

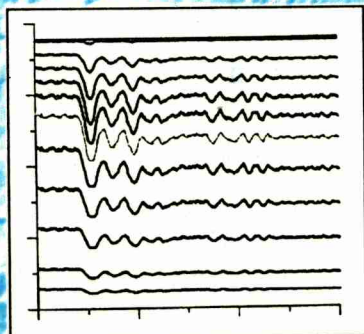
Российская академия наук
Институт прикладной физики



ПРИПОВЕРХНОСТНЫЙ СЛОЙ ОКЕАНА

Физические
процессы
и дистанционное
зондирование

Том 1



Нижний Новгород
1999

Издано по решению редакционно-издательского совета
Института прикладной физики РАН

УДК 551.466
ББК 26.221

П 75 **Приповерхностный слой океана. Физические процессы и дистанционное зондирование: Сборник научных трудов / Под редакцией Е. Н. Пелиновского, В. И. Таланова. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 1999. – Том 1. (224 с.).**

ISBN 5-201-09308-6

Сборник посвящен исследованию динамики процессов на поверхности и в приповерхностном слое океана и изучению их с помощью дистанционных радиофизических методов. Рассмотрены гидродинамические модели генерации внутренних и поверхностных волн, взаимодействия волн и потоков разных пространственных масштабов, воздействия поверхностных волн на ветровое волнение. Описаны модифицированные оптические, радиолокационные и радиометрические методы регистрации параметров приповерхностного слоя океана и результаты проведенных с их помощью исследований воздействия внутренних волн на поверхностные и каскадных процессов в ветровом волнении. Теории с экспериментом сопоставлена.

Сборник предназначен для специалистов-океанологов и радиофизиков, изучающих океан в различных его аспектах.

Рецензенты

доктор физико-математических наук **Е. Г. Морозов**,
кандидат физико-математических наук **Л. С. Долин**

Ответственные редакторы

Е. Н. Пелиновский, В. И. Таланов

Редколлегия

В. В. Баханов, Н. Н. Кралина (отв. секретарь),
Т. Г. Талипова, Ю. И. Троицкая

ISBN 5-201-09308-6

© Институт прикладной
физики РАН, 1999 г.

Содержание

Том 1

Содержание	3
Предисловие	5

Физические процессы в приповерхностном слое океана

<i>Кудрявцев В. Н., Макин В. К.</i> Физическая модель морской поверхности, взаимосвязанной с атмосферным погранслоем	9
<i>Троицкая Ю. И.</i> Модуляция коротких поверхностных волн в присутствии длинных. Эффект модуляции скорости роста	35
<i>Баханов В. В., Таланов В. И.</i> Трансформация нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений	81
<i>Воронович В. В., Шрира В. И.</i> Волны завихренности в верхнем квазигомогенном слое океана	107
<i>Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Холловэй П. Е.</i> Нелинейные модели трансформации внутренних приливов на шельфе	154
<i>New A., Esteban M.</i> A new Korteweg-de Vries-type theory for internal solitary waves in a rotating continuously stratified ocean	173
<i>Талипова Т. Г.</i> Статистика и прогноз интенсивных внутренних волн	204

Том 2

Лабораторное моделирование физических процессов в океане

- Арабаджи В. В., Богатырев С. Д., Баханов В. В., Казаков В. И., Коротков Д. П., Серин Б. В., Таланов В. И., Шлишкина О. Д.*
Лабораторное моделирование гидрофизических процессов в верхнем слое океана (большой термостратифицированный бассейн ИПФ РАН) 231
- Богатырев С. Д., Дружинин О. А., Заборских Д. В., Казаков В. И., Коротков Д. П., Резник С. Н., Серин Б. В., Таланов В. И., Троицкая Ю. И.* Генерация волновых возмущений в турбулентном стратифицированном сдвиговом потоке, наблюдаемая в большом термостратифицированном бассейне 252
- Shemer L., Chamesse M., Talipova T.* On the phase velocity of gravity-capillary surface waves 277

Радиофизические методы исследования процессов в верхнем слое океана

- Каневский М. Б., Караев В. Ю.* Доплеровский спектр электромагнитного СВЧ-поля, рассеянного водной поверхностью, и радиолокационная диагностика океана 297
- Ermakov S. A., da Silva J. C., Robinson I. S.* Radar signatures of internal waves in coastal zones 318
- Гольдин Ю. А., Лучинин А. Г.* Авиационные лидарные методы исследования вертикальной структуры оптических характеристик верхнего слоя океана 345
- Трõхимовский Ю. Г., Кравцов Ю. А., Кузьмин А. В.*
Применение микроволновых радиометрических методов для спектрометрии поверхности океана и прецизионных измерений температуры скин-слоя 382
- Иванов А. Ю.* Океанологические результаты полета КА "Алмаз-1" 408

Предисловие

С увеличением точности и надежности измерений в приповерхностном слое океана благодаря дистанционным и контактным средствам, широкому применению методов лабораторного и компьютерного моделирования появилась возможность углубления существующих теоретических моделей физических процессов и создания соответствующих математических моделей. Применение численных моделей совместно с большим объемом экспериментальной информации позволило в последнее время осуществить проверку физических механизмов и более надежно судить о применимости многих моделей, существовавших ранее зачастую на качественном уровне. Предлагаемый сборник содержит результаты исследований последних лет в этом направлении. Материал книги разделен на три части. В первой рассматриваются теоретические модели морской поверхности, полей ветровых и внутренних волн и их изменчивости. Во второй части приведены результаты лабораторного моделирования физических процессов в океане, наибольшее внимание уделено экспериментам в большом термостратифицированном бассейне ИПФ РАН, обладающем уникальными характеристиками. Третья часть посвящена радиофизическим методам исследования океана, в том числе анализу космических изображений морской поверхности.

Авторы сборника представляют различные научные организации России (Институт прикладной физики РАН, Институт океанологии РАН, Институт космических исследований РАН), ближнего (Морской гидрофизический институт Украины) и дальнего (Австралия, Англия, Израиль, Испания) зарубежья. По существу, этот сборник является третьим в серии сборников, выпускаемым ИПФ РАН по проблеме верхнего слоя океана ("Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность", 1982; "Дистанционное зондирование океана", 1989) и мы надеемся, что он позволит познакомиться с современным состоянием исследований по этой проблеме.

*Е. Н. Пелиновский,
В. И. Таланов*

**ФИЗИЧЕСКИЕ
ПРОЦЕССЫ
В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ
СЛОЕ ОКЕАНА**



Физическая модель морской поверхности, взаимосвязанной с атмосферным погранслоем

В. Н. Кудрявцев; В. К. Макин

МГИ НАНУ, Севастополь, Украина; KNMI, De Bilt, Holland

Предложена физическая модель спектра коротких ветровых волн в диапазоне от нескольких миллиметров до нескольких метров, основанная на анализе баланса энергии, который включает ветровую генерацию, потери энергии за счет молекулярной вязкости и обрушения волн, резонансное взаимодействие волн и генерацию паразитных капиллярных волн. Обсуждается роль каждого из факторов в гравитационном и капиллярном диапазонах.

Представлены модельные расчеты спектральных характеристик коротких ветровых волн и параметров взаимодействия воздушного потока с морской поверхностью и результаты их сравнения с имеющимися экспериментальными данными.

1. Введение

Модели атмосферного погранслоя (АПС) над волнами (см., например, *Janssen*, 1989; *Makin et al.*, 1995; *Makin and Kudryavtsev*, 1997) показывают, что короткие ветровые волны поддерживают значительную часть полного потока импульса в АПС. Поэтому надежные статистические модели морской поверхности исключительно важны для лучшего описания процессов обмена импульсом, теплом и газом между морем и атмосферой. Наряду с этим физическая модель спектра коротких волн необходима для развития методов интерпретации данных дистанционного зондирования, в частности идентификации зон поверхностных загрязнений, выявления зон градиентов течений и фронтальных зон в море.

Недавно предложены простые эмпирические модели спектра ветровых волн для радиофизических приложений (*Apel*, 1994; *Elfouhaily et al.*, 1997). Эти модели охватывают весь спектр волн (от спектрального пика до капилляров) и “настроены” на описание известных фоновых статистических характеристик морской поверхности. Однако, являясь эмпирическими, эти модели могут быть использованы в узком (хотя и исключительно важном) круге задач.

В этом смысле универсальными являются физические модели спектра волн, основанные на решении уравнения баланса энергии волн. К этим моделям относятся следующие: модели Захарова и Заславского (1982) и *Phillips* (1985) для гравитационного интервала спектра волн, модель Пелиновского (1977) для капиллярно-гравитационной ветровой

ряби, модель *Donelan* и *Pierson* (1987) для гравитационных и капиллярных волн. В последней модели предполагается, что спектр волн формируется под действием притока энергии от ветра, вязкой и нелинейной диссипации. Этот спектр существенно занижает энергию капиллярных волн по сравнению с данными лабораторных и натуральных измерений (*Jahne and Riemer*, 1990; *Zhang*, 1995). Вероятной причиной этого является то, что в капиллярном диапазоне основной источник волн – не ветер, а их генерация на гребнях коротких гравитационных волн (паразитные капилляры). Этот эффект достаточно глубоко исследован как теоретически (*Longuet-Higgins*, 1963; *Crapper*, 1970; *Ruvinsky et al.*, 1991), так и экспериментально (см., например, Ермаков и др., 1986; *Zhang*, 1995). Как было установлено теоретически и продемонстрировано экспериментально Ермаковым и др. (1986), генерация паразитных капиллярных волн является эффективным механизмом потерь энергии короткой гравитационной волной. В работе (Кудрявцев, 1996) механизм генерации паразитных капиллярных волн был учтен в явном виде при построении спектра ветровой ряби.

В данной работе предлагается физическая модель спектра коротких ветровых волн, которая является следствием баланса источников/стоков энергии, учитывающих приток энергии от ветра, ее диссипацию за счет микрообрушений и вязкости, механизм генерации паразитных капиллярных волн и нелинейный резонансный перенос энергии по спектру. Далее, с помощью подхода, развитого в работе (*Makin et al.*, 1995; *Makin and Kudryavtsev*, 1997), спектр волн и воздушный поток объединяются в единую самосогласованную модель “морская поверхность – АПС”. Модельные расчеты сопоставляются с доступными данными измерений статистических характеристик морской поверхности и характеристик взаимодействия АПС с морской поверхностью.

2. Атмосферный погранслои над волнами

Приведем вначале основные соотношения, описывающие АПС над волнами. Подход к описанию волнового АПС, развитый в работах (*Janssen*, 1989; *Chalikov and Makin*, 1991), основывается на уравнении сохранения полного вертикального потока импульса, осредненного по масштабам поверхностных волн, которое в системе координат, отслеживающей поверхность, имеет вид

$$\tau(z) + \tau_w(z) = u_*^2 = \text{const}, \quad (1)$$

где z – вертикальная координата с началом на свободной поверхности; $\tau_w(z)$ – поток количества движения, вызванный волновыми движениями;

u_*^2 – полный поток количества движения в АПС; $\tau(z)$ – турбулентные сдвиговые напряжения, которые у поверхности переходят в вязкие напряжения. В работе (Makin et al., 1995) было впервые предложено не параметризовать взаимодействие ветра с короткими волнами (в виде той или иной гипотезы Чарнока), а учитывать явно, в виде разделения поверхностных потоков импульса на вязкие напряжения и потоки импульса к волнам. Этот подход, однако, предполагает, что спектр волн и коэффициенты взаимодействия волн с ветром известны достаточно хорошо во всем диапазоне – от энергонесущих волн до капилляров. В этой работе мы полагаем, что это условие выполнено.

Определим $\tau(z)$ через масштаб турбулентности kz (k – постоянная Кармана), энергию турбулентности b и сдвиговой градиент средней скорости ветра $\partial U / \partial z$ как

$$\tau(z) = \kappa z b^{1/2} \partial U / \partial z, \quad (2)$$

а энергию турбулентности – соответственно из локального баланса ее генерации и диссипации

$$u_*^2 \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{b^{3/2}}{\kappa z}, \quad (3)$$

где правая часть описывает продукцию турбулентности средним сдвигом ветра и в результате корреляции волновых вариаций напряжений и сдвига скорости ветра. Для завершения описания АПС нам необходимо в явном виде определить вертикальное распределение потока импульса, переносимого волновыми движениями в АПС.

В моделях турбулентного погранслоя над волнами масштабом вертикального затухания $\tau_w(z)$ является масштаб внутреннего погранслоя, соответствующего толщине слоя, в котором сосредоточены возмущения турбулентности, вызванные поверхностной волной с волновым числом k (Belcher and Hunt, 1993). Этот масштаб определяется как

$$kl = \frac{2\kappa u_*}{|U(l) - c|}. \quad (4)$$

Как обсуждалось в (Makin, Mastenbroek et al., 1996), подходящей параметризацией $\tau_w(z)$ для заданной спектральной компоненты является $d\tau_w(z) = d\tau_w(0) \exp(-z/l)$, где $d\tau_w(0)$ – поток импульса от ветра к волне. Тогда вертикальное распределение потока импульса в АПС, вызванного поверхностными волнами со спектром энергии $E(\mathbf{k})$, будет

$$\tau_w(z) = \int \beta(\mathbf{k}) k_l E(\mathbf{k}) \exp(-z/l) d\mathbf{k}, \quad (5)$$

где k_l – проекция волнового вектора \mathbf{k} на направление ветра, $\beta(\mathbf{k})$ – безразмерный инкремент скорости роста волн.

Уравнения (1), (2) и (3) описывают вертикальную структуру АПС над волнами, в частности распределение турбулентных напряжений, профиль скорости ветра

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \int_{z_v}^z \left(1 - \frac{\tau_w(z)}{u_*^2} \right)^{3/4} d \ln z \quad (6)$$

(где z_v – вязкий масштаб шероховатости) и закон сопротивления АПС $C_D = (u_* / U)^2$, который следует из уравнения (6) и дает u_* как функцию скорости ветра и состояния морской поверхности, описываемой через спектр волн. Однако это описание может быть проведено, если известен спектр волн и параметр скорости их роста.

3. Спектр коротких ветровых волн

Выражение для спектра энергии волн $E(\mathbf{k})$ в “нулевом” приближении следует из стационарного уравнения баланса:

$$\frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial t} = Q = 0, \quad (7)$$

которое не учитывает модуляции коротких волн более длинными. В выражении (7) слагаемое Q описывает источники спектральной плотности энергии волн; а спектр энергии определяется через спектр возвышений $\Phi(\mathbf{k})$ как

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\rho_w}{\rho_a} \frac{\omega^2}{k} \Phi(\mathbf{k}), \quad (8)$$

где частота ω и волновое число $k = |\mathbf{k}|$ связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = \sqrt{gk + \gamma k^3}, \quad (9)$$

а g – ускорение свободного падения, γ – поверхностное натяжение, ρ_w и ρ_a – плотности воды и воздуха соответственно. Представим источник Q в виде суммы

$$Q = \beta \omega E - 4\nu k^2 E - P - \text{diss} - \nabla T, \quad (10)$$

где члены в правой части описывают соответственно приток энергии от ветра (β – коэффициент ветроволнового взаимодействия), вязкое затухание волн (ν – коэффициент кинематической вязкости), генерацию паразитных капилляров гребнями крутых гравитационных волн (P), потери энергии за счет обрушений гребней гравитационных волн, перенос энергии по спектру (∇T) за счет 4- и 3-волновых резонансных взаимодействий.

3.1. Приток энергии от ветра

Параметризация β в погранслое, взаимодействующем с волнами, обсуждалась в работе (*Makin and Kudryavtsev, 1999*), где показано, что в условиях, когда поток импульса к волнам $\tau_w(0)$ составляет заметную долю полного потока импульса u_*^2 , в атмосферном погранслое подходящей параметризацией β является выражение

$$\beta(k, \theta) = \frac{c_\beta \tau_l}{c^2} \cos \theta \cos \theta_l, \quad (11)$$

где $c_\beta = m \cdot \max\{0, (1 - 1,3 (c/U)^5)\}$ – безразмерный параметр роста волн, учитывающий тот факт, что волны, бегущие быстрее ветра U , не получают энергию, $m = 0,04$; θ – угол между ветром и волнами; τ_l – напряжение Рейнольдса в АПС на расстоянии порядка l (см. [4]) от свободной поверхности; $\tau_l = \tau(l)$. Выражение (11) является обобщением известной параметризации (*Plant, 1982*) и учитывает два важных момента: первый – это то, что поток импульса к конкретной волновой компоненте формируется за счет динамики напряжений Рейнольдса у поверхности (во внутреннем погранслое (*Belcher and Hunt, 1993*)), и второй – это то, что в волновом погранслое напряжения Рейнольдса не постоянны по высоте. Определим τ_l как

$$\tau_l = (1 - \alpha \Phi(l)) u_*^2, \quad (12)$$

где $\Phi(l) = \tau(l) / \tau(0)$ – безразмерный вертикальный поток количества движения, вызванного волнами на уровне $z = l$ и

$$\alpha = \tau_w(0) / u_*^2 \quad (13)$$

– параметр взаимосвязи волн и ветра. Для достаточно коротких волн $\Phi \approx 1$ и выражение (11) может быть представлено так:

$$\beta(k, \theta) = m(1 - \alpha)(u_* / c)^2 \cos \theta |\cos \theta|. \quad (14)$$

Оно показывает, что параметризация β , имея вид, предложенный в (Plant, 1982) и обоснованный теоретически Belcher и Hunt (1993), определяется не полным потоком импульса в АПС, а поверхностными напряжениями.

3.2. Источник паразитных капиллярных волн (Р)

Известно, что на гребнях крутых и коротких гравитационных волн (КГВ) с длинами волн от нескольких сантиметров до 1–2 дециметров происходит возбуждение паразитных капиллярных волн (КВ). Они генерируются “точечным” источником, связанным с большой кривизной гребня, и затухают на переднем склоне под действием вязкости. Это явление исследовано детально как теоретически (начиная с работы Longuet-Higgins, 1963; см. также Crapper, 1970; Ruvinsky et al., 1991), так и экспериментально в лабораторных условиях (Chang et al., 1978; Ермаков и др., 1986; Zhang, 1995).

Основные соотношения. Основной кинематической особенностью паразитных КВ является то, что они стационарны в системе координат, двигающейся с фазовой скоростью КГВ. Волновое число КВ k определяется из уравнения

$$\omega(k) + k(u - C) = 0 \quad (15)$$

и дисперсионного соотношения (9), где C – фазовая скорость КГВ, u – ее поверхностная орбитальная скорость. Паразитные КВ возбуждаются на гребне КГВ за счет работы “импульса” давления (связанного с локальной кривизной поверхности) и, распространяясь по переднему склону КГВ (групповая скорость КВ больше C), затухают под действием вязкости. Примеры расчета параметров паразитных КВ, генерируемых волной Стокса, можно найти в работах Longuet-Higgins (1963); Crapper (1970); Ruvinsky et al. (1991). Вне малой окрестности гребней КГВ (где работает “точечный” источник КВ и $u \sim C$) можно положить $u \ll C$. Тогда выражения (15) и (9) дают связь волновых чисел паразитной КВ (k) и несущей КГВ (K)

$$k = \frac{g}{\gamma K}. \quad (16)$$

Из закона сохранения полной энергии системы волн “КГВ + КВ” (без учета внешних источников и при $e_g \gg e$) следует, что

$$\frac{\partial e_g}{\partial t} = -4vk^2 < e >, \quad (17)$$

где e_g – энергия КГВ, e – энергия КВ, символ $\langle \dots \rangle$ здесь и далее обозначает осреднение параметров КВ по длине волны КГВ. Это уравнение имеет ясный физический смысл: оно показывает, что потери энергии КГВ, связанные с генерацией паразитных КВ, равны энергии, теряемой КВ под действием вязкой диссипации. В терминах нелинейной диссипации КГВ (D) последнее выражение перепишем так:

$$D(K) = 4\nu k^2 \langle e(k) \rangle, \quad (18)$$

где волновые числа гравитационной волны (K) и капиллярной (k) связаны соотношением (16).

Выражение (18) дает потери энергии в “индивидуальной” КГВ. Предположим, что морская поверхность может быть представлена в виде совокупности волн со случайными амплитудами и фазами, волновые числа и направления которых находятся в диапазоне dK и $d\theta$. При сложении этих волн на поверхности моря спорадически образуются локальные источники КВ. Очевидно, “мощность” этих источников и энергия КГВ, локально теряемая на генерации КВ, являются случайными функциями координат и времени. В этом случае связь средней диссипации энергии КГВ и энергии КВ по-прежнему определяется выражением (18), которое, однако, надо рассматривать как осредненное по ансамблю “индивидуальных волн”.

Вид спектрального источника паразитных КВ. Если уравнение (18) рассматривать как уравнение баланса спектра энергии КВ, то оно показывает, что вязкая диссипация в капиллярной области спектра с площадью $kdkd\phi$ уравнивает поток энергии, поступающий сюда из гравитационной области спектра с площадью $KdKd\theta$ и приводящий к диссипации КГВ. Используя определения спектра энергии КВ $\langle e \rangle = E(k) kdkd\phi$ и спектра диссипации КГВ $D = \text{diss}(K) KdKd\theta$, выражение (18) перепишем в виде

$$4\nu k^2 E(k) = P(k), \quad (19a)$$

$$P(k) = \text{diss}(K) \frac{KdKd\theta}{kdkd\phi}, \quad (19b)$$

где модули волновых чисел КВ (k) и КГВ (K) связаны соотношением (16). По данным экспериментов (Ермаков и др., 1986; Zhang, 1995), гребни паразитных КВ параллельны гребням КГВ. Поэтому будем предполагать, что КГВ, распространяющиеся в диапазоне направлений $d\theta$, излучают КВ в тех же самых направлениях, т. е. $d\theta = d\phi$. Тогда, используя (16), находим, что

$$\frac{KdKd\theta}{kdkd\phi} = \left(\frac{k_c}{k}\right)^4, \quad (20)$$

и окончательно источник паразитных капиллярных волн принимает вид

$$P(k, \theta) = \left(\frac{k_c}{k}\right)^4 \text{diss}(K, \theta), \quad (21)$$

где $k_c = (g/\gamma)^{1/2}$ – волновое число, соответствующее минимуму фазовой скорости, а диссипация гравитационных волн берется на волновом числе $K = (k_c/k)^2$. Выражение (21) дает явное выражение для нелинейного источника P в уравнении (10), область действия которого, однако, ограничена капиллярным интервалом спектра.

Некоторые оценки спектра капиллярных волн. Приток энергии от ветра не играет определяющей роли в капиллярном интервале спектра. Это следует из того, что при равенстве β КВ и КГВ (их фазовые скорости равны) отношение притока энергии от ветра в КВ к притоку энергии P можно записать в следующем виде: $(k_c/k)^2 B(k, \theta) / B(K, \theta) \ll 1$, где B – спектр кривизны, связанный со спектром возвышений $B = K^4 \cdot \Phi$. Поэтому уравнения (19а) и (21) должны описывать баланс энергии спектра КВ. Если КГВ, генерирующие КВ, стационарны, то диссипация энергии равна (резонансными 4-волновыми взаимодействиями пренебрежем) притоку энергии от ветра, т. е.

$$\text{diss}(K, \theta) \approx \beta \Omega (\Omega^2 / K) K^{-4} B(K, \theta), \quad (22)$$

где Ω – частота КГВ. Подставляя (22) в (21) и (19а) и учитывая, что $\Omega/\omega(k) = (k_c/k)^2$, а волновые числа КВ и КГВ связаны соотношением (16), получим следующую связь спектров кривизны $B = k^4 \Phi$ капиллярных и гравитационных волн:

$$B(k, \theta) = \frac{1}{4} m \alpha (1 - \alpha) \mu^2 v^{-1} \gamma^{-1/2} k^{-3/2} B(K, \theta) \cos^2 \theta. \quad (23)$$

При выводе этого выражения параметр β взят в виде (14). Из уравнения (23) следует, что спектр КГВ: 1) обладает не менее чем квадратичной зависимостью от скорости ветра; 2) спадает с увеличением волнового числа; 3) имеет угловую ширину меньше, чем спектр КГВ. Эти характеристики спектра качественно соответствуют данным лабораторных измерений (*Jahne and Riemer, 1990; Zhang, 1995*).

Отметим, что область применимости спектра (23) имеет ограничение со стороны очень коротких волн. Очевидно, что генерация КВ не может эффективно осуществляться всеми КГВ. По данным (*Ермаков, Ру-*

винский и др., 1986), даже в идеальных лабораторных условиях не удалось наблюдать возбуждения КВ гравитационными волнами длиннее 30 см. В реальных ветровых условиях гребни дециметровых гравитационных волн уже скорее опрокидываются, чем возбуждают паразитные КВ. Поэтому, если мы для определенности предположим, что КГВ с длиной волны более 10–15 см не возбуждают КВ (а опрокидываются и теряют энергию, генерируя турбулентность), то область применения спектра (23) ограничена волновыми числами $k < 2000\text{--}3000$ рад/м.

Для оценки спектра КВ определим спектр кривизны КГВ в направлении ветра ($\theta = 0$) в виде $B(K, 0) \approx (u_* / C)$ (Toba, 1973; Phillips, 1985). Для этого случая спектр КВ (23) примет вид

$$B(k, 0) = (1 - \alpha) [u_*^3 / (\gamma \nu)] k^{-2}. \quad (24)$$

Этот спектр полностью согласуется с данными измерений (Jahne and Riemer, 1990; Zhang, 1995) как по зависимости уровня спектра от u_* (она близка к кубичной), так и по спаданию спектра (степень -2) с увеличением k . Это косвенное подтверждение того, что механизм генерации паразитных капилляров является определяющим в балансе спектра энергии капиллярных волн и имеет прямое отношение к действительности.

3.3. Спектр диссипации энергии за счет обрушений

Вид спектра. Обрушения ветровых волн являются событиями достаточно редкими на поверхности моря. Поэтому, будучи процессом локальным в физическом пространстве, обрушения волн “размазаны” в спектральном пространстве (Phillips, 1985).

В лабораторном эксперименте (Duncan, 1981) было установлено, что “барашки”, образующиеся на гребнях волн разной длины, геометрически подобны и скорость потерь энергии (D) на единицу длины волны, происходящая в одном барашке, двигающемся со скоростью c , равна

$$D = bc^3, \quad (25)$$

где b – эмпирическая константа порядка 0,01. В реальных условиях обрушения являются редкими событиями. Следуя работе (Phillips, 1985), определим статистические характеристики обрушений (барашков) как функцию вектора скорости их перемещения c . Здесь в качестве такой характеристики мы выберем частоту появления барашков в данной точке пространства $N(c) dc$, имеющих скорость в диапазоне от c до $c + dc$. Волновой вектор волны, несущей барашек, определяется через c как $k = (g / c)^{1/2} c / c$ (отметим, что $c = |c|$). Тогда средняя скорость диссипации волн в диапазоне фазовых скоростей dc с учетом (25) будет равна

$$\langle D \rangle = 2\pi b g^{-1} c^4 N(c) dc. \quad (26)$$

При интенсивных обрушениях, когда каждый гребень представляет собой барашек, $2\pi g^{-1} c N(c) dc = 1$, тогда выражение (26) переходит в (25). В общем же случае доля гребней волн, несущих барашек, мала. На спектральном языке это означает, что, несмотря на то что энергия волн сконцентрирована в малом объеме $dkd\omega$ на дисперсионной кривой в точке $\omega = g/c$, $k = (g/c)^{1/2} c/c$, их диссипация $\langle D \rangle$ в пространстве "частоты - волновые числа" размазана в окрестности прямой $\omega = (c^2/c_1) k_1 = (c^2/c_2) k_2$.

Рассмотрим вначале для простоты случай, когда волны бегут в одном направлении. Так как средняя доля обрушающихся гребней (ϵ) мала ($\epsilon = 2\pi g^{-1} c N(c) dc \ll 1$), а масштаб одного барашка соизмерим с половиной длины волны, то можно предположить, что спектр $\langle D \rangle$ в пространстве $\omega - k$ ($\text{diss}(\omega, k)$) имеет характер белого шума, равномерно распределенного вдоль линии $\omega = ck$ на площади A , равной

$$A = dc \int_{k_1}^{k_2} k dk = \frac{1}{2} g c^{-1} dc, \quad (27)$$

где пределы интегрирования равны: $k_1 = \epsilon k$, $k_2 = (g/c)^{1/2}$. Тогда, используя уравнения (26) и (27), получим следующее выражение для спектра диссипации:

$$\text{diss}(\omega, k) = \frac{\langle D \rangle}{A} = 4\pi b g^{-3} (\omega/k)^8 N(c), \quad (28)$$

где ω и k связаны соотношением $\omega = ck$, а спектр $\text{diss}(\omega, k)$ по оси k ограничен областью: $\epsilon (g/c)^{1/2} < k < (g/c)^{1/2}$.

Выражение (28) относится к спектру диссипации энергии, связанной с обрушениями ветровых волн в диапазоне фазовых скоростей от c до $c + dc$. Пусть теперь морская поверхность представлена набором ветровых волн в широком диапазоне фазовых скоростей. Тогда спектр волновых чисел диссипации $\text{diss}(k)$ определяется интегрированием (28) по всем $\omega < (g/k)^{1/2}$ при фиксированном k :

$$\text{diss}(k) = \int \text{diss}(\omega, k) d\omega. \quad (29)$$

Если предположить, что $(\omega/k)^2 g^{-1} N(c)$ мало меняется с изменением частоты, то интеграл (29) быстро сходится и не зависит от нижнего предела интегрирования. Интегрируя (29), получим

$$\text{diss}(k) = \frac{4}{7} \pi b g^{3/2} k^{-7/2} N(c) \quad (30)$$

Это выражение соответствует одномерному спектру диссипации. Так как угловое распределение диссипации определяется числом брикеров, бегущих в направлении от θ до $\theta + d\theta$, то аналог двумерного спектра диссипации очевидно следует из (30) и имеет вид

$$diss(k, \theta) = \frac{4}{7} \pi b g^{3/2} k^{-9/2} N(c, \theta), \quad (31)$$

где $N(c, \theta)$ – двумерная частота появления брикеров, обладающая свойством $N(c) = \int N(c, \theta) d\theta$.

Определим явное выражение для $N(c, \theta)$. Предположим, что при достаточно широком спектре волн частота обрушений зависит лишь от отношения уровня насыщения спектра $B = k^4 \Phi$ к некоторому пороговому значению α_g :

$$\frac{2\pi c}{\omega} N(c, \theta) = \left(\frac{k^4 \Phi(k, \theta)}{\alpha_g} \right)^{n+1}, \quad (32)$$

где $(n+1)$ – некоторый показатель степени. Подставляя (32) в (31), получим окончательное выражение для спектра диссипации:

$$diss(k, \theta) \approx \left(\frac{B(k, \theta)}{\alpha_g} \right)^n g^{3/2} k^{-7/2} B(k, \theta). \quad (33)$$

В выражении (33) член $2b/7\alpha_g$ (порядка единицы) опущен, так как в дальнейшем α_g будет являться подгоночным параметром.

При $n = 2$ выражение (33) соответствует виду диссипации, полученной в (Phillips, 1985); при произвольном n (являющимся подгоночным параметром) выражение (33) соответствует параметризации спектра диссипации, предложенной в (Donelan and Pierson, 1987). Если предположить, что в гравитационном диапазоне волн диссипация энергии за счет обрушений балансирует приток энергии от ветра, то, используя уравнение (14), получим следующее выражение для спектра:

$$B(k, \theta) = \left((1 - \alpha_g) (u_* / c)^2 \cos \theta | \cos \theta | \right)^{1/n}. \quad (34)$$

При $n = 2$ из выражения (34) следует спектр Toba (1973), обоснованный теоретически в (Phillips, 1985). При $n = 10$ спектр (34) соответствует измерениям (Banner et al., 1989).

Отметим следующее: в гравитационном интервале спектра (где существует подобие барашков) параметры n и α_g должны быть универсальными константами. Однако, как отмечалось ранее, короткие гра-

витационные волны не обрушаются, а излучают паразитные капилляры. Если полагать, что диссипация этих волн также имеет вид (33), то α_g и n должны быть не константами, а некоторыми функциями безразмерного волнового числа $k^2\gamma/g$.

Влияние сдвига скорости поверхностного течения. В работе (*Banner and Phillips, 1974*) было показано, что сдвиг скорости течения q в вязком подслое толщиной δ под свободной поверхностью влияет на зарождение мелкомасштабных обрушений, уменьшая предельную крутизну волн:

$$(ka)_{\max} = \frac{1}{2}(1 - q/c)^2, \quad (35)$$

где $1/2$ – предельная крутизна волны (волны Стокса). По отношению к коротким гравитационным волнам вязкий подслои достаточно тонки: $k\delta \ll 1$. Как следует из (35), влияние сдвига течения на зарождение обрушений усиливается с уменьшением фазовой скорости.

Физический смысл параметра α_g в выражении (33) состоит в том, что это пороговый уровень, при приближении к которому происходит резкая интенсификация обрушений, а в области очень коротких гравитационных волн – резкое увеличение числа гребней, несущих паразитные капиллярные волны. В терминах порогового уровня спектра критерии аналогом выражения (35) является

$$\alpha_g = \alpha_{g0} \left(1 - \frac{q}{c} \cos \theta\right)^4, \quad (36)$$

где α_{g0} – предельный уровень без учета сдвига течения. Cos-фактор в (36) учитывает простой факт, что на пороговый уровень влияет только проекция вектора q (совпадающего с направлением ветра) на направление k .

Толщина вязкого подслоя и перепад скорости течения в нем определяются значением потока импульса через поверхность τ_* :

$$\delta = d\nu_w / \nu_*, \quad (37a)$$

$$q_0 = d\nu_*, \quad (37b)$$

где ν_w – кинематическая вязкость воды; d – константа, находящаяся в пределах 5–10; ν_* – динамическая скорость в воде, определяемая через поверхностное напряжение τ_* , как $\nu_* = \sqrt{(\tau_*/\rho_w)}$. Учитывая, что τ_* составляет лишь часть полного потока импульса в АПС $\tau_* = \rho_a(u^*)^2(1-\alpha)$,

где α – параметр, определяемый (13), необходимый нам сдвиг течения q в вязком подслое равен

$$q = d \left(\frac{\rho_a}{\rho_w} (1 - \alpha) \right)^{1/2} u_* \quad (38)$$

Таким образом, учет влияния сдвига течения на обрушения волн и, следовательно, на диссипацию энергии (33), сводится к коррекции порогового уровня спектра насыщения в виде (36).

3.4. Резонансные нелинейные взаимодействия волн

Завершая описание составляющих полного источника Q (выражение (10), приведем необходимые выражения для нелинейных резонансных взаимодействий волн. Как известно, в гравитационном интервале энергии перераспределяется по спектру за счет 4-волновых взаимодействий (Hasselmann, 1962), а в капиллярно-гравитационном – за счет 3-волновых взаимодействий (Valenzuela and Laing, 1972).

Трехволновые взаимодействия уносят энергию из окрестности $k \approx (g/\gamma)^{1/2}$ в область как меньших, так и больших волновых чисел. Для параметризации потерь энергии в капиллярно-гравитационной области применим часто используемое выражение

$$-\nabla T \approx -k^5 \omega^{-1} E^2(k, \theta) = -k^{-5} \omega^3 B^2(k, \theta), \quad (39)$$

которое следует из соображений размерности и факта, что 3-волновые взаимодействия появляются во втором порядке. Учет 3-волновых взаимодействий нам необходим для ограничения роста волн в окрестности $k \approx (g/\gamma)^{1/2}$.

В гравитационном интервале, вдали от спектрального пика, перенос энергии по спектру осуществляется при взаимодействии четверки волн с близкими волновыми числами. Поэтому приток энергии в данную спектральную область за счет нелинейных взаимодействий параметризуется в виде кубической зависимости от уровня спектра (Phillips, 1985):

$$\nabla T \approx -k^{10} \omega^{-3} E^3(k, \theta) = -k^{-5} \omega^3 B^3(k, \theta). \quad (40)$$

4. Спектр коротких ветровых волн

4.1. Спектр капиллярно-гравитационной ряби

Рассмотрим вначале капиллярно-гравитационную область спектра волн $k > (g/\gamma)^{1/2}$. В этом диапазоне спектр определяется из баланса

$$\beta_v \omega E(k, \theta) + (k_c / k)^4 \text{diss}(K, \theta) F - \alpha_c^{-1} k^5 \omega^{-1} E^2(k, \theta) = 0, \quad (41)$$

где $\beta_v = \beta - 4 \nu k^2 / \omega$ – разность коэффициента ветроволнового взаимодействия и вязкого декремента; $(\alpha_c)^{-1}$ – константа, требующая определения, $\text{diss}(K, \theta)$ – диссипация коротких гравитационных волн за счет генерации паразитных капиллярных волн (напомним, что волновое число K задается соотношением (16)); F – некоторая функция, определяющая область в k -пространстве, где потери энергии КГВ осуществляются за счет генерации паразитных капилляров. Эта функция должна быть близка к единице в области $60 \text{ рад/м} < K < 1/2 (g/\gamma)^{1/2}$ и быстро затухать вне ее. Для определенности зададим образ F в капиллярном интервале как

$$F(k / k_c) = \exp\left(-4(k_c / k)^4\right) \quad (42)$$

при $k < 2000 \text{ рад/м}$ и $F(k/k_c) = 0$ при $k > 2000 \text{ рад/м}$. Решение уравнения (41) для спектра насыщения будет

$$b(K, \theta) = \frac{\alpha_c}{2} \left(\beta_v + \sqrt{\frac{\beta_v^2 + 4D(K, \theta)F(k/k_c)}{\alpha_c}} \right), \quad (43)$$

где $D(K, \theta) = K^3 \Omega^{-3} \text{diss}(K, \theta)$ – безразмерная диссипация КГВ. Если в уравнении (43) $1/\alpha_c$ устремить к нулю и предположить, что $\text{diss}(K, \theta)$ равна притоку энергии от ветра, то из (43) очевидно следует спектр (23).

4.2. Спектр коротких гравитационных волн

Спектр коротких гравитационных волн ($k < (g/\gamma)^{1/2}$) формируется в результате баланса притока энергии от ветра, 4-волновых резонансных взаимодействий и потерь энергии за счет обрушений и излучения паразитных капилляров:

$$\beta_v(k, \theta) \omega E(k, \theta) - g^{3/2} k^{-7/2} B(k, \theta) \left(\frac{B(k, \theta)}{\alpha_g} \right)^n + \alpha_n g^{3/2} k^{-7/2} B^3(k, \theta) = 0, \quad (44)$$

где α_n – некоторая константа. Показатель степени n в диссипации (второй член) является параметром модели и может быть определен либо при подгонке модели к данным измерений, либо из физических соображений. Здесь мы используем идею работы (Phillips, 1985) о том, что в гравитационном интервале приток энергии от ветра, диссипация

и нелинейные взаимодействия пропорциональны друг другу. Это дает $n = 2$, и из уравнения (44) следует

$$B(k, \theta) = \alpha_g [\beta_v(k, \theta)]^{1/2}. \quad (45)$$

Отметим, что в выражении (45) константа α_n явно не присутствует; ввиду взаимной пропорциональности членов уравнения (44) она может быть учтена в других “подгоночных” параметрах модели.

4.3. Обобщенный спектр

Сопоставляя выражение (43) для спектра волн в капиллярно-гравитационном интервале со спектром коротких гравитационных волн (выражение (45)), можно видеть, что они могут быть легко сращены в промежуточной области k , т. е. при $1/2 (g/\gamma)^{1/2} < k < (g/\gamma)^{1/2}$. Для этого введем интерполяционную функцию

$$\Psi(k/k_c) = \max[(k/k_c), 1], \quad (46)$$

которая и обеспечивает склейку уровней спектра в гравитационной α_g и гравитационно-капиллярной α_c области, и переводит кубичное ограничение уровня спектра гравитационных волн (за счет диссипации) в квадратичное в окрестности $k = (g/\gamma)^{1/2}$, откуда энергия уносится 3-волновыми взаимодействиями. Определим параметры модели спектра α и $1/n$ в виде

$$\ln \alpha = (\ln \alpha_c - \ln \alpha_g) \Psi(k/k_c) + \ln \alpha_g, \quad (47)$$

$$1/n = 0,5 \Psi(k/k_c) + 0,5. \quad (48)$$

Тогда окончательное выражение для спектра насыщения (или кривизны) коротких ветровых волн примет вид

$$B(k, \theta) = \frac{\alpha}{2} \left(\beta_v(k, \theta) + \sqrt{\frac{\beta_v^2(k, \theta) + 4\beta_v(K, \theta)B(K, \theta)F(k/k_c)}{\alpha}} \right). \quad (49)$$

Напомним, что в спектре (49) $\beta_v = \beta - 4vk^2/\omega$ – разность коэффициента ветроволнового взаимодействия β (см. (11)) и вязкого декремента затухания; функция $F(k/k_c)$ определяет область действия источника паразитных капилляров – см. (42); K – волновое число КГВ, генерирующей паразитную КВ – см. (16); пороговый уровень гравитационного интервала спектра α (включенный в α) зависит от сдвига скорости течения q в подповерхностном вязком подслое – см. (36).

Модель спектра (49) содержит две подгоночные константы $\alpha_{g,0}$ и α_c . Первая из них должна обеспечивать сращивание спектра (49) со спектром энергонесущих волн, который хорошо известен (*Donelan et al.*, 1985; *Elfouhaily et al.*, 1997), а вторая – обеспечивать уровень спектра в окрестности $k = (g\gamma)^{1/2}$, соответствующий данным лабораторных измерений (*Jahne and Riemer*, 1990; *Hara et al.*, 1997).

4.4. Взаимосвязь спектра волн с АПС

Поверхностные волны, генерируемые ветром, отбирают импульс из атмосферного погранслоя и тем самым влияют на его вертикальную структуру. Тот факт, что спектр волн определяется коэффициентом ветроволнового взаимодействия, зависящим от турбулентных напряжений в АПС (они зависят от потока импульса к волнам, а тот, в свою очередь, – от уровня спектра волн), говорит о том, что ветровые волны и АПС представляют собой единую самосогласованную систему. Фундаментальным параметром, характеризующим степень взаимосвязи ветра и волн, является параметр α , определенный соотношением (13).

Для того чтобы модель взаимосвязанной системы “волны – ветер” стала замкнутой, нам необходимо определить коэффициент сопротивления поверхности. Он следует из профиля ветра (6) и имеет вид

$$C_d = \left(\frac{u_*}{U(h)} \right)^2 = \frac{K^2}{\left(\int_{z_v}^h (1 - \alpha f(z))^{3/4} dz \ln z \right)^2}, \quad (50)$$

где $z_v = 0,1 (1 - \alpha)^{-1/2} v/u_*$ – вязкий масштаб шероховатости, h – некоторый стандартный уровень (например, 10 м).

Система уравнений (49)–(50) и выражение (13) описывают взаимосвязанную динамику коротких ветровых волн и АПС. Однако энергонесущие компоненты ветровых волн поддерживают некоторую часть потока импульса к волнам (10–20%) (*Makin et al.*, 1995) и тем самым влияют как на АПС, так и на короткие ветровые волны. Для того чтобы учесть это влияние, мы дополним спектр (49) при $k < 10 k_p$ (k_p – волновое число пика спектра развитых ветровых волн) спектром, предложенным в работе (*Elfouhaily et al.*, 1997).

5. Результаты

5.1. Спектральные характеристики

На рис. 1 и рис. 2 представлены данные измерений (*Jahne and Riemer, 1990; Hara et al., 1997*) сечения спектра насыщения в направлении ветра $B(k, 0)$ и спектра $B(k)$, проинтегрированного по всем направлениям для $k = 100$ рад/м, 203 рад/м, 393 рад/м и 785 рад/м. Здесь же сплошной линией показаны модельные расчеты с константой $\alpha_c = 0,09$. Сопоставляя данные измерений и модельные расчеты, можно отметить в целом их неплохое соответствие. Волны с $k = 785$ рад/м относятся к паразитным капиллярным волнам. Модель спектра волн в области паразитных капилляров не содержит собственных подгоночных констант, поэтому факт совпадения модели с данными измерений заслуживает внимания и косвенно подтверждает то, что источником КВ действительно является их генерация гребнями коротких гравитационных волн.

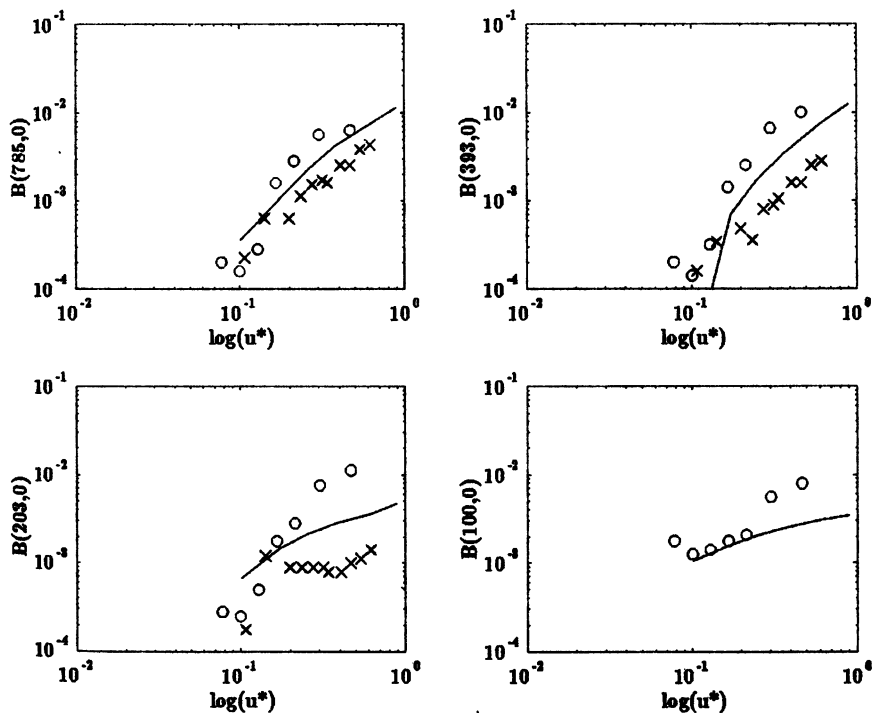


Рис. 1. Зависимость спектра насыщения $B(k, 0)$ от динамической скорости для четырех значений волнового числа. Сплошная линия – модель; кружки – измерения (*Jahne and Riemer, 1990*); крестики – измерения (*Hara et al., 1997*)

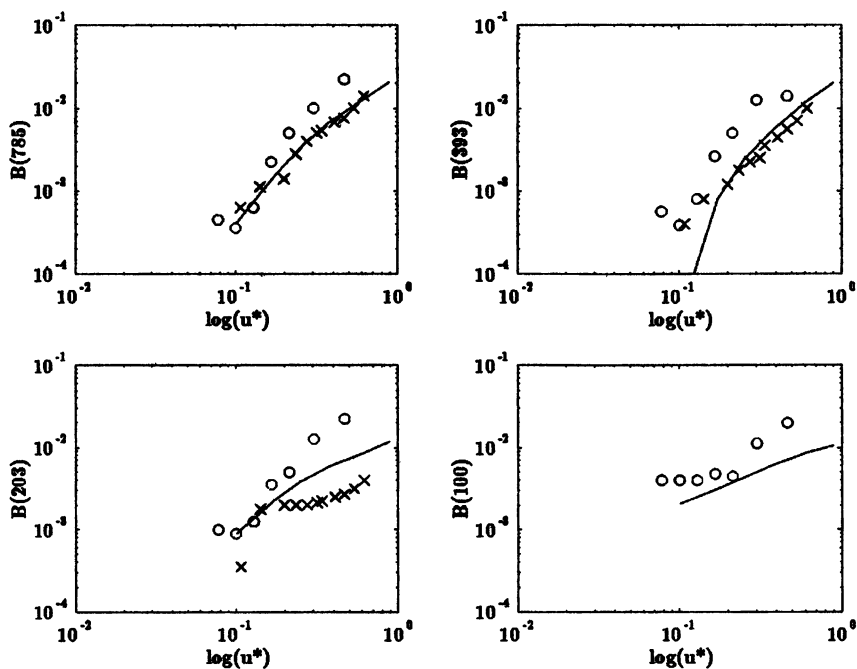


Рис. 2. Зависимость спектра насыщения $B(k)$, проинтегрированного по всем направлениям, от динамической скорости для четырех значений волнового числа. Сплошная линия – модель; кружки – измерения (Jahne and Riemer, 1990); крестики – измерения (Hara et al., 1997)

На рис. 3, а, б показаны модельные спектры $B(k, 0)$ и $B(k)$ при различных скоростях ветра. При малых ветрах в окрестности $k = (g/\gamma)^{1/2}$ существует “провал” энергии, который заполняется по мере усиления ветра. Эта особенность спектра капиллярно-гравитационной ряби наблюдалась в лабораторных экспериментах (Cox, 1958; Zhang, 1995), однако в экспериментах Jahne and Riemer (1990) она выражена в меньшей степени. Формирование спектрального “провала” при малых ветрах связано с тем, что увеличение вязкого затухания с увеличением k приводит к монотонному падению уровня спектра вплоть до окрестности $k \sim 2 (g/\gamma)^{1/2}$, где источник паразитных капиллярных волн приводит к росту уровня спектра. Именно действие этого источника формирует локальный спектральный пик в окрестности $k = 1000$ рад/м, который с увеличением ветра переходит в “абсолютный” максимум и смещается в окрестность $k = 700$ рад/м. В капиллярной области спектр кривизны спадает в область высоких чисел с наклоном -2 , что согласуется с измерениями (Jahne and Riemer, 1990; Zhang, 1995).

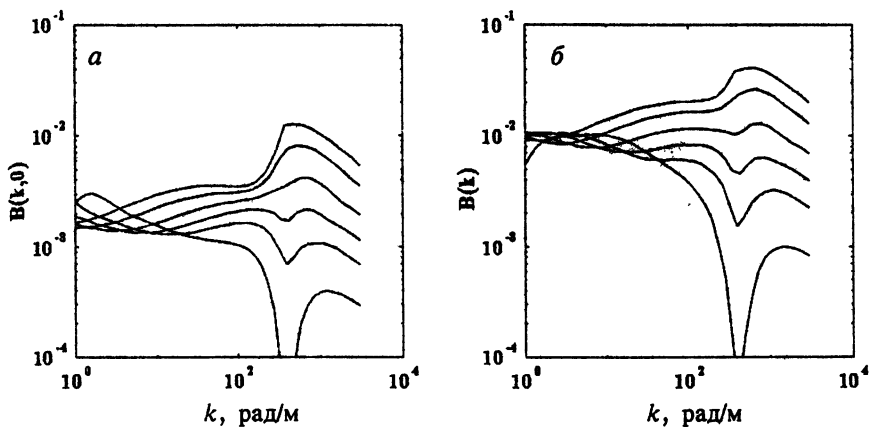


Рис. 3. Сечения спектра насыщения в направлении ветра: $B(k, 0)$ (а) и одномерные спектры $B(k)$ при различных скоростях ветра (б). Кривые сверху вниз соответствуют ветрам: 3 м/с, 5, 7, 10, 15 и 20 м/с

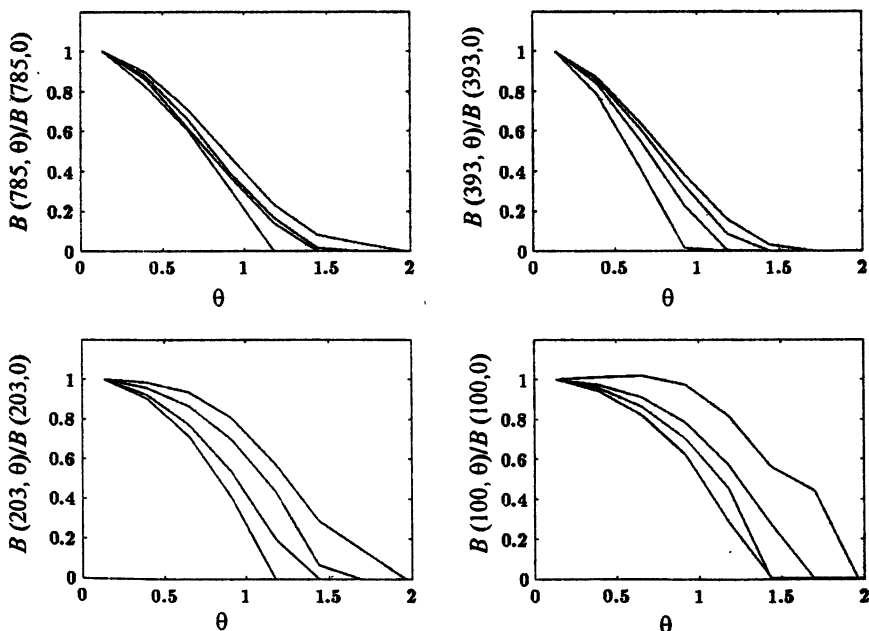


Рис. 4. Угловое распределение спектра $B(k, \theta)/B(k, 0)$ при различных ветрах. Кривые сверху вниз соответствуют ветрам: 5 м/с, 7, 10 и 20 м/с

Рис. 4 иллюстрирует угловое распределение энергии для четырех значений волнового числа при различных скоростях ветра. Основные особенности углового распределения следующие. Во-первых, угловая ширина спектра уменьшается с увеличением волнового числа; в капиллярно-гравитационной области спектр наиболее узок, что соответствует измерениям (Zhang, 1995). Во-вторых, угловое распределение энергии расширяется с увеличением скорости ветра. Этот эффект объясняется влиянием сдвига поверхностного течения; как следует из соотношений (36) и (49), подавление уровня спектра максимально в направлении ветра. Поэтому спектральные компоненты волн, бегущие под углом к ветру, испытывают меньшее подавляющее воздействие сдвига течения.

5.2. Интегральные характеристики спектра

Среднеквадратичный наклон поверхности. Среднеквадратичный наклон поверхности, в основном, формируется коротковолновым интервалом спектра, поэтому этот интегральный параметр (который имеет надежные эмпирические оценки) является наиболее подходящим для тестирования модели. На рис. 5 представлены модельные расчеты среднеквадратичного наклона поверхности

$$\langle (\nabla \zeta)^2 \rangle = \iint B(k, \theta) d\theta d(\ln k) \quad (51)$$

в зависимости от скорости ветра. Расчеты находятся в полном согласии с эмпирической зависимостью *Cox and Munk* (1954), приведенной там же. Интегральной мерой угловой анизотропии спектра волн является отношение среднеквадратичных наклонов поверхности перпендикулярно направлению ветра $\langle (\partial \zeta / \partial y)^2 \rangle$ и вдоль него $\langle (\partial \zeta / \partial x)^2 \rangle$. На рис. 5

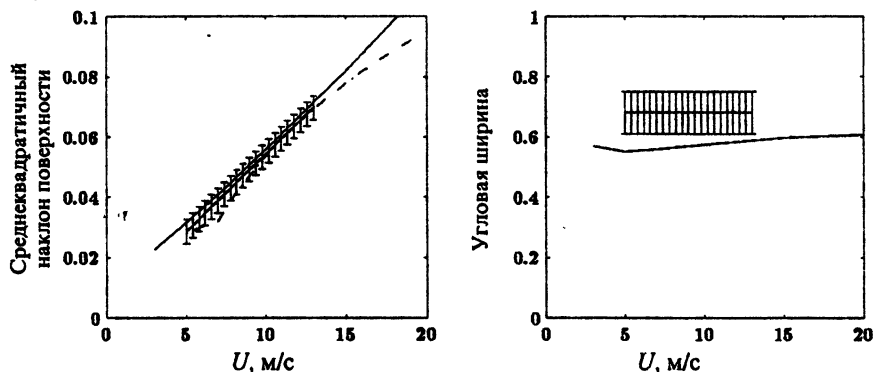


Рис. 5. Слева изображена зависимость среднеквадратичного наклона поверхности от скорости ветра: сплошная линия – модель; пунктирная – эмпирическая зависимость *Wu* (1990); вертикальная штриховка – данные *Cox* и *Munk* (1954). Справа – анизотропия наклонов поверхности $\langle (\partial \zeta / \partial y)^2 \rangle / \langle (\partial \zeta / \partial x)^2 \rangle$: сплошная линия – модель; штриховка – измерения *Cox* и *Munk* (1954)

приведены модельные значения $\langle (\partial \xi / \partial y)^2 \rangle / \langle (\partial \xi / \partial x)^2 \rangle$ при разных ветрах. Они несколько завышают анизотропию наклонов поверхности по сравнению с данными *Cox and Munk*, 1954.

Асимметрия поверхности. В работе (*Longuet-Higgins*, 1982) были проанализированы возможные причины формирования асимметрии поверхности и сделан вывод, что наиболее вероятный источник асимметрии поверхности – модуляция коротких волн более длинными волнами. Модель поверхности, рассмотренная в (*Longuet-Higgins*, 1982), состоит из суммы несущей и короткой волны, которая промодулирована длиной

$$\partial \xi / \partial x = AK \sin \theta + [ak + \delta(ak) \cos(\theta - \gamma)] \sin \theta', \quad (52)$$

где $\partial \xi / \partial x$ – наклон поверхности; AK и ak – крутизна несущей и короткой волны соответственно; θ, θ' – их фазовые функции; $\delta(ak)$ – амплитуда модуляций короткой волны; γ – фаза модуляций. В рамках этой модели асимметрия поверхности равна

$$\left\langle \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 \right\rangle = \frac{3}{2} AK \delta(ak) ak \sin \gamma. \quad (53)$$

Используем это выражение для оценки асимметрии, которая появляется в нашей модели за счет генерации паразитных капиллярных волн. Паразитные капилляры распространяются по переднему склону несущей КГВ и затухают, не достигнув ее следующего гребня. Поэтому для оценки примем, что $\sin \gamma \sim 1$ и $\delta(ak) = ak$. Тогда асимметрия поверхности в нашей модели оценивается как

$$\left\langle \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 \right\rangle = 3\sqrt{2} \left(\int_{k_1}^{k_c/2} B(k, \theta) \cos^2 \theta d\theta d(\ln k) \right)^{1/2} \int_{k > 2k_c} B(k, \theta) \cos^2 \theta d\theta d(\ln k), \quad (54)$$

где $k_1 = 60$ рад/м – нижняя граница интервала коротких гравитационных волн, генерирующих паразитные капилляры. На рис. 6 показана зависимость коэффициента асимметрии поверхности

$$\lambda_3 = \frac{\langle (\partial \xi / \partial x)^3 \rangle}{(\langle (\partial \xi / \partial x)^2 \rangle)^{3/2}} \quad (55)$$

от скорости ветра по данным наблюдений (*Cox and Munk*, 1954) и по модельным расчетам. Как следует из этого рисунка, асимметрия поверхности, связанная только лишь с паразитными капиллярными волнами, имеет достаточно большие значения, которые сопоставимы с на-

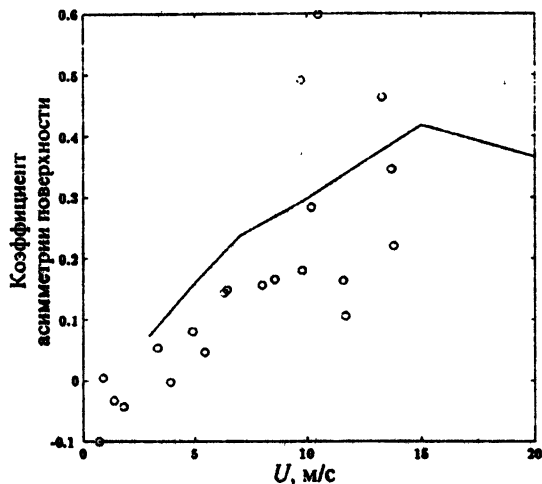


Рис. 6. Коэффициент асимметрии поверхности. Точки – измерения *Cox* и *Munk* (1954); сплошная линия – модель

блодаемыми величинами. Это показывает, что хотя вклад в асимметрию поверхности должны также давать и “обычные” модуляции коротких волн длинными, тем не менее роль паразитных капиллярных волн является определяющей.

5.3. Взаимодействие погранслоя с морской поверхностью

Важным выходом взаимосвязанной модели “ветровые волны – АПС” являются характеристики взаимодействия ветрового потока с морской поверхностью. На рис. 7, а приведена зависимость коэффициента сопротивления морской поверхности от скорости ветра, рассчитанная по формуле (50). Там же показаны эмпирические зависимости, полученные в работах (*Large and Pond*, 1982; *Anderson*, 1993; *Smith*, 1980; *Donelan and Pierson*, 1987). Как видно, модельные расчеты коэффициента сопротивления согласуются с данными измерений на количественном уровне.

В рамках модели взаимодействие ветра с поверхностью осуществляется за счет вязких напряжений и потока импульса к волнам $\tau_w(0)$. На рис. 7, б показан параметр связи ветра и волн $\alpha = \tau_w(0)/(u^*)^2$. При малых ветрах связь ветра и волн фактически отсутствует и морская поверхность является аэродинамически гладкой. С увеличением ветра поток импульса к волнам начинает составлять существенную часть полного потока импульса, и морская поверхность становится аэродинамически шероховатой; ее сопротивление растет с ростом ветра. Модельные оценки параметра α согласуются с его прямыми оценками, полученными в лабораторных экспериментах (*Banner and Peirson*, 1998).

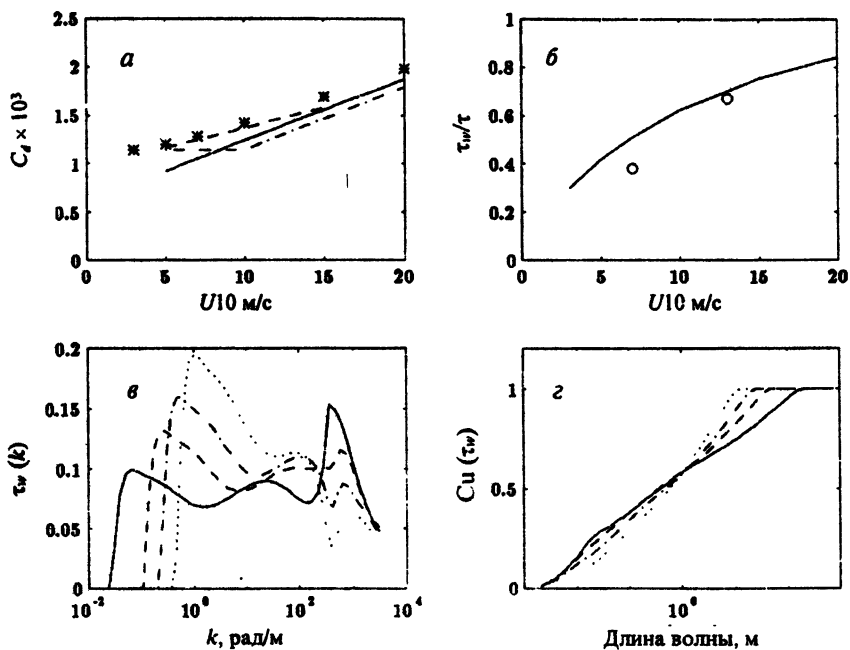


Рис. 7. Зависимость коэффициента сопротивления морской поверхности от скорости ветра (звездочки – модель; штрих-пунктир – Large и Pond (1982); штрих – Donelan и Pierson (1987); пунктир – Anderson (1993)) – а; параметр взаимосвязи ветра и волн $\tau_w(0)/(u^*)^2$; сплошная линия – модель; кружочки – данные измерений Banner и Peirson (1998) – б; спектр (в) и кумулятивный спектр (г) потока импульса к волнам. Кривые соответствуют ветру: сплошная – 20 м/с, штрих – 10 м/с, штрих-пунктир – 7 м/с, пунктир – 5 м/с

На рис. 7, в показан спектр потока импульса к волнам $\tau_w(k)$:

$$\tau_w = \int \beta \omega k^{-1} \cos \theta B(k, \theta) d\theta \quad (56)$$

при различных скоростях ветра. Распределение потока импульса по спектру изменяется со скоростью ветра. Если при малых ветрах поток импульса к волнам поддерживается энергонесущей частью спектра, то с увеличением скорости ветра роль высокочастотных волн возрастает; это проявляется в виде локального максимума в окрестности $k = 700$ – 800 рад/м. На рис. 7, г показан кумулятивный спектр

$$Cu(k) = \frac{1}{\tau_w(0)} \int_0^k T_w d(\ln k). \quad (57)$$

Он приведен как функция длины волны и показывает увеличение потока импульса к волнам по мере увеличения числа волн, участвующих во взаимодействии с ветром. Отметим, что, как следует из рис. 7, з, при всех ветрах волны короче 1 м поддерживают 50% потока импульса к волнам.

6. Заключение

В данной работе предложена физическая модель спектра ветровых волн в диапазоне длин волн от миллиметра до величин порядка метра. Эта модель следует из решения уравнения баланса спектра энергии, который в гравитационной области определяется притоком энергии от ветра, диссипацией энергии за счет обрушений и излучения паразитных капилляров, резонансными 4-волновыми взаимодействиями. В капиллярной области спектра определяющую роль играет источник энергии, связанный с генерацией паразитных волн гребнями коротких гравитационных волн (длины волн меньше 10–15 см). Этот источник описывает каскадную передачу энергии из спектральной области гравитационных волн в окрестности K в спектральную область паразитных капиллярных волн с волновым числом $k = g/(\gamma K)$, которая далее теряется под действием вязкости.

Модельные расчеты спектральных и интегральных характеристик морской поверхности сопоставляются с доступными экспериментальными данными (Zhang, 1995; Jahne and Reimer, 1990; Hara et al., 1995; Cox and Munk, 1954) и дают неплохое соответствие.

Модель спектра волн является элементом самосогласованной модели “морская поверхность – атмосферный погранслои”, предложенной в работах (Makin et al., 1995; Makin and Kudryavtsev, 1999). Взаимодействие воздушного потока с морской поверхностью осуществляется за счет вязких напряжений и потока импульса к волнам. При малых ветрах поверхность является аэродинамически гладкой; при умеренных и сильных ветрах волны поддерживают значительную долю полного потока импульса в АПС, и волновая поверхность ведет себя как аэродинамически шероховатая. Зависимость модельного коэффициента сопротивления поверхности от скорости ветра согласуется с известными эмпирическими данными.

Литература

Ермаков С. А., Рувинский К. Д., Салашин С. Г., Фрейдман Г. И. Экспериментальное исследование генерации капиллярно-гравитационной ряби сильно нелинейными волнами на поверхности глубокой жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. С. 835–842.

- Захаров В. Е., Заславский М. М.* Кинетическое уравнение и Колмогоровские спектры в теории слабой турбулентности ветровых волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. С. 747–753.
- Кудрявцев В. Н.* Физическая модель спектра капиллярно-гравитационных волн // Морской гидроф. журнал. 1996, № 2. С. 3–14.
- Пелиновский Е. Н.* Линейная теория установления и изменчивости ветрового волнения при слабом ветре // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. С. 1167–1175.
- Anderson R. J.* A study of wind stress and heat flux over the open ocean by the inertial-dissipation method // J. Phys. Oceanogr. 1993. 23. P. 2153–2161.
- Apel J. R.* An improved model of the ocean surface wave vector spectrum and its effects on radar backscatter // J. Geophys. Res. 1994, № 99. P. 16269–16290.
- Banner M. L., Peirson W. L.* Tangential stress beneath wind-driven air-water interface // J. Fluid Mech. 1998.
- Banner M. L., Phillips O. M.* On the incipient breaking of small scale waves // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. P. 647–656.
- Banner M. L., Jones I. S. F., Trinder J. C.* Wavenumber spectra of short gravity waves // J. Fluid Mech. 1989. V. 236. P. 321–344.
- Belcher S. E., Hunt J. C. R.* Turbulent shear flow over slowly moving waves // J. Fluid Mech. 1993. V. 251. P. 109–148.
- Cox C. S.* Measurements of slopes of high frequency waves // J. Mar. Res. 1958. V. 16. P. 199–225.
- Cox C. S., Munk W. H.* Statistics of the sea surface derived from Sun glitter // J. Mar. Res. 1954. 13. P. 198–227.
- Cox C. S., Munk W. H.* Slopes of the sea surface deduced from photographs of sun glitter // Bull. Scripps. Inst. Oceanogr. 1954. V. 6. P. 401–488.
- Chalikov D. V. and Makin V. K.* Models of the wave boundary layer // Boundary Layer Meteorol. 1991. 56. P. 83–99.
- Chang J. H., Wagner R. N., Henry C. Y.* Measurements of high frequency capillary waves on steep gravity waves // J. Fluid Mech. 1978. V. 83. P. 401–415.
- Crapper G. D.* Non-linear capillary waves generated by steep gravity waves // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. P. 149–159.
- Donelan M. A., Pierson W. J.* Radar Scattering and Equilibrium Ranges in Wind-Generated Waves With Applications to Scatterometry // J. Geophys. Res. 1987. V. 92. P. 4971–5029.
- Donelan M. A., Hamilton J., Hui W. H.* Directional spectra of wind generated waves // Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A. 1985. V. 315. P. 509–562.
- Duncan J. H.* An experimental investigation of breaking waves produced by towed hydrofoil // Proc. R. Soc. London. A377, 1981. P. 331–348.
- Elfouhaily T. B., Chapron B., Katsaros K., Vandemark D.* A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves // J. Geophys. Res. 1997. V. 107. P. 15781–15796.
- Hasselmann K.* On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1 // J. Fluid Mech. 1962. 12. P. 481–500.
- Hara T., Bock E. J., Donelan M.* Frequency-wavenumber spectrum of wind-generated gravity-capillary waves // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. P. 1067–1072.

- Jahne B., Riemer K. S.* Two-dimensional wave number spectra of small-scale water surface waves // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. P. 11531–11546.
- Janssen P. A. E. M.* Wave-induced stress and the drag of air flow over sea waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1989. 19. P. 745–754.
- Large W. G., Pond S.* Sensible and latent heat flux measurements over the ocean // *J. Phys. Oceanogr.* 1982. 12. P. 464–482.
- Longuet-Higgins M. S.* The generation of capillary waves by steep gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 16. P. 138–159.
- Longuet-Higgins M. S.* On the skewness of sea-surface slopes // *J. Phys. Oceanogr.* 1982. 12. P. 1283–1291.
- Makin V. K., Kudryavtsev V. N.* Coupled sea surface-atmosphere model 1. Wind over waves coupling // *J. Geophys. Res.* 1999, in press.
- Makin V. K., Kudryavtsev V. N., Mastenbroek C.* Drag of the sea surface // *Boundary Layer Meteorology.* 1995. V. 73. P. 159–182.
- Phillips O. M.* Spectral and statistical properties of the equilibrium range in the wind-generated gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 156. P. 505–531.
- Plant W. J.* A relationship between wind stress and wave slope // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87. P. 1961–1967.
- Ruvinsky K. D., Feldstein, F. I., Freidman G. I.* Numerical simulation of the quasi-stationary stage of ripple excitation by steep gravity-capillary waves // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 230. P. 339–353.
- Smith S. D.* Wind stress and heat flux over the ocean in gale force winds // *J. Phys. Oceanogr.* 1980. 10. P. 709–726.
- Toba Y.* Local balance in the air-sea boundary processes. III. On the spectrum of wind waves // *J. Ocean. Soc. Japan.* 1973. V. 29. P. 209–220.
- Valenzuela G. R., Laing M. B.* Nonlinear energy transfer in gravity-capillary wave spectra, with applications // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. P. 507–520.
- Zhang X.* Capillary-gravity and capillary waves generated in a wind wave tank: observations and theories // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 289. P. 51–82.

Модуляция коротких поверхностных волн в присутствии длинных. Эффект модуляции скорости роста

Ю. И. Троицкая

Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород

Перечисляются основные механизмы модуляции коротких поверхностных волн в присутствии длинных и обсуждаются предложенные ранее простые модели модуляции скорости роста коротких волн в присутствии длинных. Обсуждаются разработанные в последнее время реалистичные модели, учитывающие турбулентность ветрового потока. Приведены описание достаточно простой модели генерации волн на воде турбулентным ветром и сравнение результатов расчетов ветрового инкремента в ее рамках с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными. Предлагается модель модуляции коротких волн в присутствии длинных и приводятся расчеты коэффициентов модуляции с учетом эффекта модуляции инкремента коротких волн, рассчитанного в рамках линейного и квазилинейного приближений.

Взаимодействие между длинными и короткими поверхностными волнами интенсивно изучается в последнее время в связи с проблемой дистанционной диагностики длинных поверхностных волн (см. обзор [1] и ссылки в нем). Известно, что короткие поверхностные волны сантиметрового диапазона вызывают обратное рассеяние радиоволн от морской поверхности за счет механизма Брегга, поэтому модуляция их спектра полем длинных волн, или гидродинамическая модуляция, является одной из важных причин модуляции рассеянного радиосигнала.

В обзоре [1] содержится описание основных механизмов модуляции коротких волн в присутствии длинных, соответствующее времени его написания (1990). При этом основное внимание в [1] уделяется рассмотрению механизма модуляции коротких волн в присутствии длинных, связанного с модуляцией дрейфового течения полем длинной волны.

В то же время, как показали исследования, проведенные в последнее время, весьма важным механизмом модуляции поля коротких волн является длинноволновая модуляция их ветрового инкремента. Этот механизм подробно обсуждается в настоящей работе.

Работа имеет следующую структуру. Вначале перечисляются основные механизмы модуляции коротких поверхностных волн в присутствии длинных и обсуждаются предложенные ранее простые модели модуляции скорости роста коротких волн в присутствии длинных (включая модели, основанные на квазиламинарной теории Майлса). Далее обсуждаются разработанные в последнее время более реалистичные модели, учитывающие турбулентность ветрового потока. При этом вначале приведены описание достаточно простой модели генерации волн на воде турбулентным ветром и сравнение результатов расчетов ветрового инкремента в ее рамках с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными. В конце работы предлагается модель модуляции коротких волн в присутствии длинных и приводятся расчеты коэффициентов модуляции с учетом эффекта модуляции инкремента коротких волн, рассчитанного в рамках линейного и квазилинейного приближений.

Основные механизмы модуляции коротких поверхностных волн в присутствии длинных

Рассмотрим длинную поверхностную волну (с длиной более 10 м) для простоты с гармоническим возвышением поверхности

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \quad (1)$$

(здесь a, k, ω – амплитуда, волновое число, частота длинной волны) и короткие волны на ее фоне. В спектре коротких волн имеются и "бреговские" компоненты, которые рассеивают радиоволны, и их длина составляет от нескольких сантиметров до нескольких дециметров в зависимости от длины волны излучения радиолокатора. Мощность рассеянных радиоволн P модулирована с пространственными и временными масштабами длинных волн:

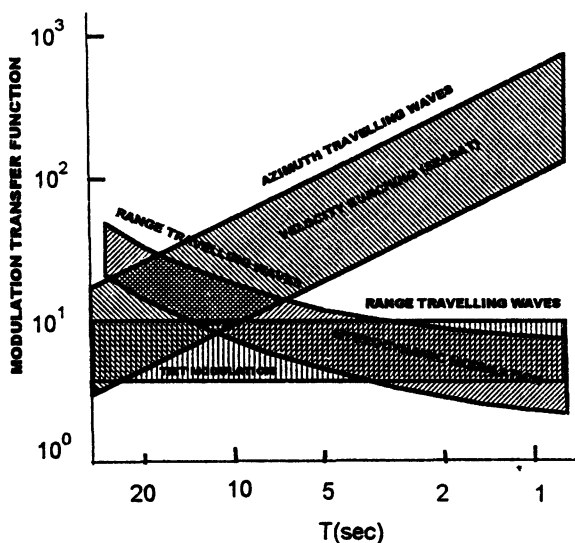
$$P = P_0 (1 + kaM \cos(kx - \omega t - \varphi_m)),$$

где P_0 – невозмущенная рассеянная мощность.

Эта модуляция характеризуется модуляционной передаточной функцией (МПФ), которая представляет собой комплексную величину с модулем M и фазой $-\varphi_m$. При малой амплитуде длинной волны МПФ можно представить в виде суммы компонент, описывающих модуляцию, вызванную различными механизмами:

$$M e^{-i\varphi_m} = M_{slip} + M_{hydro} + M_{bunch}.$$

M_{slip} – геометрическая МПФ, описывающая модуляцию рассеянных радиоволн уклонами длинных волн; M_{hydro} – гидродинамическая МПФ, которая описывает модуляцию береговых коротких волн гидродинамическими полями длинной волны; M_{bunch} описывает так называемый "пучковый" эффект, который присутствует только в радиоизображениях, получаемых с помощью радара с синтезированной апертурой [2].



Р и с. 1. Компоненты МПФ (из обзора [2])

Для демонстрации эффективности гидродинамической модуляции приведем рис. 1 из обзорной статьи [2], на котором представлены различные составляющие МПФ как функции частоты длинной волны. Из рис. 1 очевидно, что для случая радара с реальной апертурой (без M_{bunch}) модуль M_{hydro} превосходит модуль M_{slip} для поверхностных

волн с периодами более 3–5 с. При этом M_{hydro} имеет следующие характерные особенности:

- 1) модуль $\sim 5 \div 15$,
- 2) убывание модуля с частотой длинной волны и скоростью ветра,
- 3) фазу, близкую к нулю (хотя возможны ее существенные вариации).

Теория должна объяснить эти основные свойства.

Механизмы модуляции коротких волн длинными следуют из кинетического уравнения для спектра возвышений коротких волн $F(K, x, t)$ в присутствии длинной волны. В простейшем случае, когда направления ветра и волн совпадают, и модуляция максимальна, уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (U_0(x, t) + v_{gr}) \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial K} = 2BF + \eta \frac{\partial U_0}{\partial x} F + \text{Int}[F]. \quad (2)$$

Здесь $U_0(x, t)$ – поле скорости в длинной волне, K и Ω – волновое число и частота короткой волны в лабораторной системе отсчета; $\Omega = KU_0(x, t) + \Omega_0$; Ω_0 – собственная частота короткой волны; B – модулированный инкремент короткой волны, равный сумме ветровой скорости роста и декремента вязкой диссипации (он зависит от поля длинной волны); $\text{Int}[F]$ – ”интеграл столкновений”, определяющий нелинейное взаимодействие волн. Второе слагаемое в правой части – это радиационное напряжение, а η – ”фактор растяжения”, введенный в работах [3, 4]. Заметим, что в уравнение для спектра волнового действия N радиационное напряжение не входит. При этом выражение для η может быть легко получено из соотношения спектров волнового действия N и возвышений F , т. е. η определяется дисперсионными свойствами волн.

Если спектр энергии связан со спектром возвышений следующим образом:

$$E(K) = \Sigma(K) F(K),$$

(где $\Sigma(K)$ – функция, определяемая дисперсионными свойствами волн), то спектр волнового действия

$$N(K) = \frac{E(K)}{\Omega_0} = \frac{\Sigma(K)}{\Omega_0} F(K).$$

Тогда с точностью до малых величин порядка k/K имеем

$$\eta = \frac{\Omega_0}{\Sigma(K)} K \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\Sigma(K)}{\Omega_0} \right). \quad (3)$$

Для потенциальных волн

$$\eta = \frac{C_{gr}}{C_f} - 1,$$

где $C_{gr} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial K}$ – групповая, а $C_f = \frac{\Omega_0}{K}$ – фазовая скорости короткой волны. Из уравнения (2) видно, какие факторы приводят к модуляции спектра. Они перечислены в обзоре [1].

Первый из них – консервативная трансформация коротких волн на неоднородном поле течений длинной волны. Он определяется вторым слагаемым в правой части (2). Этот механизм впервые обсуждался в работах [3, 4]. Как показывают оценки [1], механизм является существенным, но дает значения модуля гидродинамической МПФ, убывающие с ростом периода длинной волны, что противоречит экспериментальным данным [5, 6].

Второй механизм модуляции коротких поверхностных волн в присутствии длинной связан с модуляцией скорости роста коротких волн. Он определяется первым слагаемым в правой части (2). Модуляция возникает из-за различных условий генерации коротких волн вдоль фазы длинной волны:

$$B = B_0 \left(1 + \operatorname{Re} m e^{i(kx - \omega t - \varphi)} \right).$$

Как будет видно из дальнейшего, этот механизм приводит к значительным вариациям спектра коротких волн, т. е. дает большие значения МПФ.

Необходимо особо выделить влияние ветрового дрейфового течения на модуляцию спектра коротких волн, подробно оно обсуждалось в [1]. Как показывают лабораторные [7, 8] и натурные эксперименты (см. в [8]), касательное турбулентное напряжение ветра создает в воде ветровое дрейфовое течение, при этом скорость течения на поверхности $U_d = 0,5 \div 1 u_*$, (где u_* – скорость трения ветра), а профиль скорости имеет примерно логарифмическую форму с вязким подслоем [7], т. е. характеризуется резким градиентом скорости в узком приповерхностном слое, а затем медленно меняется с глубиной. Известно, что у сантиметровых поверхностных волн фазовая скорость $c_f \approx 30$ см/с. Это означает, что при скоростях трения ветра более 50 см/с скорость ветрового дрейфа на поверхности примерно равна c_f , что может существенно менять дисперсионные свойства таких волн и их инкремент и фактор растяжения η в уравнении (2). При меньших скоростях ветра (менее 30 см/с) можно ожидать, что влияние ветрового дрейфа будет слабым.

Простые модели модуляции ветрового инкремента коротких поверхностных волн в присутствии длинных

Будем предполагать, что ветер достаточно слабый, и рассмотрим модуляцию ветрового инкремента, пренебрегая ветровым дрейфом. Эффект модуляции инкремента коротких волн в присутствии длинных обсуждается, по-видимому, начиная с работы [9], где решалось уравнение Орра-Зоммерфельда, справедливое для возмущений в ламинарном потоке. Подробный расчет модуляции инкремента в рамках квазиламинарной модели Майлса [10] был проведен и в работе [11]. При этом предполагалось, что профиль скорости над волнами является линейно-логарифмическим, а коэффициент обмена импульсом равен молекулярной вязкости воздуха ν_a . В этом случае коэффициент модуляции инкремента коротких волн определялся соотношением осциллирующего с периодом длиной волны и среднего градиентов скорости вблизи водной поверхности, которое характеризуется величиной $M = \frac{2cka}{u_*^2} (ck\nu_a)^{\frac{1}{2}}$, где c , k и a – фазовая скорость, волновое число и амплитуда возвышения длинной волны, u_* – скорость трения ветра. Отсюда ясно, что при достаточно больших фазовых скоростях длинных волн и слабых ветрах коэффициент модуляции инкремента может быть достаточно велик. Однако в рамках такой модели характерный масштаб вязкого пограничного слоя длинной волны $\delta_w = \left(\frac{\nu_a}{ck}\right)^{\frac{1}{2}}$ существенно превосходит ширину вязкого подслоя в ветровом турбулентном пограничном слое $\delta_0 = \frac{10\nu_a}{u_*}$ даже при слабых ветрах, близких к порогу генерации коротких волн. В результате отношение среднего и осциллирующего градиентов скорости и связанное с ним отношение средней и осциллирующей частей инкремента коротких волн оказывается примерно в 3 раза меньше, чем необходимое для объяснения экспериментов, описанных в работах [5, 6]. Кроме того, следует заметить, что если для коротких волн пренебрежение турбулентным обменом импульсом может быть оправдано, то при определении поля длинных волн, характерный вертикальный масштаб которых существенно превосходит толщину вязкого подслоя, турбулентные напряжения необходимо учитывать.

Оценка влияния турбулентного обмена на модуляцию инкремента коротких волн была сделана в работе [12] в рамках простой модели

турбулентного пограничного слоя, в которой турбулентный поток представлялся в виде двухслойной жидкости. Вязкий подслой, в котором эффективный коэффициент вязкости мал, моделировался тонким слоем покоящейся невязкой жидкости, прилегающей к поверхности воды; логарифмический пограничный слой, в котором скорость меняется по медленному закону, а эффективная вязкость велика, – слоем жидкости с постоянным коэффициентом вязкости, движущимся со скоростью, примерно равной скорости потока на границе вязкого подслоя ($12u_*$ [13]). В такой модели коэффициент модуляции инкремента коротких волн определяется отношением средних и осциллирующих длинноволновых компонент скорости воздушного потока, а не отношением градиентов, и он равен $\frac{c}{6u_*}$, что дает величины модуляции спектра коротких волн, близкие к наблюдаемым. В последнее время были развиты более точные модели, описывающие модуляцию инкремента коротких волн.

Модели генерации поверхностных волн турбулентным ветром

Выше была упомянута попытка описания влияния волновых возмущений турбулентных напряжений на ветровой инкремент коротких поверхностных волн и его модуляцию [12]. Более строгий подход к этой задаче, основанный на результатах расчетов в рамках численной модели турбулентного пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью [14], представлен в работе [15]. Однако там не было произведено последовательного вывода уравнений для длинных и коротких волн. В результате были допущены неточности при определении структуры длинноволновых возмущений над взволнованной водной поверхностью. В то же время подобные уравнения могут быть выведены последовательно, на основе преобразования системы уравнений Рейнольдса к системе криволинейных координат, в которой координатная линия совпадает с поверхностью воды, искривленной волной. Система уравнений Рейнольдса не замкнута. Рассмотрим ряд простых моделей ее замыкания, основанных на аппроксимации турбулентных потоков импульса, которые были предложены в работах [16, 17] для описания генерации волн на воде турбулентным ветром.

Криволинейные координаты

В настоящее время развит ряд моделей турбулентного пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью (см. работы [17-20] и др). Они основаны на использовании уравнений Рейнольдса в ортогональных криволинейных координатах, в которых одна из координатных линий совпадает с взволнованной поверхностью воды, искривленной волной. В системе отсчета, бегущей с фазовой скоростью волны C , в воздухе такие криволинейные координаты (ξ, η) задаются согласно преобразованию

$$x = \xi + ae^{-K\eta} \operatorname{Re}(ie^{iK\xi}), \quad (4)$$

$$y = \eta + ae^{-K\eta} \operatorname{Re}(e^{iK\xi}).$$

Введение криволинейных координат необходимо, поскольку поля скорости в воздухе и воде характеризуются большими градиентами гидродинамических величин вблизи водной поверхности. В декартовых координатах (x, y) возмущения функции тока

$$\psi = -Cy + \int U_0(y)dy + \psi_1(x, y)$$

описывают отклонения функции тока от горизонтали (здесь $U_0(y)$ — невозмущенная скорость ветра). Для применимости линейного приближения они должны быть малы по сравнению с масштабом пограничного слоя, что практически никогда не выполняется. В криволинейных координатах возмущения функции тока

$$\psi = -C\eta + \int U_0(\eta)d\eta + \psi_1(\xi, \eta)$$

описывают отклонение от искривленных координатных линий, которые значительно меньше, и применимость линейного приближения оказывается значительно шире.

Система уравнений гидродинамики в координатах (ξ, η) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{I}(\psi_\eta\psi_{\eta\xi} - \psi_\xi\psi_{\eta\eta}) - \frac{\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2}{2I^2}I_\xi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + g\frac{\partial y}{\partial \xi} = \\ = \frac{1}{I}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}(I\sigma_n) + \frac{\partial}{\partial \eta}(I\sigma_\tau)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{I} (\psi_\xi \psi_{\xi\eta} - \psi_\eta \psi_{\xi\xi}) - \frac{\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2}{2I^2} I_\eta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + g \frac{\partial y}{\partial \eta} = \\
& = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (I\sigma_\tau) - \frac{\partial}{\partial \eta} (I\sigma_n) \right).
\end{aligned}$$

Здесь I – якобиан преобразования (4), σ_n, σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжения Рейнольдса, которые связаны с напряжениями Рейнольдса в декартовых координатах следующим образом:

$$\sigma_n = \frac{1}{I} \left(\sigma_{11} (x_\xi^2 - y_\xi^2) + 2\sigma_{12} x_\xi y_\xi \right),$$

$$\sigma_\tau = \frac{1}{I} \left(\sigma_{12} (x_\xi^2 - y_\xi^2) - 2\sigma_{11} x_\xi y_\xi \right).$$

Модели турбулентного воздушного потока над взволнованной водной поверхностью

Вторым элементом модели турбулентного пограничного слоя над взволнованной водной поверхностью являлась градиентная аппроксимация турбулентных напряжений $\sigma_{i,j}$. При этом

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} \langle u_i'^2 \rangle + \nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Здесь ν считается заданной функцией η . Это предположение является элементом модели, и оно может быть проверено лишь на основании сравнения с данными экспериментов. В разных моделях используются различные коэффициенты турбулентной вязкости. Как будет видно из дальнейшего, хорошие результаты дает использование заданной функции, полученной на основе экспериментов с турбулентным пограничным слоем на гидродинамически гладкой пластинке [21]:

$$\nu(\eta) = \nu_a \left[1 + 0,4\eta^+ \left(1 - e^{-\left(\frac{\eta^+}{L}\right)^2} \right) \right], \quad \eta^+ = \frac{\eta u_*}{\nu_a}. \quad (6)$$

Здесь $\eta^+ = \frac{\eta \nu_a}{u_*}$ – вертикальная координата, выраженная в вязких длинах, постоянная $L = 22,4$ для гидродинамически гладкого режима обтекания поверхности воды. Эта формула может быть использована

для достаточно слабых ветров ($u_* < 20$ см/с). Заметим, что именно в этом случае влияние модуляции скорости роста коротких волн может быть существенно. Для более сильных ветров возрастает роль обрушения волн, и обтекание поверхности перестает быть гидродинамически гладким. Однако в дальнейшем эта модель будет использована и для сильных ветров, в частности, для сравнения с результатами расчетов [22], где модель такого типа использовалась главным образом для случая сильных ветров. В этом случае (при $u_* > 20$ см/с) можно использовать другую заданную формулу для коэффициента вихревой вязкости, справедливую для переходного и шероховатого режимов обтекания поверхности:

$$\nu(\eta) = \nu_a \left[N_0 + 0,4\eta^+ \left(1 - e^{-\left(\frac{\eta^+}{L}\right)^2} \right) \right], \quad \eta^+ = \frac{\eta u_*}{\nu_a}, \quad (7)$$

которая обобщает (6) на случай ненулевой длины смещения на поверхности [23].

Профиль скорости невозмущенного течения $U_0(\eta)$ связан с $\nu(\eta)$ соотношением

$$\frac{dU_0}{d\eta} = \frac{u_*^2}{\nu_a(\eta)}.$$

И в логарифмической области турбулентного пограничного слоя

$$U_0(\eta) = \frac{u_*}{\alpha} \ln \frac{\eta}{\eta_0}, \quad (8)$$

где $\alpha = 0,4$ – постоянная Кармана, $\eta_0 = \frac{\nu_a}{u_*} e^{-C^+}$ – параметр шероховатости. Постоянная C^+ зависит от режима обтекания поверхности, т. е. от N_0 : при гидродинамически гладком обтекании $C^+ = 5,5$, а при переходе к развитой шероховатости $C^+ > -2,1$.

В последнее время развиваются модели приводного турбулентного пограничного слоя атмосферы, основанные на теории "быстрых возмущений", предложенной в работах [24, 25]. Применительно к теории генерации поверхностных волн ветром эти модели развиваются в работах [26, 27]. Основная идея этой модели состоит в следующем. При моделировании волновых возмущений, вызванных в турбулентном воздушном потоке волной, он разделяется на две области – внутреннюю и внешнюю. Во внутренней области (близкой к поверхности) характерный временной масштаб турбулентных пульсаций (время перемешивания) $\frac{\eta}{u_*}$ мал по сравнению с характерным собственным периодом волны

$1/K(C - U_0)$, где K - волновое число, C - фазовая скорость волны, а U_0 - скорость потока. В этой области волновые возмущения "медленные", и для них, очевидно, справедливы гипотеза длин смещения Прандтля и градиентные аппроксимации турбулентных потоков импульса. Во внешней области, расположенной далеко от поверхности, характерный временной масштаб турбулентных пульсаций велик по сравнению с собственным периодом волны ("быстрые возмущения"). В этом случае, как показано в работах [24, 25], происходит эффективное уменьшение турбулентных вязких напряжений по сравнению с градиентной моделью или уменьшение эффективного коэффициента турбулентной вязкости. В работе [27] использовался такой убывающий при удалении от поверхности коэффициент турбулентной вязкости для волновых возмущений. Аналогичное убывание волновых турбулентных напряжений при удалении от поверхности, как это отмечалось в [27], имеет место и при использовании модели замыкания второго порядка, основанной на уравнениях для турбулентных напряжений.

К аналогичным результатам приводит так называемая модель вязкоупругой турбулентности, предложенная в [28]. Эта модель также подробно описана в монографии [29], а в последнее время эта модель была использована в работе [30] для вычисления ветрового инкремента поверхностных волн. Чтобы получить выражения для турбулентных напряжений $\sigma_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ в рамках модели вязкоупругой турбулентности, воспользуемся уравнением Рейнольдса для вторых моментов, для замыкания которого использованы гипотезы, описанные в [31]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} = -C_1 \frac{\epsilon}{b} \left(\sigma_{ij} - \frac{2}{3} b \delta_{ij} \right) + \alpha b \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij}.$$

Здесь b - плотность кинетической энергии турбулентных пульсаций, ϵ - скорость диссипации турбулентной энергии, $C_1 = 1,5-2,2$ - эмпирическая константа, $(\bar{\quad})$ означает осреднение по турбулентным пульсациям.

Переходя в этом уравнении к криволинейным координатам (ξ, η) , после преобразований можно получить в нулевом порядке по амплитуде волны для тангенциального напряжения обычное градиентное выражение

$$\sigma_{12}^{(0)} = \frac{\alpha b^2}{C_1 \epsilon} \frac{du_0}{d\eta} = \nu(\eta) \frac{dU_0}{d\eta},$$

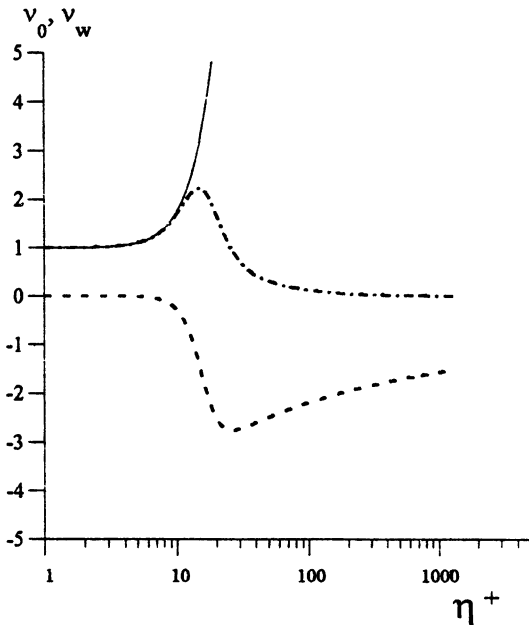
а для гармонических возмущений волновых турбулентных напряжений $S_{ij} = \hat{S}_{ij} e^{iK(\xi - Ct)}$

$$S_{ij} = \nu_{wave}(\eta) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

градиентное выражение с комплексным коэффициентом турбулентной вязкости

$$\nu_{wave}(\eta) = \nu_0 + \frac{\nu - \nu_0}{1 + \frac{\nu - \nu_0}{u_*^2} i K (U_0 - C) \alpha}. \quad (10)$$

Комплексный коэффициент вязкости означает, что турбулентность обладает вязкоупругими свойствами. Зависимости $\nu_{wave}(\eta)$ представлены на рис. 2. Видно, что $\nu_{wave}(\eta)$ убывает при удалении от поверхности, а вблизи нее совпадает с $\nu(\eta)$.



Р и с. 2. Профили турбулентной вязкости $u_* = 10$ см/с, $\alpha = 0.5$,

$k = 1 \text{ см}^{-1}$. _____ - действительная вязкость;
 - - - - - $\text{Re} \nu_{wave}$, - - - - - $\text{Im} \nu_{wave}$

Эти модели очень просты, но они дают хорошие результаты при расчете скорости роста поверхностных волн. Так, на рис. 3 представлены величины коэффициента взаимодействия волн с ветром β , коэффициент связан со скоростью роста волн следующим образом:

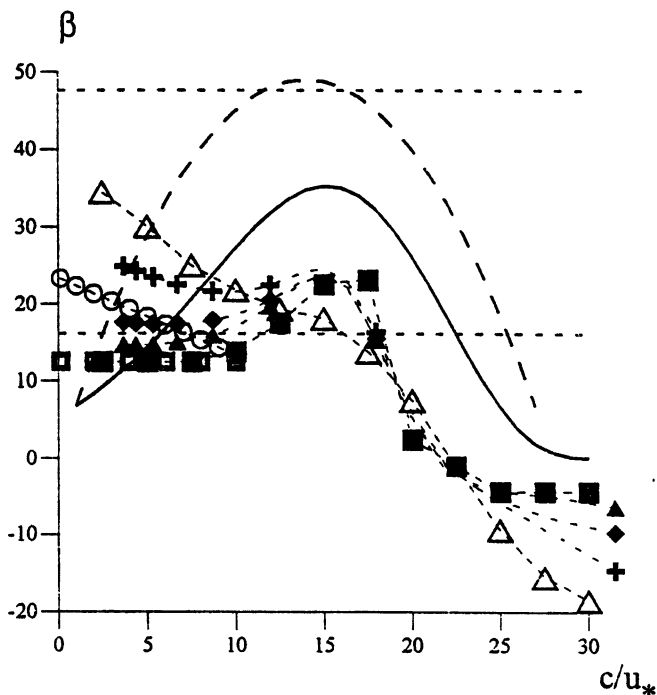
$$\text{Im} \omega = \frac{1}{2} \omega \beta \frac{u_*^2}{C^2}.$$

Кривые, представленные на рис. 3, получены в рамках различных моделей, среди которых модель Майлса [32], простые градиентные модели [33, 34], модель "быстрых возмущений" [26], модели замыкания второго порядка [35], а также кривая, аппроксимирующая экспериментальные данные, полученные в [37]. Кроме того, отмечена область изменения β , предложенная в работе [5] (все эти данные взяты из [34]). Также на рис. 3 приведены зависимости, рассчитанные в рамках модели, развитой в работе [17], с использованием градиентной и вязкоупругой моделей. Из рисунка видно, что кривые, полученные в рамках простой модели, описываемой в настоящей работе, близки к рассчитанным в рамках модели "быстрых возмущений" и модели второго порядка и находятся в пределах области изменения β , определенной экспериментально.

Следует также заметить, что значения β , полученные в рамках простой градиентной и вязкоупругой моделей турбулентности, близки между собой. Чтобы объяснить этот факт, рассмотрим, в какой области ветрового пограничного слоя происходит энергообмен волны с потоком. Из системы уравнений для энергии волновых возмущений во 2-м порядке по амплитуде волны можно получить выражение

$$W = \int_0^{\infty} T_{sur}(\eta) d\eta + \int_0^{\infty} T_{vis}(\eta) d\eta, \quad (11)$$

где W - поток энергии от ветра к волнам, T_{sur} - работа средней по периоду волны радиационной силы, T_{vis} - средняя диссипация энергии волны в воздухе. Аналогичное выражение было получено в работе [36]. Все слагаемые имеют второй порядок по амплитуде волны и выражаются через волновые возмущения гидродинамических полей, которые удовлетворяют системе уравнений гидродинамики в линейном приближении, т. е. согласно уравнению (11) поток энергии от ветра к волнам определяется балансом мощности средней радиационной силы и вязких потерь.



Р и с. 3. Коэффициенты энергообмена, рассчитанные в рамках различных моделей:

- — расчеты в рамках модели [26],
- — расчеты в рамках модели [35],
- — теория [33],
- △ — модель длин смешения, представленная в [34],
- — аппроксимация, основанная на модели [41],
- — параметризация эксперимента [37],
- + — наша модель - простая градиентная аппроксимация,
- ◆ — вязкоупругая модель $\alpha=0.3$,
- ▲ — вязкоупругая модель $\alpha=1$,
- интервал изменения β по данным [38]

Выражение (11) может быть преобразовано к физически ясному виду. Для этого мы введем новую вертикальную координату $u =$

$= U_0(\eta) - C$, тогда (11) примет вид

$$W = \int_{-C}^{\infty} (T_{s\text{our}} + T_{vis}) \frac{1}{U_{0\eta}} \Big|_{U_0(\eta)=u} du. \quad (12)$$

Как показано в работе [39], функция

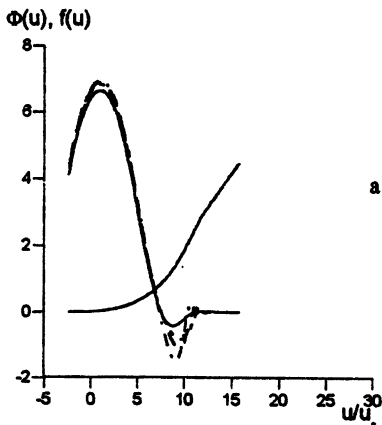
$$f(u) = \frac{\rho}{U_{0\eta}} \Big|_{U_0(\eta)=u+C} \quad (13)$$

имеет смысл функции распределения по скоростям числа жидких частиц в плоскопараллельном потоке, аналогичной функции распределения частиц плазмы. Тогда плазменно-гидродинамическая аналогия позволяет интерпретировать подинтегральное выражение в (12) как работу каждой жидкой частицы над потоком, "взвешенную" с учетом функции распределения числа частиц по скоростям. Зависимость этой функции от u показывает вклад жидких частиц, имеющих заданную скорость u , в энергоснабжение волны. Однако зависимость от u следующего определенного интеграла $\Phi(u)$ от подинтегрального выражения оказывается более наглядной:

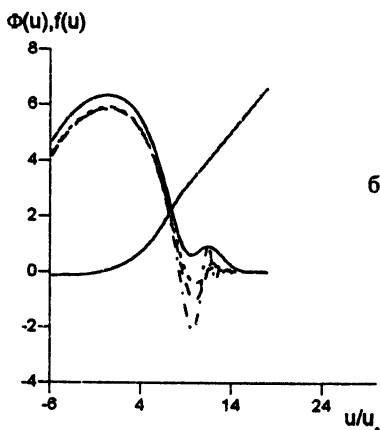
$$\Phi(u) = \int_u^{\infty} (T_{s\text{our}} + T_{vis}) f(u_1) du_1. \quad (14)$$

Действительно, с одной стороны, $\Phi(u)$ показывает область основного энергообмена волны с потоком (положение максимума производной). С другой стороны, ее значение вблизи водной поверхности (где $\eta = 0$ и $u = -C$) равно потоку волновой энергии, которая определяет волновой инкремент. Это позволяет сравнивать результаты расчетов, полученные в рамках различных моделей.

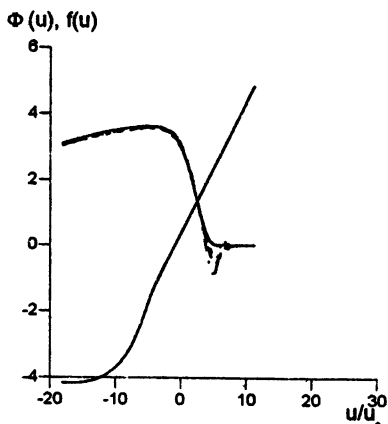
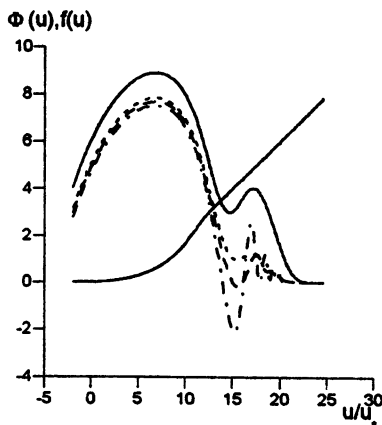
На рис. 4 изображены функции $\Phi(u)$, рассчитанные при различных параметрах волны и ветра в рамках градиентной аппроксимации, с коэффициентом вязкости (7), а также в рамках вязкоупругой модели с комплексным коэффициентом вязкости (10) при трех значениях параметра $\alpha = 0,3; 0,5; 1$. На том же рисунке представлена функция $\ln f$ (логарифм взят для того, чтобы можно было изобразить функцию распределения в одних осях с функцией $\Phi(u)$). На графике $\ln f$ видны области вязкого подслоя и логарифмического пограничного слоя.



а



б



Р и с. 4. Зависимости функции, определяемой формулой (14) от нормированной скорости частиц невозмущенного потока u/u_* и функция распределения f ,

определяемая формулой (13) для различных параметров ветра и волн. Скорости трения ветра и длины волн равны 10 см/с, 2 см (а), 10 см/с, 20 см (б), 30 см/с, 20 см (в), 10 см/с, 200 см (г).

— — — — — градиентная модель, — — — — — вязкоупругая модель $\alpha=0.3$,
 - - - - - вязкоупругая модель $\alpha=0.5$, — — — — — вязкоупругая модель $\alpha=1$,
 — — — — — функция f

Заметим, что уровень $u = 0$ соответствует слою совпадения, в котором скорость потока равна фазовой скорости волны. При использовании квазиламинарной модели Майлса [40] функция $\Phi(u)$ имела бы вид ступенчатой функции со скачком при $u = 0$. Учет турбулентных

флуктуаций качественно меняет вид этой функции. Видно, что для достаточно коротких волн ($K = 3 \text{ см}^{-1}$; $0,3 \text{ см}^{-1}$) и небольшой скорости трения ветра ($u_* = 10 \text{ см/с}$) (рис. 4, а, б) перепад функции $\Phi(u)$ (максимум энергообмена) расположен вблизи переходной области от вязкого подслоя к турбулентному погранслою, т. е. модель с эффективным комплексным коэффициентом вязкости дает результат, близкий к градиентной модели. Это, очевидно, связано с тем, что область энергообмена волны с потоком расположена близко к поверхности, где комплексный коэффициент вязкости практически равен действительному (ср. рис. 3). При большей скорости ветра ($u_* = 30 \text{ см/с}$) область энергообмена волны с потоком смещается в область логарифмического пограничного слоя. Здесь значения комплексного коэффициента вязкости заметно отличаются от действительного. При этом значения потока волновой энергии на поверхности, полученные в рамках вязкоупругой модели, отличаются от результатов расчета по градиентной модели, но это различие не превосходит 30%. Интересно отметить, что при некоторых параметрах волны и ветра область энергообмена волны с потоком лежит в окрестности слоя совпадения. Такой пример изображен на рис. 4, г, соответствующем параметрам $u_* = 10 \text{ см/с}$, $K = 0,03 \text{ см}^{-1}$. В этом случае реализуется "квазимайлсовский" резонансный механизм энергообмена волны с потоком, хотя перепад функции $\Phi(u)$ не является резким, а размыт за счет большого значения эффективной турбулентной вязкости. Заметим, что здесь коэффициент энергообмена волны с потоком $\beta = 3,64$ близок к рассчитанному в рамках модели Майлса [41]. Кроме того, функции $\Phi(u)$, полученные в моделях с действительными и комплексными коэффициентами вязкости, близки друг к другу. Это следует из близости ν_{wave} к ν в окрестности слоя совпадения, где $U_0 = C$, см. уравнение (10). Из рассуждений, приведенных выше, следует вывод о том, что область взаимодействия ветра и волн расположена близко к водной поверхности. В этой области градиентная и вязкоупругая модели дают близкие значения ветрового инкремента поверхностных волн от сантиметрового до метрового диапазонов в случаях слабых и умеренных ветров. Для сильных ветров это может нарушаться.

Кроме того, градиентная аппроксимация может быть использована и для описания длинноволновых возмущений. Действительно, модуляция скорости роста коротких поверхностных волн возникает за счет колебаний скорости внутри пограничного слоя длинной волны в воздухе (см. [11]). Масштаб волнового пограничного слоя вблизи поверхности воды может быть оценен следующим образом: $\delta_W = \{\nu/[kU_0(\delta_W)]\}^{1/2}$. На этом масштабе комплексный коэффициент вязкости (10) может быть

представлен как $\nu_{wave} = \nu_a + (\nu - \nu_a) / \left\{ 1 + [\nu / (u_* \delta_W)]^2 \right\}$.

Подставляя $\nu(\delta_W) \simeq \varkappa u_* \delta_W$ (где $\varkappa = 0,4$ – постоянная Кармана), получим $\nu_{wave} = \nu_a + (\nu - \nu_a) / (1 + \varkappa^2) \approx \nu$, т. е. комплексный и действительный коэффициенты вихревой вязкости оказываются близки. Это дает возможность в дальнейшем использовать простую градиентную аппроксимацию для турбулентных напряжений.

Основные уравнения для длинноволновых и коротковолновых возмущений воздушного потока

Модель, основанная на использовании криволинейных координат и градиентной аппроксимации турбулентных напряжений, будет использована для расчета инкремента короткой поверхностной волны в присутствии длинной. Ввиду того, что требуются громоздкие преобразования, необходимо разработать предельно формализованный метод вывода уравнений для коротковолновых возмущений. Кратко он состоит в следующем. Прежде всего необходимо выразить систему уравнений гидродинамики в ортогональных координатах, в общем случае зависящих от времени:

$$x = x(s, \gamma, t), \quad y = y(s, \gamma, t). \quad (15)$$

Система уравнений двумерной гидродинамики в этих координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\psi_t - \psi_s \frac{x_t x_s + y_t y_s}{I} - \psi_\gamma \frac{x_t x_\gamma + y_t y_\gamma}{I} \right] + \\ & + \frac{1}{I} (\psi_\gamma \psi_{s\gamma} - \psi_s \psi_{\gamma\gamma}) - \frac{\psi_s^2 + \psi_\gamma^2}{2I^2} I_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial y}{\partial s} = \\ & = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial}{\partial s} (I \sigma_n) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (I \sigma_\tau) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial s} \left[\psi_t - \psi_s \frac{x_t x_s + y_t y_s}{I} - \psi_\gamma \frac{x_t x_\gamma + y_t y_\gamma}{I} \right] + \\
& + \frac{1}{I} (\psi_s \psi_{s\gamma} - \psi_\gamma \psi_{ss}) - \frac{\psi_s^2 + \psi_\gamma^2}{2I^2} I_\gamma + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + g \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \quad (17) \\
& = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial}{\partial s} (I\sigma_\tau) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (I\sigma_n) \right).
\end{aligned}$$

Здесь I – якобиан преобразования (15), σ_n и σ_τ – нормальное и тангенциальное напряжения Рейнольдса.

В дальнейшем будет использоваться функция завихренности χ , связанная с функцией тока выражением

$$\chi = \Delta\psi = \frac{1}{I} (\psi_{ss} + \psi_{\gamma\gamma}),$$

где Δ – оператор Лапласа.

Сначала рассмотрим длинноволновое возмущение в виде гармонической плоской волны. Перейдем в систему отсчета, бегущую с фазовой скоростью этой волны, где волновое возмущение стационарно и "длинноволновое" преобразование координат тоже стационарно и имеет вид (4), где произведем замены $\xi \rightarrow s, \eta \rightarrow \gamma, K \rightarrow k$. Получается задача, рассмотренная в [17]. При этом функция тока

$$\psi = -c\gamma + \int U_0(\gamma) d\gamma + \psi_1(s, \gamma),$$

ψ_1 в линейном приближении удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}
& ((U_0 - c)\chi_1 - \psi_1 U_{0\gamma\gamma}) ik - - \left(\frac{d^2}{d\gamma^2} - k^2 \right) (\chi_1 \nu_w) = \\
& = -2\nu_{w\gamma\gamma} \psi_1 k^2 - 2kake^{-k\gamma} ((U_0 - c)\nu_{w\gamma})_\gamma, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \psi_1}{d\gamma^2} - k^2 \psi_1 = \chi_1 - 2kae^{-k\gamma} U_{0\gamma}. \quad (19)$$

Здесь χ_1 – длинноволновое возмущение завихренности с граничными условиями

$$\psi_1|_{\gamma=0} = 0,$$

$$\psi_{1\gamma}|_{\gamma=0} = 2cka.$$

Решая эту систему, можно найти поля длинноволновых возмущений.

Длинноволновые возмущения рассматривались в системе отсчета, бегущей вместе с длинной волной. Для рассмотрения коротковолнового возмущения перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $-c$ вдоль линий $\gamma = \text{const}$, так что

$$s = s_1 - ct.$$

При этом большая горизонтальная компонента скорости длинной волны исключается. В координатах (s_1, γ) система уравнений гидродинамики имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{t\gamma} + \frac{1}{I}(\psi_{s_1\gamma}(\psi_\gamma + cI) - \psi_{s_1}\psi_{\gamma\gamma}) - \frac{\psi_{s_1}^2 + \psi_\gamma^2}{2I^2}I_{s_1} + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_1} + g \frac{\partial y}{\partial s_1} = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} (I\sigma_n) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (I\sigma_\tau) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\psi_{ts_1} + \frac{1}{I}(\psi_{s_1}\psi_{s_1\gamma} - \psi_{s_1s_1}(\psi_\gamma + cI)) - \frac{\psi_{s_1}^2 + \psi_\gamma^2}{2I^2}I_\gamma + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + g \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} (I\sigma_\tau) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (I\sigma_n) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

В рамках этой системы будет рассматриваться коротковолновое возмущение, имеющее характерные масштабы по координатам L и времени T много меньшие, чем у длинной волны: $\mu_1 = Lk \ll 1$, $\mu_2 = \omega T \ll 1$. В этом случае поле короткой волны можно описывать методом многих масштабов, вводя безразмерные "быстрые" переменные $\sigma = s_1/L$, $\tau = t/T$. Для получения дисперсионного уравнения коротких волн в присутствии длинных, которое необходимо для вычисления инкремента, достаточно найти решение в нулевом порядке по μ_1, μ_2 . В этом порядке зависимость от "длинноволновых" переменных $\Sigma = ks_1$ и $\Upsilon = \omega t$ параметрическая. Линеаризовав систему (20), (21) по коротковолновым возмущениям, можно искать ее решение в виде квазипериодической плоской волны, в которой гидродинамические поля пропорциональны

$$e^{i(Ks_1 - \Omega t)}.$$

В этом случае можно сделать еще один переход в новую систему отсчета

$$s_2 = s_1 - \frac{\Omega}{K}t.$$

В этой системе отсчета коротковолновое возмущение квазистационарно, и уравнения, описывающие коротковолновые возмущения, имеют вид

$$\frac{1}{I} (\Phi_{s_2\gamma} \Phi_\gamma - \Phi_{s_2} \Phi_{\gamma\gamma}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial s_2} = \frac{\partial \sigma_n^{(2)}}{\partial s_2} + \frac{\partial \sigma_\tau^{(2)}}{\partial \gamma}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{I} (\Phi_{s_2} \Phi_{s_2\gamma} - \Phi_{s_2 s_2} \Phi_\gamma) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial \gamma} + g = \frac{\partial \sigma_\tau^{(2)}}{\partial s_2} - \frac{\partial \sigma_n^{(2)}}{\partial \gamma}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Phi = \psi + \left(c - \frac{\Omega}{K} \right) I \gamma$$

– функция тока в новой системе координат, движущейся относительно первоначальной со скоростью $(c - \frac{\Omega}{K}) I \gamma$ вдоль линий $\gamma = \text{const}$; $I = 1 + 2y_{1\gamma}$ – якобиан "длинноволнового" преобразования координат. С учетом выражения для ψ функция Φ имеет вид

$$\Phi = -\frac{\Omega}{K} (1 + 2y_{1\gamma}) \gamma + \int_0^\gamma U_0(\gamma_1) d\gamma_1 + (\psi_1(\gamma, \Sigma, \Upsilon) + 2cy_{1\gamma}) + \Phi_2(\gamma, s_2\Sigma, \Upsilon), \quad (24)$$

куда входят слагаемое, описывающее движение данной системы отсчета относительно лабораторной, функция тока среднего течения, длинноволновое возмущений функции тока и коротковолновое возмущение функции тока. Видно, что это выражение с точностью до замены $\gamma \rightarrow y$ совпадает с выражением для функции тока в системе отсчета, движущейся со скоростью

$$C = -\frac{\Omega}{K} (1 + 2y_{1\gamma}) + 2cy_{1\gamma}.$$

А это означает, что можно сделать переход к криволинейным координатам (ξ, η) , в которых координатная линия совпадает с взволнованной поверхностью. Вся дальнейшая процедура полностью эквивалентна длинноволновому преобразованию координат. При этом вводится новое коротковолновое возмущение Ψ_2 вместо Φ_2 , так что

$$\Phi = -\frac{\Omega}{K} (1 + 2y_{1\gamma}) \eta + \int_0^\eta U_0(\eta_1) d\eta_1 + (\psi_1(\eta, \Sigma, \Upsilon) + 2cy_{1\gamma}) + \Psi_2(\eta, \xi, \Sigma, \Upsilon).$$

При этом Φ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{IJ} (\Phi_{\xi\eta} \Phi_{\eta} - \Phi_{\xi} \Phi_{\eta\eta}) - \frac{\Phi_{\xi}^2 + \Phi_{\eta}^2}{2J^2 I} J_{\xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = \\ = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (J \Sigma_n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \Sigma_{\tau}) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{IJ} (\Phi_{\xi} \Phi_{\xi\eta} - \Phi_{\xi\xi} \Phi_{\eta}) - \frac{\Phi_{\xi}^2 + \Phi_{\eta}^2}{2J^2 I} J_{\eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + g \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \\ = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (J \Sigma_{\tau}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (J \Sigma_n) \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Sigma_n = \frac{\nu}{I} \left[\left(\frac{\Phi_{\eta}}{J} \right)_{\xi} + \left(\frac{\Phi_{\xi}}{J} \right)_{\eta} \right], \quad (27)$$

$$\Sigma_{\tau} = \frac{\nu}{I} \left[\left(\frac{\Phi_{\eta}}{J} \right)_{\eta} - \left(\frac{\Phi_{\xi}}{J} \right)_{\xi} \right]. \quad (28)$$

Эта система должна быть дополнена граничными условиями непротекания на границе раздела воды и воздуха, непрерывности касательной скорости, нормальных и тангенциальных напряжений. Решение этой системы в линейном приближении позволяет найти дисперсионное уравнение и инкремент коротких поверхностных волн в присутствии длинных:

$$\begin{aligned} \omega_s = \sqrt{gK + TK^3(1 + 3\alpha)} + \alpha cK - \\ - 2i(1 + 3\alpha)\nu K^2 + \frac{(1 + 2\alpha)K^{3/2} [p^a + iT^a]}{2KA\sqrt{g + TK^2(1 + 3\alpha)}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\alpha = ka e^{i(\Sigma - \Upsilon)}$.

Первые два слагаемых в (29) определяют частоту короткой волны в присутствии длинной с учетом ее доплеровского сдвига на осциллирующем течении длинной волны. Это выражение совпадает с известным (см. [42]). Третье слагаемое описывает вязкое затухание короткой волны и модуляцию вязкого декремента в присутствии длинной волны. Последнее слагаемое описывает ветровую инкремент короткой волны. Для его определения необходимо рассмотреть коротковолновое возмущение в воздухе. В линейном приближении коротковолновые возмущения функции тока Ψ_2 и завихренности χ_2 удовлетворяют системе уравнений, следующей из (27), (28):

$$(1 - 2\alpha) \left[(\Phi_{0\eta}\chi_2 - \Psi_2\chi_{0\eta}) iK - \left(\frac{d^2}{d\eta^2} - K^2 \right) (\chi_2\nu) \right] = \quad (30)$$

$$= -2\nu_{\eta\eta}\Psi_2K^2 - 2KAe^{-K\eta} (\Phi_{0\eta}\nu_{\eta})_{\eta},$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{d\eta^2} - K^2\Psi_2 = [\chi_2 - 2KAe^{-K\eta}\chi_0] (1 - 2\alpha) \quad (31)$$

с граничными условиями

$$\Psi_2|_{\eta=0} = 0, \quad (32)$$

$$\Psi_2|_{\eta=0} = 2CKA(1 - 2\alpha).$$

Система уравнений для коротковолновых возмущений имеет такой же вид, как для длинноволновых, но в коэффициенты помимо средних полей входят их длинноволновые возмущения:

$$\Phi_{0\eta} = -C(1 - 2\alpha) + (\varphi_{1\eta}(\eta, \Sigma, \Upsilon) - 2\alpha c) + U_0(\eta),$$

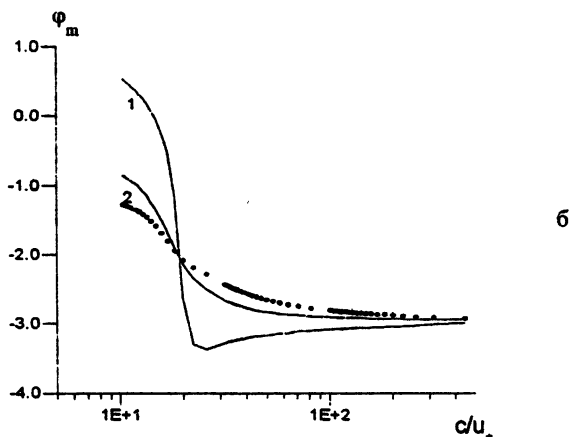
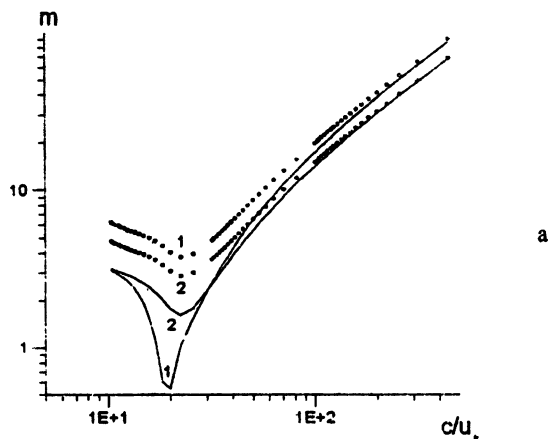
$$\chi_0 = \Phi_{0\eta\eta}(1 + 2\alpha) = U_{0\eta} + \chi_1(\eta, \Sigma, \Upsilon).$$

Эта система решалась численно сеточным методом, численно же из системы (18), (19) находились длинноволновые поля в тех же узлах сетки. При этом, как обычно в таких случаях, использовались "логарифмические координаты" z , такие, что $\ln(\eta + \eta_0) = z$. Это позволяет получить достаточно высокое разрешение вблизи поверхности в области больших градиентов гидродинамических полей и, кроме того, легко получить значения волновых полей разных масштабов в одних узлах сетки.

Модуляция скорости роста короткой волны в присутствии длинной

На основании численного решения указанных систем вычислялся модулированный ветровой инкремент B , который при достаточно малой крутизне длинной волны можно представить в виде

$$B = B_0(1 + kam\cos(\Sigma - T - \varphi_m)).$$



Р и с. 5. Зависимость модуля (а) и фазы (б) коэффициента модуляции ветрового инкремента короткой волны от нормированной фазовой скорости длинной волны. Длины короткой волны: 1 - 20 см, 2 - 2 см. Сплошные линии - данные точного расчета, пунктирные - расчет по приближенной формуле (36). Скорость трения ветра - 10 см/с

На рис. 5, а, в представлены зависимости модуля m и фазы φ_m коэффициента модуляции скорости роста коротких волн с волновыми числами $K = 3 \text{ см}^{-1}$ и $K = 0,3 \text{ см}^{-1}$ от c/u_* при скоростях трения ветра $u_* = 10 \text{ см/с}$, 20 см/с , 30 см/с . Характерной особенностью этих кривых является минимум модуля m при $c/u_* = 20 \div 30$ и почти линейный рост

при больших c/u_* . Фаза коэффициента модуляции меняется от нуля при малых c/u_* почти до $-\pi$ при больших c/u_* .

Чтобы пояснить эти результаты, необходимо рассмотреть вид длинноволнового возмущения поля скорости в области энергообмена короткой волны с потоком, которая лежит в переходной области от вязкого подслоя к логарифмическому пограничному слою, т. е. на расстоянии приблизительно $20\nu_a/u_*$ (20 вязких длин) от поверхности воды, где скорость невозмущенного течения равна $10 \div 12u_*$.

Наиболее просто форма длинноволнового возмущения может быть определена, когда фазовая скорость длинной волны c велика по сравнению со скоростью потока в области энергообмена волны с потоком ($10 \div 12u_*$). В этом случае система для длинноволновых возмущений сводится к одному уравнению для тангенциального напряжения $T_1 = \nu\chi_1$ в этой области:

$$\frac{d^2 T_1}{d\gamma^2} + ikc \frac{T_1}{\nu(\gamma)} = 0, \quad (33)$$

здесь $\nu(\gamma)$ — действительный коэффициент турбулентной вязкости. Оценки легко дают, что при $u_* > 10$ см/с масштаб возмущения T_1 с фазовой скоростью $c > 10 \div 12u_*$ много больше толщины вязкого подслоя $\approx 20\nu_a/u_*$. Это означает, что при таких ветрах для возмущений с такой фазовой скоростью T_1 практически не зависит от вертикальной координаты в области энергообмена короткой волны с потоком, но осциллирует с периодом длинной волны:

$$\sigma_T = u_*^2 + \operatorname{Re} \left(T_1 e^{i(\Sigma - \Gamma)} \right) = u_*^2 \left(1 + ka \operatorname{Re} \left(m_T e^{i(\Sigma - \Gamma)} \right) \right),$$

здесь m_T — коэффициент модуляции тангенциального напряжения. Это означает, что осциллирующий профиль скорости имеет ту же форму (логарифмический профиль с вязким подслоем), но осциллирует как целое. Тогда поле скорости имеет вид

$$\Phi_{0\eta} = U_0(\eta) \left(1 + \operatorname{Re} \left(\frac{T_1 e^{i(\Sigma - \Gamma)}}{u_*^2} \right) \right), \quad (34)$$

а поле завихренности

$$\chi_0 = \frac{u_*^2 + \operatorname{Re} \left(T_1 e^{i(\Sigma - \Gamma)} \right)}{\nu(\eta)}. \quad (35)$$

Для длинноволновых возмущений такой формы коэффициент модуляции инкремента коротких волн может быть найден разложением в ряд

Тейлора:

$$\beta(1+\varepsilon)|_{\varepsilon=\frac{T_1}{u_*^2}} = \beta(1+\varepsilon)|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{T_1}{u_*^2}.$$

Тогда коэффициент модуляции инкремента

$$m e^{i\varphi_m} = \frac{m_T}{\beta_0} \frac{\partial\beta_0}{\partial\varepsilon}. \quad (36)$$

Зависимость $m(c/u_*)$, соответствующая этой формуле, представлена на рис. 5 пунктирной кривой. Видно, что при $c/u_* > 30$ точная и приближенная кривые достаточно близки.

Если скорость ветра мала по сравнению с фазовой скоростью длинной волны во всей области изменчивости T_1 , которая, как очевидно следует из уравнения (33), имеет масштаб $L_T = \frac{\alpha u_*}{kc}$, т. е. $c \gg \frac{u_*}{\alpha} \ln \frac{L_T}{z_0}$, то возмущение тангенциального напряжения везде удовлетворяет уравнению (33). Тогда можно найти его решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\varphi_{1\gamma}|_{\gamma=0} = 2cka,$$

$$\varphi_{1\gamma}|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0,$$

и представить спектр турбулентных напряжений в виде

$$m_T = \frac{2\alpha u_* cka}{\ln \left(\frac{3,15kc\nu_a}{0,4u_*^2} \eta_0^+ \right) + i\frac{\pi}{2}}, \quad (37)$$

где η_0^+ — параметр шероховатости, выраженный в вязких длинах. В случае гидродинамически гладкой поверхности $\eta_0^+ = 0.15$.

Видно, что коэффициент m_T (а значит, и m) велик, почти пропорционален c/u_* , а фаза его близка к $-\pi$. Можно качественно пояснить фазовую зависимость модуляции инкремента коротких волн в присутствии длинных. Из предыдущего ясно, что модуляция инкремента коротких волн определяется осциллирующей добавкой к горизонтальной скорости. Профиль скорости ветра характеризуется резким градиентом скорости вблизи поверхности воды и медленным ее изменением в области логарифмического пограничного слоя, поэтому качественно его можно моделировать двухслойной жидкостью вода-воздух. Причем в верхнем слое (воздухе) скорость постоянна и равна U_0 . Рассмотрим качественный вид возмущений скорости в такой двухслойной жидкости. Легко видеть, что при $U_0 < c$ колебания горизонтальной скорости в воздухе противофазны колебаниям в воде, т. е. находятся в противофазе с

колебаниями поверхности воды. При $U_0 > c$ колебания горизонтальной скорости синфазны с колебаниями горизонтальной скорости в воде и поверхностью воды. Поскольку вязкость отлична от нуля, то на границе вода-воздух выполняется условие прилипания, а в воздухе формируется пограничный слой. Колебания горизонтальной скорости в нем противофазны возвышению водной поверхности при больших фазовых скоростях волны и синфазны при малых. Это качественно соответствует зависимости фазы коэффициента модуляции инкремента коротких волн в присутствии длинных от c/u_* . Для быстрых волн $\varphi_m \approx -\pi$, для медленных $\varphi_m \approx 0$.

Модуляция спектра коротких поверхностных волн в присутствии длинных

Расчеты гидродинамической МПФ проводились с использованием простой релаксационной модели, предложенной в работе [43]. Аналогично [43] будем искать решение уравнения (2) в виде ряда

$$F = F_0(K) + F_1(K)\alpha + \dots \quad (38)$$

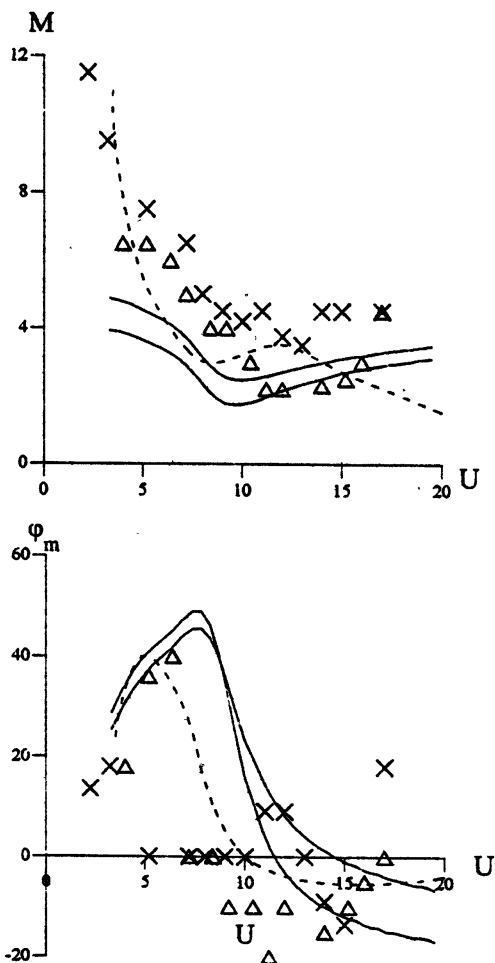
Полагая аналогично [43] скорость релаксации $\beta_r = B_0$, получим

$$R = \frac{1 - \frac{C_{gr}}{c}}{\left(1 - \frac{C_{gr}}{c}\right)^2 + \left(\frac{2B_0}{\omega}\right)^2} \times \quad (39)$$

$$\times \left[- \left(\frac{K}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial K} + \eta \right) - \frac{2B_0 m \sin \varphi_m}{\omega \left(1 - \frac{C_{gr}}{c}\right)} + \frac{2B_0^2 m \cos \varphi_m}{\omega^2 \left(1 - \frac{C_{gr}}{c}\right)} \right],$$

$$Q = \frac{2B_0}{\left(1 - \frac{C_{gr}}{c}\right)^2 + \left(\frac{2B_0}{\omega}\right)^2} \times \quad (40)$$

$$\times \left[- \left(\frac{K}{F_0} \frac{\partial F_0}{\partial K} + \eta \right) + \frac{2B_0 m \sin \varphi_m}{\omega} + m \cos \varphi_m \left(1 - \frac{C_{gr}}{c}\right) \right].$$

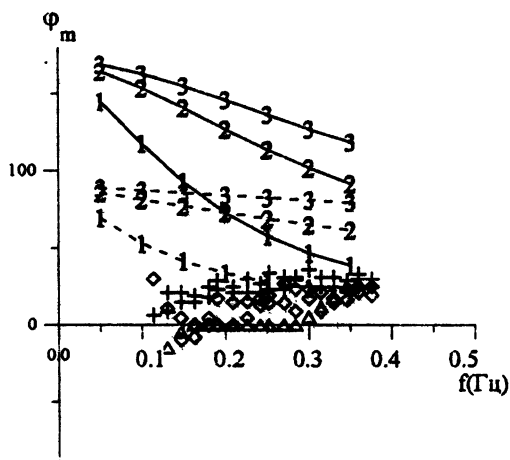
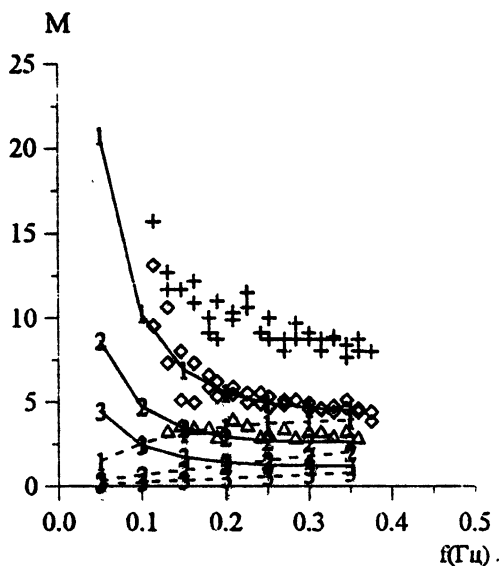


Р и с. 6. Зависимость гидродинамической МПФ от скорости ветра. Длина короткой волны 2,3 см, частота длинной волны $f = 0.3$ Гц.
 ———— - расчет в рамках настоящей модели, - - - - - расчет [22]. Экспериментальные точки взяты из [6]

С использованием этих формул и данных расчетов параметров B_0, B_c, β вычислялись значения R и Q . При этом выбирались параметры ветра и волн, соответствующие экспериментам, описанным в работах [5, 6]. На рис. 6 представлены зависимости амплитуды и фазы гидродинамической МПФ в зависимости от скорости ветра. Частота длинной волны ($f = 0,3$ Гц) соответствовала случаю медленных волн, для кото

рых фаза коэффициента модуляции инкремента коротких волн в присутствии длинных была близка к нулю (ср. рис. 5). Пунктирные кривые соответствуют результатам расчета, представленным в [22], где учитывалась конечность амплитуды поверхностных волн. Видно, что кривые достаточно хорошо соответствуют друг другу. Однако, как можно видеть из рис. 5, значения коэффициента модуляции инкремента коротких поверхностных волн в случае "медленных" длинных волн не очень велики (порядка 4-5).

Можно ожидать более выраженного эффекта в случае быстрых волн с малыми частотами. Такие волны наблюдались в эксперименте, который проводился на платформе NORDSEA в сентябре 1979 г. [5]. Проводились измерения МПФ в X- и L-диапазонах для различных ветров, частот длинных волн и других параметров. Были получены типичные спадающие зависимости МПФ от частоты длинной волны. Как показано в работе [2] в рассматриваемом диапазоне частот длинных волн (0,1-0,35 Гц) гидродинамическая МПФ существенно превосходит геометрическую МПФ, поэтому можно грубо предполагать, что измеряемая МПФ близка к гидродинамической. На рис. 7 представлены зависимости рассчитанной гидродинамической МПФ от частоты длинной волны. При этом низкочастотные волны соответствуют "быстрым" волнам, для которых фаза коэффициента модуляции инкремента коротких волн близка к $-\pi$. Экспериментальные точки взяты из работы [5]. Пунктирными линиями представлены результаты расчета без учета эффекта модуляции скорости роста коротких волн. Из рисунка очевидно, что модуляция инкремента коротких волн оказывает существенное влияние на гидродинамическую МПФ. Представленная модель дает значения модуля гидродинамической МПФ, близкие к измеренным экспериментально, однако дает неверные значения фазы. Следует принять во внимание, что настоящая модель не учитывает двух факторов: ветрового дрейфа и нелинейности поля ветровых волн. Как уже отмечалось выше, влияние дрейфового течения на инкремент коротких волн мало, если скорость трения ветра не превосходит 3-40 см/с. В то же время в этом случае существенным может быть учет конечности амплитуды ветровых волн.



Р и с. 7. Зависимость гидродинамической МРФ от частоты длинной волны, рассчитанная в рамках линейной теории. Длина короткой волны 2,3 см.

Сплошные линии - с учетом и пунктирные - без учета модуляции инкремента. Скорости трения ветра: 1 - 16 см/с, 2 - 30 см/с, 3 - 50 см/с.

Экспериментальные точки взяты из [5]

Влияние нелинейности ветровых волн на модуляцию коротких поверхностных волн в присутствии длинных

Рассмотрим вначале обобщение релаксационной модели [43] на случай ветровых волн конечной амплитуды. Основным отличием от линейного случая при этом будет появление зависимости инкремента ветровых волн от их амплитуды, т. е. в уравнении (2) $B = B[F]$ есть функционал от спектра волн F . Рассмотрим аналогично [43] пространственно однородное малое возмущение волнового поля F_1 и предположим, что оно релаксирует со скоростью β_r . Тогда из выражения (2) следует в линейном приближении по F_1

$$\begin{aligned}
 -\beta_r F_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial t} = \\
 &= \left(\frac{\delta}{\delta F} \text{Int}[F] \Big|_{F=F_0} + 2B[F_0, K] + 2 \frac{\delta B_0}{\delta F} \Big|_{F=F_0} F_0 \right) F_1.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Скорость релаксации, как в работе [43], будем полагать равной $2B_0[F]$.

Теперь предположим, что возмущение коротковолнового спектра вызывается длинной поверхностной волной, тогда появляются источники, поддерживающие это возмущение: трансформация коротких волн в поле длинных и модуляция инкремента, как это уже отмечалось выше. При этом модуляция амплитудно-зависимого инкремента коротких волн определяется двумя причинами: длинноволновыми возмущениями скорости ветра и модуляцией амплитуды ветровых волн, т. е. если

$$B = B_0[F_0] + B_1(x, t),$$

$$B_1 = \frac{\delta B_0}{\delta U} U_1 + \frac{\delta B_0}{\delta F} F_1,$$

где U — параметр скорости ветра. Будем предполагать, что длинная волна достаточно низкочастотная, так что длинноволновые вариации скорости ветра определяются вариациями тангенциального напряжения (см. формулы (34), (35)), тогда

$$B_1 = \frac{\delta B_0}{\delta u_*^2} T_1 + \frac{\delta B_0}{\delta F} F_1. \tag{42}$$

Подстановка выражений (41), (42) в уравнение (2) дает

$$F_1 = \frac{i\omega}{\beta_r - i\omega} \left(K \frac{\partial F_0}{\partial K} + \eta F_0 \right) + 2 \frac{\delta B_0}{\delta u_*^2} T_1 \frac{F_0}{\beta_r - i\omega}. \quad (43)$$

Выше было показано, что в случае, когда амплитуда ветровых волн считается бесконечно малой, амплитуда T_1 велика для низкочастотных длинных волн и растет с ростом периода волны, а фаза близка к $-\pi$, что дает результаты, противоречащие экспериментам. Рассмотрим, к каким эффектам приводит учет конечности амплитуды ветровых волн. Известно, что за счет нелинейного взаимодействия волн с ветром возникает деформация среднего профиля скорости ветра, которая сводится к появлению отрицательной добавки к скорости, что эквивалентно возрастанию эффективной высоты шероховатости [17]. В присутствии длинной волны возникает модуляция этой добавки к скорости, которая эквивалентна модуляции высоты шероховатости. В то же время, хорошо известно, что модуляция высоты шероховатости приводит к дополнительной модуляции тангенциального напряжения [20]. Кроме того, уменьшение скорости ветра приводит к уменьшению скорости роста ветровых волн, а значит и к уменьшению эффективного времени релаксации. Эти два эффекта, обусловленные конечностью амплитуды ветровых волн, могут существенно изменить амплитуду и фазу гидродинамической МПФ.

Итак, рассмотрим волну зыби с возвышением поверхности (1) и слабонелинейные поверхностные волны, спектр возвышений которых описывается формулой JONSWAP [44]:

$$F_0(K) = \frac{1}{2} \alpha_p K^{-3} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{K_p}{K} \right)^2 \right] \gamma^r, \quad (44)$$

$$r = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{K} - \sqrt{K_p} \right) / \sigma \sqrt{K_p} \right)^2 \right],$$

где

$$\alpha_p = 0,57 \left(\frac{C_p}{u_*} \right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\gamma = 3,3, \sigma = 0,1;$$

$$K_p = \frac{g}{C_p^2};$$

$C_p = Nu_*$ - фазовая скорость энергонесущей компоненты, N - параметр "возраста волнения", определяемый разгоном [45]. Короткая "брегговская" волна, которая обеспечивает рассеяние радиоволн, является одной из гармоник спектра ветровых волн. Модуляция спектральной плотности на этой длине волны и представляет собой гидродинамическую МПФ.

Рассмотрим случай, когда

$$k \ll K_p \quad (45)$$

и применимо ВКБ-приближение. Фактически оно применимо при

$$\frac{k}{K_p} \approx 3 \div 5.$$

Кроме того, оказывается, что главный вклад в нелинейные эффекты вносят волны, соответствующие интервалу насыщения и более короткие, это означает, что условия применимости менее жесткие, чем (45), а именно

$$k < K_p. \quad (46)$$

Для описания волновых возмущений в воздухе воспользуемся системой (16), (17) в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью длинной волны. С использованием градиентной аппроксимации (5), (6) для моделирования турбулентных напряжений можно представить (16), (17) в переменных завихренности χ и функции тока ψ [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi I}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \frac{\partial \chi}{\partial \gamma} \frac{\partial \psi}{\partial s} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \sigma_\tau + 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \gamma} \sigma_n + \\ + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sigma_n \frac{I_s}{I} + \sigma_\tau \frac{I_\gamma}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\sigma_n \frac{I_\gamma}{I} - \sigma_\tau \frac{I_s}{I} \right); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \psi = I \chi. \quad (48)$$

Будем искать решение (47), (48) в виде суммы функции тока и завихренности, осредненных по волновым возмущениям ψ_0, χ_0 ; их длинноволновых возмущений $\psi^{(l)}, \chi^{(l)}$, индуцированных волной зыби с возвышением (1), и коротковолновых возмущений, вызванных ветровыми волнами со спектром (44) $\psi^{(s)}, \chi^{(s)}$:

$$\psi = \psi_0(\gamma) + \psi^{(l)}(\gamma, s) + \psi^{(s)}(\gamma, s),$$

$$\chi = \chi_0(\gamma) + \chi^{(l)}(\gamma, s) + \chi^{(s)}(\gamma, s).$$

Осредним систему (47), (48) по коротковолновым возмущениям и линеаризуем полученную систему относительно длинноволновых возмущений. Тогда получим для среднего течения

$$\frac{d^2}{d\gamma^2}(\nu\chi_0) + \frac{d^2}{d\gamma^2}\Sigma_0(\gamma) = 0, \quad (49)$$

$$\psi_{0\gamma\gamma} = \chi_0. \quad (50)$$

а для длинноволнового возмущения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\chi^{(l)}}{\partial s} \frac{\partial\psi_0}{\partial\gamma} - \frac{\partial\chi_0}{\partial\gamma} \frac{\partial\psi^{(l)}}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \nu\chi^{(l)} = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} (\Sigma_1(\gamma) - 2y_{1\gamma}\Sigma_0(\gamma)) - 2\nu_{\gamma\gamma}\psi_s^{(l)} - I_\gamma(\nu_\gamma\psi_{0\gamma}), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2\psi^{(l)}}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2\psi^{(l)}}{\partial s^2} = \chi^{(l)} + 2y_{1\gamma}\chi_0. \quad (52)$$

Здесь $\Sigma_0(\gamma)$, $\Sigma_1(\gamma, s)$ – среднее значение и длинноволновое возмущение волнового потока импульса ветровых волн:

$$\begin{aligned} \Sigma_0(\gamma), \Sigma_1(\gamma, s) = \Sigma(\gamma, s) &= \overline{\psi_\gamma^{(s)}\chi_s^{(s)} - \psi_s^{(s)}\chi_\gamma^{(s)}} \simeq \\ &\simeq -\frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{\psi_s^{(s)}\chi^{(s)}} \simeq -\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\overline{\psi_\gamma^{(s)}\psi_s^{(s)}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из выражения (53) очевидно следует, что Σ убывает при удалении от границы раздела вода-воздух, причем при выполнении условия (46) характерный масштаб Σ по вертикали много меньше k^{-1} . При этом для ветровых волн, которые по определению имеют фазовые скорости менее $20u_*$, перепад волнового потока импульса сосредоточен вблизи поверхности в области перехода от вязкого подслоя к логарифмическому пограничному слою.

Граничные условия имеют следующий вид: для среднего течения

$$\psi_{0\gamma}|_{\gamma=0} = -c, \quad (54)$$

где c — фазовая скорость длинной волны,

$$\nu \chi_0|_{\gamma \rightarrow \infty} = u_*^2. \quad (55)$$

Для длинноволнового возмущения

$$\psi_\gamma^{(l)}|_{\gamma=0} = 2cka, \quad (56)$$

$$\psi^{(l)}, \chi^{(l)}|_{\gamma \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (57)$$

Решение (49), (50) с граничными условиями (54), (55) дает профиль скорости среднего течения, который при $\gamma^+ > 20$ (вне вязкого подслоя) может быть представлен в виде

$$U_0(\gamma) = -c + \frac{u_*}{\alpha} \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - \int_0^\infty \frac{\Sigma(\gamma)}{\nu(\gamma)} d\gamma. \quad (58)$$

Отсюда видно, что энергообмен волны с ветром вызывает появление отрицательной добавки к профилю его скорости.

Если масштаб длинноволнового пограничного слоя мал по сравнению с длиной волны зыби, а ее фазовая скорость велика по сравнению со скоростью ветра, то (51) приводится к одному уравнению для длинноволнового возмущения турбулентного напряжения ветра

$$T^{(l)} = \nu \chi^{(l)}. \quad (59)$$

▲ именно

$$\frac{d^2 T^{(l)}}{d\gamma^2} + ikc\chi^{(l)} = -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (\Sigma_1(\gamma) - 2y_{1\gamma}\Sigma_0(\gamma)), \quad (60)$$

при этом

$$\frac{d^2 \psi^{(l)}}{d\gamma^2} = \chi^{(l)}.$$

Это приближение аналогично рассмотренному выше в линейном приближении. Тогда можно найти длинноволновое возмущение скорости:

$$U^{(l)} = 2cka + \frac{T_1}{\alpha u_*} \ln \frac{\gamma}{\gamma_+} - \int_0^\infty \frac{(\Sigma_1(\gamma) - 2y_{1\gamma}\Sigma_0(\gamma))}{\nu(\gamma)} d\gamma. \quad (61)$$

Здесь T_1 – постоянная, имеющая смысл длинноволнового возмущения турбулентного напряжения вне области, где Σ_1, Σ_0 , определяемые полем ветровых волн, отличны от нуля.

Будем использовать для простоты гипотезу о случайных фазах поля ветровых волн, тогда спектры корреляционных функций любых гидродинамических полей α и β имеют вид

$$Q_{\alpha, \beta}(K_1, K_2) = Q_{\alpha, \beta}(K_1, K_1) \delta(K_1 - K_2).$$

В этом случае для описания взаимодействия такого поля с воздушным потоком можно воспользоваться квазилинейным приближением, аналогичным используемому в физике плазмы [46]. При этом волновые возмущения рассматриваются в линейном приближении, а при описании медленной эволюции средних полей учитывается нелинейный эффект детектирования, который в гидродинамике проявляется как появление индуцированных течений.

При рассмотрении ветровых волн перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью c вдоль линий $\gamma = \text{const}$, т. е., как и ранее, произведем преобразование координат $s_1 = s + ct$. Перейдем к криволинейным "координатам ветровых волн" (ξ_1, η) :

$$s_1 = \xi_1 + \int_{-\infty}^{\infty} A(K) i e^{iK(\xi_1 - \frac{\Omega}{K}t) - K\eta + i\varphi_K} dK, \quad (62)$$

$$\gamma = \eta + \int_{-\infty}^{\infty} A(K) e^{iK(\xi_1 - \frac{\Omega}{K}t) - K\eta + i\varphi_K} dK, \quad (63)$$

где $\frac{\Omega}{K}$ – фазовая скорость K -й гармоники ветровых волн. В этой системе отсчета выражение для функции тока может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^\eta U_0(\eta_1) d\eta_1 + \text{Re}(\psi^{(l)}(\eta) - 2kac\eta) e^{i\Sigma} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(K, \eta) e^{iK(\xi_1 - \frac{\Omega}{K}t)} dK = \\ &= \Phi_0 + \varphi^{(s)}(\xi_1, \eta, t). \end{aligned} \quad (64)$$

При этом коротковолновое возмущение (3-е слагаемое) описывает отклонение линий тока от координатных линий (62), (63).

Функция тока Φ и завихренность X удовлетворяют системе уравнений, которая получается из (47), (48) путем преобразования координат (62), (63):

$$J^3 l \left[\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \frac{s_{1t} s_{1\xi_1} + \gamma_{1t} \gamma_{1\xi_1}}{J} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{s_{1t} s_{1\eta} + \gamma_{1t} \gamma_{1\eta}}{J} \right] +$$

$$+ J^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \nu X \right) = \quad (65)$$

$$= -2\nu_{\eta\eta} \Phi_{\xi\xi} J - J_{\eta} \left((\nu_{\eta} \Phi_{\eta})_{\eta} + \nu_{\eta} \Phi_{\xi\xi} \right) +$$

$$+ J_{\xi} (2\nu_{\eta} \Phi_{\xi\eta} - \Phi_{\xi} \nu_{\eta\eta}) + \nu_{\eta} \Phi_{\eta} \frac{J_s^2 + J_{\gamma}^2}{J},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = I J X. \quad (66)$$

Здесь $J = (s_{1\xi_1})^2 + (s_{1\eta})^2$ — якобиан преобразования (62), (63).

При этом из выражений (65), (66) следует, что средние поля удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (\nu X_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{wave}(K, \eta) dK, \quad (67)$$

$$\frac{d^2 \Phi_0}{d\eta^2} = X_0 \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} K^2 |A|^2 e^{-2K\eta} dK \right) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} 2 \operatorname{Re} (X_1(K, \eta) K A e^{-K\eta}) dK, \quad (68)$$

где

$$\tau_{wave}(K, \eta) =$$

$$= K \frac{d}{d\eta} \left[K A e^{-K\eta} \nu_{\eta} \operatorname{Re} (\varphi_{2\eta} - K \varphi_2) + 2 (KA)^2 e^{-2K\eta} \nu_{\eta} \bar{\Phi}_{0\eta} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} K \frac{d}{d\eta} \operatorname{Im} (\varphi_2^* \chi_2).$$

А волновые возмущения удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
& (1 + 2y_{1\gamma}) (\bar{\Phi}_{0\eta} \chi_2 - \varphi_2 X_{0\eta}) iK = \\
& = (1 + 2y_{1\gamma}) \left(\frac{d^2}{d\eta^2 K^2} - K^2 \right) \nu \chi_2 + 2K^2 \varphi_2 \nu_{\eta\eta} - \\
& \quad - 2KA e^{-k\eta} (\nu_{\eta} \bar{\Phi}_{0\eta})_{\eta},
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\varphi_{2\eta\eta} - K^2 \varphi_2 = (\chi_2 - 2KA e^{-K\eta} X_0) (1 + 2y_{1\gamma}).$$

Граничные условия для системы (67), (68) имеют вид

$$\bar{\Phi}_{0\gamma}|_{\gamma=0} = 0, \tag{71}$$

$$\nu X_0|_{\gamma \rightarrow \infty} = u_*^2 + T_1. \tag{72}$$

А для гармоник граничные условия могут быть представлены в виде

$$\varphi_2|_{\eta=0} = 0,$$

$$\varphi_{2\eta}|_{\eta=0} = 2CKA(1 + 2y_{1\gamma}). \tag{73}$$

Решая совместно системы (65), (66) и (67), (68), выражая средние поля через переменные s, γ и сращивая полученные выражения с (49), (50) и (60), можно получить выражения для источников $\Sigma_0(\gamma)$ и $\Sigma_1(\gamma)$, входящих в (49), (50) и (60), через комплексные амплитуды гармоник гидродинамических полей ветровых волн:

$$\begin{aligned}
& \Sigma_0(\gamma) + \Sigma_1(\gamma) - 2y_{1\gamma} \Sigma_0(\gamma) \simeq \\
& \simeq - \int_0^{\infty} dK \left[\int_{-\infty}^{\gamma} d\gamma_1 \int_{-\infty}^{\gamma_1} \tau_{wave}(K, \gamma_2) d\gamma_2 \right] + o(\chi_2 KA).
\end{aligned} \tag{74}$$

Если коэффициент модуляции турбулентного напряжения велик ($m_T \gg 1$), то модуляция поля коротких волн определяется главным образом модуляцией турбулентного напряжения, при этом во всех формулах можно пренебречь членами порядка $y_{1\gamma}$. При этом представим согласно (72)

$$\nu X_0|_{\gamma \rightarrow \infty} = u_*^2 (1 + \varepsilon)|_{\varepsilon = kam_T}.$$

Тогда средние поля и их возмущения, вызванные ветровыми волнами, являются функциями ε . Разлагая правую часть (74) в ряд по ε и сращивая слагаемые в одном порядке по ka , получим

$$\Sigma_1(\gamma) = ka\tau_T \left. \frac{\partial \Sigma_0(\gamma)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (75)$$

Тогда выражения (58) и (61) можно соответственно представить в виде

$$U_0(\gamma) = -c + \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} + u_* \Delta u_0, \\ U^{(1)} = 2cka + \frac{T_1}{\varkappa u_*} \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} + \frac{T_1}{u_*} \Delta u_1, \quad (76)$$

где

$$\Delta u_0 = - \int_0^\gamma \frac{\Sigma_0}{\nu(\gamma)} d\gamma, \quad (77)$$

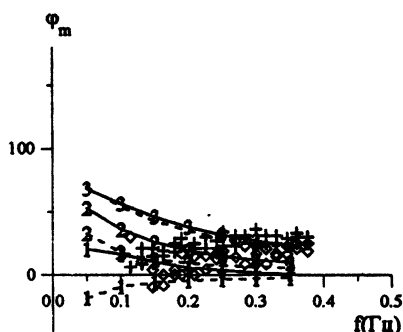
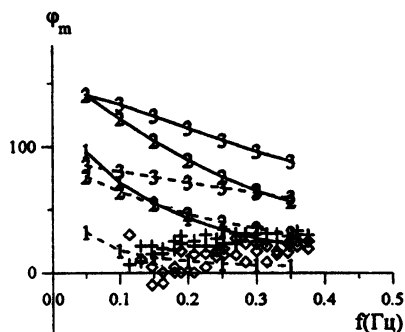
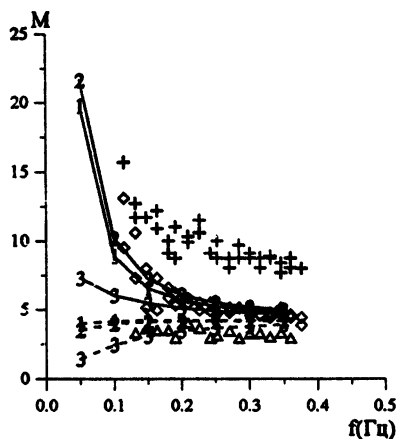
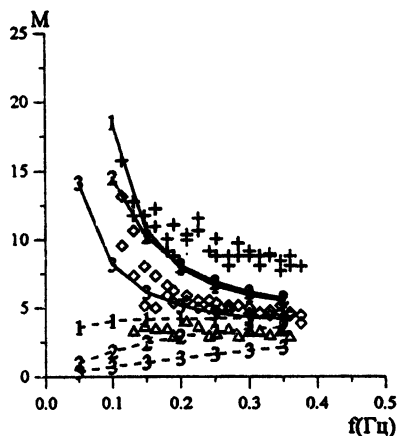
$$\Delta u_1 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Delta u_0 \right|_{\varepsilon=0}. \quad (78)$$

Сращивая внешнее и внутреннее решения уравнений (51), (52), можно получить

$$T_1 = \frac{2\varkappa c u_* ka}{\ln \left(\frac{3.15 k c u_*}{\varkappa u_*^2} \gamma_0^+ \right) - \varkappa \Delta u_1 + \frac{\pi}{2} i}. \quad (79)$$

Первое слагаемое в знаменателе (79) отрицательно, это приводит к тому, что фаза коэффициента модуляции турбулентного напряжения близка к $-\pi$. Второе слагаемое положительно, поскольку добавка к среднему профилю скорости, возникающая за счет нелинейного взаимодействия с полем ветровых волн, отрицательна ($\Delta u_1 < 0$). Это означает, что фаза T_1 может измениться, если $\Delta u_1 < 0$ достаточно велико по модулю.

Чтобы найти Δu_0 и Δu_1 численным итерационным методом, решалась самосогласованная "квазилинейная" система уравнений, в которую входят уравнения для гармоник (70) с граничными условиями (73) и уравнения для среднего течения (67), (68), содержащие вклад гармоник в среднее течение, определяемый уравнением (69), с граничными условиями (71), (72). Уравнения для каждой гармоники решались численно сеточным методом, основанным на методе исключения Гаусса, модифицированном для ленточной матрицы (подробности см. в работе [47]).



а

б

Р и с. 8. Зависимость гидродинамической МПФ от частоты длинной волны, рассчитанная в рамках квазилинейной теории. Длина короткой волны 2,3 см. Сплошные линии - с учетом, пунктирные - без учета модуляции инкремента. Скорости трения ветра: 1 - 16 см/с, 2 - 30 см/с, 3 - 50 см/с. Экспериментальные точки взяты из [5]. Параметр разгона $N=25$ (а), $N=10$ (б)

Результаты расчета гидродинамической МПФ представлены на рис. 8 для условий, соответствующих измерениям в работе [5]. Длина береговой волны составляет 2,3 см, что соответствует X-полосе радиоизлучения. Теоретические кривые отличаются значениями параметра "возраста" ветрового волнения в спектре JONSWAP. Сравнение с рис. 7, где представлены результаты расчета гидродинамической МПФ для ветровых волн бесконечно малой амплитуды, показывает, что как линейная, так и квазилинейная теории дают значения MO

для МПФ, удовлетворительно соответствующие экспериментальным данным, приведенным в работе [5]. Однако значения фазы, рассчитанные в рамках линейного приближения, противоречат экспериментальным данным (см. рис. 7). При этом квазилинейное приближение дает значения фазы гидродинамической МПФ, которые значительно лучше согласуются с экспериментальными данными.

На тех же рисунках приведены значения гидродинамической МПФ, рассчитанные без учета эффекта модуляции инкремента "брегговской" волны (пунктирные линии). Видно, что они очень плохо согласуются с измеренными значениями как амплитуды, так и фазы МПФ.

Заключение

Проблема модуляции коротких поверхностных волн в присутствии длинных возникает при построении радиоизображения длинных волн. Излучаемые радиоволны рассеиваются короткими волнами, распространяющимися на фоне длинных, за счет механизма Брегга. Хорошо известно, что модуляция рассеиваемого радиосигнала определяется углами длинных волн и модуляцией коротких волн гидродинамическим полем длинных волн (так называемая гидродинамическая модуляция). Как показано в работе [2], гидродинамическая модуляция превалирует над геометрической для длинных волн с периодами более 3–5 с. Особенности гидродинамической модуляции: 1) амплитуда коэффициента модуляции, равная 5–15, растущая с периодом длинной волны; 2) фаза коэффициента модуляции, как правило, близкая к нулю (хотя, как утверждается в [2], она может существенно варьироваться).

Одним из основных механизмов модуляции коротких волн длинными является трансформация коротких волн на неоднородном поле течений длинной волны. Этот механизм является чрезвычайно существенным, однако он дает убывающую зависимость коэффициента модуляции от периода длинной волны, что противоречит экспериментальным данным. В последнее время обсуждается механизм модуляции коротких волн, связанный с модуляцией их инкремента, вызванной разными условиями их генерации вдоль фазы длинной волны [9, 11]. Если для расчета ветрового инкремента коротких волн, модулированного в присутствии длинной волны, используется линейное приближение, то значения модуля коэффициента модуляции спектра коротких волн в присутствии длинных, получаемые с учетом модуляции их инкремента, оказываются близкими к экспериментально измеренным (со значениями много

больше единицы, растущие с периодом длинной волны). При этом фаза коэффициента модуляции оказывается близкой к $-\pi$, что не соответствует экспериментальным данным (см. [16]).

Фактически ветровые волны имеют конечную амплитуду, и необходимо учитывать нелинейные эффекты взаимодействия волн с ветром. Наиболее существенный эффект – это деформация средней скорости ветра. Поскольку ветер генерирует волны на поверхности воды, т. е. передает им часть своего импульса, то его скорость должна убывать, т. е. появляется отрицательная добавка к профилю скорости ветра, что, в свою очередь, эквивалентно возрастанию параметра шероховатости.

В настоящей работе рассмотрена модельная задача о распространении волны зыби с частотой много меньшей частоты пика в спектре ветровых волн. Для таких низкочастотных волн модуляция инкремента береговой волны (являющейся одной из гармоник в спектре ветровых волн) определяется модуляцией турбулентного касательного напряжения. В присутствии волны зыби профиль скорости ветра оказывается модулированным с ее частотой, и возникает модуляция параметра шероховатости, что вызывает дополнительную модуляцию длинноволнового возмущения турбулентного вязкого напряжения по сравнению с линейным случаем, когда его колебания находятся в противофазе с возвышением водной поверхности. При этом фаза модуляции турбулентного касательного напряжения, а также фаза коэффициента модуляции ветрового инкремента береговой волны сдвигаются к нулю.

Расчет нелинейного эффекта модуляции и параметра шероховатости проводился в квазилинейном приближении, аналогичном используемому в физике плазмы. Для взаимодействия ветровых волн с турбулентным ветром этот подход был развит в работах [19, 17]. Коэффициент модуляции спектра коротких (береговых) волн рассчитан в рамках релаксационной модели с учетом коэффициента модуляции инкремента. Для аппроксимации спектра ветровых волн использовался спектр JONSWAP. Расчеты показали, что учет нелинейной деформации профиля скорости ветра при расчете модуляции инкремента дает значения модуля коэффициента модуляции 5–15 и значения фазы $0-60^\circ$ для волн зыби с частотами 0,1–0,3 с и сантиметровых береговых волн, что соответствует имеющимся натурным данным [6,5]. Следует, однако, заметить, что данная модель может рассматриваться лишь как оценочная. Необходимо ее усовершенствование с учетом неоднородности спектра ветровых волн.

Результаты, представленные в настоящей работе, получены при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 96-05-65128), гранта INTAS

(N96-1665) и стипендии Норвежского научного совета (грант N 118075/410) во время визита автора в NERSC (г. Берген, Норвегия).

Литература

1. *Smith J. A.* Modulation of short wind waves by long waves // *Surface Waves and Fluxes*. Netherlands. 1990. V. 1. P. 247-284. Kluwer Academic Publishers.
2. *Hasselmann K., Raney R. K., Plant W. J., Alpers W., Shuchman R. A., Lyzenga D. R., Rufenach C. L., Tucker M. J.* Theory of synthetic aperture radar imaging: a MARSEN view // *J. Geophys. Res.* 1985. V. 90. P. 4659-4686.
3. *Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.* Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 8. P. 565-583.
4. *Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.* 1961 The changes in the form of short gravity waves on steady, non-uniform currents // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. P. 529-549.
5. *Plant W. J., Keller W. C., Cross A.* Parametric dependence of ocean wave-radar modulation transfer functions // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88. P. 9747-9756.
6. *Hara T, Plant J. W.* 1994 Hydrodynamic modulation of short wind-wave spectra by long waves and its measurement using microwave backscatter // *J. Geophys. Res.* 1994. V. C99. P. 9787-9784.
7. *Wu J.* Wind-induced drift currents // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. P. 49-70.
8. *Cheung T. K., Street R. L.* The turbulent layer in the water at an air-water interface // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 194. P. 133-151.
9. *Landahl M. T., Widnall S. E., Hultgen L.* An interactional mechanism between large and small scales for wind-generation water waves // *Proc. 12th Symp. on Naval Hydrodynamics*. National Academy of Sciences. 1978. 541 p.

10. *Miles J. W.* On the generation of surface waves by shear flows. Part 4 // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 433-448.
11. *Troitskaya Yu. I.* Modulation of the growth rate of short surface capillary-gravity wind waves by a long wave // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 273. P. 169-187.
12. *Троицкая Ю. И.* Модуляция скорости роста коротких поверхностных волн, возбуждаемых турбулентным ветром в присутствии длинных // Препринт ИПФ РАН N391. 1996. 38с.
13. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 1992. 696 с.
14. *Chalikov D.* Numerical simulation of the boundary layer above waves // *Bound.-Layer Meteor.* 1986. V. 34. P. 63-98.
15. *Гродский С. А., Кудрявцев В. Н., Макин В. К.* Оценка вклада вариаций ветрового потока в РЛ-модуляционную передаточную функцию морской поверхности // *Морской гидрофиз. журнал.* 1991. № 1. С. 15-22.
16. *Троицкая Ю. И.* Механизм модуляции волнами зыби скорости роста коротких поверхностных волн, возбуждаемых турбулентным ветром // *Известия РАН. ФАО.* 1997. Т. 33, N 4. С. 525-535.
17. *Реутов В. П., Троицкая Ю. И.* О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // *Известия РАН. ФАО.* 1995. Т. 31, N 6. С. 623-628.
18. *Al-Zanaidi M. A., Hui W. H.* Turbulent air flow over water waves a numerical study // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 225-246.
19. *Jenkins A. D.* A quasilinear eddy-viscosity model for the flux of energy and momentum to wind waves using conservation-law equations in a curvilinear coordinate system // *J. Phys. Oceanogr.* 1992. V. 22, N 8. P. 843-858.
20. *Gent P. R., Taylor P. A.* A numerical model of the air above water waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. P. 105-128.
21. *Смоляков А. В.* Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // *Акуст. журнал.* 1973. Т. 19, вып. 3. С. 420-425.

22. *Kudryavtsev V. N., Mastenbroek C., Makin V. K.* Modulation of wind ripples by long surface waves via the air flow: a feedback mechanism // *Boundary Layer Meteorology*. 1997. V. 83. P. 99-116.
23. *Riley D. S., Donelan M. A., Hui W. H.* An extended Miles' theory for wave generation by wind // *Bound.-Layer Meteor.* 1982. V. 22. P. 209-225.
24. *Townsend A. A.* Flow in a deep turbulent boundary layer over a surface deformed by water waves // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 55. P. 719-735.
25. *Townsend A. A.* Sheared turbulence and additional distortion // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. P. 171-191.
26. *Belcher S. E., Hunt J. C. R.* Turbulent shear flow over slowly moving waves // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 251. P. 109-148.
27. *Harris J. A., Belcher S. E., Street R. L.* Linear dynamics of wind waves in coupled turbulent air-water flow. Part 2. Numerical model // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 308. P. 219-254.
28. *Betchov R., Criminale W. O.* Stability of parallel flows // Academic press, New York, London, 1967.
29. *Townsend A. A.* The structure of turbulent shear flow // Cambridge University Press, 1976.
30. *Miles J.* Surface-wave generation: a visco-elastic model // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 322. P. 131-145.
31. *Rodi W.* Models for environmental turbulence // *Prediction Methods for Turbulent Flows*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980. P. 227-322.
32. *Miles J. W.* On the generation of surface waves by shear flows. Part 4 // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 433-448.
33. *vanDuijn C. A., Janssen P. A. E. M.* An analytic model of the generation of surface gravity waves by turbulent air flow // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 236. P. 197-215.
34. *Mastenbroek C., Makin V. K., Garat M. H., Giovanangeli J. P.* Experimental evidence of the rapid distortion of turbulence in the air flow over water waves // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 318. P. 273-302.

35. *Launder B. E., Reece G. L., Rodi W.* Progress in development of a Reynolds-stress turbulence closure // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. P. 537-566.
36. *Davis R. L.* On prediction of the turbulent flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. P. 287-306.
37. *Snyder R. L., Dobson F. W., Elliott J. A., Long R. B.* Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 102. P. 1-59.
38. *Plant W.* A relationship between wind stress and wave slope // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87. P. 1961-1967.
39. *Андронов А. А., Фабрикант А. Л.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // *Нелинейные волны.* М.: Наука, 1979. С. 68-104
40. *Miles J. W.* On the generation of surface waves by shear flows // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 3. P. 185-204.
41. *Miles J. W.* On the generation of surface waves by shear flows Part 2. // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6. P. 568-582.
42. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана // Л.: Гидрометеодат, 1981.
43. *Keller W. C., Wright J. W.* Microwave scattering and the straining of wind generated waves // *Radio. Sci.* 1975. V. 10. P. 139-147.
44. *Hasselmann K. et al* Measurements of wind-wave growth rate and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) // *Dtsch. Hydrogr. Z. Reihe A.* 1973. V. 8. P. 12.
45. *Janssen P. A. M.* Wave induced stress and the drag of air over sea waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1989. V. 19. P. 745-754.
46. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы // *Вопросы теории плазмы.* М.: Атомиздат, 1973. С. 6-145.
47. *Troitskaya Yu. I.* Viscous diffusion nonlinear critical layer in a stratified shear flow // *J. of Fluid Mechanics.* 1991. V. 233. P. 25-48.

Трансформация нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений

В. В. Баханов, В. И. Таланов

Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород

Рассмотрена трансформация нелинейных поверхностных волн, распространяющихся против потока, на локальном возмущении потока. Теоретически получено, что нелинейность поверхностных волн приводит с течением времени к резкому возрастанию изменчивости амплитуды поверхностных волн широкого частотного диапазона. Приведены результаты лабораторных исследований трансформации поверхностных волн различной амплитуды и частоты в поле неоднородных течений. Получено, что с увеличением амплитуды генерируемой волнопродуктором поверхностной волны возрастает изменчивость ее параметров в области неоднородного течения. Результаты теоретических расчетов хорошо согласуются с полученными в эксперименте основными особенностями трансформации нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений.

Введение

Параметры крупномасштабных подповерхностных гидрофизических процессов наиболее адекватно определяются дистанционными радиолокационными и оптическими средствами, сочетающими высокое пространственное разрешение с широкой полосой обзора. Радиофизические дистанционные методы позволяют определять характеристики только водной поверхности или тонкого приповерхностного слоя. Поэтому большое внимание уделяется в последнее время исследованиям трансформации поверхностного волнения в поле глубинных процессов. В данной работе анализируется изменчивость поверхностных волн, распространяющихся навстречу потоку, на слабом локализованном возмущении потока. Такая ситуация может реализовываться, например, при обтекании подводных возвышений, поэтому решение данной задачи представляет интерес для проблемы определения топологии дна из космоса [1], а также для диагностики ряда других процессов.

До настоящего времени трансформация поверхностного волнения в поле течений рассматривалась в основном для случая одномерных течений, неоднородных, к примеру, вдоль направления течения [2–13]. В этом случае задача аналогична трансформации поверхностного волнения в поле внутренних волн. Наиболее продвинуты исследования трансформации поверхностного волнения на основе кинетического

уравнения для спектральной плотности волнового действия поверхностных волн [14–22]. Этот подход позволяет рассчитать трансформацию широкого спектра поверхностного волнения и учесть воздействие на него ветра и эффектов диссипации. Вместе с тем, он не учитывает интерференцию поверхностных волн, которая может играть значительную роль в формировании аномалий для длинных квазимонохроматических поверхностных волн, особенно в случае двумерно-неоднородного течения. В данной работе предлагается другой подход к исследованию трансформации поверхностных волн на неоднородном течении на основе уравнения для комплексной амплитуды поверхностных волн.

Сначала теоретически будет рассмотрена трансформация линейных поверхностных волн и изучено влияние нелинейности поверхностных волн на процесс изменения их параметров. Во второй части работы описан лабораторный эксперимент, в ходе которого регистрировалось пространственное распределение амплитуды поверхностных волн в поле двумерно-неоднородных течений, и проведено сопоставление экспериментальных данных с результатами теоретических расчетов.

Модель трансформации поверхностного волнения в поле неоднородных течений

Трансформация линейных поверхностных волн. В пренебрежении влиянием атмосферы для потенциального течения бесконечно глубокой несжимаемой невязкой жидкости запишем систему нелинейных уравнений [23]:

$$\Delta\Phi = Q,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}|\nabla\cdot\Phi|_{z=\zeta}|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta}\right)^2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta} - (\nabla\cdot\Phi|_{z=\zeta}, \nabla\zeta),$$

где Φ – потенциал скорости течения, Q – мощность источников течения, $\nabla\cdot$ – градиент в горизонтальной плоскости, $z=\zeta(x, y, t)$ – уравнение поверхности жидкости. Второе из уравнений системы (1) есть динамическое условие на поверхности жидкости, а третье – кинематическое условие равенства нормальной компоненты скорости течения на поверхности жидкости и скорости поверхности и одновременно граничное условие для потенциала Φ . Разделим потенциал Φ на компоненту F , связанную с неоднородным течением, и компоненту Ψ , свя-

занную с поверхностными волнами, смещение поверхности – на смещение η , связанное с неоднородным течением, и смещение ξ , связанное с поверхностными волнами. Амплитуду поверхностных волн будем считать малой, так что можно пренебречь квадратичными членами по Ψ и ξ . Неоднородное течение предположим стационарным и приведем уравнения (1) к уровню $z = \eta$. С учетом того, что для неоднородного течения без поверхностных волн система (1) выполняется, получим:

$$\Delta\Psi = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + g\xi + \left(\nabla_{\cdot}F \frac{\partial\nabla_{\cdot}F}{\partial z}\Big|_{z=\eta}\right)\xi + \\ + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Big|_{z=\eta} \xi + (\nabla_{\cdot}F \nabla_{\cdot}\Psi)\Big|_{z=\eta} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=\eta} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Big|_{z=\eta} \xi + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=\eta} - \left(\frac{\partial\nabla_{\cdot}F}{\partial z}\Big|_{z=\eta} \nabla_{\cdot}\eta\right)\xi - \\ - \left(\nabla_{\cdot}F\Big|_{z=\eta} \nabla_{\cdot}\xi\right) - \left(\nabla_{\cdot}\Psi\Big|_{z=\eta} \nabla_{\cdot}\eta\right). \end{aligned}$$

Предположим, что уклон поверхности жидкости, обусловленный неоднородным течением, мал ($|\nabla\eta| \ll 1$), тогда система уравнений (2) приводится к виду

$$\Delta\Psi = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + g\xi + \nabla_{\cdot}F \nabla_{\cdot}\Psi\Big|_{z=\eta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=\eta} - \left(\nabla_{\cdot}F\Big|_{z=\eta} \nabla_{\cdot}\xi\right).$$

Решая при помощи фурье-преобразования по координатам x, y первое уравнение системы (3) с граничным условием, которым является третье уравнение, исключим из (3) потенциал Ψ и получим для смещения водной поверхности ξ , связанного с поверхностными волнами, уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla_{\cdot})\right](-\Delta_{\cdot})^{-1/2} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla_{\cdot})\right]\xi + g\xi = 0, \quad (4)$$

где $U = \nabla \cdot F$ – горизонтальная скорость неоднородного течения на поверхности жидкости, а оператор $(-\Delta)^{-1/2}$ определяется как

$$(-\Delta)^{-1/2} f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\hat{f}(k_x, k_y)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} dk_x dk_y,$$

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \int \exp[-i(k_x x + k_y y)] f(x, y) dx dy.$$

Пусть течение U имеет вид $U = -U_0 x_0 + u(x, y)$, причем $|u| \ll U_0$. Рассеяние линейных поверхностных волн на слабом стационарном возмущении встречного потока может быть существенным лишь при близкой к нулю их групповой скорости, т. е. когда волновой вектор поверхностных волн близок к $k_* x_0$, где $k_* = g/(4U_0^2)$ – волновой вектор поверхностных волн, групповая скорость которых в неподвижной воде равна U_0 . Поэтому смещение поверхности воды представим в виде $\xi = A(x, y, t) \exp[i(\Omega_0 t - k_* x)]$, где $A(x, y, t)$ – комплексная амплитуда поверхностных волн, Ω_0 определяется при помощи уравнения (4), в котором надо положить $U = -U_0 x_0$, и $A(x, y, t)$ должна быть равна постоянной величине: $\Omega_0 = g/4U_0$. Подставляя это выражение для ξ в уравнение (4) и введя следующие операторы:

$$B_0 = \frac{\partial}{\partial t} - U_0 \frac{\partial}{\partial x},$$

$$B_1 = -ik_* u_x + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$D_0^{-1/2} f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\hat{f}(k_x, k_y)}{\sqrt{(k_x - k_*)^2 + k_y^2}} dk_x dk_y,$$

для медленно меняющейся амплитуды поверхностных волн из уравнения (4) получим

$$D_0^{-1/2} (i\sqrt{gk_*} + B_0)^2 A + B_1 D_0^{-1/2} (i\sqrt{gk_*} + B_0) A + (i\sqrt{gk_*} + B_0) D_0^{-1/2} B_1 A + B_1 D_0^{-1/2} B_1 A + gA = 0. \quad (5)$$

Предположим, что длина трансформируемых течением поверхностных волн много меньше характерных масштабов неоднородности течения

$u(x, y)$. Так как величина $\beta(x, y) = u(x, y) / U_0$ мала, то малыми будут изменения волнового вектора поверхностных волн k и, соответственно, величины $\kappa = (k - k_* x_0) / k_*$. Отбрасывая в уравнении (5) члены более высокого порядка, чем $g\kappa^2 k_*$, получим следующее уравнение для A в безразмерном виде:

$$4i \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{y}^2} + 4\beta_x(\tilde{x}, \tilde{y})A = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{t} = k_* U_0 t$, $\tilde{x} = k_* x$, $\tilde{y} = k_* y$, $\beta_x = u_x / U_0$.

В отсутствие возмущения скорости течения ($\beta_x = 0$) функцию $A(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$ будем считать гармонической:

$$A(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = A_0 \exp\{i[(\tilde{\omega}_0 - 1)\tilde{t} - \kappa_{0x}\tilde{x} - \kappa_{0y}\tilde{y}]\},$$

где $\tilde{\omega} = \omega / (k_* U_0)$, ω – частота поверхностных волн в лабораторной системе отсчета. Таким образом, во всем пространстве получим плоскую волну с волновым вектором $k = k_* x_0 + k_* k_0$. В данном разделе будем считать $A_0 = 1$.

Задавая выражение $\beta_x(\tilde{x}, \tilde{y})$ для возмущения потока, можно рассчитать при помощи уравнения (6) временную эволюцию поля поверхностных волн на неоднородных течениях различного вида. Рассматривалась эволюция первоначально однородного поля поверхностных волн при возникновении возмущения течения β_x в некоторый момент времени $t = 0$. В качестве возмущения скорости основного течения $U_0 x_0$ было выбрано поле диполя, находящегося на глубине h и ориентированного вдоль оси x . Выражение для скорости течения в этом случае хорошо известно и для компоненты β_x вблизи поверхности в безразмерных переменных имеет вид

$$\beta_x = c \frac{2\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{h}^2}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{h}^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

где c – мощность диполя, $\tilde{h} = hk_*$. Расчеты выполнялись в квадрате 1024×1024 безразмерных единиц \tilde{x} и \tilde{y} , содержащем 256×256 точек.

Рассмотрим сначала результаты, полученные для случая, когда невозмущенная поверхностная волна распространяется строго против

потока с групповой скоростью в системе отсчета, связанной с потоком, равной U_0 , т. е. волновой вектор невозмущенной волны $\mathbf{k}_0 = k_x \mathbf{x}_0$ и соответственно $\kappa_{0x} = \kappa_{0y} = 0$. На рис. 1, а показаны результаты расчетов изменения величины $|A|$ при $c = 10$, $\tilde{h} = 20$ и $\tilde{t} = 1500$. Величина $|A|$ отображается интенсивностью почернения в соответствии со шкалой, приведенной справа от рисунка. Основной особенностью полученной картины является четко выраженная крестообразная структура в плоскости (x, y) . Угол наклона возникающих усов к оси x составляет 55° . Качественное объяснение такой картины поверхностных аномалий можно получить на основе анализа дисперсионного соотношения, которое легко получить из уравнения (6):

$$\tilde{\omega} = 1 + \beta_x - \frac{1}{4} \kappa_x^2 + \frac{1}{2} \kappa_y^2.$$

Его изочастоты при $\beta_x = 0$ представляют собой гиперболы с асимптотами, составляющими с осью x угол $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 35^\circ$. Так как нормаль к изочастоте указывает направление в координатном пространстве групповой скорости волны с данной частотой и волновым вектором, преимущественное направление групповых скоростей рассеянных поверхностных волн составит с осью x угол 55° .

Пространственные размеры области, в которой трансформация поля поверхностных волн существенна, значительно превышают характерные размеры области неоднородного течения (в данном случае они составляют 30 безразмерных единиц). С течением времени (как видно из сравнения рис. 1, а с рис. 1, б, где приведены результаты расчетов при тех же значениях c , \tilde{h} , κ_{0x} и κ_{0y} , но при $\tilde{t} = 2400$) область пространства, занимаемая аномалиями поверхностного волнения, увеличивается. Одновременно изменение величины $|A|$ в окрестности рассеивающего течения перестает зависеть от времени, и в этой области картина стремится к стационарной. Подтверждает это и определение величины $\delta A = |A|_{\max} - |A|_{\min}$ в области расчетов. При малых t величина δA быстро нарастает, затем скорость нарастания уменьшается и при $\tilde{t} = 5000$ δA стабилизируется на уровне $\approx 0,6$.

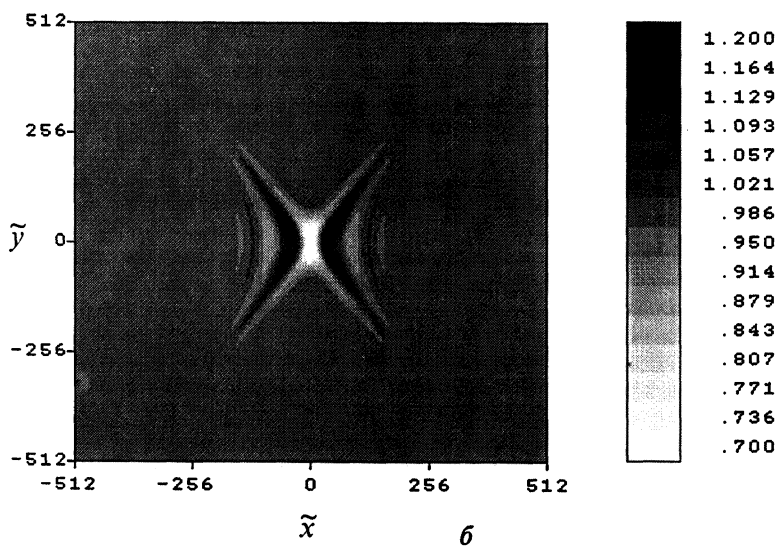
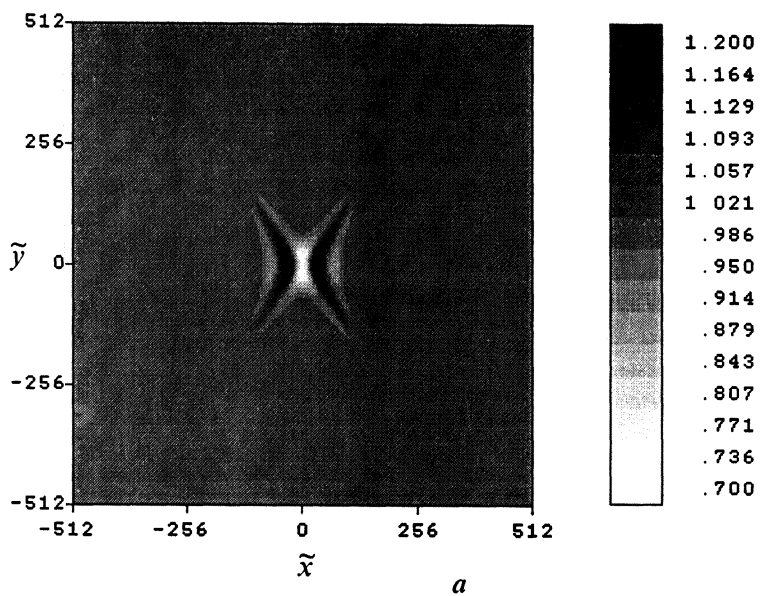
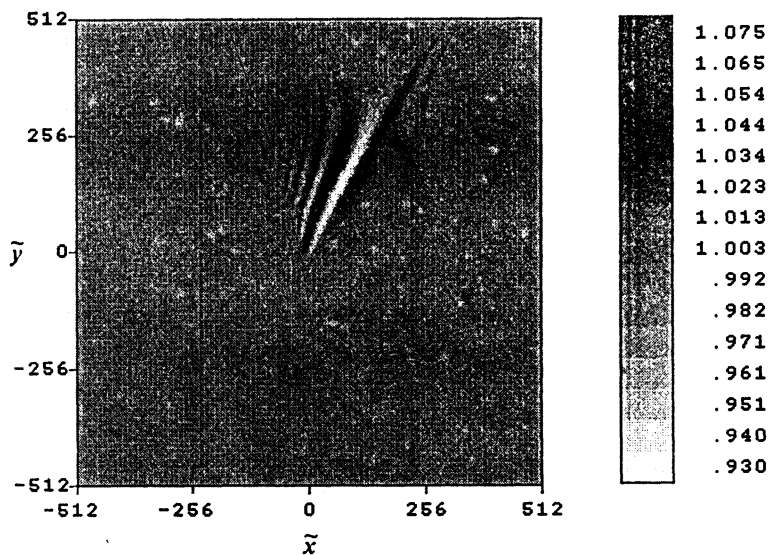
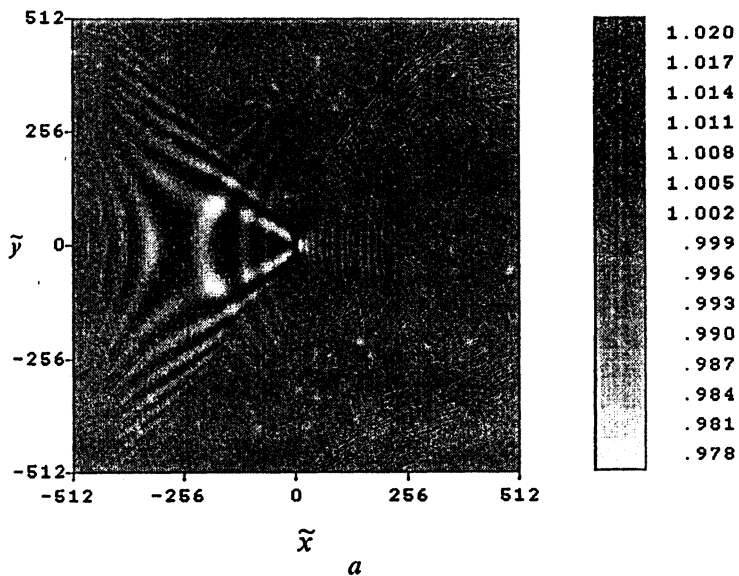


Рис. 1. Пространственное распределение $|A|$ при $\kappa_{0x} = \kappa_{0y} = 0$:
 $\tilde{l} = 1500$ (а); $\tilde{l} = 2400$ (б)

При $\kappa_{0x} \neq 0$ и $\kappa_{0y} = 0$ картина возмущений несколько иная. Так, при $\kappa_{0x} > 0$ и $\beta_v = 0$ компонента групповой скорости поверхностной волны $V_{0x} < 0$, хотя волновой вектор невозмущенной волны и в этом случае направлен против потока. Это обусловлено тем, что групповая скорость волны относительно воды меньше скорости основного потока U_0 . Поэтому в лабораторной системе отсчета волновой пакет сносится течением, и групповая скорость отрицательна. Так как величина изменения волнового вектора поверхностных волн мала и основную роль в трансформации поля поверхностных волн играет рассеяние вперед, то основные изменения возникают в области $x < 0$. При $\kappa_{0x} < 0$ основные изменения поля поверхностных волн возникают соответственно при $x > 0$. На рис. 2, а приведены результаты расчетов при тех же, что и на рис. 1, б, значениях c , \tilde{h} , \tilde{l} и κ_{0y} , но при $\kappa_{0x} = 0,2$. Здесь так же, хотя и слабее, выражены "усы", в окрестностях которых сосредоточены возмущения волнового поля. Однако теперь возмущения сосредоточены в основном в области $x < 0$.

Рассмотрим случай, когда падающая волна распространяется под углом к потоку ($\kappa_{0y} \neq 0$, но $|\kappa_{0y}| \ll 1$ в соответствии с изложенным выше), а значит, имеется компонента групповой скорости V_{0y} , ее знак совпадает со знаком κ_{0y} . При этом ограниченный в пространстве волновой пакет наряду с движением против или по течению движется также поперек течения. В соответствии с приведенными выше рассуждениями при $\kappa_{0y} > 0$ изменения поля поверхностных волн происходят преимущественно при $y > 0$, и наоборот, когда $\kappa_{0y} < 0$ – при $y < 0$. На рис. 2, б приведены результаты расчетов при $c = 10$, $\tilde{h} = 20$, $\tilde{l} = 1500$, $\kappa_{0x} = -0,2$, $\kappa_{0y} = 0,2$. При данных значениях κ_{0x} , κ_{0y} и $\beta_{x\max}$ волновые векторы рассеянных поверхностных волн имеют близкие направления, поэтому возмущения волнового поля, локализованные в области $y > 0$, сосредоточены в некотором секторе углов.

Расчеты показывают, что скорость нарастания возмущений волнового поля уменьшается при возрастании величины κ_0 . Рост величины δA прекращается при меньших временах, и δA достигает меньших значений. Так, при значениях параметров c , \tilde{h} , \tilde{l} , κ_{0x} и κ_{0y} , выбранных для расчета рис. 2, а, δA устанавливается на уровне $\approx 0,08$ при $\tilde{t} = 300$,



б

Рис. 2. Пространственное распределение $|A|$: $\kappa_{0x} = 0,2$, $\kappa_{0y} = 0$, $\tilde{t} = 2400$ (а), $\kappa_{0x} = -0,2$, $\kappa_{0y} = 0,2$, $\tilde{t} = 1500$ (б)

а при значениях этих параметров для рис. 2, б – на уровне $\approx 0,14$ при $\tilde{\tau} = 1200$. Скорость нарастания возмущений и максимальная их величина убывают и с ростом глубины \tilde{h} .

Влияние собственной нелинейности поверхностных волн на их трансформацию в поле неоднородных течений. Трансформацию нелинейных поверхностных волн будем рассматривать в рамках сделанных в предыдущем разделе предположений: характерные масштабы неоднородности течения (горизонтальный и вертикальный вблизи поверхности) много больше длины рассеиваемых волн и соответственно масштаба неоднородности волнового поля по глубине; $|u| \ll U_0$. Но уравнение для комплексной амплитуды поверхностных волн с волновым вектором близким к k_*x_0 получим другим, так называемым эвристическим методом. Для этого, считая скорость течения лишь функцией горизонтальных координат, запишем дисперсионное соотношение для поверхностных волн на глубокой воде [7, 24]:

$$[\omega - k(-U_0x_0 + u(x, y, t))]^2 = gk(1 + k^2a^2), \quad (8)$$

где a – амплитуда поверхностной волны. Введем безразмерную амплитуду $\tilde{a} = 2ak_*$. Выбирая положительную ветвь дисперсионного соотношения (8), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = & -1 - \kappa_x + (1 + \kappa_x)\beta_x + \kappa_y\beta_y + \\ & + 2 \left[(1 + \kappa_x)^2 + \kappa_y^2 \right]^{1/4} \left\{ 1 + \tilde{a}^2 \frac{[(1 + \kappa_x)^2 + \kappa_y^2]}{4} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как волновой вектор поверхностных волн близок к k_*x_0 , разложим дисперсионное соотношение в ряд по степеням малого возмущения волнового вектора κ_x и κ_y . При этом предположим, что $\tilde{a}^2 \sim \kappa_x^2, \kappa_y^2$. Разложение правой части соотношения (9) до членов второго порядка малости имеет вид

$$\tilde{\omega} = 1 + \beta_x + \kappa_x\beta_x + \kappa_y\beta_y - \frac{\kappa_x^2}{4} + \frac{\kappa_y^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{4}. \quad (10)$$

Так как $\kappa \sim \sqrt{\beta}$ [18], то члены $\kappa_x\beta_x$ и $\kappa_y\beta_y$ оказываются более высокого порядка малости. Поэтому с точностью до членов порядка β_x выражение (10) принимает вид

$$\tilde{\omega} = 1 + \beta_x - \frac{\kappa_x^2}{4} + \frac{\kappa_y^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{4}. \quad (11)$$

Используя соотношение (11), можно написать уравнение для амплитуды поля поверхностных волн, считая изменение β_x в пространстве плавным [25]. Для этого введем операторы

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = i(\tilde{\omega} - 1), \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = -ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = -ik_y.$$

Тогда уравнение для комплексной амплитуды поля поверхностных волн A примет вид

$$4i \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{x}^2} - 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{y}^2} + |A|^2 A + 4\beta_x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})A = 0. \quad (12)$$

Поведение огибающей слабонелинейных поверхностных волн на основе уравнения (12) без последнего слагаемого, связанного с неоднородностью потока, подробно рассмотрено в работе [24]. В ней, в частности, приведена диаграмма устойчивости однородного решения в двух измерениях (\tilde{x}, \tilde{y}) , которая во многом определяет и характер трансформации поверхностных волн на неоднородном течении. Для проверки используемой в данной работе численной схемы решения уравнения (12) на основе расчетов при $A_0 = 0,1$ была определена диаграмма устойчивости, которая изображена на рис. 3; видно, что она соответствует приведенной в работе [24].

Расчеты трансформации нелинейных поверхностных волн в поле течения (7) проводились для тех же значений параметров, что и в предыдущем разделе, но при различных значениях A_0 . Отметим, что максимально возможное значение A_0 по модели Стокса для поверхностных волн $\approx 0,9$. При малых

значениях \tilde{t} картина трансформации поверхностных волн совпадает с рассчитанной для линейных поверхностных волн. Но, начиная с некоторого момента времени, значение которого зависит от параметров первоначальной поверхно-

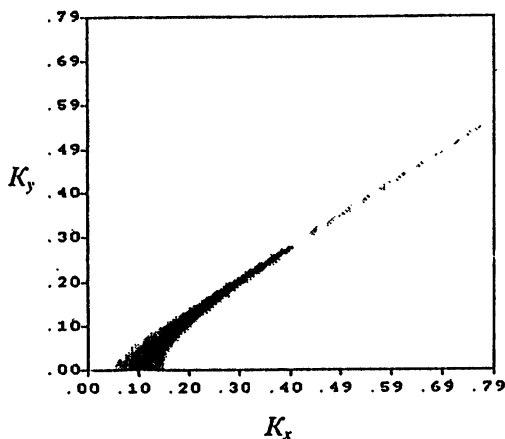


Рис. 3. Диаграмма устойчивости огибающей поверхностных волн

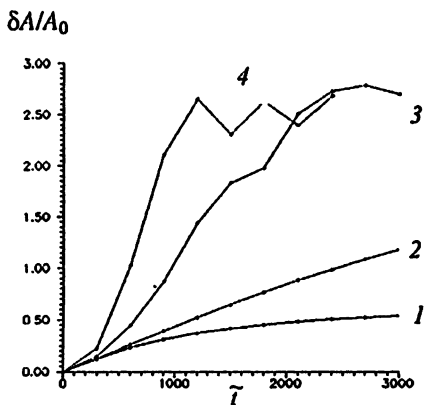


Рис. 4. Изменение со временем величины $\delta A/A_0$ при $\kappa_{0x} = \kappa_{0y} = 0$: кривая 1 – для линейных поверхностных волн; 2 – $A_0 = 0,05$; 3 – $A_0 = 0,1$; 4 – $A_0 = 0,15$

формации на неоднородном течении изменчивость $|A|$ приводит к быстрому развитию неустойчивости Бенджамина – Фейра огибающей поверхностной волны. В результате контрасты в аномалиях поверхностного волнения резко возрастают. В дальнейшем они сохраняются на достигнутом высоком уровне.

На рис. 5 приведены результаты расчета изменчивости величины $|A|(\tilde{x}, \tilde{y})/A_0$ при $\kappa_{0x} = \kappa_{0y} = 0$, $\tilde{t} = 1500$ и $A_0 = 0,15$. Пространственная структура поля $|A|$ несколько сложнее, чем на рис. 1, а, но выделенные направления $\pm 55^\circ$ сохраняются. При дальнейшем увеличении \tilde{t} масштабы неоднородности поля $|A|$ уменьшаются, картина аномалий поверхностного волнения становится сильно изрезанной и условия применимости уравнения (12) нарушаются. Поэтому кривая 4 на рис. 4 приведена только до $\tilde{t} = 2400$.

На рис. 5, б показаны результаты расчета при тех же значениях параметров, что и на рис. 5, а, но при $\kappa_{0x} = -0,2$, $\kappa_{0y} = 0,2$. В данном случае отличия от соответствующего ему рис. 2, б более существенны. При сохранении расположения области изменчивости $|A|$ при $x > 0$, $y > 0$ пространственное распределение $|A|$ больше похоже на распределение $|A|$ на рис. 5, а, чем на рис. 2, б. Это свидетельствует о том, что при

стной волны и неоднородного течения, изменчивость поля $|A|$, рассчитанная на основе уравнения (12), начинает значительно превосходить рассчитанную при помощи уравнения (6). На рис. 4 показаны временные зависимости величины $\delta A/A_0$ для линейных поверхностных волн при $A_0 = 0,05$, $A_0 = 0,1$ и $A_0 = 0,15$. Из рисунка видно, что с увеличением A_0 уменьшается время, за которое величина $\delta A/A_0$ достигает максимального значения. По-видимому, приобретенная в результате транс-

больших значениях A_0 структура поля $|A|$ в большей степени определяется, по-видимому, диаграммой устойчивости однородного решения, чем видом изочастот.

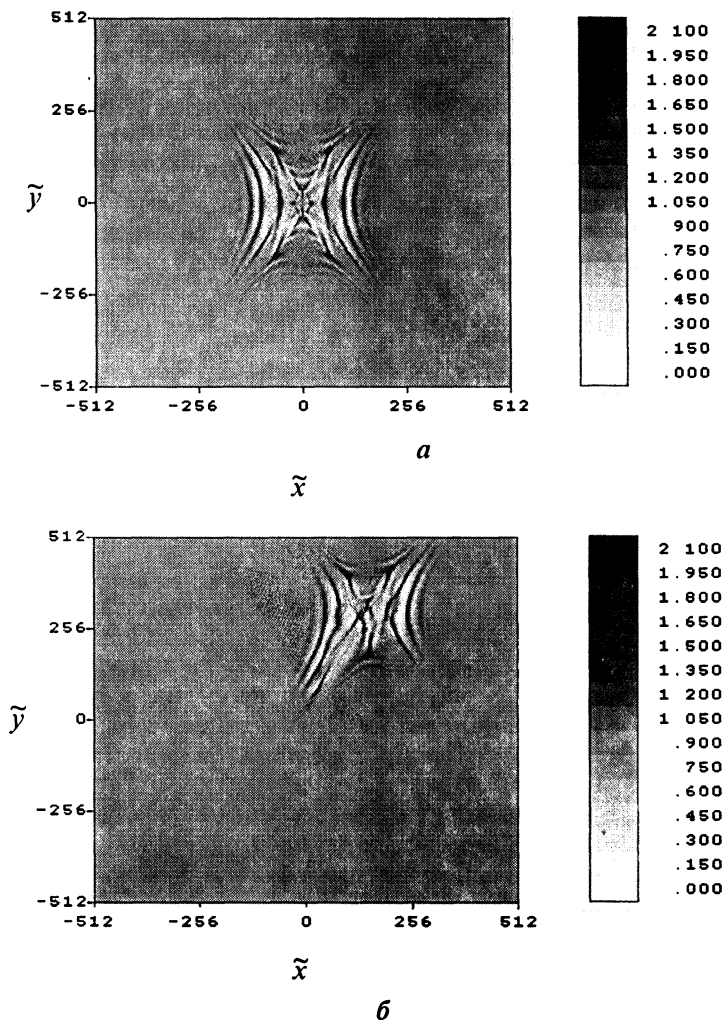


Рис. 5. Пространственное распределение $|A|/A_0$ при $t = 1500$, $A_0 = 0,15$: $\kappa_{0x} = \kappa_{0y} = 0$ (а); $\kappa_{0x} = -0,2$, $\kappa_{0y} = 0,2$ (б)

Так как в пространстве волновых векторов диаграмма устойчивости весьма похожа на картину изочастот, то и структура поля $|A|$ при больших A_0 похожа на структуру поля при малых A_0 и $\kappa_{0x} = \kappa_{0y} = 0$, в частности, сохраняются выделенные направления $\pm 55^\circ$. Зависимости $\delta A(\tilde{t})/A_0$ при $\kappa_{0x} = -0,2$, $\kappa_{0y} = 0,2$ показаны на рис. 6. С увеличением \tilde{t} величина $\delta A/A_0$ для $A_0 = 0,1$ и $0,15$, как и на рис. 4, достигает больших значений. Кривые приведены до $\tilde{t} = 1500, 1800$, так как при больших \tilde{t} возмущения поля $|A|$ выходят за область расчетов.

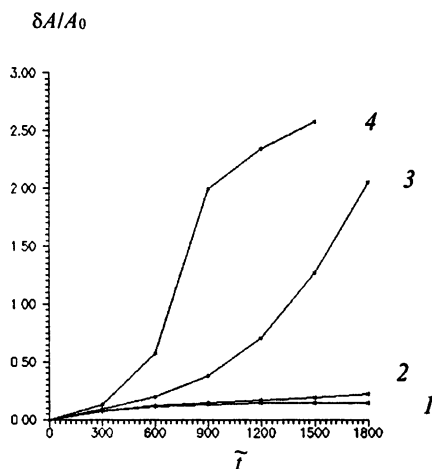


Рис. 6. Рассчитанное теоретически изменение во времени величины $\delta A/A_0$ при $\kappa_{0x} = -0,2$, $\kappa_{0y} = 0,2$: кривая 1 – для линейных поверхностных волн; 2 – $A_0 = 0,05$; 3 – $A_0 = 0,1$; 4 – $A_0 = 0,15$

Проведенный анализ влияния собственной нелинейности поверхностных волн на вид аномалий поверхностного волнения в поле неоднородных течений позволяет сделать следующие выводы:

- собственная нелинейность поверхностных волн с течением времени приводит к тому, что контрасты в поверхностных аномалиях становятся весьма значительными;

- условие синхронизма, играющее значительную роль в трансформации линейных поверхностных волн, с увеличением амплитуды поверхностных волн утрачивает свое решающее значение – и пространственное распределение $|A|$, и установившееся при $\tilde{t} \rightarrow \infty$ значение $\delta A/A_0$ слабо зависят от κ_{0x} , κ_{0y} . Меняется лишь время, за которое величина $\delta A/A_0$ достигает этого значения: оно возрастает при увеличении κ_0 .

Лабораторный эксперимент по проверке теоретической модели

Изложенная выше теоретическая модель трансформации поверхностных волн на неоднородном течении экспериментально проверялась в большом гидрофизическом бассейне ИПФ РАН [26]. Длина бассейна составляет 20 м, глубина 2 м, ширина свободной поверхности воды – 2 м. Была выбрана следующая схема проведения эксперимента:

– сфера радиусом $r = 7,5$ см или 15 см закреплялась на конце узкого обтекаемого ножа и погружалась на глубину h от 0,3 м до 0,9 м (расстояние от невозмущенной поверхности воды до центра сферы). Нож крепился к тележке, при помощи которой перемещался вдоль бассейна со скоростью $U_0 = 0,4$ м/с. Тогда обтекание сферы создает неоднородное течение, которое в системе отсчета, связанной с ней, вблизи поверхности воды имеет вид $-U_0\alpha_0 + U_0\beta$, где β_x определяется соотношением (7);

– волнопродуктором, установленным на том конце бассейна, откуда начиналось движение сферы, генерировались поверхностные волны частотой $f = 2$ Гц (ее групповая скорость близка к скорости движения сферы) или $f = 1,7$ Гц и амплитудой $a_0 = 2-10$ мм. На другом конце бассейна они поглощались волногасителем, тем самым реализовывался режим бегущих поверхностных волн. Генерация поверхностных волн начиналась несколько раньше движения сферы. Эта разница во времени выбиралась таким образом, чтобы перед сферой существовала область с поверхностными волнами протяженностью несколько метров.

Таким образом, в системе отсчета, связанной со сферой, мы получаем физическую ситуацию, адекватную рассмотренной выше теоретически.

Для регистрации параметров поверхностных волн использовались две различные системы: акустические датчики отклонения поверхности воды в определенных точках и телевизионная система регистрации наклонов поверхности воды в некоторой пространственной области.

Поперек бассейна устанавливалась штанга, на которой крепились акустические датчики отклонения поверхности воды. В акустических датчиках, созданных в ИПФ РАН, реализован ультразвуковой локационный фазовый способ измерения перемещений отражающей поверхности при непрерывном режиме излучения ультразвуковой волны. Штанга с датчиками устанавливалась на расстоянии $R = 4$ и 7 м от точки, где тележка набирала постоянную скорость U_0 . Момент пересечения ножом плоскости датчиков t_0 фиксировался специальным контактным отметчиком. В наших экспериментах использовалось 2 датчика отклонения поверхности воды, которые устанавливались на различ-

ном расстоянии от оси бассейна. Данные датчиков и контактного отметчика пересечения сферой плоскости датчиков записывались в компьютер. Целью проведения экспериментов было определение пространственной структуры аномалий амплитуды поверхностной волны в окрестности сферы. Эта задача решалась следующим образом:

– с учетом того, что за время прохождения существенных аномалий поверхностного волнения, связанных с движением сферы, мимо акустических датчиков (~ 5 с) характеристики аномалий меняются незначительно, зарегистрированные изменения амплитуды поверхностных волн во времени пересчитывались в зависимость амплитуды поверхностных волн от координаты, направленной вдоль оси бассейна (ось x);

– после окончания движения сферы акустические датчики смещались на $0,1$ м и проводилась запись новой реализации. Таким образом, используя данные контактного отметчика, мы могли объединить данные нескольких экспериментальных реализаций и получить пространственное распределение характеристик поверхностных волн в плоскости x, y (y – координата поперек бассейна).

Телевизионная CCD-камера, направленная вертикально вниз, закреплялась на высоте $\sim 0,7$ м над поверхностью воды. С ее помощью в реальном времени на твердом диске компьютера регистрировалось изображение расположенной на дне бассейна подсвеченной прямоугольной сетки с шагом 5 см. Сопоставление координат изображения узлов сетки с их значениями в отсутствие поверхностных волн позволяет определить обе проекции наклона поверхности воды. С помощью специально созданного пакета программ обработки изображений, производящего автоматическое определение координат узлов сетки, интерполяцию значений наклонов к регулярной сетке и высокочастотную фильтрацию изменчивости наклонов поверхности воды, в пространственной области $0,8 \times 0,8$ м с частотой 25 Гц вычислялось 26×26 значений наклонов поверхности воды. Это позволяло достаточно подробно определять пространственно-временную изменчивость параметров поверхностных волн. Описанное выше предположение о медленном изменении характеристик аномалий поверхностного волнения применялось при использовании данных нескольких телевизионных кадров для расчета пространственной структуры аномалий амплитуды изменчивости наклонов поверхности воды.

Первоначально проводились эксперименты при отсутствии ножа и при движении ножа без сферы. Эксперименты первого типа показали, что существует некоторая неоднородность амплитуды поверхностных волн поперек бассейна. Сравнение экспериментов второго типа с экспериментами первого показали, что нож без сферы не вносит изменений в поле поверхностных волн, за исключением корабельных волн от ножа, которые более высокочастотны, чем генерируемые волнопродуктором, и могут быть отфильтрованы. Заметим, что движение ножа со сферой

направлении, противоположном направлению распространения поверхностных волн, тоже не вносит изменений в поле поверхностных волн.

На рис. 7 приведена характерная запись одного из датчиков отклонения поверхности воды. Из рисунка видно, что в ограниченной окрестности t_0 наблюдается значительная модуляция амплитуды поверхностных волн.

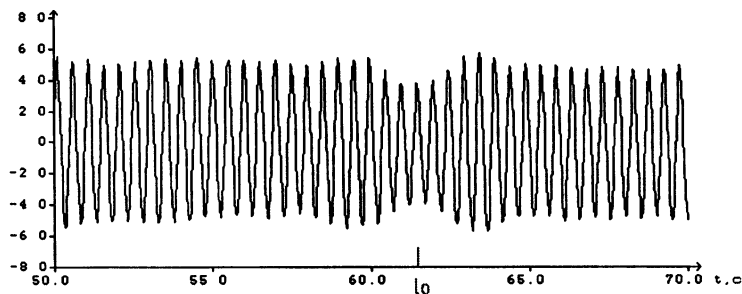


Рис. 7. Пример записи отклонения поверхности воды акустическим датчиком, t_0 – время пересечения сферой вертикальной плоскости датчиков

Полученные нами пространственные распределения амплитуды поверхностных волн зависят от пяти параметров: радиуса и глубины движения сферы, частоты и амплитуды поверхностной волны и расстояния от волнопродуктора. Поэтому рассмотрим только общие, полученные нами закономерности трансформации поля амплитуды поверхностных волн.

Для иллюстрации развития поверхностных аномалий на рис. 8 показано полученное при помощи акустических датчиков пространственное распределение амплитуды поверхностной волны ($r=15$ см, $h=60$ см, $f=2$ Гц, $a_0=10$ мм) для $R=4$ м – см. рис. 8, а и $R=7$ м – см. рис. 8, б. Центр сферы находится в точке $x=400$, $y=0$ и $x=700$, $y=0$ соответственно. Регистрация параметров поверхностных волн проводилась только с одной стороны от оси бассейна, рис. 8, а и 8, б получены симметричным отображением зарегистрированных аномалий относительно оси x . Оси проградуированы в сантиметрах. На рисунках показана величина относительного изменения амплитуды поверхностных волн δa . В каждой экспериментальной реализации амплитуда поверхностных волн нормировалась на ее среднее значение в области, представленной на рисунках. Величина δa показана интенсивностью почернения в соответствии со шкалой, представленной справа от пространственного распределения. Вследствие ограниченной ширины бассейна

мы смогли зарегистрировать только центральную часть поверхностных аномалий, изображенных на рис. 1. Непосредственно над сферой наблюдаются области уменьшения a , перед сферой и за ней – области увеличения a . Величина изменчивости a при $R = 7$ м в среднем в 1,2 раза больше, чем при $R = 4$ м при $f = 1,7$ Гц и в 1,5 раза больше при $f = 2$ Гц. Это различие возрастает при увеличении a_0 . Отметим, что длина свободной водной поверхности в бассейне оказалась недостаточной для максимального развития изменчивости амплитуды поверхностных волн, и все представленные в данной работе экспериментальные данные относятся к стадии нарастания изменчивости параметров поверхностных волн.

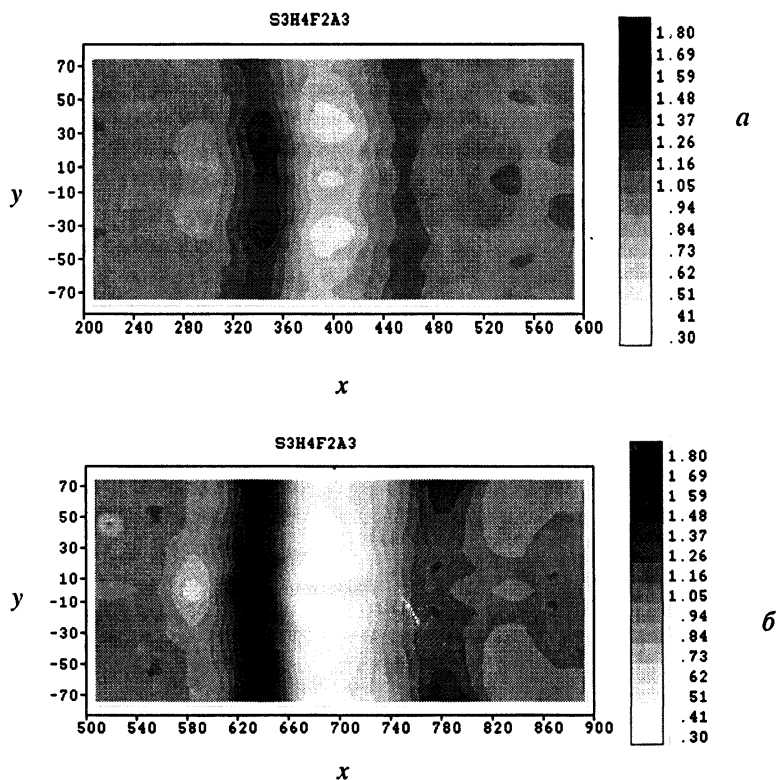


Рис. 8. Полученное экспериментально с использованием акустических датчиков пространственное распределение амплитуды поверхностной волны при $r = 15$ см, $h = 60$ см, $f = 2$ Гц, $a_0 = 10$ мм: $R = 4$ м (а); $R = 7$ м (б)

При изменении частоты поверхностной волны меняется расположение областей увеличения и уменьшения амплитуды поверхностной волны. Групповая скорость поверхностных волн частотой 1,7 Гц больше U_0 , и области увеличения и уменьшения a смещаются в направлении движения сферы – оси x . На рис. 9 показано распределение амплитуды поверхностных волн при тех же значениях параметров, что и на рис. 8, б, но при $f = 1,7$ Гц. Область уменьшения a сместилась в направлении оси x , а область увеличения a перед сферой выражена слабо. По результатам всех экспериментов величина $\delta A/A_0$ для поверхностных волн с $f = 2$ Гц в среднем на 21% больше, чем для поверхностных волн с $f = 1,7$ Гц. Такое уменьшение величины $\delta A/A_0$ при отстройке частоты поверхностной волны на 15% от значения, при котором $V_{0x} \approx U_0$, намного меньше, чем получается в результате теоретических расчетов для линейных поверхностных волн, и подтверждает полученную в результате теоретических расчетов для нелинейных поверхностных волн слабую зависимость величины изменчивости амплитуды поверхностной волны от ее волнового вектора.

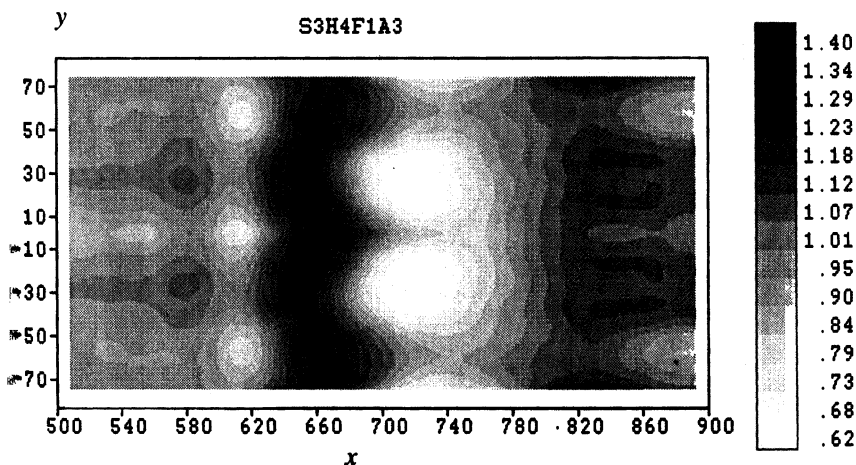


Рис. 9. Полученное экспериментально с использованием акустических датчиков пространственное распределение амплитуды поверхностной волны при $r = 15$ см, $h = 60$ см, $f = 1,7$ Гц, $a_0 = 10$ мм, $R = 7$ м

Наиболее интересный эффект, зарегистрированный в эксперименте, – увеличение изменчивости a с увеличением a_0 . На рис. 10 приведены полу-

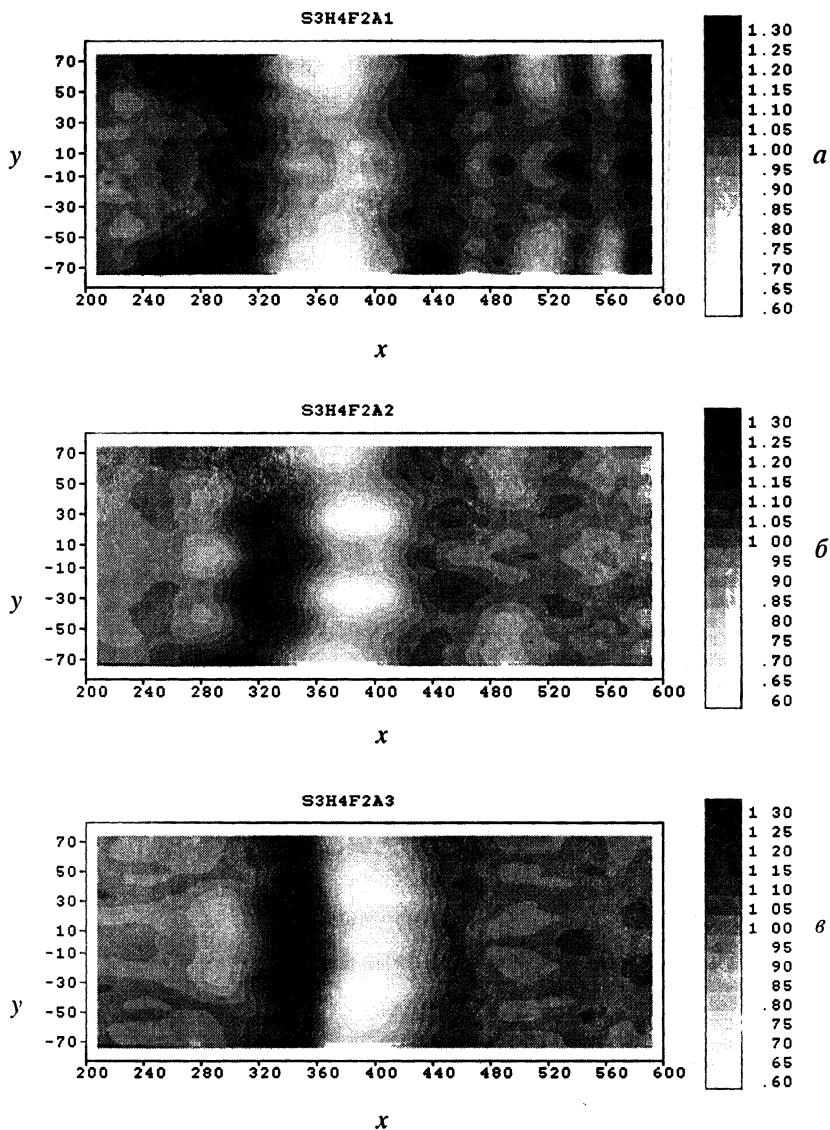


Рис. 10. Полученное экспериментально с использованием акустических датчиков пространственное распределение амплитуды поверхностной волны при $r = 15$ см, $h = 60$ см, $f = 2$ Гц, $R = 4$ м: $a_0 = 2$ мм (а); $a_0 = 7$ мм (б); $a_0 = 10$ мм (в)

ленные с использованием акустических датчиков пространственные распределения δa при $r = 15$ см, $h = 60$ см, $f = 2$ Гц, $R = 4$ м и различных значениях a_0 . Пространственные распределения δa , полученные для наклонов поверхности воды с использованием телевизионной системы, при тех же значениях параметров, но при $R = 7$ м, приведены на рис. 11. В построении этого рисунка были использованы значения наклонов поверхности воды только по оси x , т. к. наклоны по оси y в данном эксперименте незначительны. На рис. 11 особенно четко просматривается, что с увеличением a_0 величина изменения a возрастает. С увеличением a_0 возрастает групповая скорость поверхностных волн, и аномалии поверхностного волнения соответственно несколько сдвигаются в направлении оси x (см. рис. 10).

Эксперименты показали, что при изменении глубины h расположение областей увеличения и уменьшения амплитуды поверхностных волн и их размеры сохраняются. При увеличении h было зарегистрировано естественное уменьшение величины $\delta A/A_0$: при увеличении h в 2 раза $\delta A/A_0$ уменьшалась в среднем в 3,25 раза. При увеличении радиуса сферы r в 2 раза и одновременном увеличении глубины h в 2 раза (величина β_{max} при этом сохраняется) изменения величины $\delta A/A_0$ в среднем не наблюдались.

Поверхностная волна с $f = 2$ Гц удовлетворяет условию синхронизма, то есть ее групповая скорость равна скорости движения сферы. Теоретические расчеты на основе уравнения (12) дают для этого случая пространственные распределения амплитуды поверхностной волны симметричные относительно центра сферы. Это связано с тем, что для получения уравнения (12) использовалось приближенное выражение (11) для дисперсионного соотношения поверхностных волн. Вместе с тем, в экспериментах увеличение амплитуды поверхностных волн за сферой всегда существенно больше, чем перед сферой. Поэтому для расчетов, соответствующих проведенным экспериментам, было записано интегродифференциальное уравнение на основе дисперсионного соотношения (9)¹:

¹ В уравнении (13) сохранен только первый член разложения по амплитуде поверхностной волны и не учитываются эффекты более высокого порядка [27], в частности, нелинейная дисперсия поверхностных волн, которая может несколько изменить картину аномалий поверхностного волнения при больших временах.

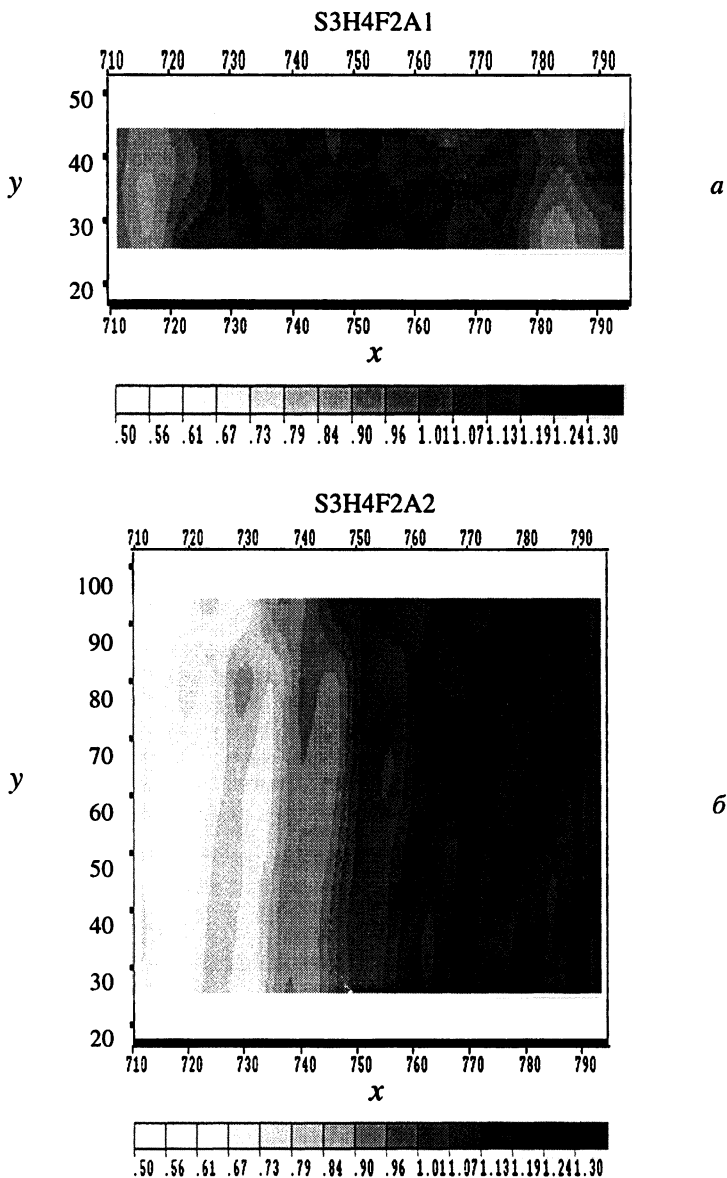


Рис. 11. Полученное экспериментально с использованием телевизионной системы пространственное распределение амплитуды наклонов поверхностной волны при $r = 15$ см, $h = 60$ см, $f = 2$ Гц, $R = 4$ м: $a_0 = 2$ мм (а), $a_0 = 7$ мм (б)

$$\frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = 2i(-\Delta)^{V4} A + (1 - \beta_v) \frac{\partial A}{\partial \tilde{x}} - \beta_v \frac{\partial A}{\partial \tilde{y}} + i((-1 + \beta_v) \tilde{k}_{0x} + \beta_v \tilde{k}_{0y} - \tilde{\omega}_0) A + \frac{1}{4} (\tilde{k}_{0x}^2 + \tilde{k}_{0y}^2)^{5/4} |A|^2 A, \quad (13)$$

где оператор $(-\Delta)^{V4}$ вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} ((-\Delta)^{V4} J)(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int \exp(i(k'_x \tilde{x} + k'_y \tilde{y})) \times \\ &\times [(\tilde{k}_{0x} - k'_x)^2 + (\tilde{k}_{0y} - k'_y)^2]^{V4} \tilde{J}(k'_x, k'_y) dk'_x dk'_y, \end{aligned}$$

а $\tilde{J}(k'_x, k'_y)$ – преобразование Фурье функции J :

$$\tilde{J}(k'_x, k'_y) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(-i(k'_x \tilde{x} + k'_y \tilde{y})) J(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Через $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 / k_* V$, $\tilde{k}_{0x} = k_{0x} / k_*$, $\tilde{k}_{0y} = k_{0y} / k_*$ обозначены параметры невозмущенной поверхностной волны;

$$\beta_{y'} = 3c \frac{\tilde{x} \tilde{y}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{h}^2)^{5/2}}$$

На рис. 12 приведены результаты теоретических расчетов, соответствующие экспериментальным данным рис. 10. Расположение областей увеличения и уменьшения a в основном соответствует экспериментальным данным. Наблюдается область уменьшения a над сферой и область увеличения a перед ней и за ней. При этом, как и в эксперименте, увеличение амплитуды поверхностных волн за сферой больше, чем перед ней. Сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными показывает, что представленная модель хорошо описывает основные особенности трансформации квазимонохроматических поверхностных волн на неоднородном течении.

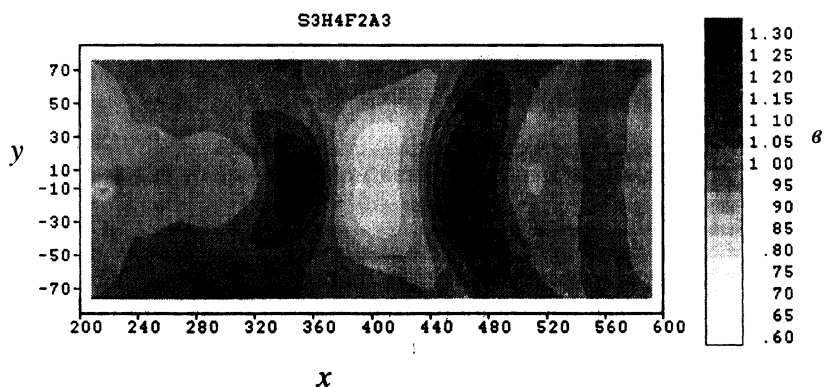
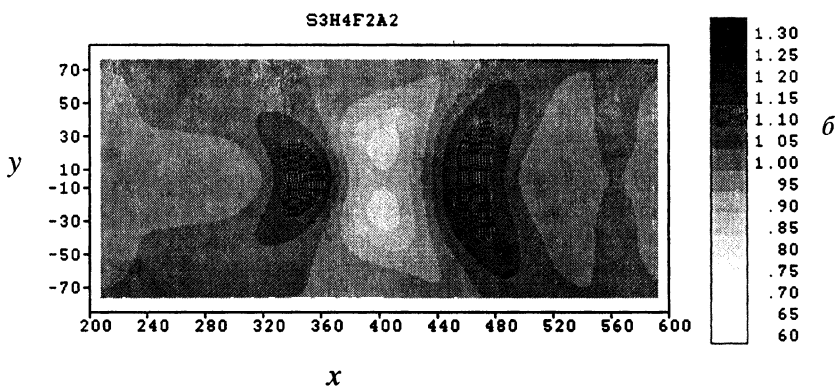
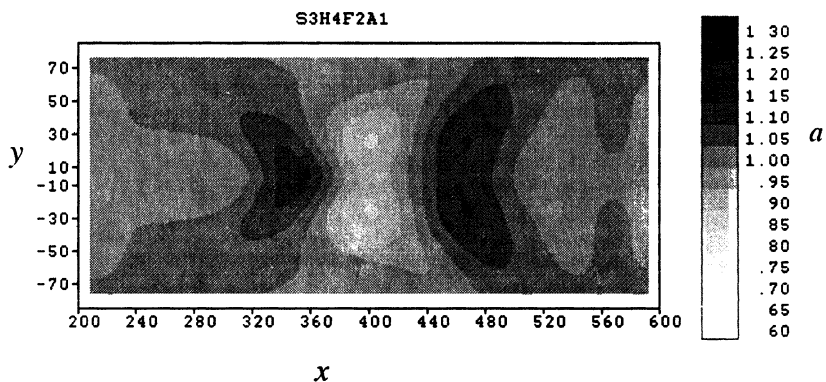


Рис. 12. Результаты соответствующих рис. 10 теоретических расчетов

Заключение

В данной работе исследована трансформация нелинейных квазимонохроматических поверхностных волн в поле неоднородных течений. Теоретически и экспериментально показано, что даже весьма слабые неоднородные течения могут вызывать заметные изменения в поле поверхностных волн. Получено, что нелинейность поверхностных волн приводит с течением времени к резкому возрастанию изменчивости амплитуды поверхностных волн широкого частотного диапазона. Предложенная теоретическая модель хорошо описывает полученные в эксперименте основные особенности трансформации нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений.

В работе рассмотрено двумерно-неоднородное течение простейшего вида: поле заглубленного диполя. На основе изложенной здесь методики можно рассмотреть трансформацию поверхностных волн и на неоднородных течениях произвольного вида, что предполагается сделать в дальнейшем. Другое важное направление дальнейших исследований – изучение трансформации поверхностного волнения, изначально имеющего широкий спектр.

Авторы выражают благодарность И. А. Шерешевскому за разработку программного обеспечения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 96-05-65128, 99-05-64368) INTAS (94-4057) и ГКНТ (проект 01.06.03 «Диагностика» ГП «Мировой океан»).

Литература

1. Shuchman R. A., Lyzenga D. R., Meadows G. A. Synthetic aperture radar imaging of ocean-bottom topography via tidal-current interactions: theory and observations // *Int. J. Remote Sensing*. 1985. V. 6, № 7. P. 1179–1200.
2. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 8. № 4. P. 565–585.
3. Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. № 4. P. 529–549.
4. Thompson J. A., West B. J. Interaction of small-amplitude surface gravity waves with surface currents // *J. Phys. Oceanogr.* 1975 V. 5. № 4. P. 736–749.
5. Smith R. The reflection of short gravity waves on a non-uniform current // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1975. V. 78. № 3. P. 517–525.
6. Smith R. Giant waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77, part 3. P. 417–431.
7. Басович А. Я., Таланов В. И. О трансформации коротких поверхностных волн на неоднородных течениях // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1977. Т. 13, № 7. С. 766–773.

8. *Stewarton K.* On the resonant interaction between a surface wave and weak surface current // *Mathematical* (Gr. Brit.). 1977. V. 24, № 1. P.37–49.

9. *Бадудин С. И., Показеев К. В., Розенберг А. Д.* Лабораторное исследование трансформации регулярных гравитационно-капиллярных волн на неоднородных течениях // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1979. Т. 15, № 6. С. 655–661.

10. *Peregrine D. H., Jonsson I. G.* Interaction of Waves and Currents. Report N83-6, Coastal Engineering Research center, USA, 1983, 88 p.

11. *Лавренов И. В.* О характере поведения спектра поверхностных гравитационных волн на горизонтально-неоднородном течении // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1986. Т. 22, № 5. С. 525–532.

12. *Gerber M.* The Benjamin-Feir instability of a deep-water Stokes wavepacket in the presence of a non-uniform medium // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 311–332.

13. *Shyu J.-H., Phillips O. M.* The blockage of gravity and capillary waves by longer waves and currents // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 217. P.115–141.

14. *Филлипс О. М.* О взаимодействии внутренних и поверхностных волн // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1973. Т. 9, № 9. С. 954–961.

15. *West B. J., Thomson J. A., Watson K. M.* Statistical mechanics of ocean waves // *J. Hydronautics.* 1975. V. 9, № 1. P. 25–31.

16. *Воронович А. Г.* Распространение внутренних и поверхностных волн в приближении геометрической оптики // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1976. т. 12, № 8 С. 850–857.

17. *Hughes B. A.* The effect of internal waves on surface wind waves. 2 Theoretical analysis // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83, № C1. P. 455–465.

18. *Басович А. Я.* Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренней волны // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1979. Т. 15, № 6. С. 655–661.

19. *Куфтарков Ю. М., Кудряцев В. Н.* Влияние внутренних гравитационных волн на спектр ветрового волнения // *Морские гидрофиз. исслед. Севастополь,* 1980. № 1. С. 44–55.

20. *Басович А. Я., Баханов В. В., Таланов В. И.* Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8–30.

21. *Ермаков С. А., Козлов С. И., Показеев К. В., Розенберг А. Д.* Лабораторное исследование влияния внутренней волны на регулярные поверхностные волны // *Океанология.* 1982. Т. 22, № 2. С. 204–210.

22. *Воляк К. И., Семенов А. Ю., Шуган И. В.* Взаимодействие поверхностных и внутренних волн // *Труды ИОФАН.* 1989. Т. 18. С. 3–32.

23. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980 319 с.

24. *Юэн Г., Лэйк Б.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде / Под ред. Захарова. М., 1987.

25. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 539 с.

26. *Bogatyrev S. D., Talanov V. I.* Laboratory model for the upper ocean // *In Black Sea'92 Proceedings Digest.* Varna, Bulgaria. 1992. P. 41–43.

27. *Dysthe K. B.* Note on a modification to the nonlinear Schrodinger equation for application to deep water waves // *Proc. R. Soc. London.* A 369, 1979. P. 105–114.

Волны завихренности в верхнем квазиоднородном слое океана

В. В. Воронович, В. И. Шрира

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова РАН, Москва

Предмет настоящего обзора составляют возмущения порождаемых ветром приповерхностных течений, представляющие собой специфический и сравнительно мало изученный (как в океанологическом, так и в общегидродинамическом контексте) класс движений, промежуточных между волновыми и вихревыми. При определенных условиях эти движения могут описываться как волны и часто называются *волнами завихренности*, поскольку "возвращающая сила" создается исключительно неоднородным полем завихренности, обусловленным сдвиговым течением. Цель данного обзора дать представление как о существующих моделях их динамики и взаимодействия с другими типами движений ВКС (внутренние гравитационные волны, циркуляция Ленгмюра, мелкомасштабная турбулентность), так и об остающихся открытыми вопросах.

Введение

Трудно переоценить важность понимания основных физических механизмов, определяющих динамику верхнего квазиоднородного слоя (ВКС) океана. Накопленный к настоящему времени значительный объем данных натурных наблюдений, а также существующие теоретические представления суммированы в ряде монографий и обзоров [24, 22, 15]. Принято считать, что причиной высокочастотной (с периодами менее часа) части изменчивости гидрофизических полей в верхнем квазиоднородном слое являются волновое движение, мелкомасштабная турбулентность и циркуляция Ленгмюра. При этом традиционно считается, что волновое движение состоит из поверхностных и внутренних волн и обусловлено преимущественно силой гравитации. Однако, как известно,

воздействие ветра на морскую поверхность приводит не только к генерации ветровых волн, но и к возникновению так называемых дрейфовых течений с характерными скоростями порядка нескольких десятков сантиметров в секунду и профилями скорости типа погранслоя, — скорость максимальна у поверхности и убывает на порядок уже на глубине порядка нескольких метров. Возмущения этих течений представляют собой специфический, сравнительно мало изученный как в океанологическом, так и в общегидродинамическом контексте класс движений, промежуточных между волновыми и вихревыми. При определенных условиях эти движения могут описываться как волны и часто называются *волнами завихренности*, они и составляют предмет настоящего обзора. Его цель дать представление как о существующих моделях их динамики и взаимодействия с другими типами движений, так и об остающихся открытыми вопросах.

Не вполне пока установившийся термин "волны завихренности" (иногда "сдвиговые волны") отражает распространенную классификацию волновых движений по физическим механизмам "возвращающей" силы — в данном случае обусловленной наличием вертикального градиента завихренности. Впервые идея существования возвращающей вихревой силы и, соответственно, предположение о возможности существования волнового движения, поддерживаемого исключительно неоднородным полем завихренности, обусловленным сдвиговым течением, была, по-видимому, высказана Линем [12], хотя волны на скачках скорости течения, как и волны на скачках завихренности были известны гораздо раньше. Примером может служить хорошо известная неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, представляющая собой, по сути, неустойчивость моды на скачке скорости [11]. Принципиальное отличие волн на разрывах и скачках завихренности от существующих на течении с гладким профилем скорости состоит в том, что первые представляют собой волновые моды дискретного спектра соответствующей задачи на собственные значения, структурно устойчивые по отношению к малой вязкости, тогда как вторые — пакеты *неволновых* структурно неустойчивых возмущений сплошного спектра с широким фурье-спектром, эволюционирующие на умеренно больших временах подобно *одной волновой структурно устойчивой* моде дискретного спектра [25].

Подход к описанию эволюции возмущений сдвиговых течений на волновом языке особенно эффективен для описания длинноволновых движений, характерный горизонтальный масштаб которых велик по сравнению с заглубленностью течения. Подобные движения, представляющие собой прежде всего интенсивные колебания продольной составля-

ршей скорости, могут существовать в неоднородном поле завихренности, созданном сдвиговым течением, даже когда эффекты, связанные со стратификацией, вращением или изменчивостью поля планетарной завихренности пренебрежимо слабы. Рассматриваемые нами волны завихренности ВКС представляют собой слабодиспергирующие и, что особенно важно, слабозатухающие пакеты волн сплошного спектра и являются промежуточной асимптотикой начальных возмущений произвольной формы на умеренно больших временах [25]. Поэтому возмущения данного типа ответственны, по-видимому, за значительную часть высокочастотной изменчивости гидрофизических полей в приповерхностном погранслое, в особенности поля горизонтальной скорости. В свою очередь, естественно ожидать, что неоднородное поле горизонтальной скорости, создаваемое волной завихренности на поверхности океана, оказывает существенное влияние на динамику волн более мелких масштабов, в частности ветровых, процессы их рефракции и обрушения и динамику приповерхностного погранслоя в целом.

Обзор построен следующим образом. В разд. 2 достаточно подробно рассматривается суть феномена волн завихренности и основные закономерности их динамики в рамках максимально простой модели (однородная по плотности жидкость, отсутствие других типов движений). В этом случае динамику слабонелинейных возмущений удастся описать посредством одного сравнительно простого эволюционного уравнения. Основной результат его анализа – широкий класс начальных возмущений стремится коллапсировать, образуя на промежуточной стадии автомодельно схлопывающиеся трехмерно локализованные сгустки. Глава завершается кратким обсуждением ситуаций в океане, где подобная модель должна реализовываться.

Присутствие сдвигового течения существенно изменяет также динамику внутренних волн в приповерхностном погранслое, значительно усиливая их поверхностные проявления. В данном случае речь идет прежде всего об усилении неоднородного поля горизонтальной скорости, создаваемого внутренней волной у поверхности, непосредственная визуализация которого может обеспечиваться различными "вторичными" физическими факторами: обрушением мелкомасштабных поверхностных волн, изменением альбеда морской поверхности, образованием скоплений водорослей или тающего льда в виде регулярных полос и т. п. [4]. При этом важно, что влияние течения, сосредоточенного в слое, толщина которого много меньше длины внутренней волны, на ее дисперсионные характеристики относительно слабо, т. е. наблюдение поверхностных проявлений дает достаточно достоверную информацию о

свойствах волны в океанской толще. Влияние течения особенно сильно в случае резонанса, т. е. при совпадении фазовой скорости внутренней волны и скорости течения на поверхности, что было впервые обнаружено в работе [18]. Концепция волн завихренности позволяет рассматривать взаимодействие внутренней волны с приповерхностным течением как взаимодействие волна – волна, что сильно облегчает задачу и позволяет в некоторых случаях достигнуть успеха в изучении нелинейных аспектов взаимодействия, приводящего к образованию в верхнем слое нетривиальных нелинейных структур типа уединенных волн [54]. Совокупность полученных в рамках данного подхода результатов, рассмотренных в разд. 3, дает достаточно полное представление о различных механизмах взаимодействия волн завихренности и внутренних гравитационных волн.

Существенно менее изучены механизмы взаимодействия волн завихренности и других типов движений ВКС (мелкомасштабной турбулентности, поверхностных волн и циркуляции Ленгмюра), краткое обсуждение этого круга вопросов, оставляющее пока больше открытых вопросов, чем ответов, составляет предмет разд. 4.

1. Основные уравнения, приближения и скэйлинг

Представляется целесообразным предварить анализ конкретных моделей кратким обсуждением основных уравнений и приближений, а также ввести единообразную систему обозначений. Мы будем рассматривать динамику длинноволновых возмущений несжимаемой, горизонтально-однородной жидкости, стратифицированной по плотности вдоль вертикальной координаты z , в присутствии плоскопараллельного сдвигового течения $U = \{U(z), 0, 0\}$. Последнее также будем полагать горизонтально-однородным, не имеющим точек перегиба в профиле скорости, т. е. устойчивым в смысле Рэлея, заглубленность которого h мала по сравнению с общей глубиной океана H . Хотя дрейфовые течения генерируются ветром посредством турбулентного обмена через напряжения Рейнольдса, на развитой стадии влияние турбулентности лишь обеспечивает стационарность среднего течения, тогда для изучения динамики возмущений можно использовать ламинарное описание, вводя эффективную вихревую вязкость в уравнения Навье – Стокса. Более того, как будет показано ниже, влияние вязкости принципиально лишь для трехмерных возмущений и только в узкой окрестности твердых границ, либо критического слоя, где фазовая скорость волны и скорость те-

чения совпадают. Поэтому в основной массе жидкости в рамках приближения Буссинеска динамика возмущений полностью определяется системой уравнений Эйлера, непрерывности и сохранения массы:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \frac{p}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{z} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_t + w N^2 + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

где p и ρ – возмущения давления и плотности, $\rho_0(z)$ и $N(z)$ – равновесное распределение плотности и частота Брента – Вайсяля, \mathbf{z} – единичный вертикальный вектор, $\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ – оператор градиента, а скорость жидкости \mathbf{u} включает как среднее течение, так и возмущения:

$$\mathbf{u} = \{U(z) + u(x, y, z), v, w\}.$$

Размерные (со штрихом) и безразмерные переменные связаны масштабным преобразованием

$$\left. \begin{aligned} \{x', y', z'\} &= L \{x, y, z\}; & t' &= \frac{L}{V} t; & p' &= \rho_* V^2 p; \\ u' &= V u; & \rho' &= \rho_* \frac{V^2}{gh} \rho, & \rho'_0 &= \rho_* \rho_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь V и L – характерные значения скорости течения и горизонтальный масштаб возмущений, а ρ_* – плотность жидкости в ВКС.

В качестве граничных условий в рамках невязкого описания необходимо использовать стандартные кинематическое и динамическое условия [24]. Однако для большинства рассматриваемых ниже ситуаций поверхностные волны могут быть в первом приближении отфильтрованы благодаря малости характерных чисел Фруда. В результате эффективно используется граничное условие в приближении "твердой крышки" на поверхности океана и математически аналогичное ему условие непротекания на дне:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = -H, \quad z = 0. \quad (5)$$

При этом общая глубина океана H' может быть как сравнимой, так и много больше длины волны.

По причинам, изложенным ниже, наибольший интерес представляют *длинноволновые* возмущения течения, таким образом, малость заглубленности среднего течения h по сравнению с характерной длиной волны L дает естественный малый параметр задачи

$$\epsilon = \frac{h}{L}, \quad (6)$$

позволяющий ввести "быструю" вертикальную координату

$$\zeta = \frac{z}{\epsilon}$$

и искать решения в виде асимптотических рядов методом многих масштабов, либо сращиваемых асимптотических разложений, что и будет сделано в дальнейшем.

2. Динамика волн завихренности в однородной жидкости

Основное отличие волн завихренности от ранее известных волновых процессов в ВКС состоит в том, что доминирующим эффектом является неоднородное поле завихренности, создаваемое сдвиговым течением, тогда как влияние силы тяжести, связанное с наличием свободной поверхности и плотностной стратификации, хотя и может значительно изменять дисперсионные характеристики волн завихренности и существенно влиять на их нелинейную динамику, все же остается вторичным фактором, не изменяющим их природы. Естественно поэтому начать рассмотрение со случая однородной жидкости с "твердой крышкой" на поверхности, *a priori* отфильтровав, таким образом, поверхностные и внутренние гравитационные волны.

2.1. Линейные гармонические волны завихренности. Концепция квазимод

Хорошо известно, что для гармонических волн бесконечно малой амплитуды исходная система уравнений (1) – (5) может быть приведена к задаче на собственные значения типа Рэля, которая для течения без точки перегиба в профиле скорости не имеет собственных значений, принадлежащих дискретному спектру. Решением является континуум мод сплошного спектра, так называемых волн Кэйза [30], фазо-

Скорости которых лежат в интервале $(U_{\min}; U_{\max})$, т. е. каждая волн Кэйза обязательно имеет критический слой на некоторой глубине. Волны Кэйза являются сингулярными в том смысле, что уравнение Рэлея имеет регулярную особую точку на критическом уровне, модовая функция, соответствующая вертикальной скорости, имеет особенность типа скачка производной, а горизонтальная скорость имеет разрыв [8]. Моды сплошного спектра не являются волнами в строгом смысле этого слова, а скорее представляют собой тип движения, переходный между волновым и вихревым.

Тем не менее, может быть развит формализм, позволяющий в определенных условиях описывать эволюцию произвольных длинноволновых возмущений, состоящих из волн Кэйза, как волны. Следуя работе [25], введем "быструю" переменную (1) и будем искать решение уравнения Рэлея

$$(U - c)(w_{zz} - k^2 w) - U_{zz} w = 0 \quad (7)$$

методом многих масштабов, полагая полевые переменные $\{u, v, w, p\}$ зависящими от двух вертикальных переменных ζ, z , а оператор дифференцирования по z имеющим вид

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Модовая функция и фазовая скорость при этом ищутся в виде асимптотических рядов

$$\{w, c\} = \sum_0^{\infty} \epsilon^n \{w_n, c_n\} \quad (8)$$

последовательными приближениями, а остальные полевые переменные определяются из системы (1)–(3). Кроме того, необходимо дополнить систему граничным условием

$$w_{\zeta} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad (9)$$

эквивалентным условию сращивания на границе слоев в методе сращиваемых асимптотических разложений.

Подставляя (8) в уравнение Рэлея в старшем порядке, получаем (штрих здесь и далее означает производную по ζ) уравнение

$$(U - c_0)w_0'' - U''w_0 = 0, \quad (10)$$

имеющее два фундаментальных решения, известных как невязкие решения Толмина:

$$w_0^{(1)} = (U - c_0)f(z),$$

$$w_0^{(2)} = (U - c_0)\varphi(z) \int \frac{d\zeta'}{(U - c_0)^2}. \quad (11)$$

Легко видеть, что второе решение Толмина, являющееся источником сингулярностей мод Кэйза, не удовлетворяет граничному условию (9) и, следовательно, не входит в нулевое приближение. Условие "твердой крышки" на поверхности позволяет найти фазовую скорость волны завихренности:

$$c_0 = U|_{z=0}. \quad (12)$$

Таким образом, в старшем приближении дисперсия фазовой скорости волн завихренности отсутствует, появляясь лишь в первом порядке по ϵ . Здесь имеем неоднородное уравнение на w_1 , решение которого, удовлетворяющее граничному условию (9), включает оба решения Толмина:

$$w_1 = -c_1 f + (U - c_0) f_z \int_{-\infty}^{\zeta} \left(\frac{c_0^2}{(U - c_0)^2} - 1 \right) d\zeta'. \quad (13)$$

Граничное условие на поверхности (5) определяет поправку первого порядка к фазовой скорости волны:

$$c_1 = - \frac{U^2}{U'} \Big|_{\zeta=0} \frac{f_z}{f} \Big|_{z=0}. \quad (14)$$

Зависимость модовой функции от "медленной" вертикальной координаты z , все еще остающаяся неизвестной, определяется условием отсутствия секулярных членов во втором приближении [14]. Подставляя (11), (13) в неоднородное уравнение на w_2 , возникающее во втором приближении, получаем

$$\begin{aligned}
(U - c_0)w_2'' - U''w_2 = c_2fU'' + c_1U''f_z \int_{-\infty}^{\zeta} \left(\frac{c_0^2}{(U - c_0)^2} - 1 \right) d\zeta' - \\
-f_{zz} \left[((U - c_0)^2)' \int_{-\infty}^{\zeta} \left(\frac{c_0^2}{(U - c_0)^2} - 1 \right) d\zeta' + c_0^2 - (U - c_0)^2 \right] - \\
-(U - c_0)^2 \{ f_{zz} - k^2 f \},
\end{aligned} \quad (15)$$

где $k = |\mathbf{k}|$ – модуль двумерного волнового вектора.

Последнее слагаемое, не стремящееся к нулю при $\zeta \rightarrow -\infty$, при интегрировании будет приводить к расходимостям в решении и невозможности удовлетворить (9). Единственный способ регуляризовать разложение – потребовать тождественного обращения в ноль выражения в фигурных скобках, которое вместе с условием непротекания на дне образует искомую граничную задачу на "медленную" функцию:

$$\begin{aligned}
f_{zz} - k^2 f = 0, \\
f(z) \Big|_{z=-H} = 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Решение задачи (16)

$$f(z) = \sinh\{k(z + H)\} \quad (17)$$

показывает, что в однородной жидкости характерное время дисперсионных процессов имеет порядок $O(\epsilon^{-1})$, причем дисперсионная поправка к фазовой скорости отрицательна:

$$c_1 = - \frac{U^2}{U'} \Big|_{\zeta=0} k \coth\{kH\}. \quad (18)$$

Можно показать, что учет следующих членов разложения дает затухание в порядке $O(\epsilon^2)$.

Интересно оценить соотношение порядков величин различных компонент поля волны завихренности. Простейший анализ, основанный на соотношении непрерывности (3), показывает, что для волновых движений, горизонтальный масштаб которых намного превосходит вертикальный, движение по вертикали в значительной степени подавлено, т. е. выполняется соотношение

$$\{u, v, p\} \sim O(\epsilon^{-1}w).$$

Однако подстановка (11) в уравнения Эйлера показывает, что в старшем порядке давление и поперечная компонента горизонтальной скорости тождественно равны нулю. В этом факте заключается одно из основных свойств волн завихренности: даже при соизмеримости поперечного и продольного масштабов по горизонтали движение все равно эффективно одномеризуется, т. е. колебания частиц в волне происходят преимущественно в направлении среднего течения. Именно этот замечательный факт позволяет получить для существенно неоднородных волн завихренности эволюционное уравнение со сравнительно простой нелинейностью, тогда как обычно требуется введение параксиального приближения.

Проведенный анализ дисперсионных свойств волн завихренности показывает, что в длинноволновом пределе все фурье-гармоники имеют одинаковую фазовую скорость, дисперсионные же поправки к ее величине имеют первый порядок малости по параметру (6). Поэтому на временах порядка $O(\epsilon^{-1})$ широкий волновой пакет, составленный из таких гармоник, эволюционирует как единая квазимода, которая не является истинной, а представляет собой медленно (на масштабе ϵ^{-2}) затухающий из-за расплывания пакет волн Кэйза. В силу малости декремента длинноволновые гармоники затухают гораздо медленнее коротковолновых компонент сплошного спектра. Поэтому можно говорить о том, что для широкого класса начальных возмущений полученная квазимода является промежуточной асимптотикой линейной начальной задачи на временах порядка $O(\epsilon^{-1})$ в следующем смысле: асимптотика достаточно произвольного гладкого возмущения на этом временном масштабе представляет собой квазимоду (главный член асимптотики) плюс асимптотически малый вклад от коротковолновой части спектра. Этому утверждению может быть придана строгая математическая форма, а соответствующее доказательство может быть получено путем асимптотического анализа решения начальной задачи в виде интеграла Фурье. Процедура доказательства, однако, весьма громоздка, и ее обсуждение выходит за рамки данного обзора.

2.2. Нелинейное эволюционное уравнение

Обратимся теперь к изучению ВЗ малой, но конечной амплитуды. Исходную систему (1)–(3) можно привести к нелинейному уравнению

$$D_t w_{zz} - U_{zz} w_x + D_t \nabla_{\perp}^2 w = \partial_z \nabla_{\perp} \cdot [(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{q}] - \nabla_{\perp}^2 [(\mathbf{u} \nabla) w], \quad (19)$$

где $D_t = \partial_t + U \partial_x$ — оператор материальной производной, а ∇_{\perp} и \mathbf{q} — горизонтальные компоненты оператора градиента и скорости, причем в отличие от исходной системы здесь скорость среднего течения и возмущения разделены для наглядности. Полученное уравнение будем решать методом многих масштабов, вновь вводя "быструю" вертикальную переменную (1), а также эволюционные переменные

$$\tau = ct; \quad \tilde{x} = x - ct.$$

Наиболее интересным, как обычно, является режим, когда дисперсионные и нелинейные эффекты уравнивают друг друга, поэтому будем искать компоненты волнового поля в виде асимптотического ряда

$$\{u, v, w, p\} = \sum_0^{\infty} \epsilon^{n+2} \{\epsilon^{-1} u, v, w, p\}. \quad (20)$$

Решение уравнения (19) в любом порядке можно, в принципе, найти путем следующей рекуррентной процедуры: решить уравнение старшего приближения, замкнутое относительно w , затем найти из уравнений Эйлера остальные компоненты волнового поля, подставить их обратно в (19), получив неоднородное уравнение на компоненту вертикальной скорости следующего порядка малости, и т. д. Действуя подобным образом, находим решение для компонент поля в старшем порядке (тильда над x здесь и далее опущена):

$$w_0 = [f(x, y, z) * A_x(x, y, \tau)](U - c); \quad u_0 = -(f * A)U', \quad (21)$$

где значок * означает свертку по горизонтальным переменным:

$$(\varphi * \psi) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) \psi(x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (22)$$

Удобство такого представления станет очевидным в дальнейшем. Для амплитуды $A(x, y, \tau)$ будет получено нелинейное эволюционное уравнение, тогда как стационарная функция $f(x, y, z)$ полностью определяется дисперсионными свойствами среды. Заметим, что подобное представление естественно для волнового пакета, спектральная ширина которого

сравнима с несущей. Легко видеть, что фазовая скорость пакета равняется скорости течения на поверхности (см. (12)).

Следя описанной выше рекуррентной процедуре, в следующем порядке получаем неоднородное уравнение, решение которого с учетом (9) имеет вид

$$w_1 = (f * A_\tau) + (f_z * A_x)(U - c) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\zeta} \left(\frac{c^2}{(U - c)^{-2}} - 1 \right) d\zeta' - U'(f * A)(f * A_x). \quad (23)$$

Применение граничного условия "твердой крышки" на поверхности к (23) приводит к уравнению на амплитуду волны, все еще содержащему неизвестную "медленную" функцию. Граничная задача, определяющая эту функцию, возникает из условия отсутствия секулярных членов во втором порядке, а также условия непротекания на дне подобно тому, как это делалось выше для линейных мод:

$$(f_{zz} * A) + (f * \nabla_{\perp}^2 A) = 0,$$

$$f = 0, \quad z = -H. \quad (24)$$

Очевидно, для каждой из Фурье-гармоник, составляющих пакет, из уравнений (24) можно получить задачу типа (16), решения которой будут зависеть от модуля волнового вектора. Выполнив преобразование Фурье полученного эволюционного уравнения, нормировав результат на $f(k_x, k_y, 0)$ и затем выполнив обратное преобразование Фурье, получим замкнутое нелинейное эволюционное уравнение для волн завихренности

$$A_\tau - rAA_x - sG[A_x] = 0,$$

$$r = U' \Big|_{\zeta=0}, \quad s = \frac{U^2}{U'} \Big|_{z=0}, \quad (25)$$

дисперсия в котором определяется интегродифференциальным оператором

$$G[\varphi(\mathbf{r})] = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{r}_1) \exp(i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)) d\mathbf{k} d\mathbf{r}_1, \quad (26)$$

ядро которого $Q(\mathbf{k})$ определяется решением граничной задачи (16):

$$Q(\mathbf{k}) = \left. \frac{f_z(\mathbf{k}, z)}{f(\mathbf{k}, z)} \right|_{z=0} = k \coth\{kH\}.$$

Таким образом, полученное уравнение является существенно двумерным обобщением уравнения Джозефа [39], если глубина жидкости конечна, либо уравнения Бенжамина – Оно [27] в пределе жидкости бесконечной глубины.

Динамика критического слоя. Найденное выше разложение не является, как легко видеть, вполне регулярным, поскольку вблизи поверхности амплитуда возмущения становится сравнимой по порядку величины со скоростью среднего течения¹. Более того, компоненты горизонтальной скорости u_1, v_0 , определяемые (13):

$$\begin{aligned} u_1 &= -c^2 (f_z * \nabla_{\perp}^{-2} A_{xx}) (U - c)^{-1} - \\ &- (f_z * A) U' \int_{-\infty}^{\zeta} \left(\frac{c^2}{(U - c)^2} \right) d\zeta + \frac{1}{2} (f * A)^2 U'', \\ v_0 &= -c^2 (f_z * \nabla_{\perp}^{-2} A_{xy}) (U - c)^{-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

сингулярны, т. е. стремятся к бесконечности при $\zeta \rightarrow 0$. Характер возникающей сингулярности определяется размерностью движения: для двумерных возмущений, однородных по y , компоненты горизонтальной скорости расходятся логарифмически, тогда как для трехмерных выражения (27) имеют в точке $\zeta = 0$ полюс первого порядка. Причиной нерегулярности является наличие критического уровня, на котором фазовая скорость волны совпадает со скоростью течения, и который, согласно (12), для длинных волн завихренности расположен на поверхности жидкости. В непосредственной близости от критического уровня формируется так называемый критический слой малой толщины, масштабы движения и динамика которого принципиально отличны от наблюдаемых в толще жидкости и потому требуют отдельного рассмотрения [37]. Однако ниже будет показано, что главные члены разложения в критическом слое при определенных условиях задаются соответствующим

¹В системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью волны.

пределом решения в толще, и потому критический слой не оказывает влияния на динамику волны в старших порядках.

В зависимости от соотношения амплитуды возмущения и вязкости жидкости динамика критического слоя может носить принципиально различный характер [46]. Ее анализ, всегда представляющий непростую задачу, особо затруднен для пакетов с широким фурье-спектром, каковыми являются волны завихренности. Хотя были достигнуты определенные успехи в построении теории нелинейного критического слоя для плоских волн, многочисленные попытки ее обобщения для существенно неоднородных возмущений с широким спектром до сих пор не увенчались успехом (см. детально [40, 19]), причем природа возникающих трудностей все еще до конца не ясна. Наиболее вероятной интерпретацией является предположение о наличии в критическом слое существенно неоднородных движений неволновой природы², активно влияющих на волну завихренности.

Поэтому ограничимся далее рассмотрением ситуаций, в которых вязкие, а не нелинейные эффекты доминируют в критическом слое. Это дает предположение, что ширина критического слоя δ определяется вязкостью жидкости, а не амплитудой волны:

$$\epsilon \ll \delta = (\epsilon U'_0 \text{Re})^{-\frac{1}{3}}; \quad U'_0 = U' \Big|_{\zeta=0}; \quad \text{Re} = \frac{Vh}{\nu}, \quad (28)$$

где ν – вязкость жидкости. Как обычно, введем внутренние переменные внутри критического слоя:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\zeta}{\delta}; & T &= U'_0 \tau; & U - c &= \delta U'_0 \xi + o(\delta); \\ u &= \epsilon U'_0 \hat{u}; & v &= \frac{\epsilon^2}{\delta} U'_0 \hat{v}; & w &= \epsilon^2 \delta U'_0 \hat{w}; \\ p_* &= \epsilon^2 (U'_0)^2 \hat{p}. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение стандартных уравнений Навье – Стокса в критическом слое, преобразованных с учетом (29), следует искать в виде рядов по степеням возникающего нового малого параметра ϵ/δ (детально см. [5, 54]), требуя выполнения условий сращивания с внешним разложением при $\xi \rightarrow -\infty$:

²Например, системы продольных вихрей.

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &\rightarrow -A + \frac{\epsilon}{\delta} \mathcal{P}_{yy} \frac{1}{\xi} \\ \hat{v} &\rightarrow -\mathcal{P}_{xy} \frac{1}{\xi} \\ \hat{w} &\rightarrow A_x \xi + \frac{\epsilon}{\delta} (A_T - \nabla_{\perp}^2 \mathcal{P}_x - AA_x) \\ \hat{p} &\rightarrow \mathcal{P}_{xx} \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

где $\mathcal{P} = \left(\frac{\epsilon}{\bar{U}_0'}\right)^2 (f_z * \nabla_{\perp}^{-2} A)$, $z = 0$, а также условий "твердой крышки" и постоянства напряжений Рейнольдса на поверхности:

$$\hat{w} = \hat{u}' = \hat{v}' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (31)$$

Последнее условие, соответствующее базовому предположению об отсутствии влияния ветра на динамику волновых возмущений, принципиально отлично от условия прилипания $u, v = 0$, поэтому рассматриваемый формализм не применим для описания трехмерных движений в пограничном слое на пластине.

В старшем порядке решение, удовлетворяющее всем граничным условиям, представляет собой лишь асимптотическое продолжение (21) в критический слой

$$\hat{u}_0 = A_x \xi, \quad \hat{u}_0 = -A. \quad (32)$$

Возникающее в следующем порядке уравнение для \hat{w}_1 , как можно убедиться, также однородно, что позволяет без дополнительных усилий найти его решение, удовлетворяющее условиям срачивания:

$$\hat{w}_1 = A_T - \nabla_{\perp}^2 \mathcal{P}_x - AA_x. \quad (33)$$

Условие "твердой крышки" немедленно приводит к ранее полученному эволюционному уравнению для амплитуды волны. Горизонтальные компоненты скорости в данном порядке являются решениями неоднородных уравнений

$$\left(\partial_{\xi\xi}^2 - \xi \partial_x\right) \hat{u}_1 = -\mathcal{P}_{xyy}, \quad (34)$$

$$\left(\partial_{\xi\xi}^2 - \xi \partial_x\right) \hat{v}_0 = \mathcal{P}_{xxy}.$$

Как видно, переменные в уравнениях (34) не разделяются, поэтому для его решения необходимо произвести преобразование Фурье по горизонтальным координатам. В результате получим неоднородные уравнения Эйри с не зависящей от ξ правой частью, частные решения которых, удовлетворяющие условиям сращивания, представляют собой функции Ломмеля $L(Z)$ (см. [28, 33]) от соответствующей комбинации вертикальной координаты и волнового вектора. Чтобы удовлетворить условиям на свободной поверхности, необходимо добавить еще решение однородного уравнения, убывающее при $\xi \rightarrow -i\infty$, т. е. соответствующую функцию Эйри $Ai(Z)$:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{1k} &= i \left(\frac{c}{U'_0} \right)^2 k_x^{\frac{1}{2}} \frac{k_y^2}{k^2} Q(k) A(k) \left[L \left(ik_x^{\frac{1}{2}} \xi \right) + \alpha_k Ai \left(ik_x^{\frac{1}{2}} \xi \right) \right], \\ \hat{v}_{0k} &= -i \left(\frac{c}{U'_0} \right)^2 k_x^{\frac{1}{2}} \frac{k_x k_y}{k^2} Q(k) A(k) \left[L \left(ik_x^{\frac{1}{2}} \xi \right) + \alpha_k Ai \left(ik_x^{\frac{1}{2}} \xi \right) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где $Q(k)$ – ядро дисперсионного оператора (26). Коэффициент при функции Эйри определяется условием постоянства напряжений Рейнольдса на поверхности:

$$\alpha_k = - \frac{L}{Ai} \Big|_{\xi=0}. \quad (36)$$

Как функция Ломмеля, так и функция Эйри ограничены при мнимых отрицательных значениях их аргументов, кроме того, функция Эйри экспоненциально затухает в пределе $Z \rightarrow -i\infty$, тогда как функция Ломмеля в этом пределе имеет асимптотику $L(Z) \rightarrow Z^{-1}$. Следовательно, решения (27) естественно сращиваются с решением в толще жидкости, при этом сингулярности последнего устраняются, а вклад критического слоя в динамику нелинейной волны завихренности остается пренебрежимо малым.

Таким образом, полученное нелинейное эволюционное уравнение адекватно описывает динамику волны завихренности лишь в условиях малой, но конечной вязкости, такой что в толще жидкости вязкие члены не входят в два главных приближения (19), в то же время толщина критического слоя определяется вязкостью, а не амплитудой возмущения (условие (28)). Данные условия налагают определенные ограничения на диапазон амплитуд и пространственный масштаб волн завихренности, для описания эволюции которых применим предложенный подход:

$$\operatorname{Re}^{-\frac{1}{2}} \ll \frac{|u|}{V} \ll \operatorname{Re}^{-\frac{1}{4}}, \quad (37)$$

$$h\operatorname{Re}^{\frac{1}{4}} \ll L \ll h\operatorname{Re}^{\frac{1}{2}}.$$

Возникающие ограничения на применимость предлагаемого подхода носят качественно различный характер. Ограничение на амплитуду волны сверху имеет чисто техническую природу, связанную с обсуждавшейся выше нерешенностью проблемы динамики нелинейного критического слоя для неоднородных возмущений с широким фурье-спектром (для плоских волн, например, оно отсутствует). Ограничение на амплитуду волны снизу не имеет принципиального значения и может быть легко ослаблено, что приведет к появлению вязкого члена (типа рэлеевской вязкости) в эволюционном уравнении. Еще большее ослабление этого условия приводит к преобладанию вязких эффектов и, соответственно, к вязко-линейным режимам эволюции, не представляющим, на наш взгляд, особого интереса. Однако переформулировка обсуждаемых ограничений в терминах допустимых длин волн (второе неравенство в (37)) показывает, что ограничение на длину волны сверху имеет принципиальный характер, поскольку для волн больших масштабов доминирующим эффектом становится влияние неоднородности базового течения.

Рассмотрим, например, неоднородный ламинарный пограничный слой свободной поверхностью, создаваемый постоянным ветром в полупространстве $x > 0$. Профиль скорости базового течения может быть найден в виде автомодельного решения уравнений Прандтля с условием постоянства напряжения Рейнольдса на поверхности:

$$U_{\zeta}|_{\zeta=0} = \frac{\tau}{\rho_* \nu}, \quad (38)$$

где τ – напряжение Рейнольдса, параметризующее влияние ветра. В случае $\tau = \text{const}$ немедленно получаем профиль скорости типа Фолкнера – Скана [26]:

$$U(X, \zeta) = V X^{\frac{1}{3}} \varphi \left(\frac{\zeta}{X^{\frac{1}{3}}} \right), \quad X = \frac{x'}{\lambda}, \quad (39)$$

где λ – масштаб горизонтальной неоднородности базового течения, а φ – универсальная функция Фолкнера – Скана порядка $\frac{1}{3}$. Параметры базового течения при этом связаны между собой соотношениями

$$V = \operatorname{Re}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_*}}; \quad \lambda = \operatorname{Re} h. \quad (40)$$

Простые оценки показывают, что уже при $L = \operatorname{Re}^{\frac{1}{2}} h$ порядок величины дисперсионных эффектов (h/L) и влияния неоднородности (L/λ) становятся сравнимыми по величине, что нарушает исходное предположение о плоскопараллельном характере среднего течения.

2.3. Динамика волн завихренности

Как уже упоминалось выше, полученное эволюционное уравнение для волн завихренности в однородной жидкости (25) является двумерным обобщением хорошо известных, точно интегрируемых уравнений Джексона, либо, в соответствующем пределе, Бенжамина – Оно [47, 31]. Очевидно, что во всяком сечении $\kappa_1 x + \kappa_2 y = \text{const}$ решения даются этими интегрируемыми уравнениями. Таким образом, вся совокупность известных точных решений этих уравнений также является решениями (25). Соответственно, в рамках одномерных уравнений асимптотикой широкого класса начальных условий является типичная для точно интегрируемых систем последовательность солитонов. Однако все подобные решения ничего не позволяют сказать о неоднородной динамике. Более того, а priori не ясно, в какой мере они описывают эволюцию даже изначально плоских возмущений. Существенно неоднородные решения, описывающие стационарные аксиально-симметричные уединенные волны, были построены численно в работе [2] для предельного случая жидкости бесконечной глубины, а позднее и для жидкости конечной глубины [53]. Пример такого стационарного решения показан на рис. 1. Можно показать аналитически, что у солитонов в глубокой жидкости поле на периферии спадает по степенному закону: $A \sim (x^2 + y^2)^{-2}$, а в жидкости конечной глубины экспоненциально.

Факт существования подобных локализованных решений интересен сам по себе, подчеркнем также нетривиальность появления аксиально-симметричных решений в существенно анизотропной задаче, однако их роль в неоднородной динамике оставалась неясной. Первый прогресс в этом направлении связан с работой [16], где уравнение (25) для бесконечно глубокой жидкости рассматривалось в парааксиальном приближении, т. е. для квазиплоских движений. Для анализа устойчивости фундаментального плоского решения – солитона – по отношению к длинноволновым поперечным возмущениям был применен весьма нетривиальный прием: была построена точно интегрируемая двумерная

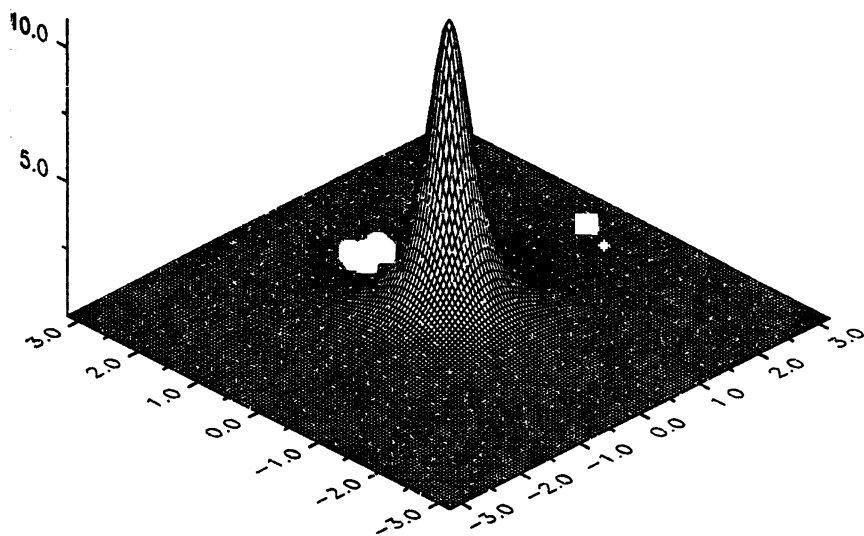


Рис. 1. Пример решения (25) в виде уединенной волны для конечной глубины

система, асимптотически близкая к рассматриваемой. Было найдено, что, во-первых, плоский солитон неустойчив по отношению к длинноволновым поперечным возмущениям с характерным инкрементом, пропорциональным квадрату амплитуды солитона, во-вторых, что принципиально, сама область неустойчивости ограничена длинноволновой частью спектра: максимальное неустойчивое поперечное волновое число также порядка квадрата амплитуды солитона.

Таким образом, для квазиплоских начальных распределений можно ожидать двухмасштабной эволюции: сначала (сравнительно быстро) в рамках интегрируемого уравнения Бенжамина – Оно происходит распад начального возмущения на солитоны, затем в результате самофокусировочной неустойчивости фронты солитонов начинают медленно искривляться и распределение амплитуды вдоль фронта становится неоднородным, изменяя скорость солитона таким образом, что искривление фронта еще более усиливается. Вопрос об асимптотике нелинейной стадии развития этой неустойчивости есть ключевой вопрос динамики ВЗ. Анализ законов сохранения уравнения (25) для бесконечно глубо-

кой жидкости, проведенный Дьяченко и Кузнецовым, позволил предположить, что *коллапс*, т. е. обращение в бесконечность поля за конечное время, является наиболее вероятным сценарием эволюции [9].

Посредством некоторого масштабного преобразования уравнение (25) можно привести к стандартной гамильтоновой форме

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} Gu - \delta u u_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}, \quad (41)$$

где гамильтониан задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} I_1 - I_2 \quad \left(I_1 = \int u G u \, dr, \quad I_2 = \int u^3 \, dr \right). \quad (42)$$

Уединенные волны представляют собой стационарные точки \mathcal{H} при фиксированной x -проекции импульса $P_x = 1/2 \int u^2 \, dr$, причем для 1D-солитонов потенциал имеет минимум, т. е. они устойчивы. Масштабное преобразование, сохраняющее P_x

$$u_s(\mathbf{r}) \rightarrow \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{d}{2}} u_s \left(\frac{\mathbf{r}}{a} \right),$$

превращает гамильтониан в функцию параметра a :

$$\mathcal{H}(a) = \frac{I_1}{2a} - \frac{I_2}{a^{d/2}}. \quad (43)$$

Вычисления показывают, что в то время, как 1D-солитон имеет отрицательную энергию (\mathcal{H}), 2D-уединенной волне соответствует нулевая энергия, а диспергирующему распределению — положительная. Таким образом, ни образование солитонов, ни дисперсионное расплывание не могут быть результатом самофокусировочной неустойчивости плоского солитона.

С другой стороны, для состояний с отрицательным \mathcal{H} гамильтониан не ограничен снизу при $a \rightarrow 0$, поэтому следует ожидать коллапса. Излучение резонансных волн, уносящих положительные порции энергии, также уменьшает (т. е. увеличивает по абсолютной величине) \mathcal{H} , и, следовательно, также способствует коллапсу.

Подтверждение факта существования коллапса и его явное аналитическое описание было получено в работе [50] в рамках параксиальной версии уравнения (25) для глубокой воды. Поскольку развитие самофокусировочной неустойчивости является в определенном смысле медленным, для описания ее нелинейной эволюции использовался усредненный вариационный принцип Уизема [23]. Следует заметить, что метод

Уизема обычно дает хорошие результаты только для возмущений, достаточно длинных по сравнению с характерным масштабом солитона, но быстро теряет применимость с уменьшением масштаба модуляции. Последнее обстоятельство связано с нарушением предположения о локальности, лежащего в основе подхода Уизема, что в свою очередь обусловлено излучением неадиабатически эволюционирующим солитоном квазисинусоидальных волн. Нетривиальной математической особенностью рассматриваемого уравнения является факт отсутствия излучения в главном порядке, что позволяет адекватно описать в рамках подхода Уизема и *неадиабатические* изменения солитона.

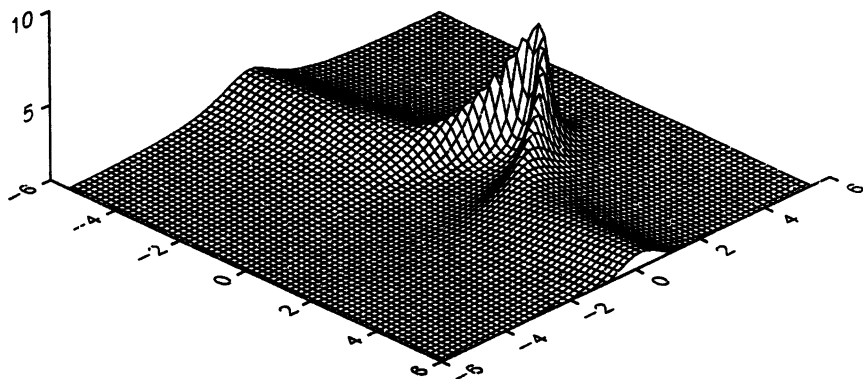


Рис. 2. Самофокусировка уединенной волны и начальная стадия формирования кластера

Построенные явные решения модифицированных уравнений Уизема описывают феномен так называемого "*критического коллапса*" (см., например, [42]): если импульс начального локализованного возмущения меньше некоторого критического значения – возмущение медленно расплывается, излучая квазисинусоидальные волны; "*критическое*" возмущение коллапсирует автомодельно, образуя сингулярность за конечное время; начальные распределения с импульсом, скажем, в M раз превосходящим критический, разбиваются на M кластеров, каждый из которых схлопывается подобно критическому. Представление о том, как выглядит коллапсирующий кластер, дают рис. 2 и рис. 3. На первом из них показана начальная стадия самофокусировочной неустойчивости плоского солитона Бенжамина – Оно, в то время как рис. 3 иллюстрирует более позднюю стадию коллапса в два последовательных момента времени.

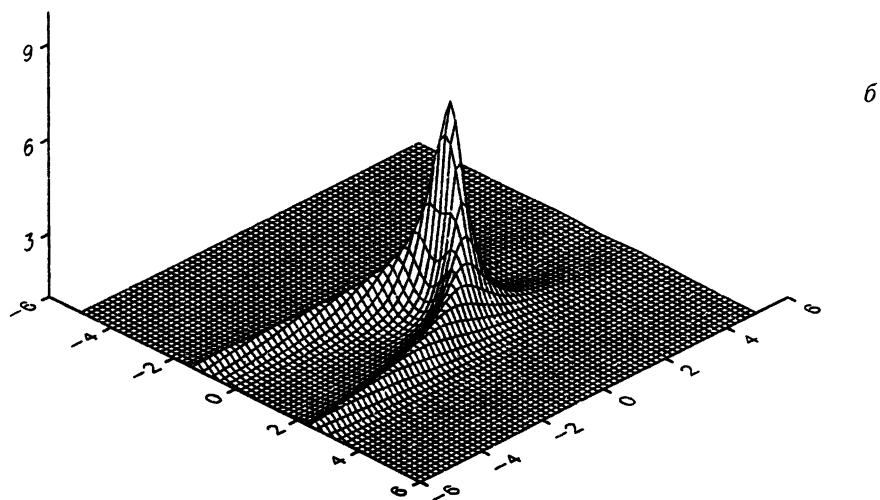
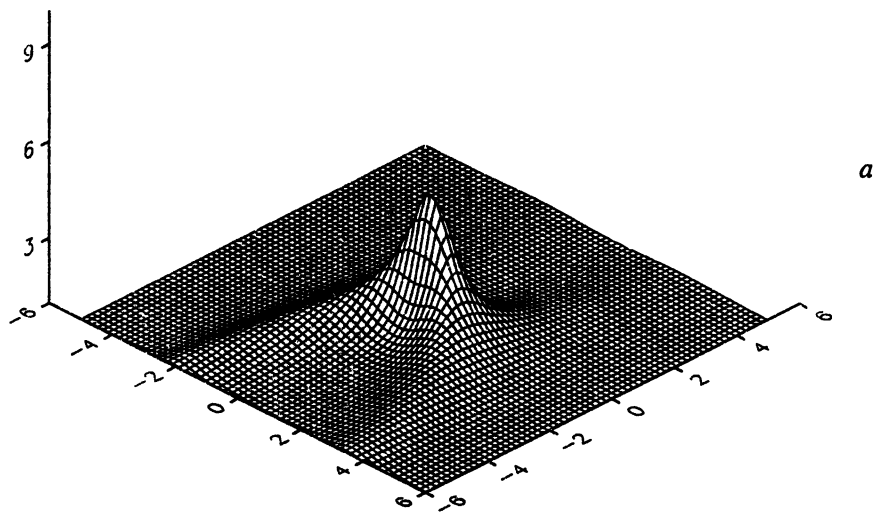


Рис. 3. Развитие коллапса: *a* и *б* соответствуют двум последовательным моментам времени

На поздних стадиях коллапса *нестационарное* решение имеет асимптотики спадаания поля на периферии вида $A \sim (x^2 + y^2)^{-2}$ и, таким образом, оказывается локально близким к *стационарным* солитонам, ранее построенным в [2]. В результате проясняется роль этих аксиально-симметричных солитонов: они, подобно аксиально-симметричным стационарным решениям Таунса для двумерного нелинейного уравнения Шредингера, *локально* описывают распределение поля коллапсирующих решений.

2.4. Волны завихренности в однородной ламинарной жидкости: что, где, когда

В данной главе мы подробно рассмотрим динамику возмущений сдвигового погранслоного течения у свободной поверхности, полагая течение либо ламинарным, либо допуская параметризацию турбулентности введением турбулентной вязкости, а поверхностные волны и стратификацию отсутствующими. Представляется целесообразным резюмировать достигнутое понимание динамики возмущений погранслоя в рамках такой модели и обсудить геофизические ситуации, где можно ожидать реализации описанных режимов в чистом виде.

Наиболее очевидный круг таких ситуаций возникает при внезапном возникновении ветра над покоящейся водной поверхностью или при стационарном ветре, дующем с берега. Известно, что при этом практически сразу возникает тонкий нестационарный/неоднородный *ламинарный* погранслой, в то время как поверхностные волны еще некоторое время очень слабы (их амплитуды на этой стадии не превышают десятков микрон), и их влиянием на процессы в погранслое можно заведомо пренебречь. Пренебрегая нестационарностью/неоднородностью погранслоя (когда такое приближение оправдано, мы обсудим чуть ниже) мы приходим в точности к модели, подробно рассмотренной выше. Полагая характерную скорость течения на поверхности величиной порядка 10 см/с, его вертикальный масштаб – 1 см, а вязкость молекулярной $\nu \approx 2 \cdot 10^{-2}$ см²/с, мы в силу условий (37) выделяем масштабы возмущений, динамику которых можно достаточно хорошо описывать в рамках развиваемого подхода:

$$0.04 \ll \frac{|u|}{V} \ll 0, 2;$$

$$5 \text{ см} \ll L \ll 25 \text{ см}.$$

Для этих масштабов наиболее вероятным сценарием эволюции является коллапс, что, по всей вероятности³, означает разрушение ламинарного потока и появление турбулентных пятен. Заметим, что это *единственный*, известный нам возможный механизм турбулизации приповерхностного сдвигового течения: в отличие от погранслоя на пластине, нестационарный погранслой со свободной поверхностью *устойчив* по отношению к малым возмущениям (см. [41]). Косвенным подтверждением именно такого сценария ламинарно-турбулентного перехода для неодородного стационарного погранслоя являются эксперименты [32], где было зафиксировано, что возмущения погранслоя разрушаются в результате сильной, существенно неоднородной неустойчивости и в следствие адвекции образуют сильно локализованные полосы.

В значительной мере открытым является вопрос о возможности других сценариев эволюции при существенно ином начальном скейлинге. Скажем, как будут эволюционировать возмущения существенно большего масштаба (т. е. $L \gg \epsilon^{-1}h$)? Столь же слабонелинейные, как и ранее рассмотренные, возмущения, по всей вероятности, будут разваливаться на возмущения меньшего масштаба (т. е. $L \gg \epsilon^{-1}$) и далее эволюционировать согласно (25). Более интенсивные, но все еще слабонелинейные в смысле $\epsilon \ll 1$ возмущения, для которых вязкая регуляризация в критическом слое не имеет места, по-видимому, описываются существенно более сложной, чем (25), системой, полученной в [19]. Ввиду принципиальной сложности анализа этой системы в настоящее время невозможно сколько-нибудь определенно судить об описываемых ею режимах динамики. Частные решения, полученные в [19] при сильных дополнительных предположениях, указывают на возможность неоднородного коллапса в ее рамках. Практически ничего нельзя сказать о сильнонелинейных режимах динамики погранслоя. В работе [36] путем прямого численного моделирования плоских уравнений Эйлера было прослежено развитие неустойчивости, возникновение вихревых структур и их взаимодействие со свободной поверхностью. Однако представляется, что эти результаты не имеют прямого отношения к рассматриваемой проблеме: во-первых, в качестве исходного в работе [36] выбран профиль сдвигового течения типа слоя смещения с точкой перегиба, подверженный сильной неустойчивости рэлеевского типа, во-вторых, как следует из приведенного слабонелинейного анализа, учет трехмерности качественно меняет динамику погранслоя.

Также пока открытым остается принципиально важный вопрос о

³Естественно, что, как и, скажем, в нелинейной оптике, эволюционное уравнение теряет свою применимость в непосредственной окрестности сингулярности.

существовании ударных волн завихренности. Формально можно стандартным образом выписать условия на разрыве и найти скорость его распространения, но остается невыясненным, может ли существовать ударная волна типа боры или же дисперсионные эффекты на разрыве по-прежнему останутся превалирующими. Заметим в этой связи, что единственные известные нам наблюдения в океане, которые с большой долей уверенности могут быть атрибутированы как волны завихренности ВКС, демонстрируют пространственную структуру, характерную для ударных волн [52]. Однако точечный и единичный характер наблюдений не позволяет сделать определенных заключений ни о существовании "ударных волн" завихренности, ни о распространенности волн завихренности ВКС в океане и характере их динамики. Следует также напомнить, что словосочетание "сильнонелинейные волны завихренности" внутренне противоречиво: динамику возмущений завихренности удастся описать как *волновую* только для слабонелинейных движений. Представляется, что трудности описания сильно-нелинейных возмущений на волновом языке имеют скорее принципиальный, чем технический характер.

Возвращаясь к вопросу описания слабонелинейных движений в тонких порождаемых ветром нестационарных/неоднородных ламинарных погранслоях, заметим, что могут также существовать режимы, где слабая нестационарность/неоднородность может быть учтена в рамках предлагаемого подхода. Например, для волн с характерной длиной $L = \text{Re}^{\frac{1}{2}} h$ можно получить модифицированное эволюционное уравнение, учитывающее эффекты неоднородности и диссипации. Действительно, для таких волн можно положить

$$\epsilon = \frac{h}{L} = \frac{L}{\lambda} = \text{Re}^{-\frac{1}{2}}.$$

При этом имеется два горизонтальных масштаба, а эволюционное уравнение принимает вид

$$A_\tau - rAA_x - sG[A_x] + (AU)_x = 0. \quad (44)$$

Легко видеть, что нелинейный коэффициент для профиля (39) постоянен глобально, тогда как дисперсионный - лишь локально, нарастая на медленном масштабе: $s \sim X^{\frac{2}{3}}$.

Обобщение предложенного подхода возможно и для волн завихренности на сдвиговом течении типа нестационарного ламинарного погранслоя. В этом случае профиль скорости определяется решением уравнения теплопроводности с граничным условием (38).

$$U(z, T) = u_* \text{Re}^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \left[e^{-\eta^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta \int_{\eta}^{\infty} e^{-u^2} du \right], \quad (45)$$

где $T = \nu/h^2 t'$. Эволюционное уравнение для волн завихренности на таком базовом течении снова имеет вид (25), однако, если нелинейный коэффициент постоянен, то дисперсионный изменяется на медленном масштабе как $s \sim T$. Смысл ограничения на длины волн (37) состоит теперь в том, что при $h/L \sim \text{Re}^{-\frac{1}{2}}$ временные масштабы эволюции волны и течения становятся сравнимы по величине, и базовое течение нельзя считать стационарным даже локально.

3. Волны завихренности в стратифицированном океане

Обратимся теперь к общему случаю стратифицированной по плотности жидкости, в которой имеется приповерхностное сдвиговое течение. Асимптотический анализ в данном случае вполне аналогичен рассмотренному выше, а результатом являются (12), (25). Однако граничная задача, определяющая ядро дисперсионного оператора, теперь имеет вид, отличный от (16), а именно

$$f_{zz} + \left(\frac{N^2}{k_x^2 c^2} - a1 \right) k^2 f = 0, \quad (46)$$

$$f|_{z=-H} = 0,$$

где $c = U|_{z=0}$ — ранее найденная фазовая скорость волны завихренности. Таким образом, дисперсия волны завихренности определяется профилем стратификации, тогда как коэффициенты нелинейного уравнения, как видно из уравнения (25), определяются скоростью течения и ее производной (фоновою завихренностью).

Заметим, что полученное уравнение (25) с дисперсией, определяемой (46), для волны завихренности в стратифицированной жидкости является результатом специфического скейлинга, а именно малости вертикального масштаба течения по сравнению с масштабом изменений плотности жидкости. Математически полученные результаты соот-

ответствуют пределу малого глобального числа Ричардсона:

$$Ri = \left(\frac{N_0 h}{V} \right)^2 \ll 1,$$

когда силы завихренности преобладают над силами плавучести. Противоположный предел, т. е. числа Ричардсона порядка единицы, многократно рассматривался различными авторами (см., например, [45]). Результирующее уравнение обычно имеет вид уравнения КдВ, в котором иногда присутствует член, соответствующий затуханию внутренней волны, вызванному взаимодействием с течением в критическом слое. Предел малых чисел Ричардсона обычно не рассматривается, поскольку считается, что стратифицированное сдвиговое течение в этом пределе неустойчиво. Подобный вывод объясняется ошибочным толкованием критерия Майлса [48] ($Ri > \frac{1}{4}$), который, на самом деле, является *достаточным*, а не необходимым условием устойчивости. При малых числах Ричардсона стратифицированное течение может быть как устойчивым, так и неустойчивым (см. пример в книге [8]), что делает правомерным рассмотрение динамики волны завихренности в стратифицированной жидкости.

Динамика волны завихренности в однородной и стратифицированной по плотности жидкости имеет принципиальные отличия. Легко видеть, что в случае равенства частоты Вэйсяля нулю решение граничной задачи (16) всегда отлично от нуля при $z = 0$, и ядро интегрального оператора, таким образом, представляет собой регулярную функцию волнового вектора. В стратифицированной жидкости рассматриваемая граничная задача формально совпадает с задачей на собственные значения для мод внутренних волн в покоящейся жидкости [13]. Если для какого-либо значения волнового вектора скорость волны завихренности $c(\mathbf{k})$ совпадает со скоростью течения на поверхности, т. е. со скоростью волны завихренности, решение (46) обращается в нуль на поверхности, а ядро интегрального оператора обращается в бесконечность в данной точке фурье-пространства. На самом деле подобные точки образуют в фурье-пространстве целые кривые (рис. 4), поскольку дисперсионные свойства волн завихренности имеют существенно анизотропный характер.

Возникающие сингулярности в ядре интегрального оператора объясняются резонансом некоторых гармоник, составляющих волновой пакет, с волнами другого типа, в данном случае внутренними, существование которых не связано с присутствием сдвигового течения. При этом фазовые скорости волн завихренности и внутренних волн на резонанс-

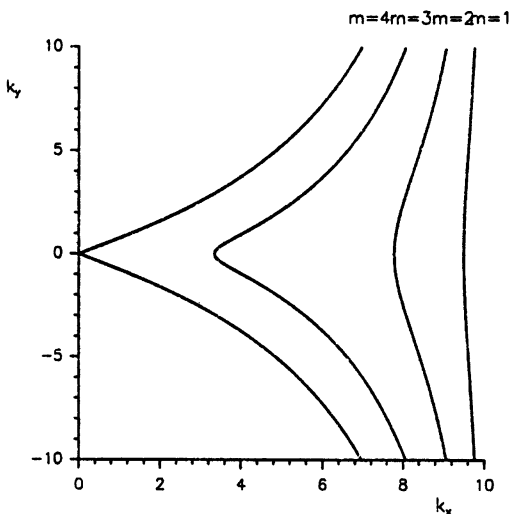


Рис. 4. Резонансные кривые для волн завихренности в экспоненциально стратифицированной жидкости

ных кривых совпадают: Фазовый резонанс приводит к интенсивному линейному взаимодействию волновых гармоник и создает сингулярности в ядре дисперсионного оператора G .

Результат резонансного взаимодействия, а также математические методы его рассмотрения целиком определяются начальными условиями задачи. Предположим вначале, что амплитуды резонансных внутренних волн пренебрежимо малы по сравнению с амплитудой волн завихренности, т. е. будем изучать их свободную динамику в стратифицированной жидкости. Поскольку ядро дисперсионного оператора обращается в нуль на резонансных кривых, эволюционное уравнение содержит несобственный интеграл, способ вычисления которого не может быть определен без привлечения дополнительных предположений о природе физических процессов, происходящих при распространении волн завихренности в стратифицированной жидкости. Подобная проблема впервые была обнаружена в физике плазмы при изучении резонансного взаимодействия электромагнитной волны с заряженными частицами, а способ ее решения был предложен Ландау [10]. Необходимо предположить, что волновой вектор представляет собой комплексную величину, вычислить интеграл, а затем найти предел полученного выражения при $\text{Im } k \rightarrow 0$. Результат зависит от способа обхода особенности в комплексной плоскости (пути интегрирования), который опре-

делается принципом причинности.

Применение подобной техники показывает, что наряду с действительным главным значением интеграла, определяющим дисперсию волны, имеется мнимая добавка, соответствующая радиационному затуханию/нарастанию волны [53]. Угол излучения θ для каждой из резонансных гармоник $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}$ определяется условием

$$\left| \frac{y}{x} \right| = \tan \theta = \frac{|c_{gy}|}{U - c_{gx}} \Big|_{k_x = \hat{k}_x}, \quad (47)$$

где c_g – групповая скорость резонансной внутренней волны. Уравнение (47) имеет простой физический смысл: возбуждаемая внутренняя волна движется прочь от источника с групповой скоростью⁴. Поскольку фазовая скорость внутренних волн, равная скорости источника в данном случае, всегда превышает групповую, знаменатель в (47) всегда положителен, т. е. волна завихренности является в некотором смысле "сверхзвуковой" по отношению к внутренней. Следовательно, излучаемое волновое поле движется медленнее своего источника, заполняя конус конечного углового размера позади него.

Оценка показывает, что дисперсионные и диссипационные эффекты для волн завихренности в стратифицированной жидкости имеют один и тот же порядок величины. Следовательно, образование долгоживущих неоднородных структур типа уединенных волн, существующих в однородной жидкости, в данном случае невозможно, поскольку, как правило, радиационное затухание волны происходит на том же временном масштабе, что и ее нелинейная эволюция. Однако не исключено, что при определенных условиях возможно существование квазистабильных состояний, затухание которых слабо и может быть описано в рамках адиабатической теории. Подобный режим эволюции в рамках обобщенного уравнения Бенжамина – Оно со слабой диссипацией был рассмотрен в работе [20] при изучении солитонов внутренней волны в слабостратифицированной атмосфере.

Механизм затухания Ландау, как известно, может приводить как к затуханию, так и нарастанию волны в зависимости от начальных условий. В присутствии фона резонансных внутренних волн ниже по течению бегущая волна завихренности догоняет их, поглощает энергию, а амплитуда ее, соответственно, нарастает. Это явление естественным образом приводит к постановке прямо противоположного вопроса: каково влияние сдвигового течения на внутренние волны?

⁴С учетом доплеровского сдвига.

Для сравнительно коротких внутренних волн малой амплитуды ответ на этот вопрос был дан в близких по духу работах [18, 6]. В рамках линейной теории установившийся процесс описывается стандартной задачей на собственные значения, состоящей из уравнения Тэйлора – Гольдштейна и условий "твердой крышки" на поверхности и на дне [13], решение которой ищется в виде ряда по степеням $\epsilon = kh$. Влияние слабозаглубленного течения ($kh \ll 1$) на дисперсионные характеристики асимптотически слабо, поэтому в главном порядке набор собственных значений включает n невозмущенных мод внутренних волн плюс дополнительное с.з. $\omega = \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}$, соответствующее волне завихренности. Дисперсионные поправки, вызванные течением, возникают лишь в порядке $O(\epsilon)$, однако изменения компонент скорости в приповерхностном слое, особенно продольной, значительно сильнее (порядка $O(1)$). В частности, отношение амплитуд горизонтальной скорости на поверхности при наличии и в отсутствие течения определяется фактором

$$P = \frac{\omega_{in}}{\omega_{in} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}}, \quad (48)$$

где ω_{in} – собственная частота внутренней волны.

В условиях фазового резонанса $\omega_{in} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$ дисперсионное соотношение имеет корень кратности два в главном порядке, т. е. дисперсионные поверхности волны завихренности и внутренней волны пересекаются. Хорошо известно, однако, что в реальности происходит не пересечение, а переаппроксимация дисперсионных поверхностей ("change of identities"), которое может быть устойчивым, либо неустойчивым в зависимости от соотношения знаков энергий взаимодействующих мод, расщепление дисперсионных кривых в порядке $O(\sqrt{\epsilon})$ и соответствующее усиление дисперсии в окрестности резонанса [35, 29]. При этом горизонтальная скорость в приповерхностном слое возрастает по порядку величины ($P \sim \epsilon^{-\frac{1}{2}}$) и может значительно превосходить амплитуду исходной внутренней волны в толще жидкости. В то же время период и фазовая скорость волны завихренности совпадают с аналогичными характеристиками внутренней, т. е. измерения *этих* характеристик, проведенные на поверхности, с хорошей точностью отражают свойства исходной внутренней волны.

Подобный механизм может приводить к существенному усилению поверхностных проявлений внутренней волны в виде пространственно неоднородного поля горизонтальной скорости, которое, в свою очередь, приводит к образованию контрастов в поле непосредственно наблюдаемых свойств морской поверхности, таких как альbedo, цвет, вероят-

ность обрушения ветровых волн, температура, плотность скоплений водорослей или тающего льда, свойства рассеяния электромагнитных волн в различных диапазонах спектра и т. п. Кроме того, воздействие сдвигового течения приводит к выделению из стохастического поля внутренних волн резонансных гармоник, обратная длина волны которых определяется в рамках предложенной модели заданными значениями частоты Брента – Вайсяля и скорости течения на поверхности соотношением $k_* = N/U_0$.

Несмотря на достигнутый прогресс в понимании воздействия приповерхностного течения на моды внутренней волны, ряд вопросов все еще остается открытым. В условиях резонанса фазовая скорость как внутренней волны, так и волны завихренности совпадает со скоростью сдвигового течения при $z = 0$, т. е. обе волны имеют общий критический слой. Как известно, изучение динамики волн в окрестности критического слоя требует, в общем, учета как вязких, так и нелинейных эффектов, кроме того, влияние ненулевой кривизны профиля скорости может быть существенным. Результаты работы [18] показывают, что обмен энергией волн с течением может приводить к неустойчивости майлсовского типа, инкремент которой, однако, асимптотически мал, как и влияние на поверхностные проявления внутренней волны. Сильным могло бы быть влияние другой неустойчивости, возникающей вследствие неустойчивого перезамыкания дисперсионных поверхностей волн с различной по знаку энергией [29]. Однако поиск профилей стратификации, допускающих существование внутренней волны с энергией, отличной от энергии волны завихренности, до сих пор не дал результата, так что вопрос о их существовании остается открытым.

3.1. Резонанс внутренней волны с течением на мелкой воде

Ясно, что линейная теория теряет применимость уже при достижении горизонтальной скоростью частиц в волне величины порядка $O(\sqrt{\epsilon})$. При этом имеет смысл говорить скорее о "взаимодействии" волны с течением, в отличие от "воздействия" течения как пассивного фактора. Концепция волн завихренности позволяет описывать процесс взаимодействия в рамках волнового формализма, что существенно упрощает задачу. Однако, если линейная теория позволяет рассматривать динамику внутренней волны с длиной как сравнимой, так и много большей общей глубины океана, с точки зрения нелинейной теории, эти два случая принципиально различны. Короткие внутренние волны в

океане обычно представляют собой квазимонохроматические волновые пакеты с узким спектром, тогда как пространственный размер пакетов волн завихренности обычно совпадает по порядку величины с длиной несущей, т. е. мы имеем дело с пакетами с широким фурье-спектром. Математическое описание нелинейного взаимодействия волновых пакетов различного типа (с узким и широким спектром) представляет собой весьма сложную задачу, пути решения которой до сих пор не ясны. Кроме того, как легко понять из рис. 4, волна завихренности находится в резонансе не с одной модой внутренней волны, а сразу с бесконечным набором. При этом энергия, передаваемая волне завихренности исходной внутренней волной в процессе взаимодействия, в ходе такого же процесса будет переходить в другие резонансные моды, что крайне затрудняет построение приемлемой математической модели явления. Однако проблема существенно упрощается, если длина внутренней волны велика не только по сравнению с заглубленностью течения, но и с общей глубиной океана. Внутренняя волна при этом также имеет широкий фурье-спектр, кроме того, структура резонансных кривых в фурье-пространстве существенно упрощается (см. подробности в работе [53]).

С другой стороны, растущее число натуральных наблюдений, повышение их качества и особенно новые возможности компьютерной обработки данных создают потребность в новых теоретических моделях, объясняющих особенности динамики внутренней волны в прибрежной зоне. В настоящее время основные ее черты вполне установлены экспериментально: преобладают моды, длинные по сравнению с глубиной жидкости, распространяющиеся по направлению к берегу, поведение их имеет существенно нелинейные черты с доминированием структур типа уединенных волн, а зачастую и с образованием бор [51, 21]. В то же время влияние течений описывается в лучшем случае в рамках стандартного подхода, ведущего к уравнениям КдВ или КП с коэффициентами, зависящими от характеристик течения [45]. Однако подобная техника не применима в случае резонанса, т. е. совпадения фазовой скорости волны со скоростью течения на поверхности, хотя именно подобная ситуация представляет особый интерес.

Теория резонанса квазиплоских внутренних волн со слабозаглубленным приповерхностным течением, основанная на представлении о волнах завихренности, была предложена в работе [54]. Приведем здесь основные результаты, ограничившись рассмотрением ситуаций, когда полевые переменные не зависят от поперечной горизонтальной координаты. Процедура обезразмеривания (4) модифицируем, положив

$$z' = H z; \quad w' = \mu V w,$$

где $\mu = H/L$ – дисперсионный параметр. Предварительный анализ показывает, что резонансные и дисперсионные эффекты имеют один порядок величины, если имеет место следующий баланс малых параметров:

$$h/H = \epsilon = \mu^4.$$

Решение уравнений движения в виде асимптотического разложения по полувещным степеням ϵ показывает, что амплитуда возмущений на глубине и в движущемся приповерхностном слое различна. В то время как в толще все компоненты возмущения скорости имеют один и тот же порядок величины: $u, w \sim \epsilon$, в погранслое, образованном течением, вертикальная существенно ослаблена: $w \sim \epsilon^{\frac{3}{2}}$, а продольная, наоборот, усилена: $u \sim \epsilon^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, возмущение в толще жидкости представляет собой преимущественно внутреннюю волну, а в погранслое – волну завихренности, амплитуды которых a и b связаны системой уравнений, принимающей после некоторого масштабного преобразования вид

$$\begin{aligned} a_t + \Delta a_x + a_{xxx} - b_x &= 0, \\ b_t + 2bb_x - a_x &= 0, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\Delta = (c_{in} - c_v) / \sqrt{\epsilon}$ – параметр фазовой расстройки, описывающий неточность резонанса в первом порядке малости. Заметим, что собственная нелинейность внутренней волны в рамках (49) отсутствует, а нелинейный характер ее эволюции полностью определяется нелинейной динамикой волны завихренности, опосредованно входящей в первое уравнение.

Можно показать, что для локализованных возмущений система (49) имеет по меньшей мере два нетривиальных интеграла движения:

$$\begin{aligned} P[a, b] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (a^2 + b^2) dx, \\ H[a, b] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a_x^2 - \Delta a^2 + 2ab - \frac{2}{3} b^3 \right) dx, \end{aligned} \tag{50}$$

имеющих смысл соответственно импульса и энергии некоторого абстрактного волнового поля (не совпадающего с физическим полем возмущения [54]). Хорошо известно, что для полной интегрируемости системы нелинейных уравнений, т. е. возможности аналитически определить характер эволюции начального возмущения произвольной формы, необходимо, в принципе, наличие бесконечного числа интегралов движения [1]. В нашем случае число их конечно, и система не является полностью интегрируемой, однако позволяет найти в аналитическом виде некоторые частные решения. Наиболее важными из них являются решения в виде стационарных уединенных волн, которые, как известно, часто являются асимптотическим пределом эволюции на больших временах для широкого класса начальных возмущений [7].

Интегрируя систему (49), получаем уравнения для амплитуды стационарной волны

$$\begin{aligned}
 a_s &= b_s^2 - v b_s, \\
 \left(\frac{db_s}{dx}\right)^2 - \frac{b_s^2}{(v - 2b_s)^2} \times \\
 \times \left[(v - \Delta) b_s^2 + 2 \left(\frac{2}{3} - v(v - \Delta) \right) b_s + v(v(v - \Delta) - 1) \right] &= 0,
 \end{aligned} \tag{51}$$

где v – скорость волны. Уравнение (51) может рассматриваться как интеграл энергии для частицы, движущейся внутри потенциальной ямы, задаваемой вторым слагаемым в левой части. Потенциал полностью определяет фазовую плоскость (b_s, b'_s) , причем локализованным решениям соответствуют замкнутые сепаратрисные траектории, начинающиеся и заканчивающиеся в седловых точках [3, 17].

Очевидно, что начало координат всегда представляет собой состояние равновесия, которое, однако, может быть как седлом, так и центром в зависимости от величины скорости волны. Кроме того, для существования замкнутой сепаратрисы требуется наличие точки поворота, где потенциал меняет знак. Поэтому уединенные волны могут существовать лишь в определенных областях пространства параметров (v, Δ) . При фиксированной величине фазовой расстройке существует два интервала скоростей, соответствующих волнам двух типов: "быстрым" и "медленным". Границы интервалов задаются соотношениями

$$\begin{aligned}
 v \in (c_+; v_+) - & \quad \text{"быстрые"}, \\
 v \in (c_-; \min 0, \Delta) - & \quad \text{"медленные"},
 \end{aligned} \tag{52}$$

где

$$c_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\Delta \pm (4 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}} \right], \quad v_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\Delta + \left(\frac{16}{3} + \Delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Интересно, что интервалы (52) в точности совпадают с запрещенными зонами в спектре гармонических решений (49) бесконечно малой амплитуды, поэтому нелинейные волны не испытывают радиационного затухания, вызванного резонансом с линейными гармониками.

Зависимость амплитуды уединенной волны от координаты может быть найдена в неявной форме интегрированием (51), причем она различна для "быстрых" и "медленных" волн:

$$\begin{aligned} \exp[-\kappa|x|] &= \left[\frac{\sqrt{b_-(b_+ - b_*)} - \sqrt{b_+(b_- - b_*)}}{\sqrt{b_-(b_+ - b_*)} + \sqrt{b_+(b_- - b_*)}} \right] \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{b_+ - b_*} + \sqrt{b_- - b_*}}{\sqrt{b_+ - b_*} - \sqrt{b_- - b_*}} \right]^{2\nu}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \exp[\kappa|x|] &= \left[\frac{\sqrt{b_-(b_* - b_+)} - \sqrt{b_+(b_* - b_-)}}{\sqrt{b_-(b_* - b_+)} + \sqrt{b_+(b_* - b_-)}} \right] \times \\ &\times \exp \left[-4\nu \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b_- - b_*}{b_* - b_+}} \right) \right], \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\kappa = \left(\frac{v(v - \Delta) - 1}{v} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = \left(\frac{v(v - \Delta) - 1}{v|v - \Delta|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

b_{\pm} — ненулевые корни нелинейного потенциала

$$b_{\pm} = \frac{3v(v - \Delta) - 2 \pm [4 - 3v(v - \Delta)]^{\frac{1}{2}}}{3(v - \Delta)}.$$

Как видно, амплитуда "быстрой" уединенной волны $b_{max} = b_-$ всегда меньше $v/2$, т. е. сингулярность потенциала не препятствует образованию замкнутой сепаратрисы. Само наличие этой сингулярности является результатом образования нелинейного критического слоя, а ограничение на амплитуду объясняется невозможностью превышения скоростью частиц скорости уединенной волны. Амплитуда волны растет с увеличением скорости, при этом особенно интересно предельное поведение формы волны при стремлении v к границам разрешенного

интервала. В пределе $v \rightarrow c_+$ амплитуда волны падает, а ее форма становится асимптотически близкой к солитону уравнения КдВ, сильно вытянутому в продольном направлении:

$$b_s \approx b_- \cosh^{-2} \left[\frac{1}{2} \kappa x \right], \quad (55)$$

поскольку κ стремится к нулю в этом пределе. Данный предел соответствует волне завихренности и внутренней волне малой амплитуды, взаимодействие которых преимущественно линейно, что приводит к расщеплению дисперсионных кривых. Результатом являются несвязанные уравнения КдВ для каждой из волн. Солитон (55) есть решение одного из этих уравнений.

В противоположном пределе $v \rightarrow v_+$ решение стремится к волне предельной амплитуды $b_* = v_+/2$ с особенностью типа скачка производной на гребне. Форма волны предельной амплитуды может быть найдена непосредственно из (53) путем предельного перехода

$$b_s = b_* \exp[-\kappa_* |x|], \quad (56)$$

где $\kappa_* = 1/(3v_+)^{\frac{1}{2}}$. Заметим, что особенность формируется лишь в профиле волны завихренности, тогда как профиль внутренней волны остается гладким. Профили уединенных волн для различных значений скорости, включая волну с особенностью на гребне, приведены на рис. 5. Уединенные волны с особенностью типа скачка производной на гребне, часто называемые *peaked solitons*, представляют собой типичное явление для сильнонелинейных задач и весьма редкое для слабонелинейных. Впервые решения подобного типа были построены аналитически в работе [38] при моделировании обрушения волн.

Как уже подчеркивалось ранее, особое значение уединенных волн состоит в том, что эти образования являются долгоживущими, и поэтому обычно следует ожидать распада произвольного начального возмущения, локализованного в пространстве, на последовательность таких волн в процессе эволюции. Однако в рамках системы (49) лишь волны с амплитудой, меньшей некоторого порога, устойчивы по отношению к малым возмущениям [54], поэтому результат эволюции начального возмущения качественно зависит от его начальной амплитуды. Для иллюстрации этого факта на рис. 6 и 7 представлены результаты численного моделирования временной динамики локализованного возмущения при $\Delta = 0$. Если импульс с амплитудой, меньшей пороговой, действительно распадается на последовательность уединенных волн, то

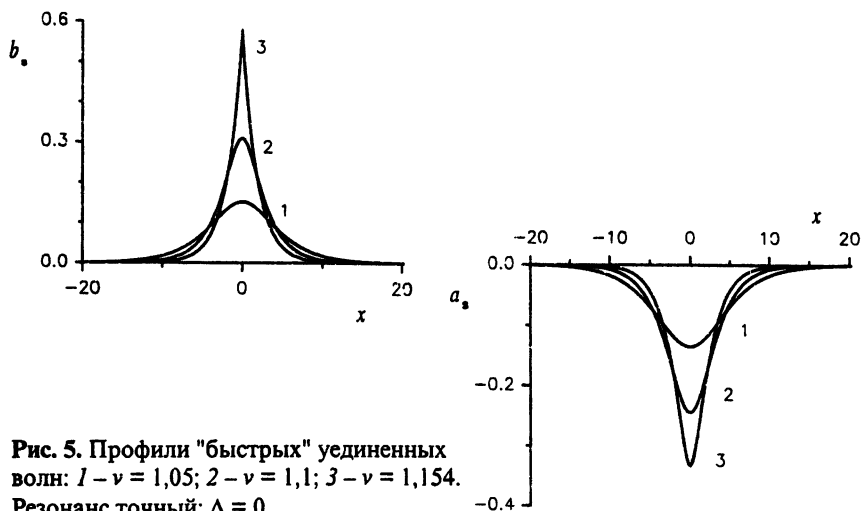


Рис. 5. Профили "быстрых" уединенных волн: 1 - $\nu = 1,05$; 2 - $\nu = 1,1$; 3 - $\nu = 1,154$. Резонанс точный: $\Delta = 0$

в профиле "надкритического" возмущения за конечное время возникает сингулярность типа вертикального переднего фронта. Возникающая сингулярность означает, что результатом эволюции "надкритического" возмущения является обрушение. Однако, поскольку предложенная модель теряет свою адекватность при возникновении сингулярности в профиле волны, невозможно предсказать, образуется ли в результате структура с захлестыванием или турбулентная бора.

Построенная модель может быть легко обобщена на случай квазидвумерных возмущений (в парааксиальном приближении, однако, результирующая система связанных уравнений простой волны и КП уже не имеет запрещенных зон в спектре линейных волн [54]). Поэтому любое локализованное 2D-возмущение будет испытывать радиационное затухание, попадая в резонанс с линейными волнами. Тем не менее возможно существование плоских уединенных волн, распространяющихся под углом к направлению скорости течения, и более сложных структур типа резонансных триад уединенных волн, формирующих так называемые стебли Маха [49].

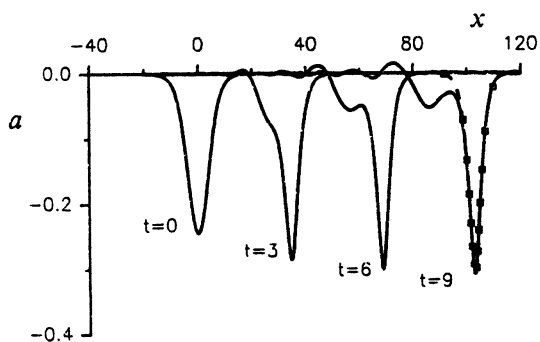


Рис. 6. Нелинейная эволюция начального импульса "докритической" амплитуды

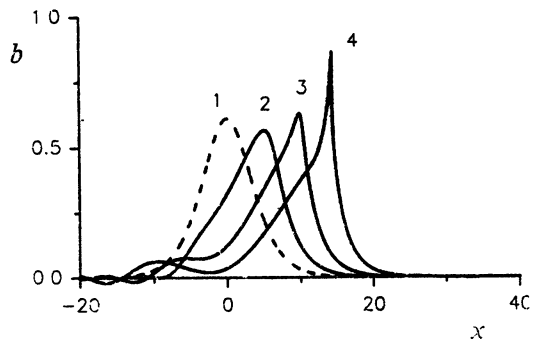
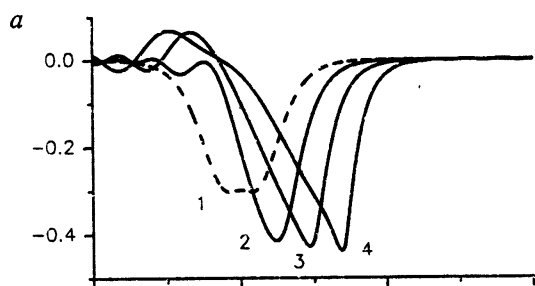
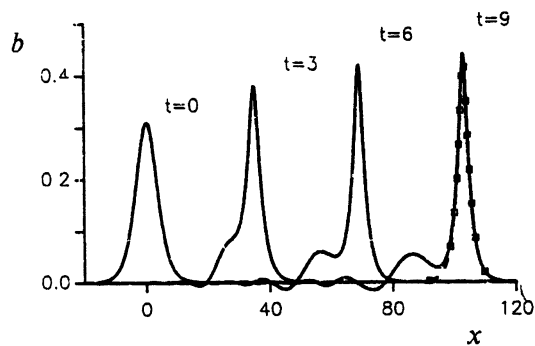


Рис. 7. Нелинейная эволюция начального импульса "надкритической" амплитуды

Учет эффекта резонансного взаимодействия существенным образом меняет сложившиеся представления о динамике внутренних волн в прибрежной зоне. Прежде всего отметим, нетривиальные нелинейные эффекты возникают уже при амплитудах волн в глубине порядка $\epsilon = \mu^4$, значительно меньших, чем в стандартном скейлинге, приводящем к уравнению КдВ ($\epsilon = \mu^2$). Благодаря этому, даже высшие моды внутренних волн, обычно очень слабо выраженные, могут эффективно проявляться на морской поверхности. Естественно, что при этом нелинейные эффекты определяются прежде всего взаимодействием волны с течением, а не собственной нелинейностью внутренней волны. Отметим также обнаруженные уединенные волны, существенно отличные от классических солитонов КдВ и мКдВ, которые могут быть весьма полезными при интерпретации данных натуральных наблюдений.

Анализ, проведенный в работе [54], был основан на наиболее простой модели, в рамках которой глубина океана предполагалась постоянной. В реальности, однако, прибрежная зона характеризуется как раз изменениями глубины, поэтому учет данного эффекта представляется важным. Можно показать, что в случае достаточно плавных изменений единственным дополнительным эффектом в рамках построенной модели является переменность величины фазовой расстройки Δ . При этом должен возникать ряд интересных и нетривиальных эффектов, заслуживающих рассмотрения в дальнейшем. Например, устойчивая уединенная волна, двигаясь в жидкости переменной глубины, может со временем попасть в зону неустойчивости из-за локального изменения Δ и соответственно v_+ , а затем и обрушиться. Описание этих процессов и выяснение их роли в перемешивании верхнего слоя и для дистанционной диагностики представляется весьма интересным и заслуживающим дальнейшего изучения.

4. Волны завихренности, поверхностные волны, циркуляция Ленгмюра и мелкомасштабная турбулентность

В заключение кратко обсудим наименее исследованный круг вопросов, связанный с их взаимодействиями с другими типами движений приповерхностного слоя океана, такими как поверхностные волны, циркуляция Ленгмюра и мелкомасштабная турбулентность. Следуя Лейбу-

вичу [43], воспользуемся тем фактом, что рассматриваемые движения имеют существенно различные временные масштабы. Для определенности обозначим $2\pi\sigma^{-1}$ ($\sigma = g\kappa$) типичный период энергонесущих ветровых волн (κ – их характерное волновое число), T_s – некий медленный масштаб, связанный с изменчивостью течения, а T_t – масштаб мелко-масштабных турбулентных флуктуаций:

$$T_t \ll 2\pi\sigma^{-1} \ll T_s.$$

Выберем характерный масштаб орбитальной скорости частиц $\varepsilon_w \sigma \kappa^{-1}$ в качестве единичного, где ε_w – параметр нелинейности поверхностных волн, а в качестве масштаба времени возьмем σ^{-1} . Соответственно, полный вектор скорости может быть представлен в виде

$$q = \varepsilon_w \sigma \kappa^{-1} [\mathbf{u}_w(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_s, \tau, t_f)],$$

где

$$\mathbf{u}_w(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t)$$

есть потенциальная составляющая движения, обусловленная поверхностным волнением. Разнесенность медленных и быстрых временных масштабов формализуется следующим образом:

$$\tau_s = \varepsilon_c t, \quad \tau_f = \varepsilon_t^{-1} t,$$

где

$$\varepsilon_c = \sigma^{-1} T_c^{-1}, \quad \varepsilon_t = \sigma^{-1} T_t.$$

Вводя два типа осреднения по быстрому $\tau_f = \varepsilon_t^{-1} t$ и волновому масштабам, обозначая их соответственно как \bar{f} и $\langle f \rangle$, рассмотрим их последовательное применение к уравнению для завихренности $\omega = \text{rot} v$, обезразмеренной на $\varepsilon_w \delta \sigma$. Явно учитывая многомасштабность и малые параметры, запишем уравнение вихря следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \omega_{\tau_s} + \omega_{\tau} + \varepsilon_t^{-1} \omega_{\tau_f} = \\ = \varepsilon_w \nabla \times [(\mathbf{u}_w + \delta \mathbf{v}) \times \omega] + (\kappa^2 \nu / \sigma) \nabla^2 \omega. \end{aligned}$$

Осреднение по мелко-масштабным флуктуациям приводит к тому же уравнению для осредненной завихренности $\bar{\omega}$ со стандартным членом рейнольдсовых напряжений в правой части

$$\varepsilon_w \delta \nabla \times \mathbf{v} \bar{\times} \omega,$$

который традиционно параметризуется путем введения *постоянной* вихревой вязкости $Re_t^{-1} \nabla^2 \bar{\omega}$. Принципиальный момент, который хотелось бы подчеркнуть, состоит в следующем: хотя в настоящий момент мы не предлагаем конструктивной альтернативы этому простейшему замыканию, есть основания полагать, что учет зависимости рейнольдсовых напряжений от рассматриваемых более медленных движений был бы во многих ситуациях более адекватным. Для нескольких следующих шагов нашего рассмотрения можно полагать Re_t зависящей от $\langle \omega \rangle$. Далее, полагая $\epsilon_s, Re_t^{-1} \sim o(\epsilon_w)$, можно искать решение уравнения вихря, осредненного по турбулентным (но не по волновым) пульсациям

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\tau_s} + \bar{\omega}_\tau = \\ = \epsilon_w \nabla \times [(\mathbf{u}_w + \delta \mathbf{v}) \times \bar{\omega}] + Re_t^{-1} \nabla^2 \bar{\omega} \end{aligned}$$

в виде ряда по ϵ_w :

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \epsilon_w \omega_1 + o(\epsilon_w),$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \epsilon_w \mathbf{v}_1 + o(\epsilon_w).$$

Легко видеть, что ω_0 не зависит от волнового масштаба τ и, соответственно, есть $\langle \omega \rangle$, а следовательно

$$\omega_1 = \nabla \times \left[\int^T \mathbf{u}_w d\tau \times \omega_0 \right].$$

Осреднение по волновому масштабу дает уравнение для медленной эволюции завихренности

$$\begin{aligned} \epsilon_s \omega_{\tau_s} = \epsilon_w^2 \nabla \times \langle \mathbf{u}_w \times \omega_1 \rangle + \epsilon_w \delta \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \omega_0) + \\ + Re_t^{-1} \nabla^2 \omega_0 + O(\epsilon_w^3, \epsilon_w^2 \delta, \epsilon_w Re_t^{-1}). \end{aligned}$$

Весь вышеприведенный анализ имел целью показать, каким образом осредненное поле поверхностных волн влияет на медленную динамику приповерхностных сдвиговых течений. Первый член в правой части может быть представлен в виде ([34])

$$\nabla \times \langle \mathbf{u}_w \times \omega_1 \rangle = \omega_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_s - (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \omega_0,$$

где

$$\mathbf{v}_s \equiv \left(\int^T \mathbf{u}_w d\tau \right) \cdot \nabla \mathbf{u}_w$$

идентифицируется как Стоксов дрейф, а соответствующий член в осредненных уравнениях движения часто называется вихревой силой Крэйка – Лейбовича. Стоксов дрейф поворачивает и вытягивает вихревые линии и тем самым генерирует продольную завихренность. Этот эффект есть главный механизм генерации циркуляции Ленгмюра, которая происходит на характерных временах $O(\epsilon_w^{-2})$ и подробно исследована в целом ряде аналитических и численных работ, суммированных в обзоре [44]. Основные предположения существующей теории: полная продольная однородность поля, т. е. $\partial_x \equiv 0$, и отсутствие обратного влияния динамики течения на ветровое волнение. Заметим, что первое из этих ключевых предположений отфильтровывает волны завихренности.

Прежде чем мы вернемся к центральным в нашем контексте вопросам о том, в какой мере и где применимы обсуждавшиеся ранее результаты для волн завихренности, полученные в рамках модели, не учитывающей влияние поверхностных волн, и какова связь волны завихренности с циркуляцией Ленгмюра и поверхностным волнением, полезно попытаться сначала сопоставить пространственно-временные масштабы движений. Напомним, что масштабы ветровых волн приняты в качестве единичных. Соответственно циркуляции Ленгмюра имеют "бесконечный" продольный и $O(1)$ поперечный пространственные масштабы, и временной масштаб установления $O(\epsilon_w^{-2})$. Естественно ожидать, что поскольку вертикальный масштаб течения $h > \kappa^{-1}$, то в силу малости h/L , предписываемой в частности (37), волны завихренности имеют соизмеримые продольный и поперечный масштабы много больше единичного и временной масштаб, также сильно превосходящий $O(\epsilon_w^{-2})$. Такая разнесённость масштабов позволяет в перспективе надеяться на разрешимость наших центральных вопросов методом многомасштабных разложений в рамках "полных" динамических уравнений с "вихревой силой" и слабой продольной изменчивостью. Пока решение этой проблемы весьма далеко от реализации. Тем не менее, на основе уже имеющегося понимания волн завихренности и циркуляции Ленгмюра, как двух различных асимптотик осредненных уравнений движения, можно попытаться сформулировать некоторые гипотезы спекулятивного характера, которые впоследствии могут быть подтверждены или скорректированы. В частности, представляется возможным, что в ситуациях, когда $h \gg \kappa^{-1}$, циркуляция Ленгмюра может регуляризовывать сингулярности критического слоя для волн завихренности, образуя "четвертый слой" в асимптотическом разложении и тем самым снимая проблему описания нелинейных волн завихренности при очень больших числах Рейнольдса. При сравнительно малых числах Рейнольдса пред-

ставляется также вероятным режим, когда поперечная неустойчивость, приводящая к циркуляции Ленгмюра, полностью подавлена вязкостью, в то время как слабые вертикально локализованные волны завихренности могут ее практически не чувствовать. В ситуации же общего положения с развитой циркуляцией Ленгмюра волны завихренности скорее всего будут проявляться в деформации, модуляции и, возможно, поперечном дрейфе полос.

Проблема взаимодействия волн завихренности с поверхностными волнами не исчерпывается описанием роли последних в создании "вихревой силы" для низкочастотных движений. Совершенно не исследован аспект обратного влияния низкочастотных движений, и в частности волн завихренности на поверхностное волнение. Очевидно, что для коротких ветровых волн, имеющих групповые скорости близкие к скорости волны завихренности, следует ожидать сильных эффектов в силу тех же механизмов, что и в случае внутренних гравитационных волн (см. [4]). Их детальное исследование станет актуальным при появлении экспериментальных данных о волнах завихренности в океане. Однако более принципиальный вопрос о возможной роли волн завихренности в динамике энергонесущих ветровых волн, и в частности в формировании их углового спектра, остается пока открытым.

Взаимодействие волн завихренности с развитой мелкомасштабной турбулентностью, хотя и не исследовалось, представляется понятным, по крайней мере в принципе. Волна при прохождении модулирует интенсивность турбулентности, причем в силу ограничений (37) на нелинейность волны, не очень значительно. В этой ситуации обратным влиянием турбулентности можно пренебречь. Существенно нетривиального взаимодействия можно ожидать только для сильнонелинейных волн, для описания которых пока нет теоретических моделей, и само их существование остается под вопросом.

В заключение заметим, что поднятые нами открытые вопросы, несмотря на всю их серьезность, не представляются безнадежными. Надеемся, что данная попытка их систематизации будет способствовать их разрешению.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-05-65070).

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

2. *Абрамян Л. А., Степаняц Ю. А., Шрира В. И.* Неодномерные солитоны в сдвиговых течениях типа пограничного слоя // Доклады РАН. 1992. Т. 327. С. 460–466.
3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
4. Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность / Под. ред. Е. Н. Пелиновского. Горький: ИПФ РАН, 1982. 251 с.
5. *Воронович В. В., Пелиновский Д. Е., Степаняц Ю. А., Шрира В. И.* Двумерные эволюционные уравнения для описания нелинейных волн в стратифицированных сдвиговых потоках. Препринт N 343 ИПФ РАН. Н. Новгород, 1994.
6. *Воронович В. В., Шрира В. И.* Об усилении поверхностных проявлений внутренних волн приповерхностным сдвиговым течением. // Океанология. 1996. Т. 36. С. 173–178.
7. *Захаров В. Е., Мананов С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
8. *Дикий Л. А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
9. *Дьяченко А. И., Кузнецов Е. А.* Instability and self-focusing of solitons in the boundary layer // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 103–108.
10. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 10. Гл. 3. М.: Наука, 1977.
11. *ЛеБлон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981.
12. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Иностранная литература, 1958.
13. *Миропольский Ю. Э.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
14. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
15. Океанология. Физика океана / Под. ред. В. М. Каменковича и А. С. Моница. М.: Наука, 1978.

16. *Пелиновский Д. Е., Степанянц Ю. А.* Самофокусировочная неустойчивость плоских нелинейных волн в сдвиговых потоках. // ЖЭТФ. Т. 105. С. 1635–1652.
17. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
18. *Реутов В. П.* О неустойчивости внутренних волн в стратифицированной жидкости с приповерхностным сдвиговым течением // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. Т. 26. С. 871–877.
19. *Реутов В. П.* Асимптотическая модель генерации трехмерных вихревых структур в пограничном слое // Прикл. мат. и тех. физ. 1995. Т. 36. С. 56–67.
20. *Романова Н. Н.* Обобщение уравнения Бенжамена–Оно для слабо-стратифицированной атмосферы // Изв. АН СССР. ФАО. 1981. Т. 17. С. 131–137.
21. *Серебряный А. Н.* Проявление солитонных свойств внутренних волн на шельфе // Изв. РАН. ФАО. 1993. Т. 29. С. 229–238.
22. *Федоров К. Н., Гинзбург А. И.* Приповерхностный слой океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
23. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
24. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего квазиоднородного слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
25. *Шприра В. И.* О "приповерхностных" волнах верхнего квазиоднородного слоя океана // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. С. 732–736.
26. *Banks W. H. H.* Similarity solutions of the boundary-layer equations for a stretching wall // J. Méc. Theor. et Appl. 1983. V. 2. P. 375–392.
27. *Benjamin T. B.* Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. P. 559–592.
28. *Benney D. J.* A nonlinear theory for oscillations in a parallel flow // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 209–236.
29. *Cairns R. A.* The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 1–14.

30. *Case K. M.* Hydrodynamic stability and the inviscid limit // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. P. 420–429.
31. *Case K. M.* Benjamin-Ono-related equations and their solutions // *Proc Nat'l Acad. Sci.* 1979. V. 76. P. 1–3.
32. *Caulliez G., Ricci N., Dupont R.* Generation of the first visible wind waves // *Phys. Fluids* (in press).
33. *Craik A. D. D.* Nonlinear resonant instability in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 50. P. 393–413.
34. *Craik A. D. D., Leibovich S.* A rational model for Langmuir circulations // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 73. P. 401–426.
35. *Craik A. D. D.* Wave interactions and fluid flows. Cambridge Univ. Press, 1985.
36. *Dimas A. A., Triantafyllou G. S.* Nonlinear interaction of shear flow with a free surface // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 260. P. 211–246.
37. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. Cambridge Univ. Press, 1981.
38. *Fornberg B., Whitham G. B.* A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena // *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.* 1978. V. A 289. P. 373–404.
39. *Joseph R. J.* Solitary waves in a finite depth fluid // *J. Phys. A: Math. and Gen.* 1977. V. 10. P. 1225–1227.
40. *Kachanov Yu. S., Ryzhov O. S., Smith F. T.* Formation of solitons in transitional boundary layers: Theory and experiments // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 251. P. 273–297.
41. *Kawai S.* On the Generation of Wind Waves Relating to the Shear Flow in Water: A preliminary Study. *Sci. Rep. Tohoku Univ. Ser. 5, Geophysics*, V. 24. P. 1–17 (1977).
42. *Kuznetsov E. A., Rubenchik A. M., Zakharov V. E.* Soliton stability in plasmas and hydrodynamics // *Phys. Rep.* 1986. V. 142. 3.
43. *Leibovich S.* On the evolution of the system of wind drift currents and Langmuir circulations in the ocean. Part 1. Theory and averaged current // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. Part 4. P. 715–743.

44. *Leibovich S.* The form and dynamics of Langmuir circulations // Annual Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 391-427.
45. *Maslowe S. A., Redekopp L. G.* Long nonlinear waves in stratified shear flows // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. P. 321-348.
46. *Maslowe S. A.* Critical layers in shear flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 1986. V. 18. P. 405-432.
47. *Matsuno Y.* Exact multi-soliton solutions for nonlinear waves in a stratified fluid of finite depth // Phys. Lett. 1979. V. A 74. P. 233-235.
48. *Miles J. W.* On the stability of the heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. 1960. V. 10. P. 496-508.
49. *Miles J. W.* Resonantly interacting solitary waves // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. P. 171-179.
50. *Pelinovsky D. E., Shrira V. I.* Collapse transformation for self-focusing solitary waves in boundary-layer type shear flows // Phys. Lett. 1995. V. A 206. P. 195-202.
51. *Ostrovsky L. A., Stepanyants Yu. A.* Do internal solitons exist in the ocean? // Rev. Geophys. 1989. V. 27. P. 293-310.
52. *Soloviev A. V.* Coherent structures at the ocean surface in convectively unstable conditions // Nature. 1990. V. 346. P. 157-160.
53. *Voronovich V. V., Shrira V. I., Stepanyants Yu. A.* 1997 Two-dimensional models for nonlinear vorticity waves in shear flows // Stud. Appl. Math. (to appear).
54. *Voronovich V. V., Pelinovsky D. E., Shrira V. I.* On the internal wave - shear flow resonance in shallow water // J. Fluid Mech. 1998. V. 354. P. 209-237.

Нелинейные модели трансформации внутренних приливов на шельфе

*Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский;
П. Е. Холловэй*

Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород;
Австралийская военная академия, Канберра, Австралия

Нелинейная модель трансформации внутренних приливов на шельфе развивается с учетом квадратичной и кубической нелинейности и вращения Земли. Систематизированы солитонные решения обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза для различных знаков и величин коэффициентов квадратичной и кубической нелинейности. Выполнено численное моделирование эволюции полусуточного прилива на шельфе и показано, что эффекты кубической нелинейности и вращения Земли являются определяющими в динамике внутреннего прилива для реальных условий. Рассчитана вертикальная структура колебаний на различных горизонтах с учетом нелинейных эффектов. Сделаны расчеты скоростей течений, индуцированных внутренними волнами, и показано, что они в реальных условиях могут быть сопоставимы со скоростями распространения внутренних волн, и это согласуется с экспериментальными данными. Как известно, сильные индуцированные течения во внутренних волнах воздействуют на спектр ветрового волнения, что и объясняет частую наблюдаемость внутренних приливов на шельфе дистанционными методами.

1. Введение

Внутренние волны большой амплитуды очень часто наблюдаются в различных районах Мирового океана, главным образом на шельфе. Их интерпретация обычно проводится в рамках слабонелинейных теорий, и, в частности, для длинных внутренних волн на шельфе широко используется известное уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ). Коэффициенты этого уравнения определяются через заданные вертикальные распределения плотности (частоты Вайсяля – Брента) и сдвигового течения. Обычно для расчетов используют упрощенные модели стратифи-

кации региона и считают коэффициенты КдВ-уравнения постоянными во времени и пространстве. Анализ их изменчивости сделан недавно для восточной части Средиземного моря [1], северо-западного шельфа Австралии [2], ряда районов Черного и Балтийского морей [3, 4]. Он показал, что нелинейный коэффициент имеет значительные пространственные и временные вариации как по величине, так и по знаку. Эффект изменения знака коэффициента квадратичной нелинейности (α) был хорошо известен для идеализированных моделей стратификации, в частности для двухслойного моря, где α отрицательно, если пикноклин прижат к морской поверхности, и положительно, если пикноклин находится у дна. Однако для реальных океанических условий доказательство смены знака квадратичной нелинейности получено впервые. Между тем смена знака нелинейности ведет к интересным физическим особенностям в динамике нелинейных волн, в частности, солитоны одного знака должны разрушиться, а вместо них возникают солитоны другого знака (см., например, [5]). В зонах с малым значением α естественно возрастает роль кубической нелинейности, обычно отбрасываемой в асимптотических разложениях при получении эволюционных уравнений. Кубические поправки к КдВ-уравнению в случае двухслойной жидкости были получены достаточно давно [6, 7], и было показано, что коэффициент кубической нелинейности (α_1) отрицателен для любой глубины залегания скачка плотности. Уравнение с квадратичной и кубической нелинейностью носит название уравнения Гарднера или расширенного уравнения Кортевега – де Вриза (рКдВ). Если α_1 отрицателен, то это уравнение заменой переменных сводится к классическому КдВ-уравнению и, следовательно, решается аналитически, методом обратной задачи рассеяния [8]. Новым результатом здесь является существование солитона предельной амплитуды и бездиссипативных ударных волн, и они активно исследовались для двухслойной жидкости. Общее выражение для α_1 во втором порядке теории возмущений в случае произвольной стратификации приводится в работах [9, 10], однако оно достаточно громоздко, чтобы дать заключение о знаке и величине α_1 . Недавно в [11] был исследован случай внутренних волн в трехслойной жидкости с симметричным расположением пикноклинов, и было показано, что α_1 может быть любого знака в зависимости от толщины промежуточного слоя. Расширенное КдВ-уравнение в случае положительного α_1 описывает более богатую нелинейную динамику: существование солитонов обеих полярностей, алгебраический солитон, бризеры и т. д. Эти решения еще никогда не использовались в теории внутренних волн.

Учет вращения Земли модифицирует КдВ-уравнение, добавляя в нем интегральное слагаемое, что впервые было сделано в [12], а затем в [13]. Повышение порядка эволюционного уравнения не дает возможности применить качественные методы теории дифференциальных уравнений для нахождения даже стационарных решений [17]. Численные решения показали, что если влияние интегрального слагаемого мало, то имеет место сложная динамика взаимодействия квазисолитонов с низкочастотными волнами с крутыми гребнями. В работах [15, 16] на основе расчетов для приливной волны для разных широт сделан вывод, что вращение Земли является принципиальным для таких волн, уменьшая количество мелкомасштабных волн (квазисолитонов) – эти расчеты были, правда, сделаны в рамках буссинесковских уравнений для двухслойной воды.

Целью настоящей работы является применение различных обобщений уравнения Кортевега – де Вриза для анализа трансформации внутренних приливов на шельфе и выяснения основных физических факторов, влияющих на этот процесс. Основные уравнения теории приводятся в разд. 2. Аналитические решения в виде солитонов обсуждаются в разд. 3, они важны для интерпретации результатов численного моделирования внутренних приливов. Влияние различных факторов (квадратичной и кубической нелинейности, дисперсии, вращения Земли) на эволюцию внутреннего прилива на шельфе анализируется в разд. 4. Нелинейная структура поля внутренних волн, включая орбитальную скорость частиц на водной поверхности и на дне приводится в разд. 5, эти данные важны для регистрации внутренних волн по поверхностным проявлениям и для оценки транспорта наносов во внутренних волнах.

2. Обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза

Уравнение Кортевега – де Вриза уже давно применяется для анализа свойств внутренних волн и интерпретации данных дистанционного зондирования, они цитируются, например, в работе [2]. С математической точки зрения оно получено в первом порядке теории возмущений для длинных (по сравнению с глубиной бассейна) волн малой, но конечной амплитуды. Внутренние приливы на шельфе, оставаясь длинными, зачастую имеют значительные амплитуды. Развитие теории нелинейных внутренних волн идет двумя путями. С одной стороны, начато численное моделирование полных (двумерных) гидродинамических уравнений, позволяющее проследить эволюцию волн любой амплитуды. С другой

стороны, учитываются следующие поправки в асимптотических разложениях (по нелинейности и дисперсии), позволяющие продвинуться в область больших амплитуд. Сопоставление обоих подходов сделано в [9]. Разумеется, обобщения КдВ-уравнения обладают более низкой точностью по сравнению с полными моделями, но достаточной для описания внутренних волн умеренных амплитуд. Их главное преимущество заключается в одномерности (оно не содержит вертикальной координаты), легкости учета горизонтальной неоднородности поля плотности (это еще вообще не сделано в рамках полных моделей) и возможности получения аналитических и приближенных решений, необходимых для понимания физики волновых процессов. Численное моделирование КдВ-уравнения также относительно просто, поэтому в данной работе мы будем обсуждать только такие модели.

Первые обобщения КдВ-уравнения для внутренних волн включали кубические слагаемые, правда все это было сделано для двухслойной жидкости [6, 7]. Для непрерывно стратифицированного океана расширенное КдВ-уравнение (рКдВ-уравнение), содержащее квадратичную и кубическую нелинейности, было получено в работах [9, 10]. Для упрощения выкладок здесь мы будем обсуждать только случай плотностной стратификации океана. Формально рКдВ-уравнение получается во втором порядке теории возмущений по амплитуде и в первом – по дисперсии (длине волны). Если частота волны значительно больше параметра Кориолиса, то влияние вращения Земли будет слабым, и параметр Кориолиса будет играть роль независимого малого параметра. Учет этого фактора модифицировал КдВ-уравнение, и оно получило название уравнения Островского, или КдВ-уравнения с вращением [12, 13]. Совместный учет кубических эффектов и вращения Земли, если принять во внимание малость обоих факторов, должен приводить к аддитивности соответствующих слагаемых в обобщенном уравнении Кортевега – де Вриза, и оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = \frac{f^2}{2c} \eta, \quad (2.1)$$

где η – волновая переменная, которая в случае длинных волн малой амплитуды совпадает с вертикальным смещением изопикны в максимуме первой моды, x – горизонтальная координата и t – время. Фазовая скорость линейных длинных внутренних волн (коэффициент c в этом уравнении) находится из решения краевой задачи (в рамках обычно используемого для океанической стратификации приближения Буссинеска)

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{N^2(z)}{c^2}\Phi = 0 \quad (2.2)$$

с нулевыми граничными условиями на морском дне ($z = 0$) и свободной поверхности ($z = H$)

$$\Phi(0) = \Phi(H) = 0 \quad (2.3)$$

и нормировкой

$$\Phi_{\max} = 1. \quad (2.4)$$

Здесь $N(z)$ – частота Вяйсяля – Брента, определяющая плотностную стратификацию океана, H – полная глубина бассейна. Все коэффициенты в уравнении (2.1) – дисперсии β , квадратичной α и кубической нелинейности α_1 – определяются через структуру моды [17, 9]

$$\beta = \frac{c}{2} \frac{\int \Phi^2 dz}{\int (d\Phi/dz)^2 dz}, \quad (2.5)$$

$$\alpha = \frac{3c}{2} \frac{\int (d\Phi/dz)^3 dz}{\int (d\Phi/dz)^2 dz}, \quad (2.6)$$

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha^2}{c} + 3c \frac{\int ((d\Phi/dz)^4 - (N\Phi/c)^4) dz}{\int (d\Phi/dz)^2 dz} + 3c \frac{\int (c(d\Phi/dz)^2 + (N^2\Phi^2/c) - (2\alpha/3)(d\Phi/dz)) (dT/dz) dz}{\int (d\Phi/dz)^2 dz}. \quad (2.7)$$

Функция $T(z)$ определяет нелинейную поправку к вертикальной моде внутренней волны и находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2T}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2}T = \frac{\alpha N^2}{c^4}\Phi + \frac{dN^2/dz}{c^3}\Phi^2 \quad (2.8)$$

с нулевыми граничными условиями

$$T(0) = T(H) = 0 \quad (2.9)$$

и нормировкой

$$T(z_{\max}) = 0, \quad \text{where} \quad \Phi(z_{\max}) = 1. \quad (2.10)$$

Параметр Кориолиса f , как известно, есть

$$f = (4\pi/T_e)\sin\varphi, \quad (2.11)$$

где T_e – период вращения Земли (24 hr), и φ – географическая широта.

Приведенное выше уравнение (2.1) справедливо для внутренних волн в бассейне постоянной глубины. Если глубина бассейна и частота Вьяйсяля – Брента медленно (по сравнению с длиной волны) изменяются в горизонтальном направлении, то в задаче возникает еще один малый параметр, который может быть учтен аддитивно [18, 19, 20]. Соответствующее обобщение уравнения (2.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{c}{Q} \frac{dQ}{dx} \eta \right) = \frac{f^2}{2c} \eta, \quad (2.12)$$

где

$$Q = \sqrt{\frac{c_0^3}{c^3} \frac{\int (d\Phi_0/dz)^2 dz}{\int (d\Phi/dz)^2 dz}} \quad (2.13)$$

и индекс "0" соответствует значениям функций в любой фиксированной точке x_0 (обычно это самая глубоководная точка при расчетах эволюции волн в прибрежной зоне). Физический смысл параметра Q виден из уравнения (2.12): если пренебречь нелинейностью, дисперсией и вращением, его решение находится в общем виде

$$\eta(x, t) = Q(x) F \left(t - \int_{x_0}^x \frac{dx}{c(x)} \right), \quad (2.14)$$

где F – форма внутренней волны в точке x_0 . Отсюда следует, что в рамках линейной теории длинных волн форма волны по мере ее распространения не меняется, а ее амплитуда в силу горизонтальной неоднородности океана пропорциональна $Q(x)$, и эта функция есть коэффициент трансформации линейной волны.

Заменой переменной

$$\zeta(x, s) = \frac{\eta(x, t)}{Q(x)} \quad (2.15)$$

и координат

$$s = \int \frac{dx}{c(x)} - t, \quad x = x \quad (2.16)$$

уравнение (2.12) сводится к

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left[\frac{\alpha Q}{c^2} \zeta + \alpha_1 \frac{Q^2}{c^2} \zeta^2 \right] \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\beta}{c^4} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial s^3} = \frac{f^2}{2c} \int \zeta ds \quad (2.17)$$

при пренебрежении возникающими при такой замене малыми нелинейно-дисперсионными членами.

Уравнение (2.17) обобщает КдВ-уравнение на случай горизонтально неоднородного океана с учетом вращения Земли и кубических нелинейных эффектов. Ниже уравнение (2.17) используется для описания трансформации полусуточного внутреннего прилива на шельфе. При этом периодические граничные условия

$$\zeta\left(s + \frac{2\pi}{\omega}, x\right) = \zeta(s, x) \quad (2.18)$$

ставятся естественным образом, ω – частота полусуточного прилива. Начальное условие для уравнения (2.17)

$$\zeta(s, x_0) = A_0 F(t) \quad (2.19)$$

определяет форму приливной волны в фиксированной точке x_0 . Обычно это достаточно удаленная от побережья глубоководная точка, так что можно считать, что форма приливной волны на глубокой воде является синусоидальной, и можно принять

$$F(s) = \sin \omega s. \quad (2.20)$$

Амплитуда внутренней приливной волны на глубокой воде A_0 обычно неизвестна и будет меняться в расчетах. По существу, вариации амплитуды соответствуют переменной нелинейности и позволяют проследить за относительной ролью нелинейных эффектов в процессе трансформации внутреннего прилива.

Легко показать, что уравнение (2.17) имеет два закона сохранения, массы

$$\int \zeta(s, x) ds = 0, \quad (2.21)$$

и энергии (точнее, потока энергии)

$$\int \zeta^2(s, x) ds = \text{constant}, \quad (2.22)$$

которые будут использоваться для контроля численных экспериментов, основанных на конечно-разностной схеме, которая описана в работе [19].

3. Солитонные решения для рКдВ-уравнения

Обсудим здесь некоторые аналитические решения, которые могут быть использованы в качестве тестов при интерпретации результатов численного моделирования. Для мелкомасштабных внутренних волн влиянием низкочастотной дисперсии (вращением Земли) можно пренебречь, и уравнение (2.1) сводится к расширенному уравнению Кортевега – де Вриза

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (3.1)$$

Так, если кубической нелинейностью можно пренебречь, то мы имеем дело с классическим КдВ-уравнением, для которого получено точное решение задачи Коши методом обратной задачи теории рассеяния. Основную роль здесь играют солитоны

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{\alpha A}{12\beta}} (x - Vt), \quad V = c + \frac{\alpha A}{3}. \quad (3.2)$$

Полярность солитона определяется знаком α . В частности, в двухслойной воде солитон положителен, если пикноклин прижат к морскому дну, и отрицателен, если пикноклин находится вблизи морской поверхности. Общее решение показывает, что произвольное начальное возмущение распадается на солитоны (если масса начального возмущения имеет тот же знак, что и солитон) и быстро затухающие осциллирующие хвосты. Если начальное возмущение периодическое, то солитоны возникают только на промежуточной стадии, форма начального возмущения периодически восстанавливается (явление рекурренции).

В случае, когда $\alpha = 0$, уравнение (3.1) сводится к модифицированному КдВ уравнению, которое также является полностью интегрируемым. Однако его динамика зависит от знака α_1 . Если $\alpha_1 < 0$, то солитонов вообще нет (на нулевом престоле), и стационарные волны имеют вид бездиссипативных ударных волн (перепадов)

$$\eta(x, t) = A \tanh \sqrt{\frac{|\alpha_1| A^2}{6\beta}} (x - Vt), \quad V = c - \frac{|\alpha_1| A^2}{3} \quad (3.3)$$

Решение периодической задачи показало, что и здесь явление рекурренции имеет место, но на промежуточном этапе возникают солитоны обеих полярностей, сидящие на гребне и подошве периодической волны.

Эти солитоны, по существу, обусловлены эффективной квадратичной нелинейностью для волн на пьедестале [11].

При $\alpha_1 > 0$ решениями мКдВ-уравнения являются солитоны вида

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\alpha_1 A^2}{6\beta}} (x - Vt), \quad V = c + \frac{\alpha_1 A^2}{6}. \quad (3.4)$$

Солитоны могут иметь любую полярность, причем скорость солитона не зависит от его полярности. В результате взаимодействие одинаковых солитонов разного знака может приводить к возникновению связанных состояний, так называемых бризеров (дышащих солитонов).

Солитонные решения были найдены довольно давно, и для рКдВ, когда коэффициенты обеих нелинейностей отличны от нуля, они имеют вид

$$\eta(x, t) = \frac{6\beta\Gamma^2}{\alpha} \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{6\alpha_1\beta\Gamma^2}{\alpha^2}} \cosh \Gamma(x - Vt)},$$

$$V = c + \beta\Gamma^2 \quad (3.5)$$

(Γ – произвольный параметр), причем знак (–) соответствует случаю $\alpha_1 > 0$ и знак (+) – отрицательному α_1 . Обсудим сначала ситуацию с отрицательной кубической нелинейностью. Полярность солитона определяется знаком α (как для классического КдВ-уравнения). Его амплитуда изменяется от нуля до максимального (предельного) значения

$$A_{lim} = -\frac{\alpha}{\alpha_1}, \quad (3.6)$$

при этом его ширина неограниченно возрастает. Солитоны с амплитудой, близкой к критической, могут быть представлены как суперпозиция двух бездиссипативных ударных волн (3.3), иногда такое представление оказывается более полезным, чем (3.5).

В случае положительной величины α_1 решение (3.5) описывает два солитона противоположной полярности при относительно больших значениях амплитуды волны, и в пределе очень малых значений α , или очень больших значений амплитуды, волны выражение (3.5) переходит в (3.4). При малых амплитудах существует только один солитон, полярность которого определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности. Солитон противоположной полярности существует только для амплитуд, больших критической

$$A_{cr} = -2\frac{\alpha}{\alpha_1}, \quad (3.7)$$

причем солитон критической амплитуды становится алгебраическим:

$$\eta(x, t) = \frac{A_{cr}}{1 + \frac{\alpha^2}{6\alpha_1}(x - ct)^2}. \quad (3.8)$$

Конечно, как и всякое пограничное решение, алгебраический солитон является неустойчивым [21].

Что же касается неустановившихся (нестационарных) решений, то в случае $\alpha_1 < 0$ уравнение (3.1) сводится заменой Миуры

$$v(x, t) = \frac{\alpha \eta + \alpha_1 \eta^2}{\sqrt{-6\beta\alpha_1}} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.9)$$

к классическому КдВ-уравнению [8]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c + \sqrt{-6\beta\alpha_1}v) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0. \quad (3.10)$$

Следовательно, известное общее решение задачи Коши может быть применено к анализу общего решения рКдВ-уравнения. В частности, произвольное начальное импульсное возмущение нужного знака распадается на солитоны и осциллирующие пакеты, при этом если возмущение велико, то образуется один широкий солитон предельной амплитуды, забирающий практически всю энергию и массу начального возмущения.

В случае $\alpha_1 > 0$ уравнение (3.1) не сводится к КдВ-уравнению или к другому известному решаемому уравнению. Численные решения [22] показали, что импульсные возмущения распадаются на солитоны и нет ограничения на их амплитуды.

4. Численное моделирование эволюции внутреннего прилива

Численное моделирование трансформации внутреннего прилива проведено для условий для северо-западного шельфа Австралии, где развернута буйковая система долговременной регистрации внутренних волн и наблюдается большое разнообразие нелинейных форм внутреннего прилива [23]. Внутренние волны большой амплитуды в этом регионе уже моделировались с точки зрения КдВ-уравнения [2], а также определялась вероятность их возникновения [24]. Усредненный профиль частоты Вайсяля – Брента представлен на рис. 1, батиметрия – на рис. 2.

Эти данные были использованы для вычисления коэффициентов обобщенного КдВ-уравнения, которые также показаны на рис. 2. Фазовая скорость волны уменьшается на мелководье, поэтому коэффициент трансформации волны (Q) увеличивается (приблизительно в 7 раз) и, следовательно, ее амплитуда на мелководье может быть весьма значительной. Коэффициенты нелинейности (квадратичной и кубической) возрастают на мелководье, переходя через нуль. Дисперсионный параметр, напротив, только уменьшается, так что роль нелинейных явлений должна возрасти на мелководье. Параметр Кориолиса для этого региона вычислен по формуле (2.11) для широты 20° .

Во всех вычислениях форма волны в глубоководной точке (500 м) принималась синусоидальной с периодом 12 часов. Первые вычисления были сделаны для волны с очень малой начальной амплитудой в 20 см. С учетом даже ее возможного усиления на шельфе в 7 раз можно ожидать, что эта волна окажется практически линейной. Результаты расчета в рамках КдВ-уравнения (нет кубической нелинейности и вращения) представлены на рис. 3 для двух расстояний: 130 км и 165 км. Как видим, профиль волны значительно изменился, и в нем появились солитоны. Оценка нелинейного параметра $\alpha A/c$ приводит к значению 0,1, и это, конечно, большая величина, что и объясняет сильную деформацию приливной волны на шельфе. Учет вращения Земли существенно повлиял на характер деформации внутренней волны на тех же расстояниях (рис. 4): волна стала более гладкой и не содержит солитонов. Вращение Земли характеризуется параметром $(f/\omega)^2$, который равен примерно 0,1. Как видим, он сравним с нелинейным параметром. Уменьшение числа солитонов из-за вращения Земли уже отмечалось в численных расчетах [15] и физически связано с увеличением как общей величины дисперсии, так и с ее низкочастотным характером (нет строгих решений солитонного вида в уравнениях типа КдВ с вращением). Учет кубической нелинейности при расчетах не изменил результатов, поскольку отношение кубического слагаемого к квадратичному порядка 0,1, и кубические эффекты остаются незначительными.

Следующие вычисления были сделаны для начальной амплитуды в 1 м. Учитывая, что в прибрежной зоне амплитуда волны (в линейном приближении) должна возрасти почти до 10 м, можно ожидать сильного проявления квадратичной и кубической нелинейности. Результаты расчетов в рамках КдВ-уравнения для дистанции 165 км представлены на рис. 5. Нелинейные эффекты становятся заметными на мелководье, где $\alpha > 0$, поэтому солитоны имеют положительную полярность. Эффективный параметр нелинейности в этих расчетах $\alpha A/c \sim 0,3$ большой,

Рис. 1. Усредненный профиль частоты Вайсяля – Брента на северо-западном шельфе Австралии

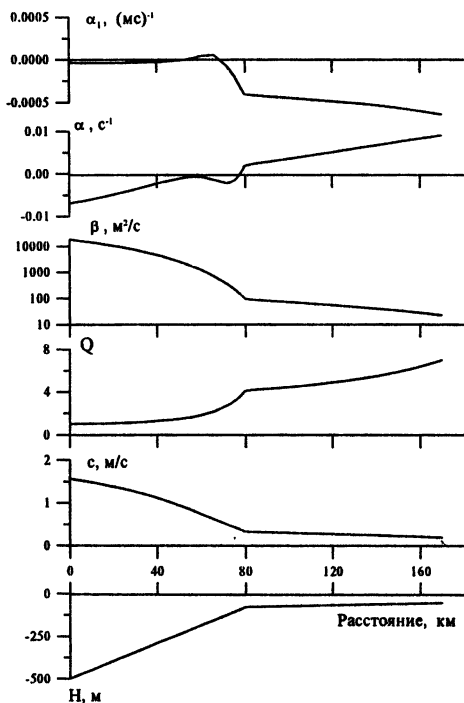
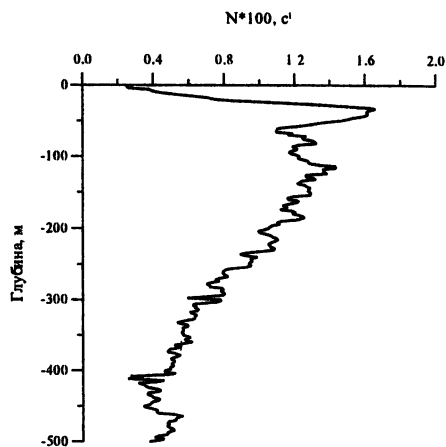


Рис. 2. Рассчитанные коэффициенты обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза

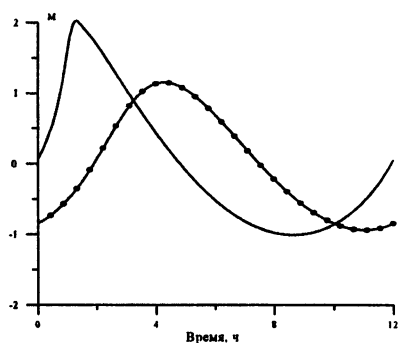
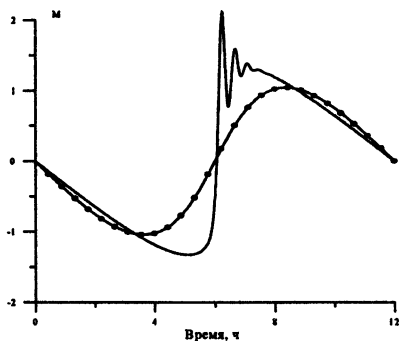


Рис. 3. Трансформация внутреннего полусуточного прилива с начальной амплитудой 20 см на расстоянии 130 км (линия с точками) и 165 км (сплошная линия). Расчет в рамках уравнения Кортевега – де Вриза ($\alpha_1 = 0$, $f = 0$).

Рис. 4. Трансформация внутреннего полусуточного прилива с начальной амплитудой 20 см на расстоянии 130 км (линия с точками) и 165 км (сплошная линия). Расчет в рамках уравнения Кортевега – де Вриза с вращением ($\alpha_1 = 0$)

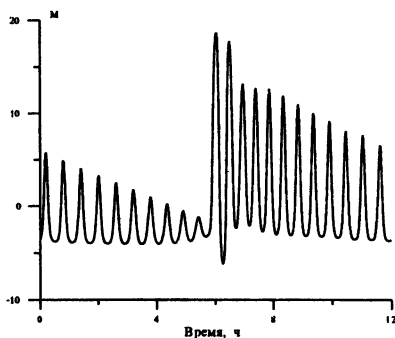
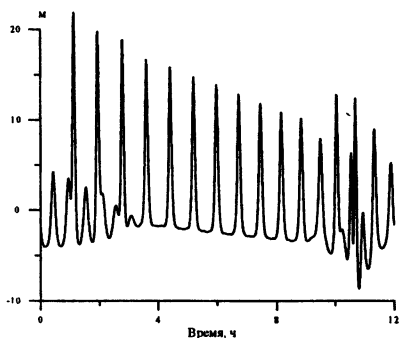


Рис. 5. Трансформация внутреннего полусуточного прилива с начальной амплитудой 1 м на расстоянии 165 км. Расчет в рамках уравнения Кортевега – де Вриза ($\alpha_1 = 0$, $f = 0$).

Рис. 6. Трансформация внутреннего полусуточного прилива с начальной амплитудой 1 м на расстоянии 165 км. Расчет в рамках расширенного уравнения Кортевега – де Вриза ($f = 0$)

и солитоны генерируются быстро. Результаты аналогичных расчетов с учетом кубической нелинейности представлены на рис. 6. Отношение кубической нелинейности к квадратичной характеризуется параметром $\alpha_1 A/\alpha \sim 1$, и следовательно кубические эффекты важны. Поскольку $\alpha_1 < 0$, кубическая нелинейность ведет к уменьшению нелинейной коррекции скорости распространения солитонов, их скорость лучше описывается линейным выражением. Получаемые солитоны несколько шире, чем в чисто квадратичном варианте, что соответствует теоретическим решениям типа солитонов предельной амплитуды для этого случая. Учет вращения Земли и здесь приводит к уменьшению числа генерируемых солитонов (рис. 7 и 8). В рамках квадратичной нелинейности амплитуды генерируемых солитонов очень велики (почти 40 м), поэтому учет кубической нелинейности оказывается принципиальным и ведет к образованию солитона предельной амплитуды, примерно 15 м. Оценки по формуле (3.6) дают амплитуду в 10 – 20 м, что согласуется с расчетами.

5. Вертикальная структура поля внутренних волн

Основное уравнение (2.1) написано для функции $\eta(x, t)$, которая в линейном приближении длинных волн описывает вертикальное смещение изопикны в максимуме моды. Для непрерывно стратифицированного океана часто бывает важным определить смещения изопикны в термоклине или на других глубинах. Для волн малой амплитуды можно воспользоваться соотношениями, вытекающими из линейной теории. Однако в расчетах (и наблюдениях) нелинейные эффекты не малы, и их надо учитывать также при построении вертикальной структуры волновых колебаний. В пределах точности вывода обобщенного КдВ-уравнения мы можем включить только квадратичные поправки к волновому полю, которые приведены в работе [9, 17]:

$$\xi(z, x, t) = \eta(x, t) \left(1 - \frac{\alpha \eta(x, t)}{2c} \right) \Phi(z) + \eta^2(x, t) \Phi \frac{d\Phi}{dz} + c \eta^2(x, t) T(z), \quad (5.1)$$

$$u(x, t, z) = c \eta(x, t) \frac{d\Phi(z)}{dz} + c^2 \eta^2(x, t) \frac{dT(z)}{dz}. \quad (5.2)$$

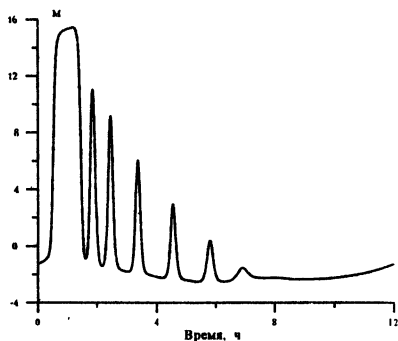
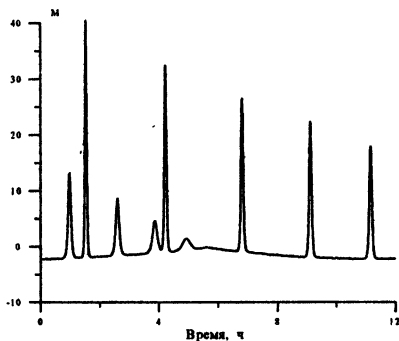


Рис. 7. Трансформация внутреннего полусуточного прилива с начальной амплитудой 1 м на расстоянии 165 км. Расчет в рамках уравнения Кортевега – де Вриза с вращением ($\alpha_1 = 0$).

Рис. 8. Трансформация внутреннего полусуточного прилива с начальной амплитудой 1 м на расстоянии 165 км. Расчет в рамках расширенного уравнения Кортевега – де Вриза с вращением

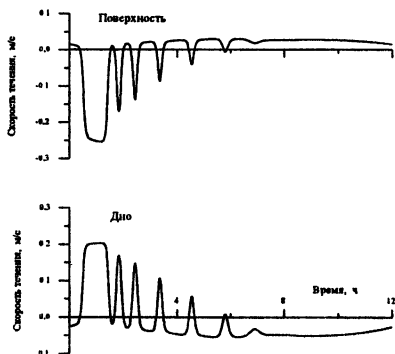
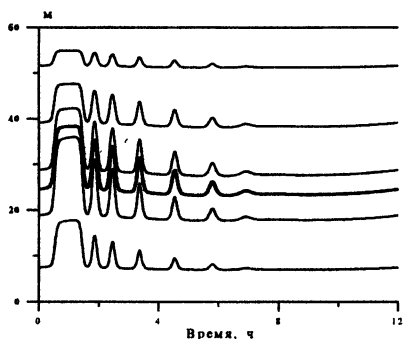


Рис. 9. Рассчитанная вертикальная структура смещений изопикн в полусуточном приливе с начальной амплитудой в 1 м в точке с глубиной 60 м.

Рис. 10. Рассчитанные скорости течений в полусуточном приливе с начальной амплитудой в 1 м в точке с глубиной 60 м

Здесь $\xi(x, t, z)$ – смещение частиц воды с заданного горизонта, $u(x, t, z)$ – горизонтальная скорость течений во внутренних волнах. Результаты расчетов по полной модели (учитывается квадратичная и кубическая нелинейность, вращение Земли) вертикальной структуры поля смещений в мелководной зоне (глубина 60 м), вызванного внутренним приливом с начальной амплитудой 1 м, показаны на рис. 9. Жирной линией показано смещение изопикны, соответствующей максимуму линейной моды. Ясно видно, что учет нелинейности меняет структуру волны, в частности максимум колебаний приходится на горизонт 20 м, и амплитуда колебаний здесь превышает 15 м. Колебания на разных горизонтах синфазны между собой, однако есть и отличия, связанные с нелинейной поправкой к моде. В частности, осцилляции в верхнем слое имеют более близкие амплитуды, чем в нижнем – эффект нелинейного детектирования колебаний.

Для многих прикладных задач важно знать поле течений, индуцированное внутренней волной. В частности, скорости течений вблизи морского дна могут вызвать смещения частиц песка на дне и привести к деформации морского дна, такие процессы сейчас активно изучаются в связи с внутренними волнами [25]. Временная запись придонной скорости течений (глубина 60 м), вызванной внутренней волной с амплитудой в 1 м, рассчитана по (5.2) и показана на рис. 10. Величины скоростей, согласно расчетам, достигают 20 см/с, что сравнимо с критическими скоростями трогания мелкозернистых частиц песка. Другое важное приложение – дистанционная диагностика внутренних волн из космоса. Здесь главную роль играет поле течений вблизи морской поверхности. Результаты расчетов поверхностной скорости для тех же условий представлены на рис. 10. Величины скоростей достигают 25 см/с (больше, чем на дне) и сравнимы с фазовой скоростью волны (26 см/с). Такие большие значения относительной скорости u/c , согласно всем существующим теориям (см., например, [26; 27]), приводят к большим вариациям спектра ветрового волнения в его коротковолновой части, что и обеспечивает наблюдаемость внутренних приливов на шельфе. Такие данные с помощью европейских спутников ERS-1 ERS-2 получены сейчас и для северо-западного шельфа Австралии [28], и приводимая выше теория дает возможность объяснить эти данные.

6. Заключение

Внутренние приливы на шельфе имеют значительную амплитуду, их период сравним с частотой вращения Земли. Для моделирования транс-

формации внутренних приливов известная модель, основанная на уравнении Кортевега – де Вриза, модифицируется с учетом эффектов второго порядка по амплитуде волны (кубическая нелинейность) и вращения Земли. Систематизируются известные аналитические решения обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза, необходимые для качественного анализа данных наблюдений и расчета. Выполнено численное моделирование трансформации полусуточного прилива на северо-западном шельфе Австралии. Результаты расчетов показывают принципиальную важность учета вращения Земли и кубической нелинейности в динамике внутренних приливов. Рассчитаны также скорости течений, вызванных внутренними волнами на морском дне и морской поверхности. Показано, что трансформация внутреннего прилива даже относительно малой амплитуды в 1 м приводит к значительным поверхностным скоростям (сравнимым с фазовой скоростью волны), что и определяет их наблюдаемость с помощью дистанционных средств.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 96-05-64108) и грантов INTAS (95-969 и 96-2077) для ТТ и ЕП.

Литература

1. *Pelinovsky E., Talipova T., Ivanov V.* Estimations of the nonlinear properties of the internal wave field off the Israel Coast//Nonlinear Proc. in Geophysics. 1995. V. 2. P. 80–85.
2. *Островский Л. А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане//Океанология. 1978. Т. 18. С. 181–191.
3. *Burrage D., Massel S., Steinberg C., Skirving W.* Detecting surface and internal wave signatures on the North-west Shelf of Australia using the ERS-1 and ERS-2 Active Microwave Instruments (AMI)//Proc. 1st Australian ERS Symposium. CSIRO, Canberra. 1996. P. 11–26.
4. *Pelinovsky E., Holloway P., Talipova T.* A statistical analysis of extreme events in current variations due to internal waves from the Australia North-West Shelf//J. Geophys. Research, 1995b. V. 100. № C12, 24.831–24.839.
5. *Holloway P. E.* Internal hydraulic jumps and solitons at a shelf break region on the Australian North West Shelf//J. Geophys. Res. 1987 V. C95. P. 5405–5416.

6. *Holloway P. E., Pelinorsky E., Talipova T., Barnes B.* A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf//*J. Phys. Ocean.* 1997 V. 27. P. 871-896.
7. *Lamb K. G., Yan L.* The evolution of internal wave undular bores: comparisons of a fully nonlinear numerical model with weakly nonlinear theory//*J. Phys. Ocean.* 1996. V. 26 P. 2712-2734.
8. Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность/Под ред. Е. Н. Пелиновского. Горький: ИПФ АН СССР, 1982.
9. *Пелиновский Е. Н., Шаврацкий С. Х.* Распространение нелинейных внутренних волн в неоднородном океане//*Изв. АН СССР. ФАО.* 1976. Т. 12. С. 86-92.
10. *Boczar-Karakiewicz B., Vona J., Pelchar B.* Interaction of internal waves with the seabed on continental shelves//*Cont. Shelf Res.* 1991. V. 11. P. 1181-1197.
11. *Pelinovsky D., Grimshaw R.* Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential//*Phys. Letters A.* 1997. V. 229. P. 165-172.
12. *Zhou X., Grimshaw R.* The effect of variable currents on internal solitary waves//*Dynamics Atm. Oceans.* 1989. V. 14. P. 17-39.
13. *Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г., Степаняц Ю. А.* Моделирование распространения нелинейной внутренней волны в горизонтально неоднородном океане//*Изв. РАН. ФАО.* 1994. Т. 30. С. 79-85.
14. *Gerkema T., Zimmerman J. T. F.* Generation of nonlinear internal tides and solitary waves//*J. Phys. Ocean.* 1995. V. 25. P. 1081-1094.
15. *Grimshaw R.* Evolution equations for weakly nonlinear long internal waves in a rotating fluid//*Stud. Appl. Math.* 1985. V. 73. P. 1-33.
16. *Djordjevic V., Redekopp L.* The fission and desintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography//*J. Phys. Ocean.* 1978. V. 8. P. 1016-1024.
17. *Gerkema T.* A unified model for the generation and fission of internal tides in a rotating ocean//*J. Marine Res.* 1996. V. 54. P. 421-450.

18. *Lee C., Beardsley R. C.* The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow//*J. Geophys. Res.* 1974. V. 79 P. 453–462.
19. *Иванов В. А., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г., Троицкая Ю. И.* Статистические оценки параметров нелинейных внутренних волн на полигоне ЮБК в Черном море//*Морской гидрофиз. журн* 1994. № 4. С. 9–14.
20. *Grimshaw R., Ostrovsky L., Shrira V., Stepanyants Yu.* Nonlinear surface and internal gravity waves in a rotating ocean//*Monash Univ Preprint.* 1997. № 97/5.
21. *Переельман Т. Л., Фридман А. Х., Ельяшевич М. М.* Модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза в электродинамике //ЖЭТФ. 1974. Т. 39. С. 643–646.
22. *Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Гримшоу Р.* Трансформация солитона в точке нулевой нелинейности//*Письма в ЖЭТФ.* 1997. Т. 65. С. 113–117.
23. *Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Ламб К., Гримшоу Р., Холловэй П.* Эффекты кубической нелинейности при распространении интенсивных внутренних волн//*Доклады РАН.* 1997 (принята в печать).
24. *Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Коутс Т.* Кинематические характеристики поля внутренних волн в Готланской котловине //Океанология. 1998. Т. 38, № 1. С. 37–46.
25. *Kakutani T., Yamasaki N.* Solitary waves on a two-layer fluid//*J Phys. Soc. Japan.* 1978. V. 45. P. 674–679.
26. *Базанов В. В., Зуев А. А., Маров М. Н., Пелиновский Е. Н.* Влияние внутренних волн на характеристики сигналов, рассеиваемых морской поверхностью//*Изв. АН СССР. ФАО.* 1989. Т. 25. С. 387–395.
27. *Miles J. W.* On internal solitary waves//*Tellus.* 1981. V. 33. P. 397–401.
28. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T.* A generalised Korteweg – de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone//*J. Geophys Res.* 1998 (submitted).

A New Korteweg-de Vries-Type Theory for Internal Solitary Waves in a Rotating Continuously-Stratified Ocean

A. L. New; M. Esteban

James Rennell Division for Ocean Circulation, Southampton Oceanography Centre, Empress Dock, Southampton SO14 3ZH, United Kingdom;

Clima Maritimo, Puertos del Estado, 28026 Madrid, Spain

The primary goal of the present paper is the development of a new Korteweg-de Vries (KdV) type theory for internal waves in a rotating, continuously-stratified fluid. The model includes both weak nonlinearity and weak dispersion, but unlike other similar theories, includes the effects of the earth's rotation as a zeroth order effect, and does not make any *a priori* assumptions about the vertical structure of the waves. The theory is also used to study the formation of internal "solitary" waves from longer wavelength internal tides in the Bay of Biscay, and comparisons are made with observations. The amplitudes, phase speeds, wavelengths and periods of the solitary waves are reproduced with encouraging agreement by the model, so that the internal solitary waves in nature can almost certainly be considered to develop as an internal undular bore, under the action of nonlinear steepening and frequency dispersion.

1. Introduction

Internal tidal waves in both the Bay of Biscay and elsewhere are now a well understood phenomenon (BAINES, 1982; BRISCOE, 1984; PINGREE *et al.*, 1986; NEW, 1988; PINGREE and NEW 1989, 1991). They result from the interaction of the barotropic surface tide with steep shelf break topography, and produce semidiurnal-period oscillations of the seasonal thermocline which travel both onto the shelf and into the ocean. They also produce beams of internal tidal energy which travel along certain characteristic ray paths which penetrate the deep ocean and, after reflecting from the ocean floor, eventually reach the ocean surface again at, in the Bay of Biscay, about 140 km from the shelf break. All these processes have been modelled by a linear modal model (NEW, 1988) and compared with observations, with encouraging agreement (PINGREE and NEW 1989, 1991). In the Bay of Biscay, the tidal displacements of the seasonal thermocline have been found to be dominated by a mode 3 oscillation in the deep ocean and a mode 1 on the shelf, in both the model and observations, and to occur with

relatively large amplitudes both near the shelf break (the generation region, where they may be associated with physical mixing of the water column and upwelling of nutrients, PINGREE *et al.*, 1986, NEW and PINGREE 1990b) and near the position of the surface reflection of the beam of internal tidal energy in the central Bay (where they could also be associated with mixing, HOLLIGAN *et al.*, 1985; NEW and PINGREE, 1990a,1992).

However, relatively short-wavelength internal waves have often been observed to be associated with the troughs of the longer internal tides in the Bay of Biscay, particularly in regions where the tides themselves are large, that is, near the shelf break (PINGREE and MARDELL, 1985), and near the surface reflection of the beam of energy (HOLLIGAN *et al.*, 1985; NEW and PINGREE, 1990a,1992). The internal waves at the shelf break and in the central Bay have similar characteristics. Their wavelengths are typically 1-3 km, and their amplitudes are usually largest (20-30 m) in the internal tidal troughs. The waves at both the shelf break and in the central Bay have often been conjectured (eg NEW and PINGREE, 1990a,1992) to result from nonlinear steepening of the internal tide, followed by dispersion, much as in the formation of an undular bore (eg as described by PEREGRINE, 1966, for surface waves). This process has been shown to be operative for the breakdown of internal tides into higher-frequency waves near the equator on the Australian North West shelf by HOLLOWAY (1987) and SMYTH and HOLLOWAY (1988), who modelled the process with a theory based around Korteweg-de Vries (KdV) dynamics (KORTEWEG and DE VRIES, 1895), which included weak nonlinearity and dispersion, but did not include the effects of the earth's rotation. Further, the high frequency internal waves are often called internal "solitary" waves or "solitons" by analogy with the solutions of KdV theories for surface waves. They typically take on the appearance of asymmetric, nonlinear entities, with steeply penetrating troughs, and an apparent degree of independence, rather than forming part of a regular, sinusoidal wavetrain. However, whereas the internal tides have been modelled and encouraging agreement demonstrated, the same has not yet been achieved in a detailed manner for the internal solitary waves in the Bay of Biscay. An alternative mechanism for their appearance in the tidal troughs might, for instance, be the straining of some background internal wave field (e.g. GARRETT and MUNK, 1975) by the internal tides themselves.

There is now much work describing internal wave theories which include weak nonlinear effects and weak dispersion, but most of these do not include the earth's rotation, f . A suitable review is given by OSTROVSKIY and STEPANYANTS (1989), but we here briefly mention some of the more important differences. The earliest such theory was developed for surface waves which were long in comparison with the fluid depth by KORTEWEG and DE VRIES (1895). For long internal waves, theories with similar dynamics have been derived by many authors. For instance, BENNEY (1966)

developed a theory for internal waves in a stratified shear flow, and in particular allowed the inclusion of a free surface in the unstratified case. LEE and BEARDSLEY (1974) then developed a model equation for continuous stratification which included non-Boussinesq effects and background shear, and DJORDJEVIC and REDEKOPP (1978) derived KdV equations for both two layers and continuous stratification in the presence of sloping bottom topography. A closely related theory (the Benjamin-Ono equation) was developed for internal waves in deep water by BENJAMIN (1967) and ONO (1975). Subsequently, JOSEPH (1977), for the two layer case, derived an equation which was valid for internal waves in intermediate depth, and KUBOTA *et al.* (1978) went on to produce a theory (the KKD equation) for continuous stratification which was also applicable to intermediate depth, and which was shown to reduce to the Korteweg-de Vries and Benjamin-Ono equations in the shallow and deep water limits respectively. LIU *et al.* (1985) then added dissipation and radial spreading to the KKD equation to study the propagation of internal waves in the Sulu Sea, and SMYTH and HOLLOWAY (1988) used a perturbed extended KdV theory for a study on the Australian North West shelf. None of these methodologies, however, included the earth's rotation.

Rotation was first included in the theory for long internal waves for a continuous stratification by OSTROVSKIY (1978), but only as a "small" effect. That is, the frequency of the waves under consideration was not allowed to be too close to f . Furthermore, the vertical structure of the whole solution was assumed *a priori* to be proportional to one (and only one) of the vertical modes of the linear (zeroth order) system. These simplifying assumptions allowed a wave evolution equation to be derived in which the coefficients of the nonlinear and dispersive terms were explicitly given as integrals of the zeroth order structure function. The so-called "Ostrovskiy" equation was then derived in a different way by LEONOV (1981), who showed that strictly form-preserving solitons do not exist for this equation, and by GRIMSHAW (1985), who included transverse variations.

On the other hand, rotation has also been included as an "order 1" effect in a similar, weakly nonlinear, weakly dispersive (Boussinesq) theory for internal waves by GERKEMA (1996), but only for the two-layer case as opposed to continuous stratification. The model was applied to various oceanic conditions, and the study showed convincingly that the earth's rotation was as important factor for the evolution of internal tides into internal solitary waves at mid-latitudes, in that it significantly impeded the disintegration of the internal tide.

Now, the philosophy of the present paper is that we particularly wish to study the characteristics of the solitons which evolve from the internal tides in the Bay of Biscay by the process of nonlinear steepening and dispersion, so that we may compare them with the observed solitons (and hence deduce

the relevance of this mechanism in the real world). For this purpose, it is apparent that f should not be considered as a small effect, so that the Ostrovskiy equation is inadequate for our needs. For instance, the internal tides in the Bay of Biscay have wavelengths of order 50 km, much longer than the typical ocean depth (4 km), and for these tides (with phase speeds of order 1 ms^{-1}), the earth's rotation is easily shown to be important, and an $O(1)$ effect. (In other words, the frequency of the internal tides, $1.405 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, is close to f , $1.055 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.) For instance, f increases the phase speed of these tides by over 50% (as can be deduced from equation (9) below, or from the simple two-layer linear theory in PINGREE *et al.*, 1986). So, in order for the initial conditions in the present study to represent anything like a realistic internal tide (from which the solitons are to form), f must be included as an $O(1)$ effect (so that it will be present in the zeroth order solution). Of course, once the solitons have been formed, their wavelength (1-3 km) is such that f is of essentially no *direct* importance for them. However, it seems clear that f will be important in their generation process, since they form from the longer wavelength internal tides. Furthermore, even once they have been formed, the solitons will still be interacting with the underlying internal tidal field, either through the effects of the velocity field, or the long-wavelength variation in the stratification, imposed by the internal tide. Hence it is clear that f will affect the characteristics of the ensuing solitons by affecting the internal tide, and that f must therefore be included in the theory as an $O(1)$ effect. The need to include f as an $O(1)$ effect is furthermore supported by the above findings of GERKEMA (1996).

Consequently, we feel the Ostrovskiy equation is not adequate for these purposes, and the goal of the present paper is to derive a suitable evolution equation (for the continuously stratified case) based around the often-used KdV dynamics, and which does include f as an $O(1)$ effect. We will see that it is also possible to remove the *a priori* restriction on the vertical structure of the solution which is inherent in the Ostrovskiy equation. The inclusion of continuous stratification, as opposed to the two-layer case of GERKEMA (1996), will furthermore enable (in future studies) a detailed investigation of the vertical structure of the internal solitary waves to be undertaken.

For the present work, we therefore aim to describe the characteristics of the model solitons which form, under a suitable theory, from initial conditions representing realistic internal tides, and undertake a comparison with observations. In so doing, we intend to elucidate the extent to which the solitons in the real world are formed by the process of nonlinear steepening and dispersion. The KdV-type theory is viewed as appropriate since we will con-

sider the development of the solitons from an initial condition representing an internal tide which is long in comparison with the ocean depth (even though the resulting solitary waves have a wavelength comparable with the ocean depth). Our analysis is therefore essentially an extension of the work of LEE and BEARDSLEY (1974) to include the effects of the earth's rotation, and the comparisons are undertaken for the large solitons which occur in the central Bay of Biscay since this is where detailed observations have been made. Since these solitons are near their generation site, the effects of radial spreading and dissipation (likely to be important only over distances of order 100 km or more, LIU *et al.*, 1985) are not included here.

The paper is organised in the following way. Section 2 presents the derivation of the necessary equations, while section 3 describes their numerical solution and application to the Bay of Biscay. The model results are then presented in section 4, where a comparison with observations is also made. Throughout, we will distinguish the longer wavelength (order 50 km) internal tides or tidal waves from the much shorter wavelength (order 1-3 km) internal waves, which we will call "solitary" waves or "solitons" if they appear to take the form of nonlinear, asymmetric entities, rather than forming part of a regular, sinusoidal wavetrain.

2. Development of Theoretical Model

Initially we follow the work of LEE and BEARDSLEY (1974), except that whereas they allow the inclusion of background shear and non-Boussinesq effects, the present method instead includes the effects of the earth's rotation. The nonlinear equations of motion and continuity for a Boussinesq fluid which has no variations in the y -direction are:

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x + wu_z - fv &= -\frac{1}{\rho_0} p_x, \\
 v_t + uv_x + wv_z + fu &= 0, \\
 w_t + uw_x + ww_z &= -\frac{1}{\rho_0} p_z - \frac{\rho}{\rho_0} g, \\
 \rho_t + u\rho_x + w\rho_z &= 0, \\
 u_x + w_z &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

where u , v and w are the horizontal (in the x and y directions respectively) and vertical velocity components, p the pressure, ρ the fluid density (with reference value ρ_0), g the acceleration due to gravity, f the Coriolis parameter, z the vertical coordinate (increasing upwards), and t is time. All quantities are then non-dimensionalised by writing:

$$\begin{aligned}
x &= lx'; \quad z = Dz', \\
t &= l(\sigma g D)^{-1/2} t'; \quad f = l^{-1}(\sigma g D)^{1/2} f', \\
u &= \varepsilon(\sigma g D)^{1/2} u'; \quad v = \varepsilon(\sigma g D)^{1/2} v'; \quad w = \varepsilon \delta^{1/2}(\sigma g D)^{1/2} w', \\
\rho &= \rho_0 [1 + \sigma \bar{\rho}(z) + \sigma \varepsilon \rho'(x, z, t)], \\
\varepsilon &= a/D; \quad \delta = D^2/l^2; \quad \sigma = \Delta\rho/\rho_0, \\
c &= (\sigma g D)^{1/2} c',
\end{aligned} \tag{2}$$

where a prime indicates a nondimensionalised quantity. Here, a , l and D are the characteristic amplitude, and horizontal and vertical lengthscales of the initial disturbance, and $\Delta\rho$ represents the magnitude of the vertical density variation. Note that, with the choices for σ , l and D as indicated below, the nondimensional value of the earth's rotation is $f' = 1.68$, clearly of $O(1)$. We consider ε as representing the effects of nonlinearity, and δ the effects of frequency dispersion. The parameter δ arises from the expectation that the ratio of the vertical to the horizontal velocities scales as D/l , which is clear from a consideration of the continuity equation above. Further, the (dimensional) background density field is $\rho_0(1 + \sigma \bar{\rho}(z))$, where $\bar{\rho}$ is nondimensional, and ρ' is the (nondimensional) perturbation due to the waves. Also, c represents a typical phase speed.

Introducing the dimensionless variables, cross-differentiating the u and w equations to form the vorticity equation, and dropping the primes for convenience, results in the following non-dimensional equations:

$$\begin{aligned}
\rho_t + \varepsilon \psi_z \rho_x - \varepsilon \psi_x \rho_z - \bar{\rho}_z \psi_x &= 0, \\
v_t + \varepsilon \psi_z v_x - \varepsilon \psi_x v_z + f \psi_z &= 0, \\
(\psi_{zt} + \varepsilon \psi_z \psi_{zx} - \varepsilon \psi_x \psi_{zz})_z - \delta \times \\
\times (-\psi_{xt} - \varepsilon \psi_z \psi_{xx} + \varepsilon \psi_x \psi_{xz})_x - f v_z - \rho_x &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

where the streamfunction ψ has been defined from the continuity equation as:

$$u = \psi_z; \quad w = -\psi_x \tag{4}$$

with boundary conditions $\psi_x = 0$ on $z = 0$ (the water surface, at which the "rigid lid" condition is applied) and $z = -h$, the (nondimensional) water depth (assumed constant). We now expand the (nondimensional) quantities as:

$$\begin{aligned}
\psi &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^j \psi^{ij}, \\
\rho &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^j \rho^{ij}, \\
v &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^j v^{ij},
\end{aligned} \tag{5}$$

where, for instance, ψ^{ij} is the component of the streamfunction at order i for ε and j for δ . (Note that since the equations (3) contain no explicit occurrence of the third small parameter σ (unlike the study of LEE and BEARDSLEY, 1974), we do not need to include the appropriate terms in the expansions here.) Throughout the following, we search for separable solutions in which the vertical structure is decoupled from the horizontal and time-like structure, in order to determine a wave equation with only x and t as independent variables which can be efficiently solved numerically. We also make the implicit assumption that ε and δ are of the same order of magnitude (which results from the choices of a , l and D below), since the analysis will ultimately retain all terms up to first order in both parameters.

Now firstly consider the zeroth order solution. The expansions (5) are substituted into (3), and all terms of first order and higher are neglected. This results in the zeroth order equations:

$$\begin{aligned}
\psi_{zzt}^{00} - f v_z^{00} - \rho_x^{00} &= 0, \\
v_t^{00} + f \psi_z^{00} &= 0, \\
\rho_t^{00} - \bar{\rho}_z \psi_x^{00} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Eliminating v and ρ by suitable cross-differentiations, we may then find a separable solution of the form

$$\begin{aligned}
\psi^{00} &= A(x, t) \phi^{00}(z), \\
A_{tt} + f^2 A &= c_0^2 A_{xx}, \\
\phi_{zz}^{00} - \frac{\bar{\rho}_z}{c_0^2} \phi^{00} &= 0, \\
\phi^{00}(0) &= \phi^{00}(-h) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Thus the earth's rotation is included in the zeroth order theory. Further, using the kinematic relation, correct to lowest order, between the vertical ve-

locity and the displacement of fluid particles from their mean position η , namely

$$w = \eta_t, \quad (8)$$

the complete zeroth order (nondimensional) solution then takes the form

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cos(\theta), \quad \theta = k(x - ct), \quad c^2 = c_0^2 + \frac{f^2}{k^2}, \\ \psi^{00} &= A_0 \cos(\theta) \phi^{00}, \\ v^{00} &= \frac{f}{kc} A_0 \sin(\theta) \phi_z^{00}, \\ \rho^{00} &= -\frac{\bar{\rho}_z}{c} A_0 \cos(\theta) \phi^{00}, \\ \eta^{00} &= \frac{A_0}{c} \cos(\theta) \phi^{00}. \end{aligned} \quad (9)$$

Here, A_0 is a constant, c is the phase speed of the disturbance, defined as the ratio of the wave frequency (taken as the semidiurnal tidal frequency) to the wavenumber k , and ϕ^{00} and c_0 are the eigenfunctions and eigenvalues of (7). These eigensolutions are evaluated by a numerical "shooting" method (starting from the surface and integrating downwards), and correspond to a countably infinite set of modes of possible internal oscillations of the water column with different values of c and k . At this stage, each eigensolution ϕ^{00} is arbitrary to within a multiplicative constant. However, since the dimensional displacement of the fluid particles is simply

$$\eta^{00*} = \frac{aA_0}{c} \cos(\theta) \phi^{00} \quad (10)$$

(denoting dimensional quantities by $*$) and requiring (without loss of generality) a to be the (dimensional) amplitude of the zeroth order solution at the depth of the seasonal thermocline (h_{therm}), we take

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ \phi^{00}(-h_{therm}) &= c \end{aligned} \quad (11)$$

which removes the arbitrariness from ϕ^{00} .

Now let us consider the first order solution. Substituting the expansions (5) into (3), retaining all terms up to first order, then cross-differentiating as

for the zeroth order solution, we derive the following streamfunction equation:

$$\begin{aligned} & \psi_{zzt}^{00} - \bar{\rho}_z \psi_{xx}^{00} + f^2 \psi_{zz}^{00}, \\ & + \varepsilon \left\{ \psi_{zzt}^{10} - \bar{\rho}_z \psi_{xx}^{10} + f^2 \psi_{zz}^{10} + \left[\psi_z^{00} \psi_{zzx}^{00} - \psi_x^{00} \psi_{zzz}^{00} \right]_t, \right. \\ & + \left. \left[\psi_z^{00} \rho_x^{00} - \psi_x^{00} \rho_z^{00} \right]_x + f \left[\psi_z^{00} v_x^{00} - \psi_x^{00} v_z^{00} \right]_z \right\}, \\ & + \delta \left\{ \psi_{zzt}^{01} - \bar{\rho}_z \psi_{xx}^{01} + f^2 \psi_{zz}^{01} + \left[\psi_{xxt}^{00} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Notice that the curly brackets containing terms explicitly of order ε and δ would, if separately set to zero (which is valid since ε and δ are independent parameters), result in equations for ψ^{10} and ψ^{01} similar to the equation for ψ^{00} , except that they would contain the forcing terms in the square brackets from the zeroth order solution. We now evaluate the terms in ψ^{00} in (12), using the zeroth order solution for the terms in the ε and δ brackets to exchange t - and x -derivatives (ie $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x}$), rewrite ϕ_{zz}^{00} in terms of ϕ^{00} and $\bar{\rho}_z$, and perform simple trigonometric reorganisations, incurring only second order errors, to find:

$$\begin{aligned} & (A_{tt} + f^2 A - c_0^2 A_{xx}) \phi_{zz}^{00} + \varepsilon \left\{ \psi_{zzt}^{10} - \bar{\rho}_z \psi_{xx}^{10} + f^2 \psi_{zz}^{10} + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \left[\frac{c}{c_0^2} + \frac{1}{c} + \frac{f^2}{2c_0^2 ck^2} \right] \bar{\rho}_{zz} (\phi^{00})^2 (A^2)_{xx} + \frac{f^2 A_0^2}{2c} \left[\phi^{00} \phi_z^{00} \right]_{zz} \right\} + \\ & + \delta \left\{ \psi_{zzt}^{01} - \bar{\rho}_z \psi_{xx}^{01} + f^2 \psi_{zz}^{01} + \left[\phi^{00} A_{xxt} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Here, the first two square brackets in (12) give respectively the first two terms in the first square bracket in (13), while the third square bracket in (12) gives the third term in the first square bracket, and second square bracket, in (13).

We now follow the accepted philosophy of LEE and BEARDSLEY (1974): since we are undertaking a first order analysis, we allow the zeroth order equation for A to be perturbed by terms of order ε and δ . It is clear from inspection of (13) that if we add terms of order ε and δ to the right hand side of the zeroth order A -equation (in equation 7), then these terms will be multiplied by ϕ_{zz}^{00} and appear in the curly brackets containing terms of order ε and δ in (13). Now, all the x - and t -dependence of the forcing

terms in the ε bracket in (13) is proportional to $(A^2)_{xx}$, and for the δ bracket proportional to A_{xxt} , and this suggests that the A -equation should be perturbed to the form:

$$A_{tt} + f^2 A = c_0^2 A_{xx} + \varepsilon r (A^2)_{xx} + \delta s A_{xxt}, \quad (14)$$

where r and s are constants to be found. It will be seen that this forms the governing evolution equation for the present work, and that the approach is further justified by finding the separable solutions below.

Now let us search for separable solutions of the form:

$$\begin{aligned} \psi^{10} &= A^2(x,t)\phi^{10}(z) + \frac{1}{2}A_0^2\bar{\phi}^{10}(z), \\ \psi^{01} &= A_{xx}(x,t)\phi^{01}(z) \end{aligned} \quad (15)$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} \phi^{10}(0) &= \phi^{10}(-h) = 0, \\ \bar{\phi}^{10}(0) &= \bar{\phi}^{10}(-h) = 0, \\ \phi^{01}(0) &= \phi^{01}(-h) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

The form of ψ^{10} was chosen so that the A^2 term would, when substituted into the ε bracket of equation (13), give terms with x - and t -dependence similar to that of the forcing functions, and the term dependent only upon z (ie the $\bar{\phi}^{10}$ term) was included to balance the term also dependent only on z already in the ε bracket. A similar reasoning explains the choice for the form of ψ^{01} . This is made clear by proceeding with the substitution of (15) into (13), and, since ε and δ are independent parameters, separately equating the terms of order ε and δ to zero. The terms of order ε give:

$$\begin{aligned} (A^2)_{tt}\phi^{10} - \bar{\rho}_z (A^2)_{xx}\phi^{10} + f^2 A^2\phi_{zz}^{10} + \frac{1}{2}f^2 A_0^2\bar{\phi}_{zz}^{10} + \\ + \frac{c_1^2}{cc_0^2}\bar{\rho}_{zz}(\phi^{00})^2(A^2)_{xx} + \frac{f^2 A_0^2}{2c}[\phi^{00}\phi_z^{00}]_{zz} + r\phi_{zz}^{00}(A^2)_{xx} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

where we have defined

$$c_1^2 = c_0^2 + \frac{3}{4}\frac{f^2}{k^2} \quad (18)$$

in order to simplify the terms including $\bar{\rho}_{zz}$, and the final term (proportional to r) has resulted from the perturbation to the A -equation. Again, since all terms in (17) are proportional to ε , we may now use the properties of the zeroth order solution for A , with only second order errors resulting, to convert t -derivatives to x -derivatives in the first term in (17), and to use simple trigonometric formulae to rewrite A^2 in terms of A_0^2 and $(A^2)_{xx}$. This enables (17) to be re-formulated as:

$$\left[(A^2)_{xx} \left\{ c^2 \phi_{zz}^{10} - \bar{\rho}_z \phi^{10} - \frac{f^2}{4k^2} \phi_{zz}^{10} + \frac{c_1^2}{cc_0^2} \bar{\rho}_{zz} (\phi^{00})^2 + r \phi_{zz}^{00} \right\} \right] + \left[\frac{1}{2} f^2 A_0^2 \left\{ \phi_{zz}^{10} + \bar{\phi}_{zz}^{10} + \frac{1}{c} (\phi^{00} \phi_z^{00})_{zz} \right\} \right] = 0. \quad (19)$$

Now since the first square bracket in (19) depends on x , z and t , and the second square bracket depends only on z (since A_0 is a constant), both curly brackets must be separately equal to zero. This then gives

$$\phi_{zz}^{10} - \frac{\bar{\rho}_z}{c_1^2} \phi^{10} + \frac{\bar{\rho}_{zz}}{cc_0^2} (\phi^{00})^2 + \frac{r}{c_1^2} \phi_{zz}^{00} = 0, \quad (20)$$

$$\bar{\phi}^{10} = -\phi^{10} - \frac{1}{c} \phi^{00} \phi_z^{00},$$

where the first and third terms of the first curly bracket in (19) have been combined (using the definition of c_1), and the second curly bracket has been integrated twice, with the boundary conditions (equation (16)) being used to set the constants of integration to zero. The solution of (20) then provides the vertical eigenfunction ϕ^{10} and the eigenvalue r , as well as defining the complementary function $\bar{\phi}^{10}$.

Following a similar procedure for terms of order δ in (13), that is, substituting the assumed form of ψ^{01} , using the perturbed form of the A -equation, and setting all terms of order δ to zero, we find

$$A_{xxit} \phi_{zz}^{01} - \bar{\rho}_z A_{xxxx} \phi^{01} + f^2 A_{xx} \phi_{zz}^{01} + A_{xxit} \phi^{00} + s A_{xxit} \phi_{zz}^{00} = 0. \quad (21)$$

Again, since we are now evaluating terms of order δ , we use the properties of the zeroth order solution for A , incurring only second order errors, to firstly combine the first and third terms in (21), and then to convert x -derivatives to t -derivatives so that all terms are proportional to A_{xxtt} . The x - and t -dependence can then be cancelled to leave:

$$\phi_{zz}^{01} - \frac{\bar{\rho}_z}{c_0^2} \phi^{01} + \frac{c^2}{c_0^2} \phi^{00} + s \frac{c^2}{c_0^2} \phi_{zz}^{00} = 0, \quad (22)$$

the solution of which provides the eigenfunction ϕ^{01} , and the eigenvalue s (which can be explicitly determined as shown below).

Now, the eigenvalue r can only be found by a numerical "shooting" method, since equation (20) contains the new speed c_1 . However, s may be obtained directly from a compatibility condition arrived at by multiplying (22) by ϕ^{00} , integrating over the water column, and using the boundary conditions on ϕ^{01} and ϕ^{00} . This yields:

$$s = -c_0^2 \frac{\int_h^0 (\phi^{00})^2 dz}{\int_h^0 \bar{\rho}_z (\phi^{00})^2 dz}. \quad (23)$$

Again, ϕ^{10} and ϕ^{01} have some arbitrariness, which will be addressed below.

3. Numerical Solution and Application to the Bay of Biscay

For the numerical solution, a vertical grid of 881 depth levels was implemented with a resolution of 1 m in the top 150 m to resolve the seasonal thermocline, and 5 m for the deeper ocean (down to a depth of 3800 m). In the horizontal, a grid of 1000 points was implemented to cover the wavelength (about 50 km) of the initial disturbance, giving a horizontal resolution of some 50 m. Let us denote these grids by $j = 1$ to 881 (with j increasing downwards from the surface) and $i = 1$ to 1000 (with i increasing in the positive x direction). Also, let us take a as the amplitude of the zeroth order contribution to the initial displacement field at a depth of 50 m, representing the depth of the summer thermocline (a being typically of the order of 10 m), $D = 3000$ m (ie taken as the vertical wavelength of a complete oscillation of ϕ^{00}), $l = 50$ km (a typically-observed internal tide wavelength), and

$\sigma = 10^{-3}$, so that ε and δ are indeed both small parameters, and of the same order of magnitude.

Previous work, combining observations and linear models (NEW, 1988; PINGREE and NEW, 1989, 1991) has indicated that the internal tidal motion oceanwards of the shelf break in the Bay of Biscay can be well represented if the vertical stratification is taken as shown in Fig. 1, with a total ocean depth of 3800 m. The mean density profile $\bar{\rho}$ was constructed from CTD observations in the top 600 m of the water column taken oceanwards of the shelf break in the summer of 1987 (CTDs 1, 2, 3, 5 and 20 in PINGREE and NEW, 1989), matched to the observations of PINGREE and MORRISON (1973) in the deeper ocean (with the region below 2785 m set equal to a constant density gradient). Fig. 1 shows the corresponding (dimensional) Brunt-Vaisala frequency (N) profile, where

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad (24)$$

and ρ_0 was taken as $1026.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, and this was used in the present work. Previous studies (PINGREE *et al.*, 1986; NEW, 1988) have also shown that the summer thermocline oceanwards of the shelf break in the Bay of Biscay is typically dominated by a mode 3 internal tide, with a wavelength between 45-55 km, and a corresponding phase speed between $1.0\text{--}1.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Consequently, (7) was solved for ϕ^{00} (see Fig. 2) and c_0 to produce a mode 3 internal tide at zeroth order (with the scaling as in (11), and taking the depth of the seasonal thermocline as $h_{therm} = 50 \text{ m}$, from Fig. 1). Taking the semidiurnal frequency as $1.4052 \times 10^{-4} \text{ r} \cdot \text{s}^{-1}$, and $f = 1.0547 \times 10^{-4} \text{ r} \cdot \text{s}^{-1}$ (appropriate to the latitude of $46^\circ 20' \text{N}$), this was then found to yield a zeroth order (tidal) dimensional phase speed of $1.114 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ and a wavelength of 49.8 km, in close agreement with the observed phase speeds and wavelengths.

We now proceed to complete the definition of the initial condition, and in so doing, remove the arbitrariness from ϕ^{10} and ϕ^{01} . Firstly, the (nondimensional) streamfunction, correct to first order, is

$$\psi = A\phi^{00} + \varepsilon \left[\left(A^2 - \frac{1}{2} A_0^2 \right) \phi^{10} - \frac{1}{2} \frac{A_0^2}{c} \phi^{00} \phi_z^{00} \right] + \delta A_{xx} \phi^{01} \quad (25)$$

$$N \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

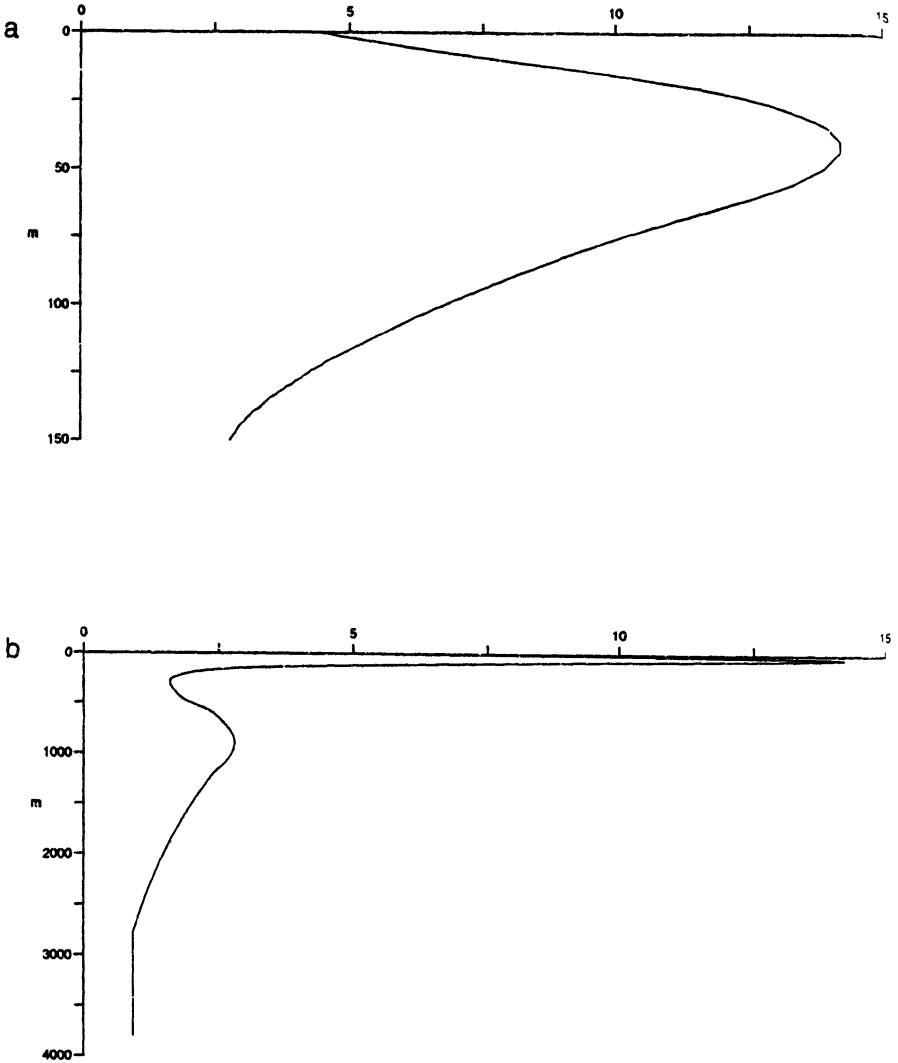


Fig. 1. Brunt-Vaisala frequency ($N \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$) profile used for the present work, and derived from observations (see text for details). (a) Uppermost 150 m of the water column. (b) Full depth profile

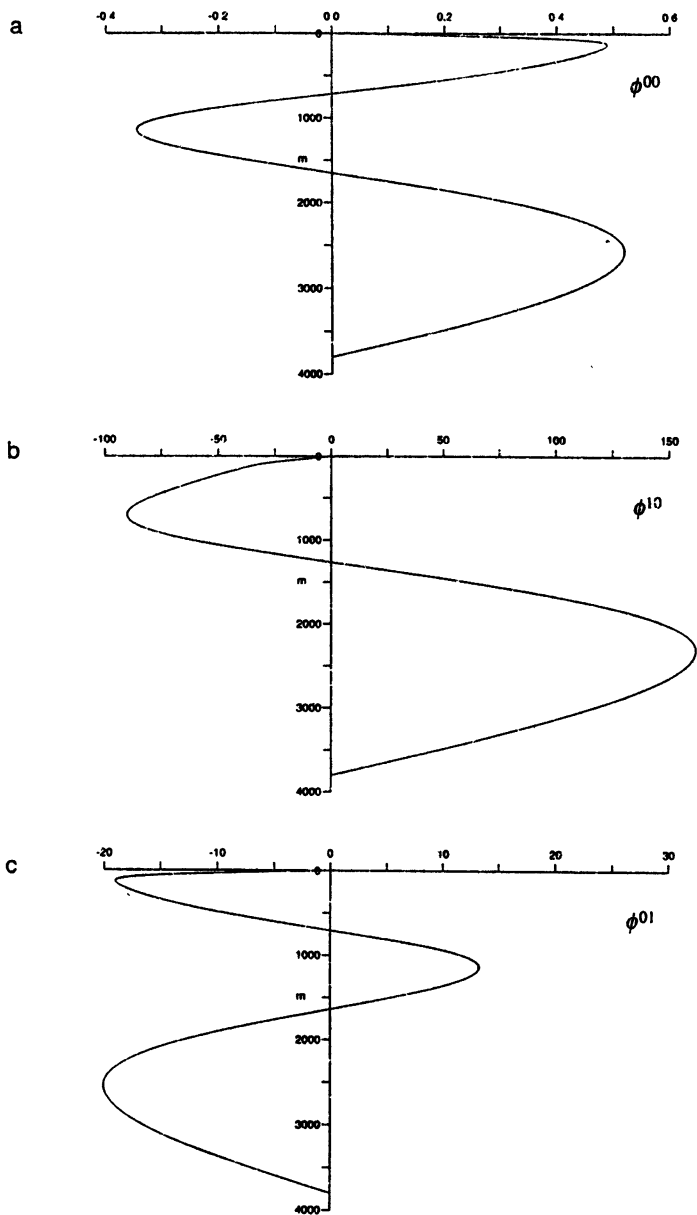


Fig. 2. Vertical structure functions (a) ϕ^{00} , (b) ϕ^{10} and (c) ϕ^{01} , scaled as described in the text

for all time. (Note that the terms which depend only upon z in this expression, when differentiated with respect to z , give a steady, but depth-dependent, horizontal mean flow of order ε which can be considered as the Stokes flow associated with the waves.) Now, at the initial time, let us take A to be given by the zeroth order expression in equation (9), since it seems natural not to include higher order terms at this stage. (This and the other assumptions leading to the form of the initial condition may be justified by the realism of the initial condition as shown below.) Then, for subsequent times, A will differ from this expression only by first order contributions. To evaluate u and w in the present work, we therefore use appropriate derivatives of (25), with the zeroth order expression for A inserted into those terms explicitly of first order (incurring only second order errors).

Now consider the vertical displacement of a fluid particle moving on a material surface $z = z_0 + \eta(x, t)$, with the mean level z_0 . The full kinematic boundary condition is:

$$w = \frac{D\eta}{Dt} = \eta_t + u\eta_x, \quad (26)$$

where u and w are evaluated on the material surface. However, to facilitate matters, it is convenient to adopt the usual approach (ie as in OSTROVSKIY, 1978) of evaluating all quantities at the mean position of the surface. Performing Taylor series expansions for u and w about $z = z_0$, therefore, nondimensionalising and again retaining terms only up to first order, gives the (nondimensional) equation

$$\eta_t = w - \varepsilon u\eta_x + \varepsilon \eta w_z, \quad (27)$$

where u , w and w_z are now evaluated on $z = z_0$. This equation was numerically integrated to evaluate the displacement field η throughout the integration, starting from a particular initial condition, which we will now consider.

Using the zeroth order solution to evaluate the terms of order ε in (27) as trigonometric expressions (incurring only second order errors), and writing

$$w = -\psi_x = \frac{1}{c} \psi_t \quad (28)$$

at (or near) time $t = 0$ (since A , and hence ψ , is at that time a function of x and t only in the combination $(x-ct)$), equation (27) may be integrated (for times near $t = 0$) to give the nondimensional initial displacement field as:

$$\eta = \eta_1 \cos(\theta) + \eta_2 \cos(2\theta),$$

$$\theta = k(x - ct),$$

$$\eta_1 = \frac{1}{c}(\phi^{00} - \delta k^2 \phi^{01}), \quad (29)$$

$$\eta_2 = \frac{\varepsilon}{2c}(\phi^{10} + \frac{1}{c}\phi^{00}\phi_z^{00}).$$

In addition, the dimensional displacement field is simply $\eta^* = a\eta$, so that, at the initial time, the dimensional amplitude (half the crest to trough height) of the complete (first order) wave is given from (29) by:

$$\eta_{\text{amp}}^* = \frac{a}{c}(\phi^{00} - \delta k^2 \phi^{01}). \quad (30)$$

Now, ϕ^{00} has already been determined from (7) by integrating downwards from the surface, and some set value of ϕ^{00} at $j = 2$ ($\phi^{00}(2)$, say), changing the eigenvalue c_0 until the bottom condition is satisfied. Since the complete ϕ^{00} profile scales in direct proportion to $\phi^{00}(2)$, satisfying the condition on ϕ^{00} in (11) then determines the value of $\phi^{00}(2)$. With this choice for ϕ^{00} , and the given stratification, we then find the linear relations

$$\begin{aligned} \phi^{10}(51) &= -0.002413 \left(\frac{D}{\sigma}\right)^{1/2} + 44.57 \phi^{10}(2), \\ \phi^{01}(51) &= 8487 (\sigma D^5)^{-1/2} + 44.57 \phi^{01}(2), \\ \phi_z^{00}(51) &= -0.004978 \left(\frac{D}{\sigma}\right)^{1/2}, \\ r &= -0.004832 \sigma^{-1} - 6.701 (\sigma D)^{-1/2} \phi^{10}(2), \end{aligned} \quad (31)$$

so that, while s is independent of the choice of $\phi^{01}(2)$, the choice of $\phi^{10}(2)$ affects the value of r , so that care is needed.

Now, since the equations for ϕ^{10} and ϕ^{01} are second order differential equations, we need two relationships to determine the values of $\phi^{10}(2)$ and $\phi^{01}(2)$, (or, equivalently but more physically, the values of $\frac{\partial \phi^{10}}{\partial z}$ and $\frac{\partial \phi^{01}}{\partial z}$ at the surface), in addition to the surface and bottom boundary conditions

in (16), so that the shooting method may be applied to determine the form of the respective eigenfunctions and the eigenvalue r . From (31), we see this is equivalent to finding relationships for the values of these functions at the thermocline ($j = 51$), $\phi^{10}(51)$ and $\phi^{01}(51)$. From (29), we further see that this reduces to defining the two components η_1 and η_2 of the initial displacement field at the thermocline.

Firstly, from physical grounds, and by comparison with available observations, we expect small amplitude internal tides to approximate to a cosine wave, but that for larger amplitudes, the contribution from the nonlinear term η_2 would become relatively more important in such a way as to broaden the crests and deepen the troughs. Consequently, we define the ratio

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = -\frac{1}{4} \frac{a}{a_{\max}} \quad (32)$$

at the thermocline depth ($j=51$): that is, that the ratio should increase linearly in proportion to a up to a maximum ratio of $-1/4$ at $a = a_{\max}$. This results in the property of a "flat" crest ($\eta_{00} = 0$) for a wave of "maximum" amplitude, for which a would be equal to a_{\max} , and η_{amp}^* would be equal to η_{\max}^* (say). A second relationship is provided by the empirically determined requirement that, for large solitons to form from the wave of maximum amplitude, we need to satisfy:

$$\varepsilon_{\max} r = \frac{-30}{\sigma D \cdot 10^3}, \quad (33)$$

where $\varepsilon_{\max} = a_{\max} / D$. Equations (32) and (33), when coupled with (31) and (29), then provide two relationships to determine η_1 and η_2 at the thermocline, or, alternatively the values of $\phi^{10}(2)$ and $\phi^{01}(2)$. Consequently, the form of the initial tidal wave profile at the thermocline is used to remove the arbitrariness in the eigenfunctions ϕ^{10} and ϕ^{01} . The overall justification for this approach is that the initial tidal profiles do have a physically acceptable and realistic appearance, as shown in Fig. 3 below.

The resulting modal structure functions are shown in Fig. 2. While we see that ϕ^{00} and ϕ^{01} are mode 3 (and are similar, but not quite proportional to one another), with two interior zero crossings in the vertical, ϕ^{10} is rather different and has only one such zero crossing. The assumption in the Ostrovskiy theory that all three vertical structure functions are proportional to one another is therefore seen to be over-restrictive.

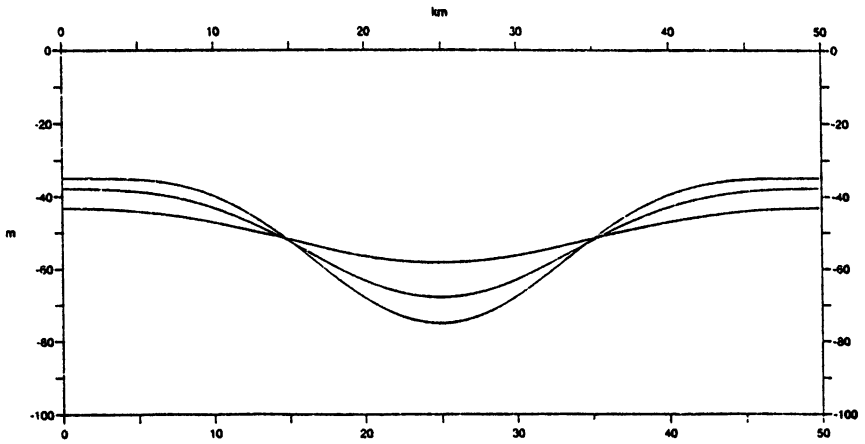


Fig. 3. Comparison of initial (dimensional) tidal wave displacement profiles at a mean depth of 50 m, with η_{amp}^* values of 7.5, 15 and 20 m, and for $\eta_{max}^* = 20$ m. The wavelength of the internal tide is 49.823 km

Fig. 3 now compares the initial model displacements at a depth of 50 m for a range of values of η_{amp}^* and for η_{max}^* taken as 20 m. For the lowest amplitude case ($\eta_{amp}^* = 7.5$ m), the solution is close to a cosine wave. But for the largest tide shown ($\eta_{amp}^* = 20$ m), the nonlinearity is significant and results in a trough which is relatively steep and narrow, compared to a relatively broad crest. (Note the "flat" crest property referred to above.) The amplitude of the largest tide here (20 m), is close to typically observed maximum tidal amplitudes of 25-30 m. In addition, Fig. 6 below shows that, as this tide evolves (ie when the solitons have formed), the overall model tidal amplitude increases still further due to nonlinear effects, so that a good match with observations is obtained.

We now proceed to numerically solve the governing equation for the present work, equation (14). Having set up the horizontal grid with 1000 points spanning the complete tidal wavelength (so that $\Delta x = 10^{-3}$ in nondimensional terms), and with cyclic boundary conditions throughout, a non-dimensional timestep of $\Delta t = \Delta x / 2c$ was taken in order to satisfy the basic stability criterion (giving 2000 timesteps per tidal period). The initial conditions, for timestep $n = 0$, were taken as:

$$\begin{aligned}
A_i^{n-1} &= A_0 \cos [k (i \Delta x + c \Delta t)], \\
A_i^n &= A_0 \cos [k i \Delta x],
\end{aligned}
\tag{34}$$

where i represents the horizontal coordinate ($x = i \Delta x$), and n represents time ($t = n \Delta t$). A straightforward centred-difference approximation to (14) was taken, since a von Neumann analysis indicated that this would provide a stable solution. This then yielded the implicit scheme:

$$\begin{aligned}
\alpha A_{i-1}^{n+1} + \beta A_i^{n+1} + \alpha A_{i+1}^{n+1} &= \kappa A_{i-1}^n + \mu A_i^n + \nu A_{i+1}^n - \alpha A_{i-1}^{n-1} - \beta A_i^{n-1} - \alpha A_{i+1}^{n-1}, \\
\alpha &= \frac{-\delta s}{c^2 \Delta x^2}, \quad \beta = \frac{2\delta s}{c^2 \Delta x^2} + 1, \\
\kappa &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[c_0^2 \Delta t^2 + \varepsilon r \Delta t^2 A_{i-1}^n - \frac{2\delta s}{c^2} \right], \\
\mu &= \left[\frac{-2c_0^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{2\varepsilon r \Delta t^2}{\Delta x^2} A_i^n + \frac{4\delta s}{c^2 \Delta x^2} - f^2 \Delta t^2 + 2 \right], \\
\nu &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[c_0^2 \Delta t^2 + \varepsilon r \Delta t^2 A_{i+1}^n - \frac{2\delta s}{c^2} \right].
\end{aligned}
\tag{35}$$

The coefficients of the unknowns (the values of A at the new time level) form a tridiagonal matrix (with two contributions at the top right and bottom left from the cyclic boundary conditions), which was solved with the NAG library routines F01BRF and F04AXF. As a test of the accuracy, the nonlinear and dispersive terms (or ε and δ) were set to zero to simulate a steadily-progressing wave, and the wave profile was followed for one wave period. The initial and final wave profiles were found to be visually indistinguishable from one another. Further, in subsequent runs with nonzero values of ε and δ , waves were followed for up to two wave periods without numerical instabilities forming, confirming that the scheme was numerically stable.

Finally, the cross-wave velocity component, ν , was evaluated from its governing equation, which in non-dimensional form, and with terms explicitly of second order and above neglected, is

$$\nu_t + \varepsilon (\psi_z^{00} \nu_x^{00} - \psi_x^{00} \nu_z^{00}) + f \psi_z = 0.
\tag{36}$$

The initial condition for ν was found, using methods similar to those for the determination of the initial displacement field η , by taking A near time zero to be the zeroth order expression (in equation (9)), and solving (36) analytically: The nondimensional cross-wave velocity at time $t = 0$ was then found to be:

$$\begin{aligned}
v &= v_1 \sin(\theta) + v_2 \sin(2\theta), \\
\theta &= k(x - ct), \\
v_1 &= \frac{f}{kc} \left(\phi_z^{00} - \delta k^2 \phi_z^{01} \right), \\
v_2 &= \frac{\varepsilon f}{4kc} \left(\phi_z^{10} - \frac{1}{c} \phi^{00} \phi_{zz}^{00} + \frac{1}{c} \phi_z^{00} \phi_z^{00} \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

4. Model Results and Comparison with Observations

We now investigate the likely range of model solutions which may occur between Neap and Spring tides in the Bay of Biscay. It turns out (see Fig. 6 below) that the largest internal tides can be approximated by taking $\eta_{amp}^* = \eta_{max}^* = 20$ m. Further, in the Bay of Biscay, the ratio of the surface tidal displacements at Neap tides to those at Spring tides is about 0.375, so that (under the assumption of a linear generation mechanism, NEW, 1988) Neap tides should be reasonably well described by the case $\eta_{amp}^* = 7.5$ m. By considering the evolution of tides with values of η_{amp}^* of 7.5, 15, and 20 m (ie from the initial conditions shown in Fig. 3), we should therefore cover the Neap-Spring tidal cycle. The resulting displacement fields at a depth of 50 m (taken as representative of the depth of the summer thermocline) for these three cases are shown in Fig. 4, 5 and 6 respectively, and for each case, the initial wave profile has a trough at $x = 25$ km.

Fig. 4 illustrates the case $\eta_{amp}^* = 7.5$ m (Neap tides). For this relatively small amplitude, the initial thermocline displacement is close to a pure cosine waveform. As the integration proceeds, the wave translates in the positive x -direction with only a small change in form, and at close to the linear tidal wave speed (which is $1.114 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). After a complete tidal period, there has been some slight broadening of the crest, and narrowing of the trough, and the trough itself is at $x = 26.9$ km, having travelled just over a complete wavelength. The wave profile is reasonably symmetric about a vertical line through the trough, and there is no evidence of the generation of higher-frequency wave components. The general appearance of the profile after one tidal period is qualitatively similar to solutions derived by PINGREE and NEW (1995) for waves of permanent form resulting from the nonlinear shallow water equations (without any dispersive effects).

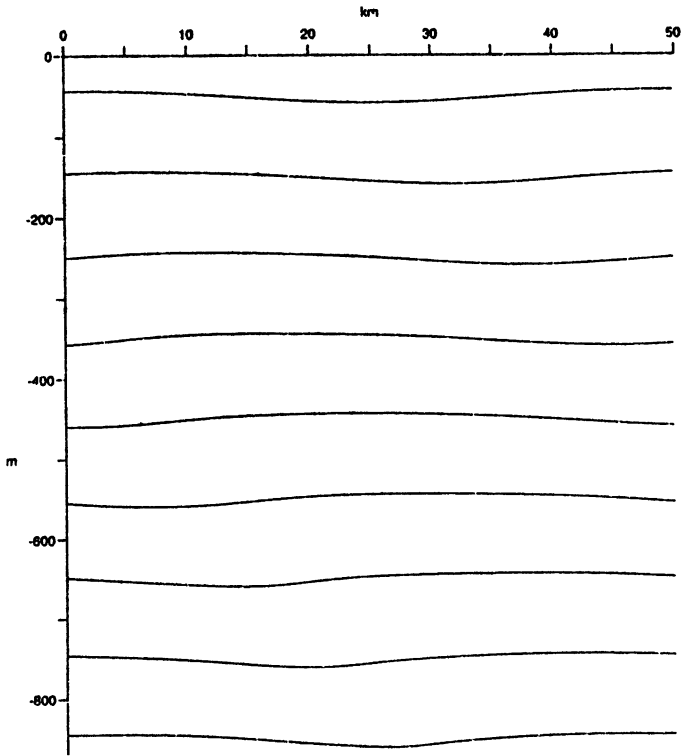


Fig. 4. Sequence of wave profiles showing the displacement at a mean depth of 50 m, at intervals of $1/8$ of the tidal period, for $\eta_{amp}^* = 7.5$ m (Neap tides). The uppermost profile is at time $t = 0$ hours, and subsequent profiles are successively offset by 100 m. The lowest profile is after a complete tidal period

As the initial tidal wave amplitude increases, the second order term plays a relatively larger part, so that the initial tidal profiles have flatter, broader crests and steeper, narrower troughs. Fig. 5 shows the case $\eta_{amp}^* = 15$ m, which corresponds to a tidal condition about 3 days before (or after) maximum Spring tides (assuming a sinusoidal variation for the tidal amplitude). As the integration proceeds, the increased amount of nonlinearity in the system is now sufficient to cause a moderate steepening of the (forward face of the) trough. After half a wave period, the leading edge of the trough is noticeably steeper than the trailing edge. Shortly after this time, by about $5/8$ of a tidal period, the first higher-frequency wave be-

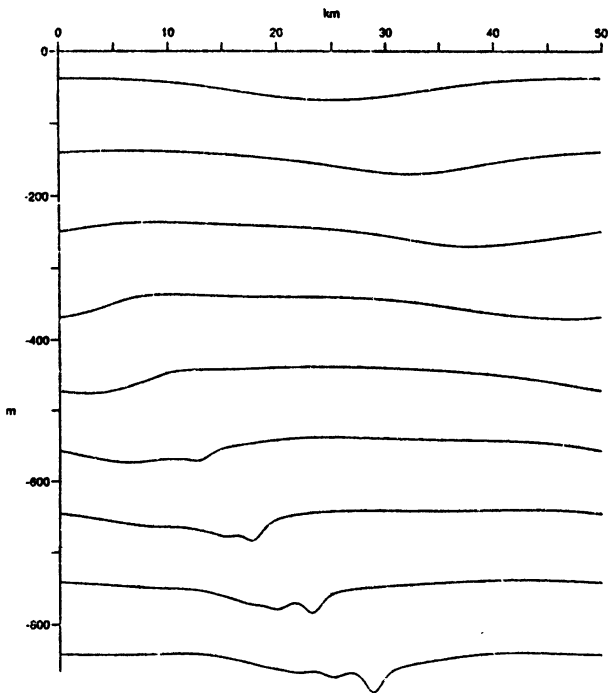


Fig. 5. Caption as for Fig. 4, except for $\eta_{amp}^* = 15$ m (intermediate case)

gins to form on the leading edge of the trough, as the dispersive term begins to become important. The amplitude of this feature then slowly grows. After a complete wave period, there is one reasonably well-formed solitary wave-like feature, at about $x = 29.3$ km, followed by one or two more wave-like features of smaller amplitude. So, in this case, the solitary wave-like feature forms relatively slowly, taking nearly a whole tidal period to appear, and is of relatively small amplitude, about 15 m.

For $\eta_{amp}^* = 20$ m (the Spring tide condition), Fig. 6 shows that the crest-trough asymmetry in the initial condition is now even more striking, and that this leads to the rapid evolution of the trough. After only $3/8$ of a tidal period, the leading edge of the trough has significantly steepened, and this leads to the first appearance of a higher frequency wave-like feature after only $4/8$ of the tidal period. The first soliton is reasonably well-formed after $5/8$ of the tidal period, and is followed by a train of smaller wave-like features. After one tidal period, the leading soliton (at about 30.9 km) is followed by two or three others of decreasing amplitude, and then by a wavetrain of smaller amplitude waves. Compared with the intermediate case

$\eta_{amp}^* = 15$ m, the Spring tide example shows the development of a packet of significantly larger solitons, and relatively quickly, with amplitudes reaching 25–30 m after only 6/8 of the tidal period.

In nature, we would expect that solitary waves which are only slowly forming, and not of large amplitude, such as those in Fig. 5, would be either dominated by some dissipative mechanism, or hidden within oscillations of the thermocline arising from other phenomena, and so would not be easily observed. The above examples therefore support our observational finding that internal solitary waves with significant amplitudes are only readily observable in the Bay of Biscay within two or three days either side of Spring tides.

Observations of internal tides and solitary waves in the central Bay of Biscay have been recorded by NEW and PINGREE (1990a) and NEW and PINGREE (1992). On both occasions, the ship maintained a near-constant position (to within about 1nm of the station position) for the duration of one semidiurnal tidal cycle, whilst making a continuous survey with expendable bathythermographs (XBTs) and a 150 kHz RDI Acoustic Doppler Current Profiler (ADCP). Both these surveys were made near Spring tides, since it was found that sizeable solitons were only readily observable near Spring tides. The model results for the Spring tide case ($\eta_{amp}^* = 20$ m) are therefore now compared with these observations. NEW and PINGREE (1990a) made their observations near 46°19'N, 7°14'W (position B) from R.R.S. *Challenger* in the summer of 1988 (5 July), whereas NEW and PINGREE (1992) recorded observations from R.R.S. *Discovery* near 45°57'N, 7°02'W (position C). Both these positions are in the central Bay of Biscay, in deep water (over 4000 m deep) about 150 km from the continental shelf break. This is approximately where the beam of internal tidal energy generated at the shelf break reflects from the sea surface (after previously reflecting from the sea floor), generating large internal tides and solitary waves there (see NEW and PINGREE, 1990a, and NEW and PINGREE, 1992). The internal tides and waves generally move approximately to the south, more or less directly away from the shelf break (actually in typical directions of 180–210°T).

Considering firstly the internal tide, the amplitude of the internal tide observed by NEW and PINGREE (1990a) at B (taken as half the depth difference between the trough and the average level of the two crests on either side) is approximately 30 m, whereas for position C (NEW and PINGREE, 1992) the internal tidal amplitude is somewhat smaller, about 25 m. Returning now to Fig. 6, the amplitude of the model internal tide at 7/8 of the tidal period (defined in the same way as for the observations) is found to be 27.5 m, in good agreement with the observations. (Note that the leading soliton is growing rapidly in Fig. 6 after a complete wave period, and further study of Richardson numbers has revealed that this feature may be consid-

ered as "breaking", so that our comparison here is instead taken at $7/8$ of the tidal period).

In the observations, the internal tidal trough is typically associated with two large solitary waves, followed by a third, or more, smaller waves (notwithstanding that at position C further large solitons were observed), and this is mirrored by the model results. Defining again the amplitudes for each soliton as half the mean displacement between the soliton trough and the two crests on either side, NEW and PINGREE (1990a) show that the largest solitons have typical amplitudes of 25-30 m at B, and NEW and PINGREE (1992) reveal soliton amplitudes of 30 m at position C. The model results show that the leading solitons after $7/8$ of the tidal period have amplitudes of about 26 m, again in good agreement with the observations.

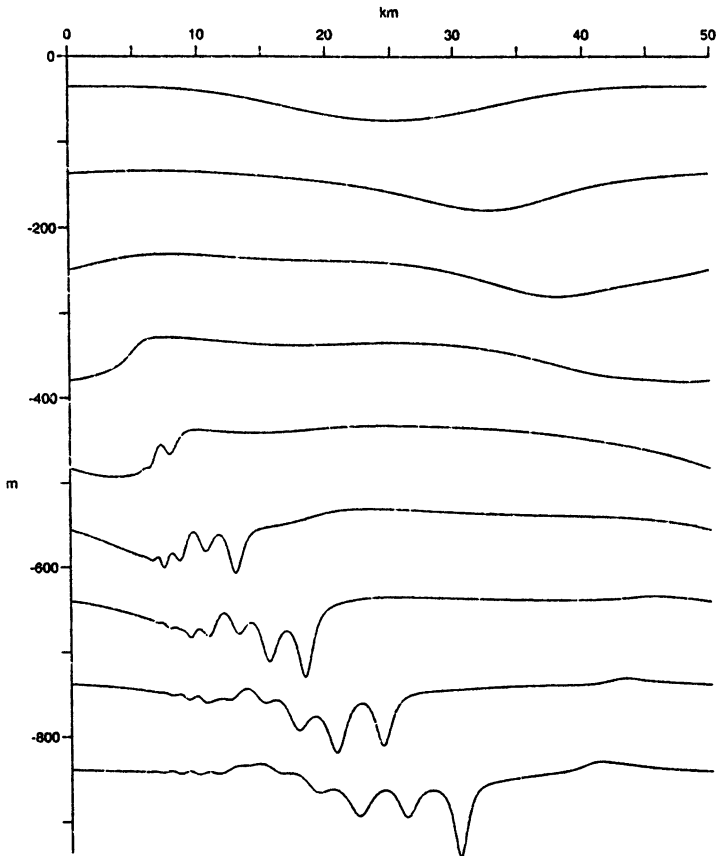


Fig. 6. Caption as for Fig. 4, except for $\eta_{amp}^* = 20$ m (Spring tides)

Fig. 7 now shows the evolution of the positions of the first four soliton troughs in the model for the Spring tide case. Each soliton is effectively "generated" (ie first observed) between about $x = 5-7$ km, and model times $t = 5-8$ hours, and then propagates with speeds which slowly increase in time. The leading soliton initially travels at about $0.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ close to its generation position, then at $0.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ by $t = 8$ hours, and finally at $1.10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ by $t = 11$ hours. The soliton then maintains approximately this speed for the remainder of the integration. This is in good agreement with previous estimates (deduced from direct observations) of the propagation speeds of the internal solitons of $1.10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (NEW and PINGREE, 1990a, position B) and $1.05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (which can be inferred from NEW and PINGREE, 1992, for position C), and also for the internal tides themselves ($1.03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, PINGREE *et al.*, 1986). The subsequent model solitons travel

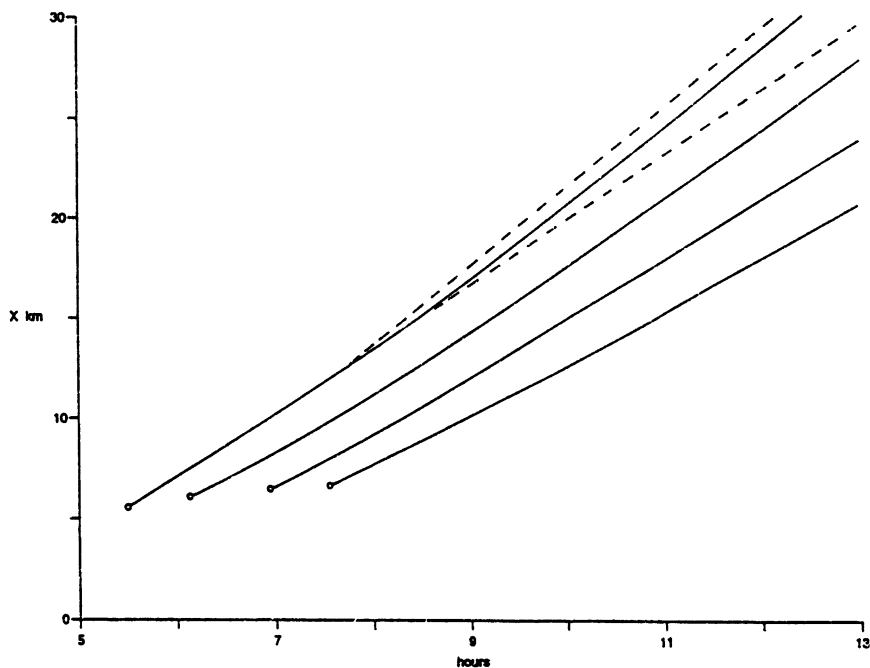


Fig. 7. Travel-time graph for the first four soliton troughs in the model for the Spring tides case. The axes are model time and horizontal distance. "Generation" positions for the solitons are indicated by the open circles, and broken lines representing speeds of 1.1 and $0.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ are shown for reference

successively more slowly, reaching speeds of about 0.96, 0.83 and 0.75 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ by $t = 11$ hours respectively. We note that, for the given stratification, the linear phase speed for internal waves of periods between 30 to 50 minutes is 0.737 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Consequently, all the model solitons have phase speeds which exceed the linear phase speeds for waves of the same periods due to their nonlinear nature. For the fourth (smallest) soliton, this increase in phase speed is almost negligible, but for the leading soliton, the increase is almost exactly sufficient to give the model soliton the same phase speed (1.10 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) as the much longer (but linear) model internal tide itself (1.11 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

The decrease in speed for successive solitons means that the features gradually separate as time increases, and there is a resulting growth in their wavelengths (defined as distances between neighbouring soliton troughs). The distance between the first two troughs increases from 1.7 km near the generation region to about 2.6 km by $t = 9$ hours, after which time the soliton may become large enough to undergo mixing (as indicated above). Likewise, the distances between the second and third pairs of troughs increase from 1.6 and 1.2 km (respectively) near their generation regions, to 2.3 and 1.9 km at $t = 9$ hours. Thus mean wavelengths during the early part of the waves' evolution (ie before breaking may be likely) are 2.1, 1.9, and 1.5 km for the first, second and third pairs of soliton troughs respectively. These values compare reasonably well with soliton wavelengths observed on the ship's radar of 1.7 km at position B (NEW and PINGREE, 1990a), and 1.9 km at position C (NEW and PINGREE, 1992). In fact, a more careful study during the 1990 survey (near position C) showed that from seven separate sets of solitary wave packets, the mean wavelength between the first two solitons was actually 1.8 km (range 2.5–1.3 km, standard deviation 0.38 km), that between the second pair was 1.6 km (range 3.5–0.9 km, standard deviation 0.80 km), and that between the third pair was 1.3 km (standard deviation 0.06 km, but only two observations were made). The model solitons are therefore on the whole slightly longer than those in the observations, but generally good agreement is obtained. This is also reflected in the solitary wave periods, being approximately 40 minutes in the model at $x = 10$ km, 30–40 minutes in the observations at position B, and about 35–40 minutes at position C.

5. Summary and Discussion

This paper has derived a new Korteweg-de Vries (KdV) type theory for internal waves in a rotating, continuously stratified fluid, in which the earth's rotation, f , is included as an $O(l)$ effect. The vertical structure, about which no *a priori* assumptions have been made, has been decoupled, and the governing equation (14) is for long waves and contains both weak (ie first

order) nonlinearity through the ϵ term, and weak dispersion through the δ term. The nonlinear term acts to steepen certain parts of the initial tidal wave profile until the dispersive term (acting preferentially upon the steepest parts of the wave since it is the highest order derivative) becomes important, whereupon the solitary-wave-like features form. The dispersive δ term is so-called because, for the linearised case (ϵ equal to zero), it results in waves of different wavelengths travelling at different speeds and dispersing (a phenomenon also caused by the inclusion of the earth's rotation). The governing equation contains derivatives which are one order higher than in the usual KdV-type equations, and this is because the earth's rotation has been included in the analysis. We consider that equation (14) is more appropriately termed a "Korteweg-de Vries" equation, rather than, say, a "Boussinesq" equation, since the initial internal tidal condition is certainly a long wave compared with the ocean depth (for which δ is indeed a small parameter). Although the wavelength of the solitons is comparable to (slightly smaller than) the full ocean depth, so that the original scaling is becoming marginal for these features, we particularly wished to investigate the extent to which the theory as currently presented was able to produce solitons with realistic characteristics.

The present theory is different from that leading to the Ostrovskiy equation (OSTROVSKIY, 1978) in several important respects. In this latter theory the earth's rotation, f , is considered as a small effect (that is, the frequency of the waves under consideration is not allowed to be too close to f), and does not affect the zeroth order solution. Now, whereas f will not be important for the relatively short-wavelength (1–3 km) solitons *per se*, we have shown that f plays a major role in setting the characteristics of the longer-wavelength (order 50 km) internal tides from which the solitons form, and with which they interact while propagating. Therefore, since we wish to explicitly study the development of the solitary waves from the internal tides, f must be included as a significant effect in the zeroth order formulation. The theory we have presented here is consequently fundamentally different from that of OSTROVSKIY (1978) in this respect. Other differences arise since the form of the vertical structure functions for the first order system in the Ostrovskiy theory are assumed to be the same as that in the zeroth order (linear) system. That is, the z-dependence of ψ^{10} and ψ^{01} is assumed *a priori* to be proportional to ϕ^{00} . As we have seen, the functions ϕ^{00} , ϕ^{10} , and ϕ^{01} take rather different forms for the present theory. These assumptions lead to the nonlinear and dispersive eigenvalues in the Ostrovskiy theory (ie equivalent to the r and s above) both being explicitly derivable from compatibility conditions (as integrals of the zeroth order

vertical structure function), rather than just s in the present theory. However, the assumption of similarity of the vertical structure functions in the Ostrovskiy theory, although making this simplification for the eigenvalues, leads to an unnecessarily restrictive description of the vertical structure of the motion.

The present theory has been applied to the Bay of Biscay, and the characteristics of the internal tides and solitary waves in the model generally compared well with those in the observations. We simulated a range of possible model solutions to cover the likely differences over the Spring-Neap tidal cycle, and showed that as the amplitude of the initial tidal wave increased, the solitons which resulted became more numerous, larger in amplitude, and formed more quickly. We also showed that large internal solitons only occurred in the model within a few days either side of Spring tides, confirming our belief derived from observations, and that these would be likely to form rapidly, within 6–8 hours or so. For the Spring tide comparison, the wavelength and amplitude of the underlying model internal tide compared well with values deduced from observed internal tides (justifying our choice of initial conditions), as did the amplitudes (up to 30 m) and phase speeds (about $1.10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) of the resulting solitary waves. The periods and wavelengths of the resulting model internal solitary waves were slightly longer than the periods and wavelengths of the solitary waves which have been observed in nature, but only by about 10–15%, so that generally good agreement was obtained here also. As a result of this encouraging comparison, we feel reasonably confident that the internal solitary waves in the Bay of Biscay result from nonlinear steepening of the internal tides, followed by frequency dispersion, and so can be considered to form as an undular bore, rather than as resulting from some other mechanism, for instance the preferential straining by the internal tide of some background field of shorter internal waves.

We also note that the largest solitons in the model are associated with the troughs of the internal tides, just as they are in the observations, appearing to be "trapped" there. Indeed, it often appears to be the case that the phase speed of the shorter but nonlinear solitons is almost exactly the same as the phase speed of the longer but linear internal tides. This is true for both the observations and for the modelled results. It is at present unknown why this should be so, unless the solitons are trapped by either the background velocity shear or long-lengthscale variation of the stratification imposed by the underlying internal tide (i. e. the soliton phase speed would be larger in the tidal trough where the thermocline is deeper). However, the "trapping" (or "phase speed matching") of the model solitons in the tidal troughs gives further confidence in the present theory, and that suitable physics is being retained therein.

In conclusion, we have derived a new Korteweg-de Vries type theory for internal waves in a rotating, continuously stratified fluid which includes both weak nonlinearity and weak dispersion, but unlike other similar theories, includes the earth's rotation as a zeroth order effect and does not make any *a priori* assumptions about the vertical structure of the waves. Furthermore, the theory has been successfully applied to the Bay of Biscay, where it reproduces the characteristics of the internal tides and solitary waves in an encouraging fashion.

Acknowledgements. We gratefully acknowledge several stimulating discussions with Robin Pingree, Theo Gerkema, Howell Peregrine and Keith Limbird on the subject matter of and background to this paper. We also thank anonymous reviewers for helpful comments on an early draft of this paper.

References

- BAINES P. G. (1982) On internal tide generation models. *Deep-Sea Research*, **29**, 307–338.
- BENJAMIN T. B. (1967) Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *Journal of Fluid Mechanics*, **29**, 559–592.
- BENNEY D. J. (1966) Long non-linear waves in fluid flows. *Journal of Mathematics and Physics*, **45**, 52–63.
- BRISCOE M. G. (1984) Tides, solitons and nutrients. *Nature*, **312**, 15.
- DJORDJEVIC V. D. and L. G. REDEKOPP (1978) The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography. *Journal of Physical Oceanography*, **8**, 1016–1024.
- GARRETT C. and W. MUNK (1975) Space-time scales of internal waves: a progress report. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 291–297.
- GERKEMA T. (1996) A unified model for the generation and fission of internal tides in a rotating ocean. *Journal of Marine Research*, **54**, 421–450.
- GRIMSHAW R. (1985) Evolution equations for weakly nonlinear, long internal waves in a rotating fluid. *Studies in Applied Mathematics*, **73**, 1–33.
- HOLLIGAN P. M., R. D. PINGREE and G. T. MARDELL (1985) Oceanic solitons, nutrient pulses and phytoplankton growth. *Nature*, **314**, 348–350.
- HOLLOWAY P. E. (1987) Internal hydraulic jumps and solitons at a shelf break region on the Australian North West shelf. *Journal of Geophysical Research*, **92**, 5405–5416.
- JOSEPH R. I. (1977) Solitary waves in a finite depth fluid. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **10**, L225–227.
- KORTEWEG D. J. and G. DE VRIES (1895) On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, **39**, 422–443.
- KUBOTA T., D. R. S. KO and L. D. DOBBS (1978) Weakly-nonlinear, long internal gravity waves in stratified fluids of finite depth. *Journal of Hydronautics*, **12**, 157–165.

- LEE C. -Y. and R. C. BEARDSLEY (1974) The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow. *Journal of Geophysical Research*, **79**, 453–462.
- LEONOV A. I. (1981) The effect of the earth's rotation on the propagation of weak nonlinear surface and internal long oceanic waves. *Annals of the New York Academy of Science*, **373**, 150–159.
- LIU A. K., J. R. HOLBROOK and J. R. APEL (1985) Nonlinear internal wave evolution in the Sulu Sea. *Journal of Physical Oceanography*, **15**, 1613–1624.
- NEW A. L. (1988) Internal tidal mixing in the Bay of Biscay. *Deep-Sea Research*, **35**, 691–709.
- NEW A. L. and R. D. PINGREE (1990a) Large-amplitude internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep-Sea Research*, **37**, 513–524.
- NEW A. L. and R. D. PINGREE (1990b) Evidence for internal tidal mixing near the shelf break in the Bay of Biscay. *Deep-Sea Research*, **37**, 1783–1803.
- NEW A. L. and R. D. PINGREE (1992) Local generation of internal soliton packets in the central Bay of Biscay. *Deep-Sea Research*, **39**, 1521–1534.
- ONO H. (1975) Algebraic solitary waves in stratified fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, **39**, 1082–1091.
- OSTROVSKIY L. A. (1978) Nonlinear internal waves in a rotating ocean. *Oceanology*, **18**, 119–125.
- OSTROVSKIY L. A. and Y. A. STEPANYANTS (1989) Do internal solitons exist in the ocean? *Reviews of Geophysics*, **27**, 293–310.
- PEREGRINE D. H. (1966) Calculations of the development of an undular bore. *Journal of Fluid Mechanics*, **25**, 321–330.
- PINGREE R. D. and G. K. MORRISON (1973) The relationship between stability and source waters for a section in the Northeast Atlantic. *Journal of Physical Oceanography*, **3**, 280–285.
- PINGREE R. D. and G. T. MARDELL (1985) Solitary internal waves in the Celtic Sea. *Progress in Oceanography*, **14**, 431–441.
- PINGREE R. D. and A. L. NEW (1989) Downward propagation of internal tidal energy into the Bay of Biscay. *Deep-Sea Research*, **36**, 735–758.
- PINGREE R. D. and A. L. NEW (1991) Abyssal penetration and bottom reflection of internal tidal energy in the Bay of Biscay. *Journal of Physical Oceanography*, **21**, 28–39.
- PINGREE R. D. and A. L. NEW (1995) Structure, seasonal development and sun-glint spatial coherence of the internal tide on the Celtic and Armorican shelves and in the Bay of Biscay. *Deep-Sea Research*, **42**, 245–284.
- PINGREE R. D., G. T. MARDELL and A. L. NEW (1986) Propagation of internal tides from the upper slopes of the Bay of Biscay. *Nature*, **321**, 154–158.
- SMYTH N. F. and P. E. HOLLOWAY (1988) Hydraulic jump and undular bore formation on a shelf break. *Journal of Physical Oceanography*, **18**, 947–962.

Статистика и прогноз интенсивных внутренних волн

Т. Г. Талипова

Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород

Дан обзор современного состояния проблемы расчета статистических характеристик интенсивных внутренних волн, основанной на теории выбросов непрерывного случайного процесса. Приведены данные о частотах повторяемости высот интенсивных внутренних волн на различных акваториях (тропическая и северная части Атлантики, Средиземное море, северо-западный шельф Австралии).

При изучении внутренних волн в океане основное внимание обычно уделяется их спектрам. В результате предложен так называемый климатический спектр Гаррета – Манка [Garret, Munk, 1975] и его разновидности [Сабинин и Шулепов, 1981], послужившие основой для районирования Мирового океана по средним параметрам волн. Этим фактически определяется фон внутренних волн в океане, на котором разыгрываются более интенсивные процессы, приводящие к генерации внутренних волн большой (10–100 м) амплитуды. О наблюдениях их в различных районах океана неоднократно сообщалось в литературе, и интерес к ним обусловлен задачами гидротехнического строительства, безопасности подводных опускаемых аппаратов, влияния на флуктуации фазы акустических сигналов на больших расстояниях. Поверхностные проявления интенсивных внутренних волн сейчас активно изучаются в связи с разработкой дистанционных методов исследования и мониторинга океанических процессов [Пелиновский, 1982; Браво-Животовский и Долин, 1990], в частности, составлена карта встречаемости поверхностных проявлений внутренних волн в различных акваториях Мирового океана [Федоров, Гинзбург, 1986]. Развита также численная модель трансформации внутренних приливных волн на шельфе с учетом нелинейности волн [Holloway et al., 1997; Талипова и др., 1998]. Имеющиеся данные, однако, не позволяют судить о внутренней “погоде” в океане, для этого необходимо оценить частоты повторяемости наиболее интенсивных волн и дать их прогноз на достаточно большой период времени. Разумеется, задача прогноза является весьма многофакторной, так как характеристики внутренних волн определяются стратификацией океана по плотности и течению, ее горизонтальной изменчивостью (наличием фронтальных зон), особенностями рельефа дна в данном районе, приливными силами, полем ветра и атмосферного давления и т. п. Наличие многих определяющих параметров

затрудняет, если не делает невозможной, теоретическое решение задачи прогноза, и здесь определяющим является анализ эмпирического материала. Сказанное, в сущности, относится и к прогнозу штормов [Давидан и др., 1985], цунами [Го и др., 1988], аномалий климата [Привальский, 1985] и других экстремальных событий, поэтому идеи, разработанные в этих областях, могут эффективно переноситься на прогноз характеристик внутренних волн большой амплитуды.

Методы экстремальной статистики, используемые для прогноза волн большой амплитуды

Внутренние волны в океане можно рассматривать как непрерывный случайный процесс, а интенсивные волны – как выбросы данного случайного процесса. Задачи такого рода активно изучаются в статистической радиотехнике [Левин, 1975; Тихонов, 1970; Тихонов и Хоменко, 1987; Фомин, 1980]. Обычно рассматривается непрерывный и дифференцируемый стационарный процесс, и под выбросом понимают любое превышение данным процессом наперед заданного уровня ($x(t) > a$), хотя, конечно, можно ввести такое же условие в области аномально низких (отрицательных) значений величины $x(t)$. Кратко воспроизведем теоретический метод расчета частоты повторяемости выбросов для непрерывных процессов, рассматривая в качестве $x(t)$ вертикальное смещение изопикны (далее мы будем изучать также выбросы поля горизонтальных скоростей во внутренних волнах).

Для того чтобы в интервале Δt был выброс за уровень a (рис. 1), необходимо, чтобы было выполнено сразу два условия:

$$x(t) < a \text{ и } x(t + \Delta t) > a. \quad (1)$$

В силу малости Δt мы можем представить

$$x(t + \Delta t) = x(t) + V(t) \Delta t,$$

где $V(t) = dx/dt > 0$ – производная случайного процесса (в нашем случае вертикальная скорость смещения изопикны), и переписать условие (1) в виде

$$a - V(t) \Delta t < x(t) < a. \quad (2)$$

Искомая вероятность нахождения $x(t)$ в интервале (2) есть

$$P(a - V\Delta t < x < a) = \int_0^{\infty} dv \int_{a-v\Delta t}^a f(x, v; t) dx, \quad (3)$$

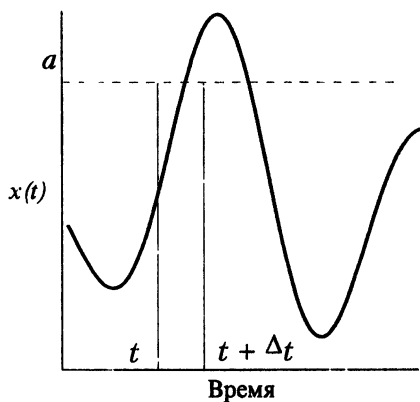


Рис. 1. Схематическое представление выброса за уровень a в интервале $t, t + \Delta t$

где $f(x, v; t)$ – двумерная плотность функции распределения процесса (вертикального смещения изоцикны) и его производной (вертикальной скорости) в один и тот же момент времени. В силу малости Δt можно воспользоваться теоремой о среднем при вычислении внутреннего интеграла в (3), следовательно,

$$P(a - V\Delta t < x < a) = \Delta t \int_0^{\infty} v f(a, v; t) dv. \quad (4)$$

Введем временную плотность для вероятности выброса, обозначив через $p(a; t)$ вероятность выброса за уровень a в момент времени t , она находится из уравнения (4):

$$p(a; t) = \int_0^{\infty} v f(a, v; t) dv. \quad (5)$$

Аналогично вероятность пересечения уровня a сверху вниз (в область малых значений смещения изоцикны) будет

$$p'(a; t) = - \int_{-\infty}^0 v f(a, v; t) dv, \quad (6)$$

поскольку для этого необходимо $V < 0$.

Расчитаем теперь среднее число выбросов. Разделим полный временной интервал на малые отрезки Δt , и введем случайную величину N_j , равную единице для выброса и нулю вне выброса. Тогда полное число выбросов будет $N(a) = \sum N_j$, и его среднее значение есть математическое ожидание N_j , вероятность этого определяется через вероятность

пересечения уровня (5). Переходя к пределу при $\Delta t_j \rightarrow 0$, получим окончательно

$$\langle N(a) \rangle = \int_0^T \int_0^\infty \nu f(a, \nu; t) d\nu dt. \quad (7)$$

Внутренние волны в океане вряд ли являются стационарным случайным процессом, так как во многих случаях известна их “привязка” к зонам генерации, например, к фронтальным зонам, которые сами являются нестационарными. Однако обычно мы имеем относительно короткие ряды наблюдений внутренних волн, чтобы надежно судить о характеристиках нестационарности поля внутренних волн. Поэтому в теоретических расчетах мы примем предположение о внутренних волнах как о стационарном процессе. Тогда формула (7) упрощается

$$\langle N(a) \rangle = T \int_0^\infty \nu f(a, \nu) d\nu. \quad (8)$$

Таким образом, среднее число выбросов пропорционально продолжительности записи (или временному интервалу прогноза) и падает с увеличением уровня выброса. Подчеркнем, что для вычислений среднего числа выбросов мы нуждаемся только в совместной плотности распределения вертикального смещения изопикны и ее вертикальной скорости.

Выше обсуждалось только среднее число выбросов без учета их вероятностного распределения. Расчет последних является гораздо более сложной задачей. Укажем лишь, что если выбросы достаточно редки (что характерно для очень больших амплитуд волн, $a \rightarrow \infty$), то их можно считать пуассоновскими. Тогда вероятность появления хотя бы одного выброса в течение интервала времени t будет

$$P = 1 - \exp(-\nu t), \quad (9)$$

где средняя частота выбросов $\nu = \langle N \rangle / T$ находится из формулы (8) как

$$\nu(a) = \int_0^\infty \nu f(a, \nu) d\nu. \quad (10)$$

Средняя частота выбросов в первом приближении может быть использована в качестве оценки искомой частоты повторяемости внутренних волн с амплитудой, большей заданного значения a .

Проведение конкретных расчетов характеристик выбросов в поле внутренних волн требует двухмерных (вертикального смещения и вертикальной скорости) функций распределения колебаний изопикны. Если предположить, что случайное поле внутренних волн является нормальным, то его одномерная плотность функции распределения описывается гауссовой кривой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}, \quad (11)$$

где m – среднее значение смещений изопокны и δ – среднеквадратичное отклонение (средняя амплитуда волн). Двумерная плотность функции распределения вертикального смещения и вертикальной скорости для нормального процесса в силу их некоррелированности (мы не доказываем здесь это известное свойство) распадается на произведение двух гауссовых кривых (11) с разными среднеквадратичными отклонениями. Тогда средняя частота выбросов будет

$$v(a) = \frac{\delta_v}{2\pi\delta_x} \exp\left(-\frac{a^2}{2\delta_x^2}\right), \quad (12)$$

где δ_v – среднеквадратичное значение вертикальной скорости во внутренней волне. Итак, частота повторяемости внутренних волн в случае справедливости их описания как нормального стационарного процесса зависит от амплитуды волны по гауссовому закону. Следует, правда, иметь в виду, что обычно характеристики поля внутренних волн в области больших значений отличаются от нормальных (некоторые примеры расчета отличий от гауссовости поля внутренних волн в силу их нелинейности даны в книге Миропольского, 1981), и результат будет разный в зависимости от конкретного вида функции распределения в области больших амплитуд. Однако, если частота встречаемости внутренних волн в области малых амплитуд велика (то есть велико значение $v(0)$ в формуле (10)), то, как доказывается в теории экстремальной статистики [Лидбеттер и др., 1989], асимптотика (точнее, промежуточная асимптотика) частоты повторяемости для волн большой амплитуды имеет вид пуассоновской кривой

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{a}{a_0}\right), \quad (13)$$

где v_0 и a_0 – параметры, зависящие от конкретного вида “хвостов” функции распределения внутренних волн в области больших значений амплитуды. Ниже приведем данные о частотах повторяемости внутренних волн на различных акваториях, используя данные наблюдений.

Зависимость частот повторяемости от амплитуды может быть использована для прогноза высот интенсивных внутренних волн. Как и в аналогичных задачах прогноза штормов [Давидан и др., 1985] и цунами [Го и др., 1988], за прогнозируемую высоту волны A принимается такая величина, которая может быть превышена один раз за рассматриваемый

мый промежуток времени T . Разумеется, прогнозируемая величина амплитуды также является случайной, и здесь можно говорить только о ее оценке. Ее среднее значение может быть вычислено, если мы имеем большой ряд записей одинаковой (большой) продолжительности T . В реальных ситуациях приходится ограничиваться более коротким рядом. Итак, для оценки прогнозируемой амплитуды A необходимо задаться значением частоты повторяемости

$$\nu = 1/T, \quad (14)$$

где T – время прогноза (или продолжительность записи), и с помощью выражения (12) или (13) вычислить искомую оценку величины A .

Частота повторяемости колебаний ЗРС в диапазоне внутренних волн (полигон в тропической части Атлантики)

Первая попытка оценить частоту повторяемости внутренних волн сделана на основе данных наблюдений за внутренними волнами, полученных в ходе 39-го рейса НИС "Академик Вернадский" в северо-западной части тропической зоны Атлантики вблизи устья реки Амазонки [Иванов и др., 1991; Ivanov et al., 1993]. В этом районе неоднократно наблюдались внутренние волны со средними амплитудами 2,5–10 м. Для получения многочасовых записей внутренних волн на ходу судна нами использовался судовой эхолот марки НЭЛМ-1 с рабочей частотой 169 кГц. Он позволяет исследовать колебания звукорассеивающих слоев (ЗРС) на глубинах до 100 м, где они относительно ярко выражены. Колебания ЗРС в принципе, как известно, могут быть обусловлены разными причинами, например, апвеллингами, вихрями, однако в диапазоне периодов до 3 часов они должны быть связаны главным образом с внутренними волнами. При анализе мы не делали различия между волновыми пакетами и одиночными волнами, оценивая высоту каждой индивидуальной волны. Период этих волн также изменялся в широких пределах от 3 мин до 30 мин на записях эхолота. Поскольку измерения производились на ходу судна, движущегося со скоростью около $V = 15$ узлов, а максимальная скорость внутренних волн по порядку величины составляет $c = 3$ узла, то картину внутренних волн в первом приближении можно считать "замороженной". В этом случае "истинный" период волн увеличивается по сравнению с наблюдаемым в отношении $V/c = 5$ и составляет 15 мин – 2,5 часа. Легко показать, что длина наблюдаемых внутренних волн превышает 1 км, то есть они являются длинными. Это обстоятельство позволяет использовать простые формулы пересчета

амплитуды колебаний ЗРС на амплитуды колебаний пикноклина. Поскольку, однако, глубина залегания ЗРС коррелирует с толщиной верхнего однородного слоя (что специально проверялось), мы всюду отождествляли амплитуду колебаний ЗРС с амплитудой внутренней волны в пикноклине. За время нахождения на полигоне (25.04–12.05) длительность записей колебаний ЗРС составила около 218 часов. Относительно малая длительность записи связана с неполным временем работы эхолота (он отключался на время дрейфа судна) и наличием участков с однородным вертикальным распределением ЗРС, на которых их колебания не могут быть выделены. Участки же записи, где ЗРС ярко выделены, а колебания отсутствуют, мы принимали во внимание. В качестве основных характеристик колебаний ЗРС были приняты следующие: высота (определяемая как размах колебаний между соседними экстремумами) и продолжительность колебаний на записи. Ввиду слабой репрезентативности данных о высотах волн малой интенсивности (менее 5 м) мы отказались от построения классических функций распределения высот волны, а сосредоточились только на изучении частоты повторяемости (количество случаев наблюдения волн с данной высотой к продолжительности записи). Результаты первичной обработки эхотрамм по дням представлены в работе [Ivanov et al., 1993]. Несмотря на большой разброс в продолжительностях записей (почти в три раза) и учет конкретных механизмов волнообразования, в частности привязки к фазам Луны или к фронтальным зонам, экспериментальные данные группируются в относительно узкой области между двумя кривыми

$$v = 4,14 \exp(-0,4 A), \quad (15)$$

$$v = 3,39 \exp(-0,1 A), \quad (16)$$

где v измеряется в час⁻¹, а A – в метрах. Фактически это свидетельствует о нивелировке на большой площади полигона в первом приближении различных волнообразующих факторов и возможности использования относительно коротких рядов для построения частоты повторяемости высот внутренних волн. С увеличением времени усреднения разброс уменьшается, и окончательно “дифференциальное” значение частоты повторяемости, полученное по всем данным наблюдений, представлено на рис. 2. Как видим, в интервале высот 5–23 м, где число данных велико (так, волны с высотой 20–23 м наблюдали на полигоне девять раз), частота повторяемости монотонно падает с ростом высоты, и соответствующая регрессионная зависимость, построенная по шести точкам, имеет вид

$$v = 7,5 \exp(-0,3 A). \quad (17)$$

На рис. 2 она изображена сплошной линией. Более интенсивные волны наблюдались в единичных случаях (их общее число не превышает шес-

ти), и в силу нерепрезентативности этих данных они не учитывались при построении регрессионной зависимости. Эти данные использованы для оценки "интегральной" частоты повторяемости (число случаев наблюдения волн с амплитудой больше A), они представлены на рис. 3. Как видим, экспериментальные данные хорошо ложатся на регрессионную прямую

$$v = 9,2 \exp(-0,3 A), \quad (18)$$

где v измеряется в час⁻¹ и A – в метрах, за исключением интервала высот, больших 25 м, где общее число наблюдений волн не превышает

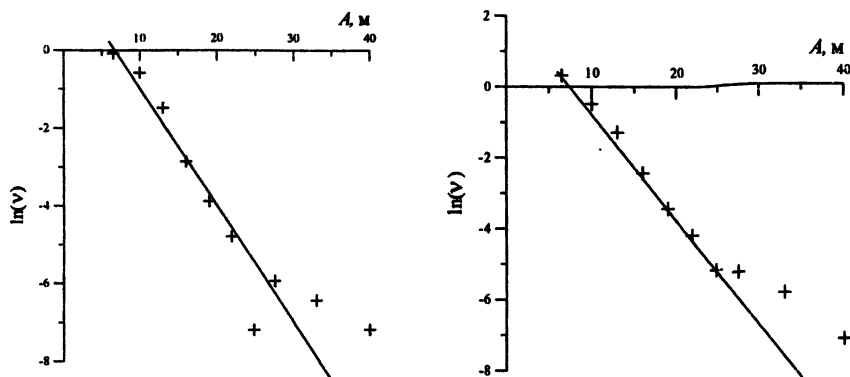


Рис. 2. Средняя (дифференциальная) частота повторяемости высот внутренних волн в тропической зоне Атлантики.

Рис. 3. Интегральная частота повторяемости высот внутренних волн в тропической зоне Атлантики

шести. Итак, среднее значение частоты повторяемости описывается пуассоновской кривой, как это и вытекает из теории экстремальной статистики. Формула (18) использована для оценки прогнозируемой высоты волны в зависимости от времени прогноза

$$A = 18 + 3,3 \ln T. \quad (19)$$

Прогнозируемые высоты внутренних волн за различные периоды сведены в табл. 1. При всей условности такого прогноза (особенно на несколько месяцев), он дает представление о возможных высотах волн в Амазонском полигоне. За время нахождения на полигоне "истинная" продолжительность записи внутренних волн (с учетом движения судна)

составила около 45 суток. Согласно прогнозу за этот период один раз должна наблюдаться волна с высотой большей 31 м, дважды – с высотой более 23 м и трижды – более 27 м. Фактически уровень 31 м превышен трижды, а уровень 27–28 – шесть раз. Превышение в два раза фактических данных над расчетными вполне укладывается в рамки прогностических моделей.

Таблица 1

Прогнозируемые высоты внутренних волн
в тропической Атлантике

Период	1 день	10 дней	1 мес.	3 мес.	6 мес.	1 год
Высота, м	18	26	29	33	35	38

Представленные здесь оценки прогнозируемых характеристик внутренних волн справедливы в целом для Амазонского полигона в Атлантике. В различных его частях, например в местах постоянного нахождения фронтальных зон, эти характеристики могут заметно отличаться друг от друга, однако у нас не хватает данных наблюдений для микро районирования полигона.

**Частота повторяемости высот внутренних волн
в Средиземном море**

Обсудим теперь частоту повторяемости внутренних волн в бесприливных морях, где можно ожидать универсализации статистических характеристик за существенно меньший период времени, не привязываясь к фазам Луны. Здесь использованы данные наблюдений внутренних волн для одного из районов Средиземного моря, полученные в ходе 27-го рейса НИС "Профессор Колесников" (июль–август 1991 г.), эти данные приведены в статье [Иванов и др., 1993]. В течение 27–29 июля 1991 г. на полигоне вблизи шельфа Египта был выполнен специальный эксперимент по регистрации внутренних волн. Он заключался в буксировке зонда МГИ-4106 (распределенного датчика температуры длиной 25 м) по пересекающимся в виде звезды галсам. Измерения проводились в термоклине. Глубины на полигоне изменялись от 200 до 1100 м. Вертикальный профиль частоты Вьясяля – Брента характеризовался наличием термоклина на глубине порядка 25 м с частотой 17 час^{-1} , ниже пикноклина среднее значение частоты Вьясяля - Брента равно 4 час^{-1} . Волновой режим в Средиземном море является относительно бедным, поскольку оно практически бесприливное. Первичная обработка материала описана в работе [Иванов и др., 1993]. По этим данным вычислена частота повторяемости высот волн. Главная трудность здесь опять свя-

зана с определением продолжительности записи, поскольку она соответствует движущейся вместе с судном системе координат. Скорость судна составляла примерно $V = 5$ узлов, что значительно превышает скорости распространения внутренних волн в этом регионе ($c = 2$ узла). Поэтому в первом приближении поле внутренних волн можно считать замороженным. Это означает, что "истинную" продолжительность записи можно увеличить в $V/c = 2,5$ раза. Указанное отношение мы приняли постоянным для всего полигона и использовали как поправочный коэффициент при вычислении "истинной" длительности T . Значения частот повторяемости высот внутренних волн для каждого галса (всего их было семь) достаточно случайны, что объясняется малой длиной каждого галса и вызванной этим нестационарностью процесса. Общая продолжительность записи также относительно невелика (порядка суток), и нет оснований говорить о квазистационарности общей записи. Мы разбили общую запись на две, каждая продолжительностью около 12 часов, и снова вычислили частоты повторяемости. Двенадцатичасовые записи уже оказываются похожими друг на друга, что свидетельствует о квазистационарности процесса. Применимость закона Пуассона для частоты повторяемости, как это видно из рис. 4, хорошо выполняется для наблюдаемых данных: они аппроксимируются прямой (в координатах логарифм частоты повторяемости – высота)

$$\nu = 4 \exp(-1,79 A), \quad (20)$$

что и свидетельствует об экспоненциальном характере функции распределения.

Полученный закон распределения частоты повторяемости высот внутренних волн может быть использован для предсказания волн очень большой амплитуды. Прогнозируемые значения амплитуд внутренних волн, которые могут быть встречены в Средиземном море вблизи шельфа Египта, за различные периоды собраны в табл. 2. Хотелось бы отметить, что наблюдаемые внутренние волны на полигоне имеют меньшие амплитуды, чем в океане.

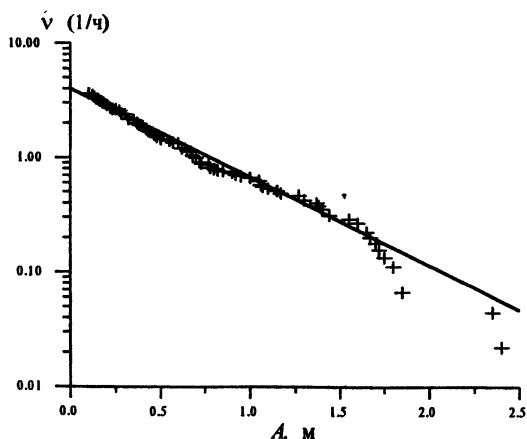


Рис. 4. Интегральная частота повторяемости высот внутренних волн в Средиземном море

**Прогнозируемые высоты внутренних волн
в Средиземном море**

Период	1 день	1 неделя	1 мес.	3 мес.
Высота, м	2,6	3,6	4,5	5,1

Этот факт хорошо известен для бесприливных морей (он вытекает из сравнения наблюдаемых спектров со спектром Гаррета – Манка) и отражается в меньших значениях прогнозируемых высот внутренних волн в этой части Средиземного моря.

**Частоты повторяемости колебаний
скорости течений по данным буйковых станций
(северо-западный шельф Австралии)**

Относительно длинные записи внутренних волн получены на буйковых станциях на северо-восточном шельфе Австралии [Pelinovsky *et al.*, 1995]. Глубина равна 123 м. Здесь мы дадим анализ скоростей течений в диапазоне внутренних волн, записанных на горизонте 3 м над дном океана. Измерения, длившиеся в целом 10 суток, производились каждые 2 минуты. Анализировалась только компонента течения в поперечном к изобатам направлении (45° северо-восток), которая содержит наиболее сильные волновые флуктуации. Временные ряды пропускались через высокочастотный фильтр, чтобы убрать приливную компоненту. Каждая запись делилась на равные интервалы продолжительностью 4000 мин.

Результаты первичной обработки временных рядов содержатся в статье [Pelinovsky *et al.*, 1995]. На рис. 5 приведены рассчитанные частоты

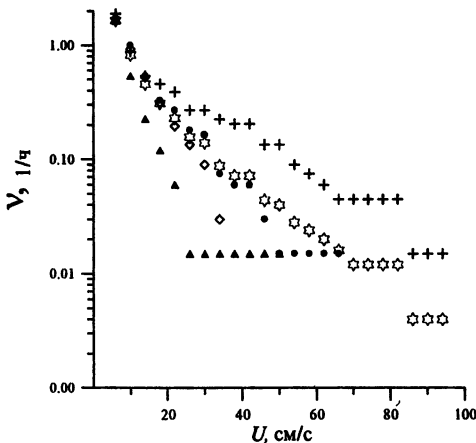


Рис. 5. Частота повторяемости скорости течения во внутренних волнах на Северо-Западном шельфе Австралии для каждого сегмента записи длительностью 4000 мин. ☆ – средняя частота повторяемости

повторяемости для каждого сегмента длительностью 4000 мин и для всей записи. Большие отклонения для средней частоты проявлялись на больших высотах волн (более, чем 40 см/с), где статистика является слишком бедной (1–2 случая). Рассчитанные величины частоты повторяемости для волн различных высот аппроксимируются

$$v = 1,33 \exp(-0,071 U), \quad (21)$$

где U в см/с.

Десятидневные временные серии записей флуктуаций скорости течений являются достаточно длинными. Поэтому интересно оценить применимость экспоненциальной аппроксимации для частоты повторяемости. Как известно, в теории экстремальной статистики [Лидбеттер и др., 1989] частота повторяемости может иметь несколько универсальных форм, в том числе и степенную. Регрессионный анализ приводит к следующей форме степенной зависимости:

$$v = 76,9 U^{-1,95}, \quad (22)$$

и трудно отдать предпочтение степенной или экспоненциальной зависимости (доверительная вероятность для них примерно одинакова).

Другой интересный пример использования длинной записи – вычисление вероятности появления внутренних волн достаточно большой амплитуды. Для этого надо использовать формулу для вероятности (9) с подстановкой (21) или (22). Результаты расчета показаны на рис. 6.

Отсюда видно, что вероятность появления внутренних волн со скоростями течений в 1 м/с в течение одного дня мала (0,2), а в течение 10 дней – велика (0,8). Такие данные должны использоваться при планировании экспериментов по измерению параметров внутренних волн с достаточной надежностью.

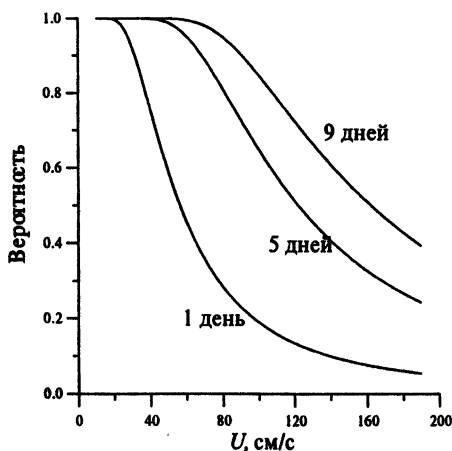


Рис. 6. Вероятность появления скоростей течений выбранной амплитуды во внутренних волнах со временем

Частота повторяемости внутренних волн на Мезополигоне-85 в Атлантике

Интересно рассмотреть достаточно длинные записи внутренних волн в открытом океане, которые должны быть более однородными в статистическом смысле, чем в прибрежной зоне. Кроме того, можно ожидать, что волновой процесс в открытом океане более близок к нормальному, что позволяет использовать теорию выбросов нормального случайного процесса (см. выше) и оценить пределы ее применимости в практике внутренних волн. Здесь предпринят такой анализ частот повторяемости для записей внутренних волн, полученных на буйковых записях на полигоне в восточной части Атлантического океана в 1985 году (Мезополигон-85), где было выставлено 76 буйковых станций с измерителями течений и температуры (подробное описание эксперимента и схема расположения буев содержится в работе [Корт, 1988]. Полигон располагался в районе, где соединяются Канарская котловина и котловина Зеленого мыса. Буйковые станции проработали приблизительно два месяца, с апреля по май. Измерители ставились на четырех горизонтах, однако наиболее представительные измерения были выполнены на горизонте 200 м. Дискретность измерений равнялась 15 минутам. Буйковые станции ставились на основе треугольной схемы в вершинах равносторонних треугольников так, чтобы расстояния между ближайшими буями равнялось 10 милям. Общий размер полигона составлял приблизительно 80 × 80 миль.

Масштабы эксперимента наилучшим образом подходят для исследования внутренних волн приливного периода, где преобладающими возмущениями являются колебания с частотой, соответствующей баротропному приливу с периодом 12,4 часа. Ряды измерений температуры на горизонте 200 м были подвергнуты полосовой фильтрации для выделения узкой полосы частот вокруг полусуточного прилива ($\Delta\omega = \pm 0,0005 \text{ с}^{-1}$) и удаления низкочастотных колебаний, связанных с синоптическими и инерционными процессами, а также высокочастотного шума. Записи измерений вариаций температуры в градусах шкалы Цельсия в различных точках полигона были использованы для вычисления средней частоты выбросов (превышения вариаций температуры заданного значения ΔT). В 49 случаях (из 54) они очень хорошо описываются гауссовым распределением

$$v = f \exp(-q(\Delta T)^2), \quad (23)$$

где f и q – параметры, меняющиеся от станции к станции. На рис. 7 представлен типичный график средней частоты выбросов как функция квад-

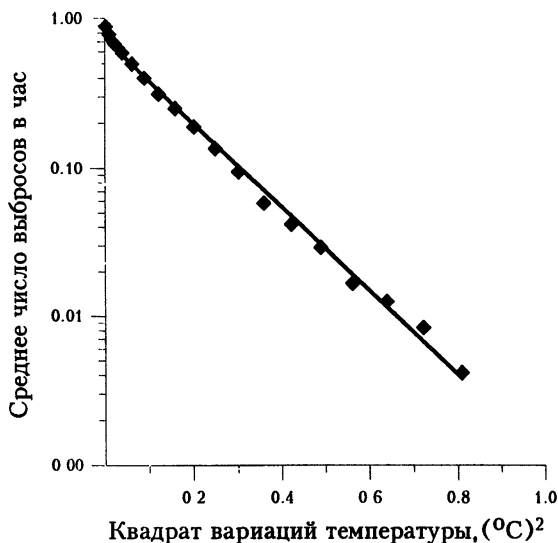


Рис. 7. Среднее число выбросов температурных флуктуаций (станция 10)

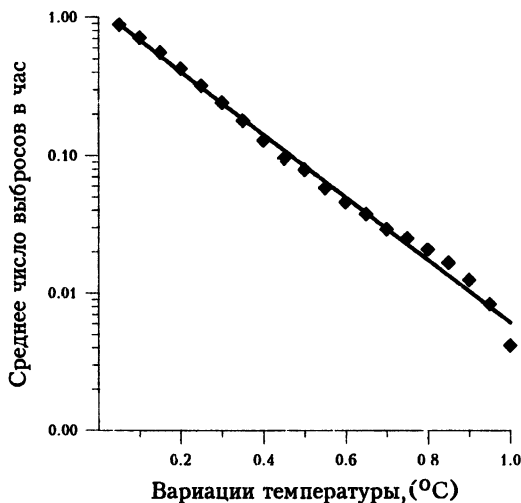
рата вариаций температуры (станция 10), гауссова аппроксимация (23) представлена на нем сплошной линией. Хотелось бы отметить очень хорошую аппроксимацию экспериментальных данных гауссовой кривой, относительная ошибка аппроксимации не превышает для данных записей 15% (в большинстве случаев на порядок меньше). Значения параметров аппроксимации приведены в работе [Морозов и др., 1998]. Среднее значение параметра f – 0,79 час⁻¹ со среднеквадратичным отклонением 0,17 час⁻¹. Параметр q имеет большую разбросанность, его среднее значение – 10,61 1/°C² со среднеквадратичным отклонением 4,47 1/°C².

Имеется, однако, пять записей, для которых гауссова аппроксимация среднего числа выбросов явно недостаточна. Для записей, полученных на станциях 31, 41, 44, 46 и 65, значительно лучшей оказывается пуассоновская аппроксимация

$$v = f_p \exp(-q_p(\Delta T)), \quad (24)$$

см., например, рис. 8. Среднее значение для f_p будет 1,39 час⁻¹ со среднеквадратичным отклонением 0,24 час⁻¹ и для q_p – 5,62 ± 0,46 1/°C.

Рис. 8. Средняя частота выбросов температурных флуктуаций (станция 41)



Изменчивость параметров распределения частоты выбросов естественно связать с гидрологическими условиями на полигоне, обусловленными прохождением синоптических вихрей. На границах вихрей формируются фронтальные зоны с высокими горизонтальными градиентами температуры и плотности, и именно в этих зонах гауссова статистика меняется на пуассоновскую (этот вопрос специально обсуждается в работе [Морозов и др., 1998]).

Заключение

Интересно сопоставить результаты расчета частоты повторяемости для различных регионов. Основная трудность сравнения состоит в том, что каждый раз измерялась разная характеристика. В частности, в тропической зоне Атлантики измерялось вертикальное смещение звукорассеивающих слоев, в Средиземном море и на Мезополигоне-85 – смещение термоклина, в то время как на шельфе Австралии анализировались записи флуктуаций течения. Поэтому мы сравнили экстраполированные значения частот повторяемости для нулевых высот волн, поскольку они не зависят от вида измерений. Для шельфа Австралии $\nu = 1,3 \text{ час}^{-1}$, для тропической зоны Атлантики $\nu = 9,2 \text{ час}^{-1}$, для Мезополигона-85 $\nu = 1,4 \text{ час}^{-1}$ и для Средиземного моря $\nu = 4 \text{ час}^{-1}$. Эти данные оказались очень разнородными, что, по-видимому, связано с различными условиями волнообразования. В частности, полигоны для измерений в тропической зоне Атлантики и в восточной части Средиземного моря бы-

ли выбраны в достаточно глубоководных зонах (около 1 км), где вклад в поле внутренних волн давался в основном сдвиговыми течениями и отраженными пакетами, генерируемыми на шельфах и неоднородностях дна. Кроме того, измерения производились с корабля, и использовалось пространственное усреднение. Глубина, на которой измерялись внутренние волны на шельфе Австралии, составляла 123 м, и волнообразование интенсивных короткопериодных солитонов шло главным образом за счет нелинейной трансформации полусуточного внутреннего прилива на шельфе. Генерация внутренних волн на Мезополигоне-85 происходит, как правило, за счет рассеяния баротропного прилива на неровностях дна. Таким образом, приводимые данные подтверждают, что поле внутренних волн сильно изменчиво в пространстве, и их повторяемость зависит от условий генерации и распространения интенсивных внутренних волн.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (96-05-64108) и ИНТАС (95-969).

Литература

1. Дистанционные методы исследования океана / Под ред. Браво-Животовского Д. М., Долина Л. С. Горький: ИПФ АН СССР, 1987.
2. *Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А.* Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
3. *Го Ч. Н., Кайстренко В. М., Пелиновский Е. Н., Симонов К. В.* Количественная оценка цунамиопасности и схема цунамирайонирования Тихоокеанского побережья СССР // Тихоокеанский ежегодник. Владивосток: ДВО АН СССР, 1988. С. 9–17.
4. *Иванов В. А., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.* Частота повторяемости интенсивных внутренних волн // ДАН СССР, 1991. Т. 318, № 6. С. 1468–1471.
5. *Иванов В. А., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.* Частота повторяемости высот внутренних волн в Средиземном море // Океанология. 1993. Т. 33, № 2. С. 180–184.
6. Гидрофизические исследования по программе “Мезополигон” / Под ред. В. Г. Корта М.: Наука, 1988.
7. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Ч. 1. М.: Советское радио, 1974.
8. *Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдерен Г.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
9. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных внутренних волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
10. *Морозов Е. Г., Пелиновский Е. Н., Талипова Т. Г.* Частота повторяемости внутренних волн на Мезополигоне-85 в Атлантике // Океанология. 1998. Т. 34, № 4. С. 521–527.

11. Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность / Под ред. Пелиновского Е. Н. Горький: ИПФ АН СССР, 1982.
12. Привальский В. Е. Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры). М.: Наука, 1985.
13. Сабинин К. Д., Шулепов В. А. К модели частотного спектра внутренних волн в океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17, № 1. С. 67–75.
14. Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н., Холловэй П. Е. Нелинейные модели трансформации внутренних приливов на шельфе. Данный сборник.
15. Тихонов В. И., Хоменко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987.
16. Федоров К. Н., Гинзбург А. Н. Приповерхностный слой океана. Л.: Гидрометеониздат, 1986.
17. Фомин Я. А. Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980.
18. Garret C. G. R., Munk W. H. Space-time scales of internal waves: a progress report // J. Geophys. Research. 1975. V. 80, № 3. P. 291–297.
19. Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B. A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf // J. Phys. Oceanography. 1997. V. 27, № 6. P. 871–896.
20. Ivanov V. A., Pelinovsky E. N., Talipova T. G. The long-time prediction of intense internal wave heights in the tropical region of Atlantic // J. Phys. Oceanography. 1993. V. 23, № 9. P. 2136–2142.
21. Pelinovsky E., Holloway T., Talipova T. A statistical analysis of extreme events in current variations due to internal waves from the Australian North West Shelf // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, № C12. P. 24,831–24,839.

АННОТАЦИИ

Том 1

Kudryavtsev V. N., Makin V. N. The physical model of the sea surface interrelating with the atmospheric boundary layer.

A physical model of the short wind wave spectrum in the wave length range from few millimeters to few meters is proposed. The spectrum results from the energy balance which includes wind input, energy losses due to molecular viscosity and wave breaking, resonant wave-wave interactions, and generation of parasitic capillary waves. The role of each term is different depending on either capillary or gravity interval.

In the capillary range the spectrum is determined by the mechanism of the generation of parasitic capillaries and their dissipation due to molecular viscosity. Energy losses of gravity waves due to the capillaries emissions are compensated by the energy input of the wind. In the gravity interval the wind input and energy losses due to breaking of waves play the dominant role. The latter is described using the approach developed by Phillips [1985]. The resulting spectrum of short waves is incorporated in the wind over? Waves coupling model.

Model calculations of the spectral characteristics of short wind waves and parameters of the interaction of the flow with the sea surface are presented and compared with the available experimental data.

Troitskaya Yu. I. Modulation of short surface waves in the presence of long waves. Effect of the modulation of growth rate.

The main mechanisms of modulation of short surface waves in the presence of long waves are enumerated. The proposed before simple models of modulation of the rate of growth of short waves in the presence of long waves are discussed. The developed recently realistic models which take into account the wind flow turbulence are discussed. A rather simple model of generating waves on water by the turbulent wind is described. The results of the wind increment calculations in the frames of the available theoretical and experimental data are compared. The model of modulation of short waves in the presence of long waves is proposed. The calculations of the modulation coefficients taking into account the effect of modulation of the short waves increment, calculated in the frames of linear and quasilinear approximations, are given.

Bakhanov V. V., Talanov V. I. Transformation of nonlinear surface waves in the field of inhomogeneous flows.

The transformation of nonlinear surface waves, propagating against the flow, on the local flow perturbation is considered. It is obtained theoretically that nonlinearity of surface waves leads with time to the sharp increase of the variability of the amplitude of the surface waves of the wide frequency band. The results of laboratory study of the transformation of the surface waves of various amplitude and frequency in the field of inhomogeneous flows are given. It is obtained that with the increase of the amplitude of the surface wave generated by the waveproducer the variability of its parameters in the region of the inhomogeneous flow increases. The results of the theoretical calculations agree well with the obtained in the experiment main peculiarities of nonlinear surface waves transformation in the field of inhomogeneous flows.

Voronovich V. V., Shrira V. I. Vortex waves in the upper quasihomogeneous ocean layer.

The subject of the given review are perturbations of wind-generated surface flows which are specific and comparatively poorly-studied (both in the oceanological and general-hydrodynamic context) class of motions being intermediate between wave motions and vortex motions. At certain conditions these motions may be described as waves and are often called "vortex waves" since the "restoring force" is produced exclusively by the inhomogeneous vortex field caused by the shear flow. The aim of the given review is to give the concept of both the existing models of their dynamics and interaction with other types ofmotions (internal gravitational waves, Langmuir circulation, small-scale turbulence) and of the problems which are not solved yet.

Talipova T. G., Pelinovsky E. N., Holloway P. E. Nonlinear models of transformation of internal tides on the shelf.

The nonlinear model of the internal tide transformation on the shelf is developed taking into account the quadratic and cubic nonlinear terms, the Earth rotation. The solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation in the form of the solitary waves are systematized for different signs and values of the quadratic and cubic nonlinear terms. Numerical simulation of the semi-diurnal tide is made. It demonstrates that the effects of the cubic nonlinearity and the Earth rotation are significant for real conditions. Vertical structure of the wave oscillations of various depths is calculated taking into account the nonlinear effects. The current velocity induced by the internal waves is simulated. Their values can be comparable with the phase speed for real conditions and have good agreement with the observed data. As it is known strong induced currents in the internal waves influence the wind wave spectrum, and it explains the visibility of the internal tides on the shelf by remote sensing.

А. Нью, М. Естебан. Новое обобщение теории Кортевега – де Вриза для внутренних уединенных волн во вращающемся непрерывно стратифицированном океане.

Главной целью данной работы является развитие новой теории, основанной на обобщении уравнения Кортевега – де Вриза для внутренних волн во вращающейся непрерывно стратифицированной жидкости. Модель включает слабую нелинейность и дисперсию, но в отличие от других теорий она включает эффект вращения Земли в нулевом приближении и не содержит предположения относительно вертикальной структуры волн. Теория использована также для изучения формирования внутренних уединенных волн из длинноволнового внутреннего прилива в Бискайском заливе и сопоставления с данными наблюдений. Амплитуды, фазовые скорости, волновые числа и периоды уединенных волн хорошо воспроизводятся в теории, так что внутренние солитоны могут быть действительно рассмотрены как полученные при эволюции приливного бора под действием нелинейности и дисперсии.

T. Talipova. Statistics and Prediction of Intense Internal Waves.

The problem of the calculation of the statistical characteristics of the intense internal waves based on the extreme statistics methods is discussed. Data of exceedance (cumulative) frequency of the internal wave heights in different regions (tropical and north Atlantic, Mediterranean, north-west shelf of Australia) are given.