $\rho_{\text{кр}} = 3,73$, получаемым из численных расчетов критической мощности гауссова пучка, откуда найдем значение параметра v .

В более общем виде уравнение (5.15) можно записать так:

$$a'' = \frac{1 - g(a)}{a^3}, \quad (5.16)$$

где $g(a) = P/P_{\text{одн}}(a)$, P — мощность пучка, а $P_{\text{одн}}(a)$ — мощность однородного пучка, зависящая, вообще говоря, от его радиуса a .

Фазовый портрет уравнения (5.16) для двумерного пучка показан на рис. 5.2, для трехмерного пучка — на рис. 5.3. Значение \bar{a} на рис. 5.2 — радиус однородного пучка. Таким образом, ширина двумерного пучка a испытывает осцилляции в зависимости от продольной координаты. Трехмерный пучок при $g < 1$ всегда расфокусируется (рис. 5.3, а), при $g > 1$ он при соответствующих начальных условиях фокусируется в некоторой точке на оси z (рис. 5.3, б), как и в приближении геометрической оптики. Положение фокуса зависит от g . В целом картина лучей при $g < 1$ и при $g > 1$ качественно такая же, как соответственно на рис. 5.1, а и 5.1, б.

Решение уравнения (5.16) для трехмерного пучка, когда $P_{\text{одн}} = P_{\text{кр}}$, запишем в явном виде

$$a^2 = \frac{z^2(1 - P/P_{\text{кр}})}{a_0^2} + \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 a_0^2, \quad (5.17)$$

где F — радиус кривизны фазового фронта пучка на входе в среду.

Из равенства (5.17) следует, что при $P > P_{\text{кр}}$ радиус пучка обращается в нуль (пучок "схлопывается") на некотором расстоянии $z_{\text{сф}}$. Для коллимированного пучка ($F = \infty$)

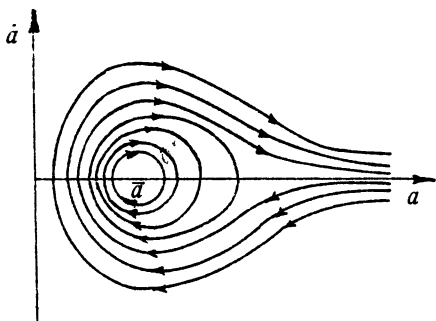


Рис. 5.2. Фазовый портрет двумерного пучка

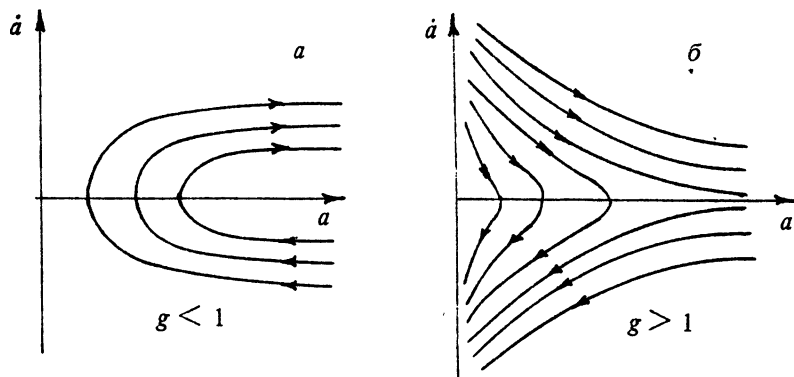


Рис. 5.3. Фазовый портрет трехмерного пучка

$$z_{\text{сф}} = \frac{u_0}{(P/P_{\text{кр}} - 1)^{1/2}}. \quad (5.18)$$

Более точное выражение для $z_{\text{сф}}$ приведено в п. 5.3. Очевидно, что поведение трехмерного пучка в окрестности фокальных точек приведенными уравнениями не описывается. Обращения поля в бесконечность можно избежать, если решать волновое, а не параболическое уравнение (5.1), или учитывать отличие нелинейности от кубической. В том и другом случае это сведется к введению в уравнение (5.16) зависимости $P_{\text{кр}}$ от ширины пучка a .

5.2. Численное моделирование эффектов самофокусировки

Безаберрационное приближение дает достаточно грубое описание самофокусировки. Более точные результаты получаются при численном решении уравнения (5.1). Аналитических его решений известно немного. Наиболее интересные из них изложены далее в гл. 6. Основным методом исследования самофокусировки плоских волновых пучков является метод обратной задачи теории рассеяния [149, 150, 152], дополненный прямыми численными исследованиями [6–8, 87]. Для трехмерных пучков ($\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) основным методом является численное решение уравнения (5.1).

При численном исследовании уравнения (5.1) находят применение различные вычислительные приемы. В случае трехмерного аксиально симметричного пучка его решают в полосе $0 < r_k$, разбивая отрезок на части точками деления $0 < r_1 < \dots < r_n \dots < r_{N-1} < r_N = r_k$. Обычно предполагается равенство интервалов $r_{n+1} - r_n = h_r$. Для аппроксимации производных по поперечным координатам используют соответствующие шаблоны для производных, выраженных через значения функции Ψ в точках r_n [153, 154]. В этом случае для $\Psi(r_n, z)$ имеют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, в свою очередь, могут решаться различными способами. При использовании стандартных методов аппроксимации дифференциалов конечными разностями могут быть использованы явные и неявные схемы. В явных схемах функции на $(k+1)$ -м слое $\Psi(r_n, z_{k+1})$ выражается через значение функций на k -м, $(k-1)$ -м и т. д. слоях. Устойчивость схемы обеспечивается малостью шага по z

$$h_z \leq h_r^2/2. \quad (5.19)$$

Условие (5.19) при больших градиентах функции по поперечным координатам налагает жесткое ограничение на h_z , что ведет к весьма медленному счету. В неявных схемах условие (5.19) отсутствует: они являются безусловно устойчивыми. В них функции на $(k+1)$ -м слое связываются с функциями на k -м слое посредством системы уравнений, для решения которых часто используется метод прогонки. Неявные схемы позволяют считать быстрее, однако простейшие из них при большом шаге h_z не являются консервативными и вносят дополнительное нелинейное затухание. В самофокусировочных задачах явные схемы с изменяемым шагом h_z , поддерживающие требуемую точность расчета (например, метод Рунге – Кутты в модификации Мерсона [153]), не позволяют продвинуться при решении уравнения (5.1) по продольной координате далее первой фокальной точки [6]. Неявные схемы за счет вносимого нелинейного затухания позволяют сделать это. Но при этом следует иметь в виду, что вместо уравнения (5.1) решается фактически другое уравнение. Недостатками обладают и методы решения (5.1), основанные на быстром преобразовании Фурье. При фиксированных шагах по поперечной координате число учитываемых поперечных гармоник конечно. Описать при этом функции с большими поперечными градиентами, которые имеют место при самофокусировке, практически невозможно. Кроме того, при использовании быстрого преобразования Фурье при решении уравнения (5.1) возникают дополнительные потери, связанные с отбрасыванием высших гармоник.

В качестве граничного условия при $r=0$ берется вследствие симметрии соотношение $\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$. Замкнутость системы дифференциальных уравнений достигается при r_N заменой производных по r в последних уравнениях для $\Psi(r_N)$ несимметричными разностями, в то время как внутри интервала $0 < r < r_N$ берутся симметричные разности. В некоторых работах использовались в крайней точке r_N односторонние разности. Подобная процедура обеспечивает согласование границы с падающей плоской волной независимо от угла падения последней на эту границу. Само значение r_k выбирается равным $(2,5 + 3)r_a$, где r_a – радиус области характерного изменения амплитуды входного пучка. Начальное распределение (при $z=0$) во всех случаях таково, что либо основная часть пучка локализуется в области $r < r_a$, либо в этой области локализуется возмущение на фронте плоской волны, развивающееся потом в процессе самофокусировки в отдельный схлопывающийся пучок. Контрольный счет по приведенным схемам гауссовых пучков в линейной среде

показал, что они обеспечивают хорошую точность в соответствующей области изменения переменных по r и z . Для нелинейной среды точность расчета контролируется дополнительно по величине интеграла $I_1 = \int_0^{r_k} |\Psi|^2 r dr$. В некоторых работах вычисляется также интеграл

$I_2 = \int_0^{r_k} \left(|\nabla_{\perp} \Psi|^2 - \frac{|\Psi|^4}{2} \right) r dr$, который при условии локализации

всего поля в полосе расчета является сохраняющейся величиной. Для контроля точности он более предпочтителен из-за возникающих в процессе самофокусировки больших градиентов и больших значений поля Ψ .

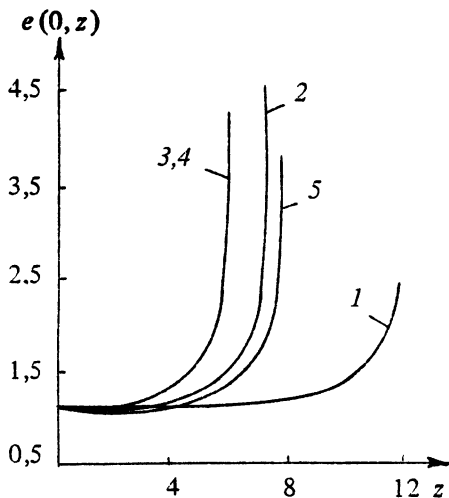
Более высокую точность расчета самофокусирующихся пучков обеспечивает введение неравномерных сеток по поперечной координате r . Неравномерные сетки, не зависящие от продольной координаты, путем разбиения всего интервала $(0 + r_k)$ на ряд субинтервалов дают возможность продвинуться ближе к фокальной точке. При этом приходится пользоваться более сложными (5–7-точечными) шаблонами для аппроксимации производных. В части работ используются адаптивные схемы разбиения точек по поперечной координате, при которых само разбиение точек подстраивается по какому-либо алгоритму к поперечной структуре. Некоторые свойства таких схем будут обсуждены далее в гл. 7.

5.3. Стационарная самофокусировка в кубичных средах

Рассмотрим пучки в кубичной среде. Будем различать два случая: развитие локализованного возмущения, возникающего на фронте неограниченной плоской волны $\Psi = \Psi_0 + \tilde{\epsilon}$ ($\Psi_0 = \text{const}$, $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$ при $r \gg a$, где a — радиус возмущения), и прохождение через нелинейную среду ограниченного пучка: $\Psi \rightarrow 0$, $r \gg b$, b — радиус пучка.

Возьмем $\Psi(r, 0) = 1 + 0,1 \exp(-r^2/a^2)$. На рис. 5.4 показано изменение амплитуды поля в максимуме развивающегося возмущения. На начальном участке, в зависимости от a может происходить как фокусировка (кривые 1–4, причем кривые 3, 4 с графической точностью совпадают друг с другом), так и расфокусировка возмущения (кривая 5). Такой ход кривых полностью согласуется с результатами гл. 4, в которой показано, что начальный инкремент развития возмущений в пучке зависит при данной амплитуде от ширины области возмущения. На рис. 5.5 приведены амплитудно-фазовые характеристики указанного выше пучка $\Psi(r, z) =$

Рис. 5.4. Изменение амплитуды поля в максимуме локализованного возмущения при $e(r, 0) = 1 + 0,1 \exp(-r^2/a^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$:
 1 - $a = 10$, 2 - $a = 5$, 3 - $a = 4$,
 4 - $a = 3$, 5 - $a = 1$



$= e \exp(-i\varphi)$ в некоторых сечениях z для $a = 3$. Кривые для $a = 2,5$ и 10 аналогичны. При $a = 1$ вначале происходит дифракционная расфокусировка, уширяющая область возмущения, которое затем начинает фокусироваться под влиянием нелинейности среды. Последний рисунок наглядно иллюстрирует образование области высокой интенсивности за счет перераспределения энергии в поперечном сечении пучка.

Результаты соответствующего рассмотрения ограниченного коллимированного гауссова пучка $\Psi(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$ приведены

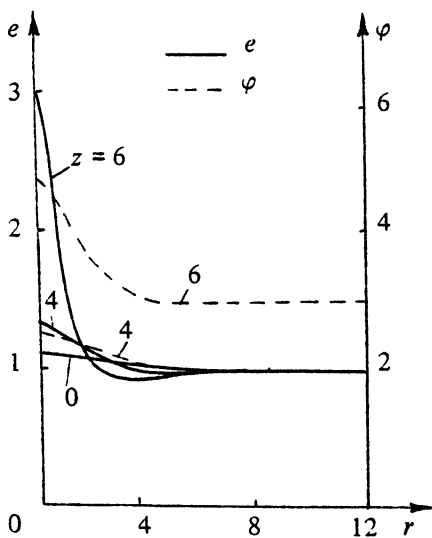


Рис. 5.5. Амплитудно-фазовая структура локализованного возмущения при $a = 3$

на рис. 5.6, 5.7. Изменение амплитуды поля на оси пучка при разных значениях b иллюстрируется рис. 5.6. Согласно лучевому описанию (п. 5.1) рассматриваемые пучки должны начинать сжиматься на начальном участке нелинейной среды при $b > 2^{1/2}$, что и подтверждается приведенными графиками. В п. 5.1 на основе безаберрационного приближения было высказано предположение, что при мощности пучка, превышающей некоторую критическую величину, он фокусируется в точку на оси z ("схлопывается"). Численные расчеты это подтверждают: при $b \geq b_{кр} = 2,73$ интенсивность пучков на оси достигает больших значений. При меньших начальных радиусах b поле на оси пучка, пройдя через максимум, начинает убывать (см. рис. 5.6). На рис. 5.7 приведены два типичных примера хода лучей при самофокусировке гауссовых пучков: при $b = 2,7 < b_{кр}$ и при $b = 4 > b_{кр}$. Для сравнения на тех же рисунках пунктиром показан ход лучей в линейной среде. Цифры около лучей дают долю полной мощности в соответствующей лучевой трубке. По данным рис. 5.6 можно построить результирующий график зависимости $b \Psi_0$ (Ψ_0 — начальная амплитуда гауссова пучка на оси $r = 0$) от параметра $b^2/z_{сф}$, где $z_{сф}$ — длина самофокусировки (расстояние по оси z до точки "схлопывания"). Эту зависимость с некоторой точностью можно аппроксимировать гиперболой

$$(b \Psi_0 - 2,25)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{z_{сф}} \right)^2 = 0,23. \quad (5.20)$$

Величина мощности пучка, соответствующая критическому значению $(b \Psi_0)_{кр} = 2,73$, равна

$$P_{кр} = 0,466 \frac{cn}{\varepsilon' k^2} \quad (5.21)$$

и практически равна мощности однородного пучка

$$P^{(3)} = 0,4655 \frac{cn}{\varepsilon' k^2}, \quad (5.22)$$

определенной в работе [4].

Выражая $b \Psi_0$ через мощность пучка P : $b \Psi_0 = 2,73 (P/P_{кр})^{1/2}$, формулу (5.20) можно переписать в виде

$$A/z_{сф} = \left\{ [P^{1/2} - (0,68 P_{кр})^{1/2}]^2 - 0,03 P_{кр} \right\}^{1/2}, \quad (5.23)$$

где $A = 0,183 b^2 P_{кр}^{1/2}$.

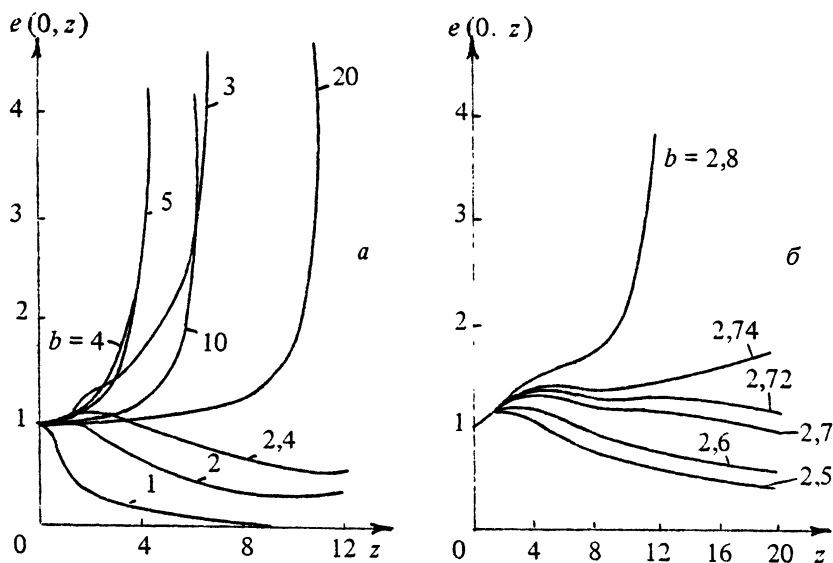


Рис. 5.6. Изменение амплитуды поля на оси ограниченного пучка при $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$

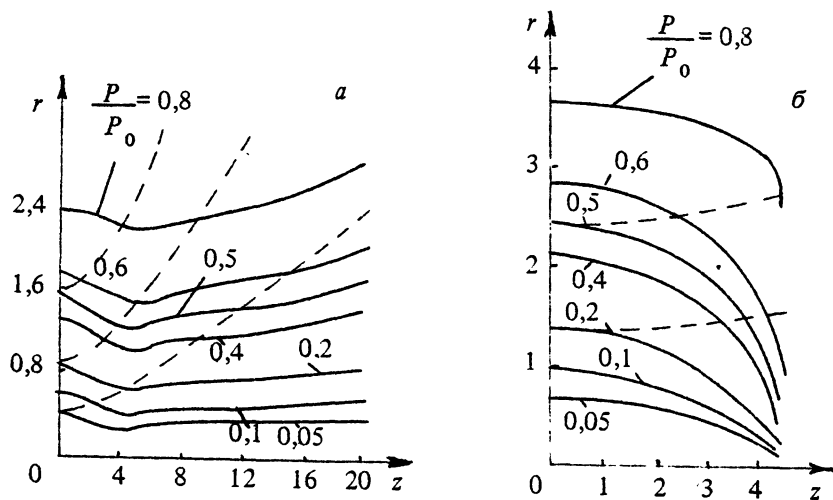


Рис. 5.7. Ход лучей при $e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$, $\varphi(r, 0) = 0$:
 а - $b = 2.7$; б - $b = 4$;
 пунктир - ход лучей в линейной среде

Формула (5.23) уточняет для гауссовых пучков результат Р. Kelley [6]

$$A/z_{\text{сф}} = P^{1/2} - P_{\text{кр}}^{1/2}, \quad (5.24)$$

согласно которому между $P^{1/2}$ и $z_{\text{сф}}$ должна быть прямо пропорциональная зависимость. Как следует из формулы (5.23), такая зависимость имеет место лишь при $P^{1/2} \geq P_{\text{кр}}^{1/2}$. В экспериментальных работах [9, 155] связь между $P^{1/2}$ и $z_{\text{сф}}$ определялась практически уже на прямолинейном участке, так что почерпнуть какие-либо сведения о наличии начального участка при $P^{1/2} \geq P_{\text{кр}}^{1/2}$ не удастся.

При интерпретации экспериментальных данных в соответствии с формулой Р. Kelley [6] принято считать [9, 155], что точка пересечения прямой (5.24) с осью $P^{1/2}$ позволяет определить величину критической мощности самофокусировки (5.21). Однако сопоставление величины $P_{\text{кр}}^k$ из работы [6] с выражением (5.22) показывает, что $P_{\text{кр}}^k = 0,5P_{\text{кр}}$. Формула (5.23) уточняет этот результат: экстраполируя прямолинейный участок зависимости (5.23) к $\frac{1}{z_{\text{сф}}} \rightarrow 0$, найдем, что точка пересечения $P^{1/2} = (0,68P_{\text{кр}})^{1/2}$ или $P' = 0,68P_{\text{кр}}$. Очевидно, при других формах начального пучка численный коэффициент в последней формуле может быть иным. Указанное обстоятельство следует иметь в виду при попытках определить величину $P_{\text{кр}}$ по величине порога вынужденного комбинационного рассеяния, как это было сделано в [9, 155].

Перейдем теперь к рассмотрению влияния затухания на самофокусировку. Для этого введем в уравнение (5.1) соответствующий член, переписав это уравнение в виде

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \Psi'_z + |\Psi|^2 \Psi - if \Psi = 0, \quad (5.25)$$

где f — коэффициент, характеризующий поглощение. Роль затухания сводится к уменьшению полной мощности пучка с ростом z . Это, в свою очередь, должно сказаться на структуре пучка*.

Будем рассматривать два случая: $\frac{1}{2}f = \tilde{\gamma} = \text{const}$ — линейное поглощение и $\frac{1}{2}f = \chi |\Psi|^2$ — нелинейное двухквантовое поглощение. Результаты рассмотрения первого случая имеют отношение к слабо фокусированным пучкам, второго — к сильно фокусированным пучкам высокой интенсивности.

* Изменение диэлектрической проницаемости из-за нагрева учитываться не будет.

На рис. 5.8 показано изменение амплитуды поля на оси пучка с начальным распределением $\Psi(r, 0) = \Psi_0 \exp(-r^2/b^2)$ при $\Psi_0 = 1$, $b = 10$ и различных значениях $\tilde{\gamma}$. Видно, что вначале во всех случаях поглощение преобладает над фокусировкой, однако при больших z и значениях $\tilde{\gamma}$, меньших некоторой критической величины $0,075 < \tilde{\gamma}_{кр} < 0,0825$, фокусировка приводит, в конце концов, к "схлопыванию" пучка. С увеличением $\tilde{\gamma}$ до значений, больших $\tilde{\gamma}_{кр}$, процесс фокусировки идет лишь на некотором интервале z , сменяясь вновь расфокусировкой из-за уменьшения мощности пучка до $P < P_{кр}$. Кривые, соответствующие $\tilde{\gamma} = 0,025; 0,05$ и $0,075$, качественно похожи на кривые при $\tilde{\gamma} = 0$, разница заключается лишь в том,

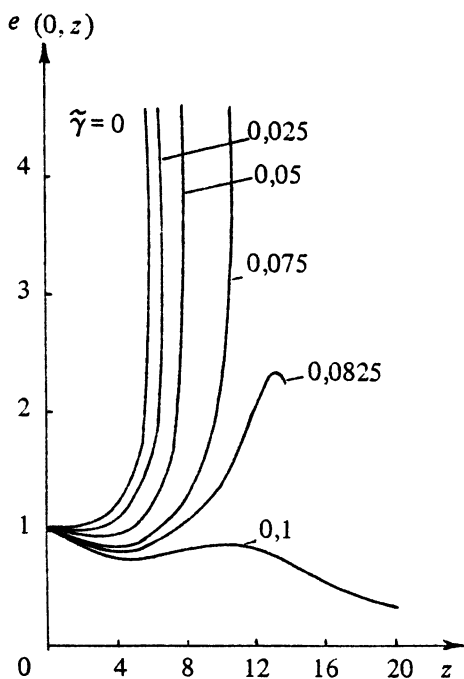


Рис. 5.8. Изменение амплитуды поля на оси пучка при учете линейного поглощения

что в поглощающей нелинейной среде амплитуда пучка около оси сначала несколько уменьшается с ростом z . Амплитудно-фазовая структура пучка при $\tilde{\gamma} = 0,1$ показана на рис. 5.9. Интересно, что хотя она и не является однородной по z , но за точкой наибольшей фокусировки похожа на слаборасходящуюся светящуюся нить с постепенно спадающей интенсивностью. Возможно, в некоторых опытах по самофокусировке такие нити (а при малом поглощении структуры типа изображенной на рис. 5.9) могут быть приняты за стационарные однородные пучки.

Описанная структура пучка в поглощающей среде качественно хорошо согласуется с результатами экспериментальных работ [15, 16].

На рис. 5.10 отражен процесс самофокусировки пучка $\Psi(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$ в среде с нелинейным поглощением $\frac{1}{2}f(\Psi^2) = \chi|\Psi|^2$. Качественно приведенные кривые напоминают соответствующие зависимости для пучков с линейным поглощением,

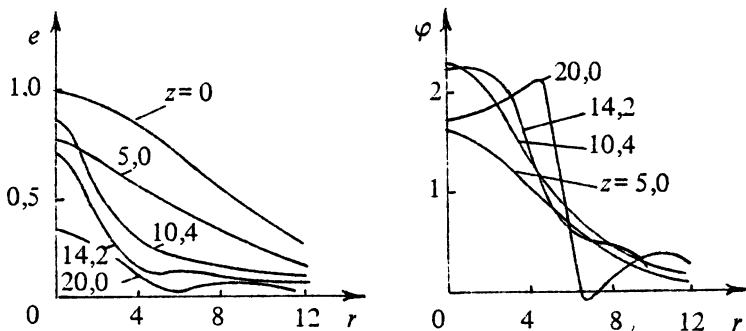


Рис. 5.9. Амплитудно-фазовая структура пучка в среде с линейным поглощением ($b = 0, \tilde{\gamma} = 0,1$)

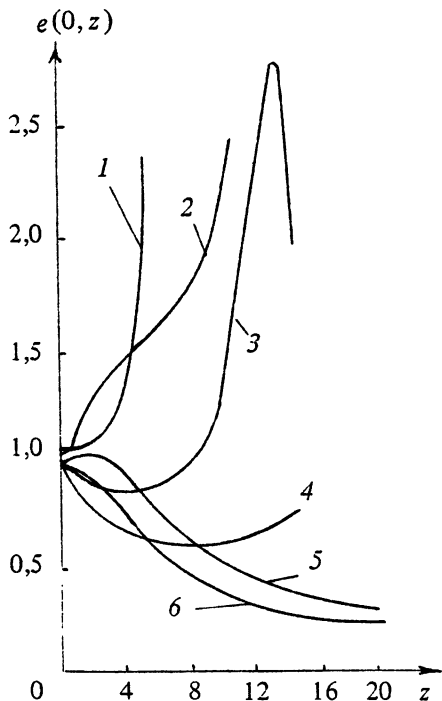
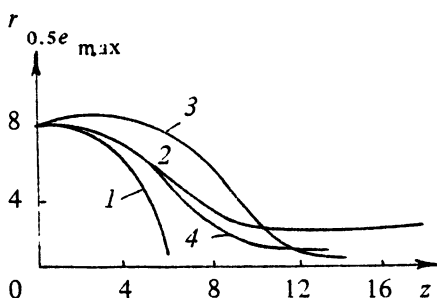


Рис. 5.10. Изменение амплитуды поля на оси пучка при учете нелинейного поглощения:

- 1 - $\chi = 0, b = 10;$
- 2 - $\chi = 0, b = 2,8;$
- 3 - $\chi = 0,1, b = 10;$
- 4 - $\chi = 0,2, b = 10;$
- 5 - $\chi = 0,1, b = 2,9;$
- 6 - $\chi = 0,1, b = 2,9$

Рис. 5.11. Изменение ширины пучка по уровню половинной амплитуды в непоглощающей и поглощающей средах при $b = 10$:

- 1 — $\tilde{\gamma} = 0, \chi = 0$;
- 2 — $\tilde{\gamma} = 0,1, \chi = 0$;
- 3 — $\tilde{\gamma} = 0, \chi = 0,1$;
- 4 — $\tilde{\gamma} = 0,0325, \chi = 0$



но можно заметить и некоторые отличия. Сравним кривую $b = 10$, $\chi = 0,1$, приведенную на рис. 5.10, с кривой $b = 10$, $\tilde{\gamma} = 0,1$ на рис. 5.8. В обоих случаях начальный коэффициент поглощения в максимуме пучка одинаков ($\tilde{\gamma} = 0,1$). Однако уменьшение поглощения на спадах пучка при нелинейном поглощении приводит к большему росту амплитуды поля (до $\Psi_{\max}^1 = 2,78$) в точке наибольшей фокусировки, чем в среде с линейным поглощением ($\Psi_{\max} = 0,93$). В то же время вблизи этой точки интенсивность в среде с нелинейным поглощением меняется вдоль координаты z быстрее, чем при линейном поглощении.

На рис. 5.11 для сравнения показано изменение ширины пучка на уровне половинной амплитуды при $b = 10$ и $\tilde{\gamma} = 0, \chi = 0$; $\tilde{\gamma} = 0,1, \chi = 0$; $\tilde{\gamma} = 0, \chi = 0,1$; $\tilde{\gamma} = 0,0325, \chi = 0$. Характерным при наличии поглощения является образование волноводного канала, интенсивность поля в котором за точкой максимальной фокусировки постепенно затухает, в то время как канал начинает медленно расширяться. Экспериментально наблюдаемые продольные профили самофокусирующихся пучков [11] качественно близки к изображенным на рис. 5.11 (кривые 2–4).

Наконец, приведем данные, относящиеся к процессу самофокусировки в среде с нелинейным поглощением $\frac{1}{2}f = \chi |\Psi|^2$ возмущения, возникающего на фронте интенсивной плоской волны:

$$\Psi(r, 0) = 1 + 0,1 \exp(-r^2/a^2).$$

На рис. 5.12 показано изменение амплитуды в максимуме возмущения. Наличие нелинейного поглощения существенно замедляет или даже совсем прекращает развитие возмущения. К такому же выводу можно прийти и из рассмотрения линеаризованных уравнений для возмущений (см. гл. 4).

Таким образом, численные расчеты аксиально-симметричных пучков в нелинейной поглощающей среде показывают отсутствие их

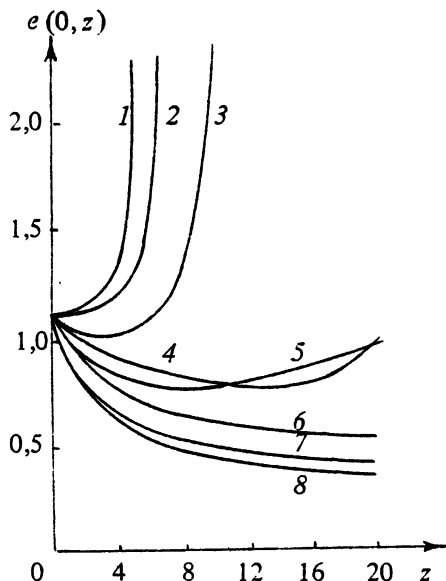


Рис. 5.12. Изменение амплитуды поля в максимуме локализованного возмущения в среде с нелинейным поглощением:

- 1 - $\chi = 0, a = 3$;
- 2 - $\chi = 0, a = 10$;
- 3 - $\chi = 0,05, a = 3$;
- 4 - $\chi = 0,1, a = 3$;
- 5 - $\chi = 0,05, a = 10$;
- 6 - $\chi = 0,1, a = 10$;
- 7 - $\chi = 0,2, a = 3$;
- 8 - $\chi = 0,2, a = 10$

перехода при самофокусировке в совершенно однородные (с амплитудами, не зависящими от z) структуры. Могут образовываться лишь квазиоднородные, т. е. слабо зависящие от z , и, в конечном итоге, все-таки расходящиеся волновые каналы. Необходимым условием их образования является близость мощности ограниченного пучка к мощности однородного пучка. Это достигается либо начальным подбором полной мощности пучка, либо автоматически за счет поперечной локализации наиболее быстро развивающихся неоднородностей структуры входного пучка (см. гл. 3) с последующим уменьшением мощности в образующемся канале как в результате поглощения в среде, так и в результате некоторого переизлучения энергии в окружающее пространство с периферии канала.

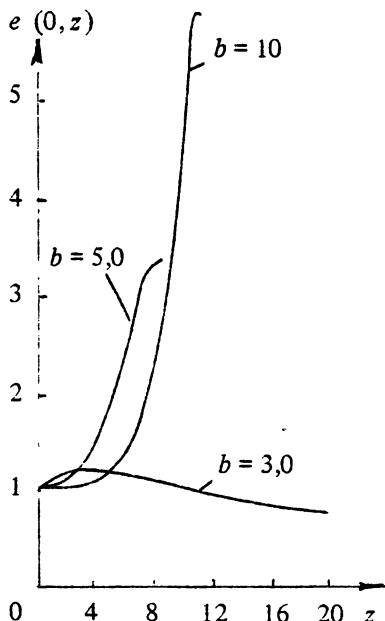
Анализируя все выполненные расчеты, можно установить приближенную связь между максимальным значением амплитуды пучка и его шириной (на уровне 0,7 от максимума амплитуды) вблизи области $(z = z_{сф})$ наибольшей фокусировки: $\Psi(0, z = z_{сф}) r_{0,7}(z = z_{сф}) = 1,5 \pm 0,4$, что для квазигауссова пучка соответствует значению $b \Psi_0 = 2,6 \pm 0,7$, близкому к $(b \Psi_0)_{кр}$. Это указывает на то, что мощность самообжатого пучка есть величина постоянная (в данной среде), слабо зависящая как от структуры входного пучка, так и от поглощения в среде, если поглощение, конечно, невелико. Примерно она равна критической мощности пучка.

Рис. 5.13. Изменение поля на оси пучка с учетом насыщения нелинейности при

$$e(r, 0) = \exp(-r^2/b^2),$$

$$\varphi(r, 0) = 0,$$

$$\Psi_{\text{нас}} = 2$$



Приведем для иллюстрации примеры решения уравнения (5.1) для среды с насыщающейся нелинейностью [13], заменив $|\Psi|^2$ на

$$\frac{|\Psi|^2}{1 + |\Psi|^2/\Psi_{\text{нас}}^2},$$

где $\Psi_{\text{нас}}$ — поле насыщения. На рис. 5.13 показано

изменение поля на оси пучка при $\Psi(r, 0) = \exp(-r^2/b^2)$. Как и следовало ожидать, насыщение нелинейности ограничивает рост интенсивности на оси пучка. Пример амплитудно-фазового распределения поля в сечении максимальной фокусировки дан на рис. 5.14. В этом сечении в центральной части пучка образуется плоский фазовый фронт.

Проведенные исследования позволяют представить общую картину самофокусировки первоначально нефокусированных волновых пучков и определить роль влияющих на нее факторов. На начальном участке нелинейной среды происходит дробление пучка на отдельные постепенно самофокусирующиеся неоднородности. Число неоднородностей, захваченных процессом самофокусировки, зависит от мощности пучка, а также от степени однородности самой нелинейной среды (гл. 3). Скорость нарастания отдельных первоначальных возмущений определяется при данной амплитуде пучка их масштабом, коэффициентом нелинейности и коэффициентом поглощения среды. Крупномасштабные неоднородности развиваются медленно

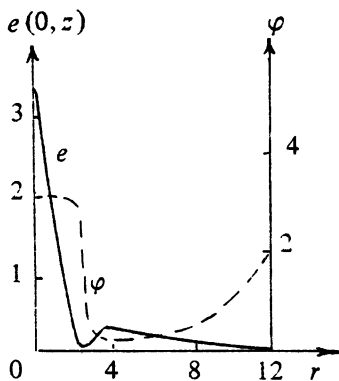


Рис. 5.14. Амплитудно-фазовая структура пучка в сечении максимальной фокусировки с учетом насыщения нелинейности ($b = 5$)

из-за слабой рефракции лучей в область сильного поля, мелкомасштабные — либо развиваются слабо, либо совсем не развиваются из-за дифракции лучей. Имеется характерный поперечный масштаб

$$\Lambda_{\perp} \approx \frac{\lambda}{2} [\Delta \varepsilon (|E|^2)]^{1/2}$$

наиболее быстро растущей неоднородности. Мощность, приходящаяся на такую неоднородность, определяется только параметрами среды и длиной волны и не зависит от первоначальной полной мощности падающего пучка. Величина ее — порядка критической мощности аксиально-симметричного пучка $P_{кр}$. В тех случаях, когда структура пучка довольно

однородна (например, гауссовы пучки), самофокусировка начинается в области максимума, если мощность пучка превышает $P_{кр}$, в процесс локализации вовлекается лишь часть пучка.

Дальнейшее развитие локализующейся неоднородности может происходить по-разному в зависимости от величины мощности пучка, захваченного первоначально процессом самофокусировки. Если начальная мощность пучка превышает известную критическую величину, зависящую от поглощения в среде, то он "схлопывается" в чрезвычайно малую окрестность точки на оси. Если мощность меньше этой величины, в некотором сечении процесс "схлопывания" прекращается и образуется квазиоднородный светящийся канал, постепенно расширяющийся из-за поглощения мощности. Насыщение нелинейности также прекращает процесс "схлопывания" даже в средах с пренебрежимо малым коэффициентом поглощения. Под влиянием поглощения (а также отчасти излучения мощности с периферии пучка) затухают колебания ширины пучка, которые при этом могут иметь место. Учет продольной диффузии лучевой амплитуды тоже приведет к ограничению интенсивности пучка в окрестности фокальной точки (см. далее гл. 7), однако описание этого процесса выходит за рамки квазиоптического приближения, принятого в данной главе.

Выше отмечалось, что в случае малости ограничивающих поле факторов неоднородности с мощностью $P \geq P_{кр}$ формируют нелинейные фокусы, число которых $N \sim \frac{P}{P_{кр}}$ при $\frac{P}{P_{кр}} \gg 1$ [25]. Таким образом,

возникает многофокусная картина [18, 49, 51]. Расположение фокусов зависит от первоначальной структуры пучка. В аксиально-симметричных колоколообразных пучках фокусы располагаются на оси пучка [18].

Описанная выше картина самофокусировки относится к стационарному случаю и не учитывает переходных процессов в нелинейной среде. Все приведенные расчеты применимы к таким интервалам времени после начала светового импульса, которые превышают характерное время установления поляризации в среде, но еще малы по сравнению со временем, необходимым для проявления температурных и стрикционных эффектов.

5.4. Самофокусировка света различных поляризаций

В средах с недиагональным тензором нелинейной поляризуемости самофокусировка световых пучков с различной поляризацией протекает по-разному. Известно (см. гл. 1), что при переходе от линейной поляризации к круговой критическая мощность возрастает в четыре раза в средах с керровским механизмом нелинейности [13] и в полтора раза — в средах с электронным механизмом. Использование пучков с круговой поляризацией открывает, таким образом, возможность увеличения мощности в тех случаях, когда она ограничивается самофокусировкой, например в лазерах с самосинхронизацией мод. Поскольку циркулярно поляризованные пучки чувствительны к примеси волны встречной поляризации (см. гл. 3, [13, 156]), интерес представляет самофокусировка пучков с эллиптической поляризацией. Ниже излагаются результаты исследования самофокусировки пучков в зависимости от степени эллиптичности их поляризации.

В квазиоптическом приближении эллиптически поляризованный пучок удобно представить в виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных пучков, комплексные амплитуды которых описываются системой уравнений (3.4):

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \Psi_{+} - 2i \frac{\partial \Psi_{+}}{\partial z} + \left(|\Psi_{+}|^2 + (1 + \beta) |\Psi_{-}|^2 \right) \Psi_{+} &= 0, \\ \Delta_{\perp} \Psi_{-} - 2i \frac{\partial \Psi_{-}}{\partial z} + \left(|\Psi_{-}|^2 + (1 + \beta) |\Psi_{+}|^2 \right) \Psi_{-} &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

В эксперименте циркулярная поляризация может быть достигнута лишь с некоторой степенью точности. Поэтому представляется интересным выяснить, как влияет небольшая (порядка нескольких процентов по мощности) примесь излучения со встречной поляриза-

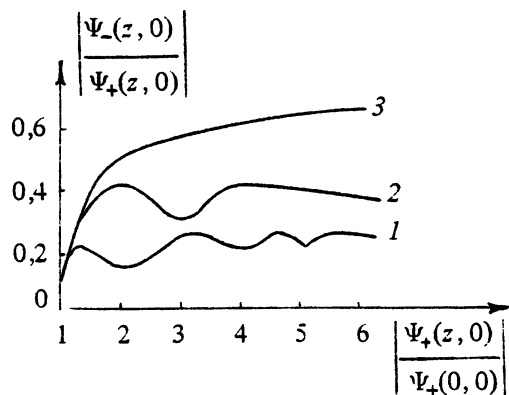


Рис. 5.15. Поляризация поля на оси как функция амплитуды сильного пучка:

$$1 - P/P_{кр} = 4,32,$$

$$2 - P/P_{кр} = 16,$$

$$3 - P/P_{кр} = 64$$

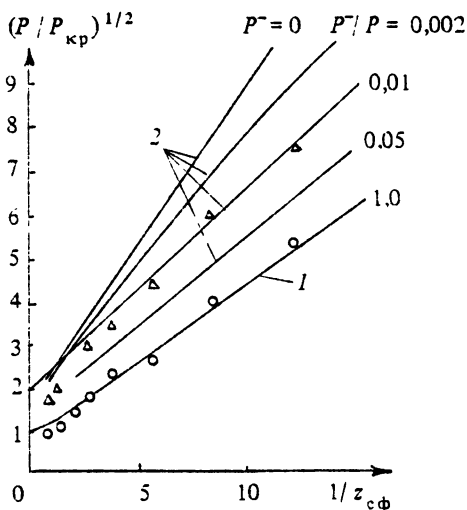
цией на самофокусировку циркулярно поляризованных пучков. Критическую мощность самофокусировки таких пучков можно определить, следуя [6], из графика зависимости положения точки "схлопывания" $1/z_{сф}$ от отношения $(P/P_{кр})^{1/2}$, полученного путем численного решения системы (5.26). Такое интегрирование производилось в работе [110] при начальных условиях

$$\Psi_+ = \Psi_+(0) \exp(-r^2/2), \quad \Psi_- = \chi \Psi_+(0) \exp(-r^2/2)$$

и отношении амплитуд $\chi = \Psi_-(0)/\Psi_+(0)$ на оси пучков на входе в среду, равном $\chi = 0,045; 0,1; 0,22$ при различных Ψ_+ для сред с керровской нелинейностью. Результаты приведены на рис. 5.15, где показано изменение поляризации $|\Psi_-(z, 0)/\Psi_+(z, 0)|$ пучка на оси при $\chi = 0,1$, и на рис. 5.16, где построена зависимость обратной длины самофокусировки от мощности пучка. Существенной особенностью самофокусировки эллиптически поляризованного света является перераспределение поляризации по сечению пучка в процессе самофокусировки. Слабый пучок, нелинейное изменение показателя преломления для которого значительно больше, чем для сильного, на начальной стадии процесса фокусируется более резко, вследствие чего поляризация в приосевой области приближается к линейной (см. рис. 5.15). Это, в свою очередь, приводит к более быстрой фокусировке сильного пучка, чем в отсутствие примеси.

В зависимости обратных длин самофокусировки от мощности пучка можно выделить следующие характерные области. При больших мощностях пучка со встречной поляризацией ($P^- > P_{кр}/2$, область вблизи кривой 1 на рис. 5.16) в образовании фокальной точки принимает участие лишь приосевая часть пучка, поляризация в

Рис. 5.16. Зависимость длины схлопывания от мощности пучка с различной поляризацией: 1 — пучок с линейной поляризацией (кружки — экспериментальные точки [156]), 2 — пучок с почти круговой поляризацией (треугольники — экспериментальные точки [156]) для пучка с примесью встречной поляризации в один процент)



которой в процессе самофокусировки становится практически линейной. В этой области пороговая мощность пучка, требуемая для самофокусировки на заданной длине $z_{сф}$, слабо зависит от наличия примеси и близка к мощности при линейной поляризации. При малой мощности пучка со встречной поляризацией ($P^- \ll P_{кр}/2$, область $(P/P_{кр})^{1/2} < 3$ для кривых $P^-/P_{кр} = 0,002; 0,01$ на рис. 5.16) поляризация пучка остается близкой к циркулярной, а пороговая мощность самофокусировки на заданной длине близка к пороговым мощностям пучков с круговой поляризацией.

Таким образом, численные расчеты показывают, что при малой длине самофокусировки даже небольшая примесь излучения со встречной поляризацией может привести к существенному уменьшению пороговой мощности самофокусировки циркулярно поляризованной волны.

5.5. Самофокусировка встречных волновых пучков

В этом пункте рассмотрим влияние отраженной волны на самофокусировку. Пусть на слой нелинейной среды с кубической нелинейностью толщиной l_p падает гауссов пучок шириной a , описываемый функцией $\Psi = \Psi_+^0 \exp(-r_p^2/2a^2)$. В отличие от гл. 4 исследование ведется не методом возмущений, а путем численного решения квазиоптических уравнений встречных волн (2.45), которые в безразмер-

ных переменных $z = \frac{z_p}{k_0 a^2}$, $r = \frac{r_p}{a}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \Psi_+ - 2i \frac{\partial \Psi_+}{\partial z} + (|\Psi_+|^2 + 2|\Psi_-|^2) \Psi_+ &= 0, \\ \Delta_{\perp} \Psi_- + 2i \frac{\partial \Psi_-}{\partial z} + (|\Psi_-|^2 + 2|\Psi_+|^2) \Psi_- &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Систему (5.27) необходимо дополнить условиями на границах нелинейной среды. Отражением на одной границе при $z = 0$ пренебрежем, считая ее просветленной. Учтем отражение на второй границе $z = l$, предполагая, что Ψ_+ и Ψ_- связаны следующим образом:

$$\Psi_- = \Psi_+ R_0, \quad (5.28)$$

где коэффициент отражения R_0 в дальнейшем будем считать действительным.

Очевидно, что решения системы (5.28) при заданных граничных условиях зависят от трех параметров: френелевского числа падающего пучка $\frac{ka^2}{l_p}$, которое в безразмерных переменных равно $\frac{1}{l}$, мощности падающего пучка, которую отнормируем на критическую мощность самофокусировки

$$\frac{P_+}{P_{\text{кр}}} = \left(\frac{\Psi_+}{1,92} \right)^2,$$

и коэффициента отражения, с помощью которого можно выразить отношение мощностей в падающем и отраженном пучках

$$\frac{P_-}{P_+} = R_0^2.$$

Для численного решения системы (5.27) с условием (5.28) использовался метод итераций [158]. В качестве начального приближения на входе задавались падающий пучок в виде $\Psi_+(r, 0) = \Psi_+^0 \exp(-r^2/2)$ и отраженный $\Psi_- = R_0 \Psi_+$. По системе уравнений (5.27) поля Ψ_+ и Ψ_- пересчитывались на конец слоя, где, однако, они не удовлетворяли граничному условию $\Psi_-(r, l) = R_0 \Psi_+(r, l)$. Отраженный пучок $\Psi_-(r, l)$ заменялся на пучок $\tilde{\Psi}_-(r, l)$, удовлетворяющий условию $\tilde{\Psi}_-(r, l) = R_0 \Psi_+(r, l)$. Далее по системе (5.27) определялись $\Psi_+(r, 0)$ и отраженный $\Psi_-^{(1)}(r, 0)$ в начале слоя. Получающееся поле $\tilde{\Psi}_+(r, 0)$ не

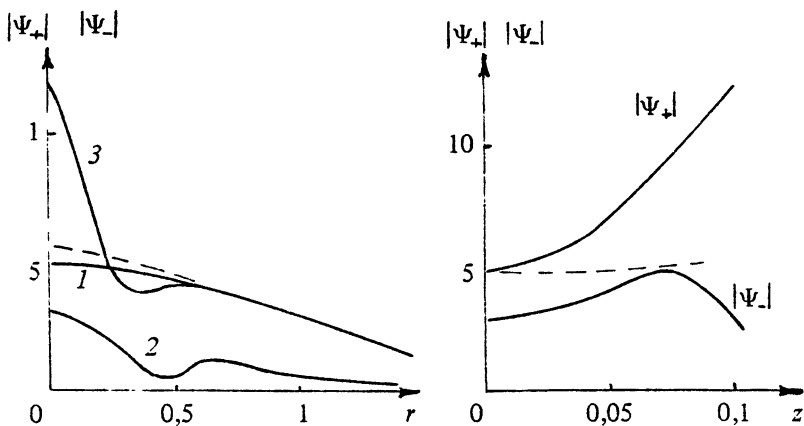


Рис. 5.17. Амплитудное распределение в проходящем и отраженном пучках в начале и конце слоя при $P_+ = 6,8P_{кр}$, $R_0 = 0,25$, $k_0 a^2 / l_p = 10$ (пунктир — структура проходящего пучка в конце слоя при $R_0 = 0$):

$$1 - |\Psi_+(0, r)|, 2 - |\Psi_-(0, r)|, 3 - |\Psi_+(l, r)|.$$

Рис. 5.18. Амплитуды прямого и отраженного пучков как функции расстояния от начала слоя при $P_+ = 6,8P_{кр}$, $R_0 = 0,25$, $k_0 a^2 / l_p = 10$ (пунктир — зависимость $|\Psi_+(z, 0)|$ при $R_0 = 0$)

удовлетворяет условию $\tilde{\Psi}_+(r, 0) = \Psi_+ \exp(-r^2/2)$, налагаемому на падающий пучок. Поэтому функция $\tilde{\Psi}_+(r, 0)$ заменялась на $\Psi_+^0 \exp(-r^2/2)$. Значения $\Psi_+ \exp(-r^2/2)$ и $\Psi_-^{(1)}(r, 0)$ использовались в качестве первого приближения. Далее расчет повторялся до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись.

Приведем результаты расчета для $l = 0,1$.

Процесс сходиллся после нескольких итераций для малых значений $R_0 < 0,25$ и небольших превышений мощности падающего пучка P_+ над критической $P_{кр}$. Присутствие встречной волны ведет к распаду пучка на кольца. Это иллюстрируется рис. 5.17, где приведены амплитудные распределения Ψ_+ и Ψ_- при $R_0 = 0,25$ и $P_+ = 6,8P_{кр}$. В основном максимуме локализуется мощность порядка критической. На рис. 5.18 показана зависимость поля падающего и отраженного пучков от продольной координаты при тех же значениях параметров. Интенсивность поля на оси в падающем пучке при $R_0 \neq 0$ растет быстрее, чем при $R_0 = 0$; интенсивность отраженного пучка испытывает колебания.

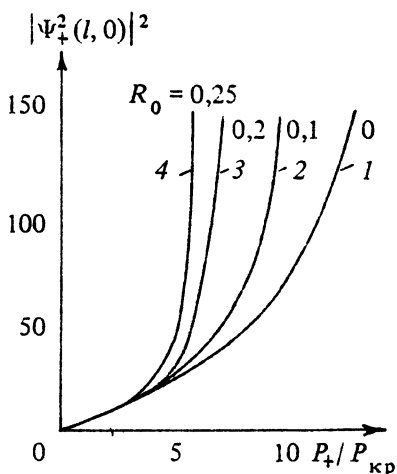


Рис. 5.19. Зависимость от мощности интенсивности проходящего пучка на оси в конце слоя при различных коэффициентах отражения R_0 и $k_0 a^2/l_p = 10$:

- 1 - $R_0 = 0$,
- 2 - $R_0 = 0,1$,
- 3 - $R_0 = 0,2$,
- 4 - $R_0 = 0,25$

Увеличение интенсивности поля на оси пучка в конце слоя в зависимости от параметра $\frac{P_+}{P_{кр}}$ иллюстрируется рис. 5.19. Для достижения в конце слоя тех же интенсивностей, что и без отраженной волны, требуется мощность существенно меньшая, чем при $R_0 = 0$.

При увеличении мощности и коэффициента отражения сходимость метода нарушается из-за приближения к границе устойчивости нелинейного слоя со встречной волной (см. гл. 4).

В заключение приведем результаты расчета взаимодействия встречных пучков при отражении от слегка наклонной границы. В этом случае рассматривались двумерные пучки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial^2 \Psi_+}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial \Psi_+}{\partial z} + (|\Psi_+|^2 + 2|\Psi_-|^2) \Psi_+ = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_-}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial \Psi_-}{\partial z} + (|\Psi_-|^2 + 2|\Psi_+|^2) \Psi_- = 0,$$

с коэффициентом отражения $R = R_0 \exp(i\beta_0 x)$ на границе $z = l$, где R_0 действительно и параметр β_0 выражается через угол γ_0 между пучками при отражении

$$\beta_0 = \frac{k_0 a (\pi - \gamma_0)}{2}.$$

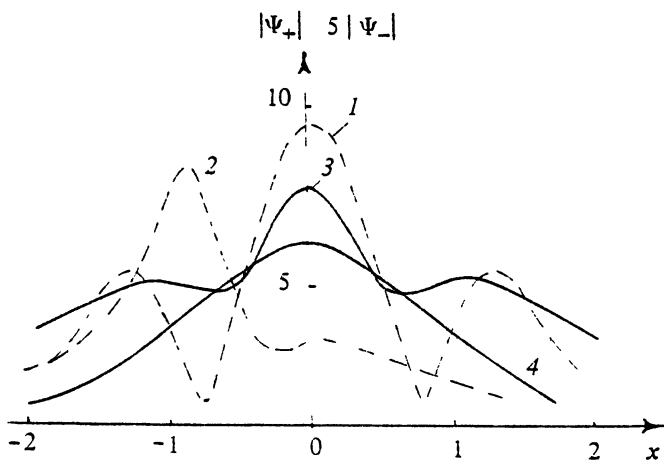


Рис. 5.20. Амплитудная структура в падающем и отраженном пучках для двух углов наклона отражающей поверхности при $\Psi_+^0 = 6$, $k_0 a^2 / l_p = 10$, $R_0 = 0,1$: 1 - $5|\Psi_-(0, x)|$, $\beta_0 = 0$, 2 - $5|\Psi_-(0, x)|$, $\beta_0 = 10$, 3 - $|\Psi_-(l, x)|$, $\beta_0 = 0$, 4 - $|\Psi_+(l, x)|$, $\beta_0 = 10$

Структуры прошедшей и отраженной волн при входном гауссовом пучке $\Psi_+(x, z) = \Psi_+^0 \exp(-x^2/2)$; $R_0 = 0,1$; $l = 0,1$; $\beta_0 = 0,1$ показаны на рис. 5.20. Взаимодействие проявляется в распаде на отдельные слои. Характерные масштабы слоев близки к размерам наиболее быстро растущих возмущений. Параметрическим взаимодействием можно пренебречь, если угол между пучками $\pi - \gamma_0$ становится больше граничного угла $\beta_{гр}$ между плоскими волнами малой амплитуды, которые еще экспоненциально нарастают в поле сильных встречных волн

$$\beta_{гр} = |\Psi_+^0|^2 \left\{ 1 + R_0^2 + \left[(1 + R_0^2)^2 + 12R_0^2 \right]^{1/2} \right\},$$

и область их геометрического перекрытия мала.

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА САМОФОКУСИРОВКИ ВОЛН В КУБИЧНЫХ СРЕДАХ

В данной главе остановимся на некоторых строгих следствиях уравнений самофокусировки волн в средах с кубической нелинейностью.

6.1. Автомоделные волновые пучки в трехмерном случае

Важным классом решений параболического уравнения (2.4) являются гауссовы пучки [159], которые сохраняют с точностью до масштаба свою структуру в разных сечениях $z = \text{const}$. Заимствуя терминологию из гидродинамики, их можно назвать автомоделными. Низший гауссов пучок описывается формулой

$$A_{00} = \frac{A_0}{1 - (iz)/(k_0 a_0^2)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{2a^2(z)} + ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right],$$

где A_0 — амплитуда пучка, $a(z) = a_0 (1 + z^2/z_d^2)^{1/2}$ — радиус пучка, $R(z) = -z - z_d^2/z$ — радиус кривизны его фазового фронта, a_0 — радиус пучка в сечении $z = 0$. Величину $z_d = k_0 a_0^2$ называют дифракционной длиной пучка, на расстоянии z_d его радиус равен $2^{1/2} a_0$, а радиус кривизны его фазового фронта минимален

$$|R(z_d)| = 2z_d.$$

Геометрическая расходимость $\theta_\Gamma = a(z)/R(z)$ и дифракционная расходимость $\theta_d = 1/[ka(z)]$ гауссова пучка нулевого порядка образуют инвариант

$$\theta_\Pi^2 = \theta_\Gamma^2 + \theta_d^2,$$

равный квадрату полной расходимости пучка. При $z < z_d$ преобладает дифракционная расходимость, при $z > z_d$ — геометрическая.

Поперечная структура высших пучков $A_{mn}(x, y, z)$ описывается функциями Эрмита. Радиусы пучков и их расходимости в направлениях x и y в $(2m+1)^{1/2}$ и $(2n+1)^{1/2}$ раз больше, чем у низшего пучка.

В кубичных нелинейных средах также имеют место автомодельные пучки [29]. Для исследования их свойств в простейшем случае линейной (или круговой) поляризации в нелинейном параболическом уравнении

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + |\Psi|^2 \Psi = 0$$

удобно перейти к переменным: действительной амплитуде e и фазе φ по формуле $\Psi = e \cdot \exp(-i\varphi)$. Для определения e и φ имеем следующую систему уравнений:

$$2\varphi'_z = -(\nabla_{\perp} \varphi)^2 + e^2 + \frac{\Delta_{\perp} e}{e}, \quad (6.1)$$

$$e'_z = -\frac{1}{2}(e \cdot \Delta_{\perp} \varphi) - (\nabla_{\perp} e \cdot \nabla_{\perp} \varphi). \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1), (6.2) допускают автомодельные решения

$$e = \frac{\Psi(u, v)}{a(z)}, \quad \varphi = \frac{s(z)(u^2 + v^2)}{2} + \varphi_0,$$

$$u = x/a(z), \quad v = y/a(z). \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в систему уравнений (6.1), (6.2) и разделяя переменные, получим

$$aa' - s = 0, \quad (6.4)$$

$$a^2 s' - s^2 = C_1, \quad (6.5)$$

$$2\varphi'_{0z} = -C_2/a^2, \quad (6.6)$$

$$\Delta_{\perp} e + [C_2 - C_1(u^2 + v^2) + e^2] e = 0, \quad (6.7)$$

где C_1 и C_2 — константы разделения.

Три первых уравнения легко интегрируются

$$s = C_3 z + C_4, \quad (6.8)$$

$$a^2(z) = \frac{(C_3 z + C_4)^2 + C_1}{C_3}, \quad (6.9)$$

$$2\varphi_0(z) = -\frac{C_2}{C_1^{1/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{C_3}{C_1^{1/2}} z + \frac{C_4}{C_1^{1/2}} \right) + C_5, \quad (6.10)$$

где C_3, C_4, C_5 — константы.

Структура автомодельных пучков определяется нелинейным уравнением (6.7). Характер его решений качественно различен при $C_1 \geq 0$ и $C_1 < 0$. В первом случае оно имеет решения, описывающие локализованные пучки с ограниченной мощностью*, амплитуда которых на бесконечности обращается в нуль. При $C_1 > 0$ автомодельные пучки регулярны во всем пространстве. Второй тип не является локализованным. Пучки этого типа имеют неограниченную мощность. Если поле этого пучка при $r=0$ конечно, то при $r \rightarrow \infty$ оно убывает, однако недостаточно быстро для того, чтобы быть локализованным. При $C_1 < 0$, как видно из уравнения (6.9), $a^2(z)$ обращается в нуль в некоторой точке $z_{\text{сф}}$. Автомодельный пучок второго типа имеет особенность: при приближении к точке нелинейного фокуса $z_{\text{сф}}$ поле в этом пучке растет, как $(z_{\text{сф}} - z)^{-1/2}$.

Полагая в (6.7) $C_1 = 0$, приходим к уравнению (3.9), описывающему структуру однородных пучков. Таким образом, конфигурация однородных пучков принадлежит к автомодельным. Подстановка $C_1 = 0$ в соотношение (6.9) показывает, что в общем случае пучки со структурой, описываемой уравнением (3.9), имеют форму конуса. Расходимость или сходимость конуса определяется линейным законом изменения масштаба a

$$a = \frac{|C_3 z + C_4|}{C_3^{1/2}}. \quad (6.11)$$

При приближении к точке нелинейного фокуса $z_{\text{сф}} = -C_4/C_3$ поле на оси пучка растет, как $(z_{\text{сф}} - z)^{-1}$. Строго цилиндрический однородный пучок получается в результате предельного перехода $|C_4/C_3| \rightarrow \infty$ при $a(0) = \text{const}$. Такой пучок неустойчив по отношению к квадратичным возмущениям фазы, превращающим его в сходящийся или расходящийся конический пучок с тем же амплитудным распределением.

* Как показывают расчеты, мощность пучка с низшими индексами меньше мощности однородного пучка.

Сравним характер автомодельных локализованных пучков в линейных и нелинейных средах. При $C_1 > 0$ уравнение (6.7) можно переписать в виде

$$\Delta_{s,t} f + (\mu - R^2 + \tilde{P} f^2) f = 0, \quad (6.12)$$

обозначив $e = e_0 f(s, t)$, $(s, t) = C_1(u, v)$, $R^2 = s^2 + t^2$, $\mu = C_2/C_1^{1/2}$, $\tilde{P} = e_0^2 C_1^{1/2}$.

При нормировке $\iint_s f^2 ds dt = 1$, величина $\tilde{P} = \eta P$, $\eta = \frac{8\pi \epsilon' k_0^2}{c \epsilon_0^{1/2}}$,

P — мощность пучка. В линейной среде ($\tilde{P} \rightarrow 0$) уравнение (6.12) определяет структуры гауссовых пучков и решается в функциях Эрмита или Лагерра. Такие решения имеются лишь при собственных значениях $\mu = 2q$, где $q = m + n + 1$ для прямоугольных и $q = m + 2n + 1$ для цилиндрических пучков (m и n — целые числа, характеризующие структуру пучка по разным координатам). В нелинейной среде ($P \neq 0$) как собственные функции f , так и собственные значения μ зависят от \tilde{P} . Вместе с тем уравнения (6.3)–(6.6), описывающие картину фазовых фронтов автомодельных пучков, не зависят от параметра нелинейности. Характер фазовых фронтов автомодельных пучков в нелинейной среде полностью подобен характеру фазовых фронтов гауссовых пучков в линейной среде. Идентичными будут и лучевые траектории. Непосредственно из уравнений (6.4) и (6.5) видно, что они описываются уравнением

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{C_1}{a^3}, \quad (6.13)$$

эквивалентным лучевому уравнению гауссовых пучков (ср. безабберационное описание, гл. 5). Подобно гауссовым пучкам, автомодельные пучки в нелинейной среде могут направляться системами квадратичных фазовых корректоров (линзы, зеркала).

Кроме скалярных автомодельных волновых пучков с линейной или круговой поляризацией, могут существовать автомодельные пучки с эллиптической поляризацией. Их исследование проводится аналогичным образом. Решение векторного параболического уравнения, записанного для амплитуд Ψ_+ и Ψ_- право- и левовращающихся волн

$$\Delta_{\perp} \Psi_+ - 2i \frac{\partial \Psi_+}{\partial z} + [|\Psi_+|^2 + (1 + \beta) |\Psi_-|^2] \Psi_+ = 0,$$

$$\Delta_{\perp} \Psi_{\pm} - 2i \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial z} + [|\Psi_{\pm}|^2 + (1 + \beta) |\Psi_{\mp}|^2] \Psi_{\pm} = 0,$$

ищем в виде $\Psi_{\pm} = e_{\pm} \exp(-i\phi_{\pm})$. Функции e_{\pm} и ϕ_{\pm} определяются из системы уравнений

$$2\phi'_{\pm z} = -(\nabla_{\perp} \phi_{\pm})^2 + [e_{\pm}^2 + (1 + \beta) e_{\mp}^2] + \frac{\Delta_{\perp} e_{\pm}}{e_{\pm}}, \quad (6.14)$$

$$e'_{\pm z} = -\frac{1}{2}(e_{\pm} \cdot \Delta_{\perp} \phi_{\pm}) - (\nabla_{\perp} e_{\pm} \cdot \nabla_{\perp} \phi_{\pm}). \quad (6.15)$$

Аналогично предыдущему решению (6.14), (6.15) запишем в форме

$$e_{\pm} = \frac{\Psi_{\pm}(u, v)}{a(z)}, \quad \phi_{\pm} = \frac{s(z)(u^2 + v^2)}{2} + \phi_{\pm 0},$$

$$u = \frac{x}{a(z)}, \quad v = \frac{y}{a(z)}, \quad (6.18)$$

где функции e_{\pm} , $\phi_{\pm 0}$, a и s удовлетворяют уравнениям

$$aa' - s = 0, \quad (6.19)$$

$$a^2 s' - s^2 = C_1, \quad (6.20)$$

$$2\phi'_{\pm 0 z} = -\frac{C_{\pm 2}}{a^2}, \quad (6.21)$$

$$\Delta_{\perp} e_{\pm} + [C_{\pm 2} - C_1(u^2 + v^2) + e_{\pm}^2 + (1 + \beta) e_{\mp}^2] e_{\pm} = 0. \quad (6.22)$$

Свойства решений (6.18)–(6.22) близки к свойствам (6.4)–(6.7), но имеют вместо одной константы C_2 две $C_{\pm 2}$. При $C_1 > 0$ имеются локализованные решения только при определенных значениях $C_{\pm 2}$. Эти решения при $C_{\pm 2} \rightarrow \infty$ переходят в линейные гауссовы пучки с вращающимися поляризациями, которые распространяются независимо друг от друга. Отличие коэффициентов $C_{\pm 2}$ друг от друга приводит к вращению эллипса поляризации и изменению его эксцентриситета по мере распространения пучков. При $C_1 = 0$ системой (6.19)–(6.22) описываются конические волновые пучки с вращающейся поляризацией, которые при угле конуса, равном нулю, переходят в однородные пучки с однородной по сечению поляризацией, описанные в гл. 3.

6.2. Преобразование фокусировки в параболическом уравнении

Другим важным свойством параболического уравнения является преобразование фокусировки. Рассмотрим его сначала в случае линейных сред. Параболическое уравнение

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (6.23)$$

инвариантно относительно замены переменных

$$\eta = \frac{zF}{z+F}, \quad s_{\perp} = \frac{\eta}{z} r_{\perp},$$

$$\tilde{\Psi}(\eta, s_{\perp}) = \frac{z(\eta)}{\eta} \Psi \left[z(\eta), \frac{z(\eta)}{\eta} s_{\perp} \right] \exp \left\{ -i \left[1 - \frac{z(\eta)}{\eta} \right] \frac{s_{\perp}^2}{2\eta} \right\}, \quad (6.24)$$

что говорит о наличии взаимоднозначного соответствия между решениями уравнения линейной квазиоптики в случае фокусировки линзами с различными фокусными расстояниями F . Структура поля при фокусировке его линзой с фокусным расстоянием F на отрезке $(0 + F)$ подобна с изменением масштаба структуре поля без фокусировки на отрезке $(0 + \infty)$ и имеет дополнительную кривизну фазового фронта.

Преобразование фокусировки (6.24) справедливо и для нелинейного параболического уравнения [30]

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + |\Psi|^2 \Psi = 0,$$

при размерности лапласиана, равной двум: $\Delta_{\perp} = \Delta_{x,y}$. Оно позволяет перенести все результаты, характеризующие самофокусировку, на пучки той же структуры с дополнительной фокусировкой или расфокусировкой.

Рассмотрим физические следствия преобразования (6.24) в нелинейном случае. Очевидно, что длина самофокусировки $\eta_{\text{сф}}(F)$ предварительно сфокусированного (расфокусированного) пучка удовлетворяет соотношению

$$1/\eta_{\text{сф}}(F) - 1/F = 1/z_{\text{сф}}, \quad (6.25)$$

где $z_{\text{сф}}$ — длина самофокусировки коллимированного пучка той же мощности. Выражение (6.25) показывает, что имеет место сложение оптических сил линейной и нелинейной линз, что было известно в безабберационном приближении [86]. При фокусировке пучка на

входе среды ($F > 0$) пороговая мощность самофокусировки не зависит от степени фокусировки и равна критической; при расфокусировке пучка она увеличивается.

Более общая замена переменных [90, 97, 98, 160]

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{1}{\sigma^2(\eta)}, \quad r_{\perp} = \frac{s_{\perp}}{\sigma(\eta)},$$

$$\tilde{\Psi}(\eta, s_{\perp}) = \frac{1}{\sigma(\eta)} \Psi [z(\eta), r_{\perp}(s_{\perp}, \eta)] \exp \left[-i \frac{d \ln(\sigma)}{d\eta} \frac{s_{\perp}^2}{2} \right] \quad (6.26)$$

преобразует (6.23) в параболическое уравнение для линзоподобной среды

$$\Delta_{\perp} \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} + \frac{s_{\perp}^2}{\Phi(\eta)} \tilde{\Psi} = 0, \quad (6.27)$$

где Φ и σ связаны соотношением

$$\frac{d^2 \sigma}{d\eta^2} - \frac{\sigma}{\Phi} = 0. \quad (6.28)$$

Равенство (6.28) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции σ при заданной функции Φ . Оно имеет два линейно независимых решения σ и $\tilde{\sigma}$ с вронкианом $\sigma \tilde{\sigma}' - \sigma' \tilde{\sigma} = 1$, причем $z = -\tilde{\sigma}/\sigma$. Преобразование (6.24) является частным случаем (6.26) при $\sigma(\eta) = (F - \eta)/F$, $\sigma = -\eta$.

С помощью преобразования (6.26) нелинейное параболическое уравнение для кубичной среды переводится в параболическое уравнение для линзоподобной среды

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{s_{\perp}^2}{\Phi(\eta)} \Psi + |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (6.29)$$

Рассмотрим свойства пучков в случае однородной линзоподобной среды $1/\Phi = \text{const}$. В такой среде при $1/\Phi < 0$ существуют однородные пучки при любой мощности, меньшей критической, при $1/\Phi = 0$ мощность однородного пучка равна критической, а при $1/\Phi > 0$ однородных пучков не существует. Выберем при $1/\Phi = -\mu^2 < 0$ $\sigma = \cos \mu\eta$, $\tilde{\sigma} = -(\sin \mu\eta)/\mu$, тогда $z = (\text{tg } \mu\eta)/\mu$. Отсюда видно, что при мощности пучка, меньшей критической, когда поле в однородной нелинейной среде регулярно, в линзоподобной среде оно является периодической функцией с периодом $L = \pi/\mu$, в частности, на расстоянии $L = (\pi q)/\mu$, где $q = 1, 2, 3, \dots$, поле имеет такую же структуру, как и на входе в нелинейную среду. При мощности пучка, большей критической, происходит "схлопывание" пучка в точке

$$\eta_{\text{сф}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{arctg}(\mu z_{\text{сф}}),$$

где $z_{\text{сф}}$ — точка нелинейного фокуса в однородной нелинейной среде.

В дефокусирующей среде ($1/\Phi = \tilde{\mu}^2 > 0$) длина самофокусировки увеличивается:

$$\eta_{\text{сф}} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \operatorname{arcth}(\tilde{\mu} z_{\text{сф}}) > z_{\text{сф}}. \quad (6.30)$$

Полагая $\eta_{\text{сф}} = \infty$, из (6.30) получим условие $z_{\text{сф}}(P/P_{\text{кр}}) = 1/\tilde{\mu}$, определяющее пороговую мощность самофокусировки в дефокусирующей среде.

Преобразование фокусировки может быть применено и к параболическому уравнению [161, 162]

$$\Delta_D \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + |\Psi|^{2s} \Psi = 0, \quad (6.31)$$

которое описывает самовоздействие в пространстве $D + 1$ измерений с нелинейностью степени $2s$. Оно является модельным в различных нелинейных задачах.

Используя замены переменных и функции, аналогичные (6.26),

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{1}{\sigma^2(\eta)}, \quad r_{\perp} = \frac{s_{\perp}}{\sigma(\eta)},$$

$$\tilde{\Psi}(\eta, s_{\perp}) = \frac{1}{\sigma^{\alpha}(\eta)} \Psi[t(\eta), r_{\perp}(s_{\perp}, \eta)] \exp \left[-i \frac{d \ln(\sigma)}{d\eta} \frac{s_{\perp}^2}{2\eta} \right], \quad (6.32)$$

вместо (6.31) получим уравнение

$$\Delta_D \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} + \frac{s_{\perp}^2}{\Phi(\eta)} \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^{2s} \sigma^{2s\alpha-2} \tilde{\Psi} + \frac{i\sigma'(D-2\alpha)}{\sigma} \tilde{\Psi} = 0.$$

Выбором параметра α последнее уравнение может быть приведено к одному из двух видов

$$\Delta_D \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} + \frac{s_{\perp}^2}{\Phi(\eta)} \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^{2s} \tilde{\Psi} + \frac{i\sigma'(D-2\alpha)}{\sigma} \tilde{\Psi} = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{s}, \quad (6.33)$$

или

$$\Delta_D \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} + \frac{s_{\perp}^2}{\Phi(\eta)} \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^{2s} \sigma^{2s\alpha-2} \tilde{\Psi} = 0,$$

$$\alpha = \frac{D}{2}. \quad (6.34)$$

В специальном случае $Ds = 2$ уравнения (6.33) и (6.34) совпадают и инвариантны относительно преобразования фокусировки (6.32).

6.3. Усредненное описание волновых полей

Кроме точных автомодельных решений и преобразования фокусировки, нелинейные параболические уравнения имеют ряд свойств, которые позволяют получить интересные и важные сведения о решениях без знания самих решений. Одним из методов получения таких сведений является метод усредненного описания (метод моментов) [31, 163, 164]. Он состоит в том, что отыскание искомой

функции $f(t)$ заменяется определением моментов $R_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$ этой функции. Эффективность метода моментов связана с относительной простотой уравнений для R_n . Знание всех моментов позволяет известными методами восстановить вид функции $f(t)$ [165].

Однако даже в тех случаях, когда оказывается невозможным определить все моменты искомой функции, информация о нескольких первых моментах оказывается полезной [166, 167]. Это особенно важно для нелинейных задач, в которых отыскание решения часто требует привлечения численных методов. В данной части речь пойдет о привлечении метода моментов к анализу распространения пучков электромагнитных волн.

Пусть в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) имеется некоторый набор величин ($w(t, r)$ — скаляр, $S(t, r)$ — вектор, $T_{\alpha\beta}(t, r)$ — тензор), удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} S, \quad (6.35a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div} \hat{T}, \quad (6.35b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = -\operatorname{div} Q, \quad (6.35b)$$

где Q — некоторый вектор. Введем в рассмотрение моменты величины $w(t, r)$ нулевого порядка:

$$W(t) = \int_v w \, dv, \quad (6.36)$$

первого порядка:

$$r_{\text{и}} = \frac{1}{W} \int_v r w \, dv, \quad (6.37)$$

и центробежный момент второго порядка:

$$I(t) = a_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{W} \int_v r^2 w \, dv. \quad (6.38)$$

Интеграл в соотношениях (6.36)–(6.38) берется по всему бесконечному пространству. Если величине w приписать смысл плотности энергии, то первые два уравнения (6.35) будут описывать законы сохранения энергии и импульса поля. В случае электромагнитного поля в вакууме $w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$, $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]$ — плотность потока энергии, $T_{\alpha\beta} = T^M = \frac{1}{4\pi} \left[E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \right]$ — максвелловский тензор натяжений, $\sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = w$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{S}$. В однородной среде с проницаемостью ϵ, μ

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}],$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{1}{4\pi} \left[E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) \right] = \frac{1}{\epsilon \mu} T^M,$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\epsilon \mu} w, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\epsilon \mu} \mathbf{S}.$$

В силу уравнений (6.35) для поля, локализованного в некоторой области пространства, выполняются следующие соотношения:

$$W(t) = \text{const} = W|_{t=0} = W_0, \quad (6.39)$$

$$\frac{dr_{\text{и}}}{dt} = \text{const} = \left. \frac{dr_{\text{и}}}{dt} \right|_{t=0}, \quad (6.40)$$

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} = \text{const} = \left. \frac{d^2 I(t)}{dt^2} \right|_{t=0}. \quad (6.41)$$

Таким образом, указанные выше моменты величины $\omega(\mathbf{r}, t)$ представляются по t полиномами соответствующего порядка:

$$W = W_0, \quad \mathbf{r}_ц = \mathbf{r}_ц0 + \mathbf{v}_ц t, \quad I = I_0 + Bt + At^2 \quad (6.42)$$

с коэффициентами, определяемыми начальными условиями

$$\mathbf{v}_ц = \frac{1}{W_0} \int_v \mathbf{S} dv \Big|_{t=0},$$

$$A = -\frac{c^2}{W_0} \int_v \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} dv \Big|_{t=0},$$

$$B = \frac{2}{W_0} \int_v r \mathbf{S} dv \Big|_{t=0}.$$

Соотношения (6.42) имеют простой физический смысл: энергия сгустка поля W сохраняется, "центр энергии" $\mathbf{r}_ц$ движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_ц$, а квадрат эффективного радиуса сгустка $a_{эф}^2$ изменяется по параболическому закону (при $t \rightarrow \infty$ $a_{эф} \sim t$) — движение сгустка подобно движению облака невзаимодействующих частиц (в этом случае $\mathbf{r}_ц$ определяется как центр масс). Далее применим полученные соотношения к описанию волновых пучков.

6.4. Описание стационарных волновых пучков в линейных средах

Рассмотрим стационарный во времени волновой пучок $E = \Psi \exp(-ikz)$, описываемый параболическим уравнением (в координатах $\mathbf{k}\mathbf{r}$):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2i} \Delta_{\perp} \Psi. \quad (6.43)$$

Найдем зависимость от z моментов интенсивности $|\Psi|^2$

$$r_{mn} = \int_s x^m y^n |\Psi|^2 dx dy. \quad (6.44)$$

Поскольку, как следует из уравнения (6.43), имеют место соотношения

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial z} = -\operatorname{div}_{\perp} \mathbf{S}_{\perp}, \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_\perp}{\partial z} = \operatorname{div}_\perp \hat{T}, \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha}}{\partial z} = \operatorname{div}_\perp \mathbf{Q}, \quad (6.47)$$

где

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{\Psi \cdot \nabla_\perp \Psi^* - \text{к.с.}}{2i}, \quad (6.48)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{4} \Delta_\perp |\Psi|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_i} \right), \quad (6.49)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{1}{4i} (\Psi \nabla_\perp \Delta_\perp \Psi^* - \text{к.с.}), \quad (6.50)$$

то для величин

$$r_{00} = W_0, \quad \frac{1}{r_{00}} (r_{10} x_0 + r_{01} y_0) = r_{\perp 1}, \quad \frac{1}{r_{00}} (r_{20} + r_{02}) = a_{\text{эф}}^2$$

применимы формулы, аналогичные (6.42), с заменой t на z и V на площадь поперечного сечения S :

$$r_{00}(z) = r_{00}(0), \quad (6.51)$$

$$r_{\perp 1} = r_{\perp 1}(0) + b z, \quad (6.52)$$

$$a_{\text{эф}}^2(z) = a_{\text{эф}}^2(0) + Bz + Az^2, \quad (6.53)$$

где

$$b = \frac{1}{r_{00}} \int_S \mathbf{S}_\perp ds = \frac{1}{r_{00}} \int_S \Psi_0^2 \nabla_\perp \varphi ds \Big|_{z=0} \quad (6.54)$$

$$B = \frac{2}{r_{00}} \int_S r_\perp \mathbf{S}_\perp ds = \frac{2}{r_{00}} \int_S (r_\perp \nabla \varphi) \Psi_0^2 ds \Big|_{z=0}, \quad (6.55)$$

$$A = \frac{1}{r_{00}} \int_S |\nabla_\perp \Psi|^2 ds = \frac{1}{r_{00}} \int_S (\nabla_\perp \Psi_0)^2 + \Psi_0^2 (\nabla_\perp \varphi)^2 ds \Big|_{z=0}, \quad (6.56)$$

Ψ_0 и φ — соответственно амплитуда и фаза поля,

$$\Psi = \Psi_0 \exp(-i\varphi).$$

Таким образом, полный поток энергии пучка сохраняется, центр интенсивности лежит на одной прямой [168] (следствие сохранения поперечного импульса пучка), а квадрат эффективной ширины пучка изменяется по параболическому закону.

Полиномиальное (по z) представление моментов интенсивности поля, описываемого уравнением (6.43), имеет место и для последующих порядков:

$$r_{mn} = P_{m+n}(z),$$

где $P_{m+n}(z)$ — полиномы степени $(m+n)$. В этом проще всего убедиться с помощью интегрального соотношения, связывающего решение параболического уравнения (6.43) в двух сечениях $z=0$ и $z=z$:

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi z} \int_s \Psi(x', y', 0) \exp \left[-i \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} \right] dx' dy'. \quad (6.57)$$

Подставляя соотношение (6.57) в равенство (6.44), используя выражение для производных δ -функции

$$\delta^{(n)}(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^n \exp[-i\omega(x' - x)] d\omega,$$

интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} r_{mn} &= (iz)^{m+n} \int_s \Psi^* \exp \left(i \frac{r_{\perp}^2}{2z} \right) \cdot \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[\Psi \exp \left(-i \frac{r_{\perp}^2}{2z} \right) \right] dx dy = \\ &= (-iz)^{m+n} \int_s \Psi \exp \left(-i \frac{r_{\perp}^2}{2z} \right) \cdot \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[\Psi^* \exp \left(i \frac{r_{\perp}^2}{2z} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Производную от выражения в квадратных скобках в (6.58) можно представить в виде произведения полинома обратных степеней z с коэффициентами, зависящими только от поперечных координат, на экспоненциальный множитель. Таким образом, выражение для r_{mn} представляет полином z степени $(m+n)$. В силу произвольности выбора начальной точки $z=0$ в полиномиальном представлении моментов интенсивности коэффициент при старшем члене в выражении (6.58) является интегралом исходного уравнения. Отсюда следует, что уравнение (6.43) имеет бесконечное число законов сохранения.

Рассмотрим для иллюстрации фокусировку гауссова пучка

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left(-\frac{r_{\perp}^2}{2a_0^2} + i \frac{r_{\perp}^2}{2F} \right).$$

Для него выражение

$$a_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{a_0^2} z^2 + \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 a_0^2$$

описывает изменение действительной ширины пучка $a \equiv a_{\text{эф}}$ по уровню $e^{-1/2}$. Таким образом, волновые пучки в усредненном описании ведут себя аналогично гауссовым пучкам соответствующей ширины и расходимости. Можно показать, что для коллимированных пучков $[\nabla_{\perp} \varphi = 0]_{z=0}$ при заданной величине $a_{\text{эф}}^2|_{z=0}$ гауссовы распределения реализуют минимальную дифракционную расходимость поперечного сечения. Для доказательства этого надо минимизировать величину $\int_s |\nabla_{\perp} \Psi|^2 dx dy$ при заданных величинах $\int_s r_{\perp}^2 |\Psi|^2 dx dy$ и $\int_s |\Psi|^2 dx dy$.

Метод моментов позволяет описать прохождение произвольного пучка через квадратичный фазовый корректор с фокусным расстоянием F , вносящим в пучок фазу $\varphi_0 = -r_{\perp}^2/(2F)$. Полагая в формулах (6.51)–(6.56) $\varphi = \varphi_{\text{п}} + \varphi_0$, где $\varphi_{\text{п}}$ – фаза падающего пучка, найдем, что входные и выходные параметры пучка связаны соотношением:

$$(r_{\perp})_{\text{вых}} = (r_{\perp})_{\text{вх}}, \quad b_{\text{вых}} = b_{\text{вх}} - \frac{(r_{\perp})_{\text{вх}}}{F},$$

$$B_{\text{вых}} = B_{\text{вх}} - \frac{2(a_{\text{эф}}^2)_{\text{вх}}}{F}, \quad A_{\text{вых}} = A_{\text{вх}} - \frac{B_{\text{вх}}}{F} + \frac{(a_{\text{эф}}^2)_{\text{вх}}}{F^2}.$$

Указанные соотношения наряду с (6.51)–(6.56) позволяют проводить рассмотрение произвольных пучков в системах квадратичных фазовых корректоров. Для неквадратичных корректоров преобразования коэффициентов, определяющих изменение эффективной ширины пучка и его направления, будут содержать моменты входного распределения выше второго.

6.5. Описание частично когерентных полей и полей в статистически неоднородных средах

Существует еще один путь получения моментов распределения интенсивности в квазиоптике, пригодный и для описания частично когерентных полей. Рассмотрим функцию взаимной когерентности [166]:

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z) = \langle E(\mathbf{r} + \mathbf{s}/2, z) E^*(\mathbf{r} - \mathbf{s}/2, z) \rangle, \quad (6.59)$$

где $\mathbf{r}(x, y)$ и $\mathbf{s}(\xi, \eta)$ — радиусы-векторы в плоскости $z = \text{const}$.
Уравнение для функции $B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z)$

$$i \frac{\partial B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z)}{\partial z} = \nabla_r \nabla_s B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z), \quad (6.60)$$

вытекающее из (6.43), можно решить методом, аналогичным развитому в работе [164]. Для моментов функции взаимной когерентности

$$r_{m,n}(\mathbf{s}, z) = \int_{\mathbf{s}} x^m y^n B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z) dx dy \quad (6.61)$$

из уравнения (6.60) нетрудно получить рекуррентное уравнение

$$i \frac{\partial r_{m,n}}{\partial z} = -m \frac{\partial r_{m-1,n}}{\partial \xi} - n \frac{\partial r_{m,n-1}}{\partial \eta}. \quad (6.62)$$

Из уравнения (6.62) следует, что

$$r_{00}(\mathbf{s}, z) = r_{00}(\mathbf{s}, 0) = \text{const}, \quad (6.63)$$

$$r_{01}(\mathbf{s}, z) = r_{01}(\mathbf{s}, 0) - \frac{z}{i} \frac{r_{00}(\mathbf{s}, 0)}{\partial \eta}, \quad (6.64)$$

$$r_{10}(\mathbf{s}, z) = r_{10}(\mathbf{s}, 0) - \frac{z}{i} \frac{r_{00}(\mathbf{s}, 0)}{\partial \xi}, \quad (6.65)$$

$$r_{02}(\mathbf{s}, z) = r_{02}(\mathbf{s}, 0) - \frac{2z}{i} \frac{\partial r_{0,1}(\mathbf{s}, 0)}{\partial \eta} - z^2 \frac{\partial^2 r_{0,0}(\mathbf{s}, 0)}{\partial \eta^2}, \quad (6.66)$$

$$r_{20}(\mathbf{s}, z) = r_{20}(\mathbf{s}, 0) - \frac{2z}{i} \frac{\partial r_{1,0}(\mathbf{s}, 0)}{\partial \xi} - z^2 \frac{\partial^2 r_{0,0}(\mathbf{s}, 0)}{\partial \xi^2}, \quad (6.67)$$

и т. д.

Таким образом, полиномиальное представление моментов интенсивности есть частный случай (при $\mathbf{s} = 0$) полиномиального представления моментов функции взаимной когерентности $B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z)$.

Результаты (6.63)–(6.67) естественно обобщаются на случай распространения частично-когерентных пучков в статистически-неоднородных средах. В известном приближении [166, 169] этот случай описывается уравнением

$$i \frac{\partial B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z)}{\partial z} = \nabla_r \nabla_s B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, z) - \frac{i}{4} d_\epsilon(\mathbf{s}) B \quad (6.68)$$

для функции взаимной когерентности (6.59). В уравнении (6.68)

$$d_\epsilon(s) = \int_0^\infty D_\epsilon \left[(s^2 + z^2)^{1/2} \right] dz - \int_0^\infty D_\epsilon(|z|) dz,$$

$$D_\epsilon(s^{(3)}) = \left\langle \left[\epsilon \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}^{(3)}}{2} \right) - \epsilon \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}^{(3)}}{2} \right) \right] \right\rangle \equiv D_\epsilon(s^{(3)})$$

— структурная функция локально-однородных и изотропных флуктуаций диэлектрической проницаемости ϵ ; \mathbf{R} и $\mathbf{s}^{(3)}$ — радиус-векторы в трехмерном пространстве x, y, z ; $s^{(3)} = (s^2 + z^2)^{1/2}$.

Из уравнения (6.68) можно получить обобщающее (6.62) рекуррентное уравнение, описывающее изменение моментов функции взаимной когерентности B :

$$i \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{d_\epsilon(s)}{4} \right) r_{m,n} = -m \frac{\partial r_{m-1,n}}{\partial \xi} - n \frac{\partial r_{m,n-1}}{\partial \eta}. \quad (6.69)$$

Из него следует, что

$$\begin{aligned} r_{00}(s, z) &= r_{00}(s, 0) \exp \left(-\frac{d_\epsilon(s) z}{4} \right), \\ r_{01}(s, z) &= \left\{ [r_{01}(s, 0)]_{\text{рег}} + \frac{z^2 r_{00}(s, 0)}{8i} \frac{\partial d_\epsilon}{\partial \eta} \right\} \exp \left(-\frac{d_\epsilon(s) z}{4} \right), \\ r_{02}(s, z) &= \left\{ [r_{02}(s, z)]_{\text{рег}} + \frac{z^2 r_{01}(s, 0)}{4i} \frac{\partial d_\epsilon}{\partial \eta} + \left(\frac{r_{00}(s, 0)}{12} \frac{\partial^2 d_\epsilon}{\partial \eta^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial r_{00}(s, 0)}{\partial \eta} \frac{\partial d_\epsilon}{\partial \eta} \right) z^3 - \left(\frac{\partial d_\epsilon}{\partial \eta} \right)^2 \frac{r_{00}(s, 0) z^4}{64} \right\} \exp \left(-\frac{d_\epsilon(s) z}{4} \right). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Значок "рег" относится к величинам в регулярной среде. В частности,

$$a_{\text{эф}}^2(z) = [a_{\text{эф}}^2(z)]_{\text{рег}} + \frac{z^3}{12} [\Delta_s d_\epsilon(s)]. \quad (6.71)$$

Как видно из (6.71), хаотическая нерегулярность среды вносит в уширение эффективного сечения пучка аддитивный вклад [166, 167].

6.6. Описание волновых пучков в кубичных нелинейных средах

Рассмотрим волновые пучки в кубичной среде, описываемые уравнением

$$\Delta_{\perp} E - 2i \frac{\partial E}{\partial z} + \epsilon' |E|^2 E = 0. \quad (6.72)$$

Непосредственным дифференцированием моментов интенсивности по z с использованием уравнения (6.72) можно показать, что справедливы соотношения (6.45)–(6.47) с

$$T_{ik} = T_{ik}^L + \frac{\epsilon' |E|^2}{4},$$

$$Q = Q^L - \frac{\epsilon' |E|^2 (E \cdot \nabla_{\perp} E^* - \text{к. с.})}{2i},$$

T_{ik}^L и Q^L — соответствующие выражения для линейной среды.

В результате этого по-прежнему имеют место формулы (6.51)–(6.53) с единственным отличием:

$$A = A^{NL} = A^L - \frac{\epsilon'}{2r_{00}} \int_s |E|^4 ds. \quad (6.73)$$

Ввиду произвольности начала отсчета координаты z в формуле (6.53) коэффициент A является интегралом исходных уравнений. Для произвольной нелинейности аналогичный инвариант был определен в работе [170].

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из соотношений (6.51)–(6.53) с учетом зависимости (6.73). В нелинейной среде центр интенсивности пучка распространяется по прямой, причем той же, что и в линейной среде. Этот вывод справедлив не только для кубичных сред, но и при произвольной зависимости $\epsilon'(|E|^2)$. Это значит, что поперечные смещения пучка с асимметричным профилем амплитуды [171, 172] носят локальный характер, в целом же пучок распространяется прямолинейно.

Из (6.53) и (6.73) следует, что любой коллимированный пучок, начиная с некоторой мощности, которую можно назвать достаточной критической P^* , в нелинейной среде будет в среднем схлопываться:

при $A^{NL} < 0$ $\frac{d^2 a_{\text{эф}}^2}{dz^2} < 0$. Квадрат ширины пучка — существенно положительная величина — обращается в нуль при некотором значении $z = z^*$ и далее становится отрицательным, что показывает на отсутствие в этом случае у уравнения (6.72) несингулярных решений. Достаточная критическая мощность находится из условия $A^{NL} = 0$

$$\int_s \left(|\nabla_{\perp} E|^2 - \frac{\epsilon' |E|^4}{2} \right) ds = 0. \quad (6.74)$$

Определим достаточную критическую мощность P^* для коллимированного пучка. Полагая $E = E_0 f(r_{\perp})$, где f — действительная функция, из (6.74) найдем сначала амплитуду E_0^* , при которой пучок схлопывается в среднем

$$E_0^{*2} = (2/\varepsilon') \left[\int_s (\nabla_{\perp} f)^2 ds / \int_s f^4 ds \right]. \quad (6.75)$$

Далее получим выражение для достаточной критической мощности:

$$P^* = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \varepsilon'} \frac{\int_s (\nabla_{\perp} f)^2 ds \cdot \int_s f^2 ds}{\int_s f^4 ds}. \quad (6.76)$$

Таким образом, достаточная критическая мощность определяется лишь параметрами среды и профилем поперечного распределения $f(r_{\perp})$. Для гауссова пучка $f = E_0 \exp[-r^2/(2a_0^2)]$

$$P_r^* = \frac{cn}{2k_0^2 \varepsilon'}. \quad (6.77)$$

Определим профиль пучка с минимальной достаточной критической мощностью P_{\min}^* . Варьируя P^* по $f(r_{\perp})$, найдем, что этот профиль должен удовлетворять уравнению

$$\Delta_{\perp} f + \frac{2 \int_s (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_s f^4 ds} f^3 - \frac{\int_s (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_s f^2 ds} f = 0,$$

которое заменой

$$r_{\text{нов}} = r_{\text{ст}} \left[\frac{\int_s (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_s f^2 ds} \right]^{1/2}, \quad f_{\text{нов}} = f_{\text{ст}} \left[\frac{\int_s (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_s f^4 ds} \right]^{1/2}$$

приводится к виду

$$\Delta_{\perp} f_{\text{нов}} + f_{\text{нов}}^3 - f_{\text{нов}} = 0. \quad (6.78)$$

Простейшему решению этого уравнения соответствует аксиально симметричный однородный пучок (таунсов пучок). Таким образом,

наименьшую достаточную критическую мощность $P_{\min}^* = P_{\text{одн}}^{(3)} = 5,850 \frac{c n}{4\pi k_0^2 \varepsilon'}$ [24] имеет пучок, профиль которого совпадает с профилем однородного (по z) пучка (см. также гл. 3). Стационарные свойства функционала $P^*[f]$ позволяют вычислить $P_{\text{одн}}$ со сравнительно высокой точностью стандартными вариационными методами. Как видно из (6.77), уже гауссов пучок дает практически достаточное приближение для $P_{\text{одн}}^3$: $P_{\Gamma}^* = 1,07 P_{\text{одн}}^3$. Полученное значение достаточной критической мощности гауссова пучка несколько выше критической мощности, определяемой в результате численных расчетов. Отличие обусловлено тем, что достаточная критическая мощность определяет порог схлопывания пучка как целого ($\frac{d^2 a_{\text{эф}}^2}{dz^2} < 0$), а критическая — порог локального схлопывания, когда на оси пучка образуется фокальная точка $z_{\text{сф}}$ с бесконечной интенсивностью. В небольшом интервале мощностей $P_{\text{одн}}^3 < P < 1,07 P_{\text{одн}}^3$ образование фокальной точки сопровождается увеличением эффективной ширины пучка.

Достаточная критическая мощность зависит от формы поперечного сечения пучка. Коллимированный гауссов пучок с эллиптическим профилем

$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right), \quad (6.79)$$

где параметры a и b характеризуют ширину пучка по координатам x и y , имеет достаточную критическую мощность [143]

$$P^* = \frac{P_{\Gamma}^*}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right), \quad (6.80)$$

превышающую критическую мощность аксиально-симметричного пучка.

Еще более сильное влияние оказывает на достаточную критическую мощность непостоянство начальной фазы φ . В этом случае выражение для эффективной ширины пучка имеет вид

$$a_{\text{эф}}^2 = A_0^L \left(1 - \frac{P}{P_k^*}\right) z^2 + \frac{\int (r + \nabla_{\perp} \varphi z)^2 \Psi_0^2 ds}{\int \Psi_0^2 ds}, \quad (6.81)$$

где $A_0^L = \frac{\int |\nabla_{\perp}^2 \Psi_0|^2 ds}{\int \Psi_0^2 ds}$ — коэффициент, характеризующий дифракционную

расходимость в линейной среде пучка с тем же амплитудным профилем, P_k^* — достаточная критическая мощность коллимированного пучка. Из выражения (6.81) следует, что фаза ϕ , отличная от нуля, увеличивает мощность пучка, при которой эффективная ширина обращается в нуль. Таким образом, достаточная критическая мощность коллимированного пучка минимальна. Лишь в случае безабберационной фокусировки, когда $\phi_0 = -r^2/(2F)$, она не возрастает. В этом случае (индекс "k" относится к коллимированным пучкам)

$$a_{\phi}^2 = A_0^L (1 - P/P_k^*) z^2 + (1 - z/F)^2 a_{\phi}^2(0). \quad (6.82)$$

При $P = P_k^*$ волновой пучок в среднем имеет вид конуса: $a_{\phi} = (1 - z/F) a_{\phi}(0)$ с вершиной в точке $z = F$. Критическая мощность $P_{\text{расф}}^*$ расфокусированного пучка ($F < 0$) возрастает

$$P_{\text{расф}}^* = P_k^* [1 + a_{\phi}^2(0)/(A_0^L F^2)].$$

Уравнение (6.72), кроме однородных аксиально-симметричных пучков, имеет решением и вращающиеся однородные пучки, в которых $E_0 \approx \Psi_0(r) \exp(-im\phi)$ (см. гл. 3). Критическую мощность P^* таких пучков с радиальным индексом $p = 1$ как функцию углового индекса m можно оценить на основе равенства (6.74) при подстановке в него пучков в виде гауссовых структур

$$\Psi_0 = \Psi_{m1} r^m \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \quad (6.83)$$

Их критическая мощность P_{m1}^* выражается через критическую мощность гауссова пучка

$$P_{m1}^* = P_{\Gamma}^* \frac{2^{2m}(m+1)! m!}{(2m)!}$$

и растет с увеличением числа m .

Пучки, представляющие суперпозицию вращающихся в противоположные стороны азимутальных гармоник с индексами $\pm m$

$$\Psi_0 = \Psi_{m1} r^m \exp(-r^2/2) \cos(m\phi)$$

имеют $2m$ локальных амплитудных максимумов. Их критическая мощность \tilde{P}_{m1}^* при $m \geq 1$ равна:

$$\tilde{P}_{m1}^* = \frac{2}{3} P_{m1}^*.$$

Она меньше мощности вращающихся пучков с тем же индексом m , но больше величины $2mP_{\Gamma}^*$, так что на каждый локальный максимум приходится мощность больше критической мощности гауссова пучка.

Из формулы (6.53) можно получить дифференциальное уравнение для зависимости эффективной ширины пучка $a_{\text{эф}}^2$ от продольной координаты

$$\frac{d^2 a_{\text{эф}}}{dz^2} = \frac{A a_{\text{эф}}(0) - B^2/4}{a_{\text{эф}}^3}. \quad (6.84)$$

Для гауссова пучка $\Psi = \Psi_0 \exp[-r^2/(2a_0^2)]$, $a_{\text{эф}}(0) = a_0$, $A_0 = 1/a_0$ имеем

$$\frac{d^2 a_{\text{эф}}}{dz^2} = \frac{(1 - P/P_{\Gamma}^*)}{a_{\text{эф}}^3}. \quad (6.85)$$

К подобному уравнению приходят и в теории безабберационной самофокусировки (см. гл. 5), понимая под $a_{\text{эф}}$ ширину гауссова пучка. Проведенное рассмотрение уточняет смысл безабберационного приближения: получающееся уравнение описывает эффективную ширину самофокусирующегося пучка, которая может заметно отличаться от действительной ширины, определенной по какому-либо фиксированному уровню. Заметим, что уравнение для ширины гауссова пучка, которое может быть получено из функционала действия для уравнения (6.72) вариационным методом [173], полностью совпадает с (6.85) и, таким образом, описывает не истинную, а эффективную ширину пучка.

Из выражения (6.81) при $P > P^*$ можно определить длину самофокусировки z^* как расстояние до точки, где $a_{\text{эф}} = 0$. Для коллимированного пучка

$$z^* = \frac{a^2(0)}{[A_0(P/P^* - 1)]^{1/2}}. \quad (6.86)$$

Для гауссова пучка

$$z^* = \frac{a_0^2}{(P/P_{\Gamma}^* - 1)^{1/2}}. \quad (6.87)$$

Сопоставим это выражение со значением длины самофокусировки, определяемой из численных расчетов как расстояние до фокальной точки с бесконечной интенсивностью на оси [7] (см. гл. 5):

$$z_{\text{сф}} = \frac{0,366 a_0^2}{\{(P/P_{\text{кр}})^{1/2} - 0,825\}^2 - 0,03}^{1/2}. \quad (6.88)$$

При любом значении $P/P_{\text{кр}} > 1$ $z^* > z_{\text{сф}}$. Точки $z_{\text{сф}}$ и z^* можно было бы интерпретировать, соответственно, как точки локального (частичного) и абсолютного схлопывания. Однако в точке локального схлопывания мы имеем дело с сингулярностью решения, вследствие чего усредненное описание справедливо лишь до этой точки*.

Метод моментов легко обобщается на эллиптически поляризованные пучки, описываемые системой параболических уравнений [110] (см. гл. 2):

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \Psi_+ - 2i \frac{\partial \Psi_+}{\partial z} + [|\Psi_+|^2 + (1 + \beta) |\Psi_-|^2] \Psi_+ &= 0, \\ \Delta_{\perp} \Psi_- - 2i \frac{\partial \Psi_-}{\partial z} + [|\Psi_-|^2 + (1 + \beta) |\Psi_+|^2] \Psi_- &= 0. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Нетрудно видеть, что величины $a_{\text{эф},s}^2$, r_{00}^s , B_s , A_s^{NL} , аналогичные величинам $a_{\text{эф}}^2$, r_{00} , B , A^{NL} , имеют вид

$$\begin{aligned} a_{\text{эф},s}^2 &= \frac{1}{r_{00}^s} \int r_{\perp}^2 (\Psi_+ \Psi_+^* + \Psi_- \Psi_-^*) ds = A_s^{NL} z^2 + B_s z + a_{\text{эф},s}^2(0), \\ A_s^{NL} &= A_s^L - \frac{\varepsilon'}{2r_{00}^s} \int [|\Psi_+|^4 + |\Psi_-|^4 + 2(1 + \beta) |\Psi_-|^2 |\Psi_+|^2] ds, \end{aligned} \quad (6.90)$$

$$\begin{aligned} B_s &= \frac{2}{r_{00}^s} \int r_{\perp} (|\Psi_+|^2 \nabla_{\perp} \varphi_+ + |\Psi_-|^2 \nabla_{\perp} \varphi_-) ds, \\ r_{00}^s &= \int_s (|\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2) ds, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} &= |\Psi_{\pm}| \exp(-i\varphi_{\pm}), \\ A_s^L &= \int (|\nabla \Psi_+|^2 + |\nabla \Psi_-|^2 + |\Psi_+|^2 \nabla_{\perp} \varphi_+ + |\Psi_-|^2 \nabla_{\perp} \varphi_-) ds. \end{aligned}$$

* Как показывают расчеты, инвариантность величины A^{NL} (6.73) нарушается при прохождении точек локального схлопывания.

Соотношение (6.90) может быть использовано для определения достаточных критических мощностей эллиптически поляризованных пучков. Эти мощности зависят от отношения амплитуд полей $k = |\Psi_-|/|\Psi_+|$ на оси пучка $r_{\perp} = 0$. Для критической мощности коллимированного пучка с распределением $\Psi_+ = \Psi_{+0} f_+(r_{\perp})$ и $\Psi_- = \Psi_{-0} f_-(r_{\perp})$ имеем выражение

$$P^* = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} \frac{2 + \beta}{2} \frac{\int_s [(f_+^2 + k^2 f_-^2) ds] \{ \int_s [(\nabla_{\perp} f_+)^2 + k^2 (\nabla_{\perp} f_-)^2] ds \}}{\int_s [f_+^4 + k^4 f_-^4 + 2(1 + \beta) k^2 f_+^2 f_-^2] ds}. \quad (6.91)$$

Мощность, определяемая выражением (6.91), минимальна у пучков, поперечное распределение которых удовлетворяет системе уравнений (3.14). Стационарные свойства функционала (6.91) позволяют вычислить мощности однородных пучков, используя в качестве пробных функций функции Эрмита, близкие по структуре к точным решениям системы (3.14). Мощность однородного пучка находится из условия минимального значения P^* при заданном отношении на оси амплитуд полей парциальных пучков. Мощность пучка типа $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, например, описывается выражением

$$P^* = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} \frac{2 + \beta}{2} \frac{(1 + k^2)(1 + \delta^2 k^2)}{1 + \delta^2 k^4 + 4(1 + \beta) k^2 \delta^2 / (1 + \delta^2)}, \quad (6.92)$$

где δ — отношение радиусов пучков.

При применении метода моментов к уравнению (6.31) получается так называемая теорема вириала [161, 162]:

$$\frac{d^2 a_{\Phi}^2}{dt^2} = 2H - \frac{sD - 2}{s + 1} T, \quad (6.93)$$

где гамильтониан

$$H = \int \left(|\nabla_{\perp D} \Psi|^2 - \frac{2}{2s + 2} |\Psi|^{2s + 2} \right) dv_D \quad (6.94)$$

— инвариант уравнения (6.31);

$$T = \int |\Psi|^{2s + 2} dv_D, \quad (6.95)$$

$$a_{\Phi}^2 = \int r^2 |\Psi|^2 dv_D. \quad (6.96)$$

Из выражения (6.93) следует, что при выполнении условия $sD \geq 2$ с необходимостью имеет место образование особенности в решении (6.31), если только величина $H < 0$. Образование особенности в решении (6.31) получило название коллапса. Коллапс разделяют, согласно [161], на сильный ($sD = 2$) и слабый ($sD > 2$)*. Важнейшим примером сильного коллапса является самофокусировка ($D = 2$, $s = 1$). Для исследования коллапса ленгмюровских волн модельным является уравнение (6.31) при $s = 1$, $D = 3$. Коллапс плоских пучков ($D = 1$) происходит [54] при $s \geq 2$.

6.7. Метод обратной задачи рассеяния для решения задач двумерной самофокусировки

Одним из методов исследования уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (6.97)$$

с начальными данными $\Psi(x, 0)$, сводящих получение решения к квадратурам, является метод обратной задачи теории рассеяния [149], краткому изложению которого и посвящен данный раздел.

Возьмем пару функций v_1 и v_2 , зависящих от переменных x и z , образуем из них матрицу $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ и потребуем, чтобы она удовлетворяла системе уравнений

$$v_x = U(\zeta) v, \quad (6.98)$$

$$v_z = V(\zeta) v, \quad (6.99)$$

где U и V суть матрицы, зависящие от функции

$$q = \frac{1}{2^{1/2}} \Psi(x, z) \quad (6.100)$$

или ее производных. Величина $\zeta = \xi + i\eta$ является параметром этой системы. Уравнения (6.98) и (6.99) не противоречат друг другу только при определенном виде матриц U и V .

Примем, что

$$U = \begin{pmatrix} -i\zeta & iq \\ iq^* & i\zeta \end{pmatrix}$$

* Нам представляется эта терминология не совсем удачной (см. далее гл. 7).

$$V = \begin{pmatrix} -i \frac{|q|^2}{2} & -i\zeta q + \frac{q_x}{2} \\ -i\zeta q^* - \frac{q_x^*}{2} & -2i\zeta^2 + i \frac{|q|^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Условие совместности ($v_{xz} = v_{zx}$) уравнений (6.98) и (6.99) в этом случае заключается в выполнении уравнения

$$2iq_z - 2q|q|^2 - q_{xx} = 0, \quad (6.101)$$

которое заменой функции (6.100) приводится к виду (6.97). Решение (6.101) может быть выражено через функции v_1 и v_2 . Сравнительно простая зависимость функций v_1 и v_2 от координаты z для случая локализованных функций q , рассмотрением которых и ограничимся, как следует из уравнения (6.99), имеет место при $|x| \rightarrow \infty$. Эта зависимость используется для определения функции q по значениям v_1 и v_2 при $|x| \rightarrow \infty$. Нахождение функций v_1 и v_2 при $|x| \rightarrow \infty$ при заданном q является прямой задачей рассеяния*. Восстановление же функции q , которую можно назвать потенциалом уравнения (6.98), по зависящим от времени асимптотическим значениям v_1 и v_2 при $|x| \rightarrow \infty$ является обратной задачей теории рассеяния.

Процедура получения решения (6.101) заключается в следующем. По начальным данным $q(x, 0)$ для действительного значения $\zeta \equiv \xi$ среди решений (6.98) находятся функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$v_-(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\xi x), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (6.102)$$

$$v_+(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\xi x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (6.103)$$

$$\tilde{v}_-(x, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\xi x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.104)$$

Поскольку система уравнений (6.98) второго порядка, то функции $v_-(x, \xi)$, $v_+(x, \xi)$ и $\tilde{v}_-(x, \xi)$ линейно зависимы и можно выразить v_- через v_+ и \tilde{v}_- :

* Эта задача часто называется задачей рассеяния Захарова – Шабата [152].

$$v_- = a(\xi)|_{z=0} \tilde{v}_- + b(\xi)|_{z=0} v_+.$$

Согласно работе [149], коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$, в общем случае зависящие от z по системе (6.98) при условии совместности (6.101), обладают следующим свойством:

$$|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1. \quad (6.105)$$

Функция $a(\xi)$ может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость ζ . Нули функции $a(\zeta) = 0$ в этой полуплоскости $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $\eta_k > 0$, где ξ_k, η_k — действительные величины, определяют дискретные собственные значения системы (6.98), при которых существуют ее локализованные функции. В нулях функции $a(\zeta) = 0$

$$b(\zeta_k) = \exp(i\varphi_k), \quad (6.106)$$

где φ_k также действительно.

Из анализа задачи (6.101) [149] следует, что при $z \rightarrow \infty$ решение (6.101) представляется в виде нелинейной "суперпозиции" солитонной и несолитонной частей. Солитонная часть описывается посредством собственных значений локализованных решений (6.98) и характеризуется тем, что при $z \rightarrow \infty$ она не стремится к нулю на всей оси x , в то время как несолитонная часть убывает до нуля на всей оси x . Солитонная часть, таким образом, представляет асимптотическое поведение решения, не убывающее до нуля, при $z \rightarrow \infty$.

Для описания самофокусировки представляет интерес исследование только солитонной части. В этом случае достаточно знания локализованной (дискретной) части прямой задачи рассеяния. Потенциал $q(x, z)$ — решение (6.101) — определяется следующей формулой [149, 150]:

$$q(x, z) = -2i \sum_k \Lambda_k^* \Psi_{k2}^* \quad (6.107)$$

где величины Λ_k равны $\Lambda_k = [b(\zeta_k)/a'(\zeta_k)]^{1/2} \exp(i\zeta_k x - i\zeta_k^2 z)$ [149, 150], а функции Ψ_{k2}^* и Ψ_{k1}^* , в свою очередь, находятся из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \Lambda_j^{-1} \Psi_{j1} + \sum_k (\zeta_j - \zeta_k^*)^{-1} \Lambda_k^* \Psi_{k2}^* &= 0, \\ - \sum_k (\zeta_j^* - \zeta_k)^{-1} \Lambda_k \Psi_{k1} + \Lambda_j^{*-1} \Psi_{j2}^* &= 1. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Равенство (6.107) показывает, что дискретным собственным значениям системы (6.98) соответствует солитонная часть решения уравнения (6.101) — однородные пучки (см. гл. 3). В простейшем случае солитонная часть состоит из отдельных волновых пучков, каждый из которых распространяется по своему направлению — под определенным углом к оси z и описывается выражением

$$S_k(x, z) = 2\eta_k \operatorname{ch}^{-1} [2\eta_k(x - \xi_k z - x_k)] \exp [-2i\xi_k x + 2i(\xi_k^2 - \eta_k^2)z]. \quad (6.109)$$

В выражении (6.109) $2\eta_k$ — амплитуда пучка, ξ_k — определяет направление его распространения, $x_k = (2\eta_k)^{-1} \ln |b(\xi_k)|$ — координата максимума пучка при $z = 0$.

В более сложных случаях несколько пучков могут распространяться по одному направлению, т. е. оказываются связанными. Тогда солитонная часть представляет собой структуру, амплитуда и фаза которой периодически меняется в зависимости от координаты z .

В качестве первого примера рассмотрим дифракцию в кубичной среде пучка с П-образным распределением поля в начальном сечении, описываемом следующими выражениями:

$$\begin{aligned} q &= A > 0 && \text{при } |x| < 1, \\ q &= 0 && \text{при } |x| > 1. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Локализованные решения (6.98) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 && \text{при } |x| > 1, \\ v_1 &= B_1 \sin [k(x - 1)], && |x| < 1, \\ v_1 &= B_1 \sin (-2k) \exp (\eta x), && x < -1, \\ v_2 &= 0 && \text{при } |x| < -1, \\ v_2 &= B_2 \sin [k(x + 1)], && |x| < 1, \\ v_2 &= B_2 \sin (2k) \exp (-\eta x), && x > 1, \end{aligned}$$

где B_1, B_2 и $\eta = -i\zeta$ — константы, $k = (A^2 - \eta^2)^{1/2}$.

Подставляя v_1 и v_2 в (6.98) получим уравнение, связывающее A и η

$$\operatorname{tg} [2(A^2 - \eta^2)^{1/2}] = -\frac{(A^2 - \eta^2)^{1/2}}{\eta}. \quad (6.111)$$

Действительные решения имеют место при $\eta < A$; локализованный пучок впервые возникает при $A \geq \pi/4$, каждый n -й следующий —

при $A \geq \pi/4 + (\pi/2)n$. Таким образом, при $\pi/4 \leq A \leq 3\pi/4$ асимптотическое решение (6.101) с начальными условиями (6.110) при $z \rightarrow \infty$ имеет вид однородного пучка (6.109), у которого $\xi_0 = 0$, $x_0 = 0$, $0 < \eta_0 < 1,97\dots$ — определяется из (6.111). При $3\pi/4 \leq A \leq 5\pi/4$ локализованная часть при $z \rightarrow \infty$ имеет вид

$$q = \frac{4i(\eta_0 + \eta_1) \exp [(-i\varphi_1) - 2i\eta_1^2 z]}{\eta_1 - \eta_0} Q, \quad (6.112)$$

где

$$Q = [\eta_1 \operatorname{ch} 2\eta_0 x - \eta_0 \exp(-i\Delta\varphi) \operatorname{ch} 2\eta_1 x] \times \\ \times \left\{ \operatorname{ch} [2(\eta_0 + \eta_1)x] + \frac{(\eta_0 + \eta_1)^2}{|\eta_0 - \eta_1|^2} \operatorname{ch} [2(\eta_0 - \eta_1)x] - \frac{4\eta_0\eta_1}{(\eta_0 - \eta_1)^2} \cos(\Delta\varphi) \right\}^{-1},$$

η_0 и η_1 — корни уравнения (6.111):

$$1,97\dots < \eta_0 < 3,67\dots,$$

$$0 < \eta_1 < 2,80\dots;$$

$$\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_1 + 2(\eta_0^2 - \eta_1^2)z$$

и φ_0 и φ_1 определяются равенством (6.106).

Другим начальным условием для уравнения (6.101), которое допускает подробное исследование [150, 174, 175], является колоколообразный пучок $q(x, 0) = A \operatorname{ch}^{-1 + i\beta} x$ с амплитудой A . Вблизи нуля функция q может быть представлена в виде

$$q(x, 0) = A \operatorname{ch}^{-1} x \cdot \exp(i\beta \ln \operatorname{ch} x) \approx A \operatorname{ch}^{-1} x \cdot \exp\left[i\beta \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right] \approx \\ \approx A \operatorname{ch}^{-1} x \cdot \exp(i\beta x^2/2).$$

Отсюда видно, что фаза пучка в зависимости от поперечной координаты x может быть как фокусирующей ($\beta > 0$), так и расфокусирующей ($\beta < 0$).

В этом случае локализованное решение (6.98) выражается с помощью гипергеометрической функции, а дискретные собственные числа имеют вид

$$\zeta_k = i\eta_k = i \left[(A^2 - \beta^2/4)^{1/2} - 1/2 - k \right], \quad (6.113)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, k_r, \quad (A^2 - \beta^2/4)^{1/2} - 1/2 - k_r > 0.$$

Реальные части всех собственных значений равны нулю как в случае фокусирующей фазы, так и в случае расфокусирующей фазы. Это значит, что асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$ будет одинаково со случаем $\beta = 0$, с точностью до сдвига вдоль оси z и замены $(A^2 - \beta^2/4)^{1/2}$ на A . Условием появления одного дифракционно не расплывающегося пучка является неравенство

$$(A^2 - \beta^2/4)^{1/2} - 1/2 > 0.$$

Этот пучок описывается соотношением (6.109). Чем сильнее меняется фаза по ширине пучка, тем большая начальная амплитуда необходима для образования одного канала. Если выполняется следующее неравенство:

$$(A^2 - \beta^2/4)^{1/2} - 1/2 > 1,$$

то асимптотически вместо одного локализованного канала образуется периодическое по координате z решение. Если

$$1 < (A^2 - \beta^2/4)^{1/2} - 1/2 < 2,$$

то асимптотическое поведение определяется формулой (6.112), а η_0 и η_1 находятся из (6.113).

В частном случае $\beta = 0$, $A = 2$ ($\eta_0 = 3/2$, $\eta_1 = 1/2$, $\varphi_0 - \varphi_1 = \pi$, $\exp(i\varphi_0) = i$, $\exp(i\varphi_1) = -i$), и, как было найдено в [150], формула (6.112) является точным решением уравнения (6.101)

$$q = \frac{4 \exp(-iz/2) [\operatorname{ch} 3x + 3 \exp(-4iz) \operatorname{ch} x]}{\operatorname{ch} 4x + 4 \operatorname{ch} 2x + 3 \cos 4z}.$$

Согласно [149], формула (6.112) при произвольных положительных η_0 и η_1 также является точным решением уравнения (6.101). Она описывает в общем случае взаимодействие двух связанных пучков. При этом функция q из (6.112) является неотражающим потенциалом системы (6.98), для которого $b(\xi) = 0$. Исследуем функцию (6.112) более подробно при различных соотношениях между η_0 и η_1 . На рис. 6.1 и 6.2 приведены структуры $|q|$ при $\Delta = 0$, π при $\eta_0 = 1,5$ и двух значениях $\eta_1 = 0,1; 1,499$. Из рисунков видно, что при $\eta_1 \ll \eta_0$ формула (6.112) описывает периодически возмущенный одиночный пучок, причем возмущение не исчезает при $z \rightarrow \infty$. При $\eta_1 \sim \eta_0$ (6.112) описывает взаимодействие двух пучков, которые периодически сбли-

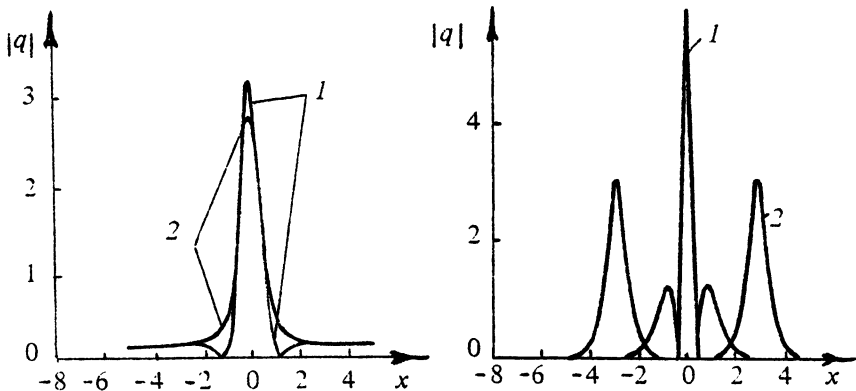


Рис. 6.1. Структура многосолиitonного решения при сильно различающихся амплитудах солитонов $\eta_0 = 1,5$, $\eta_1 = 0,1$: 1 - $\Delta\varphi = 0$, 2 - $\Delta\varphi = \pi$.

Рис. 6.2. Структура многосолиitonного решения при мало различающихся амплитудах солитонов $\eta_0 = 1,5$, $\eta_1 = 1,499$: 1 - $\Delta\varphi = 0$, 2 - $\Delta\varphi = \pi$

жаются друг с другом. Введем в этом случае амплитуду одиночного пучка $2\eta \approx 2\eta_0 \approx 2\eta_1$ и разность их амплитуд $\Delta\eta = \eta_0 - \eta_1$. Тогда наибольшее расстояние между пучками

$$2x_{\max} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{4\eta}{\Delta\eta},$$

а период осцилляции

$$T = \frac{\pi}{2} \exp(2\eta x_{\max}).$$

Отметим, что имеет место "линейное" сложение амплитуд при максимальном сближении пучков

$$|q|_{\max}(x=0, \Delta=0) \approx 4\eta,$$

в то время как амплитуда отдельного пучка примерно равна 2η .

СТРУКТУРА ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ФОКУСЕ

Выше было показано, что при мощности, большей критической, в пучке в среде с кубичной нелинейностью возникают локализованные области большой амплитуды — нелинейные фокусы [6]. Поведение поля вблизи фокусов определяющим образом влияет на развитие различных нелинейных эффектов и поэтому представляет большой интерес. В данной главе исследуется поведение поля вблизи нелинейного фокуса, описываемое уравнением Шредингера с кубичной нелинейностью в случаях $D=2$ и $D=3$, где D — размерность лапласиана в НУШ. Оказывается, структура полей в этих двух случаях существенно разная. В первом случае она носит название сильного коллапса [161, 162], а в другом — распределенного [46], или слабого [161]*. В конце главы для случая сильного коллапса — самофокусировки аксиально-симметричных пучков — учитываются поправки, следующие из волнового уравнения и ограничивающие поле в фокусе.

7.1. Поведение поля в нелинейном фокусе при стационарной самофокусировке

Различные подходы [32, 45, 49, 50, 177–180] были развиты для определения характера особенности, возникающей в решении уравнения

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (7.1)$$

Мы остановимся на одном, близком к изложенному в [45], представляющем нам наиболее убедительным, ограничиваясь коротким комментарием к остальным. Воспользуемся линзовым преобразованием (см. гл. 6), которое позволяет перейти от исследования

* Обсуждение названия этого типа коллапса дано в [50].

особенности функции Ψ , зависящей в случае аксиальной симметрии пучка от двух переменных r и z , к исследованию функции σ одной переменной η , и заменой переменных

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{1}{\sigma^2(\eta)}, \quad r_{\perp} = \frac{s}{\sigma(\eta)}, \quad (7.2)$$

$$\tilde{\Psi}(\eta, s) = \frac{1}{\sigma(\eta)} \Psi [z(\eta), r_{\perp}(s, \eta)] \exp \left(-\frac{is^2}{2} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \eta} \right) \quad (7.3)$$

перенесем точку $z_{\text{сф}}$ на бесконечность, перейдя от уравнения (7.1) к уравнению

$$\Delta_{\perp, s} \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} + \frac{s^2}{\Phi(\eta)} \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0, \quad (7.4)$$

где функции $\Phi(\eta)$, $z(\eta)$ и $\sigma(\eta)$ связаны между собой равенствами:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\eta^2} = \frac{\sigma}{\Phi}. \quad (7.5)$$

$$z - z_{\text{сф}} = -\tilde{\sigma}/\sigma, \quad (7.6)$$

где σ и $\tilde{\sigma}$ — два линейно независимых решения (7.5) с вронскианом $\sigma' \tilde{\sigma} - \sigma \tilde{\sigma}' = 1$ и $\sigma \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Перенос точки нелинейного фокуса на бесконечность означает, что функция $\tilde{\Psi}$ является регулярной и отличной от нуля на всей оси η . Это возможно, если функция $\Phi(\eta)$ такова, что $\sigma(\eta)$ имеет такую же особенность при $\eta \rightarrow \infty$, как и $\Psi(z, 0)$ при $z \rightarrow z_{\text{сф}}$. Из вида уравнения (7.4) очевидно, что существование функции $\tilde{\Psi}$ с такими свойствами возможно только при достаточно быстром стремлении коэффициента $s^2/\Phi(\eta)$ к нулю, при этом функция $\tilde{\Psi}$ будет приближаться по своей структуре к однородному пучку — решению уравнения

$$\Delta_{\perp, s} \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0.$$

Построение такого решения осуществим, считая параметр $[\Phi(\eta)]^{-1}$ малым. Перепишем уравнение (7.4) в виде двух уравнений для действительных величин: амплитуды A и фазы φ . Полагая $\tilde{\Psi} = A \exp(-i\varphi)$ и ограничиваясь рассмотрением аксиально-симметричного случая, получим:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial A}{\partial s} - A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 - 2A \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + A^3 + \frac{s^2}{\Phi(\eta)} A = 0, \quad (7.7)$$

$$\tilde{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\tilde{A}}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + 2 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \eta} = 0. \quad (7.8)$$

Последнее равенство удобно переписать в виде

$$\tilde{A} \frac{\partial \varphi}{\partial s} s = - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^s \tilde{A}^2 t dt. \quad (7.9)$$

Будем строить функции \tilde{A} и φ в виде многочленов по степеням малой величины $[\Phi(\eta)]^{-1}$

$$\tilde{A} = A_0(s) + \frac{A_1(s)}{\Phi(\eta)} + \frac{A_2(s)}{\Phi^2(\eta)} + \dots, \quad (7.10)$$

$$\varphi = h_0 \Phi(\eta) + \varphi_0 + \frac{\varphi_1(s)}{\Phi(\eta)} + \frac{\varphi_2(s)}{\Phi^2(\eta)} + \dots. \quad (7.11)$$

Подставляя разложения (7.10), (7.11) в (7.7), (7.9) и приравнивая члены с нулевой степенью $1/\Phi$, получим уравнение для определения функции A_0

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_0}{\partial s} - 2A_0 h_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + A_0^3 = 0, \quad (7.12)$$

решение которого должно совпадать с решением, описывающем поперечную структуру однородного пучка

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_0}{\partial s} - 2A_0 h_0 + A_0^3 = 0,$$

что возможно при отсутствии зависимости h_0 от координаты s и пропорциональности Φ и η . Для простоты предположим, что в старшем по η порядке $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 1$. Тогда, приравнивая, после подстановки (7.10), (7.11) в (7.7), (7.9), члены с высшими степенями Φ^{-1} , получим систему уравнений для определения функций A_i

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_1}{\partial s} - 2A_1 h_0 + 3A_0^2 A_1 + s^2 A_0 = 0, \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_2}{\partial s} - 2A_2 h_0 + 3A_0^2 A_2 + 3A_1^2 A_0 + s^2 (2A_0 \varphi_1 + A_1) = 0, \quad (7.14)$$

и т. д.

и функций φ , причем оказывается, что функции φ_0, φ_1 от координаты s не зависят, а φ_2 определяется равенством

$$A_0^2(s) \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} s = \int_0^s 2A_0(t) A_1(t) t dt. \quad (7.15)$$

Уравнения (7.12)–(7.14) имеют ограниченные на всей координатной оси s решения. Подставляя их в уравнение (7.4), найдем асимптотическое решение, удовлетворяющее условию конечности поля и отличию его от нуля на оси s . Однако оно имеет тот недостаток, что в его структуру не входят начальные условия для поля Ψ . Для удовлетворения начальным данным функцию Φ^{-1} представим в виде

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{C_1}{\eta} + \frac{C_2}{\eta^2} + \frac{C_3}{\eta^3} + \dots,$$

где C_i — действительные числа. Тогда в уравнения для A_i и φ_i войдут коэффициенты C_i , за счет выбора которых можно удовлетворить начальным условиям.

При такой зависимости Φ от η погонный коэффициент радиационного затухания квазилокализованного пучка, приближенно пропорциональный квадрату амплитуды на внешней каустике, мал и равен $\approx \exp \left[-2 \left(\frac{8}{\pi} \eta \right)^{1/2} \right]$. Поскольку $\int \exp \left[-2 \left(\frac{8}{\pi} \eta \right)^{1/2} \right] d\eta$ сходится, то полный коэффициент затухания будет ограничен, что необходимо для формирования при $\eta \rightarrow \infty$ однородного пучка с конечной мощностью.

В первом порядке по величине η^{-1} запишем ВКБ-решения уравнения (7.5) в виде

$$\sigma = \eta^{1/4} \exp(2\eta^{1/2}), \quad \tilde{\sigma} = \eta^{1/4} \exp(-2\eta^{1/2}). \quad (7.16)$$

Используя равенство (7.6), найдем связь между z и η

$$\eta^{1/2} = -\frac{\ln(z_{\text{сф}} - z)}{4}$$

и формулу, определяющую поведение поля вблизи нелинейного фокуса:

$$\Psi(0, z) \approx \Psi_0 \left[\frac{-\ln(z_{\text{сф}} - z)}{z_{\text{сф}} - z} \right]^{1/2}, \quad (7.17)$$

где $\Psi_0 - \text{const}$. В этом порядке поведение поля не зависит от начальных условий (коэффициентов C_i). Впервые из физических соображений формула (7.17) была получена в [32].

Структура поля вблизи особенности имеет вид:

$$\Psi \approx \left[\frac{-\ln(z_{\text{сф}} - z)}{z_{\text{сф}} - z} \right]^{1/2} \Psi_{\text{одн}} \left(r_{\perp} \left[\frac{-\ln(z_{\text{сф}} - z)}{z_{\text{сф}} - z} \right]^{1/2} \right) \times \exp \left[\frac{ir_{\perp}^2 - \ln(z_{\text{сф}} - z)}{2(z_{\text{сф}} - z)} \right], \quad (7.18)$$

где $\Psi_{\text{одн}}$ — структура однородного пучка.

Используя формулу (7.17), можно асимптотически при $z \rightarrow z_{\text{сф}}$ оценить величину интеграла распада $B \approx \int |\Psi|^2 dz$, играющего определяющую роль в различных нелинейных процессах

$$B \approx |\Psi_0|^2 \ln^2(z_{\text{сф}} - z)^2.$$

При приближении к фокусу он расходится.

Оценим с помощью полученной формулы достигаемую в фокальной точке амплитуду поля в случае ограничения последней многофотонным поглощением и вынужденным рассеянием. Оценки можно приближенно сделать, предполагая независимость скоростей возрастания полей из-за самофокусировки и убывания их из-за ограничивающего эффекта. Величину максимума найдем, приравнявая эти скорости друг другу. В случае N -фотонного поглощения, когда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon' |E|^2 + i\varepsilon''_{2N-2} |E|^{2N-2} \right),$$

поле в фокусе E_f не ограничено при $N < 2$ и конечно при $N > 2$

$$E_f^2 \approx \frac{1}{\varepsilon'} (\Psi_0)^{-2t} \left[\frac{(\varepsilon')^{N-1}}{\varepsilon''_{2N-2} \Psi_0} \right]^t, \quad t = \frac{1}{N-2}.$$

Для трехфотонного поглощения ($N = 3$) определенное таким образом поле E_f находится в количественном согласии с численными результатами работы [87]. Для двухфотонного поглощения или вынужденного рассеяния при условии выхода на асимптотику (7.17), для чего необходимо $\varepsilon' \gg \varepsilon''_2$, получается значение $E_f^2 \gg 1/\varepsilon'$, что выходит за рамки применимости исходного уравнения (7.1). При сравнимых значениях ε' и ε''_2 ограничение поля возникает до выхода на асимптотику (7.17).

Особым случаем является равенство величины $\Phi^{-1} \equiv 0$, когда $P = P_{кр}$ и изменение поля в фокусе описывается выражением

$$\Psi \approx \frac{1}{z_{сф} - z} \Psi_{одн} \left(\frac{r_{\perp}}{z_{сф} - z} \right) \exp \left[\frac{ir_{\perp}^2}{2(z_{сф} - z)} \right]. \quad (7.19)$$

Если $P > P_{кр}$, то по мере приближения к фокусу $z_{сф}$ поле растет сначала как $(z_{сф} - z)^{-1}$, но в самой окрестности $z_{сф}$ закон роста изменяется на $[-\ln(z_{сф} - z)/(z_{сф} - z)]^{1/2}$, причем чем меньше превышение $P/P_{кр}$, тем ближе к точке $z_{сф}$ происходит это изменение.

В гл. 6 были найдены автомодельные решения нелинейных параболических уравнений, имеющие особенность, причем у решений с бесконечной мощностью амплитуда поля вблизи особенности $\Psi \approx (z_{сф} - z)^{-1/2}$, а у других, с мощностью, равной мощности таунсова пучка, $\Psi \approx (z_{сф} - z)^{-1}$. Таким образом, для произвольных надкритических пучков рост амплитуды поля в точке $z_{сф}$ близок к росту амплитуды автомодельных пучков с неограниченной мощностью.

Отметим, что вблизи фокальной точки в координатах s и η формируется структура с плоским при малых s фазовым фронтом, причем мощность в полосе с фиксированным, но достаточно большим s , остается конечной и приближенно равной $P_{кр}$. Это значит, что при найденном законе возрастания поля в координатах r_{\perp} и z вблизи точки $z_{сф}$ безабберационно концентрируется конечная мощность порядка $P_{кр}$. Поэтому самофокусировка аксиально-симметричных пучков может быть отнесена к сильному коллапсу. Его лучевая структура показана на рис. 7.1 для случая образования двух фо-

кальных точек $z_{сф}^{(1)}$ и $z_{сф}^{(2)}$ (многофокусная картина, см. гл. 5). Присутствие участка по координате s , на котором поле экспоненциально убывает, обеспечивает быстрое спадание поля после $z_{сф}^{(1)}$.

Проведенное рассмотрение может быть обобщено и на другие случаи сильного коллапса (см. конец пп. 6.2, 6.6) при связи $Ds = 2$ размерности поперечного лапласиана D с показателем нелинейности s

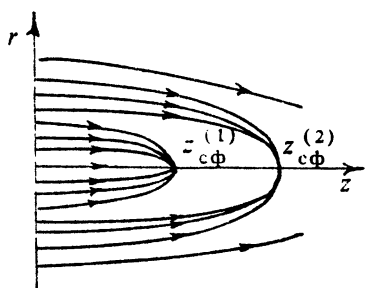


Рис. 7.1. Лучевая структура самофокусировки аксиально-симметрично-го пучка

$$\Psi|_{z \rightarrow z_{\text{сф}}} \approx \sigma^{D/2} \approx \left[\frac{-\ln(z_{\text{сф}} - z)}{z_{\text{сф}} - z} \right]^{D/4}.$$

Выше был изложен один из методов нахождения поля вблизи особенности. Впервые асимптотический ряд для поля был построен в работе [45]. Действуя по аналогии с работой [181], где рассматривалась особенность в действительном нелинейном параболическом уравнении

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi + \Psi^3 = 0,$$

возникающем в теории плоских потоков жидкости, автор работы [45] пришел к формуле (7.17).

Существует ряд работ [178–180], где получено несколько другое выражение для поля вблизи $z_{\text{сф}}$:

$$\Psi \approx \left\{ \frac{\ln[-\ln(z_{\text{сф}} - z)]}{z_{\text{сф}} - z} \right\}^{1/2}. \quad (7.20)$$

Однако сделанные в этих работах дополнительные предположения о поперечной структуре пучка вблизи особенности, приводящие в конечном итоге к выражению (7.20), сами вызывают серьезные возражения, на разборе которых останавливаться не будем.

7.2. Коллапс в трехмерном случае

В трехмерном случае (оператор Δ действует по трем координатам), как показано в работе [162] и гл. 6, также имеет место коллапс. В этом случае уравнение

$$\Delta_3 \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (7.21)$$

является модельным для коллапса ленгмюровских волн [33].

В отличие от самофокусировки аксиально симметричных пучков коллапс в трехмерном случае ($D = 3$) проходит две стадии: дофокальную и фокальную. На первой образуется структура поля, энергия которой поглощается на второй стадии. Дофокальная стадия подробно исследована в работах [161, 179, 182]. В них найдена структура поля, которая формируется, и определены ее основные свойства.

Для описания этой структуры воспользуемся преобразованием (7.2), (7.3) с соответствующей заменой обозначений ($r_{\perp} \rightarrow s$, $z \rightarrow t$) и

получим следующее уравнение для преобразованной функции $\tilde{\Psi}$:

$$\Delta_3 \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} + \frac{s^2}{\Phi} \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} + \frac{i}{\tilde{\Phi}} \tilde{\Psi} = 0, \quad (7.22)$$

где $1/\Phi = \sigma''/\sigma'$ и $1/\tilde{\Phi} = \sigma'/\sigma$. Это уравнение при заданных положительных постоянных значениях Φ и $\tilde{\Phi}$, связанных между собой, имеет решение вида

$$\tilde{\Psi} = R \exp(-i h \eta), \quad (7.23)$$

где h — действительное число, а $R(s)$ — комплексная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_3 R - 2hR + \frac{s^2}{\Phi} R + |R|^2 R + \frac{i}{\tilde{\Phi}} R = 0 \quad (7.24)$$

и условию

$$R|_{s \rightarrow \infty} \approx \frac{A^0}{s} \exp\left(-i \frac{s^2}{2\Phi^{1/2}}\right), \quad (7.25)$$

причем $A^0 = \text{const}$. Такое решение существует только при определенных значениях h и $R(0)$, комбинация которых и является собственным значением задачи (7.24), (7.25). В [1] найдена такая комбинация при $\Phi = 16$ и $\tilde{\Phi} = 4$: $2h = 0,545$ и $R(0) = 1,39$. В этом решении усиление, описываемое слагаемым $\frac{i}{\tilde{\Phi}} \tilde{\Psi}$, уравновешивается излу-

чательным затуханием, имеющим место из-за члена $\frac{s^2}{\Phi(\eta)} \tilde{\Psi}$. В работах [161, 50, 179, 182] показано, что такое решение действительно описывает особенность.

Из равенств (7.2), (7.3) и наличия описанного выше решения следует, что поле вблизи фокальной точки растет как

$$\Psi \approx \frac{1}{(t_{\text{сф}} - t)^{1/2}}. \quad (7.26)$$

В полосе с фиксированным значением s в координатах s и η вблизи оси u этого решения имеется конечный поток мощности. При переходе к координатам r и t оказывается, что поток мощности, который фокусируется безабберационно в точку $t_{\text{сф}}$ и поглощается или рассеивается там, стремится к нулю. Поэтому в некоторых работах коллапс такого типа получил название слабого [161]. Картина пространственно-временных лучей в случае трехмерного коллапса ($D = 3$) иллюстрируется рис. 7.2. Они при $r \neq 0$ остаются ориентиро-

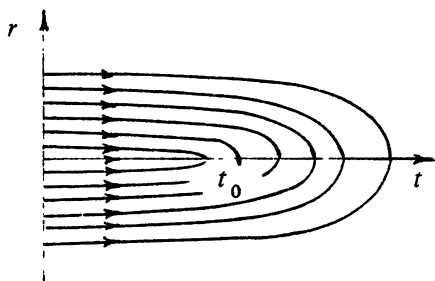


Рис. 7.2. Лучевая структура распределенного коллапса

чии стационарного по t потока энергии к сингулярности. Эти решения описываются уравнением

$$-2i \Psi'_t + \frac{D-1}{r} \Psi'_r + \Psi''_{rr} + |\Psi|^{2s} \Psi = 0. \quad (7.27)$$

Для стационарных во времени процессов $\Psi = \Psi_0 \exp(i \Omega t)$ уравнение (7.27) приводится к виду

$$2 \Omega \Psi_0 + \frac{D-1}{r} \Psi'_{0r} + \Psi''_{0rr} + |\Psi_0|^{2s} \Psi_0 = 0. \quad (7.28)$$

Полагая $2 \Omega = \chi_0^2 > 0$, рассмотрим решение уравнения (7.28) типа сходящихся к $r=0$ волн, имеющих при $r \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\Psi_0 \approx r^{-(D-1)/2} \exp(i \chi_0 r), \quad \chi_0 > 0. \quad (7.29)$$

Подставляя в (7.28) искомое решение в виде

$$\Psi_0 = U(r) r^{-(D-1)/2} \exp[-i\phi(r)], \quad (7.30)$$

для определения действительных функций U и ϕ получаем систему уравнений

$$U^{2s} r^{-(D-1)s} + \chi_0^2 = \phi_r'^2 - U''_{rr}/U + (D-1)(D-3)/4r^2, \quad (7.31)$$

$$(U^2 \phi_r')'_r = 0, \quad (7.32)$$

где согласно уравнению (7.29) $\phi_r' \rightarrow -\chi_0$ при $r \rightarrow \infty$. Полагая $U^2 \phi_r' = C = \text{const}$, что соответствует постоянству радиального потока энергии в искомом решении, для определения амплитудного распределения U имеем уравнение

$$U''_{rr} + U [\chi_0^{2s} + U^2 r^{-(D-1)s} - C^2/U^4 - (D-1)(D-3)/4r^2] = 0. \quad (7.33)$$

ванными к оси и после возникновения особенности. Это значит, что и поток энергии остается направленным к оси.

Для описания структуры поля в окрестности особенности на фокальной стадии коллапса волнового пучка рассмотрим симметричные решения уравнения (6.31) при произвольной размерности D , показателе степени s и наличии

При $D = 1$ и $D = 3$ последнее слагаемое в (7.33) исчезает.

В одномерном случае $D = 1$ уравнение (7.33) не имеет сингулярных решений, удовлетворяющих при $r \rightarrow 0$ условиям

$$U|_{r \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad U'|_{r \rightarrow 0} < 0, \quad U''|_{r \rightarrow 0} > 0.$$

Поэтому коллапс одномерных полей в случае высокой степени нелинейности $s > 2$ не приводит к существованию протяженной по времени сингулярности в зафокальной области и протекает в соответствии со сценариями, описанными в работах [54, 183].

В трехмерном случае ($D = 3$) для кубической нелинейности ($s = 1$) существует сингулярное решение, отвечающее условию $U \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Чтобы найти его асимптотику в окрестности $r \approx 0$, введем в уравнение (7.33) новые переменные:

$$\rho = |C|r, \quad \xi = -1 / \ln \rho, \quad \chi = \chi_0 / |C| \quad (7.34)$$

и перепишем это уравнение в виде

$$\xi^4 U''_{\xi\xi} + (2\xi^3 - \xi^2) U'_{\xi} + U \left(\chi^2 \rho^2 + U^2 - \frac{\rho^2}{U^4} \right) = 0. \quad (7.35)$$

При $\rho = \exp(-1/\xi) \rightarrow 0$ в уравнении (7.35) можно пренебречь слагаемыми, содержащими ρ^2 . Решение оставшегося уравнения

$$\xi^4 U''_{\xi\xi} + (2\xi^3 - \xi^2) U'_{\xi} + U^3 = 0 \quad (7.36)$$

в окрестности точки $\xi = 0$ ($\rho = 0$) будем искать в виде

$$U = (\xi/2)^{1/2} (1 + q). \quad (7.37)$$

Подстановка (7.37) в (7.36) и оставление основных слагаемых по $q \ll 1$ приводит к уравнению

$$\xi q' - q - \frac{3}{4} \xi = 0, \quad (7.38)$$

имеющему решение $q = \frac{3}{4} \xi \ln \xi$. Итак, в трехмерном случае сингулярное решение (7.34) существует и описывается функциями

$$U(r) = \frac{1}{(-2 \ln |C|r)^{1/2}} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{\ln(-\ln |C|r)}{\ln |C|r} + \dots \right], \quad (7.39)$$

$$\varphi(r) = - \int \frac{|C|}{U^2} dr \approx 2^{1/2} |C|r (\ln |C|r - 1). \quad (7.40)$$

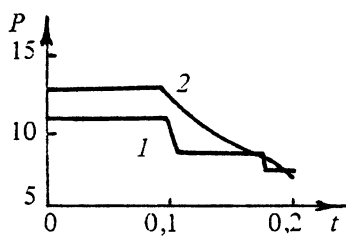
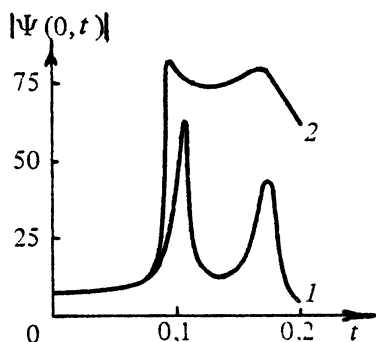


Рис. 7.3. Зависимость амплитуды поля в центре сгустка от времени при: 1 – самофокусировке аксиально-симметричного пучка, 2 – распределенном коллапсе.

Рис. 7.4. Зависимость от времени: 1 – мощности в случае самофокусировки аксиально-симметричного пучка, 2 – энергии в случае распределенного коллапса

Константа $|C|$ определяется плотностью потока энергии $U^2 \varphi_r'$, подтекающей к особенности поля.

Предыдущее рассмотрение носит в значительной степени описательный характер. Однако оно подтверждается и прямым численным экспериментом.

Чтобы избежать трудностей интегрирования консервативного уравнения (7.32) при $t > t_{\text{сф}}$, предположим, что в среде имеется многофотонное поглощение, ограничивающее интенсивность на некотором уровне. Соответствующим подбором параметров можно добиться того, чтобы это поглощение локализовалось в малой окрестности точки $r = 0$, что достаточно хорошо имитирует условия стока энергии в особенность поля. Уравнение (7.21) заменим следующим ($D = 3, s = 1$):

$$-2i \Psi_t' + \frac{2}{r} \Psi_r' + \Psi_{rr}'' + |\Psi|^2 \Psi + i\gamma |\Psi|^{2N-2} \Psi = 0, \quad (7.41)$$

которое будем интегрировать при достаточно малых значениях γ и высоких значениях $(2N - 2) > 0$. На рис. 7.3 показана зависимость амплитуды в точке $r = 0$ от времени t при $2N - 2 = 8, \gamma = 3,9 \cdot 10^{-11}$ и начальной структуре $\Psi(r, 0) = 7 \cdot \exp(-1,25r^2)$. Для сравнения там же приведена аналогичная зависимость для двумерного коллапса ($D = 2$) при том же начальном условии. Видно, что трехмерный коллапс имеет распределенный во времени, а двумерный – типичный многофокусный характер. Полная энергия трехмерного сгустка убывает вследствие поглощения в окрестности $r = 0$ монотонно в отличие от ступенчатого изменения энергии двумерного сгустка (рис. 7.4).

Представляет интерес исследование устойчивости дофокальной стадии коллапса. Можно непосредственным численным моделированием показать, что несимметричные возмущения при трехмерном коллапсе в кубичной среде особенностью не захватываются. Для иллюстрации этого представим коллапсирующее решение уравнения (7.21) на дофокальной стадии в виде суммы сферических гармоник (в координатах r, θ, φ)

$$\Psi = \sum_{ml} \Psi^{(ml)}(r, t) Y_{ml}(\theta, \varphi), \quad (7.42)$$

где $\Psi^{(ml)}(r, t)$ — радиальная функция поля, $Y_{ml}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi$ — сферические гармоники и m — азимутальный и l — полярный индексы.

Будем предполагать, что структура поля вблизи особенности близка к сферически симметричной, так что амплитуды всех гармоник, кроме $Y^{(0,0)}$, малы. Благодаря этому в уравнениях для гармоник, получающихся после подстановки (7.42) в (7.21), можно пренебречь квадратом амплитуд всех гармоник, кроме основной. Амплитуды $\Psi^{(s_2)}$ оказываются связанными между собой системой уравнений, которая описывает действие мощной гармоники на остальные. При этом амплитуда основной гармоники описывается нелинейным уравнением, а слабых гармоник — линейными уравнениями с переменными коэффициентами. Эта система аналогична системе, использовавшейся для исследования неустойчивости самофокусирующегося пучка (см. гл. 4). В эти уравнения входит только полярный индекс l — следствие симметрии основной гармоники и выбора Ψ в виде (7.42). Рассмотрим поведение низших гармоник при $l=1, 2$. Гармоника $l=1$ может быть исключена из рассмотрения выбором системы координат. Ее отличие от нуля говорит о том, что координата коллапса не совпадает с началом координат $r=0$.

Результаты расчетов амплитуд гармоник показаны на рис. 7.5 и 7.6 для начального распределения

$$\Psi^{(0,0)}(r, 0) = \tilde{A} \exp(-r^2/2), \quad \Psi^{(0,2)}(r, 0) = r^2 \exp(-r^2/2).$$

Коллапс основной гармоники возникает при $\tilde{A} > 2,1$ (рис. 7.5). На начальном участке развития коллапса амплитуда моды $\Psi^{(0,2)}$ меняется, но затем, начиная с некоторого момента, фиксируется. Энергия (мощность) $P_2 = \int |\Psi^{(0,2)}|^2 dv$ при $\tilde{A} < 3$ не возрастает, при больших значениях \tilde{A} она увеличивается, но полный коэффициент усиления $K = P_2(t)/P_2(0)$ остается конечным, что показано на рис. 7.6. Это

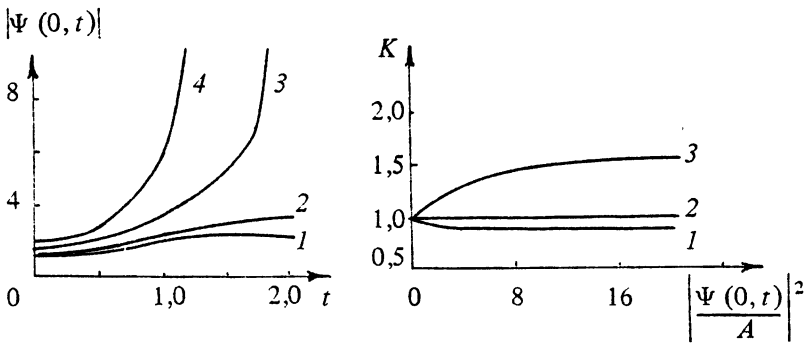


Рис. 7.5. Зависимость амплитуды поля в центре каверны от времени в случае распределенного коллапса при различных начальных амплитудах поля: 1 — $A = 2,0$; 2 — $A = 2,1$; 3 — $A = 2,25$; 4 — $A = 2,3$.

Рис. 7.6. Зависимость коэффициента усиления второй гармоники от интенсивности поля в центре каверны от времени в случае распределенного коллапса при различных начальных амплитудах поля: 1 — $A = 2,1$; 2 — $A = 3$; 3 — $A = 5$

свидетельствует об устойчивости трехмерного симметричного коллапса к возмущениям, нарушающим его симметрию.

Таким образом, трехмерный коллапс носит принципиально распределенный во времени характер. Диссипация энергии начального волнового пучка происходит не на фокальной стадии, а после возникновения особенности, которая служит стоком энергии пучка. В реальных средах поглощение энергии в центре сгустка обусловлено либо нелинейной, либо высокочастотной диссипацией. При несимметричных начальных условиях образующиеся коллапсирующие волновые сгустки будут симметризоваться (симметричные возмущения имеют более высокие инкременты) и выгорать преимущественно на фокальной ($t > t_{\text{сф}}$) стадии. Эффект распределенного во времени коллапса в рамках нелинейного уравнения Шредингера с локальной нелинейностью лишь внешне похож на эффект воронки, описанный для коллапса ленгмюровских волн [184]: последний требует особенности поля в окрестности $r \approx 0$ более сильной, чем $1/r^2$, что в трехмерном коллапсе не реализуется; здесь, как ясно из выражения (7.39) и результатов исследования устойчивости, особенность более слабая и высшие гармоники не захватываются, в то время как в воронку затягиваются все возмущения.

Обобщая результаты на произвольные значения D и s , можно сказать, что в закритическом случае $Ds > 2$ коллапс носит распределенный характер. Длительность по t существования особенности зависит от начального профиля волнового пучка, его энергии и

величины параметра $Ds = 2$. В критическом случае ($Ds = 2$) вся стадия поглощения сжимается к точке $t = t_{\text{сф}}$: коллапс становится мгновенным. При значительном превышении P над $P_{\text{кр}}$ лучевая картина носит многофокусный характер с поглощаемой в каждом фокусе энергией $P_{\text{кр}}$. При незначительном отклонении от критического случая ($Ds \geq 2$) можно ожидать возникновения в центре сгустка серии поглощающих особенностей конечной длительности ("многонитевая" структура особенности), которые сольются во времени при увеличении параметра Ds . Что касается поглощенной мощности первоначального пучка, то принципиальной разности между критическим $Ds = 2$ и закритическим $Ds > 2$ случаями нет. В обоих случаях поглощение происходит на стадии $t > t_{\text{сф}}$: в критическом случае — мгновенными порциями $P_{\text{кр}}$, в закритическом — непрерывно или серией вспышек конечной длительности. Это подтверждено численными расчетами в работе [50].

7.3. Структура поля вблизи фокальной точки в непараксиальном приближении

Выше было показано, что при распространении волновых пучков в нелинейной кубичной среде, когда поляризация P связана с напряженностью поля E следующим образом $P = \alpha_1 E + A |E|^2 E + (B/2)(EE)E^*$, где α_1 , A и $B/2$ характеризуют линейную и нелинейную поляризуемость среды (см. выше гл. 2), при превышении мощности над критической образуются фокальные точки, поле в которых в параксиальном приближении обращается в бесконечность. Учет непараксиальных членов приводит к ограничению поля в этих точках. Это отмечалось в работах [185–187]. Ограничение поля в фокальной точке в непараксиальном случае является следствием возрастания критической мощности пучка при уменьшении его поперечного сечения (см. выше гл. 3).

Ниже излагаются результаты расчетов поля в простейшем случае вращающегося пучка $E = E_m \exp(im\phi)$. В цилиндрической системе координат r, ϕ, z для полей $E^+ = (E^r + iE^\phi)/2^{1/2}$, $E^- = (E^r - iE^\phi)/2^{1/2}$, E^z (см. гл. 2) имеем следующую систему уравнений:

$$\Delta_r E^- - \frac{(m-1)^2}{r^2} E^- + \frac{\partial^2 E^-}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial E^-}{\partial z} =$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{E^+ + E^-}{2} \right) - \frac{m}{r} \frac{E^- + E^+}{2} - ik_0 \frac{E^z}{2^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}} \frac{\partial E^z}{\partial z} \right] + \\
& + 4\pi k_0^2 A |E_m^+|^2 E^- + 2\pi k_0^2 B (E_m E_m) E_m^{+*} = 0, \tag{7.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta_r E^+ - \frac{(m+1)^2}{r^2} E^+ + \frac{\partial^2 E^+}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial E^+}{\partial z} - \\
& - \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{E^+ + E^-}{2} \right) - \frac{m}{r} \frac{E^- + E^+}{2} - ik_0 \frac{E^z}{2^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}} \frac{\partial E^z}{\partial z} \right] + \\
& + 4\pi k_0^2 A |E_m|^2 E^- + 2\pi k_0^2 B (E_m E_m) E_m^{*-} = 0, \tag{7.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\Delta_r - \frac{m^2}{r^2} \right) E^z + ik_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{E^+ + E^-}{2^{1/2}} \right) - \frac{m}{r} \frac{E^- + E^+}{2^{1/2}} \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{E^+ + E^-}{2^{1/2}} \right) - \frac{m}{r} \frac{E^- + E^+}{2^{1/2}} \right] + k_0^2 E^z + \\
& + 4\pi k_0^2 A |E_m|^2 E^z + 2\pi k_0^2 B (E_m E_m) E^{z*} = 0, \tag{7.45}
\end{aligned}$$

где $\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$, k_0 — волновое число, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

В качестве главного решения возьмем E^- . Переходя к безразмерным переменным $r_6 = r/a$, $z_6 = (k_0 a^2)^{-1} z$, где a — полуширина пучка на входе в среду, опуская в дальнейшем индекс 6, в первом приближении по малому параметру $\mu = 1/(k_0 a)$ будем иметь квазиоптическое приближение для поля E^- . Интерес представляет поле с азимутальным индексом $m = 1$, имеющее максимум E^- на оси. Оно описывается уравнением

$$\begin{aligned}
& \left(\Delta_r - 2i \frac{\partial}{\partial z} + \delta |E^-|^2 \right) E^- = 0 \tag{7.46} \\
& (\delta = 4\pi k_0^2 a^2 A).
\end{aligned}$$

В этом приближении в поле имеется компонента E^z

$$E^z \approx - \frac{i\mu}{2^{1/2}} \frac{\partial E^-}{\partial r}. \tag{7.47}$$

Компонентой E^+ , которая имеет более высокий порядок μ^2 , пренебрежем. Выпишем, следуя гл. 2, уравнение, описывающее

самофокусировку более строго по сравнению с приближением параболического уравнения. Для этого из системы (7.46), (7.47) найдем $\frac{\partial^2 E^-}{\partial z^2}$ и E^z и подставим их в уравнение (7.43). Пренебрегая членами высших порядков по μ (в том числе и E^+), получим для E^-

$$\begin{aligned} \Delta_r E^- - 2i \frac{\partial E^-}{\partial z} + \delta |E^-|^2 E^- - \frac{\mu^2}{4} \left[\Delta_r (\Delta_r E^- + \delta |E^-|^2 E^-) + \right. \\ \left. + 2\delta |E^-|^2 (\Delta_r E^- + \delta |E^-|^2 E^-) - \delta E^{-2} (\Delta_r E^{-*} + \delta |E^-|^2 E^{-*}) \right] + \\ \left. + \left\{ \frac{\mu^2 \delta}{2} \left| \frac{\partial E^-}{\partial r} \right|^2 E^- + \frac{\mu^2 \delta}{2^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(E^- \frac{\partial}{\partial r} |E^-|^2 \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Члены порядка μ^2 в квадратных скобках являются следствием учета продольной диффузии $\frac{\partial^2 E^-}{\partial z^2}$, остальные обусловлены существованием компоненты E^z и отличием дивергенции поля E от нуля (см. гл. 2). Уравнение описывает поля, имеющие более широкий угловой спектр по сравнению с полями, подчиняющимися параболическому уравнению. В нем, однако, не учитываются встречные, а также экспоненциально растущие или затухающие по z в среде без потерь волны. Численное решение (7.48) проще решения волнового уравнения, в котором имеются трудности с постановкой условий излучения, имеется неустойчивость, связанная с наличием встречных волн (см. гл. 4), а также вычислительная неустойчивость из-за упомянутых экспоненциальных волн.

Приведем результаты численного решения (7.48), характеризующие зависимость структуры поля в фокальной точке от мощности и ширины гауссова пучка, полученные с использованием адаптивной схемы, описанной в п. 7.4 этой главы. Учет непараксиальности приводит к ограничению поля в фокальной точке. На рис. 7.7 показана зависимость амплитуды поля на оси и от продольной координаты z для $k_0 a = 1/\mu = 200$ и входном пучке $\delta^{1/2} E^-(r, 0) = 4 \exp(-r^2/2)$ с мощностью $P = 4,3 P_{\text{кр}}^-$, где $P_{\text{кр}}^- = P_{\text{кр}} (1 + B/2A)$ — критическая мощность пучка с круговой поляризацией в параболическом приближении. Амплитуда пучка достигает максимума в некоторой точке z_{max} .

Ширина пучка в фокальной точке $2a_{\text{ф}}/\lambda$ по уровню e^{-1} по мощности, нормированная на длину волны λ в линейной среде, а также протяженность фокальной области L/λ по уровню половинной

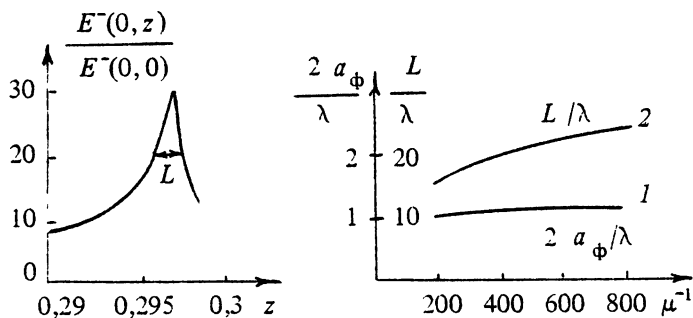


Рис. 7.7. Зависимость поля на оси от продольной координаты при $k_0 a = 1/\mu = 200$ и $P = 4,3P_{\text{кр}}^-$.

Рис. 7.8. Зависимость при $P = 4,3P_{\text{кр}}^-$ от начальной ширины пучка $k_0 a = 1/\mu$:
1 — ширины поля в фокальной точке, 2 — протяженности фокальной области

мощности как функции начальной ширины пучка приведены на рис. 7.8. Ширина пучка $\approx 1,1 \lambda$, а протяженность поля $\approx 20 \lambda$, что существенно больше протяженности поля в линейной среде пучка той же ширины. На рис. 7.9 изображены зависимости относительного увеличения проницаемости $\Delta \epsilon = (4\pi A |E^-|^2)/(1 + 4\pi \alpha_l)$ в максимум

ме и интеграла распада $B \approx k_0 \int_0^{z_{\text{max}}} |E^-|^2 dz$, представляющие интерес для развития нелинейных процессов, как функции начальной ширины. Величина B достигает больших значений $B \approx 50$.

На рис. 7.10 показана зависимость $\Delta \epsilon$ и B от превышения мощности пучка над $P_{\text{кр}}^-$ при $k_0 a = 1/\mu = 200$. Приращение $\Delta \epsilon$ увеличивается с ростом мощности пучка и достигает таких значений, что приближение кубичной нелинейности становится неприменимым.

Решение уравнения (7.48) без учета продольной компоненты поля E^z — члены в фигурных скобках в (7.48) — показало, что ограничение поля в нелинейном фокусе в этом случае самофокусировки пучка с вращающейся поляризацией происходит на более высоком (в несколько раз) уровне. Это следствие расфокусирующего характера добавочной нелинейной проницаемости, возникающей благодаря компоненте E^z .

Найденное ограничение амплитуды поля в нелинейном фокусе показывает, что формула (7.17) применима только при больших начальных ширинах пучка $k_0 a \approx 10^3$.

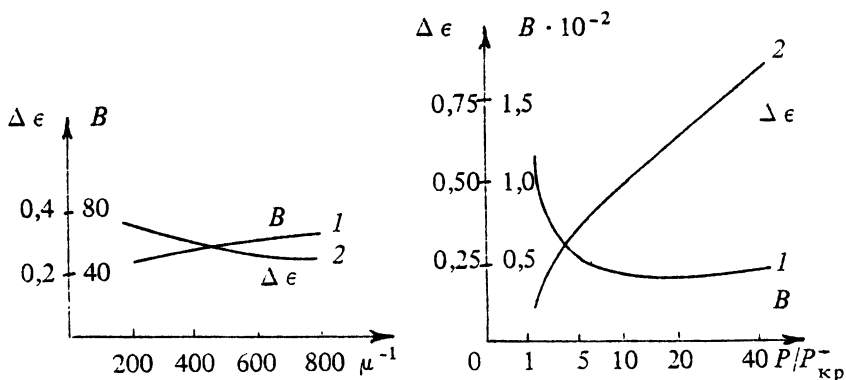


Рис. 7.9. Зависимость при $P = 4,3P_{кр}^-$ от начальной ширины пучка $k_0 a = 1/\mu$: 1 — интеграла распада, 2 — изменения диэлектрической проницаемости $\Delta \epsilon$.

Рис. 7.10. Зависимость от мощности при начальной ширине пучка $k_0 a = 1/\mu = 200$: 1 — интеграла распада, 2 — изменения диэлектрической проницаемости $\Delta \epsilon$

Параметры рассмотренных пучков с круговой поляризацией определяются только коэффициентом нелинейности A . Для пучков с линейной поляризацией в уравнение, аналогичное (7.52), войдут не только коэффициент A , но и коэффициент B , так что ширина пучка будет функцией вида нелинейности. В этом случае в непараксиальном приближении необходимо учитывать появление пространственных гармоник с различными азимутальными индексами: форма поперечного сечения будет меняться по z [190].

7.4. Об адаптивных схемах для расчета поля в окрестности фокальной точки

Начиная с первых работ нелинейное уравнение Шредингера с кубичной нелинейностью изучалось численным методом. Вначале использовались равномерные сетки по поперечным координатам. Образование особенности потребовало перехода к неравномерным сеткам, плотность которых зависела от поперечных координат, но не зависела от продольной [7, 44]. Это позволило получить ряд сведений об особенности, но не решило проблемы. В более поздних работах использовались схемы, в которых поперечное распределение узлов сетки менялось по мере приближения к фокусу [32, 49, 50, 177, 182], т. е. имели место схемы, приспособляющиеся к результатам вычислений, — адаптивные. Целью было определение закона скорости роста поля, что требовало, кроме неравномерного расположения

точек по поперечной координате, также специальных способов обработки результатов расчетов, поскольку получающийся характер особенности зависел от положения точки $z_{\text{сф}}$, которая была неизвестна. Различные авторы использовали разные принципы построения адаптивных схем.

Одна из первых адаптивных схем использовалась в работе [32]. Она применялась непосредственно к уравнению (7.1) без формальных замен функций и независимых переменных. Интервал интегрирования по координате r разбивался на три субинтервала $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$ и $[r_2, r_k]$. На каждом субинтервале применялись равномерные сетки с числом шагов N_1, N_2 и N_3 и соответствующей величиной шага $h_1 = r_1/N_1$, $h_2 = (r_2 - r_1)/N_2$ и $h_3 = (r_k - r_2)/N_3$. В процессе расчета менялись шаги и точки r_1 и r_2 , но числа N_1, N_2 и N_3 оставались постоянными. Коррекция шагов производилась с использованием трех вспомогательных чисел, одно из них: M_0 — было постоянным, два другие: V_1 и V_2 — менялись в процессе расчета. В процессе численного интегрирования на каждом шаге по z анализировалась вычисленная в точке z амплитуда $|\Psi(r, z)|$. Шаги h_i ($i = 1, 2, 3$) менялись в том случае, если не выполнялось условие

$$\frac{|\Psi(0, z)| - |\Psi(h_1, z)|}{|\Psi(0, z)|} < M_0. \quad (7.49)$$

Коррекция шагов производилась за счет минимально необходимого изменения субинтервалов $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$ для выполнения следующих условий:

$$\frac{|\Psi(0, z)|}{|\Psi(r_1, z)|} \leq V_1, \quad (7.50)$$

$$\frac{|\Psi(0, z)|}{|\Psi(r_2, z)|} \leq V_2. \quad (7.51)$$

Если условие (7.49) выполнялось, то величины h_i оставались неизменными, но вычислялись новые значения величин V_1 и V_2 по формулам

$$\frac{|\Psi(0, z)|}{|\Psi(r_1, z)|} = V_1,$$

$$\frac{|\Psi(0, z)|}{|\Psi(r_2, z)|} = V_2,$$

которые использовались в дальнейшем для корректировки шагов. Таким образом, величина M_0 обеспечивала достаточно малое изменение амплитуды $|\Psi(r, z)|$ вблизи оси, а величины V_1 и V_2 ограничивали отношение амплитуды $|\Psi(0, z)|$ на оси к значению $|\Psi(r, z)|$ в точках скачка величин h_1, h_2 и h_3 .

Для определения скорости роста амплитуды вычислялась при $r = 0$ величина

$$B = \frac{|\Psi|_{zz} |\Psi|}{|\Psi|_z^2}, \quad (7.52)$$

которая является постоянной при любой степенной зависимости $\Psi \approx (z_{\text{сф}} - z)^{-\alpha}$, причем ее значение однозначно связано с показателем степени $B = (\alpha + 1)/\alpha$. Проведенные вычисления показали, что B по мере роста поля приближается к 3 ($\alpha \rightarrow 1/2$) по кривой, которая весьма близка к определяемой из выражения (7.17). Используемая схема при общем числе точек ≈ 300 и приближенно равномерном распределении их между интервалами позволила достичь отношения $R = |\Psi(0, z)/\Psi(0, 0)|^2 \approx 10^6$, при больших превышениях появлялись нерегулярные осцилляции величины B с амплитудой $\approx 0,01$. Выход на асимптотическую формулу осуществлялся при $R > 10^4$.

В работах [177, 43, 191] адаптивная схема строилась путем перехода к так называемым лагранжевым (лучевым) координатам: либо вводилась вместо поперечной координаты r независимая переменная [177]

$$l = \int_0^r |\Psi|^2 r dr, \quad (7.53)$$

либо для определения координат поперечных точек использовалось лучевое уравнение [49, 191]

$$\frac{dr}{dz} = \varphi_r', \quad \text{где } \varphi = \arg \Psi, \quad (7.54)$$

следующее непосредственно из (7.1). В этих адаптивных схемах имеется проблема граничных условий на краю интервала r_k , поскольку фаза пучка при $r = r_k$ меняется довольно сложным образом. Поэтому в [49, 191] для этой граничной точки использовались односторонние производные.

В работе [177] на основе достаточно грубого анализа получено, что при $R \approx 10^4$ поле в фокусе растёт $\approx 1/(z_{\text{сф}} - z)^{1/2}$. В [49, 191] для

определения роста поля была введена величина

$$\tilde{B} = \frac{I_z z I}{I_z^2}, \quad I = \Psi \Psi^*(0, z), \quad (7.55)$$

по смыслу близкая к (7.52): $\tilde{B} = 2^{-1}(B + 1)$. В результате найдено, что $\Psi \approx [f(z_{\text{сф}} - z)] / (z_{\text{сф}} - z)^{1/2}$, где функция f является более медленной, чем $[\ln(z_{\text{сф}} - z)^{-1}]^{1/2}$, и меняется при изменении мощности пучка. Следует отметить, однако, что выделение такой медленной функции, как \ln или $\ln|\ln$ очень сложно и вряд ли может быть проведено без тщательной оценки количественных критериев, подобных (7.52), (7.55) для степенной зависимости $\Psi(z_{\text{сф}} - z)$.

Другой метод адаптации использовался в работе [182]. Путем замены переменных

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{1}{\sigma^2(\eta)}, \quad r_{\perp} = \frac{s}{\sigma(\eta)}, \quad (7.56)$$

$$\tilde{\Psi}(\eta, s) = \frac{1}{\sigma(\eta)} \Psi[z(\eta), r_{\perp}(s, \eta)] \quad (7.57)$$

уравнение (7.1) преобразовывалось к виду*

$$\Delta_{\perp, s} \tilde{\Psi} - 2i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} - 2ia(\eta) \frac{\partial s}{\partial s} \tilde{\Psi} + |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0, \quad (7.58)$$

где

$$a(\eta) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \eta}. \quad (7.59)$$

Функция a в работе [182] для размерности $D = 2$ выбиралась так, чтобы амплитуда $\tilde{\Psi}(0, \eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$ росла или убывала не слишком быстро, например:

$$a(\eta) = -\frac{1}{C_0} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \Psi^2 \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial s} \right)^2 s ds, \quad (7.60)$$

где C_0 — некоторая константа. Чтобы избежать сложности постановки граничных условий, при $s \rightarrow \infty$, использовалась дополнительная замена поперечной переменной s , благодаря которой отрезок $[0 + \infty]$ отображался на полосу $[-1 + 1]$. По скорости приближения $a(\eta)$ к нулю при $\eta \rightarrow \infty$ определялось поведение $\Psi(z_{\text{сф}} - z)$. В резуль-

* Преобразования (7.2), (7.3) и (7.56), (7.57) отличаются только фазовым множителем у преобразуемой функции, что приводит к изменению получающихся уравнений (7.4) и (7.58).

тате применения такого метода было получено превышение $R \approx 10^9$. В работе [178] на основании численных расчетов [182] и аналитической теории утверждается, что возрастание поля происходит по закону (7.20), но в численных экспериментах асимптотика не достигается. Следует отметить, что адаптивная схема [182] дает большую ошибку на начальном участке счета: происходит существенное уменьшение амплитуды поля при $r = 0$ (табл. 3 из работы [182]), что противоречит всем физическим оценкам и расчетам, проведенным по традиционной методике. Вопрос об исправлении ошибки и ее влиянии на окончательный результат остается открытым.

В расчетах поля в нелинейном фокусе [50] использовалась замена переменных (7.56), (7.57), при этом величина σ определялась условием $\sigma(\eta) = |\Psi(\eta, 0)|$. В результате в [50] достигнуто отношение $R > 10^{18}$. Авторы работы [50] пришли к выводу, что

$$\Psi = \frac{F[\ln(z_{\text{сф}} - z)]}{(z_{\text{сф}} - z)^{1/2}} \approx \frac{\ln^\gamma(z_{\text{сф}} - z)}{(z_{\text{сф}} - z)^{1/2}}, \quad (7.61)$$

где $0,175 < \gamma < 0,325$, и зависит от начальных условий для пучка. Аппроксимирующие выражения для поля вблизи нелинейного фокуса у разных авторов отличаются видом медленно меняющейся функции F , что объясняется, по-видимому, зависимостью этой функции от тонких особенностей расчетных схем.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ САМОФОКУСИРОВКА

Описанные в предыдущих главах эффекты стационарной самофокусировки в кубических средах наблюдаются, когда время установления нелинейного отклика среды τ мало по сравнению с характерным временем изменения интенсивности поля τ_u : $\tau \ll \tau_u$. В общем случае при $\tau \approx \tau_u$ построить универсальное описание самофокусировки света не удастся из-за разного характера материальных уравнений для параметров среды при разных механизмах нелинейности. Однако в предельном случае сильно инерционной нелинейности, когда $\tau \gg \tau_u$, такое описание возможно. На некоторых общих закономерностях самофокусировки света при инерционной нелинейности остановимся в данной главе.

8.1. Самофокусировка волновых пучков при инерционной нелинейности

Предположим, что после включения поля диэлектрическая проницаемость среды изменяется по закону

$$\varepsilon(t, \mathbf{r}) = \varepsilon_0 [1 + \Delta \varepsilon^{NL}(t, \mathbf{r})], \quad \Delta \varepsilon^{NL}(t, \mathbf{r}) = \delta \int_{-\infty}^t |E(t, \mathbf{r})|^2 dt. \quad (8.1)$$

Такое представление для нелинейности инерционного типа можно принять по крайней мере в трех случаях нестационарной самофокусировки:

- самофокусировка ультракоротких импульсов света в жидкости за время, меньшее времени релаксации анизотропии $\tau_k \approx 10^{-10} - 10^{-11}$ с: в этом случае $\delta = \varepsilon' / \tau_k$, где ε' — стационарное значение коэффициента нелинейности $\Delta \varepsilon_{ст} = \varepsilon' |E(t, \mathbf{r})|^2$;

- тепловая самофокусировка непрерывных источников света в

средах с $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_p > 0$ на интервале времени после включения источника, меньшем времени $\tau_T = (a^2 \rho C_p) / \chi_T$ установления температурного профиля (a — радиус пучка, ρ — плотность среды, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, χ_T — коэффициент теплопроводности); в этом случае

$$\delta = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_p \frac{cn\alpha}{8\pi \rho C_p},$$

где c — скорость света, n — коэффициент преломления среды ($n = (\epsilon_0)^{1/2}$), α — коэффициент поглощения (по мощности);

— нестационарная тепловая самофокусировка мощных импульсов в среде с $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_p > 0$ за время, меньшее времени $\tau_s = \frac{a}{v_s}$ (v_s — скорость звука) установления равновесной плотности в пучке: при $a = 10^{-1}$ см, $v_s = 10^5$ см/с время τ_s практически всегда больше длительности моноимпульсов $\tau_u \approx 10^{-9}$ с; в этом случае

$$\delta = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\right)_V \frac{cn\alpha}{8\pi \rho C_V},$$

где C_V — теплоемкость при постоянном объеме.

Заметим, что при $\tau_u > \tau$ описание (8.1) может оказаться справедливым в областях быстрого изменения поля, обусловленного собственно самофокусировкой, например, в окрестности бегущих нелинейных фокусов.

Уравнение, описывающее нестационарную самофокусировку

$$2ik_0 \left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \Delta_{\perp} E + k_0^2 \delta E \int_{-\infty}^t |E(t, r)|^2 dt - ik_0 \alpha E,$$

заменой $E_0(z_n, t) = E(z_n, \tilde{t} + z_n/v)$, $\int_{-\infty}^t |E(z, r, t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\tilde{t}} |E(z_n, r, u)|^2 du$, $z_n = z$, $\tilde{t} = t - z/v$, переходом к безразмерным переменным $z' = k_0 z$, $r = k_0 r$ (штрихи и индекс "н" в дальнейшем опускаем) приводится к виду

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E + \delta E \int_{-\infty}^t |E(r, z, u)|^2 du - i \gamma E, \quad (8.2)$$

где $\gamma = \alpha/k_0$, $t \equiv \tilde{t}$. Изменением поля волны вследствие затухания в дальнейшем пренебрежем, полагая в уравнении (8.2) $\gamma = 0$.

Пусть при $z = 0$ задано поле $E = E_0(t) \Psi_0(r)$, причем $\int_{s_1} |\Psi_0|^2 ds_{\perp} = 1$. Введем обозначения: $\Psi(r, z, t) = E(r, z, t)/E_0(t)$,

$$\int_{s_1} |\Psi|^2 ds_{\perp} = 1,$$

$$W = \frac{cn}{8\pi k_0^2} \int_{-\infty}^t |E(r, z, u)|^2 du, \quad \tau = \frac{W}{W_{кр}},$$

где $W_{кр} = (cn)/(2\delta k_0^2)$ — некоторая критическая энергия, физический смысл которой будет выяснен ниже. После этого запишем уравнение (8.2) в виде

$$2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta_{\perp} \Psi + 4\pi \Psi \cdot \int_{-\infty}^{\tau} |\Psi(r, z, \tau')|^2 d\tau'. \quad (8.3)$$

Переменная τ в (8.3) пропорциональна количеству энергии W , прошедшему через данное сечение z к моменту времени t .

Уравнение (8.3) инвариантно относительно замены $z \rightarrow a^2 z$, $r \rightarrow ar$, $\Psi \rightarrow \Psi/a$, где $a = \text{const}$. Отсюда, учитывая нормировку $\int_{s_1} |\Psi|^2 ds_{\perp} = 1$, нетрудно заключить, что все характерные масштабы

L_z изменения поля Ψ по оси z (например, длина самофокусировки) должны иметь вид $L_z = a_0^2 f(\tau)$, где a_0 — характерный безразмерный поперечный масштаб пучка, например его радиус, в сечении $z = 0$.

Решение уравнения (8.3) для аксиально-симметричных пучков получим в безабберационном приближении. Предварительно запишем уравнение в амплитудно-фазовом представлении [$\Psi = A \exp(-i\varphi)$]:

$$\varphi_z' = -\frac{1}{2} \varphi_r' + 2\pi \int_{-\infty}^{\tau} A^2 d\tau + \frac{1}{2} \frac{A''_{rr} + r^{-1} A'_r}{A},$$

$$A_z' = -\frac{1}{2} A(\varphi''_{rr} + r^{-1} \varphi'_r) - A'_r \varphi'_r.$$

Решение будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_0(z) + \frac{\beta(z, \tau) r^2}{2}, \quad (8.4)$$

$$A = \frac{1}{\pi^{1/2} a(z, \tau)} \exp \left[-\frac{r^2}{2a^2(z, \tau)} \right]. \quad (8.5)$$

Ограничиваясь параболической аппроксимацией $A^2 = (\pi a^2)^{-1} \times (1 - \nu r^2 a^{-2})$ нелинейного члена, получим следующие уравнения:

$$\frac{a'_z}{a} = \beta, \quad \beta'_z = -\beta^2 - 4\nu \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\tau}{a^4} + \frac{1}{a^4}, \quad (8.6)$$

$$\varphi'_{0z} = 2 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\tau}{a^2} - \frac{1}{a^2}. \quad (8.7)$$

Аналогичный расчет для стационарного случая (см. гл. 5) при безынерционной нелинейности показывает, что критическая мощность, определенная в безабберационном приближении, хорошо согласуется с точным значением, если принять $\nu = 0,269$. Это же значение возьмем для нестационарного случая. Исключая из уравнений (8.5) величину β , находим уравнение, определяющее изменение ширины пучка:

$$a''_{zz} = \frac{1}{a^3} - a \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\tau}{a^4}. \quad (8.8)$$

Из уравнения (8.8) выясняется смысл критической энергии $W_{кр}$. В начальной стадии фокусировки можно считать, что $\int_{-\infty}^{\tau} d\tau/a^4 \approx \tau/a^4$; при этом уравнение (8.8) принимает вид

$$a''_{zz} = (1 - \tau)/a^3. \quad (8.9)$$

Таким образом, при $\tau = 1$ ($W = W_{кр}$) дефокусировка пучка ($a''_{zz} > 0$) сменяется на фокусировку ($a''_{zz} < 0$).

Рассмотрим сначала два частных решения уравнения (8.8). Пусть $\tau \gg 1$ и $a''_{zz} = 0$. Этим условиям и уравнению (8.8) удовлетворяет однородный или конический канал

$$a(z, \tau) = (a_0 + b_0 z) \exp(-\tau/4),$$

экспоненциально схлопывающийся с характерным временем $\tau = 4$. Другими словами, ширина такого канала уменьшается в e раз, если через его сечение протекает энергия, равная $4W_{кр}$. Этим раскрыва-

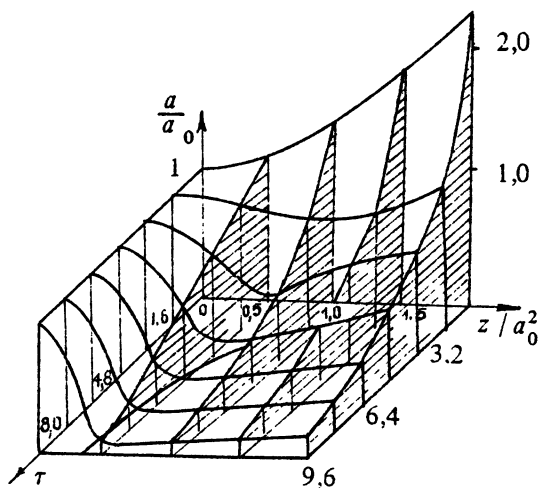


Рис. 8.1. Рельеф зависимости ширины пучка $a(\tau, z)/a_0$ от времени τ и координаты z/a_0 (a_0 — ширина начального гауссова пучка)

ется дополнительный физический смысл энергии $W_{кр}$. При $a''_{zz} \neq 0$ уравнение (8.8) может быть решено разделением переменных

$$a(z, \tau) = a_0(z) p(\tau) = a_0(z) \exp(-\tau/4),$$

где $a_0(z)$ — структура пучка при $\tau=0$, т. е. в линейной среде, удовлетворяющая уравнению $a''_{0zz} = a_0^{-3}$. Этому решению отвечает излучение с апертуры $z=0$, площадь которой убывает в функции прошедшей через нее энергии.

В общем случае для пучка постоянной ширины $a_0(0, \tau) = a_0$ при $z=0$ решение (8.8) было получено численно. Зависимость величины a/a_0 в функции τ и z/a_0^2 показана на рис. 8.1. При $\tau=0$ (начало импульса) зависимость $a(z)$ отвечает линейному случаю. С ростом τ образуется зона самофокусировки с фокальным пятном, постепенно приближающимся к началу нелинейной среды $z=0$. Наиболее характерной особенностью рельефа является образование за фокусом плато, экспоненциально понижающегося с ростом τ (характерное время $\tau=4$) и слабо зависящего на значительном протяжении от z . Таким образом, при нестационарной самофокусировке поле за нелинейным фокусом имеет характер сжимающейся нити. Характерной энергией, определяющей изменение радиуса нити в e раз, является величина $4W_{кр}$. Физически образование нитевидного канала объясняется действием двух конкурирующих факторов: сужением фокального пятна и, соответственно, увеличением дифракционной расходимости поля за ним и накапливающимся изменением диэлектрической проницаемости, прогрессивно уменьшающей расходи-

мость пучка. Этот результат, очевидно, не связан с характером принятого выше безабберационного приближения. Заметим только, что, когда в результате нелинейных aberrаций образуется не один, а несколько фокусов, за каждым из них должна возникать нестационарная нитевидная структура. Критическая энергия $W_{кр}$, определяющая скорость сжатия канала, имеет величину $\approx 10^{-6} - 10^{-8}$ Дж при керровской нелинейности (самофокусировка ультракоротких импульсов) и 10^{-1} Дж при тепловой нелинейности (самофокусировка излучения непрерывных лазеров и моноимпульсов).

Рельеф, показанный на рис. 8.1, позволяет наглядно представить пространственно-временную картину нестационарной самофокусировки в отмеченных выше трех случаях. Изменение формы ультракоротких импульсов характеризуется сечениями рельефа, параллельными плоскости $(\tau, a/a_0)$, которые на рисунке заштрихованы. Видно, что сначала самофокусируются более поздние участки импульса, для которых изменение диэлектрической проницаемости наибольшее.

Тепловая самофокусировка излучения лазеров непрерывного действия небольшой, порядка единиц ватт, мощности (например, аргоновых лазеров в свинцовых стеклах) характеризуется сечениями, параллельными плоскости $(a/a_0, z/a_0^2)$. В этом случае в пучке, имеющем при малом τ дифракционную расходимость, с ростом энергии излучения возникает перетяжка с последующим образованием канала за фокусом, постепенно приближающимся к передней границе нелинейной среды. Заметим, что на расстоянии $z/a_0^2 \gg 1$ сжатие канала подчиняется экспоненциальному закону $\exp(-4\tau)$, что можно использовать для экспериментального определения критической энергии $W_{кр}$.

Наконец, тепловая самофокусировка моноимпульсов характеризуется сечениями рельефа, параллельными оси a/a_0 и воспроизводимыми на плоскости $(\tau, z/a_0)$ зависимость энергии импульса от времени $t = (z_0 - z)/(k_0 v)$, где z_0 — безразмерная координата начала импульса. Видно, что в этом случае нестационарный канал должен образовываться в средней части импульса между фокальными точками, постепенно разбегающимися к его концам. При уменьшении мощности импульса остается одна ближайшая к генератору фокальная точка. Положение фокальных точек импульса можно оценить по уравнению (8.9). Расчет дает соотношение

$$z_{сф} = a_0^2 (\tau - 1)^{-1/2}.$$

Эта кривая показана на рис. 8.1, причем лишь ее сплошной участок соответствует области фокусировки.

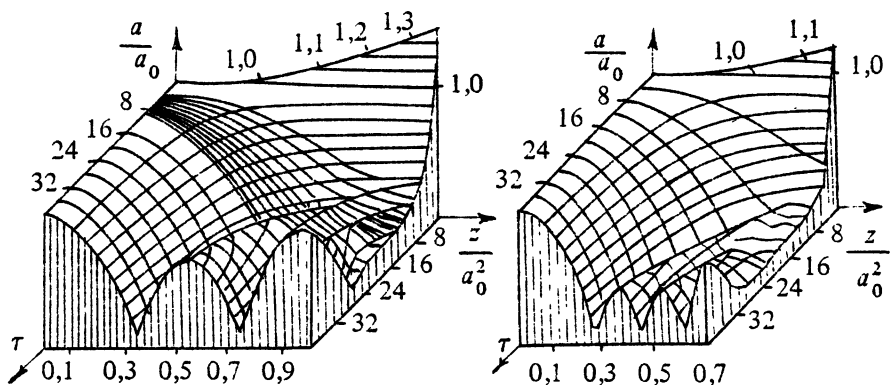


Рис. 8.2. Рельеф зависимости ширины пучка $a(\tau, z)/a_0$ при тепловой самофокусировке непрерывного излучения с учетом диффузии тепла, ограничивающей нарастание $\Delta \varepsilon^{NL}$ со временем, из области, занятой лучом: $a - \tau_0 = 20$, $b - \tau_0 = 40$

Различные механизмы, ограничивающие нарастание $\Delta \varepsilon^{NL}$ со временем, изменяют и характер рельефа на рис. 8.1 при больших τ . Для примера на рис. 8.2 показан характер рельефа a/a_0 для тепловой фокусировки лазера непрерывного действия с учетом диффузии тепла из области, занятой лучом. Этот рельеф описывается уравнением

$$a''_{zz} = \frac{1}{a^3} - a \int_0^\tau \frac{d\tau'}{[a^2 + (\tau - \tau')/\tau_0]^2},$$

где τ_0 — характерное безразмерное время установления температурного профиля: $\tau_0 = (\rho C_p a_0^2 P_0)/(4\chi_T W_{кр})$; P_0 — мощность генератора. Из рис. 8.2 видно, что с ростом τ в пучке развивается продольная неустойчивость, вместе с тем в некоторой области изменения τ пучок имеет еще нитевидный характер. Заметим, что с развитием продольной неустойчивости безаберрационное приближение становится, по-видимому, неприменимым.

Приведенные выше формулы позволяют оценить девиацию частоты импульса Ω в результате фазовой автомодуляции. Дифференцируя уравнения (8.7), (8.8) по τ и объединяя полученные результаты, имеем

$$\Phi''_{0z\tau} = -\frac{a^2}{2} \left(\frac{a''_{zz}}{a} \right)_\tau + \frac{3}{2a^2}.$$

Интегрируя последнее соотношение по z , получим

$$\Phi'_{0\tau} = \Phi'_{0\tau} \Big|_{z=0} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a'_\tau}{a} \right) + \frac{3}{2} \int_0^z \frac{dz}{a^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a'_\tau}{a} \right) \Big|_{z=0}.$$

Поскольку $\frac{\partial a}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$ и $\frac{\partial a}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = 0$, последний член в этой формуле равен нулю, первое слагаемое описывает девиацию частоты, связанную с частотной модуляцией входного импульса. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega(z, \tau) - \omega(0, \tau) = -[\Phi'_{0z} - \Phi'_{0\tau}(0)] \frac{d\tau}{dt} = \\ &= \left[-\frac{3}{2} \int_0^z \frac{dz}{a^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a'_\tau}{a} \right) \right] \frac{P(\tau)}{W_{кр}}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где $P(\tau) = \frac{dW}{dt}$ — входная мощность.

Величину Ω можно оценить, воспользовавшись уравнением (8.9), решение которого

$$a^2 = \frac{1-\tau}{a_0^2} z^2 + a_0^2 \quad (8.11)$$

достаточно точно описывает рельеф рис. 8.1 на участке схлопывания. Подставляя (8.11) в (8.10), находим

$$\Omega = - \left[\frac{3}{4a_0} \ln \frac{a_0 + (z/a_0)(\tau-1)^{1/2}}{a_0 - (z/a_0)(\tau-1)^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{z}{a_0^2} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \frac{P(\tau)}{W_{кр}}.$$

При фиксированном значении z девиация увеличивается с уменьшением радиуса пучка a . В окрестности фокальной точки ($a \rightarrow 0$) ее можно оценить, оставив в последнем выражении лишь второе слагаемое. Сравним этот результат с величиной девиации частоты $\tilde{\Omega}$ в канале постоянной ширины $a = a_0$. Считая в уравнении (8.7) величину a постоянной, нетрудно найти, что

$$\tilde{\Omega} = -2 \frac{P(\tau)}{W_{кр}} \frac{z}{a_0^2}, \quad \Omega = \frac{1}{4} \tilde{\Omega} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2.$$

Таким образом, без учета самофокусировки та же девиация частоты может быть получена лишь в канале, радиус которого равен удвоенному радиусу "фокального пятна" a . Увеличение девиации в $4^{-1}(a_0/a)^2$ раз в нестационарном канале по сравнению с девиацией в стационарном канале объясняется более быстрым изменением

диэлектрической проницаемости за счет поперечного сжатия пучка при самофокусировке.

В рассмотренном выше случае инерционной нелинейности изменение частоты происходит лишь в стоксову сторону. Естественно ожидать, что в случае безынерционной нелинейности уширение спектра должно происходить в обе стороны, причем, как и в рассмотренном случае, более эффективно, чем в стационарном канале. Ввиду важности этого случая приведем соответствующий результат.

При безынерционной нелинейности $\Delta \epsilon^{NL} = \epsilon' |E|^2$ уравнения безабберационного приближения (8.6), (8.7) записываются в виде

$$\frac{a'_z}{a} = \beta, \quad \beta'_z = -\beta^2 - \left(\frac{P}{P_{кр}} - 1 \right) \frac{1}{a^4}, \quad (8.12)$$

$$\Phi'_{0z} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2P}{P_{кр}} - 1 \right), \quad (8.13)$$

где $P_{кр} = (cn)/(2\epsilon' k_0^2)$ — критическая мощность самофокусировки. Подставляя в уравнение (8.13) решение уравнения (8.12): $a^2 = (P/P_{кр} - 1)(z^2/a_0^2) + a_0^2$ и интегрируя полученное соотношение по z , находим

$$\Phi_0(z, \tilde{t}) = \frac{2q^2 + 1}{2q} \ln \frac{1 + (qz)/a_0^2}{1 - (qz)/a_0^2},$$

где $q = [P(\tilde{t})/P_{кр} - 1]^{1/2} = a_0^2/z_{сф}(\tilde{t})$.

Девияция частоты равна

$$\Omega = -q'_i \left[\left(1 - \frac{1}{2q^2} \right) \ln \frac{1 + (qz)/a_0^2}{1 - (qz)/a_0^2} + \frac{z}{qa_0^2} \frac{2q^2 + 1}{1 - (q^2 z^2)/a_0^4} \right].$$

При $z_{сф}(\tilde{t}) \approx z$ в выражении для Ω можно пренебречь первым слагаемым; кроме того, считая $q \gg 1$, находим, что

$$\Omega = - \frac{P'_i}{(PP_{кр})^{1/2}} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2. \quad (8.14)$$

Согласно (8.14) спектр уширяется в стоксову сторону на переднем фронте импульса ($P' > 0$) и в антистоксову — на заднем ($P' < 0$). Сравним полученный результат с девиейцией частоты $\tilde{\Omega}$ в стационарном канале радиуса a_0 . Из (8.13) при $q \gg 1$ имеем

$$\tilde{\Omega} = - \frac{2P'_i z}{P_{кр} a_0^2} = \frac{2P'_i}{(PP_{кр})^{1/2}} \frac{z}{z_{сф}}.$$

Таким образом, в самофокусирующемся пучке более быстрое изменение диэлектрической проницаемости увеличивает девиацию частоты при $z \approx z_{\text{сф}}$ в $2^{-1}(a_0/a)^2$ раз. Другими словами, если при самофокусировке участка импульса его поперечный радиус уменьшается от a_0 до a_k на длине $z_{\text{сф}}$, то возникающая при этом девиация частоты будет такой же, как в стационарном канале радиуса $a_{0k} = 2^{1/2}a_k$ той же длины. Результат (8.14) эквивалентен полученному в работе [36], однако в форме (8.14) он допускает иную, чем в [36], интерпретацию — увеличение девиации частоты достигается за счет более быстрого, чем в параллельном пучке, изменения ϵ , обусловленного поперечным сжатием канала самофокусировки. Последнее обстоятельство не учитывалось в работах [192, 193].

Заметим, что формулу (8.14) можно записать в виде

$$\Omega = - \frac{P'_t}{2P_{\text{кр}}} z \frac{\Delta n^{NL}}{n_0}, \quad (8.14a)$$

где $\Delta n^{NL} = (n_0 \epsilon' |E|^2)/2$ — нелинейное изменение коэффициента преломления в максимуме пучка радиуса a . Можно показать, что при $z \approx z_{\text{сф}}$ такой же результат получается, если воспользоваться приведенной в работе [6] формулой для поля на оси пучка, аппроксимирующей численные данные при $P/P_{\text{кр}} \gg 1$.

Оценим Ω для случая самофокусировки ультракоротких импульсов. Полагая $P/P'_t \approx 10^{-10} - 10^{-11}$ с, $P/P_{\text{кр}} \approx 10$, $z \approx z_{\text{сф}}$ и $a/a_0 \approx 100$, из (8.14) получим $\Omega \approx 3(10^{14} - 10^{15}) \text{ с}^{-1}$, что сопоставимо, как уже упоминалось в работе [34], с частотными уширениями, наблюдавшимися в опытах при самофокусировке ультракоротких импульсов в стекле и ряде других материалов [61]. Подставляя в (8.14a) $z_{\text{сф}} = 30(2\pi/\lambda_0) n_0$, $\lambda_0 = 10^{-4}$ см, находим, что указанная девиация частоты может быть достигнута при $\Delta n^{NL} \approx 10^{-2}$, что отвечает амплитудам полей в фокусе $E \approx 3 \cdot 10^5 \text{ CGSE}$ при $\epsilon' \approx 10^{-13} \text{ CGSE}$.

8.2. Самосжатие поля в резонаторе. Поле в окрестности бегущих фокусов

Интересный пример нестационарной самофокусировки представляет самосжатие однородных волновых пучков. Возможность такого эффекта уже отмечалась в п. 8.1. Рассмотрим его подробнее в случае квазиоптического резонатора бегущей волны, заполненного

нелинейной средой. Пренебрегая дисперсией среды и считая, что изменения диэлектрической проницаемости подчиняются уравнениям (8.1), для описания поля в резонаторе применим уравнения квазиоптики (см. выше гл. 2)

$$2ik_0 \left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \Delta_{\perp} E + k_0^2 \delta E \int_{-\infty}^t |E|^2 d\xi. \quad (8.15)$$

Будем рассматривать однородные по z волновые пучки, описываемые уравнением (8.15) при $\frac{\partial}{\partial z} = 0$:

$$\frac{2ik_0}{v} \frac{\partial E}{\partial t} = \Delta_{\perp} E + k_0^2 \delta E \int_{-\infty}^t |E|^2 d\xi. \quad (8.16)$$

Переходом к безразмерным переменным $r' = k_0 r$, $t' = k_0 v t$, $\Psi = \delta^{1/2} E$ уравнение (8.15) приводится к виду (штрихи далее опускаются)

$$2i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta_{\perp} \Psi + \Psi \int_{-\infty}^t |\Psi|^2 d\xi. \quad (8.17)$$

Описание стоячей волны в виде двух встречных пучков одинаковой амплитуды в резонаторе с плоскими зеркалами отличается от уравнения (8.17) лишь коэффициентом при нелинейности

$$2i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta_{\perp} \Psi + 3\Psi \int_{-\infty}^t |\Psi|^2 d\xi. \quad (8.18)$$

Применим уравнение (8.17) для анализа самосжатия однородного пучка. Перейдем в (8.17) к амплитудно-фазовому представлению $\Psi = A \exp(-i\varphi)$

$$\varphi_t' = -\frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t A^2 d\xi + \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\perp} A}{A}, \quad (8.19)$$

$$A_t' = -\frac{1}{2} A \cdot \Delta_{\perp} \varphi - \nabla_{\perp} A \cdot \nabla_{\perp} \varphi. \quad (8.20)$$

Уравнения (8.19), (8.20) допускают автомодельные решения вида

$$A = \frac{1}{a(t)} e(u), \quad \varphi = \frac{s(t)}{2} u^2 + \varphi_0(t), \quad (8.21)$$

где $u = r/a(t)$.

Дифференцируя выражение (8.19) по t и подставляя полученные соотношения в (8.20), найдем, что

$$a \frac{da}{dt} - \frac{ds}{dt} = 0, \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} & \left(a \frac{d^3 a}{dt^3} - \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{da}{dt} \right) a^2 + 2 \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} a^2 = \\ & = e^2 - \frac{2}{a} \cdot \frac{da}{dt} \left[\frac{\Delta_{\perp} e}{e} + \frac{1}{2} u \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{\Delta_{\perp} e}{e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Система (8.22)–(8.23) разрешима лишь при условии $\frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt} = -\alpha = \text{const}$, т. е. при

$$a = a_0 \exp(-\alpha t). \quad (8.24)$$

Постоянную α определим ниже. Подставляя это решение в соотношения (8.22), (8.23) и разделяя переменные, найдем

$$s = -\alpha a_0^2 \exp(-2\alpha t), \quad (8.25)$$

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} = \frac{C \alpha}{2a_0^2} \exp(2\alpha t), \quad (8.26)$$

$$\left[\Delta_{\perp} e + \frac{1}{2} eu \frac{d}{du} \left(\frac{\Delta_{\perp} e}{e} \right) + \frac{1}{2\alpha} e^3 \right] - Ce = 0, \quad (8.27)$$

где C — константа разделения.

Из выражений (8.21) и (8.24) видно, что в принятом приближении амплитуда автомодельного решения растет экспоненциально с показателем α . Фазовый фронт в таком экспоненциально сжимающемся пучке остается постоянным

$$\varphi = -\alpha r^2 + \varphi_0(t), \quad (8.28)$$

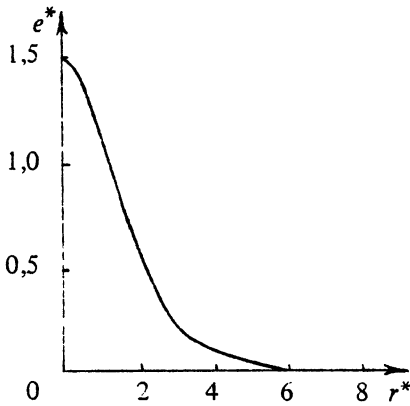
а частота растет по закону

$$\omega = \frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{C}{4a_0^2} \exp(2\alpha t). \quad (8.29)$$

Структура автомодельного решения определяется уравнением (8.27). В переменных

$$r^* = (C/2)^{1/2} u, \quad e^* = (\alpha C)^{-1/2} e$$

Рис. 8.3. Структура однородного пучка в резонаторе



оно записывается в виде

$$\Delta_{\perp} e^* + \frac{1}{2} e^* r^* \frac{d}{dr^*} \left(\frac{\Delta_{\perp} e^*}{e^*} \right) + e^{*3} - e^* = 0. \quad (8.30)$$

Локализованное решение этого уравнения, полученное численно при граничных условиях

$$e^*|_{r^*=0} = C^*, \quad \left. \frac{de^*}{dr^*} \right|_{r^*=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 e^*}{dr^{*2}} \right|_{r^*=0} = -\frac{1}{2}(C^{*3} - C^*), \quad e^*|_{r^*=\infty} = 0,$$

показано на рис. 8.3. Его собственное число $C^* = 1,486$, а безразмерная мощность $P_0 = \int_0^{\infty} e^{*2} r^* dr^* = 2,235$.

Мощность соответствующего однородного пучка постоянна

$$P = \frac{c\varepsilon^{1/2}}{2k_0^2 \varepsilon'} \alpha \int_0^{\infty} e^{*2} r^* dr^* \quad (8.31)$$

и определяет показатель α экспоненциального сжатия пучка. Учитывая, что критическая мощность самофокусировки приблизительно равна

$$P_{\text{кр}} = (c\varepsilon^{1/2}) / (2k_0^2 \varepsilon'),$$

из (8.31) при $\delta = \varepsilon' / \tau_p$, где τ_p — время релаксации нелинейности, получим

$$\alpha = \tau_p^{-1} P P_{\text{кр}}^{-1} \left(\int_0^{\infty} e^{*2} r^* dr^* \right)^{-1}. \quad (8.32)$$

При $P/P_{кр} \gg 1$ время самосжатия пучка

$$\tau_{сж} = \frac{1}{\alpha} = \tau_p \frac{P_{кр} \int_0^{\infty} e^{r^2} r^2 dr^2}{P} \approx 2,235 \tau_p \frac{P_{кр}}{P} \ll \tau_p$$

и принятое приближение инерционной нелинейности вполне оправданны.

Строго говоря, полученное автомодельное решение удовлетворяет исходному уравнению (8.16) лишь асимптотически с ростом t . Чтобы это уравнение удовлетворялось при всех $t \geq 0$, необходимо дополнить его слагаемым $\Delta \varepsilon E$, предположив, что в среде имеется распределение диэлектрической проницаемости вида

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{a_0^2} + \alpha^2 a_0^2 r^2 + \frac{1}{a_0^2} \frac{\Delta_{\perp} e}{e},$$

обеспечивающее сжатие пучка на начальном этапе. В отсутствие "затравочного" распределения $\Delta \varepsilon$, как показывают численные расчеты, пучок сначала расширяется, а затем наступает режим сжатия, близкий к экспоненциальному типу.

В заключение заметим, что развитый подход можно применить к описанию структуры самофокусирующихся пучков в окрестности бегущих фокусов. Примем для простоты, что в окрестности фокуса структура поля стационарна и бежит как целое со скоростью v_f . Применяя для описания этой структуры (8.15) и переходя в систему координат, бегущую со скоростью v_f , с помощью замены $\zeta = t - z/v_f$ получим уравнение

$$2ik_0 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_f} \right) E'_{\zeta} = \Delta_{\perp} E + k_0^2 \delta E \int_{-\infty}^{\zeta} |E|^2 d\xi,$$

аналогичное исследованному выше для однородных самосжимающихся пучков. Учитывая полученные выше результаты, можно утверждать, что структура пучка около бегущего фокуса в среде с инерционной нелинейностью будет иметь вид, качественно показанный на рис. 8.3.

САМОФОКУСИРОВКА В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Самофокусировка ограничивает мощность генерации оптических генераторов и усилителей [194–197]. Одним из простых и эффективных способов подавления самофокусировки является разбиение сплошной нелинейной среды на отдельные фрагменты. В этом случае используется естественное дифракционное распывание пучка в промежутках между нелинейными слоями для компенсации самофокусировки в последних [40, 41, 198, 199]. Основные характеристики такого способа подавления могут быть получены из рассмотрения периодических систем, в которых чередуются линейные и нелинейные элементы. Такие периодические системы могут быть использованы также в качестве линий передачи для мощного оптического излучения. В этой главе рассматривается самофокусировка в периодических системах: вначале излагаются результаты исследования неустойчивости решения типа плоской волны [58–59, 198, 208], затем обсуждаются особенности распространения волновых пучков.

9.1. Пространственно-временная неустойчивость плоской волны в периодической системе

Рассматриваемая система состоит из чередующихся слоев нелинейной среды толщиной l_p проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_d (1 + \varepsilon' |E|^2)$ и линейной среды толщиной L_p проницаемостью ε_0 (рис. 9.1). Для описания распространения электромагнитных волн воспользуемся параболическим уравнением для лучевой амплитуды линейно-поляризованного электрического поля (см. гл. 2)

$$\Delta_{\perp} E - 2ik_d \frac{\partial E}{\partial z} - 2ik_d \frac{1}{v_N} \frac{\partial E}{\partial t} - k_d \frac{v'_N}{v_N^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + k_d^2 \varepsilon' |E|^2 E = 0 \quad (9.1)$$

в нелинейной среде,

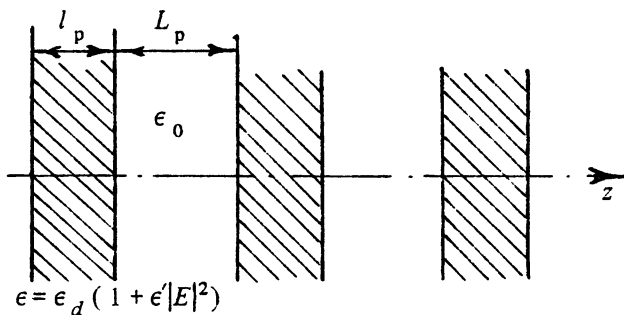


Рис. 9.1. Периодическая система из нелинейного диэлектрика

$$\Delta_{\perp} E - 2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} - 2ik_0 \frac{1}{v_L} \frac{\partial E}{\partial t} - k_0 \frac{v'_L}{v_L^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (9.2)$$

в линейной среде. Здесь k_0 и k_d — волновые числа в линейной и нелинейной средах, $v_{L,N}$ — групповые скорости в них; $v'_{L,N}$ — производные от групповых скоростей по частоте. Отражением на границах линейной и нелинейной сред пренебрежем.

Перейдем к безразмерным переменным $r_{\perp, \sigma} = k_d r_{\perp, p}$, $z_{N, \sigma} = k_d z_p + C_N$ в нелинейной среде, $z_{L, \sigma} = (k_d^2/k_0) z_p + C_L$ в линейной среде, $\tau = k_d v_N t$, $\zeta_N = -k_d v'_N$, $\zeta_L = -(k_0 v'_L v_N^2)/v_L^2$ — коэффициенты, характеризующие дисперсию в нелинейной и линейной средах, $\zeta = (k_0 v_L)/(k_d v_N)$, $(\epsilon')^{1/2} E_p = \Psi$, C_N и C_L — постоянные, зависящие от номера слоя, индекс σ далее опускается. После этого уравнения (9.1), (9.2) примут вид

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \zeta_N \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (9.3)$$

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} - 2i \zeta \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \zeta_L \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (9.4)$$

Пусть в периодической среде распространяется плоская волна на частоте ω_0 с амплитудой Ψ_0 и фазой $\Phi = 2^{-1} \int |\Psi_0|^2 dz$, где интеграл берется только по нелинейной среде. Представляя поле Ψ в виде $\Psi = (\Psi_0 + e) \exp(-i\tilde{\Phi})$, для возмущений e имеем следующие уравнения:

$$\Delta_{\perp} e - 2i \frac{\partial e}{\partial z} - 2i \frac{\partial e}{\partial \tau} + \zeta_N \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} + |\Psi_0|^2 e + \Psi_0^2 e^* = 0, \quad (9.5)$$

$$\Delta_{\perp} e - 2i \frac{\partial e}{\partial z} - 2i \zeta_L \frac{\partial e}{\partial \tau} + \zeta_L \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} = 0. \quad (9.6)$$

Согласно гл. 4, решение уравнения (9.5) для возмущений e в сплошной среде может быть записано в виде

$$\begin{aligned} e = & A_{\chi}^{(1)}(0) \left[1 - (2h_0)/\chi^2 \right] \cdot \exp(-i \kappa_{\perp} r_{\perp} + i \Omega \tau - i \Omega z - ih_0 z) + \\ & + A_{\chi}^{(2)}(0) \left[1 + (2h_0)/\chi^2 \right] \cdot \exp(-i \kappa_{\perp} r_{\perp} + i \Omega \tau - i \Omega z + ih_0 z) + \\ & + A_{\chi}^{*(1)}(0) \left[1 + (2h_0^*)/\chi^2 \right] \cdot \exp(i \kappa_{\perp} r_{\perp} - i \Omega \tau + i \Omega z + ih_0^* z) + \\ & + A_{\chi}^{*(2)}(0) \left[1 - (2h_0^*)/\chi^2 \right] \cdot \exp(i \kappa_{\perp} r_{\perp} - i \Omega \tau + i \Omega z - ih_0^* z), \end{aligned} \quad (9.7)$$

где $h_0 = [(\kappa_{\perp}^2 + \zeta_N \Omega^2)^2 - 2|\Psi_0|^2(\kappa_{\perp}^2 + \zeta_N \Omega^2)]^{1/2}/2$, κ_{\perp} и Ω — поперечные волновые числа и частотные отстройки возмущений, $A_{\chi}^{(1,2)}(0)$ — произвольные амплитуды нормальных волн возмущений, $\chi = (\kappa_{\perp}^2 + \zeta_N \Omega^2)^{1/2}$. Из выражения (9.7) следует, что собственные волны возмущений в сплошной нелинейной среде представляют суперпозицию волн $\exp(\mp i \kappa_{\perp} r_{\perp} \pm i \Omega \tau)$ со связанными амплитудами и фазами. В зоне неустойчивости ($h_0^2 < 0$) выражения (9.7) для полей имеют вид

$$\begin{aligned} e = & 2 \left| A_{\chi}^{(1)}(0) \right| \left[1 - (2i\tilde{h}_0)/\chi^2 \right] \cos(\kappa_{\perp} r_{\perp} + \Omega \tau - \Omega z + \varphi_1) \exp(\tilde{h}_0 z) + \\ & + 2 \left| A_{\chi}^{(2)}(0) \right| \left[1 + (2i\tilde{h}_0)/\chi^2 \right] \cos(\kappa_{\perp} r_{\perp} + \Omega \tau - \Omega z + \varphi_2) \exp(-\tilde{h}_0 z), \end{aligned} \quad (9.8)$$

где φ_1 и φ_2 — фазы комплексных амплитуд нормальных волн возмущений

$$A_{\chi}^{(1,2)}(0) = \left| A_{\chi}^{(1,2)} \right| \exp(-i\varphi_{1,2}), \quad \tilde{h}_0 = -ih_0 > 0.$$

Из (9.8) следует, что если начальная фаза возмущений имеет определенную отстройку $\varphi = -\text{arctg}[(2\tilde{h}_0)/\chi^2]$ от мощной волны, то оно экспоненциально растет, если имеет отстройку $\varphi = \text{arctg}[(2\tilde{h}_0)/\chi^2]$, то экспоненциально уменьшается. При произвольной фазовой расстройке начального возмущения в нем присутствуют и растущая, и убывающая волны. Такое поведение есть следствие параметрического характера самофокусирующей неустойчивости и имеет непосредственную связь с явлением параметрического резонанса [202]. Нормальные волны возмущений в линейной среде возьмем в виде

$$A_{\pm \chi} \exp(\mp i \kappa_{\perp} r_{\perp} \pm i \Omega \tau \mp \zeta_L \Omega z - ih_L z), \quad (9.9)$$

где $h_L = -(\kappa_{\perp}^2 + \zeta_L \Omega^2)/2$.

У волн возмущений в периодической системе фазовые соотношения между возмущениями и плоской волной, устанавливающиеся в нелинейном диэлектрике, при распространении в линейном меняются. Благодаря этому возникают эффекты подавления неустойчивости там, где волны в сплошной среде неустойчивы.

Для определения инкрементов составим дисперсионное уравнение. Введем матрицу L_{lr} , с помощью которой амплитуды A_χ и A_χ^* в начале линейной среды выражаются через амплитуды нормальных волн $A_\chi^{(1)}$ и $A_\chi^{(2)}$ возмущений в нелинейной среде

$$L_{lr} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2h_0}{\chi^2} \right) & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2h_0}{\chi^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2h_0}{\chi^2} \right) & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2h_0}{\chi^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

Обратная матрица L_{lr}^{-1} , с помощью которой амплитуды $A_\chi^{(1)}$ и $A_\chi^{(2)}$ выражаются через A_χ и A_χ^* , записывается в виде

$$L_{lr}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\chi^2}{2h_0} \right) & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Введем матрицы L_L и L_N , описывающие распространение возмущений на расстояние L и l в линейной и нелинейной средах, соответственно:

$$L_L = \begin{pmatrix} \exp \left(\frac{i\chi_L^2 L}{2} - i\Omega \zeta L \right) & 0 \\ 0 & \exp \left(-\frac{i\chi_L^2 L}{2} - i\Omega \zeta L \right) \end{pmatrix}, \quad (9.12)$$

$$L_N = \begin{pmatrix} \exp(-i\Omega l - ih_0 l) & 0 \\ 0 & \exp(-i\Omega l + ih_0 l) \end{pmatrix}, \quad (9.13)$$

где $L = (k_d^2 L_p)/k_0$ и $l = k_d l_p$ — безразмерные величины, $\chi_L^2 = \kappa_1^2 + \zeta_L \Omega^2$.

Изменение полей возмущений при распространении их на период описывается произведением матриц

$$\mathbf{L}_\Sigma = \mathbf{L}_L \mathbf{L}_{tr} \mathbf{L}_N \mathbf{L}_{tr}^{(-1)}. \quad (9.14)$$

Матрица \mathbf{L}_Σ

$$\mathbf{L}_\Sigma = \exp(-i\Omega \zeta L - i\Omega l) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}$$

имеет элементы

$$\mathbf{L}_{11} = \exp\left(\frac{i\chi_L^2 L}{2}\right) \left[\cos h_0 l + \frac{i}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin h_0 l \right],$$

$$\mathbf{L}_{12} = i \exp\left(\frac{i\chi_L^2 L}{2}\right) \left(\frac{2h_0}{\chi^2} - \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin h_0 l,$$

$$\mathbf{L}_{21} = -i \exp\left(-\frac{i\chi_L^2 L}{2}\right) \left(\frac{2h_0}{\chi^2} - \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin h_0 l,$$

$$\mathbf{L}_{22} = \exp\left(-\frac{i\chi_L^2 L}{2}\right) \left[\cos h_0 l - \frac{i}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin h_0 l \right].$$

На высоких частотах ($\chi^2 \gg |\Psi_0|^2$) матрица \mathbf{L}_Σ становится диагональной и описывает распространение возмущений на расстояние $L + l$.

Изменение комплексных амплитуд нормальных волн на одном периоде описывается коэффициентом Λ , который является собственным значением матрицы \mathbf{L}_Σ и определяется из уравнения

$$\Lambda^2 - 2\Lambda \left[\cos \frac{\chi_L^2 L}{2} \cos h_0 l - \frac{1}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin \frac{\chi_L^2 L}{2} \sin h_0 l \right] \times \\ \times \exp(i\alpha) + \exp(2i\alpha) = 0, \quad (9.15)$$

где $\alpha = -\Omega \zeta L - \Omega l$.

Корни $\Lambda_{1,2}$ уравнения (9.15) выражаются при действительных значениях параметров $\chi_L(\kappa_L, \Omega)$, $\chi(\kappa_L, \Omega)$, L , l и $|\Psi_0|^2$ через действительную величину

$$\cos \theta = \cos \frac{\chi_L^2 L}{2} \cos h_0 l - \frac{1}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin \frac{\chi_L^2 L}{2} \sin h_0 l, \quad (9.16)$$

$\Lambda_{1,2} = \exp(i\alpha \pm i\theta)$. Если $|\cos \theta| > 1$, то одно из решений в периодической системе растет (оно является неустойчивым), другое убывает; если $|\cos \theta| \leq 1$, то решения в периодической системе остаются ограниченными (они являются устойчивыми).

Из представления выражения (9.16) в виде

$$\cos \frac{\chi_L^2 L}{2} \cos h_0 l - \frac{1}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin \frac{\chi_L^2 L}{2} \sin h_0 l = A \cos \tilde{\varphi},$$

где

$$A = \left(1 + |\Psi_0|^4 \frac{\sin^2 h_0 l}{4h_0^2} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\chi_L^2 L}{2} + \operatorname{arctg} \left[\frac{\chi^2 - |\Psi_0|^2}{(\chi^4 - 2\chi^2 |\Psi_0|^2)^{1/2}} \operatorname{tg}(h_0 l) \right], \quad (9.17)$$

следует, что решения в периодической системе могут быть как устойчивы, так и не устойчивы, поскольку $A > 1$, а значение $\tilde{\varphi}$ может быть любым. При увеличении частоты Ω или поперечного волнового числа κ_{\perp} зоны неустойчивости будут чередоваться с областями устойчивости, причем при бóльших Ω и κ_{\perp} области неустойчивости будут уже, а инкремент в них меньше [203]. Интерес представляет использование периодических систем для управления параметрами неустойчивости — подавления последней или создания условий для ее появления.

Рассмотрим подавление модуляционной неустойчивости ($\Omega \neq 0$, $\kappa_{\perp} = 0$). В начале определим необходимые условия устойчивости при низких ($\Omega \ll 1$) и высоких ($\Omega \gg 1$) частотах. При низких частотах

$$\cos \theta \approx 1 + \frac{|\Psi_0|^2 \Omega^2}{4} (\zeta_N l + \zeta_L L) + \dots,$$

при высоких

$$\cos \theta \approx \left[1 + \frac{|\Psi_0|^4}{2(\zeta_N \Omega^2)^2} + \dots \right] \cos \alpha_1 - \left[\frac{|\Psi_0|^4}{2(\zeta_N \Omega^2)^2} + \dots \right] \cos \alpha_2,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\Omega^2 (\zeta_N l + \zeta_L L)}{2} - \frac{|\Psi_0|^2 l}{2} - \frac{1}{4} \frac{|\Psi_0|^4}{(\zeta_N \Omega^2)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\Omega^2 (\zeta_N l - \zeta_L L)}{2} - \frac{|\Psi_0|^2 l}{2} - \frac{1}{4} \frac{|\Psi_0|^4}{(\zeta_N \Omega^2)^2}. \quad (9.18)$$

Из этих выражений следует, что устойчивость может иметь место при выполнении условия

$$\zeta_N l + \zeta_L L = 0, \quad (9.19)$$

когда вблизи нулевых частот $\cos \theta$ не возрастает, а при $\Omega \rightarrow \infty$ $\cos \alpha_1$ стремится к величине, меньшей единицы. Это означает, что при наличии неустойчивости плоской волны в нелинейной среде ($\zeta_N \epsilon' > 0$) периодическая система может быть устойчива, если знаки дисперсии в линейной и нелинейных средах не совпадают.

Достаточные условия устойчивости можно получить при численном исследовании зависимости $\cos \theta$ для промежуточных значений частоты Ω . Целесообразно использовать три параметра: безразмерную частоту $\nu^2 = (\zeta_N \Omega^2) / |\Psi_0|^2$, $B = |\Psi_0|^2 l$ — инкремент максимально растущих возмущений в слое нелинейной среды, $\tilde{L} = -(\zeta_L L) / (\zeta_N l)$ —

произведение отношения длин линейного и нелинейного промежутков на отношение соответствующих коэффициентов дисперсии. На рис. 9.2 приведены зависимости $\cos \theta$ от ν при различных значениях B и $\tilde{L} = 1$, т. е. при выполнении равенства (9.19). Из них следует, что при $\tilde{L} = 1$ плоская волна в периодической системе устойчива до $B \approx 3$; неустойчивость возникает при

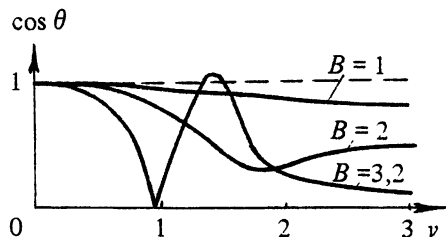


Рис. 9.2. Зависимость $\cos \theta$ от частоты ν при $\tilde{L} = 1$ и различных значениях интеграла распада

$\nu \approx 2^{1/2}$. Подробное исследование показывает, что при $\tilde{L} = 1$ и $\nu \approx 2^{1/2}$ границей устойчивости является $B = \pi$: при $B > \pi$ периодическая система неустойчива, при $B < \pi$ — устойчива.

При $\tilde{L} \neq 1$ области неустойчивости имеют место и при $B \leq \pi$. Характер их появления показан на рис. 9.3, где приведена зависимость $\cos \theta$ для трех значений \tilde{L} и $B = 2$. При $\tilde{L} = 0,9$ имеется область неустойчивости вблизи $\nu \approx 3,3$; при $\tilde{L} = 1,2$ имеется область неустойчивости вблизи $\nu \approx 0$ и $\nu \approx 3,2$.

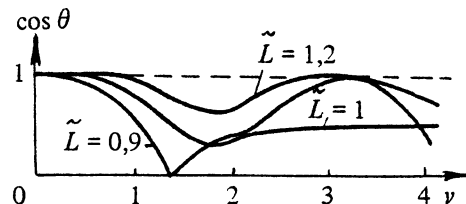


Рис. 9.3. Зависимость $\cos \theta$ от частоты ν при $B = 2$ и различных значениях \tilde{L}

Таким образом, неустойчивость в периодической системе относительно временных возмущений отсутству-

ет, если знаки дисперсии на линейном и нелинейном участках различны, длины удовлетворяют условию (9.19) и амплитуда мощной волны невелика

$$|\Psi_0|^2 l < \pi. \quad (9.20)$$

Это условие может быть выражено через плотность потока мощности I

$$(8\epsilon' k_0 l_p I) / c < 1.$$

Рассмотрим подавление пространственной ($\Omega = 0, \kappa_{\perp} \neq 0$) неустойчивости. Полное подавление, т. е. подавление неустойчивости на всех пространственных частотах, невозможно, поскольку не выполняется условие, аналогичное (9.19). Исследуем подробнее случай самофокусировочной неустойчивости при малом значении инкремента $B \ll 1$ на одном элементе. В области неустойчивости в нелинейной среде ($v^2 = \kappa_{\perp}^2 / |\Psi_0|^2 < 2$) величина $A \approx 1 + B^2/8$ является почти постоянной величиной (не зависит от v), а $\tilde{\varphi} \approx -B/2 + [Bv^2(L+l)]/2l$. Приравнивая последнее выражение к $\pm B/2$, когда $\cos \tilde{\varphi} \approx 1 - B^2/8$ и $\cos \theta \approx 1$, определим границы первой зоны неустойчивости: $v_1^2 \approx 0$, $v_2^2 \approx 2l/(L+l)$. Максимальный инкремент в ней достигается при $v_{\max}^2 \approx 1/(L+l)$ и равен максимальному инкременту в сплошной среде при совпадении ее длины с длиной нелинейного участка периодической системы. Ширина первой зоны неустойчивости в периодической системе сужается по сравнению со сплошной средой в $l/(L+l)$ раз, так что мощность, приходящаяся на одну неоднородность, в $l/(L+l)$ раз больше мощности, приходящейся на одну неоднородность, в сплошной нелинейной среде. Это можно интерпретировать как увеличение критической мощности самофокусировки в периодической системе.

Можно выбрать длину линейного промежутка $L \doteq (\pi l)/B$ так, чтобы подавлялись максимально растущие в сплошной среде возмущения $\varphi|_{v^2=1} \approx \pi/2$. На таком расстоянии в нелинейной среде амплитудная модуляция переходит в фазовую. Величина $\tilde{\varphi}$ при изменении $0 < v^2 < 2$ меняется от $-B/2$ до величины $\pi + B/2$, большей, чем π . Это значит, что будут две области неустойчивости: низкочастотная вблизи $v^2 \approx 0$ и высокочастотная вблизи $v^2 \approx 2$. Максимальный инкремент в обеих одинаков и равен максимальному инкременту в сплошной среде.

Выше было показано, что в периодической системе возможно подавление временной неустойчивости плоской волны при наличии соответствующей дисперсии в линейном и нелинейном элементах. Используя эти результаты, а также известную аналогию между

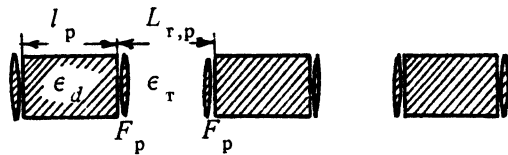


Рис. 9.4. Периодическая система из нелинейного диэлектрика с ретрансляторами

дифракцией и дисперсией [42], целесообразно рассмотреть оптическую систему, которая может менять направление развития дифракционных явлений. Это имеет место в известных оптических системах — ретрансляторах [204], переносящих изображение из одной плоскости в другую.

Простейшей такой системой является телескоп — пара софокусных линз (рис. 9.4), приложенных к линейному слою, с фокусным расстоянием F_p , расположенных на расстоянии $L_{r,p} = 2F_p^*$. Такая пара может переносить изображение на расстояние $-L_{r,p}$. Рассмотрим телескоп с увеличением в единицу, заполненный средой с проницаемостью ϵ_r , групповой скоростью v_r и коэффициентом дисперсии ζ_r^{**} .

Рассматриваемая система представляет собой при отсутствии нелинейности так называемую линзовую линию, в которой при определенных условиях [84, 205, 206] могут распространяться локализованные в поперечном сечении волновые пучки. Распространение возмущений в ограниченных волновых пучках (см. гл. 4) требует для описания привлечения численных методов. Поэтому ограничимся исследованием одного частного случая, который и представляет наибольший интерес с точки зрения подавления неустойчивости, когда в системе в нелинейном диэлектрике существует сравнительно простое невозмущенное решение в виде плоской волны. В свободном пространстве благодаря линзам поле стягивается в точку в плоскости, находящейся посередине между линзами. После прохождения этой плоскости пучок расходится в виде сферической волны, фазовый фронт которой следующая линза превращает в плоский, благодаря чему волна в нелинейном диэлектрике снова распространяется в виде плоской. Определим матрицу передачи волн вида $e^{i k_{\perp} r_{\perp}}$ через такую систему. Для этого воспользуемся интегральными соотношениями [205], связывающими поля на входе и выходе теле-

* Помещая поглощающую диафрагму в фокальную плоскость телескопа, получим пространственный фильтр — устройство, которое также может быть использовано для подавления самофокусирующей неустойчивости [207].

** Такой телескоп дополнительно переворачивает изображение. Для наших целей исследования неустойчивости волн последнее не является принципиальным, и им пренебрежем.

скопа. Если пренебречь дисперсией в веществе линзы, то матрица передачи возмущений через телескоп имеет вид

$$L_T = \begin{pmatrix} \exp\left(-i \frac{\kappa_1^2 L_T + \zeta_T \Omega^2 L_T}{2} - i\Omega \zeta_T\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i \frac{\kappa_1^2 L_T + \zeta_T \Omega^2 L_T}{2} - i\Omega \zeta_T\right) \end{pmatrix}, \quad (9.21)$$

где $L_T = \frac{k_d^2 L_{T,p}}{k_T}$ — безразмерная длина телескопа, k_T — волновое число в среде телескопа. Характеристическое уравнение для коэффициента Λ имеет вид (9.15) с изменением знака у длины L , стоящей перед χ_1 . Это изменение приводит к важным последствиям.

Рассмотрим поведение различных пространственных возмущений на несущей частоте, т. е. полагая $\Omega = 0$. Повторяя вышеизложенные рассуждения, придем к выводу, что в системе с телескопом рост пространственных возмущений подавляется, если их максимальный инкремент на отдельном элементе удовлетворяет условию (9.20), а длина телескопа подобрана так, чтобы удовлетворялись условия равенства длин дифракций в нелинейном веществе и веществе, заполняющем телескоп. Это равенство в размерных переменных имеет вид

$$L_{T,p} = \left(\frac{\epsilon_T}{\epsilon_d}\right)^{1/2} l_p. \quad (9.22)$$

В практически используемых системах требуется подавление неустойчивости достаточно мощных волн, так что телескоп, где напряженность полей достигает больших значений в фокальной плоскости, приходится делать вакуумным [21]. Из-за отсутствия дисперсии вакуумированный телескоп будет подавлять только пространственную неустойчивость, не оказывая влияния на временную.

Полагая, что интенсивность I ограниченного пучка шириной $2a$ и мощностью P связаны между собой соотношением $I = \frac{P}{\pi a^2}$, получим на основе (9.20) оценку мощности, которую можно передавать при сохранении устойчивости относительно пространственных возмущений

$$P < 0,85 P_{кр} \frac{k_d a^2}{l_p},$$

где $P_{кр}$ — мощность однородного пучка (см. гл. 3).

9.2. Неустойчивость плоской волны в периодической системе элементов с релаксирующей нелинейностью

Выше рассматривалась неустойчивость плоской волны в периодической системе с элементами, обладающими стационарной нелинейностью, когда время релаксации пренебрежимо мало. Интерес представляет исследование неустойчивости в системе из элементов с релаксирующей нелинейностью. Пусть длина нелинейных элементов l_p , они разделены ретрансляторами длиной $L_{т,р}$, а нелинейная часть $\Delta \varepsilon_{NL}$ диэлектрической проницаемости описывается релаксационным уравнением (см. гл. 8)

$$\frac{d(\Delta \varepsilon_{NL})}{dt} + \frac{\Delta \varepsilon_{NL}}{\tau_0} = \frac{\varepsilon' |E_0|^2}{\tau_0},$$

учитывающим время установления τ_0 нелинейной поляризации. Мы ограничимся случаем отсутствия дисперсии в линейной части проницаемости.

В сплошной нелинейной среде в этом случае возмущения на фоне интенсивной плоской волны могут развиваться на частотах, отличающихся от несущей ω_0 на величину $\pm \Omega$, причем постоянные распространения возмущений h_0 в безразмерных переменных $v^2 = \kappa_{\perp}^2 / (\varepsilon' |E_0|^2)$, $B = k_d l_p \varepsilon' |E_0|^2$ могут быть выражены в следующем виде (см. гл. 4):

$$h_0 = \frac{B}{2l} \left(v^4 - \frac{2v^2}{1 + i\Omega \tau_0} \right)^{1/2}, \quad l = k_d l_p.$$

Поле внутри нелинейного диэлектрика представим в форме

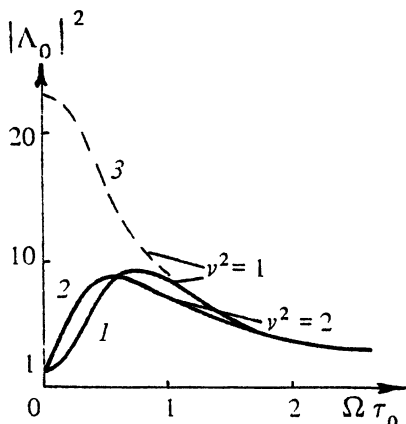
$$E = E_0 + A_{\chi} \exp(-ik_{\perp} r_{\perp} + i\Omega t) + A_{-\chi} \exp(ik_{\perp} r_{\perp} - i\Omega t).$$

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, получим уравнение (9.15) для характеристического числа Λ в периодической среде с ретрансляторами с заменой L на $-L$ и несколько другой зависимостью h_0 от безразмерной поперечной частоты v . Используя замену $\Lambda_0 = \Lambda \exp(i\alpha)$ приведем уравнение (9.15) к виду

$$\Lambda_0^2 - 2\Lambda_0 \left[\cos \left(\frac{\chi_L^2 L}{2} \right) \cos h_0 l - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin \left(\frac{\chi_L^2 L}{2} \right) \sin h_0 l \right] + 1 = 0. \quad (9.23)$$

Рис. 9.5. Зависимость коэффициента передачи от нормированной частоты $\Omega \tau_0$ при $B = \pi$ и $L = 1$:

- 1 — система с ретрансляторами,
- 2 — система с ретрансляторами,
- 3 — сплошная среда



Из уравнения (9.23) следует, что модуль одного из чисел Λ_0 всегда больше единицы, поскольку находящееся в квадратных скобках число

$$\left[\cos \left(\frac{\chi_L^2 L}{2} \right) \cos h_0 l - \frac{1}{2} \left(\frac{2h_0}{\chi^2} + \frac{\chi^2}{2h_0} \right) \sin \left(\frac{\chi_L^2 L}{2} \right) \sin h_0 l \right] \quad (9.24)$$

имеет отличные от нуля действительные и мнимые части. Поскольку (9.24) имеет равную нулю мнимую часть для возмущений на несущей частоте, то только такие возмущения могут быть полностью подавлены в периодической системе с ретрансляторами. У возмущений на других частотах имеет место только уменьшение инкремента.

Для иллюстрации этого на рис. 9.5 приведена зависимость $|\Lambda_0|^2$ от $\Omega \tau_0$ для случая, когда система для возмущений на несущей частоте находится по параметрам B и $L_{т,р}$ на границе области устойчивости ($B = \pi$, $L_p = -L_{т,р} = (\epsilon_d/\epsilon_r)^{1/2} l_p$). Из рисунка видно, что модули характеристических чисел равны единице только при $\Omega = 0$. Для сравнения на том же рисунке дана аналогичная кривая для сплошной среды $|\Lambda_0|^2 = |\exp(h_0 B)|$. Некоторое подавление неустойчивости (уменьшение инкрементов) имеет место в системе с элементами, обладающими релаксирующей нелинейностью в области частот $\Omega < 1/\tau_0$, причем эффективность подавления зависит от пространственной частоты.

9.3. Неустойчивость эллиптически-поляризованной плоской волны в периодической системе

Как известно (см. гл. 1), в средах с недиагональным тензором нелинейной поляризуемости параметры неустойчивости плоской волны (инкремент и характерный масштаб наиболее быстро растущих возмущений) зависят от состояния поляризации интенсивной волны. В периодической системе самовоздействие также зависит от поляризации. Поскольку критическая мощность самофокусировки в средах с керровской и электронной нелинейностями увеличивается при переходе к волнам с круговой поляризацией, то можно надеяться, что в периодической системе с ретрансляторами условия подавления самофокусировки (9.20) могут быть смягчены.

В параксиальном приближении уравнения для амплитуд волн $\Psi_{0\pm}$ с круговыми поляризациями в нелинейной и линейной средах имеют вид, соответственно (см. гл. 3)

$$\Delta_{\perp} \Psi_{\pm} - 2i \frac{d\Psi_{\pm}}{dz} + [|\Psi_{\pm}^0|^2 + (1 + \beta)|\Psi_{\mp}|^2] \Psi_{\pm} = 0,$$

$$\Delta_{\perp} \Psi_{\pm} - 2i \frac{d\Psi_{\pm}}{dz} = 0.$$

Возмущения плоской волны с эллиптической поляризацией в сплошной нелинейной среде (см. гл. 4) разделяются на два типа: устойчивые с постоянными распространения

$$h_{1,2} = \pm \frac{B}{2l} \{v^4 + v^2[(1 - |R|^2)^2 + 4(1 + \beta)^2 |R|^2]^{1/2} - v^2(1 + |R|^2)\}^{1/2}$$

и неустойчивые с постоянными распространения

$$h_{3,4} = \pm \frac{B}{2l} \{v^4 - v^2[(1 - |R|^2)^2 + 4(1 + \beta)^2 |R|^2]^{1/2} - v^2(1 + |R|^2)\}^{1/2},$$

где $B = |\Psi_{0+}|^2 l$, $v^2 = \kappa_{\perp}^2 / |\Psi_{0+}|^2$, $R = \Psi_{0+} / \Psi_{0-}$ — отношение амплитуд право- и левовращающихся волн.

Поляризация возмущений в неустойчивой паре будет более близкой к линейной по сравнению с поляризацией интенсивной волны. В другой паре волн поляризация будет эллиптической, ортогональной к первой. Каждому значению поляризации плоской волны соответствует свое значение поляризации возмущений.

Поскольку волны возмущений разбиваются на две группы, а в свободном пространстве поляризация не меняется, то в периодической системе их можно рассматривать независимо друг от друга.

Рассмотрим подавление пары неустойчивых плоских волн. Повторяя рассуждения п. 9.1, получим условие отсутствия неустойчивости, которое в переменных B, v, L, l, R запишется так:

$$\left[\left| \cos \left(\frac{\nu^2 BL}{2} \right) \cos h_3(\nu) l - \frac{1}{2} \left(\frac{2h_3}{\nu^2} + \frac{\nu^2}{2h_3} \right) \sin \left(\frac{\nu^2 BL}{2} \right) \sin h_3(\nu) l \right| \right] \leq 1. \quad (9.25)$$

Выражение в квадратных скобках слева в (9.25) с точностью до замен величин $|\Psi_0|^2$ на

$$|\Psi_{0+}|^2 \{1 + |R|^2 + [(1 - |R|^2)^2 + 4(1 + \beta)^2 |R|^2]^{1/2}\}$$

и L на $-L_T$ совпадает с выражением (9.18). Из проведенного выше исследования выражения (9.18) следует, что подавление неустойчивости возможно при использовании ретрансляторов, если максимальный инкремент не слишком велик

$$|\Psi_+|^2 \{1 + |R|^2 + [(1 - |R|^2)^2 + 4(1 + \beta)^2 |R|^2]^{1/2}\} l \leq \pi.$$

Выразим условие подавления через плотность потока мощности $I = |E^+|^2 (1 + |R|^2) (c(\epsilon_d)^{1/2}/8\pi)$:

$$\frac{8I\epsilon'_d l}{c} F(|R|) \leq 1, \quad (9.26)$$

где

$$F(|R|) = \frac{1 + |R|^2 + [(1 - |R|^2)^2 + 4(1 + \beta)^2 |R|^2]^{1/2}}{2(1 + |R|^2)}$$

— поправочный коэффициент, зависящий от поляризации; для круговой поляризации он обращается в единицу. Из неравенства (9.26) следует, что плотность потока мощности на одном элементе при его заданной длине и использовании оптимальных ретрансляторов, при которых еще возможно подавление неустойчивости, в средах с электронной нелинейностью при круговой поляризации увеличивается в полтора раза по сравнению с линейной, т. е. во столько же раз, во сколько критическая мощность самофокусировки пучка с круговой поляризацией больше критической мощности пучка с линейной поляризацией. Численное исследование показывает, что при условии подавления роста неустойчивой пары волн, рост устойчивой в сплошной среде пары остается ограниченным; условие, аналогичное (9.18), выполняется.

9.4. Нелинейные квазиоптические волноводы

Неустойчивость, имеющая место при распространении плоской волны в сплошной нелинейной среде, как показано выше, может быть подавлена в периодической системе. Однако в реальных сис-

темах существуют не плоские волны, а ограниченные волновые пучки. Их изучение требует численных методов. Численному анализу можно предпослать безабберационное рассмотрение колоколообразных пучков, предполагая сохранение их поперечной структуры. При этом в решении уравнения в нелинейном слое пренебрегается изменением амплитудного распределения пучка и предполагается, что пучок имеет гауссов профиль шириной $2a_p$ и параболический фазовый фронт с радиусом кривизны F_p

$$E = E_0 \exp \left(-\frac{r_p^2}{2a_p^2} - \frac{ik_0 r_p^2}{2F_p} \right).$$

Благодаря такому предположению параболическое уравнение в линейной среде

$$\Delta_{\perp} E - 2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (9.27)$$

можно решить точно, а в решении уравнения

$$\Delta_{\perp} E - 2ik_d \frac{\partial E}{\partial z} + k_d^2 \varepsilon' |E|^2 E = 0 \quad (9.28)$$

в нелинейной среде пренебречь всеми абберациями, вносимыми нелинейностью в приближении геометрической оптики. Решая уравнение (9.28), получим, что нелинейный слой с плоскопараллельными границами можно заменить линзой [41, 209] с фокусным расстоянием

$$F_p = \frac{\varepsilon_d^{1/2} k_0^2 a_p^4 P_{кр}}{4l_p P}, \quad (9.29)$$

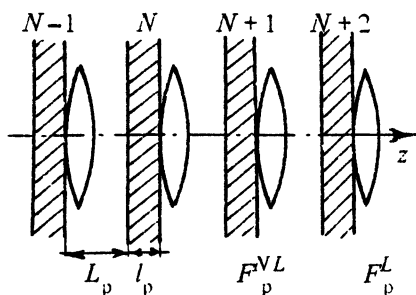
зависящим от ширины и мощности падающего пучка. Фокусное расстояние нелинейной линзы $F_{p\Sigma}$ толщиной l_p определяется из соотношения

$$\frac{1}{F_{p\Sigma}} = \frac{1}{F_p^{NL}} + \frac{1}{F_p^L},$$

где F_p^L — фокусное расстояние линзы в слабом поле. При этих предположениях задача о распространении пучка в периодической системе может быть решена весьма просто.

Рассмотрим распространение волновых пучков через волновод, образованный линзами с фокусным расстоянием F_p^L , плоскопараллельными пластинами с проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_d (1 + \varepsilon' |E|^2)$ толщиной

Рис. 9.6. Нелинейный квазиоптический волновод



l_p , примыкающими к линзам и расположенными в пространстве с проницаемостью ϵ_0 на расстоянии L_p друг от друга (рис. 9.6). Комбинацию из пластины и линзы, следуя терминологии квазиоптики, мы будем называть фазовым корректором [84]. Найдем, как меняется ширина пучка a_N и радиус кривизны его волнового фронта R_N перед фазовым корректором в зависимости от номера последнего N . Введем новые обозначения $a = k_0 a_p$, $F^L = k_0 F_p^L$, $L = k_0 L_p$, $F^{NL} = k_0 F_p^{NL}$, $l = k_0 l_p$, и новые зависимые переменные:

$$x_N = \frac{L}{a_N^2}, \quad y_N = \frac{L}{R_N} - \frac{L}{2F_N}, \quad (9.30)$$

связанные с a_N и R_N . Используя соотношения работы [205], связывающие структуры пучков на N -м и $(N+1)$ -м корректорах, получим следующую систему разностных уравнений для x_N и y_N :

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= \frac{x_N}{x_N^2 + (y_N + g_L - L/F_N^{NL})^2}, \\ y_{N+1} &= -\frac{y_N + g_L - L/F_N^{NL}}{x_N^2 + (y_N + g_L - L/F_N^{NL})^2} + g_L, \end{aligned} \quad (9.31)$$

где $g_L = 1 - L/2F^L$. Выражая величину L/F_N^{NL} через параметр $Q = (4lP)/(\epsilon_d LP_{кр})$, пропорциональный мощности пучка, и "обратную ширину" пучка x_N

$$d \frac{L}{F_N^{NL}} = Q x_N^2,$$

перепишем систему уравнений (9.31) в виде

$$x_{N+1} = \frac{x_N}{x_N^2 + (y_N + g_L - Q x_N^2)^2},$$

$$y_{N+1} = -\frac{y_N + g_L - Qx_N^2}{x_N^2 + (y_N + g_L - Qx_N^2)^2} + g_L. \quad (9.32)$$

По начальной ширине пучка a_N и кривизне его фазового фронта $1/R_N$ можно определить значения этих величин в любом месте периодической системы. Получить, однако, аналитическое решение, выражающее x_N и y_N через начальные значения x_0 и y_0 не удастся.

Поэтому ограничимся исследованием характерных и простейших решений, описывающих стационарные, не зависящие от номера N корректора пучки в наиболее интересном случае $Q > 0$ — фокусирующей кубической нелинейности. Стационарные решения (9.32) находятся без труда

$$y_{\text{ст}}^{\pm} = \frac{Q(x_{\text{ст}}^{\pm})^2}{2} = g - g_L + \frac{L}{FNL}, \quad (9.33)$$

$$x_{\text{ст}}^{\pm} = \frac{2^{1/2}}{Q^2} [Qg_L - 1 \pm (1 + Q^2 - 2g_L Q)^{1/2}]^{1/2} = (1 - g^2)^{1/2}, \quad (9.34)$$

где $g = 1 - L/2F^L - L/2F^{NL}$ — параметр, используемый при описании квазиоптических волноводов [205, 206].

Эти пучки существуют при определенных значениях параметров Q и g_L . Из-за слишком сильной линейной фокусировки при $g_L < -1$ таких пучков не существует. При более слабой фокусировке ($-1 < g_L < 1$) имеет место один пучок $x_{\text{ст}}^+$, $y_{\text{ст}}^+$, который при уменьшении мощности ($Q \rightarrow 0$) переходит в пучок линейной системы. При расфокусирующих линейных линзах ($g_L > 1$) могут существовать два стационарных волновых пучка с меньшей

$$a_{\text{ст}}^{+2} = \frac{1}{2^{1/2}} \frac{LQ}{\{g_L Q - 1 + [(g_L Q - 1)^2 + (1 - g_L^2) Q^2]^{1/2}\}^{1/2}} \quad (9.35)$$

и большей

$$a_{\text{ст}}^{-2} = \frac{1}{2^{1/2}} \frac{LQ}{\{g_L Q - 1 - [(g_L Q - 1)^2 + (1 - g_L^2) Q^2]^{1/2}\}^{1/2}} \quad (9.36)$$

ширинами.

При отсутствии линейных линз ($g_L \rightarrow 1$) ширина пучка $a_{\text{ст}}^-$ обращается в бесконечность, а ширина пучка $a_{\text{ст}}^+$ имеет конечную величину

$$a_{\text{ст}}^{+2} = \frac{LQ}{2(Q - 1)^{1/2}}.$$

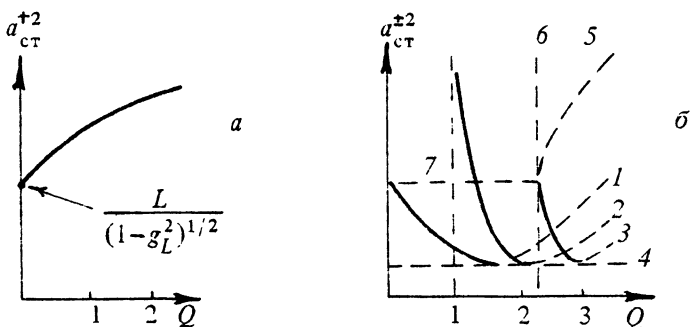


Рис. 9.7. Зависимость квадрата ширины пучка от мощности при $-1 < g_L < 0$ (а) и при $g_L > 0$ (б) (сплошная кривая — устойчивая ветвь, пунктир — неустойчивая):

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1 — $g_L < 1$, пучок $a_{ст}^{+2}$; | 5 — $g_L > 1$, пучок $a_{ст}^{-2}$; |
| 2 — $g_L = 1$, пучок $a_{ст}^{+2}$; | 6 — прямая $Q = g_L + (g_L^2 - 1)^{1/2}$; |
| 3 — $g_L > 1$, пучок $a_{ст}^{+2}$; | 7 — прямая $a_{ст}^{+2} = L / (1 - g_L^2)^{1/2}$ |
| 4 — прямая $a_{ст}^{-2} = L$; | |

При $g_L \geq 1$ локализованные решения существуют лишь при достаточной мощности пучка, когда $Q > g_L + (g_L^2 - 1)^{1/2}$, или

$$P > \frac{l}{\varepsilon_d L} [g_L + (g_L^2 - 1)^{1/2}] P_{кр} = P_{пор}.$$

Мощность $P_{пор}$ можно назвать пороговой мощностью периодической системы в зоне неустойчивости ($g_L \geq 1$). При увеличении мощности в системе с наперед заданным параметром $g_L > 1$ ширина стационарного пучка сначала уменьшается, при

$$g_L = \frac{L}{2FNL}, \quad Q = 2g_L, \quad (9.37)$$

достигает минимума и при дальнейшем увеличении мощности увеличивается. Минимальная ширина пучка достигается, когда система с учетом линейной и нелинейной линз становится конфокальной.

Графики зависимости ширины стационарных пучков от их мощности при различных степенях линейной фокусировки показаны на рис. 9.7, а, б. Если $g_L < 0$, ширина стационарных пучков при увеличении мощности только увеличивается, в частности, при близости линейной системы к концентрической

$$a_{ст}^{+2} \approx \frac{L(Q+1)^{1/2}}{2^{1/2}(1-|g_L|)^{1/2}}. \quad (9.38)$$

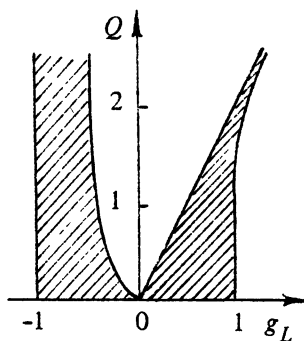


Рис. 9.8. Области устойчивости узкого пучка $a_{\text{ст}}^+$

При отсутствии линейных линз ($g_L = 1$) и уменьшении мощности до $P_{\text{пор}}$ единственный существующий пучок расширяется, переходя в неограниченную плоскую волну.

Найденные стационарные пучки являются частными решениями (9.37), которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми при возмущении их параметров. В линейных линзовых волноводах область устойчивости стационарных пучков совпадает с областью существования самого стационарного решения $|g_L| < 1$.

Пучок с параметрами, отличными от стационарных, в линейной ($P \rightarrow 0$) системе ($x_N \neq x_{\text{ст}}, y_N \neq y_{\text{ст}}$) совершает незатухающие колебания в ограниченной области фазового пространства (x_N, y_N) . В нелинейном квазиоптическом волноводе исследование устойчивости надо проводить заново.

Рассмотрим малые отклонения Δx и Δy от стационарных значений $x_{\text{ст}}$ и $y_{\text{ст}}$ в нелинейных волноводах. Линеаризованная по Δx и Δy система (9.32) вблизи стационарного состояния имеет вид

$$\Delta x_{N+1} = [-1 + 2g^2 + 4g(1 - g^2)Q] \Delta x_N - [2g(1 - g^2)^{1/2}] \Delta y_N, \quad (9.39)$$

$$\Delta y_{N+1} = 2(1 - g^2)^{1/2} [g + (1 - g^2)Q] \Delta x_N + (-1 + 2g^2) \Delta y_N. \quad (9.40)$$

Для характеристических чисел $\Lambda = \exp \mu$ решений (9.39), (9.40) в виде $\Delta x_N \approx \exp(\mu N)$, $\Delta y_N \approx \exp(\mu N)$ имеем уравнение

$$\Lambda^2 - 2\Lambda [-1 + 2g^2 + 2g(1 - g^2)Q] + 1 = 0. \quad (9.41)$$

Возмущения стационарного волнового пучка в нелинейном линзовом волноводе не будут нарастать, если корни уравнения (9.41) по модулю равны единице, что возможно при выполнении условий

$$-1 < -1 + 2g^2 + 2g(1 - g^2)Q < 1.$$

Исследование этого неравенства показывает, что пучок с большим значением $x_{\text{ст}}^-$ в области своего существования неустойчив. Области устойчивости пучка с меньшим значением $x_{\text{ст}}^+$ показаны на рис. 9.8 и определяются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned}
g_L \leq -1, \text{ пучка не существует при } Q > 0, \\
-1 \leq g_L \leq -1/2, & \quad 0 \leq Q \leq \infty, \\
-1/2 \leq g_L < 0, & \quad 0 \leq Q < -(2g_L)/(1-4g_L^2), \\
0 < g_L < 1, & \quad 0 < Q < 2g_L, \\
1 < g_L, & \quad g_L + (g_L^2 - 1)^{1/2} < Q < 2g_L.
\end{aligned}$$

Отметим, что нелинейной конфокальной системе соответствует кривая $Q = 2g_L$. Она находится на границе области устойчивости так, что доконфокальная в слабом поле система ($g_L > 0$) переходит по мере увеличения мощности в законфокальную и становится неустойчивой. Законфокальные же в слабом поле системы остаются устойчивыми, причем при $-1 \leq g_L \leq -1/2$ мощность, которую можно передать через систему, неограничена.

В доконфокальной системе ($g_L > 0$) могут существовать пучки с мощностью

$$P \leq \frac{2\varepsilon_d L_p P_{\text{кр}}}{l_p} g_L, \quad (9.42)$$

что может быть интерпретировано как возрастание мощности квазиоднородных пучков в периодической системе по сравнению с мощностью однородных пучков в однородной среде. Только при такой мощности самофокусировка уравнивается дифракцией (расплыванием) пучка. Это находится в согласии с результатами рассмотрения неустойчивости плоской волны в периодической системе, когда на характерный поперечный масштаб неустойчивости приходится мощность, приблизительно в L_p/l_p раз превышающая критическую мощность в однородной среде.

При $g_L > 1$ периодическая система является фильтром-ограничителем, пропускающим пучки определенной мощности

$$g_L + (g_L^2 - 1)^{1/2} < \frac{P l_p}{P_{\text{кр}} L_p \varepsilon_d} < 2g_L, \quad (9.43)$$

причем полоса пропускания мощности сужается $(\Delta P)/P \approx 1/(4g_L^2)$ с увеличением параметра неконфокальности g_L .

Для определения влияния ограниченности пучка на степень подавления самофокусирующей неустойчивости в периодической системе с равными толщинами линейной L и нелинейной l частей и

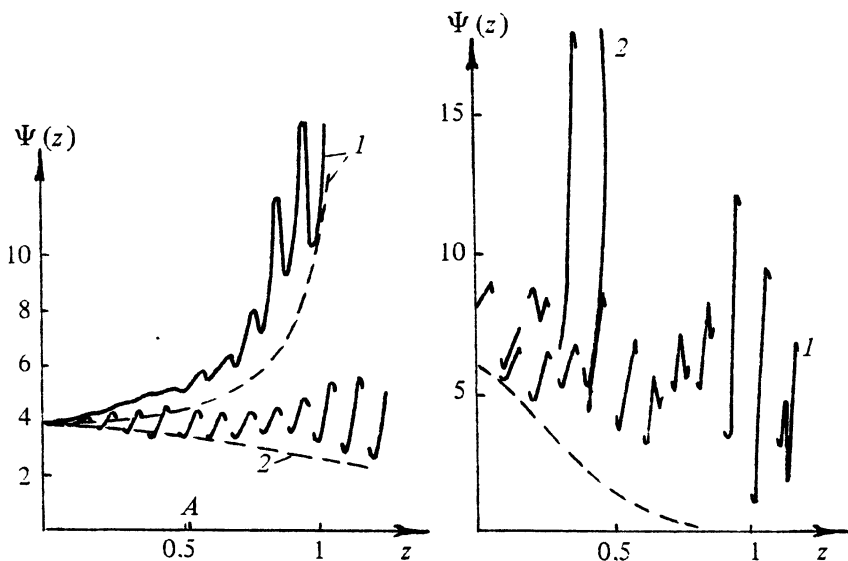


Рис. 9.9. Зависимость поля на оси при распространении первоначально гауссова пучка с амплитудой $\Psi_0 = 4$ (сплошные кривые: 1 – в слоистой среде, 2 – в системе с ретрансляторами (внутри ретранслятора поведение поля не показано). Пунктиром показаны зависимости по уравнению (9.32).

Рис. 9.10. Зависимость поля на оси при распространении первоначально гауссова пучка в системе с ретрансляторами: 1 – $\Psi_0 = 6$, 2 – $\Psi_0 = 8$ (внутри ретранслятора поведение поля не показано)

выявления степени достоверности безабберационного приближения приведем результаты численного исследования распространения в ней первоначально гауссова пучка. Решалась следующая система уравнений, записанная в безразмерных переменных:

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{d\Psi}{dz} + |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (9.44)$$

при $0,1 \cdot N < z < 0,1 \cdot N + 0,05$,

$$\Delta_{\perp} \Psi - 2i \frac{d\Psi}{dz} = 0 \quad (9.45)$$

при $0,1 \cdot N + 0,05 < z < 0,1 \cdot (N + 1)$ с начальным условием $\Psi = \Psi_0 \exp(-r^2/2)$; в уравнениях (9.44), (9.45) $N = 1, 2, 3, \dots$ – целые числа – номера периодов.

Изменение поля на оси в зависимости от продольной координаты при $\Psi_0 = 4$ ($P = 4,3P_{кр}$) показано на рис. 9.9 (кривые 1). Их близость свидетельствует о том, что при небольшом начальном интеграле распада $B(0) = \Psi(0)_0^2 l \approx 0,8 < 1$, приближенная теория может быть использована для оценок. Точкой А на этом рисунке отмечена длина сплошной среды, при которой произошло бы "схлопывание" при таком же начальном значении поля.

Большой выигрыш в уменьшении максимальной интенсивности в согласии с п. 9.1 может быть получен в системе, близкой к концентрической (кривые 2 на рис. 9.9).

Изменение поля на оси в зависимости от продольной координаты при $\Psi_0 = 6; 8$ и, соответственно, $B(0) = 1,8; 3,2$ показано на рис. 9.10. Из сравнения кривых на рис. 9.9, 9.10 видно, что удовлетворительное согласие с приближенной теорией имеет место только при $B(0) < 1$ (пунктир на рис. 9.9). При $B(0) > 1$ (пунктир, относящийся к случаю $\Psi_0 = 6$, на рис. 9.10) такого согласия нет.

Проведенные расчеты распространения пучков в системе с ретрансляторами показывают, что последние при $B(0) \leq 1$ подавляют самофокусировку, позволяя увеличить путь в нелинейной среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С момента предсказания, а вскоре теоретического и экспериментального подтверждения эффекта самофокусировки прошло уже более тридцати лет. В 1997 году ушел из жизни и автор открытия эффекта Г. А. Аскарьян, неиссякаемый энтузиазм которого многие годы поддерживал интерес к явлению самофокусировки волн и привлекал к нему новых исследователей.

При всей простоте и очевидности эффекта теория самофокусировки в настоящее время составляет большой раздел в теории волн, объясняя многие особенности формирования пространственных структур волновых полей в нелинейных средах. Особо следует отметить роль, которую теория самофокусировки сыграла в развитии некоторых математических идей в теории нелинейных уравнений [216]. В первую очередь это теория возникновения сингулярностей в решении, инвариантность уравнений относительно определенных классов преобразований, возможность описания решения с помощью моментов искомой функции, интегрируемость, устойчивость пространственно локализованных структур и некоторые другие вопросы.

В практическом плане самофокусировка явилась важнейшим элементом в расчетах мощных твердотельных лазеров [73], определив предельные плотности потока мощности, превышение которых приводит к развалу пучка и разрушению активных элементов. Обеспечивая многократный выигрыш в интенсивности поля, самофокусировка может кардинально влиять и на ход различных многоквантовых процессов, связанных с преобразованием частот [217, 218], пробоем, нелинейным поглощением и т. п.

Важным направлением работ является исследование взаимной локализации среда — поле в плазме газового разряда, создаваемого и поддерживаемого высокочастотным полем [219–220]. Нельзя не отметить и роли самофокусировки в создании коротких оптических

импульсов [221–224]. Возможна также самофокусировка непрерывных волн при нелокальной нелинейности, обусловленной нагревом, нестационарной стрикцией, конвекцией [52, 79, 80] и т. п. В отличие от строгой теории самофокусировки в средах с кубической нелинейностью в описании всех этих вопросов значительное место должно быть уделено физическому и вычислительному эксперименту. Все это могло бы составить материал отдельной книги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскаръян Г. А. Воздействие градиента поля интенсивного э.-м. луча на электроны и атомы // ЖЭТФ. 1962. Т. 42, вып. 6. С. 1567.
2. Таланов В. И. О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7, № 7. С. 564.
3. Пилипецкий Н. Ф., Рустапов А. Р. Наблюдение самофокусировки света в жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2, вып. 2. С. 88.
4. Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H. Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13, № 15. P. 479.
5. Таланов В. И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2, вып. 5. С. 218.
6. Kelley P. L. Self-focusing of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 15, № 26. P. 1005.
7. Гольдберг В.Н., Таланов В. И., Эрм Р. Э. Самофокусировка аксиально-симметричных волновых пучков // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 5. С. 574.
8. Dawes E., Marburger J. H. Computer studies in self-focusing // Phys. Rev. 1969. V. 179, № 3. P. 862.
9. Wang C. C. Length-dependent threshold for stimulated Raman effect and selffocusing of laser beams in liquids // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16, № 9. P. 344.
10. Kaiser W., Laubereau A., Maier M., Giordmain J. A. Self-focusing of optical beams in absorbing media // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 22, № 1. P. 60.
11. Garmire E., Chiao R. Y., Townes C. H. Dynamics and characteristics of the selftrapping of intense light beams // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16, № 9. P. 347.
12. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. О самофокусировке и самоканализации интенсивных световых пучков в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1966. Т. 50, вып. 6. С. 1537.
13. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Самофокусировка света. Роль керр-эффекта и стрикции // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3, вып. 3. С. 137.
14. Райзер Ю. П. Подавление самофокусировки световых пучков и стабилизация плоской волны в слабопоглощающей среде // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4, вып. 8. С. 286.
15. Беспалов В. И., Таланов В. И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейной жидкости // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3, вып. 12. С. 471.
16. Chiao R. Y., Johnson M. A., Krinsky S., Smith H. A., Townes C. H. A new class of trapped light filaments // IEEE J. 1966. QE-2. № 9. P. 467.
17. Луговой В. Н., Прохоров А. М. О возможном объяснении мелкомасштабных нитей самофокусировки // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7, вып. 5. С. 153.
18. Дышко А. Л., Луговой В. Н., Прохоров А. М. Самофокусировка интенсивных световых пучков // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6, вып. 5. С. 655.
19. Коробкин В. В., Луговой В. Н., Прохоров А. М., Серов Р. В. Сверхкороткие импульсы ВКР и многофокусная структура световых пучков // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16, вып. 11. С. 595.

20. Аскарьян Г. А. Самофокусировка луча света при возбуждении атомов и молекул среды в луче // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4, вып. 10. С. 100.
21. Аскарьян Г. А. Нелинейность среды из-за индукционной деформации молекул, атомов и частиц среды // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6, вып. 5. С. 672.
22. Аскарьян Г. А., Михалевич В. Г., Шипуло Г. П. Нелинейное рассеяние и самофокусировка интенсивного света на возмущениях среды вблизи поглощающих неоднородностей // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, вып. 4. С. 1270.
23. Аскарьян Г. А. Самофокусировка и фокусировка ультра- и гиперзвука // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4, вып. 4. С. 144.
24. Аскарьян Г. А. Самофокусировка мощного звука при рождении пузырьков // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13, вып. 7. С. 395.
25. Литвак А. Г. О самофокусировке электромагнитных волн, связанной с тепловыми эффектами // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 4, вып. 9. С. 341.
26. Петрищев В. А. Аберрационная тепловая самофокусировка света // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 12. С. 1779.
27. Литвак А. Г. О возможности самофокусировки электромагнитных волн в ионосфере // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 9. С. 1433.
28. Литвак А. Г. Волновые пучки конечной амплитуды в магнитоактивной плазме // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, вып. 8. С. 629.
29. Таланов В. И. Автомодельные волновые пучки в нелинейном диэлектрике // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9, № 2. С. 410.
30. Таланов В. И. О фокусировке света в кубичных средах // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11, вып. 6. С. 303.
31. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 9. С. 1453.
32. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Таланов В. И. Структура поля вблизи особенности, возникающей при самофокусировке в кубичной среде // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, вып. 5. С. 1602.
33. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, вып. 5. С. 1745.
34. Бондаренко Н. Г., Еремина И. В., Таланов В. И. Уширение спектра при самофокусировке света в стеклах // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12, вып. 4. С. 125.
35. Петрищев В. А., Таланов В. И. О нестационарной самофокусировке света // Квантовая электроника. 1971. № 6. С. 35.
36. Луговой В. Н., Прохоров А. М. О спектре поля движущихся фокальных областей // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12, вып. 10. С. 478.
37. Вревский Ю. К., Таланов В. И. Способ измерения мощности светового потока субнаносекундной длительности: а. с. № 555478 с приоритетом от 20.12.73.
38. Бондаренко Н. Г., Еремина И. В., Макаров А. И., Таланов В. И. Исследование характеристик пробоя оптического стекла по уширению спектра лазерного импульса при самофокусировке // Тезисы доклада на XI Всесоюзной конференции по нерезонансному взаимодействию света с веществом. Паланга, 1984. С. 195.
39. Бондаренко Н. Г., Еремина И. В., Макаров А. И. Использование явления самофокусировки для исследования пробоя при сверхкоротком взаимодействии света с веществом // Квантовая электроника. № 33. Киев: Наукова думка, С. 89.
40. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Нелинейные квазиоптические системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 8. С. 1162–1172.
41. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Теория периодической самофокусировки световых пучков // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 6. С. 906.
42. Литвак А. Г., Таланов В. И. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 4. С. 539.
43. Ваганов Р. Б. Траектория энергетического центра волнового пучка // Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15, № 8. С. 2016.
44. Захаров В. Е., Сынах В. С., Соболев В. В. О характере особенности и стохастических явлениях при самофокусировке // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 14, вып. 10. С. 564.

45. Wood D. The self-focusing singularity in nonlinear Schrodinger equation // Studies in applied mathematics. 1984. V. 71, № 2. P. 103.
46. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Таланов В. И. Трехмерный волновой коллапс в модели нелинейного уравнения Шредингера // ЖЭТФ. 1989. Т. 95, вып. 6. С. 1945.
47. Vlasov S. N., Piskunova L. V., Talanov V. I. Distributed three-dimensional wave collapse in the model of nonlinear Schrodinger equation // Nonlinear and turbulent processes in physics. Proceedings of the III International workshop. Kiev, USSR, April 13–16. 1987. V. 2. P. 210.
48. Дегтярев Л. М., Крылов В. В. Метод численного решения задач волновых полей с особенностью // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 6. С. 1523.
49. Данилейко Ю. К., Лебедев Т. П., Маненков А. А., Прохоров А. М. Самофокусировка лазерных пучков при различных пространственных профилях падающего излучения // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, вып. 2. С. 487.
50. Kosmatov N. E., Shvets V. F., Zakharov V. E. Computer simulation of wave collapses in the nonlinear Schrodinger equation // Physika D, Nonlinear Phenomena. 1991. V. 52, № 1. P. 16.
51. Амосов А. А., Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Коробкин В. В., Прохоров А. М., Серов Р. В. Самофокусировка волновых пучков с платообразным профилем интенсивности // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, вып. 2. С. 119.
52. Петрищев В. А., Пискунова Л. В., Таланов В. И., Эрм Р. Э. Численное моделирование теплового самовоздействия в присутствии индуцированной конвекции // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 2. С. 161.
53. Loy H. H. T., Shen Y. R. Small-scale filaments in liquids and tracks of moving foci // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22, № 19. P. 994.
54. Жарова Н. А., Литвак А. Г., Петрова Т. А., Сергеев А. М., Юнаковский А. Д. Коллапс и множественное дробление нелинейных волновых структур // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1137.
55. Таланов В. И. Некоторые вопросы теории самофокусировки // УФН. 1972. Т. 107, вып. 3. С. 514.
56. Таланов В. И. Самофокусировка встречных волновых пучков // Аннотации докладов, представленных на III Всесоюзный симпозиум по нелинейной оптике. Ереван, МГУ. 1967. С. 38.
57. Власов С. Н., Таланов В. И. О некоторых особенностях рассеяния сигнальной волны на встречных пучках накачки при вырожденном четырехфотонном взаимодействии // Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах / Под ред. В. И. Беспалова. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. С. 85.
58. Власов С. Н. Неустойчивость нелинейного интерферометра Фабри – Перо // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 9. С. 1842.
59. Власов С. Н. Неустойчивость интенсивной плоской волны в периодически нелинейной среде // Квантовая электроника. 1976. Т. 3, № 2. С. 451–452.
60. Власов С. Н. Стабилизация неустойчивости плоской волны в периодической системе // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4, № 13. С. 795.
61. Alphanò R. R., Shapiro S. L. Observation of self-phase modulation and small-scale filaments in crystal and glasses // Phys. Rev. Lett. 1970. V. 24, № 11. P. 592.
62. Бондаренко Н. Г., Еремина И. В., Макаров А. И. Измерение коэффициента нелинейности оптического и лазерного стекла // Квантовая электроника. 1978. Т. 5, № 4. С. 841.
63. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. Москва: ВИНТИ, 1964.
64. Blombergen N. Nonlinear optics. Benjamin W. A. Inc., New-York–Amsterdam, 1965.
65. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. 2-е изд., доп. Е. М. Лившицем и Л. П. Питаевским. М.: Наука, 1982.
66. Shen Y. E. Electrostriction, optical Kerr effect and selffocusing of laser beams // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 20, № 4. P. 378–380.
67. Owyyoung A., Hellwarth R. W., George N. Intensity-induced changes in optical polarisation in glasses // Phys. Rev. 1972. V. 5B, № 2. P. 628–633.

68. *Hellwarth R., Cherlov J., Yang Tien-Tsai.* Origin and Frequency dependence of nonlinear optical susceptibilities in glasses // *Phys. Rev.* 1975. V. 11B, № 2. P. 964–967.
69. *Литвак А. Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // *Вопросы теории плазмы* / Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 10. 1980. С. 164–241.
70. *Kleinman D. A.* Nonlinear optical poolarization in optical media // *Phys. Rev.* 1962. V. 126, № 6. P. 1977–1979.
71. *Келих С.* Молекулярная нелинейная оптика / Пер. с польск.; под ред. И. Л. Фабелинского. М.: Наука, 1981.
72. *Maker R. D., Terhune R. W., Savage S. M.* Intensity dependent changes in the refractive index on liquid // *Phys. Rev. Lett.* 1964. V. 12, № 18. P. 507–509.
73. *Мак А. А., Сомс Л. Н., Фромзель В. А., Яшин В. Е.* Лазеры на неодимовом стекле. М.: Наука, 1990.
74. *Справочник по лазерам: в 2 т. Т. 2.* / Пер. с англ.; под ред. А. М. Прохорова. М.: Советское Радио, 1978.
75. *Захаров В. Е.* Коллапс и самофокусировка ленгмюровских волн // *Основы физики плазмы* / Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоиздат, 1984.
76. *Авербах В. С., Бетин А. А., Гапонов В. А. и др.* Эффекты вынужденного рассеяния и самовоздействия в газах и влияние их на распространение оптического излучения // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1978. Т. 21, № 8. С. 1078–1106.
77. *Akhmanov S. A., Krindach D. P., Migulin A. V. and other.* Thermal self-action of laser beam // *IEEE J. Quant. Electr.* 1968. V. 4, № 10. P. 665–673.
78. *Литвак А. Г., Миронов В. А., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д.* Тепловое самовоздействие волновых пучков в плазме с локальной нелинейностью // *Физика плазмы.* 1975. Т. 1, № 1. С. 60–71.
79. *Воробьев В. В.* Тепловое взаимодействие лазерного излучения с атмосферой // *Теория и модельный эксперимент.* М.: Наука, 1987.
80. *Зуев В. Е., Копытин Ю. Д., Кузиковский А. В.* Нелинейные оптические эффекты в аэрозоле. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1980.
81. *Леонтович М. А.* Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1944, Т. 8, вып. 1. С. 16.
82. *Леонтович М. А., Фок В. А.* Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения // *ЖЭТФ.* 1946. Т. 16, вып. 7. С. 557.
83. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. Радио, 1966.
84. *Бондаренко Н. Г., Таланов В. И.* Некоторые вопросы теории квазиоптических систем // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1964. Т. 7, № 2. С. 313.
85. *Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И.* Самовоздействие электромагнитных волн в кубических изотропных средах // *Нелинейная оптика.* Новосибирск: Наука, 1968. 428 с.
86. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // *УФН.* 1967. Т. 93, вып. 1. С. 19.
87. *Луговой В. Н., Прохоров А. М.* Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде // *УФН.* 1973. Т. 111, вып. 2. С. 203.
88. *Jensen F. B., Kuperman W. A., Porter M. B, Schmidt H.* Computational ocean acoustics. Parabolic Equation. New York: AIP Press, 1994.
89. *Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн. М.: Наука, 1973.
90. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
91. *Малюжинец Г. Д.* Развитие представлений о явлениях дифракции // *УФН.* 1959. Т. 69, вып. 2. С. 321.
92. *Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А.* Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. I. Параболическое уравнение в лучевых координатах // *Радиотехника и электроника.* 1961. Т. 6, № 8. С. 1247.
93. *Вайнштейн Л. А., Малюжинец Г. Д.* Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. Ч. II. Асимптотические законы дифрак-

- ции в полярных координатах // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6, № 9. С. 1489.
94. Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции коротких волн в выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной. Ч. I. Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8, № 3. С. 363.
95. Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции коротких волн в выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной. Ч. II. Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8, № 3. С. 377.
96. Tappert E. D. The parabolic approximation method, in Wave Propagation in Underwater Acoustics / Edited by J. B. Keller and J. S. Papadakis. Springer-Verlag, New York, 1977. P. 224.
97. Власов С. Н., Гурбатов С. Н. К теории взаимодействия интенсивных световых пучков в плавно неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 8. С. 1145.
98. Пермитин Г. В. О возможности сопоставления поля широкого волнового пучка в плавно неоднородной среде с полем пучка в вакууме // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 2. С. 254.
99. Кондратьев И. Г., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. Распространение широких волновых пучков в плавно неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 10. С. 1195.
100. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // Пер. с англ.; под ред. Г. П. Мотулевич. М.: Наука, 1970.
101. Смирнов А. И., Фрайман Г. М. Интенсивные волновые пучки в плавно неоднородных нелинейных средах // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, вып. 4(10). С. 1287.
102. Пермитин Г. В., Смирнов А. И. Квазиоптика плавно неоднородных изотропных сред // ЖЭТФ. 1996. Т. 109, вып. 3. С. 736.
103. Thomson D. J., Wood D. H. A postprocessing method for removing phase errors in the parabolic equation // J. Acoust. Soc. Am. 1987. V. 82, № 1. P. 224.
104. Claerbout J. F. Fundamentals of Geophysical Data Processing. Blackwell, Oxford, UK, 1985. P. 194.
105. Green R. R. The rational approximation to acoustic wave equation with bottom interaction // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 76, № 6. P. 1764.
106. DeSanto J. A. Relation between the solution of the Helmholtz and parabolic equations for sound propagation // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 62, № 2. P. 295.
107. Полянский Э. А. Об оценках решения уравнения Гельмгольца в плоском волноводе // ДАН СССР. 1979. Т. 245, № 1. С. 71.
108. Янкаускас Э. К. Радиальное распределение поля в самофокусирующем пучке света // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9, № 2. С. 412–415.
109. Haus H. A. High order trapped light beam solutions // Appl. Phys. Lett. 1966. V. 8, № 2. P. 128.
110. Власов С. Н., Гапонов В. А., Еремина И. В., Пискунова Л. В. Самофокусировка пучков с эллиптической поляризацией // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 4. С. 521–527.
111. Власов С. Н. Векторные однородные волновые пучки // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35, № 3–4. С. 295–301.
112. Альтшулер Г. Б., Карасев В. Б., Козлов С. А., Мурина Т. А., Розанов Н. Н. Эллиптически поляризованные волны в одномодовом волокне // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61, № 2. С. 359.
113. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь. 1988.
114. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.
115. Yijiang Chen. TE and TM families of self-trapped beams // IEEE J. Quant. Electron, 1991. V. 27, № 5. P. 1236.
116. Литвак А. Г. О самофокусировке электромагнитных волн в изотропной плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9, № 4. С. 675.
117. Елеонский В. М., Оганесянц Л. Г., Силин В. П. Цилиндрические нелинейные волноводы // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, вып. 1. С. 81–88.
118. Елеонский В. М., Силин В. П. Самофокусировка векторного поля // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13, вып. 2. С. 167–170.

119. *Елеонский В. М., Оганесьянц Л. Г., Силин В. П.* Структура трехкомпонентных векторных полей в самофокусированных волноводах // ЖЭТФ. 1972. Т. 63, вып. 2(8), С. 532–539.
120. *Абакаров Д. И., Акопов А. А., Пекар С. И.* К теории самофокусировки света в нелинейно поляризующихся средах // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, вып. 2. С. 463–466.
121. *Pohl D.* Vectorial theory of self-trapped light beams // Opt. Comm. 1970. V. 2, № 7. P. 307.
122. *Pohl D.* Self-focusing of TE₀₁ and TM₀₁ light beams: influence of longitudinal field component // Phys. Rev. A, Gen. Phys. 1972. V. 5, № 4. P. 1908–1909.
123. *Piekara A. N., Moore J. S., Feld M. S.* Analysis of self-trapping using the wave equation with high order nonlinear electric permittivity // Phys. Rev. A, Gen. Phys. 1974. V. 9, № 3. P. 1403.
124. *Lallemant P., Blombergen N.* Self-focusing of laser beams and stimulated Raman gain in liquids // Phys. Rev. Lett. V. 15, № 26. P. 1010, 1965.
125. *Lighthill M. J.* Contributions to the theory on wave in non-linear dispersive system // J. Ins. Math. Applic. 1965. V. 1. P. 269.
126. *Benjamin T. B., Feir J. E.* The disintegration of wave train on deep water. Part 1. Theory // J. Fluid Mech. 1967. V. 27, № 3. P. 417.
127. *Chiao R. Y., Kelley P. L., Garmire E.* Stimulated four-photon interaction and its influence on stimulated Rayleigh-wing scattering // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17, № 22. P. 1158.
128. *Bloom D. M., Biorklund G. G.* Conjugate wave front generation and image reconstruction by four-wave mixing // Appl. Phys. Lett. 1977. V. 31, № 9. P. 592.
129. *Островский Л. А.* Колебания в оптических резонаторах с нелинейным диэлектриком. Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике. Кишинев. 1967. С. 116.
130. *Мурина Т. А., Розанов Н. Н.* Режимы электрооптических бистабильных устройств на основе интерферометра Фабри – Перо // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7, вып. 14. С. 872–876.
131. *Bjorkholm J. E., Smith R. W., Tomlinson W. S.* Optical bistability based on self-focusing // IEEE J. 1982. QE-18. № 12. P. 2016.
132. *Felber F. S., Marburger G. H.* Theory of nonresonant multistable optical devices // Appl. Phys. Lett. 1976. V. 28, № 12. P. 791.
133. *Abrams R. L., Pepper D. M.* Narrow optical band-pass filter via nearly degenerate four-mixing // Opt. Lett. 1978. V. 3, № 6. P. 212.
134. *Блащук Б. Н., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Четырехволновое взаимодействие как управляемый фильтр // ДАН СССР. 1980. Т. 251, вып. 1. С. 70.
135. *Perkins F. W., Valeo E. J.* Thermal self-focusing of electromagnetic waves in plasmas // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32, № 22. P. 1234.
136. *Власов С. Н., Копосова (Шейнина) Е. В.* К теории взаимодействия встречных волн в нелинейной кубичной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 1. С. 20–28.
137. *Луговой В. Н.* Нелинейные оптические резонаторы, возбуждаемые внешним излучением // Квантовая электроника. 1979. Т. 6, № 10. С. 2053–2077.
138. *Литвак А. Г., Фрайман Г. М.* Взаимодействие пучков встречных электромагнитных волн в прозрачной нелинейной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 9. С. 1341.
139. *Власов С. Н., Таланов В. И.* Модуляционная неустойчивость на комбинационных частотах в средах с нелинейностью высокого порядка // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60, вып. 9. С. 629–632.
140. *Делоне Н. Б.* Взаимодействие лазерного излучения с веществом. М.: Наука, 1989.
141. *Penzkofer A., Kaizer W.* Generation of picosecond light continua by parametric four-photon interactions in liquids and solids // Opt. and Quant. Electron. 1977. V. 9, № 4. P. 315–349.

142. *Blombergen N.* The influence of electron plasma formation on superbrodening in light filaments // *Opt. Commun.* 1973. V. 8, № 43. P. 285–278.
143. *Власов С. Н., Гурбатов С. Н., Пискунова Л. В.* Самофокусировка волновых пучков с эллиптической формой поперечного сечения // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1974. Т. 17, № 12. С. 1805–1812.
144. *Ляхов Г. А.* Расслоение гауссова лазерного пучка в кубичной нелинейной среде // *Оптика и спектроскопия.* 1972. Т. 23, № 5. С. 969–974.
145. *Резцов А. С., Тихонов Н. А.* О самофокусировке неосесимметричных пучков // *ДАН СССР.* 1976. Т. 231, № 2. С. 324–325.
146. *Розанов Н. Н., Смирнов В. А.* Распад ограниченных лазерных пучков в нелинейной среде // *ЖЭТФ.* 1976. Т. 70, вып. 6. С. 2060–2073.
147. *Захаров В. Е., Рубенчик А. М.* Неустойчивость волноводов и солитонов в нелинейных средах // *ЖЭТФ.* 1973. Т. 65, вып. 3(9). С. 997–1010.
148. *Колоколов А. А., Вахитов Н. Г.* Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1973. Т. 16, № 7. С. 1020.
149. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов (метод обратной задачи) / Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980.
150. *Satsuma J., Yajima N.* Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media // *Supplement of the Progress of Theoretical Physics.* 1974. № 55. P. 284.
151. *Tien R. K., Gordon J. P., Winnery J. R.* Focusing of light beam of gaussian field distribution in continuous and periodic lense-like media, *Proc // IEEE.* 1965. V. 53, № 2. P. 129–136.
152. *Ablovitz M. J., Segur H.* Solitons and inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981. Русский перевод / Под ред. В. Е. Захарова, М. Дж. Абловиц, Х. Серур // *Солитоны и метод обратной задачи.* М.: Мир, 1987.
153. *Ланс Дж.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Иностранная литература, 1962.
154. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
155. *Wang C. C., Racette G. V.* Effect of linear absorption on self-focusing of laser beam in CS_2 // *App. Phys. Lett.* 1966. V. 8, № 10.
156. *Close D. H., Giuliano G. R., Helwarth R. W.* The self-focusing of light of different polarisations // *IEEE J. Quantum Elect.* 1966. V. QE-2, № 9. P. 553–557.
157. *Progress in quantum electronics / Ed. J.H.Sanders and S. Stenholm, Self-focusing experiment Y. R. Shen, Self-focusing theory, J. H. Marburger.* 1975. V. 4. P. 1. April, Pergamon Press.
158. *Власов С. Н.* О влиянии отраженной волны на самофокусировку световых пучков в среде с кубичной нелинейностью // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1975. Т. 18, № 4. С. 615–618.
159. *Квазиоптика // Ф. Э. М.: Советская энциклопедия,* 1990. Т. 2. С. 258–260.
160. *Таланов В. И.* Волновые пучки в линейных и нелинейных квазиоптических системах, диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Горький: Горьковский университет им. Н. И. Лобачевского, 1967.
161. *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* Квазиклассическая теория трехмерного волнового коллапса // *ЖЭТФ.* 1986. Т. 91, № 10(4). С. 1310–1324.
162. *Rypdal K., Rasmussen J. J.* Blow-up in nonlinear Schrodinger equation // *Physika Scripta.* 1986. V. 33, № 6. P. 481–504.
163. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов // М.: Атомиздат, 1960.
164. *Романова Л. М.* Световое поле в глубине мутной среды, освещаемой узким лучом // *Изв. АН СССР. Сер. Физика Атмосферы и Океана.* 1968. Т. 4, № 3. С. 311.
165. *Ахизер Н. И.* Классическая проблема моментов // М.: Физматгиз, 1961.
166. *Долин Л. С.* Уравнение для корреляционной функции волнового пучка в хаотически неоднородной среде // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1968. Т. 11, № 6. С. 840.

167. *Фейзулин З. И., Кравцов Ю. А.* К вопросу о расширении лазерного пучка в турбулентной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 1. С. 68.
168. *Ваганов Р. Б.* Траектория энергетического центра волнового пучка // Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15, № 8. С. 2016.
169. *Татарский В. И.* Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, вып. 6. С. 2106.
170. *Захаров В. Е.* Теория стационарной самофокусировки света в нелинейной консервативной среде / Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике (Кишинев, 10–15 ноября, 1970 г.) М.: Изд. МГУ. 1970. С. 67.
171. *Каплан А. Е.* Искривление траекторий ассиметричных волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9, вып. 1. С. 69.
172. *Бродин М. С., Камуз А. М.* О наблюдении самоискривления неоднородного интенсивного лазерного пучка в кристалле NaCl // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9, вып. 10. С. 577.
173. *Воробьев В. В.* Самофокусировка световых пучков без осевой симметрии // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 12. С. 1905.
174. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
175. *Lasaridis P., Debarge G., Gallion P.* Optimum condition for soliton launching from chirped sech^2 pulses // Opt. Lett. 1995. V. 20, № 16. P. 1680.
176. *Schrader D.* Explicit calculation of N-soliton solution of the Nonlinear Schrodinger equation // IEEE J. Quant. Electron. 1995. V. 31, № 12. P. 2221.
177. *Дегтярев Л. М., Крылов В. В.* Об асимптотике решения задачи самофокусировки света в кубичной среде // ДАН СССР. 1978. Т. 241, № 1. С. 64.
178. *Landman M. J., Papanicolaou G. C., Sulem C., Sulem P. L.* Rate of blowup for solution of the nonlinear Schrodinger equation at critical dimension // Phys. Rev. A. 1988. V. 38, № 8. P. 3837.
179. *Mesurier B. J., Papanicolaou G. C., Sulem C., Sulem P. L.* Local structure on the self-focusing singularity of the cubic Schrodinger equation // Physica D, Nonlinear Phenomena. 1988. V. 32, № 2. P. 210.
180. *Fraiman G. M., Smirnov A. I.* The interaction representation in the self-focusing theory // Physica D, Nonlinear Phenomena. 1991. V. 52, № 1. P. 2.
181. *Hocking L. M., Stewartson K., Stuart J. T.* A non-linear instability burst in plane parallel flow // J. Fluid Mech. 1972. V. 51, № 4. P. 705.
182. *McLaughlin D. W., Papanicolaou G. C., Sulem C., Sulem P. L.* Focusing singularity of the cubic Schrodinger equation // Phys. Rev. A. 1986. V. 34, № 2. P. 1200.
183. *Захаров В. Е., Литвак А. Г., Ракова Е. И., Сергеев А. М., Швец В. Ф.* О структурной устойчивости волновых коллапсов в средах с локальной нелинейностью // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, вып. 5. С. 107.
184. *Захаров В. Е., Шур Л. Н.* Об автомодельных режимах волновых коллапсов // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 6(12). С. 2019.
185. *Тихонов Н. А.* О моделировании самофокусировки пучков // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 3. С. 592.
186. *Дарзник С. А., Сучков А. Ф.* Оценка предельного диаметра канала самофокусировки в среде с кубичной нелинейностью // Квантовая электроника. 1971. № 4. С. 109.
187. *Колоколов А. А., Суков А. И.* О векторной теории самофокусировки // Прикладная механика и теоретическая физика. 1977. № 6, С. 77.
188. *Турицын С. К.* Пространственная дисперсия нелинейности и устойчивость многомерных солитонов // Теоретическая и математическая физика. 1985. Т. 64, № 2. С. 226.
189. *Власов С. Н.* Структура поля волновых пучков с круговой поляризацией вблизи нелинейного фокуса в кубичной среде // Квантовая электроника. 1987. Т. 14, № 9. С. 1868.

190. *Sien Chi, Qi Guo*. Vector theory off self-focusing of an optical beam in Kerr media // Opt. Lett. V. 20, № 15. P. 1598.
191. *Васильков А. Г., Данилейко Ю. К., Лебедева Т. П., Романов М. Ф.* О явном методе численного решения задачи распространения световых волн в нелинейных средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23, № 3. С. 743.
192. *Островский Л. А.* О частотном спектре самофокусирующихся световых импульсов // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6, вып. 8. С. 807.
193. *Gustavson T. K., Taran J. P., Hans H. A., Lifshitz J. P., Kelley P. L.* Self-modulation, self-steeping, and spectral development of light in small in scale trapped filaments // Phys. Rev. 1969. V. 177, № 1. P. 306.
194. *Баранова Н. Б., Быковский Н. Е., Сенатский Ю. В., Чекалин С. В.* Нелинейные процессы в оптической среде мощных неодимовых лазеров // Труды ФИАН. 1978. Т. 103. С. 84–117.
195. *Жерихин А. Н., Матвеев Ю. А., Чекалин С. В.* Ограничение яркости вследствие самофокусировки при усилении ультракороткого импульса в неодимовом стекле и иттрий-алюминиевом гранате // Квантовая электроника. 1976. Т. 3, № 7. С. 1585.
196. *Мак А. А., Любимов В. В., Серебряков В. А., Фромзель В. А., Яшин В. Е.* Твердотельные лазеры с высокой яркостью излучения // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1982. Т. 46, № 10. С. 1858.
197. *Fleck J. A., Morris Jr. J. R., Bliss E. S.* Small-scale self-focusing effects in high power glass laser amplifier // IEEE J. Quant. Electron. 1978. QE-14, № 5. P. 353.
198. *Vlasov S. N., Petrishech V. A., Talanov V. I.* Theory of periodic self-focusing light beams // Appl. Opt. 1970. V. 9, № 6. P. 1486.
199. *Elliot G. J., Suydam B. R.* Focusing phenomena air-glass laser structure // IEEE J. Quant. Electron. 1973. QE-9, № 11. P. 853.
200. *Власов С. Н., Яшин В. Е.* Подавление самофокусировки в лазерных системах с помощью ретрансляторов // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 3. С. 510.
201. *Власов С. Н., Крыжановский В. И., Яшин В. Е.* Использование световых пучков с круговой поляризацией для подавления самофокусировочной неустойчивости в нелинейной кубичной среде с ретрансляторами // Квантовая электроника. 1982. Т. 9, № 1. С. 14.
202. *Мандельштам Л. И.* Избранные труды. М.: Изд. АН СССР, 1955. Т. 4.
203. *Одулов С. Г., Соскин М. С., Хижняк А. И.* Дифракция света на динамических фазовых голограммах: Препринт ИФАН УССР, № 11. Киев, 1976.
204. *Hunt J. T., Renard P. A., Simmons W. W.* Improved performance of fusion lasers using the imaging properties of multiple spatial filters // Appl. Opt. 1977. V. 16, № 4. P. 779.
205. *Таланов В. И.* Операторный метод описания волновых пучков в комбинированных квазиоптических системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8, № 2. С. 260.
206. *Kogelnik H., Li T.* Laser beams and resonators // Appl. Opt. 1966. V. 5, № 10. P. 1550.
207. *Басов Н. Г., Крохин О. Н., Склазков Г. В., Федотов С. И.* Мощные лазеры для термоядерного синтеза // Природа. 1976, № 10(736). С. 10.
208. *Розанов Н. Н., Смирнов В. А.* К теории распространения плоских волн в нелинейных слоистых системах // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5, вып. 9. С. 544.
209. *Mcwane R. D.* Variable focal length lenses using materials with intensity dependent refractive index // Nature. 1966. V. 211, № 5053. P. 1081.
210. *Сухоруков А. П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.
211. *Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов Н. В.* Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985.
212. *Беспалов В. И., Пасманик Г. А.* Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. М.: Наука, 1985.
213. *Островский Л. А.* Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1966. Т. 51, вып. 4(10). С. 1189.

214. *Коробкин В. В., Серов Р. В.* Исследование самофокусировки излучения неодимового лазера // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6, вып. 5. С. 642.

215. *Власов С. Н., Таланов В. И.* Параболическое уравнение в теории распространения волн (к 50-летию первой публикации) // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 1. С. 840.

216. *Weinstein M. I.* Nonlinear Schrodinger equations and sharp interpolation estimates // Communications in mathematical physics. 1983. V. 87, № 4. P. 567.

217. *Nibbering E. T. J., Curley R. F., Grillon G. e. a.* Conical emission from self-guided femtosecond pulses in air // Opt. Lett. 1996. V. 21, № 1. P. 62.

218. *Macklin J. J., Kmetec J. D., Gordon C. L. III,* High-order harmonic generation using intense femtosecond pulses // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, № 6. P. 766.

219. *Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М.* О самоканализации плазменных волн в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, вып. 11. С. 672.

220. *Вдовиченко И. А., Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М.* Ионизационная самоканализация вистлеров в плазме // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44, вып. 5. С. 216.

221. *Jung I. D., Kartner F. X., Matuschek N. e. a.* Self-starting 6.5-fs pulses from Ti:sapphire laser // Opt. Lett. 1997. V. 22, № 13. P. 1009.

222. *Silberberg A.* Collapse of optical pulses // Opt. Lett. 1990. V. 15, № 1. P. 1282.

223. *Turitsyn S. K.* Wave collapse and optical pulse compression // Phys. Rev. A. 1993. V. 47, № 1. P. 27.

224. *Berge L., Rasmussen J. J., Kuznetsov E. A. e. a.* Self-focusing of chirped optical pulses in media with normal dispersion // J. Opt. Soc. Am. B. 1996. V. 13, № 9. P. 1879.