

Методы гидрофизических исследований ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И МИКРОСТРУКТУРА



Издано по решению Редакционно-издательского совета
Института прикладной физики АН СССР

УДК 532.5+551.46+551.51

Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура
/ ИГиФ АН СССР. Горький, 1990. 370 с.

Книга представляет собой сборник лекций, прочитанных на третьей Всесоюзной школе по методам гидрофизических исследований (г. Светлогорск, май 1989 г.). В ней обсуждаются вихревые и турбулентные движения жидкости, методы диагностики состояния водной среды и происходящих в ней физических процессов, а также следующие вопросы: динамика стратифицированной жидкости, микроструктура и волны в океане, лабораторное и численное моделирование движений жидкости, дистанционные методы зондирования океана и результаты натуральных экспериментов.

Сборник предназначен специалистам и студентам, занимающимся исследованиями в области гидромеханики, геофизической гидродинамики, океанологии, гидрооптики и смежных областях.

Ил. 102, табл. 6, библиогр. 351 назв.

Рецензенты

доктор физико-математических наук Н.С. ПЕТРУХИН,
доктор физико-математических наук С.Н. ГУРБАТОВ

Ответственные редакторы

А.В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, С.А. ХРИСТИАНОВИЧ,
Л.А. ОСТРОВСКИЙ

Редакция

Л.М. ШИМРИНГ (зам. отв. редактора), Ю.Д. ЧАШЕЧКИН,
Ю.И. ТРОИЦКАЯ, Н.А. ГОРОДЕЦКАЯ (отв. секретарь)

© Институт прикладной физики АН СССР, 1990 г.

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	7
Динамика турбулентности и диффузия примесей	
<i>Озмидов Р.В.</i> Полигонный метод исследования диффузии примесей в океане	8
<i>Курбацкий А.Ф.</i> Вопросы моделирования процессов перемешивания и переноса примесей в турбулентных течениях	19
<i>Мадерич В.С.</i> Внутреннее турбулентное перемешивание в океане	35
<i>Никишов В.И.</i> Вырождение мелкомасштабных возмущений в стратифицированной среде	56
<i>Теодорович Э.В.</i> Развитая турбулентность и метод ренормгруппы	72

Динамика вихрей

<i>Курганский М.В., Черноусько Ю.Л.</i> Лабораторное и теоретическое исследование волн Россби в кольцевом канале	87
<i>Бубнов Б.М., Голицын Г.С.</i> Режимы конвекции во вращающейся жидкости	108
<i>Баранов С.А., Иванов А.В., Казаков В.И.</i> Генерация внутренних волн вихрями: лабораторное и численное моделирование	117
<i>Гольдштик М.А., Штерн В.Н.</i> Моделирование водоворотов и атмосферных смерчей коническими вязкими течениями	129
<i>Горшков К.А., Островский Л.А.</i> Теория возмущений для солитонов и вихрей	141

Генерация и распространение волн в жидкости

<i>Коробкин А.А., Стурова И.В.</i> Генерация поверхностных и внутренних волн в жидкости переменной глубины	161
<i>Кожевников В.Н.</i> Некоторые свойства орографических возмущений от гор среднего масштаба	180
<i>Морозов Е.Н., Ульянов С.А., Буркова Л.Т.</i> Применение метода голографической интерферометрии для определения пространственного спектра внутренних волн, генерируемых при обтекании препятствия потоком неоднородной жидкости	197
<i>Баранов С.А., Казаков В.И., Степанов Ю.А.</i> Генерация внутренних волн в лабораторном бассейне тепловым источником	203
<i>Лебле С.Б., Верещагин Д.А., Шекин А.К.</i> Кинетическое описание волновых возмущений в стратифицированном газе	215

<i>Доценко С.Ф.</i> Аналитико-численное моделирование внутренних волн, генерируемых движущимися атмосферными возмущениями	234
<i>Букатов А.Е.</i> Волны от движущихся возмущений в б .сейне с ледяным покровом.	247
<i>Бечанов К.А., Заец П.Г., Окуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М.</i> Исследование внутренних и поверхностных волн в пространственной задаче обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости. . .	259

**Нелинейная теория
взаимодействия волн с потоками**

<i>Абрашкин А.А., Зенькович Д.А.</i> Вихревые гравитационные волны на сдвиговом течении.	284
<i>Романова Н.Н.</i> Трехволновые взаимодействия в двухслойном сдвиговом течении и взрывная неустойчивость	298
<i>Цимринг Л.Ш.</i> Нелинейные эффекты в теории взаимодействия поверхностных волн с ветром	306

**Методы дистанционного зондирования
морской поверхности**

<i>Каневский М.Б.</i> Радиолокатор с синтезированной апертурой как средство дистанционного изучения морской поверхности	323
<i>Лялин К.К.</i> Когерентное комбинационное отражение электромагнитных волн гидроакустическими возмущениями поверхности жидкости	336

CONTENTS

Preface.....	7
Dynamics of turbulence and diffusion of impurities	
<i>Ozmidov R.V.</i> The polygon study of contaminant diffusion in the ocean using polygon.....	8
<i>Kurbatsky A.F.</i> The problems of modeling the processes of contaminant mixing and transport in turbulent flows.....	19
<i>Maderich V.S.</i> Internal turbulent mixing in the ocean methods of hydrophysical study turbulence and micro-structure.....	35
<i>Nikishov V.I.</i> The degeneration of small-scale perturbations in a stratified medium.....	58
<i>Teodorovich E.V.</i> The developed turbulence and the method of a renormgroup.....	72
Vortex dynamics	
<i>Kurgansky M.V., Chernousko Yu.L.</i> Laboratory and theoretical study of Rossby waves in a ring channel.....	87
<i>Bubnov B.M., Golitsin G.S.</i> The regime of convection in rotating liquid.....	108
<i>Baranov S.A., Ivanov A.V., Kazakov V.I.</i> The generation of internal waves by vortices: laboratory modeling and numerical simulation.....	117
<i>Gol'dshick M.A., Shtern V.N.</i> The modeling of whirlpools and atmosphere tornados by canonical viscous flows.....	129
<i>Gorzhkov K.A., Ostrovsky L.A.</i> Theory of perturbation for solitons and vortices.....	141
Generation and propagation of waves in liquids	
<i>Korobkin A.A., Sturova I.V.</i> Generation of surface and internal waves in a liquid with variabl depth.....	161
<i>Kochevnikov V.N.</i> Some properties of orographic disturbance from mean-scale mountains.....	180
<i>Morozov Ye.N., Ulanov S.A., Burkova L.T.</i> Method of holographic interferometry	

applied to determination of the spatial spectrum of internal waves generated by inhomogeneous fluid flowing around an obstacle.....	197
<i>Borisenov S.A., Kazakov V.I., Stepanovets Yu.A.</i> Internal wavegeneration by a thermal source in a laboratory basin.....	203
<i>Leble S.B., Voreschagin D.A., Shchekin A.K.</i> Kinetic description of wave disturbances in a stratified gas.....	215
<i>Dotsenko S.F.</i> Analytical-numerical modeling of internal waves generated by moving atmospheric perturbations.....	234
<i>Bukator A. Ye.</i> Waves from moving perturbations in a basin with ice cover.....	247
<i>Bezhanov K.A., Zayets P.G., Onufriev A.T., Ter-Krikorov A.M.</i> Investigation of internal and surface waves within the spatial problem of the exponentially stratified fluid flowing around bottom bottom roughness.....	253
Nonlinear theory of wave-flow interaction	
<i>Abrashkin A.A., Zen'kovich D.A.</i> Vortex gravitational waves on a shear flow.....	284
<i>Romanova N.N</i> Three-wave interactions in a twolayer shear flow and explosive instability.....	298
<i>Timring L.Sh.</i> Nonlinear effects within the theory of surface wave-wind interaction.....	306
Methods of remote ocean surface probing	
<i>Konersky M.B.</i> Radar with synthesized aperture as a tool for remote investigations of the sea surface.....	323
<i>Lyapin K.K.</i> Coherent combination reflection of electromagnetic waves by hydro-acoustic perturbations of the fluid surface.....	336

ОТ РЕДАКЦИИ

Время летит быстро... Первая школа-семинар "Методы гидрофизических исследований" состоялась в 1983 г. Сейчас выходят труды третьей школы-семинара, прошедшей в октябре 1989 г. Эти три школы дали, как кажется, достаточно полно представленный срез тенденций и приоритетов современной гидрофизики как междисциплинарной науки, сочетающей методы физики волн, механики, геофизической гидродинамики... В соответствии с этим установились уже более или менее постоянные разделы нашего сборника, включающие изучение вихрей, турбулентности, различного рода волновых процессов, а в экспериментальном плане - лабораторное моделирование и исследование океана и атмосферы, причем по-прежнему значительное внимание уделяется дистанционным методам зондирования. Новыми для данной школы были лекции, касающиеся примесей в океане; эта тематика приобретает сейчас все большую актуальность в связи с экологическими проблемами.

Как и ранее, в данный сборник вошли материалы лишь лекций, да и то не всех, прочитанных на школе-семинаре. Часть лекций, а также материалы семинаров, будут опубликованы в трудах Института гидромеханики АН УССР.

Сборники, отражающие материалы предыдущих школ, были встречены с интересом и довольно быстро раскуплены. Мы надеемся, что такая же "участь" постигнет и эту книгу.

ДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ

ПОЛИГОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФУЗИИ ПРИМЕСЕЙ В ОКЕАНЕ

Р. В. Озмидов

Исследование закономерностей диффузии примесей в океане важно как для понимания общих закономерностей процессов формирования и трансформации океанологических полей, так и для выработки практических методов расчета поведения сбрасываемых в океан промышленных и бытовых отходов. Перенос любой субстанции и ее концентрация в данной точке океана зависят от большого числа факторов – биологических (усвоение вещества и перенос его живыми организмами), химических (распад вещества, выпадение в осадок и т. д.), физических (ядерный распад вещества, коагуляция, адсорбция и др.) и, наконец, механических (перенос движущейся морской водой). В единой математической модели учесть все эти механизмы переноса субстанции бывает обычно затруднительно, однако главные особенности процесса удается все же описать с той или иной степенью достоверности и точности.

Наиболее употребительным для описания переноса субстанции в движущейся жидкой среде является уравнение вида

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) + Q, \quad (1)$$

где c – концентрации примеси (субстанции); u, v, w – компоненты скорости движения жидкости вдоль декартовых координат x, y и z соответственно; μ – коэффициент молекулярной диффузии примеси; t – время; Q – член, учитывающий распад (или рост количества) примеси, обусловленный немеханическими факторами.

Для решения уравнения (1) к нему, естественно, необходимо присоединить граничные и начальные условия, налагаемые на искомую функцию $c(x, y, z, t)$, а также необходимо задать значения компонент скорости, которые могут быть, вообще говоря, также функциями пространственных координат времени. Последнее условие практически невозможно выполнить в случае турбулентного характера движения жидкости. Действительно, в этом случае поле скорости движения жидкости становится столь запутанным и нерегулярно меняющимся, что попытка задать такое поле аналитически или даже численно не может привести к успеху. В этом случае, как известно, поле скорости принято представлять в виде суммы осредненных тем или иным способом компонент скорости $\bar{u}(x, y, z, t)$, $\bar{v}(x, y, z, t)$, $\bar{w}(x, y, z, t)$ и пульсационных добавок $u'(x, y, z, t)$, $v'(x, y, z, t)$, $w'(x, y, z, t)$. Поле концентрации примеси также в этом случае представляется в виде суммы осредненной и пульсационной составляющих $\bar{c}(x, y, z, t)$ и $c'(x, y, z, t)$. Подставляя эти выражения для компонент скорости и концентрации в уравнение (1) и производя осреднение, приводим (1) для несжимаемой жидкости к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{dt} + \bar{u} \frac{d\bar{c}}{dx} + \bar{v} \frac{d\bar{c}}{dy} + \bar{w} \frac{d\bar{c}}{dz} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'c'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'c'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'c'}) + R, \end{aligned} \quad (2)$$

где сделано пренебрежение молекулярной диффузией примеси по сравнению с турбулентным переносом, обусловленным корреляциями между пульсационными компонентами скорости и пульсациями концентрации примеси.

Из анализа уравнения (2) уже можно сделать выводы о комплексе исследований и измерений на данной акватории океана, необходимым для адекватного описания процесса. Во-первых, надо определить с процессами какого пространственно-временного масштаба мы имеем дело, другими словами, определить смысл осуществленной выше операции осреднения. Для задач по расчету распространения сбросов промышленных и бытовых отходов в прибрежных зонах морей пространственный масштаб явлений обычно имеет порядок сотен метров — километров, а характерные времена изменчивости сбросов — часы или сутки. В задаче же, например,

распространения в водах океана стратосферных выпадений антропогенных радионуклидов пространственный масштаб явления может достигать сотен и тысяч километров, а временной — сезонов и годов. Исходя из этих масштабов и следует производить измерения или расчет поля скорости течений на исследуемой акватории. Если в первой задаче следует измерять (или рассчитывать по какой-либо модели) поле скорости с пространственной дискретностью не больше сотни (а в ряде случаев и десятка) метров и временными интервалами в десятки минут — часы, то во втором случае шаг между пунктами измерений течений (или узлами сетки расчетного метода) может быть увеличен до десятков (а в ряде случаев и сотен) километров, но длительность измерений (расчетного времени) должна быть весьма большой (сезоны или годы).

При правильном выборе масштабов осреднения более четко определяется и смысл пульсационных составляющих исследуемых полей. В задаче о распространении загрязнения от прибрежного сброса такими вариациями поля концентрации примеси будут неоднородности поля с пространственными масштабами в десятки и сотни метров с временами жизни от минут до десятков минут, в задаче же о стратосферных выпадениях нуклидов такими вариациями могут быть неоднородности поля концентрации протяженностью в десятки километров и продолжительностью "жизни" до многих дней и даже месяцев.

Прямые измерения моментов связи типа $\overline{u_i^2 c}$ ($i=1,2,3$) представляют собой достаточно сложную задачу. Для этого, очевидно, необходимо в разных точках потока осуществлять одновременные измерения поля пульсаций концентрации примеси и компонент пульсационных скоростей течения. При этом опять-таки необходимо согласовать дискретность наблюдений с принятым в рассматриваемой задаче масштабом осреднения полей концентрации и скорости. Для локальной задачи о диффузии сбрасываемой в море примеси пульсационные поля бывают необходимым измерять в интервале пространственных масштабов от долей метра до сотен метров, а в глобальной задаче эти интервалы могут быть сдвинуты на несколько порядков в сторону увеличения. Ясно, что в первом случае для измерений требуются малоинерционные приборы, а во втором может быть использовано и стандартное гидрологическое оборудование (батометрические серни, буйковые постановки с вертушечными измерителями течений и т. п.).

Более сложным вопросом, требующим отдельного рассмотрения, является определение величины R . Для этого могут потребоваться специальные гидробиологические, гидрохимические и гидрофизические работы в исследуемом районе моря. Такие работы должны установить основные процессы, определяющие немеханический перенос и трансформацию примеси, а также вид функции R , в аргументы которой могут входить не только координаты и время, но и сама искомая функция c . Так, в частности, для распадающейся радиоактивной примеси функция R может быть записана в виде $R = -\gamma c$, где γ — характеристика распада вещества, связанная с периодом его полураспада τ соотношением $\gamma = \ln 2 / \tau$. Аналогичным образом может быть записана функция R и для химически распадающегося вещества, или вещества, выпадающего в осадок, потребляемого живыми организмами, если эти процессы пропорциональны концентрации вещества. В других случаях вид функции R , естественно, может быть более сложным (например, квадратичным или кубичным по отношению к функции c).

В большинстве случаев прямые ("пульсационные") определения моментов $\overline{u'_i c'}$ бывают трудно выполнимы, в связи с чем уравнение (2) приводится к так называемому полуэмпирическому виду при помощи гипотезы, связывающей моменты $\overline{u'_i c'}$ с осредненным полем концентрации примеси. Предположение, что турбулентные потоки примеси пропорциональны градиенту средней концентрации примеси, приводит к выражениям для $\overline{u'_i c'}$ вида

$$\overline{u'_i c'} = -K_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j}, \quad (3)$$

где тензор второго порядка K_{ij} носит название тензора коэффициентов турбулентной диффузии. Так как, в отличие от коэффициента молекулярной диффузии, величина K_{ij} не является физической константой, то компоненты K_{ij} могут быть, вообще говоря, функциями координат и времени.

В большинстве случаев полуэмпирическое уравнение (3) упрощают тем или иным способом. Так, обычно предполагается, что в условиях океана тензор K_{ij} можно считать осесимметричным относительно вертикальной оси z . В этом случае девять компонент тензора K_{ij} может быть сведено к двум: K_z ("вертикальный" коэффициент диффузии) и K_x ("горизонтальный" коэффициент диффузии). При таком предположении уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{d\bar{c}}{dt} + \bar{u}_i \frac{d\bar{c}}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) + Q. \quad (4)$$

Оценки значений коэффициентов диффузии K_x и K_y для условий океана могут осуществляться различными способами. В частности, используются полуэмпирические формулы, связывающие значения коэффициентов с масштабами явлений, градиентами скорости течений и плотности воды, скоростью ветра, высотой волн и т. п. (см. [1]). Однако наиболее удобными для определения коэффициентов диффузии являются прямые наблюдения над диффузией специально запускаемых в море примесей. Особенно информативны такие опыты для исследования закономерностей диффузии примесей с пространственно-временными масштабами, типичными для процессов распространения примесей от сбросов промышленных и бытовых отходов в прибрежные зоны моря. Моделировать такие процессы удастся с использованием квазимгновенных и непрерывно (длительное время) действующих источников красителей. Естественно, что при этом желательно осуществлять целый комплекс наблюдений в соответствии с изложенными выше рекомендациями.

Подобного рода комплексный диффузионный эксперимент был впервые осуществлен советскими и болгарскими океанологами летом 1984 г. в Черном море в прибрежной зоне вблизи города Варна [2]. Эксперимент был направлен на исследование закономерностей диффузии примеси с масштабами, характерными для факелов сбросных прибрежных устройств, т. е. порядка сотен метров – километров. Для таких диффузионных процессов обследование фоновой гидрологической обстановки в районе желательно осуществлять на полигоне с размерами, по крайней мере на порядок превышающими масштабы диффундирующих облаков или струй примеси. Работы на полигоне продолжались с 25 мая по 31 июня 1984 г. Схема исследовательского полигона с комплексом работ на нем приведена на рисунке. В узкой прибрежной зоне с помощью батометрических серий измерялись температура и соленость воды с платформы, расположенной в 900 м от берега. Там же измерялись скорости течений с помощью вертушек. Вертикальные профили температуры воды в зонах выпуска и дрейфа таян примеси фиксировались батитермографом с катера. С судна "Проф. Водяницкий" была проведена постановка трех автономных буйковых станций (АБС) в 10,

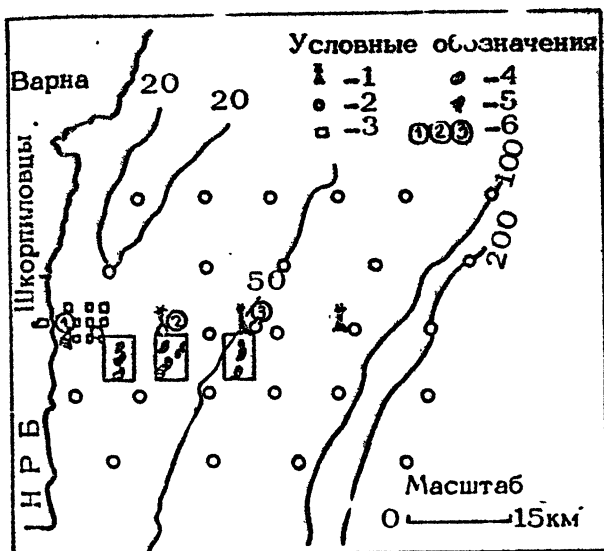


Схема комплекса исследований на полигоне (масштаб хемы - в 1 см 7,5 км): 1 - автономные буйковые станции с измерителями течений, 2 - гидрологические станции в шельфовой зоне, 3 - гидрологические станции вблизи экспериментальной эстакады, 4 - районы выпуска пятен красителя, 5 - выпуск струй красителя вблизи эстакады, 6 - районы детальных гидрологических измерений в период диффузионных экспериментов

15 и 24 милях от берега на глубинах соответственно 33, 50 и 88 м. 12 самописцев течений работали здесь в общей сложности 14 дней с дискретностью измерений в 10 миль. С судна были проведены две площадные океанографические съемки по 26 станций на акватории 20 x 25 миль. Измерение температуры и электропроводности воды проводилось на станциях с помощью зонда "Исток". По данным зонда рассчитывалась соленость и плотность воды на станциях. В зонах диффузии примеси во время диффузионных экспериментов зондом "Исток" проводились ежечасные зондирования толщи воды. Антенной распределенных датчиков измерялись на полигоне внутренние волны. Продолжительность таких измерений варьировалась от 21 до 38 ч. С закоренного судна также проводились измерения течений с помощью подвесной гирлянды вертушек. С судна "Исследователь" Института

океанологии Болгарской Академии наук была осуществлена многочасовая гидрологическая станция у \BC-1 и четыре микросъемки из трех разрезов в прибрежной зоне моря (до трех миль от берега). С этого судна эксплуатировались также измерители течений типа "Андера" и термогал. Учащенные метеорологические измерения проводились с судов и на стационарной береговой станции Института океанологии БАН в поселке Шкорпиловцы.

Для диффузионных опытов использовались флуоресцирующие красители родамин-С и родамин-6Ж. Для создания квазипостоянного источника примеси применялось специальное устройство, состоящее из двух двухсотлитровых емкостей, соединенных шлангом. Раствор красителя подавался в первую емкость, расположенную выше второй, в которой поддерживался постоянный уровень раствора красителя, что обеспечивало постоянство его истечения из шланга на поверхность моря. Емкости при диффузионных опытах располагались на свайной платформе, расположенной в 900 м от береговой черты. Видимые длины струй красителя, образующиеся в опытах с квазистационарным источником, варьировались от 500 до 1700 м. Расход красителя в этих опытах составлял 0,26 г/с (что соответствовало расходу 0,1 л/с раствора). В период с 4 по 28 июня выполнено 14 экспериментов со струями красителя.

Измерения концентрации красителя в море осуществлялись с помощью флуориметра конструкции Г.С.Карабашева с чувствительностью 10^{-9} - 10^{-10} г/см⁻³ и флуориметрическим комплексом "Импульс" с такой же чувствительностью, но оснащенного также датчиком температуры воды с точностью измерений 0,05°C.

Запуски "мгновенных" источников красителя производились с научно-исследовательского судна "Проф. Водяницкий" и с катеров. Мощности источников (количество сухого веса красителя в растворе) варьировали в опытах от 1,4 до 5 кг. Обычно в одном опыте запускалось от 2 до 5 пятен, а всего было произведено 48 запусков пятен красителя (в период с 29 мая по 28 июня). Запуски осуществлялись как вблизи береговой черты, так и на расстояниях в 10 - 15 миль от берега. Контактные измерения концентрации красителя флуориметрами проводились с катера. В целом ряде экспериментов использовалась также аэрофотосъемка диффундирующего красителя с самолета АН-14, оснащенного фотокамерой

с размером кадра 18 x 18 см и фокусным расстоянием 210 мм. Важными оказались и визуальные наблюдения с самолета, которые позволяли выявлять фронтальные разделы между распресненными, поверхностными и глубинными морскими водами, слики, особенности волнения и т. д.

Гидрологическая ситуация на полигоне в период исследований оказалась достаточно сложной. Температура поверхностных слоев воды в период съемки 9 - 10 июня 1984 г. менялась от 12°C в прибрежных водах в северной части полигона до 18,5°C в его юго-восточной части. Изотермы в среднем имели направление с северо-востока на юго-запад, но наблюдались и меандровидные изгибы изотерм как в прибрежной, так и в юго-восточной части полигона. Карта распределения температуры поверхностных вод существенным образом изменилась к периоду съемки 20 - 21 июня 1984 г. Температура прибрежных вод поднялась до 16,5°C в северной части полигона и до 19°C - в южной. В то же время в мористой части полигона температура изменилась слабо. Этот процесс явился следствием сгонного явления, обусловленного соответствующей синоптической ситуацией над морем. На вертикальных разрезах поля температуры хорошо виден слой скачка температуры, расположенный на глубинах 10 - 20 м. Условная плотность воды менялась на полигоне в поверхностных водах от 12,0 до 15,4 единицы, причем на вертикальных разрезах поля плотности, полученных в период первой и второй съемок, хорошо виден подъем глубинных вод в прибрежной зоне в первый период работ с последующим опусканием этих вод. Соленость поверхностных вод в период первой съемки уменьшалась от 17,4 - 18,0 ‰ у берега до 17,1 ‰ вблизи центра полигона и вновь увеличивалась до 17,6 - 17,7 ‰ в мористой части.

Поле течений на полигоне также оказалось сложным и изменчивым. Так, в период с 7 по 20 июня 1984 г. в прибрежной зоне шириной до 15 миль от поверхности до дна преобладали, в основном, течения северо-северо-восточных направлений. Мористее во всей толще вод (глубина в 24 милях от берега 70 м) господствовал юго-юго-западный перенос вод (ветвь Основного черного, ского течения). Осредненная за период наблюдений скорость течения в прибрежной зоне не превышала 4 - 10 см/с, а в мористой части достигала 20 см/с. Однако изменчивость как направления, так и модуля скорости течений была достаточно высо-

кой. Так, в поверхностном слое моря скорости течения при преобладающем юго-западном переносе достигали временами значений в 60 см/с. Анализ роз повторяемости направлений скорости течений показал, что течения на полигоне в период исследований были однослойными, причем основной вклад в изменчивость течений вносили колебания вектора скорости с периодами от десятков минут до нескольких суток. Поле скорости имело также четко выраженную изменчивость с периодом инерционных колебаний (17 – 18 ч). Широкий спектр частот имели на полигоне внутренние температурные волны. По данным измерений, распределенными датчиками удалось показать, что поле внутренних волн было неизотропно. Направление распространения внутренних волн оказалось более тесно связанным с направлением подъема термоклина к поверхности моря, чем с уклоном дна.

Комплексные гидрологические наблюдения на полигоне показали, что даже на такой сравнительно небольшой акватории в период работ существовала целая система фронтальных зон. В прибрежной и шельфовой зоне наблюдались фронты стокового происхождения в предустьевой акватории р. Камчия, мезомасштабные стоковые фронты, распространяющиеся из северо-западной части моря (влияние р. Дунай), система фронтов стгонного происхождения на мелководной части шельфа, а также плотностный шельфовый фронт. Эти фронтальные зоны, на которых существовали обостренные градиенты скорости течений и плотности воды, естественно, весьма существенно влияли на процесс диффузии пятен и струй красителя, попадавших в их зоны.

Комплекс гидрометеорологических фоновых наблюдений, проведенных на полигоне, был, как можно видеть, достаточным для оценки всех параметров, определяющих процесс диффузии примесей. Действительно, было известно (естественно, лишь с определенной точностью) поле скорости течений как функции координат и времени в масштабах изучаемых процессов. Знание полей плотности воды, метеорологической ситуации, параметров волнения давало возможность использовать полуэмпирические формулы для определения значений и функционального вида коэффициентов диффузии в уравнении (4). Это позволяло, с одной стороны, использовать различные рода теоретические модели диффузии и производить расчет поля концентрации примеси от различного рода источников и, с другой стороны, осущест-

влять сравнение получаемых решений с данными прямых наблюдений над диффузией красителей на полигоне.

Основные результаты опытов со струями красителя можно сформулировать следующим образом. Интенсивность горизонтальной диффузии в струях значительно превосходит интенсивность вертикальной, что связано с сильным меандрированием струй из-за неустойчивости течений и с большими значениями вертикальных градиентов плотности воды (особенно обостряющимися в верхних слоях моря в период сгонных явлений). В полях концентраций красителя в струях заметны вариации, обусловленные внутренними волнами. Аналогичные особенности трехмерных полей примеси обнаруживаются и по данным о диффузии пятен примеси от мгновенных точечных источников. При этом скорость роста размеров пятен в процессе диффузии оказалась меняющейся во времени. В пределах первого часа диффузии дисперсия пятен росла по линейному закону, а в последующие 2 - 3 ч зависимость дисперсии от времени становилась близкой к квадратичной. Это связано, по всей видимости, с влиянием вертикальных сдвигов скорости течений на втором этапе диффузии. С этой же причиной связано и вытягивание пятен в процессе диффузии. Обнаружено также, что для одного и того же масштаба явления (размера пятна) интенсивность диффузии и, следовательно, значения коэффициента горизонтальной диффузии возрастают при удалении точки наблюдения от береговой черты. Весьма существенно, как уже об этом упоминалось выше, влияние фронтальных зон на формы пятен и интенсивность диффузии.

Теоретические модели, использованные для описания наблюдаемых на полигоне закономерностей процессов диффузии примеси, дали возможность не только достаточно хорошо аппроксимировать реальные картины распределения концентрации красителя, но и прийти к некоторым выводам общего характера. Так, было показано, что для описания диффузии примесей в поверхностном слое прибрежных зон моря в модели обязательно необходимо учитывать явления сгона (или нагона), что может быть учтено в уравнении (4) соответствующим заданием вертикальной скорости и коэффициентов диффузии. В моделях также следует учитывать эффекты циклического прогрева и охлаждения прибрежных зон моря и суши. Например, дневной прогрев вод и бризовые ветра могут обусловить локализацию примеси в поверхностном слое

прибрежного участка моря, что, естественно, приведет к тяжелым экологическим последствиям.

Комплексный полигонный метод исследования диффузии примесей в море дает, как мы видим, достаточно исчерпывающую информацию об изучаемом явлении. Метод позволяет выявить роль таких явлений как сгонные процессы, фронтальные структуры, бризовые ветры, дневной прогрев. Все это, в конечном итоге, позволяет создать физико-математическую модель диффузии, адекватно описывающую основные закономерности переноса примеси в прибрежной зоне моря. Естественно, что на ряд вопросов проведенные исследования не дали исчерпывающих ответов. Так, в частности, дальнейших исследований требуют процессы диффузии в период весенне-летнего прогрева моря, когда формируется, затем заглубляется слой скачка плотности, а также в период зимнего выхолаживания моря при развитии конвективных движений вод, быстро переносящих примесь на большие глубины. Весьма желательны и прямые пульсационные измерения полей скорости и концентрации примеси для определения гурбулентных потоков примеси и значений коэффициентов диффузии. Подобного рода исследования, несомненно, дадут возможность выработать более обоснованные и действенные методы борьбы с загрязнением прибрежных зон моря.

Л и т е р а т у р а

1. Озмидов Р. В. Диффузия примесей в океане. М.: Гидрометеоздат, 1986.
2. Исследования процессов диффузии примесей в прибрежной зоне Черного моря (Международный эксперимент "Диффузия - 84") / Под ред. Р. В. Озмидова, К. А. Коротенко; Институт океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР. М., 1989.

ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ И ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

А. Ф. Курбацкий

Распространенный подход в моделировании механизма турбулентного переноса импульса, тепла и вещества состоит в принятии локальных линейных связей для потоков переносимых свойств с градиентами средних термогидродинамических полей ("локальность" механизма переноса). В неоднородных турбулентных течениях такая параметризация часто оказывается неадекватной физической реальности турбулентного переноса, осуществляемого крупномасштабными вихрями ("нелокальность" механизма переноса). Модель турбулентности, в которой потоки (корреляции второго порядка) — искомые функции дифференциальных уравнений переноса (метод статистических моментов второго порядка), описывает нелокальный характер механизма турбулентного переноса.

Для математического моделирования турбулентных течений чаще применяется наиболее рабочий из развиваемых в настоящее время методов — метод статистических моментов.

Инфинитезимальным уровнем описания служит модель турбулентного переноса 1-го порядка ("К-теория"), основанная на простой градиентной модели Буссинеска:

$$-\langle u_i u_j \rangle = \chi_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \langle u_i u_i \rangle \delta_{ij}, \quad (1)$$

$$-\langle u_i \theta \rangle = \chi_T \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad (2)$$

$$\chi_T = \chi_T / \epsilon_T; \quad \chi_T = \sqrt{E} \cdot L \left(E = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle \right). \quad (3)$$

Модель (1)–(3) привлекательна своей простотой и поэтому широко используется на практике. Однако моделирование турбулентного переноса в современных задачах аэрогидродинамики окружающей среды сталкивается с принципиальной ограниченностью локальных моделей "градиентной диффузии" Буссинеска. Это указывает на необходимость развития и использования моделей турбулентности второго порядка (искомые турбулентные потоки – $\langle u_i u_j \rangle$ и $\langle u_i \theta \rangle$), а в ряде случаев и моделей турбулентного переноса третьего порядка [1]).

К недостаткам локальных градиентных моделей турбулентного переноса следует отнести, по крайней мере, два принципиальных ограничения.

1) Изотропный характер коэффициентов турбулентной вязкости χ_T и турбулентной теплопроводности χ_T . На практике во многих случаях коэффициенты турбулентной вязкости не изотропны из-за влияния стратификации среды, магнитного поля и т.д. Учет анизотропии переноса по различным направлениям, хотя бы в принципе, возможен лишь на умозрительной основе.

2) Соотношения для потоков типа "градиентной диффузии" (1)–(3) локальны, кроме специальных случаев: это наиболее сильная претензия, целиком относящаяся и к двухпараметрическим моделям турбулентности, включающим в себя соотношения (1)–(3), в которых кинетическая энергия турбулентности E и характерный масштаб турбулентности L (или $\epsilon \sim \sim E^{3/2}/L$) определяются из дополнительных дифференциальных уравнений. Действительно, модели "градиентной диффузии" для турбулентного переноса основаны на допущении, что турбулентность находится в состоянии локального равновесия: в каждой точке течения энергия турбулентности диссипируется с той же скоростью, с какой она порождается. Тем самым исключается влияние порождения турбулентности в других точках потока, или в более ранние моменты времени. Таким образом, эти модели чаще всего не в состоянии адекватно описать процессы турбулентной диффузии (пространственный перенос свойств), а также эффекты "памяти" турбулентности. Градиенты модели турбулентного переноса (1)–(3) подразумевают, что эффективный коэффициент турбулентного обмена импульсом (теплом) обращается в нуль вместе с обращением в нуль градиента

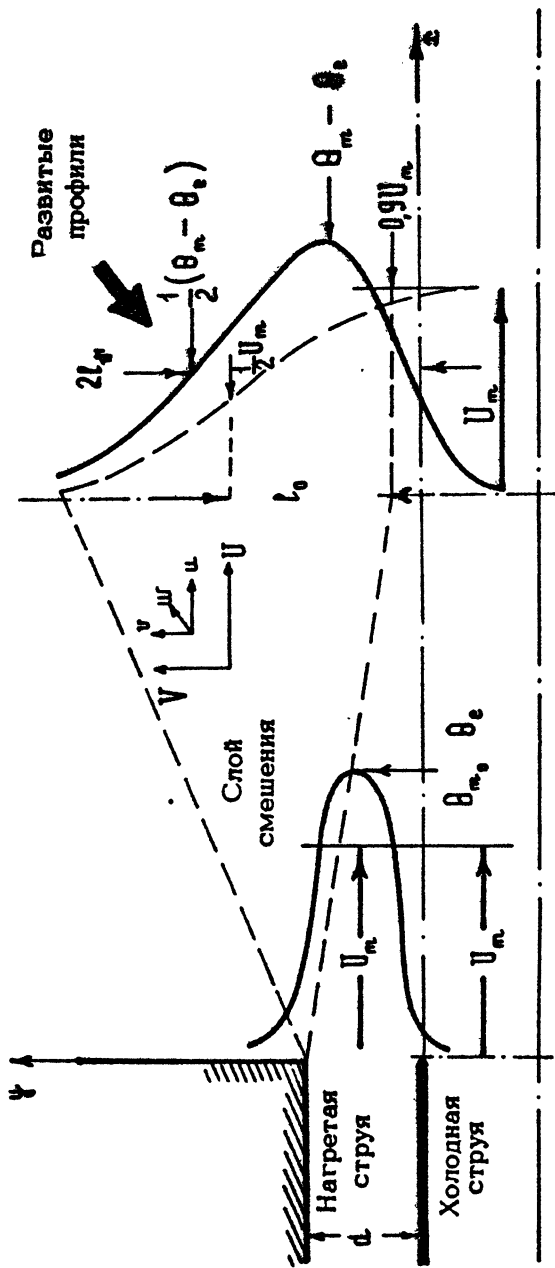
средней скорости (температуры). Если же точки обращения в нуль потока и градиента переносимого свойства не совпадают, то в возникающей зоне смещения поток имеет направление противоположное предписываемому локальной градиентной моделью переноса Буссинеска. Это означает, что в зоне смещения проявляется эффект "кажущейся отрицательной турбулентной вязкости" ($\nu_T < 0$, $\chi_T < 0$): поток переносимого свойства носит противоградиентный характер. Локальные модели турбулентного переноса неадекватны, и в этом смысле можно говорить, что механизм турбулентного переноса имеет нелокальный характер.

1. ПРОЯВЛЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ, ПРОТИВОГРАДИЕНТНЫХ ЭФФЕКТОВ МЕХАНИЗМА ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА. ПРИМЕРЫ.

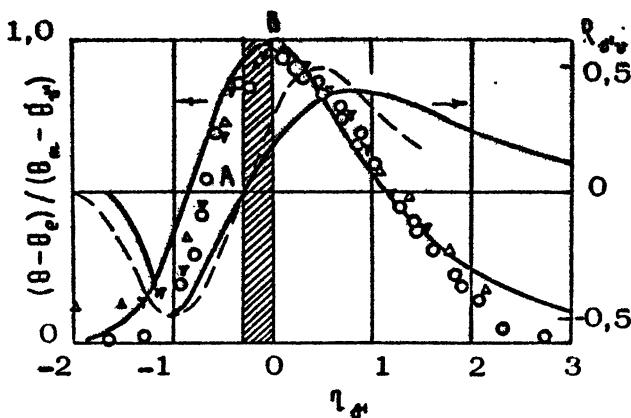
Термический слой смещения с асимметричным профилем средней температуры. Зона контрградиентного турбулентного переноса тепла зафиксирована [1] прямыми измерениями в слое смещения. Слегка нагретая плоская струя (рис. 1) вытекала в неподвижную среду с одной стороны и однородный поток, движущийся со скоростью равной скорости струи, - с другой стороны. Возникающее течение - типичный слой смещения, с наложенным на него асимметричным профилем средней температуры. В этих опытах абсолютные разности температур были малы, так что можно было пренебречь эффектами плавучести на динамику потока. Температура могла рассматриваться как пассивная примесь.

На рис. 2 показаны распределения поперек слоя смещения турбулентного потока тепла $\langle v \theta' \rangle$ и средней температуры θ . Заштрихована зона смещения АВ: в точке А $\langle v \theta' \rangle = 0$, а в точке В градиент осредненной температуры $\partial \theta / \partial y = 0$ (на рисунке $R_{\theta v} = \langle v \theta' \rangle / \{ \langle v'^2 \rangle \cdot \langle \theta'^2 \rangle \}$ - коэффициент корреляции).

В пределах зоны смещения перенос тепла носит контрградиентный характер: локальная модель турбулентного переноса тепла $\langle v \theta' \rangle = \chi_T \partial \theta / \partial y$ в зоне смещения АВ приводит к $\chi_T < 0$. Опытные данные также свидетельствуют, что именно динамика турбулентного движения создает асимметричный поперечный перенос крупными вихрями, который более энергичен в направлении от низко- к высокоскоростной области слоя смещения. В условиях асимметрии крупные вихри переносят жидкость в



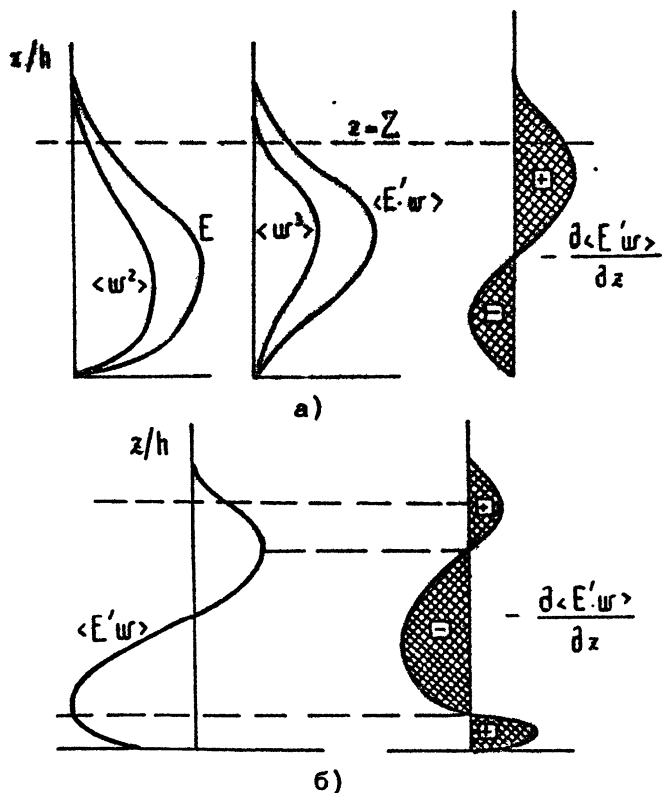
Р и с. 1. Картина течения в слое смешения с асимметричным профилем средней температуры



Р и с. 2. Профили средней температуры, турбулентного потока тепла. Точки различной конфигурации и штриховая линия - опытные данные [1], сплошные линии - расчет по модели второго порядка

направлении обратном процессу переноса посредством "градиентной диффузии" малыми вихрями, создавая зону отрицательного порождения (в окрестности температурного максимума поперечный турбулентный поток направлен в сторону возрастания поперечного градиента интенсивности турбулентности).

Турбулентная проникающая конвекция. Как известно, слои, перемешиваемые конвекцией, возникают, например, в верхней части океана главным образом в полярных областях и умеренных широтах в зимние месяцы. Вовлечение устойчиво стратифицированной жидкости в хорошо перемешанную турбулентную область происходит в пределах узкой области, так называемого слоя эрозии, формирующегося в верхней части перемешанного слоя (окрестность плоскости $z = Z$ на рис.3,а). Процесс вовлечения жидкости в турбулентную область вызывает подавление энергии турбулентности. Сохранение процесса вовлечения требует подвода к слою достаточного количества энергии турбулентности путем турбулентного переноса ее от подстилающей поверхности. При отсутствии среднего ветра перенос энергии турбулентности, дисперсии турбулентных флуктуаций температуры, тепла и других свойств в таком слое возникает не под влиянием напряжений сдвига, а под действием флуктуирующей массовой силы плавучести.



Р и с. 3. Противогradientный вертикальный турбулентный поток энергии $\langle E'w \rangle$ в свободно конвективном слое перемешивания. (рис.3,а - опытные данные Виллиса и Дирдорфа [2])

Поддержание необходимого уровня флуктуаций температуры (а следовательно, и плотности) обеспечивается подводом на нижней границе слоя энергии в виде заданного и направленного вверх потока тепла.

На рис. 3, а (данные взяты из работы [2]) показано вертикальное распределение вертикальной составляющей интенсивности турбулентности $\langle w^2 \rangle$, энергии турбулентности $E = \frac{1}{2}(\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle)$, вертикального потока энергии турбулентности $\langle E'w \rangle$ и дивиденции этой величины $-\frac{\partial \langle E'w \rangle}{\partial z}$ в слое, перемешиваемом конвекцией. На рис. 3 h - начальная высота слоя, ось z направлена вверх. Все профили этой

фигуры соответствуют экспериментально наблюдавшимся Виллисом и Дирдорфом [2]. В частности, изображенный на этом рисунке профиль дивергенции потока энергии означает, что имеет место вертикальный перенос энергии от нижней поверхности слоя перемешивания к области инверсии. Этот поток и компенсирует подавление энергии турбулентности в слое эрозии из-за процесса вовлечения.

Рис. 3,6 показывает совершенно нереалистичное поведение потока и дивергенции, вычисленных с помощью классических локальных градиентных моделей турбулентного переноса. Ни при каком "коэффициенте турбулентного обмена" K_T в локальной модели типа (1)–(3) не удастся добиться соответствия между вычисленными и экспериментальными профилями вертикальной составляющей плотности турбулентного потока кинетической энергии турбулентности $\langle E'w' \rangle$ ($E' = \frac{1}{2} u_i'^2$).

В этой задаче приходится по необходимости рассматривать сами процессы турбулентной диффузии: (третьи моменты), как зависимые переменные, находя их из решения соответствующих уравнений переноса [1]. Такой подход позволяет естественно и последовательно учесть влияние сил плавучести в уравнениях переноса в виде аддитивных источников, в то время как использование той или иной формы обобщенной гипотезы Буссинеска [3] для турбулентной диффузии лишено этого преимущества.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА ТЕПЛА И ВЕЩЕСТВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Приведенные выше опытные данные об эффектах нелокальности механизма переноса свидетельствуют о столь сложной картине турбулентного движения, что реально моделирование этих эффектов возможно лишь при использовании аппроксимаций неизвестных корреляций в уравнениях переноса вторых и третьих моментов с привлечением априорной экспериментальной информации, универсальной, быть может, только в классе турбулентных течений с одинаковой геометрией потока.

Полученная в результате таких аппроксимаций замкнутая система дифференциальных уравнений турбулентного переноса второго (и третьего) уровня замыкания должна позволять предвычислять турбулентные потоки (и процессы турбулентной

диффузии) и доставлять тем самым большую часть содержательной информации о явлениях турбулентного переноса, наблюдаемых в эксперименте.

Система дифференциальных уравнений, представляющая собой крупномасштабную физическую модель турбулентного переноса второго уровня замыкания для описания неоднородного поля скорости несжимаемой жидкости при больших турбулентных числах Рейнольдса с учетом стратификации среды по плотности, имеет вид [1]

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + U_\kappa \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\kappa} = - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \langle u_\kappa u_\alpha \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \rho \delta(x_\alpha, z), \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_\kappa}{\partial x_\kappa} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial t} + U_\kappa \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x_\kappa} = \rho_{\alpha\beta} + \hat{I}_{\alpha\beta\kappa}^s + \hat{\tau}_{\alpha\beta} - \hat{\epsilon}_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Большинство со знаком \wedge сверху означают модельные представления для соответствующих членов в точных (незамкнутых) уравнениях турбулентного переноса. В уравнении (6) член порождения турбулентности средним сдвигом

$$\rho_{\alpha\beta} = - \langle u_\alpha u_\kappa \rangle \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\kappa} - \langle u_\beta u_\kappa \rangle \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\kappa}$$

не требует моделирования.

Для тензора диссипации

$$\epsilon_{\alpha\beta} = 2 \nu \left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\kappa} \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\kappa} \right\rangle$$

предпочтительнее выражение релаксационного типа [1] :

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{\langle u_\alpha u_\beta \rangle}{\tau},$$

где $\tau = A \cdot L \epsilon^{-1/2}$ — характерное время крупномасштабного турбулентного движения, L — интегральный масштаб турбулентности. Постоянная $A \approx 4$ универсальна в классе развитых свободных и пристенных турбулентных течений. Корреляция

$$\tau_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right\rangle$$

имеет аппроксимацию вида [4,5]

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = -c_1 \varepsilon \cdot b_{ij} - c_2 \left(\rho_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho \right) - c_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G \right), \quad (7)$$

$$c_1 \approx 1,6, \quad c_2 = 0,4, \quad c_3 = 0,4.$$

В выражении (7)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\alpha}; \quad \rho = \frac{1}{2} \rho_{\alpha\alpha}, \quad G_{ij} = -\frac{q_i}{\rho} \langle \rho u_j \rangle - \frac{q_j}{\rho} \langle \rho u_i \rangle$$

— порождение турбулентности движом скорости и плавучестью, а $G = \frac{1}{2} G_{\alpha\alpha}$ — порождение за счет работы архимедовой силы плавучести в уравнении баланса кинетической энергии турбулентности:

$$\begin{aligned} \frac{DE}{Dt} = & \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d \langle u_i u_i u_k \rangle}{dt}}_{\hat{\sigma}} - \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{\rho} \\ & - \underbrace{\frac{q_i}{\rho} \langle \rho u_i \rangle}_{G} - \varepsilon \end{aligned} \quad (8)$$

($\hat{\sigma}$ обозначает всю совокупность слагаемых турбулентной диффузии; $D/Dt = \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$).

Через

$$b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$$

обозначен тензор анизотропии. В уравнении (8) $\varepsilon = [\tau]$ — величина скорости диссипации кинетической энергии турбулентности.

В случае стратифицированной среды влияние пульсаций массовой плотности в модели турбулентного переноса (4) — (6) в большинстве случаев достаточно учесть в приближении Буссинеска. Источник порождения плавучести имеет вид [1]

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\langle \rho u_\alpha \rangle}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} - \frac{\langle \rho u_\beta \rangle}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}. \quad (9)$$

Входящие в уравнение (9) турбулентные потоки массы $\langle \rho u_\alpha \rangle$, $\langle \rho u_\beta \rangle$ в приближении Буссинеска выражаются в виде турбулентных потоков тепла,

Модель второго порядка поля скорости развитого свободного турбулентного течения включает в себя уравнения переноса (4)–(6), в последнем из которых процессы диффузии третьих моментов $I_{\alpha\beta\gamma}^3$ выражается через $R_{\alpha\beta}$ с помощью градиентной аппроксимации для третьих моментов [1]:

$$I_{\alpha\beta\gamma}^3 \left(\equiv -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u_i u_j u_k \rangle \right) = c_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \tau \left[\langle u_i u_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_\alpha} + \langle u_j u_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u_k u_i \rangle}{\partial x_\alpha} + \langle u_k u_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_\alpha} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$c_\epsilon \approx 0,11, \quad \tau = L/\epsilon.$$

Приближенно замкнутая система уравнений второго порядка для описания нелокального турбулентного переноса скалярных свойств (температуры, концентрации) при учете стратификации среды по температуре (плотности) записывается ниже для случая больших турбулентных чисел Рейнольдса $Re_L \equiv (\sqrt{\epsilon} \cdot L)/\nu \gg 1$ и Пекле $Pe_L \equiv (\sqrt{\epsilon} \cdot L_{\sigma T})/\gamma \gg 1$ в пренебрежении молекулярной диффузией:

$$\frac{D\theta}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k \theta' \rangle, \quad (11)$$

$$\frac{D\langle u_i \theta' \rangle}{Dt} = \rho_{\theta' i} + \hat{I}_{ik}^{\theta'} + \hat{\kappa}_{\theta' i} + G_{\theta' i}, \quad (12)$$

$$\frac{D\langle \theta'^2 \rangle}{Dt} = \rho_{\theta'} + \hat{I}_{\theta' \theta'} - \hat{\epsilon}_{\theta'}. \quad (13)$$

В системе (11)–(13) отдельные статьи баланса имеют следующий вид. Член

$$\rho_{\theta' i} \equiv \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \langle u_k \theta' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

— порождение градиентом среднего поля (не требует модельных представлений). Член турбулентной диффузии $\hat{I}_{ik}^{\theta'} = -\partial/\partial x_k \langle u_i u_k \theta' \rangle$ моделируется с помощью градиентной аппроксимации [1]:

$$\hat{I}_{ik}^{\theta'} = c_{\theta'} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \tau \left[\langle u_k u_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u_i \theta' \rangle}{\partial x_\alpha} + \langle u_k u_\alpha \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \theta' \rangle}{\partial x_k} + \right. \right.$$

$$+ \langle u_k \varphi^i \rangle \frac{\partial \langle u_k u_k \rangle}{\partial \tau_k} \Big] \Big\}$$

$$(\tau_{\varphi^i} \approx 0,15, \quad \tau = E/\varepsilon).$$

Для корреляции $\mathcal{K}_{\varphi^i} \equiv \left\langle \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \tau_i} \right\rangle$ используется аппроксимация релаксационного вида

$$\mathcal{K}_{\varphi^i} = -(\tau_{2\varphi^i} / \tau_{\varphi^i}) \langle u_i \varphi^i \rangle, \quad (14)$$

где $\tau_{2\varphi^i} = 2,0$; см., например, [1,4]. Остальные члены в (11)–(13) аппроксимируются следующим образом:

$$G_{\varphi^i} = \frac{\langle \varphi^i \rangle}{\rho^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau_i} \approx g_i \langle \beta \rangle \cdot \langle \varphi^2 \rangle,$$

$$\rho_{\varphi^i} \approx -2 \langle u_k \varphi^i \rangle \frac{\partial \theta}{\partial \tau_k},$$

$$\hat{I}_{\varphi^i k} \left(\equiv -\frac{\partial}{\partial \tau_k} \langle u_k \varphi^i \rangle \right) \approx \tilde{c}_{\varphi^i} \frac{\partial}{\partial \tau_k} \left[\tau \left(2 \langle u_k \varphi^i \rangle \frac{\partial \langle u_k \varphi^i \rangle}{\partial \tau_k} + \langle u_k^2 \rangle \frac{\partial \langle \varphi^i \rangle}{\partial \tau_k} \right) \right]$$

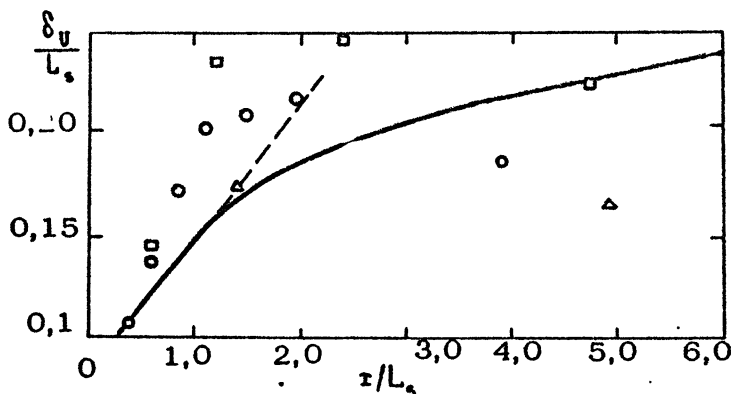
$$(\tilde{c}_{\varphi^i} \approx 0,15; \quad \tau = E/\varepsilon).$$

Для скалярной диссипации здесь записывается алгебраическая релаксационная аппроксимация

$$\hat{\varepsilon}_{\varphi^i} \approx 2\gamma \left\langle \frac{\partial \varphi^i}{\partial \tau_k} \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial \tau_k} \right\rangle = \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{\tau_{\varphi^i}}. \quad (15)$$

Выражение (15) служит определением характерного масштаба вращения ("частоты вращения") крупномасштабных скалярных вихрей. Вместе с тем оно приносит в модель еще одну неизвестную величину τ_{φ^i} . Вопрос о нахождении последней еще не получил своего окончательного решения. Алгебраическое выражение (15) для определения скорости скалярной диссипации ε_{φ^i} предполагает существование простой связи пропорциональности между масштабами τ_{φ^i} и τ , т.е. приближенно постоянного уровня распределения параметр $\hat{R} = \tau_{\varphi^i} / \tau$ в поперечных сечениях неоднородных турбулентных течений со сдвигом. Опытные данные это подтверждают. Для сдвиговых течений $\hat{R} \approx 0,5$ (см. об этом, например, [1]).

Развитие свободного слоя смешения в устойчиво стратифицированной жидкости. На основе модели турбулентного переноса второго порядка (4)–(6) проведено [4] моделирование эволюции слоя смешения, формирующегося между двумя потоками воды различной солености в условиях устойчивой стратификации. Турбулентные потоки массы вычислялись как с помощью дифференциальной модели для потоков (11)–(13), так и по упрощенной до алгебраических (см. [4]) соотношений модели переноса. В рассматриваемом течении, где турбулентность подавляется из-за действия архимедовой силы, результаты расчетов потоков массы в обоих случаях отличались незначительно и практически совпадали.



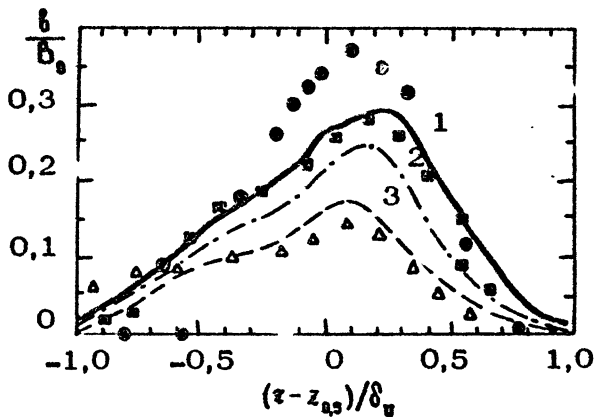
Р и с. 4. Толщина слоя смешения δ_v как функция продольной координаты x_s . Точки – опытные данные [6], сплошная линия – расчет по модели второго порядка

Два результата моделирования показывают возможности и ограничения модели турбулентности второго порядка.

На рис. 4 показано изменение ширины слоя смешения $\delta_v (= 1/(\partial U/\partial y)_{\text{max}})$ с расстоянием вниз по потоку (сплошная линия) в сравнении с опытными данными (точки различной конфигурации отмечают измерения [6] при несколько разных начальных условиях).

Видно, что модель дает уменьшение роста ширины слоя и стремление ее величины к асимптотическому значению, в то время как опытные данные указывают на уменьшение ширины (три точки в правой части рисунка).

Факт этого уменьшения связывается в работе [6] с неперемешанностью жидкости в турбулентной области сдвигового слоя, когда при вовлечении жидкости через границы крупномасштабные ее образования не смешиваются с завихренной жидкостью и могут даже выбрасываться из турбулентной области ("неразвитость" мелкомасштабной структуры турбулентности). Интересно, что для поверхностной струи в тех же условиях картина иная [6]: мелкомасштабная структура формируется и закон роста ширины струи имеет асимптотический характер, как и на рис. 4. Результат рис. 4, по-видимому, свидетельствует о важности перемежающейся структуры турбулентности внутри слоя смешения, а не только на его границах, и необходимости учета этого в модели турбулентного переноса.



Р и с. 5. Поперечные профили среднеквадратичных пульсаций массовой плотности в слое смешения. Точки различной конфигурации — опытные данные [6], кривые линии — расчет

Вместе с тем, модель предвычисляет асимметрию процесса вовлечения жидкости в турбулентную область. Этот факт установлен [7,8] в последнее время при турбулентном смешении газов различной плотности.

На рис. 5 изображена дисперсия пульсаций массовой плотности в трех различных поперечных сечениях. Линиями нанесены результаты расчета [4], а точки различной конфигурации — опытные данные [6] (кривая 3 отмечает сечение, расположенное ниже по потоку от сечений 1 и 2). Профиль отчетливо асимметричен: более пологий на высокоскоростной

стой стороне и крутой на низкоскоростной стороне сдвигового слоя. При пространственном расширении слоя в него вовлекается неодинаковое количество жидкости каждого из ограничивающих его свободных потоков.

Роль процессов диффузии в механизме турбулентного переноса в стратифицированных средах. Модели "градиентной диффузии" неадекватны при моделировании процессов переноса статистических свойств термогидродинамических полей в задачах свободной конвекции. Пример тому приведен выше.

Кроме того, экспериментальными данными метеорологов уже давно было зафиксировано появление противогradientного потока тепла (направленного от подстилающей поверхности вверх) в пограничном слое атмосферы в условиях развитой конвекции (нейтральная или слабо устойчивая стратификация по температуре) [9,10,11]. В рамках gradientной модели (2) коэффициент γ_T оказывается отрицательной величиной. Примеры неадекватности формулы (2) в лабораторном моделировании, в том числе и в случае нейтральной стратификации во всем пограничном слое, приведены также, например, в [12].

Описание развития турбулентного конвективного слоя перемешивания требует при его моделировании адекватного учета корреляций третьего порядка термогидродинамических полей. Действительно, как видно из рис. 3, важная характеристика динамики перемешанного слоя — вертикальный поток энергии турбулентности $\langle [\psi] \rangle$ — контргradientна по всей высоте слоя. Модели gradientной диффузии неадекватны.

В работе [1] показано, что правильное моделирование этого потока, представляющего собой одноточечный момент третьего порядка, может быть получено, если из дифференциальных уравнений переноса находить не только корреляции второго порядка (потоки), но и корреляции третьего порядка (процессы турбулентной диффузии). Модель турбулентного переноса третьего порядка приведена, например, в цитированной выше работе [1]. Вообще говоря, эта модель громоздка (содержит 50 уравнений) и для конвективного перемешанного слоя (средний сдвиг отсутствует) она состоит из 11 прогнозных уравнений.

Возможно развитие и различного рода обобщений гипотезы Буссинеска (2). Так, например, в работе [13] предпринята попытка обобщать для атмосферного пограничного слоя предложенную ранее обобщенную модель Буссинеска [11]:

$$-\langle \psi \psi' \rangle = K_{\psi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \hat{f}_{\psi} \right), \quad (16)$$

где K_{ψ} — эффективный коэффициент турбулентного обмена для скалярного свойства $\theta(\bar{x}, t)$, а \hat{f}_{ψ} — так называемый температурный "противоградиент", подправляющий градиентную модель (2) для ситуаций, когда $K_{\psi} < 0$. Представление для потока (16) носит, конечно, чисто феноменологический характер и успех его целиком зависит от удачного определения \hat{f}_{ψ} на основе данных наблюдений. В цитированной работе [13] с привлечением модели третьего порядка показано, что в формировании противоградиентной области пограничного слоя принципиальную роль играет диффузионный поток тепла ($-\partial/\partial z \langle \psi^2 \psi' \rangle$). Таким образом, гипотеза (16) будет подходящим "лекарством", если отыщется экономичный и эффективный способ вычисления корреляции третьего порядка ($\langle \psi^2 \psi' \rangle$ для задач типа пограничного слоя, в частности).

Л и т е р а т у р а

1. Курбацкий А.Ф. Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988.
2. Willis G.E., Deardorff J.W. A Laboratory Model of the Unstable Planetary Layer // J. Atmos. Sci. 1974, V. 31, N.5, P.1297.
3. Lumley J.L., Zemann O., Siess J. The influence of buoyancy on turbulent transport // J. Fluid Mech., 1978. V. 84, N.3. P. 581.
4. Курбацкий А.Ф., Яковенко С.Н. Моделирование турбулентного слоя смешения в устойчиво стратифицированной жидкости: Препринт ИТПМ СО АН СССР № 21. Новосибирск, 1988.
5. Методы расчета турбулентных течений. // Под ред. В.Колльмана. М.: Мир, 1984.
6. Chu V.K., Baddour R.E. Turbulent gravity-stratified shear flows // J. Fluid Mech. 1984. V. 138. P. 353.
7. Dimotakis P.E. Two-dimensional shear-layer entrainment // AIAA J. 1986. V. 24, N. 11, P. 1791.

8. Lowery P.S., Reynolds W.S. Passive scalar entrainment and mixing in a forced, spatially-developing mixing layer // AIAA Paper. 1987. N.87, P. 132.
9. Будыко М.И., Юдин М.И. Условия термического равновесия в атмосфере // ДАН СССР. 1946. Т.53, № 7. С.
10. Priestley C.H.B., Swinbank W.C. Vertical transport of heat by turbulence in the atmosphere // Proc. Roy.Soc. 1947. ser. A. V. 189. P. 543.
11. Deardorff J:W. The counter-gradient heat flux in the lower atmosphere and in the laboratory. // J. Atm. Sci. 1966. V. 23. P. 503.
12. Narasima R. The turbulence problem: a survey of simple turbulent flows /// GALCIT Report EM 84-01, Grad. Aero Lab., California Inst. of Technology. Pasadena, USA, 1984.
13. Лыкосов В.Н. К-теория турбулентного пограничного слоя атмосферы и обобщенная гипотеза Буссинеска: Препринт АН СССР (Отдел вычисл. матем-ки АН СССР) № 210. М. 1988.

ВНУТРЕННЕЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В ОКЕАНЕ

В. С. Мадерич

Перемешивание является фундаментальным фактором в гидротермодинамике океана. Наряду с пограничными слоями у поверхности и дна океана важную роль в преобразованиях энергии играет внутреннее перемешивание в основной толще океана, осуществляющее перенос тепла и соли через изопикнические поверхности (диапикнический перенос). В некоторых районах океана определяющим механизмом перемешивания оказывается дифференциально-диффузионная конвекция. Однако наиболее распространенный механизм внутреннего перемешивания связан с мелкомасштабной турбулентностью [1 - 9].

Прямые измерения турбулентности в океане, начавшиеся в 60-х годах, показали, что в глубинных слоях устойчиво стратифицированного океана она сосредоточена в вытянутых по горизонтали пятнах ("блинах"), возникших вследствие неустойчивости течений и внутренних волн [2, 3]. С течением времени "развитая" турбулентность с инерционным интервалом в спектре энергии вырождается в "реликтовую", а сами пятна затем исчезают как плотностные неоднородности, растекаясь под действием сил плавучести и размываясь молекулярной диффузией тепла и соли. Пятна взаимодействуют с полями течений и внутренних волн. Существенная нестационарность процессов эволюции пятен приводит к пространственно-временной перемежаемости мелкомасштабной турбулентности. Таким образом, в каждый момент времени толща океана пронизана пятнами развитой и реликтовой турбулентности на фоне поля внутренних волн и течений. Данные обстоятельства вызывают трудности как в построении моделей перемешивания, так и

в интерпретации данных измерений турбулентности в океане [9 - 11].

Одним из путей преодоления этих трудностей может быть разработка "многофазных" моделей турбулентности, в которых выделены взаимопроникающие фазы турбулентных и ламинарных пятен, внутренних волн и крупномасштабных полей океана между которыми осуществляется взаимообмен импульсом, теплом и солью. Подобный подход развивается в работах [12, 13]. Основной проблемой здесь является параметризация "межфазного" обмена.

Целью настоящей статьи является анализ энергетики процессов внутреннего перемешивания. Последовательно рассматривается энергообмен в отдельных пятнах и в ансамблях пятен, моделируемых методом Монте-Карло. Такой анализ представляется необходимым шагом при построении более развитых многофазных моделей турбулентного перемешивания. Кроме того, статистическое моделирование является эффективным средством имитации измерений турбулентности в океане. Приведены результаты имитации таких измерений, проводимых путем вертикального зондирования.

МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЯТНА

Математическая модель пятна должна описывать его основные стадии эволюции, определяемые как турбулентным вовлечением, так и гравитационным растеканием гребневых пятен. Основываясь на классификации [5], можно выделить три основные стадии эволюции турбулентных пятен: 1) *начальная турбулентная*, на которой пятно почти изотропно расширяется вследствие турбулентного вовлечения; 2) *промежуточная турбулентная*, когда под действием сил плавучести пятно деформируется, оставаясь турбулентным; 3) *финальная*, на которой развитая турбулентность в пятне превращается в реликтовую. В свою очередь, в процессе эволюции уже негетерогенных пятен выделяются четыре стадии: 1) *начальная*, когда силы плавучести превышают силы инерции, волнового и вязкого сопротивления; 2) *промежуточная*, на которой силы плавучести уравновешиваются силами инерции и волнового сопротивления; 3) *вязкая*, когда силы плавучести уравновешиваются силами вязкости; 4) *диффузная* -

о н н о - в я з к а я, на которой наряду с силами плавучести и вязкости определяющими являются эффекты диффузии тепла и соли. Следует подчеркнуть, что в зависимости от начальных условий эволюция может начинаться на любой стадии и завершаться, не доходя до последних стадий.

Для описания динамики пятен в настоящее время существует ряд теоретических моделей [14 - 23]. Однако большинство из них описывают лишь отдельные стадии эволюции симметричных в плане пятен в бессдвиговых потоках. От таких ограничений свободна модифицированная интегральная модель [21], описывающая при локально постоянных частоте Вайсяля N и вертикальном градиенте скорости Γ все стадии эволюции пятен в: времени t , кроме последней - диффузионно-вязкой. Модель получена осреднением по объему пятна уравнений для средней и пульса. ионной кинетической и потенциальной энергии, замыкаемых с помощью традиционных в теории турбулентности соотношений.

Модель состоит из системы дифференциальных уравнений для: средней кинетической энергии (КЭС) e_s , кинетической энергии турбулентности (КЭТ) e , потенциальной энергии турбулентности (ПЭТ) B , скорости диссипации КЭТ ϵ , скорости "диссипации" ПЭТ ϵ_B , а также уравнений эволюции вертикального (H) и горизонтальных (R, L) размеров пятна:

$$\frac{dk_s}{dt} = -(K_s, K_T) + (K_s, K_W) + (K_s, \Pi_s) + (K_s, W) - (K_s, F); \quad (1)$$

$$\frac{dk_T}{dt} = (K_s, K_T) + (K_T, \Pi_s) - (K_T, F); \quad (2)$$

$$\frac{d\Pi_T}{dt} = (\Pi_s, \Pi_T) - (\Pi_T, F); \quad (3)$$

$$\frac{d(K_T, F)}{dt} = \left\{ c_4 [(K_T, \Pi_s) + (K_s, K_T)] - c_3 (K_T, F) \right\} \frac{\epsilon}{e}; \quad (4)$$

$$\frac{d(\Pi_T, F)}{dt} = \left[c_5 (\Pi_s, \Pi_T) - c_6 \left(1 + \frac{\epsilon B}{c_7 \epsilon \epsilon_0} \right) (\Pi_T, F) \right] \frac{\epsilon_B}{B}; \quad (5)$$

$$\frac{dH}{dt} = 2(u_c + u_e); \quad \frac{dR}{dt} = 2(u_c + u_e); \quad \frac{dL}{dt} = 2(u_c + u_e). \quad (6)$$

Здесь K_s - полная КЭС в пятне, имеющем форму параллелепипеда объемом $V=HRL$, $K_s=V\epsilon_s$, $\epsilon_s=(2u_c^2+w_c^2)/6$, K_T - полная КЭТ, $K_T=V\epsilon$, Π_s - полная ПЭТ флуктуаций плотности ρ' в пятне; $\Pi_T=VB$, $B=\frac{1}{2}\int_V \rho'^2 dV/(VN^2)$, $B'=\frac{1}{2}\rho'/\rho_s$ - пульсация плавучести $b=g(\rho-\rho_s)/\rho_s$, ρ_s - невозмущенное значение плотности, g - ускорение силы тяжести, u_c - горизонтальная, w_c - вертикальная составляющая скорости гравитационного растекания пятна, u_e - горизонтальная, w_e - вертикальная составляющая скорости турбулентного вовлечения. Определим также среднюю потенциальную энергию (ПЭС) пятна:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_V \rho'^2 dV/N^2 = \frac{1}{24} VN^2 N^2.$$

Вследствие предположения о полной перемешанности пятна уравнение для Π_s выполняется тождественно.

Правые части (1) - (6) описывают преобразования энергии: (K_s, K_T) - приток КЭТ за счет сдвига средней скорости при растекании пятна, а также за счет сдвига скорости течений окружающей среды, (K_T, Π_s) - переход КЭТ в ПЭС за счет турбулентного перемешивания, $(K_T, \mathcal{F})=V\epsilon$ - диссипация КЭТ в пятне, (K_s, K_w) - приток энергии за счет турбулентного захвата окружающей пятно среды, (K_s, Π_s) - переход ПЭС в КЭС при гравитационном растекании пятна, (K_s, W) - поток энергии через поверхность пятна, вызываемый излучением внутренних волн в окружающую среду и волновое сопротивление растекания пятна, (K_s, \mathcal{F}) - вязкая диссипация КЭС, (Π_s, Π_T) - переход ПЭС в ПЭТ при вовлечении, $(\Pi_T, \mathcal{F})=V\epsilon_b$ - скорость "диссипации" ПЭТ, пропорциональная скорости размывания флуктуаций температуры и солёности молекулярной диффузией тепла и соли.

Выражения для потоков в уравнениях (1) - (6) имеют вид

$$\begin{aligned} (K_s, K_T) &= RLw_e \left[\frac{2}{3} u_c^2 + \frac{1}{4} (GH)^2 \right] + \frac{1}{3} H(L+R) u_e (u_c^2 + w_c^2) + \\ &+ \frac{1}{12} Hk_w (GH)^2; \quad (K_s, K_w) = H(L+R) u_e u_c^2 + RLw_e w_c^2 + \\ &+ \frac{1}{12} R(Hu_e + Lw_e) (GH)^2; \end{aligned}$$

$$(K_s, \Pi_s) = -\frac{1}{6} V H N^2 \omega_c; \quad (K_s, W) = c_8 V u_c \omega_c N;$$

$$(K_T, \Pi_s) = -2(\Pi_s, \Pi_T) = -\frac{1}{2} \left[R L \omega_c + \frac{1}{3} H (L+R) u_c \right] 4^2 N^2;$$

$$(K_s, \mathcal{F}) = c_9 \nu V \left\{ 2(u_c/H)^2 + (u_c^2 + \omega_c^2) [(R+L)/RL]^2 \right\},$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. Они дополняются уравнением неразрывности

$$H(L+R)u_c + RL\omega_c = 0$$

и замыкающими соотношениями для скорости вовлечения

$$u_c = c_1 e^{1/2}, \quad \omega_c = c_1 e^{1/2} / [1 + c_2 (eN/\varepsilon)^2].$$

Детали построения модели изложены в работах [5, 21]. Постоянные $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,32$, $c_3 = 1,92$, $c_4 = 1,44$, $c_5 = 0,97$, $c_6 = 1,5$, $c_7 = 4$ заимствованы из апробированных моделей турбулентности [24, 25]. Выражения для (K_s, W) , (K_s, \mathcal{F}) получены из соображений размерности, а постоянные $c_8 = 1/3$ и $c_9 = 2$ найдены из сравнения с асимптотическими решениями для промежуточной и вязкой стадий растекания негустых пятен. Заметим, что в модели выделяется динамическая часть (1), (2), (4), (6), не зависящая от (3), (5). Поэтому результаты моделирования для $e, \varepsilon, \nu, H, R, L$ зависят лишь от c_1-c_4, c_8, c_9 . Система уравнений (1) — (6) дополняется начальными условиями при $t = t_1$:

$$e_s = e_{s1}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1, \quad \nu = \nu_1, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{s1}, \quad H = H_1, \quad R = R_1, \quad L = L_1. \quad (7)$$

В процессе эволюции пятна развитая турбулентность с наличием инерционного интервала вырождается, превращаясь в реликтовую, представляющую собой совокупность коротких внутренних волн и растекающихся под действием сил плавучести неоднородностей плотности. Чтобы учесть этот переход будем считать пятно негустым ($e = \varepsilon = \nu = \varepsilon_s = 0$), когда

$$l_0 \leq 10 L_K \quad \text{и/или} \quad L_T \leq 10 L_K. \quad (8)$$

Здесь $L_0 = \varepsilon^{1/2} N^{-3/2}$ — масштаб Осмидова [4], характеризующий наибольшие размеры турбулентных вихрей, перемешивающих устойчиво стратифицированную среду; $L_K = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ — масштаб Колмогорова; $L_T = \sqrt{2\nu} N^{-2}$ — масштаб вихрей в

устойчиво стратифицированной среде. Выражение для масштаба L_t следует из модельного предстарения о твердотельном переворачивании гурбулентных вихрей [26]. Второе из условий (8) существенно, когда силы плавучести относительно невелики и $L_0 \gg L_t$. Величина числового коэффициента в соотношениях (8) согласуется с оценкой Гибсона [27], предположившего, что число Ричардсона в вихрях при превращении в реликтовую гурбулентность достигает $1/4$. Приравнявая $l_j = L_k$, нетрудно получить характерные масштабы скорости диссипации реликтовой гурбулентности $\epsilon_{KF} = \nu N^2$, длины $L_{KF} = (\nu/N)^{1/2}$ и энергии $\epsilon_{KF} = (\epsilon_{KF} L_{KF})^{2/3} = \nu N$,

полезных для оценки состояния гурбулентности [27].

Модель (1) - (6) разработана для полностью перемешанных в среднем пятен. Реальные пятна не полностью перемешаны и прекращают свое существование по достижении некоторой толщины при их сплющивании в процессе негурбулентной эволюции, когда градиенты плотности в пятне и окружающей среде выравниваются. Теоретические модели этого процесса разработаны [18, 23]. Чтобы учесть данное обстоятельство, принято, что пятно исчезает, когда его толщина уменьшается в 10 раз по сравнению с начальной. Расчеты показали, что выбор множителей в приведенных выше критериях существования на результаты расчета статистических характеристик практически не влияет. Заметные изменения могут иметь место лишь для характеристик негурбулентных стадий эволюции.

Сравнительно с ранним вариантом модели [21] постановка дополнена уравнением (5) для (Π_T, \mathcal{F}) в форме [25], а также членом (K_s, \mathcal{F}) в уравнении (1), что обусловлено необходимостью учета существенной неравновесности процесса диссипации ПЭТ и описания вязкой стадии эволюции пятен. В этой, достаточно простой на наш взгляд постановке задачи, модель правильно описывает различные асимптотические режимы: эволюцию гурбулентной области в нестратифицированной среде, начальную, промежуточную и вязкую стадии растекания негурбулентного пятна при одном и том же наборе постоянных.

Например, эволюция симметричного $(H=R=L)$ гурбулентного пятна в нестратифицированной среде $(N=0)$ описывается уравнениями (2), (4), (6). Решения для больших t имеют вид

$$R/R_1 \sim q_1 t^{\gamma_1}, \quad e/e_1 \sim q_2 t^{\gamma_2}, \quad \varepsilon/\varepsilon_1 \sim q_3 t^{\gamma_3},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, q_1, q_2, q_3$ — постоянные, причем $\gamma_1 = (2c_3 - 3)/5(c_3 - 1)$, $\gamma_2 = -2(3c_3 - 2)/5(c_3 - 1)$, $\gamma_3 = (11c_3 - 9)/5(c_3 - 1)$ совпадают с показателями в автомодельных решениях, приведенных в работе [5]. Начальная стадия эволюции симметричного негатурбулентного пятна ($V = \text{const}$) имеет место, когда левая часть (1) уравнивается членом (K_s, Π_s) . При $Nt \ll 1$ $R/R_1 = 1 + (1/6)(Nt)^2$. На промежуточной стадии (K_s, Π_s)

уравнивается (K_s, W) , так что $R = [(V/c_s)Nt + R_1^3]^{1/3}$. Наконец на вязкой стадии (K_s, Π_s) уравниваются (K_s, \mathcal{F}) .

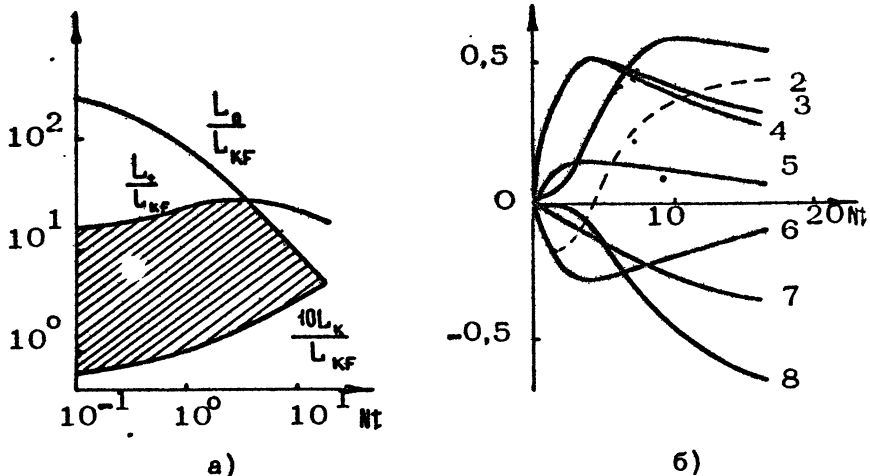
При $R \gg H$ находим, что $R = [10V^4 N^2 t / (3c_s) + R_1^{10}]^{1/10}$. Эти решения совпадают с полученными [14 - 16] и позволяют оценить характер зависимости решений от постоянных модели.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ В ПЯТНЕ

Рассмотрим результаты численного расчета турбулентного пятна при начальных условиях: $t_1 = 0$, $e_s = 0$, $e/e_{KF} = 4 \cdot 10^4$, $B_1/e_{KF} = 4 \cdot 10^2$, $\varepsilon_1/e_{KF} = 8 \cdot 10^4$, $\varepsilon_{B1}/e_{KF} = 1,2 \cdot 10^4$, $H_1/L_{KF} = 10^2$, $R_1/L_{KF} = L_1/L_{KF} = 10^3$, в условиях сезонного термоклина ($N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\nu = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$), соответствующих пятну размерами $1,1 \times 1,1 \times 1,1 \text{ м}$ и с турбулентными числами Ричардсона $Ri_T = N^2 H^2 / \varepsilon = 1/4$, $Ri_{**} = (eN/\varepsilon)^2 = 1/4$.

На рис. 1,а показана эволюция линейных масштабов L_0, L_K, L_t при градиентном числе Ричардсона $Ri = N^2/G^2 = 0,25$. Приблизительно выделяются начальная ($L_0 \gg L_t \gg L_K$) и промежуточная ($L_t \gg L_0 \gg L_K$) стадии. Развитая турбулентность существует в заштрихованной области масштабов. Отметим, что время существования турбулентности, определяемое критерием (8), относительно невелико и лишь вдвое превосходит время существования турбулентности в отсутствие сдвига.

На рис. 1,б приведены графики изменения во времени нормированных на (K_T, \mathcal{F}) потоков энергии. В процессе эволюции относительный вклад различных процессов преобразований энергии существенно изменяется, причем важнейшим



Р и с. 1. Эволюция во времени: а - масштабов турбулентности (1 - масштаб L_0 , 2 - L_k , 3 - L_t); б - потоков энергии, нормированных на (K_T, Π_s) : 1 - (K_s, Π_s) , 2 - $(K_T, \Pi_s) + (K_s, \Pi_s)$, 3 - (K_s, K_W) , 4 - (K_s, K_T) , 5 - (Π_s, Π_T) , 6 - (K_T, Π_s) , 7 - (Π_T, F) , 8 - (K_s, W)

остаётся диссипация КЭТ. В начальной стадии относительно велико порождение КЭТ за счёт сдвига скорости средних течений. Однако с течением времени увеличивается поток (K_T, Π_s) , ограничивающий вертикальный размер пятна, и тем самым (K_s, K_T) . Порождение за счёт сдвига скорости при растекании, так же как и увеличение КЭС за счёт захвата энергии сдвигового течения в (K_s, K_W) , мало. В процессе эволюции увеличивается роль волнового сопротивления (K_s, W) растеканию пятна. Вклад вязкой диссипации (K_s, F) в турбулентном пятне не превосходит 1% и в масштабе рис. 1,б не представлен, хотя на последних стадиях эволюции он является, наряду с (K_s, Π_s) , определяющим.

Потоки (K_T, Π_s) и (K_s, Π_s) имеют противоположные знаки. В процессе эволюции пятна сначала преобладает переход K_T в Π_s за счёт турбулентного вовлечения, а затем при растекании более значительным становится переход Π_s в K_s . Поэтому полный вертикальный поток плавучести $(K, \Pi) = -[(K_T, \Pi_s) + (K_s, \Pi_s)]$ в пятне, как показано на рис. 1,б, меняет знак и, начиная с промежуточной турбулентной стадии, можно наблюдать противогradientный перенос, приводя-

ший к восстановлению исходного профиля плотности (процесс рестратификации). Данное явление наблюдалось в экспериментах [26] и было интерпретировано указанным образом в работе [28].

Таким образом, вклад различных форм преобразований энергии в пятне, кроме (K_s, F) , в процесс эволюции пятна соизмерим.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АНСАМБЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЯТЕН.

Применение метода Монте-Карло к статистическому моделированию мелкомасштабной турбулентности в океане состоит в расчете случайно возникающих пятен со случайными характеристиками с помощью описанной выше модели пятна и в определении статистических характеристик ансамбля. Динамика мелкомасштабной турбулентности определяется множеством случайных параметров - локальной стратификации океана, профилем течений, полем внутренних волн, надежной статистики которых все еще нет. Поэтому рассматривается максимально упрощенная задача, в которой считается, что N и Γ в области моделирования Ω постоянны, а характеристики пятна не зависят от места его возникновения. Считается, что в данном месте новое пятно не возникает, пока не исчезнет старое как плотностная неоднородность. Расстояние между пятнами достаточно велико, для того чтобы пренебречь их взаимодействием.

В начальных условиях постулируется геометрическое подобие пятен и постоянство турбулентных чисел Ричардсона $Ri_T = Ri_{*4} = 1/4$. Для i -го пятна в ансамбле из N пятен при $t = t_{4i}$ они имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & N_i / L_{KF} = h_i, \quad R_i / L_{KF} = L_v / L_{KF} = \alpha_1 h_i, \quad e_{Si} = 0, \quad e_i / e_{KF} = \\
 & = \alpha_2 h_i^2, \quad B_i / e_{KF} = \alpha_3 \xi_{4i} h_i^2, \quad \epsilon_i / e_{KF} = \alpha_4 \xi_{2i} h_i^2, \quad e_{\delta i} / e_{KF} = \alpha_5 \xi_{4i} \xi_{2i} h_i^2.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Здесь $\alpha_1 - \alpha_5$ - постоянные. Характеристики моделируемого ансамбля определяются четырьмя случайными безразмерными величинами - возрастом пятен $\tau_i = (t - t_{4i}) N$, толщиной h_i и параметрами ξ_{4i}, ξ_{2i} . Считается, что пятна порождают

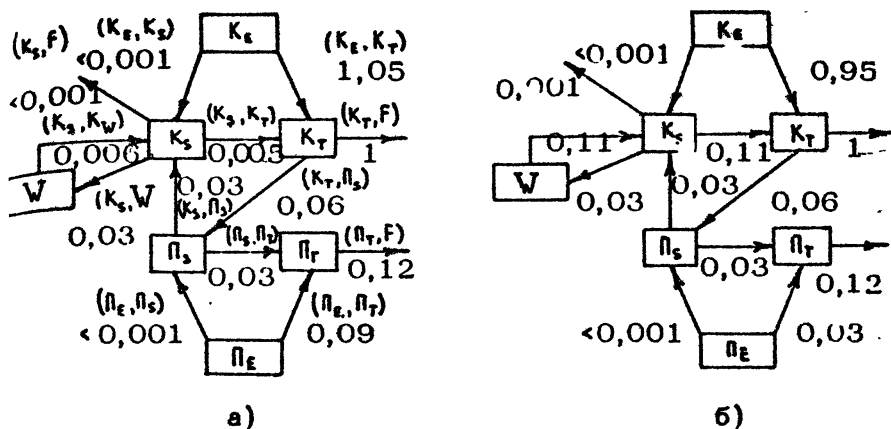
ся в достаточно широком диапазоне $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$. Плотность вероятности h аппроксимируется экспоненциальным законом в соответствии с данными измерений [29]:
 $f(x; \alpha) = \alpha \exp(-\alpha x) + \exp(-\alpha)$, где $x = (h - h_{\min}) / (h_{\max} - h_{\min})$, α - параметр распределения. Распределение τ_i равномерно в интервале $(0, \tau_{m_i})$, где τ_{m_i} - время жизни i -го пятна. Значения ξ_{1i}, ξ_{2i} равномерно распределены в интервале (ξ_0, ξ_m) .

Процедура моделирования включала в себя разыгрывание параметров начальных условий h_i, ξ_{1i}, ξ_{2i} , расчет эволюции отдельного пятна и разыгрывание возраста пятна τ_i . По достижении заданного числа пятен n вычисляются статистические характеристики ансамбля.

На результаты статистического моделирования в общем случае влияют структура самой модели, условия возникновения и исчезновения пятен и размер анализируемой выборки. Приведенные ниже результаты моделирования, полученные при конкретном наборе параметров, воспроизводятся и в широком их диапазоне. Использовались следующие значения: $a_1 = 10$, $a_2 = 4$, $a_3 = 4 \cdot 10^{-2}$, $a_4 = 8$, $a_5 = 8$, $\alpha = 6$, $h_{\min} = 15$, $h_{\max} = 250$, $\xi_0 = 0,25$, $\xi_m = 4$, $\nu = 1,3 \times 10^{-6}$ м²/с, $N = 10^{-2}$ с⁻¹, $Ri = 0,01 - 100$ - для условий, имитирующих сезонный гермоклин, в котором порождаются пятна толщиной от 0,17 до 2,8 м.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ В АНСАМБЛЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЯТЕН

Результаты моделирования при $Ri = 10$ показывают, что число турбулентных пятен m составляет 11 % от n , причем отношение объема турбулентных пятен ко всему объему пятен $\gamma = 0,41$. При $Ri = 0,25$ оно возрастает до 15 %, а γ - до 0,5. На рис. 2 приведены диаграммы преобразований энергии при $Ri = 10$ и $Ri = 0,25$. Здесь $(K_E, K_S), (K_E, K_T), (P_E, P_S), (P_E, P_T)$ - потоки энергии за счет порождения новых пятен. Турбулентность в среднем поддерживается потоками (K_E, K_T) и (P_E, P_T) , тогда как даже при $Ri = 0,25$ отбор энергии уже существующими пятнами в несколько раз меньше. Основным стоком энергии, поступившей в пятна, является диссипация КЭТ. Остальные потоки энергии на порядок меньше, что контрастирует с ре-



Р и с. 2. Диаграммы преобразований энергии в ансамбле турбулентных пятен при $Ri = 10$ (а) и $Ri = 0,25$ (б).
Потоки нормированы на (K_T, \mathcal{F})

зу этапами расчетов потоков для единичного пятна, приведенными на рис. 1, б. Это обусловлено достаточно быстрым вырождением турбулентности в пятнах, что при осреднении приводит к преобладающему вкладу "молодых" пятен с интенсивной турбулентностью, в которых, как следует из рис. 1, б, поток (K_T, \mathcal{F}) доминирует. На других следствиях существенной неравновесности процессов энергообмена в пятне остановимся ниже.

Осредненный по ансамблю вертикальный поток плавучести

$$\overline{w'b'} = \sum_{i=1}^n (K_T, \Pi)_i / \sum_{i=1}^n V_i = - \sum_{i=1}^n [(K_T, \Pi_s)_i + (K_s, \Pi_{s'})_i] / \sum_{i=1}^n V_i, \quad (10)$$

составлял 3 % скорости диссипации КЭТ. При этом поток (K_T, Π_s) , обусловленный турбулентным вовлечением, составляет около 6 % и половина его возвращается в КЭС за счет механизма рестратификации, а остальная часть превращается в ПЭТ.

Следует отметить определенную аналогию между структурой соотношений (10) и выражения: а для вертикального потока плавучести, полученными [28, 30]. В работе [28] из соображений размерности величина $\overline{w'b'}$ аппроксимировалась следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{w' b'} &= c_1 Ri_* && \text{при } Ri_* \leq Ri_{*c}, \\ \overline{w' b'} &= c_2 \left[1 - (Ri_* / Ri_1)^{1/2} \right] && \text{при } Ri_* > Ri_{*c}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $Ri = (\overline{w'^2} \overline{b'^2})^{1/2} / \bar{\epsilon}, \overline{w'^2}, \overline{b'^2}$ - дисперсии пульсаций вертикальной скорости и плавучести, $c_1, c_2, Ri_{*c}, Ri_1(c_1, c_2)$ - постоянные. Соотношение для $\overline{w' b'}$ в работе [30] было получено из асимптотической процедуры решения уравнений для однолучечной функции распределения скоростей и плотности методом Чепмена - Энскога:

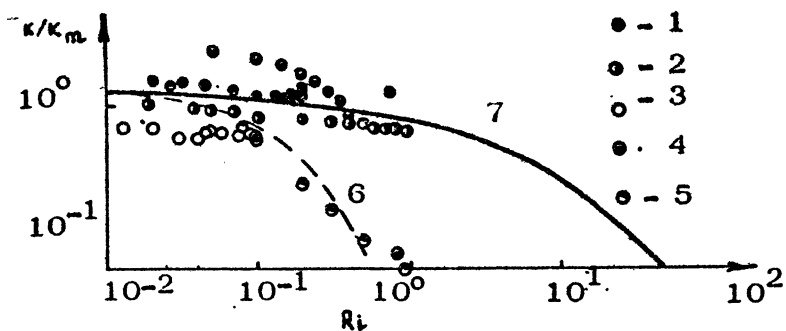
$$\overline{w' b'} = \bar{\epsilon}^{-1/2} \rho N^2 \left[1 - \frac{3\bar{b}}{\bar{\epsilon}} (1 - R_t) \right], \quad (12)$$

где $\bar{b} = \overline{b'^2} / N$, ρ - масштаб турбулентности, R_t выражается через корреляционную функцию случайного поля турбулентных пульсаций плавучести и зависит от соотношения между вертикальными и горизонтальными масштабами корреляции. Хотя уравнения (11) - (12) описывают обратный переход потенциальной энергии в кинетическую, но, в отличие от однофазных моделей [28, 30], в соотношении (10) ПЭС преобразуется в КЭС растекающихся плотностных неоднородностей и внутренних волн, почти не участвующую в каскадном переносе энергии и перемешивании.

Рассчитанное путем статистического моделирования значение коэффициента турбулентной диффузии $k = \overline{w' b'} / N^2$ можно сопоставить со значениями, определенными по модели Озмидова [1, 4] и Осборна-Кокса [31]. Согласно [4], $k_0 = c Ri_{kp} \bar{\epsilon} N^{-2}$, где $c = 0,1$, $Ri_{kp} = 0,25$. В модели [31] предполагается наличие равновесия между рождением пульсаций плавучести и их молекулярным размыванием, так что $k_t = \bar{\epsilon} N^{-2}$. Отметим достаточную близость $k = 0,5 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $k_0 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $k_t = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, с учетом того, что в зависимости от начальных условий отношение $\overline{w' b'} / \bar{\epsilon}$ меняется в диапазоне $0,03 \div 0,08$.

Зависимость отношения коэффициентов вертикальной диффузии k и обмена импульсом k_m от Ri приведена на рис. 3. С отношение $k/k_m = R_f / Ri$, где R_f - динамическое число Ричардсона, определяемое для ансамбля пятен по формуле

$$R_f = \frac{\sum_{i=1}^n (K, \Pi)_i}{\sum_{i=1}^n (K_s, K_w)_i}.$$



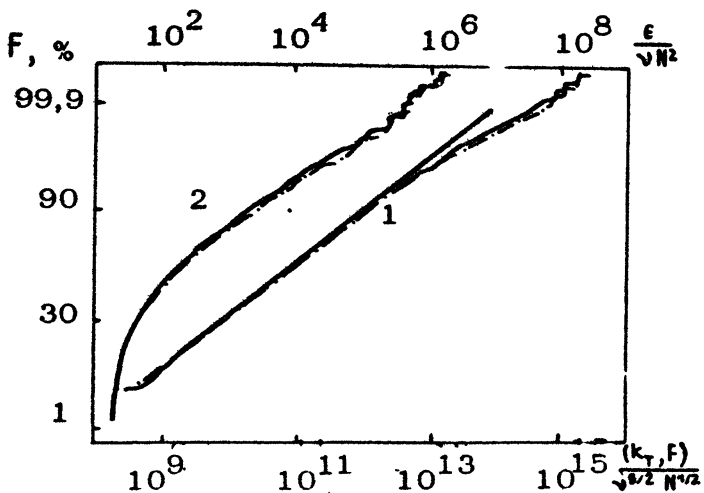
Р и с. 3. Зависимость k/k_m от Ri по данным измерений (1 - 6), обобщенным [32], и по данным моделирования (7)

Как следует из рис. 3 отношение k/k_m убывает с ростом Ri , что неплохо согласуется с измерениями в атмосферном пограничном слое (1 - 3). Различия с лабораторными экспериментами (4 - 6 на рис. 3) объясняются разными механизмами порождения турбулентности, невысокими числами Рейнольдса в лабораторных экспериментах и предположением об отсутствии взаимодействия между пятнами в численных экспериментах, неоправданным для описания турбулентности вблизи механических источников турбулентности.

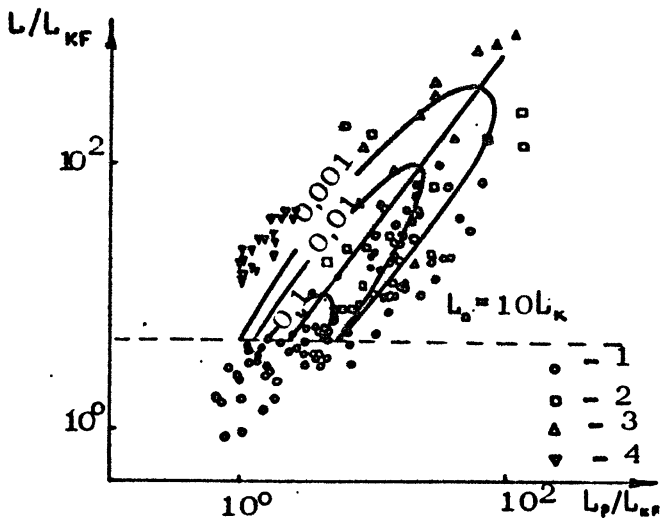
СТАТИСТИКА СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Статистические функции распределения характеристик турбулентности, как правило, на всем интервале их изменения не описываются едиными законами. На рис. 4 приведены функции распределения (K_T, \mathcal{F}) и ϵ в логарифмически нормальных координатах, полученные в результате статистического моделирования. Большая часть пятен характеризуется малыми значениями ϵ (60 % пятен лежит в интервале $21,5 \leq \epsilon/\epsilon_{KF} \leq 100$). Для распределения ϵ характерен длинный логнормальный хвост (прямая в координатах рис. 4). Логнормальность еще сильнее выражена в распределении (K_T, \mathcal{F}) .

Аналогичный характер имеет распределение ϵ_B . Связь между ϵ и ϵ_B показана на рис. 5, где приведены результаты расчетов двумерной плотности вероятности



Р и с. 4. Статистические функции распределения $F((k_T, F))$ (1) и $F(\epsilon)$ (2). Сплошные линии - при $R_i = 0,25$, штрихпунктирные - при $R_i = 10$

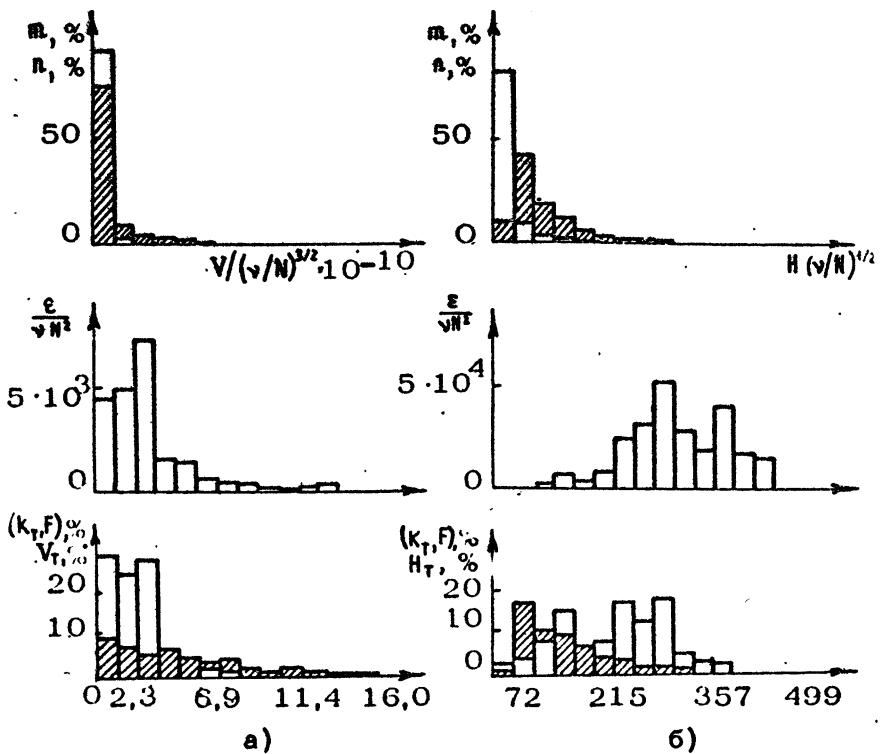


Р и с. 5. Двумерная плотность вероятности $f(\ln(L_p/L_{KF}), \ln(L_0/L_{KF}))$. Прямая - зависимость, определенная методом наименьших квадратов. Данные измерений в океане: 1 - [34], 2 - [35], 3 - [36], 4 - [37]

$f(\ln(L_p/L_{KF}), \ln(L_0/L_{KF}))$, где линейный масштаб $L_p = \epsilon^{1/2} N^{-3/2}$ - масштаб, введенный Пакчевым [33]. На рис. 5 приведены также результаты наблюдений в океане [34 - 37]. Связь между L_0 и L_p , полученная методом наименьших квадратов, по данным моделирования имеет вид $L_p/L_{KF} = 0,76 (L_0/L_{KF})^{0,72}$ при коэффициенте корреляции 0,87.

Логнормальность в распределении скорости диссипации достаточно часто обнаруживается в измерениях, сделанные в условиях развитой турбулентности при нейтральной стратификации и объясняется каскадным процессом дробления вихрей, при котором перемежаемость возрастает с уменьшением масштабов [3]. В наших численных экспериментах, имитирующих ансамбль эволюционирующих во времени пятен в устойчиво-стратифицированном океане, появление близких к логнормальным участков распределений обусловлено перемежаемостью, вызванной быстрым вырождением турбулентности пятнами под действием сил плавучести. Многочисленные измерения в океане [3, 9, 10, 38] подтверждают наличие логнормальности в распределениях ϵ и ϵ_p для глубинных слоев океана и тем самым относительно небольшой возраст пятен с развитой турбулентностью.

На рис. 6, а приведены гистограммы распределения по градациям объемов числа всех пятен, числа турбулентных пятен, скорости диссипации, долей полной по ансамблю диссипации (K_T, \bar{F}) и долей полного объема турбулентных пятен. Основная доля диссипации (52 %) сосредоточена в 3 % от числа турбулентных пятен, занимающих 7 % объема. Эти обстоятельства делают существенными отклонения от логнормальности (прямой на рис. 4, рассчитанной методом максимального правдоподобия [38]). Поэтому для статистически достоверного расчета таких характеристик турбулентности необходимы большие выборки с тем, чтобы учесть эффекты редких, но энергичных вспышек турбулентности. Характер сходимости статистических оценок средних величин, полученных методом Монте-Карло, можно видеть из таблицы, где приведены осредненные по турбулентным пятнам значения $\bar{N}_T, \bar{\epsilon}_T, \bar{B}_T, \bar{E}_T$ в зависимости от n . Следует отметить медленную сходимость $\bar{\epsilon}_T$ к математическому ожиданию, в отличие от $\bar{N}_T, \bar{E}_T, \bar{B}_T$. С уменьшением n отчетливо проявляется тенденция к занижению средних значений, объясняемая тем, что в таких реализациях отсутствуют наиболее энергичные пятна.



Р и с. 6. Распределение по градациям объемов (а) и толщин (б) пятен их числа n (%), числа гурбулентных пятен m (%) (заштриховано), скорости диссипации КЭТ, вклада в полную диссипацию (%) и долей объемов и толщин гурбулентных пятен (%) (заштриховано)

n	m	$\bar{H}_T, \text{м}$	$\bar{\epsilon}_T \times 10^4$ $\text{м}^2/\text{с}^2$	$\bar{B}_T \times 10^4$ $\text{м}^2/\text{с}^2$	$\bar{\epsilon}_T \times 10^7$ $\text{м}^2/\text{с}^3$	$\bar{\epsilon}_H \times 10^4$ $\text{м}^2/\text{с}^2$	$\bar{B}_H \times 10^4$ $\text{м}^2/\text{с}^2$	$\bar{\epsilon}_H$ $\text{м}^2/\text{с}$
10^6	147882	0,98	0,65	0,079	3,62	0,87	0,068	8,76
10^5	14527	0,98	0,66	0,080	3,83	0,86	0,067	8,70
10^4	1476	1,07	0,72	0,085	2,10	0,96	0,068	5,48
10^3	138	0,35	0,43	0,068	1,11	0,19	0,016	0,96

Рассмотрим теперь результаты имитации измерения турбулентности, проводимых путем вертикального зондирования, представленные на рис. 6, б и в таблице ($\bar{\epsilon}_n, \bar{v}_n, \bar{\epsilon}_n$). Следует отметить большие различия между $\bar{\epsilon}_T$ и $\bar{\epsilon}_n$. Причины этого можно понять, анализируя рис. 6, б, где приведены аналогичные рис. 6, а гистограммы, но не по градациям объемов, а по градациям толщин пятен. Значительный вклад в полную по ансамблю диссипацию $(K_T, \mathcal{F})_n = H_T \bar{\epsilon}_n$ вносят пятна достаточно большой толщины с большими значениями скорости диссипации, встречающиеся относительно редко. Аналогичный вид имеет распределение ϵ , построенное по зондированиям в океане [39]. Существующие различия между а и б на рис. 6 обусловлены тем, что в процессе эволюции пятна не сохраняют геометрическое подобие и поэтому относительно менее сплюснутые пятна, находящиеся на начальных стадиях, характерных наибольшими значениями ϵ , дают вклад в $(K_T, \mathcal{F})_n$, завышенный по сравнению с осреднением по объему. Для уменьшения такого искажающего эффекта мы рекомендуем частое зондирование в ограниченном диапазоне глубин с целью многократного пересечения одних и тех же пятен, что увеличит вклад больших и сплюснутых пятен в средние значения.

"БОЛЬШИЕ ВЗРЫВЫ" И "НЕПРЕРЫВНОЕ ТВОРЕНИЕ" ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Результаты моделирования можно сопоставить также с теоретической интерпретацией измерений микроструктуры океана. Согласно подходу, развиваемому Гиссоном [10, 27], почти все пятна микроструктуры в океане не содержат реликтовую турбулентность, соответствующую критерию (8), медленно эволюционирующую после редких, но мощных вспышек турбулентности ("больших взрывов"), вносящих основной вклад в средние величины. Приведенные выше расчеты согласуются с этой картиной, хотя имеется ряд важных различий. В работах [10, 27] не учитываются процессы гравитационного сплющивания пятен, существенно уменьшающие эффективность перемешивания. Кроме того, расчеты показали относительно малый вклад в перемешивание "вторичной турбулентности" [10], возникшей за счет сдвига скорости при растекании пятен и в результате сдвиговых течений внутренних волн.

В соответствии с другим, более традиционным подходом [9, 11, 30, 34, 36, 39, 40] турбулентность находится в статистическом равновесии, обусловленном ее "непрерывным творением" за счет гидродинамической неустойчивости течений и внутренних волн, а также воздействия на нее сдвиговых потоков. Этот равновесный режим реализуется при $L_0 \approx L_t$ [40]. Как видно на рис. 1, а, это условие для отдельного пятна не выполняется в течение всей эволюции. Но же время осреднение по ансамблю приводит к соотношению $L_0 = 1,0 L_t$, согласующемуся с моделями "непрерывного творения". Таким образом, статистическое моделирование позволяет объединить оба подхода — "больших взрывов" и "непрерывного творения" в пределе $n \rightarrow \infty$.

В спектральной теории [11] основным источником энергии в масштабах пятен является перенос кинетической и потенциальной энергии по спектру внутренних волн. Вертикальный поток плавучести $\overline{w' \rho'}$ в преобразованиях энергии несуществен. При достаточно большом притоке кинетической энергии процессы перемешивания доминируют ($\overline{w' \rho'} > 0$), тогда как при его уменьшении преобладают эффекты рестратификации ($\overline{w' \rho'} < 0$). Эта картина также воспроизводится статистическим моделированием.

Долю объема, занимаемого пятнами в области океана, Ω можно косвенно оценить, используя соотношение для безусловной средней по области скорости диссипации $\epsilon_\Omega = \alpha_0 N$ [8], полученное для узкополосного спектра внутренних волн Гаррета — Манка. Здесь постоянная $\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}^2$. Для приведенных выше характеристик перемешивания $\epsilon_\Omega/\epsilon_{KF} = 38$, тогда как $\overline{\epsilon}_T/\epsilon_{KF} = 2800$. Турбулентные пятна, вызванные притоком энергии от внутренних волн, занимают всего 1,4 % объема Ω , а включая пятна с реликтовой структурой, — 2,8 %, что согласуется с представлениями о существенно перемежающемся характере преобразований энергии в океане.

В заключение автор благодарит И.Ю.Авдееву за проведение расчетов.

Л и т е р а т у р а

Озмидов Р.В. Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. М.: Наука, 1968.

2. Федоров К.Н. Тонкая гермохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоздат, 1976.
3. Монин А.С., Ozmidov P.B. Океан. кая турбулентность. Л.: Гидрометеоздат, 1981.
4. Ozmidov P.B. Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1986.
5. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде. Киев: Наукова думка, 1988.
6. Munk W.H. Abyssal recipes // Deep-Sea Res. 1966. V. 13, N 4. P. 707.
7. Garrett G.H. Mixing in the ocean interior // Dyn. Atm. Oceans. 1979. V. 3, N 2-4. P. 239.
8. Garrett A. Vertical eddy diffusivity in the ocean interior // J. Marine Res. 1984. V. 42, N 2. P. 359.
9. Gregg M. Diapycnal mixing in the thermocline // J. Geophys. Res. 1987. V. C92, N 5. P. 5249.
10. Gibson C.H. Fossil turbulence and intermittency in sampling oceanic mixing processes // J. Geophys. Res. 1987. V. 92, N 5. P. 5383.
11. Holloway G. The buoyancy flux from internal gravity wave breaking // Dyn. Atmosph. Oceans. 1988. V. 12, N 2. P. 107.
12. Баренблатт Г.И. Модель нестационарного тепло- и массообмена в жидкости с сильно устойчивой стратификацией // Изв. АН СССР. ФАО. 1982. Т. 18, № 3. С. 262.
13. Любимцев М.М. Модель взаимодействия перемежающейся турбулентности и тонкой структуры гидр. физических полей в океане // Океанология. 1985. Т. 25, № 6. С. 903.
14. Bell T.H., Dugan J.P. Model for mixed region collapse in a stratified fluids // J. Eng Math. 1974. 8, N 3. P. 241.
15. Kao T.W. Principal stage of wave collapse in a stratified fluid: two-dimensional theory // Phys. Fluids. 1976. V. 19, N 8. P. 115.
16. Баренблатт Г.И. динамика турбулентных пятен и интрузий в устойчиво стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1978. Т. 14, № 2. С. 195.
17. Журбас В.М. О вязкой стадии растекания турбулентного пятна в устойчиво стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1980. Т. 16, № 8. С. 846.

18. Авдеева И.Ю., Мадерич В.С. Модель динамики частиц перемешанных пятен в устойчиво стратифицированной жидкости // Гидромеханика. 1986. № 54. С. 29.
19. Мадерич В.С., Никишов В.И. Диффузионно-вязкая стадия растекания перемешанных пятен в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т. 22, № 6. С. 656.
20. Никишов В.И. О динамике пятна в стратифицированной среде на переходной стадии растекания // Морской гидрофиз. журн. 1986. № 3. С. 3.
21. Авдеева И.Ю., Мадерич В.С. Энергетика турбулентных пятен в устойчиво стратифицированном океане // Океанология. 1987. Т. 27, № 2. С. 185.
22. Бенилов А.Ю., Гаврилин Б.Л. Об эволюции локализованных турбулентных областей в океанском пикноклине // Океанология. 1988. Т. 28, № 6. С. 910.
23. Бенилов А.Ю. О коллесе перемешанных областей в океанском пикноклине // Океанология. 1989. Т. 29, № 1. С. 49.
24. Турбулентность / Под ред. П. Бредшоу. М.: Машиностроение, 1980.
25. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Колльмана. М.: Мир, 1984.
26. Stillinger D.C., Helland K.N., Van Atta C.W. Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1983. V. 131. P. 94.
27. Gibson C.H. Fossil temperature, salinity and vorticity turbulence in the ocean // Marine Turbulence: Proc. II Internat. Colloq. Ocean Hydrodynamics. Liege 1980. V. 99. P. 221.
28. Авдеева И.Ю., Мадерич В.С. Особенности вырождения турбулентности в стратифицированной жидкости // Морской гидрофиз. журн. 1985. № 6. С. 8.
29. Поздынин В.Д. Элементы вероятностного описания мелкомасштабной турбулентности в океане. Л.: Гидрометеопиздат 1989.
30. Островский Л.А., Дропцкая Ю.И. Модель турбулентного переноса и динамика турбулентности в стратифицированном сдвиге: от погоды // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т. 23, № 11. С. 1031.
31. Osborn T.R., Cox C.S. Oceanic fine structure // Geophys. Fluid Dyn. 1972. V. 3. P. 321.

32. Ueda H., Mitsumoto S., Komori T. Buoyancy effects on the turbulent transport processes in the lower atmosphere // *Quart. J. R. Met. Soc.* 1981. V. 107. P. 561.
33. Панчев С.О. О существовании степенных зависимостей в спектрах океанической турбулентности // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1975. Т. 11, № 6. С. 620.
34. Dillon T.M. Vertical overturns: a comparison of Thorpe and Ozmidov length scale // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87, N 12, P. 9601.
35. Oakey N.S. Determination of the rate of dissipation of turbulent energy from simultaneous temperature and velocity shear microstructure measurements // *J. Phys. Oceanogr.* 1982. V. 12, N 2. P. 256.
36. Лозовацкий И.Л., Озмидов Р.В. О связи характеристик мелкомасштабной турбулентности с параметрами стратификации вод океана // *Океанология.* 1979. Т. 19, № 6. С. 982.
37. Беляев В.С., Лозовацкий И.Л., Озмидов Р.В. Об особенностях мелкомасштабной турбулентности в океаническом гермоклине // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1979. Т. 15, № 10. С. 1060.
38. Baker M.A., Gibson C.H. Sampling turbulence in the stratified ocean: statistical consequences of strong intermittency // *J. Phys. Oceanogr.* 1987. V. 17, N 10. P. 1817.
39. Gregg M.C., D'Asaro E.A., Shay T.J., Larson N. Observations of persistent mixing and near-inertial internal waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1986. V. 16, N 5. P. 856.
40. Caldwell D.R. Oceanic turbulence: big bangs or continuous creation // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88, N 12. P. 7453.

ВЫХОД МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

В. И. Никишов

Согласно современным представлениям [1] турбулентность в устойчиво стратифицированной по плотности среде концентрируется в отдельных пятнах, образование которых в океане обусловлено неустойчивостью течений и внутренних волн. Поведение отдельного пятна определяется соотношением между эффектами вовлечения окружающей жидкости в пятно и коллапса (растекание по горизонтали и сплющивание по вертикали). Безразмерным параметром, характеризующим это соотношение является глобальное число Ричардсона $Ri_* = N^2 N^2 / u_*^2$ [2], где N — толщина пятна, N — частота Вайсяля, u_* — характерное значение скорости.

Если в начальный момент времени Ri_* превышает некоторое критическое значение, то воздействие сил плавучести проявляется в подавлении турбулентных пульсаций. В этом случае вовлечение окружающей жидкости в пятно мало. Такой «нетурбулентный» тип эволюции можно назвать интрузионным [3]. В зависимости от преобладающего влияния различных сил в развитии пятна можно выделить четыре последовательные стадии, которые характеризуются соответствующими значениями чисел Фруда $Fr = u_c / NN$ и Рейнольдса $Re = u_c N / \nu$ [2]. Здесь u_c — горизонтальная скорость растекания пятна, ν — кинематический коэффициент вязкости. Из соображений, изложенных ниже, соотношение между влиянием инерционных сил и сил вязкости будем определять параметром $\delta \cdot Re$, где $\delta = N/L$, L — длина интрузии.

Начальная стадия характеризуется значительным превышением движущих сил интрузии над силами сопротивления.

При этом имеет место ускоренный режим растекания пятна вдоль горизонтального направления. По экспериментальным данным работы [4], для двумерной интрузии Fr на этой стадии растёт вплоть до значений $0,5 + 0,6$, параметр $\delta \cdot Re$ убывает, достигая значений порядка $5 \cdot 10^3$.

Промежуточная стадия определяется равновесием между движущими силами интрузии, с одной стороны, и инерционными силами и волновым сопротивлением, с другой. На этой стадии число Фруда близко к единице, параметр $\delta \cdot Re$ продолжает уменьшаться до значений $30 - 40$.

На вязкой стадии движущие силы интрузии уравновешиваются силами вязкости: параметр $\delta \cdot Re$ продолжает убывать, оставаясь больше единицы, $\delta \cdot Re > 1$.

На диффузионно-вязкой стадии на эволюцию пятна существенное влияние оказывают диффузионные процессы. Для нее характерное значение параметра $\delta \cdot Re$ определяется неравенством $\delta \cdot Re \ll 1$.

Отметим две особенности, характерные для последней стадии. Во-первых, вырождение неоднородностей здесь происходит не только вследствие коллапса, как на других стадиях, но также из-за диффузионного расплывания. Во-вторых, в случае, когда жидкость стратифицирована как по температуре, так и по солености, что соответствует океанским условиям, данную стадию можно разбить на две: на первой вырождение пятен происходит за счет коллапса и теплопроводности, на второй — определяется коллапсом и диффузией соли. Такое разбиение связано с существенным различием коэффициентов температуропроводности χ_T и диффузии соли χ_s . Здесь должно наблюдаться взаимное влияние распределений температуры и солености по глубине на поведение пятен.

Если в начальный момент времени глобальное число Ричардсона Ri_* меньше некоторого критического значения, то влияние сил плавучести на начальной стадии мало и в пятне развивается турбулентность. В отличие от интрузионного типа эволюции, когда вертикальный размер пятна уменьшается на начальной стадии, в данном случае за счет турбулентной диффузии происходит рост и вертикального, и горизонтального размеров, причем здесь можно выделить изотропный и анизотропный режимы. По мере расширения пятна происходит уменьшение плотности кинетической энергии турбулентности, и на поведение пятна все большее влияние начинают оказывать силы плавучести. Рост пятна в вертикальном направле-

нии прекращается, когда его толщина достигнет масштаба Озмидова $L_0 = (\epsilon/N^2)^{1/2}$, где ϵ — скорость диссипации энергии турбулентности.

На промежуточной стадии происходит коллапс пятна, хотя последнее является турбулентным. Размеры вихрей l не превышают масштаба Озмидова. С другой стороны, l больше масштаба Колмогорова, $L_K = (\nu/\epsilon)^{1/4}$. Более точная оценка условия существования развитой турбулентности приведена в работе [5], $1,2 L_0 > l > 15 L_K$.

Характерной особенностью поведения турбулентности в стратифицированной среде является вырождение как крупномасштабных вихрей под действием сил плавучести, так и вихрей в области малых масштабов, где существенным оказывается влияние вязких сил. С течением времени масштаб Озмидова уменьшается, а масштаб Колмогорова растет. Окончательном промежуточной стадии можно считать исчезновение развитой турбулентности, т.е. при $L_0 = c L_K$, где $c \sim 10$.

На финальной стадии после исчезновения турбулентности внутри пятна остается ансамбль тонких, почти горизонтальных медленно растекающихся под действием сил плавучести плотностных неоднородностей, само же пятно развивается дальше интрузионным путем.

Рассмотрим более подробно вырождение указанных неоднородностей в стратифицированной среде, полагая, что спектр масштабов возмущений в начале изучаемой стадии достаточно широк.

Полученные выводы о характере затухания таких возмущений могут быть распространены на поведение интрузии, находящейся на вязких стадиях или на "турбулентное" пятно на последней, финальной стадии развития.

1. Пусть среда стратифицирована по температуре (солености). На рассматриваемой стадии поведение возмущений может быть описано с помощью линеаризованных уравнений движения в приближении Буссинеска, переноса тепла, состояния среды и уравнения несжимаемости [6]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \vec{g} \frac{\rho}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v},$$

$$\nabla \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{N_T^2}{\alpha g} = \alpha_T \Delta T,$$

$$p = p_0 (1 - \alpha T),$$

где p — отклонение давления от гидростатического значения; индекс ноль обозначает невозмущенное значение, осредненное по горизонтальным координатами x, y ; w — вертикальная компонента вектора скорости; ρ, T — возмущения плотности, температуры; частота Вейселя $N = N_T = \omega \sin \theta$; $\alpha = -1/\rho_0 (\partial \rho_0 / \partial T)_{p,s}$.

Сведем систему (1) к одному уравнению относительно вертикальной компоненты скорости:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta w - \nu \frac{d}{dt} \Delta^2 w + \nu \chi_T \Delta^3 w - N^2 \Delta_h w = 0, \quad (2)$$

где Δ_h — горизонтальный аналог оператора Лапласа.

Будем изучать поведение отдельного элементарного возмущения вида

$$w = W_0 \exp(\sigma t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (3)$$

Наибольший интерес представляет завершающий этап этой стадии, который определяется балансом эффектов плавучести и вязкости. Инерционные эффекты становятся при этом малыми. Исходя из указанного баланса сил, введем безразмерную скорость затухания $q = \sigma \nu k^2 / N^2 m^2$, где m — горизонтальное волновое число, k — волновое число возмущений. Исходя из малости инерционных сил по сравнению, например, с силами плавучести, из уравнения (2) получаем $\gamma = N^2 m^2 / \nu^2 k^6 \ll 1$. На рассматриваемой стадии эффекты диффузии становятся сравнимыми с другими эффектами. Заменяя в приведенном неравенстве волновые числа соответствующими размерами возмущения, получим $N^2 H^5 / \nu^2 L^2 = (\delta \cdot Re)^2 \ll 1$, т.е. рассматриваемый этап соответствует диффузионно-вязкой стадии затухания неоднородности интрузионного типа.

Подставляя (3) в уравнение (2), для безразмерной скорости затухания получим

$$\gamma q^2 + (1 + b_T) q + b_T \gamma^{-1} + 1 = 0,$$

где $b_T = \chi_T / \nu$.

Осуществив замену $q = q_* \gamma^{-1}$, ищем решение для q_* в виде ряда по малому параметру γ . В результате получаем (в размерном виде)

$$\sigma_1 = -\nu k^2 + \frac{\nu}{\nu - \chi_T} \frac{N^2 m^2}{\nu k^4} + \dots, \quad (4)$$

$$\sigma_2 = -\chi_T k^2 - \frac{\nu}{\nu - \chi_T} \frac{N^2 m^2}{\nu k^4} + \dots \quad (5)$$

Видно, что эволюция возмущений характеризуется системой фундаментальных решений с различными скоростями затухания. Наличие двух решений обусловлено двумя механизмами вырождения возмущений: вязкостным и диффузионным. В каждом из них существенна роль коллапса неоднородностей. Возмущения скорости под воздействием сил вязкости быстро затухают и влияние сил плавучести в этом процессе невелико (второе слагаемое в уравнении (4) имеет порядок ν по сравнению с первым). С другой стороны, из условия $\chi_T \ll \nu$ следует, что второе решение затухает значительно медленнее, чем первое.

Отметим некоторые особенности второго решения:

- в отсутствие стратификации ($N=0$) вырождение возмущений определяется только диффузией; при $N \neq 0$ за счет коллапса неоднородности утолщаются, диффузия становится эффективной и затухание увеличивается;

- чем больше вязкость жидкости, тем менее интенсивны процессы коллапса, т.е. возмущения затухают медленнее;

- в зависимости от соотношений между вертикальным и горизонтальными размерами и параметрами окружающей среды величина $|\sigma_2|$ имеет минимум, определяемый выражением

$$k^6 = k_T^6 = c \frac{N^2 m^2}{\chi_T (\nu - \chi_T)}, \quad (6)$$

где $c = 2,2$. Этот минимум соответствует балансу эффектов коллапса и теплопроводности. Неоднородности меньшего вертикального масштаба относительно быстро увеличиваются вследствие диффузии тепла, более толстые - сплющиваются до этого масштаба. Соответствующее выражению (6) значение σ_2 равно

$$\sigma_2 = -\frac{3}{2^{2/3}} (\nu N^2 m^2)^{1/3} \frac{\chi_T^{2/3}}{(\nu - \chi_T)^{2/3}}; \quad (7)$$

наиболее медленно затухающими являются неоднородности с малым m см. (5) или (7)), т.е. тонкие вытянутые в горизонтальном направлении.

Наряду с мелкомасштабными в стратифицированной среде имеются также и крупномасштабные возмущения, скорость затухания которых также мала [7,8]. Наличие таких возму-

шений приводит к слабому искажению мелкомасштабных неоднородностей, которые наблюдаются в экспериментальных исследованиях [6].

2. Рассмотрим теперь случай, когда среда стратифицирована как по температуре, так и по солености. Поведение возмущений, как и ранее, описывается системой (1), однако уравнение состояния принимает следующий вид:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha T + \beta S); \quad (8)$$

и, кроме того, к системе необходимо добавить уравнение переноса солености

$$\frac{\partial S}{\partial t} - w \frac{N_s^2}{\beta g} = \alpha_s \Delta S. \quad (9)$$

Здесь $\beta = 1/\rho_0 (\partial \rho_0 / \partial S_0)_{p,T}$, $N_T^2 = \alpha g (dt_0/dz)$. Заметим, что эффекты двойной диффузии, оказывающие определенное влияние на поведение возмущений [9], не рассматриваются.

В результате ряда преобразований получаем следующее уравнение относительно w :

$$L_1 L_2 L_3 \Delta w + N_T^2 L_3 \Delta_h w + N_S^2 L_2 \Delta_h w = 0, \quad (10)$$

где

$$L_1 = \partial/\partial t - \nu \Delta, \quad L_2 = \partial/\partial t - \chi_T \Delta, \quad L_3 = \partial/\partial t - \chi_S \Delta.$$

Для скорости затухания q отдельного элементарного возмущения (3) находим

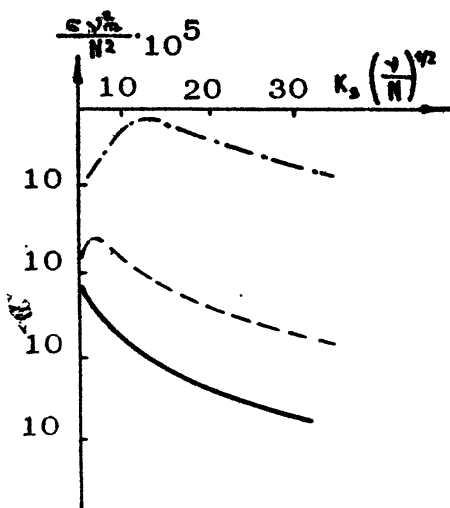
$$q q^3 + q^2 + (b_T + b_S + b_T b_S) q q^{-1} + b_T b_S q^{-2} + n_T^2 (q q + b_S) q^{-1} + n_S^2 (q q + b_T) q^{-1} = 0, \quad (11)$$

где $b_S = \chi_S / \nu$, $n_T = N_T / N$, $n_S = N_S / N$, $N = \sqrt{N_T^2 + N_S^2}$ — частота Вьяляля.

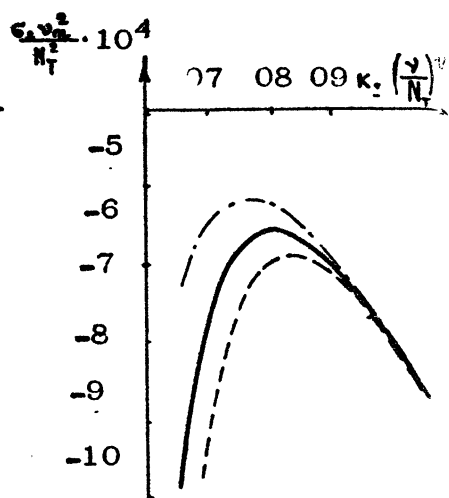
В итоге получим, что поведение возмущения на рассматриваемой стадии описывается фундаментальной системой решений с различными скоростями затухания:

$$\epsilon_2 = -\chi_T k^2 - \frac{\nu}{(\nu - \chi_T)} \frac{N_T^2 m^2}{\nu k^4} + \frac{\nu^3}{(\nu - \chi_T)^2 (\chi_S - \chi_T)} \frac{N_T^2 N_S^2 m^4}{\nu^3 k^{10}} - \frac{\nu^3}{(\nu - \chi_T)^3} \frac{N_T^4 m^4}{\nu^3 k^{10}} + \dots, \quad (12)$$

$$\epsilon_3 = -\chi_S k^2 - \frac{\nu}{(\nu - \chi_S)} \frac{N_S^2 m^2}{\nu k^4} - \frac{\nu^3}{(\nu - \chi_S)^2 (\chi_S - \chi_T)} \frac{n_T N_S^2 m^4}{\nu^3 k^{10}} - \frac{\nu^3}{(\nu - \chi_S)^3} \frac{N_S^4 m^4}{\nu^3 k^{10}} + \dots. \quad (13)$$



Р и с. 1.



Р и с. 2

Выражение, описывающее ϵ_1 , имеет вид (4) [2] и здесь не приводится.

Наличие стратификации по солености приводит к возникновению еще одного механизма вырождения неоднородностей, определяемого, главным образом эффектами коллапса и диффузии соли. Это находит отражение в появлении третьего решения в фундаментальной системе решений. Анализ выражений (4), (12) и (13) показывает, что это новое решение обладает наименьшей скоростью затуханий. Это наглядно видно на рис. 1, на котором представлены результаты расчета зависимостей ϵ_1 (сплошная кривая), ϵ_2 (пунктирная) и ϵ_3 (штрих пунктирная) от вертикального волнового числа k_z для случая $\mu_T^2 = \mu_S^2 = 0,5$ при следующих значениях параметров $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\nu = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$, $\chi_T = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$, $\chi_S = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$, $\nu m^2/N = 5 \cdot 10^{-3}$.

Характерной особенностью кривых $\epsilon_2(k_z)$ и $\epsilon_3(k_z)$ по сравнению с $\epsilon_1(k_z)$ является наличие экстремумов, определяемых выражениями

$$k^S = k_T^S = \frac{N_T^2 m^2}{(\nu - \chi_T) \chi_T} \left(1 + \sqrt{1 + 5 \frac{\chi_T}{\nu - \chi_T} + 5 \frac{\chi_T}{\chi_T - \chi_S} \frac{N_S^2}{N_T^2}} \right), \quad (14)$$

$$\kappa^6 = \kappa_3^6 = \frac{N_s^2 m^2}{(\nu - \chi_s) \chi_s} \left(1 + \sqrt{1 + 5 \frac{\chi_s}{\nu - \chi_s} - 5 \frac{\chi_s}{\chi_T - \chi_s} \frac{\nu^2}{N_s^2}} \right), \quad (15)$$

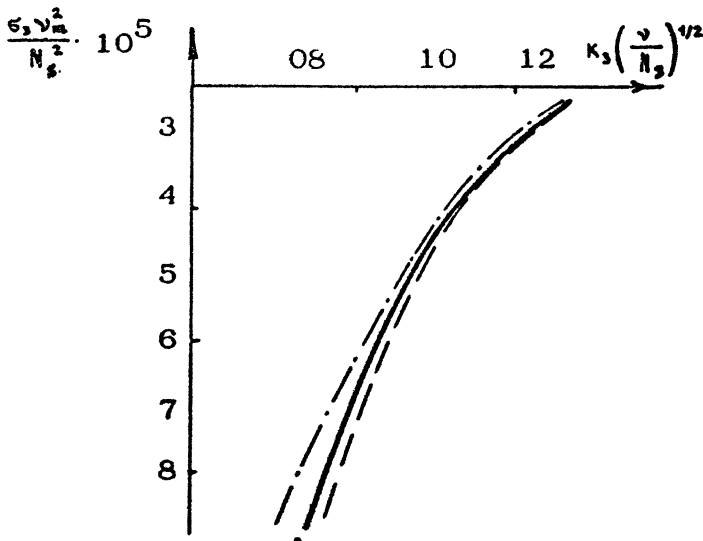
соответственно.

Из сравнения выражений (6) и (14) видно, что имеет место влияние распределений солености по глубине на положение экстремума второго решения.

При $N_s = 0$ $\epsilon = 2,2$; при $N_s = N_T$ $\epsilon = 3,6$. Соответствующее влияние оказывает и распределение температуры на масштаб κ_s .

Для выявления характера влияния распределения солености на скорость вырождения второго решения был произведен расчет зависимости $\epsilon_2 = \epsilon_2(\kappa_s)$ при фиксированном значении $N_T^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}$ и различных значениях N_s^2 . Результаты представлены на рис. 2. Сплошная кривая соответствует случаю $N_s^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}$, пунктирная — $N_s^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$, штрихпунктирная — $N_s^2 = 10^{-5} \text{ с}^{-2}$. Видно, что увеличение вклада распределения солености в профиль плотности приводит к более быстрому вырождению второго решения. Это связано с усилением эффекта коллапса, приводящего к утоньшению неоднородностей, а значит и интенсификации теплопроводности. Это вызывает более быстрое затухание возмущений.

Аналогичные расчеты были проведены и для третьего



Р и с. 3.

решения при $N_T^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}$. Сплошная кривая на рис. 3 соответствует $N_T^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}$, пунктирная - $N_T^2 = 10^{-5} \text{ с}^{-2}$, штрихпунктирная - $N_T^2 = 10^{-4} \text{ с}^{-2}$. Видно, что для третьего решения наблюдается противоположный эффект: увеличение вклада распределения температуры в профиль плотности приводит к уменьшению скорости затухания. В данном случае эффекты коллапса и диффузии соли сопоставимы при толщинах, при которых неоднородности температуры уже выродились ($\alpha_T \gg \alpha_S$) и профиль температуры рестратифицировался. Обусловленный солевой стратификацией коллапс неоднородностей приводит к нарушениям в рестратифицированном профиле температуры, что вызывает противодействие процессу коллапса ("антиколлапс"). Скорость затухания тем меньше, чем больше градиент температуры, т.е. чем больше N_T .

Случай равенства коэффициентов переноса α_T и α_S рассмотрен в работе [8].

3. В толще вод океана, как правило, имеются течения с вертикальным сдвигом скорости, которые могут оказывать существенное влияние на развитие мелкомасштабных возмущений. Предполагаем, что характерное время изменения последних мало по сравнению с характерным периодом изменения среднего течения, а пространственная изменчивость течений мала вдоль горизонтального направления. Это позволяет считать указанные течения стационарными и однородными вдоль горизонтального направления. Будем рассматривать устойчивый случай, когда безграничная среда стратифицирована только по температуре и число Ричардсона $Ri > 1/4$.

Система уравнений, описывающих поведение возмущений имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \vec{q} \frac{\rho}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v},$$

$$\nabla \vec{v} = 0,$$

$$\frac{dT}{dt} + w \frac{dT_0}{dz} = \alpha_T \Delta T, \quad (16)$$

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha T),$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \alpha z \partial/\partial z$, $\vec{v} = (v, 0, 0)$ - вектор средней скорости, $\alpha = dV/dz$.

Для возмущений, вертикальный размер, которых мал, величину φ можно считать локально постоянной. Тогда систему (16) можно свести к одному уравнению относительно ψ :

$$G_1 G_2 \Delta \psi + N^2 \Delta_n \psi = 0, \quad (17)$$

где

$$G_1 = d/dt - \alpha_T \Delta, \quad G_2 = d/dt - \nu \Delta.$$

Будем изучать поведение отдельного элементарного возмущения [10]

$$\psi = W(t) \exp [i(k_1 x + k_2 y + k_3 z - k_1 \tau)]. \quad (18)$$

Это выражение описывает возмущение, волновой вектор которого \vec{k} в начальный момент времени имеет компоненты k_i ($i = 1, 2, 3$). С течением времени под воздействием скорости вектор \vec{k} разворачивается к вертикальному направлению.

Пусть для определенности $k_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), а $\alpha < 0$. (Результаты нетрудно перенести на случай $\alpha > 0$). Из уравнения (17) для $\tilde{W} = W/W_0$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} (\mu \tilde{W}) - \Lambda_2 \frac{d}{d\tau} (\mu^2 \tilde{W}) - \Lambda_3 \mu \frac{d}{d\tau} (\mu \tilde{W}) + \\ + \Lambda_1 \Lambda_3 \mu^3 \tilde{W} + \Lambda_1 \tilde{W} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\tau = (k_2 - k_1 \alpha t)/k_1$, $\mu = \alpha^2 + \tau^2$, $\alpha = m/k$, W_0 - характерное значение амплитуды возмущений, параметры

$$\Lambda_1 = m^2 N^2 / k_1^2 \alpha^2, \quad \Lambda_2 = \nu k^3 / k_1 \alpha, \quad \Lambda_3 = \alpha_T k^3 / k_1 \alpha$$

характеризуют соотношения между эффектами плавучести, вязкости, теплопроводности и растяжения материальных линий под действием сдвига средней скорости.

Рассмотрим случай, когда затухание возмущений на данной стадии происходит под преобладающим влиянием сил вязкости, т.е. $\Lambda_2 \gg 1$. Для случая $\Lambda_1 \sim 0$ (1) находим, что поведение возмущений определяется фундаментальной системой решений

$$W_1 = \frac{c}{\mu} \exp \left[\Lambda_2 \int \mu d\tau - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \int \frac{d\tau}{\mu^2} + o(\Lambda_1^{-1}) \right], \quad (20)$$

$$W_2 = \frac{c}{\mu^2} \exp \left[\Lambda_2 \int \mu d\tau + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \int \frac{d\tau}{\mu^2} + \right]$$

$$+ \frac{1}{\Lambda_2} \int \frac{6\tau^2 - 2a^2}{\mu^3} d\tau + o(\Lambda_2^{-1}) \Big], \quad (21)$$

где $c = \text{const}$. Как и в п.1, одно из этих решений, а именно \tilde{W}_2 , является медленно затухающим. Можно показать [11], что текущая толщина неоднородности, соответствующая минимуму скорости затухания этого решения, будет существенно меньше аналогичной величины в бессдвиговом случае. Таким образом, наличие сдвига средней скорости приводит за счет растяжения материальных линий к уменьшению вертикального размера возмущений, скорость затухания которых минимальна. В каждый момент времени неоднородности разных начальных вертикальных размеров достигают указанных масштабов.

Рассматривая поведение возмущений плотности, из формулы (16) находим

$$G_2 \Delta G_1 \rho + N^2 \Delta_n \rho = 0. \quad (22)$$

Тогда для амплитуды отклонения элементарного возмущения

$$\rho = R(t) \exp \left[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y + \kappa_3 z - \kappa_1 z t) \right] \quad (23)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\mu \frac{d\tilde{R}}{d\tau} \right) - \Lambda_2 \mu^2 \frac{d\tilde{R}}{d\tau} - \Lambda_3 \frac{d}{d\tau} (\mu^2 R) + \\ + \Lambda_2 \Lambda_3 \mu^3 \tilde{R} + \Lambda_1 \tilde{R} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\tilde{R} = \rho/R_0$.

В рассматриваемом случае ($\Lambda_2 \gg 1$) находим фундаментальную систему решений, которая определяет поведение возмущений

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{c_1}{\mu^2} \exp \left[\Lambda_1 \int \mu d\tau - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \int \frac{d\tau}{\mu^2} - \right. \\ \left. - \frac{4}{\Lambda_2} \int \frac{3\tau^2 - a^2}{\mu^3} d\tau + o(\Lambda_2^{-1}) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$R_2 = c_1 \exp \left[\Lambda_3 \int \mu d\tau + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \int \frac{d\tau}{\mu^2} + o(\Lambda_2^{-1}) \right], \quad (26)$$

где $c_1 = \text{const}$.

Как и в выражении для возмущений скорости, второе решение затухает медленнее, чем первое. Из сравнения выра-

жений (21) и (26) следует, что вырождение возмущений плотности происходит медленнее, чем первого. Аналогичный результат в невязком случае получен в [10] при $\Lambda_1 \gg 1$, что связано с переходом части энергии возмущений в энергию внешнего потока. Эта потеря компенсируется небольшим ростом энергии внешнего потока в области, размеры которой значительно превышают масштабы возмущений. Влияние вязкости, кроме появления дополнительного стока энергии движений во внутреннюю энергию жидкости, приводит к более плавному протеканию указанных процессов [12].

В плоском случае ($\kappa_2 = 0$) были проведены численные расчеты изменения амплитуд возмущений вертикальной (W) и горизонтальной (U) компонент скорости и завихренности ξ при $\alpha = 1$. Уравнение (19) решалось при следующих граничных условиях [12]

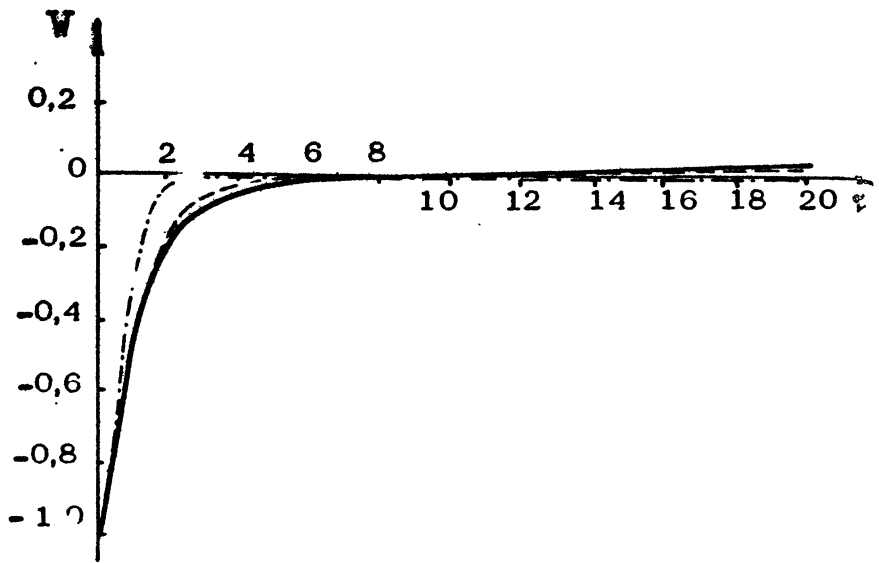
$$\tilde{W}|_{\tau=0} = -1, \quad d\tilde{W}/d\tau|_{\tau=0} = 0. \quad (27)$$

В качестве примера на рис. 4-6 приведены результаты расчета амплитуд возмущений вертикальной W , горизонтальной U компонент скорости и завихренности соответственно для $\Lambda_1 = 1/8$ при следующих значениях Λ_2 и Λ_3 : сплошная кривая соответствует $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$, пунктирная - $\Lambda_2 = 0, 01$; $\Lambda_3 = 0, 001$; штрихпунктирная - $\Lambda_2 = 1$; $\Lambda_3 = 0, 1$. Видно, что возмущения компонент скорости затухают, в то время как возмущения завихренности растут. Это связано с различием скоростей вырождения амплитуд U и W , а также уменьшением вертикальных масштабов возмущений. Это приводит к росту градиентов dU/dz , что и проявляется в поведении ξ . Со временем этот процесс может приводить к локальной неустойчивости течений. Наличие даже малой вязкости существенно меняет характер поведения возмущений. Анализ проведенных расчетов при других значениях $\Lambda_1 = 1$ и $\Lambda_1 = 5$ приводит к аналогичным выводам.

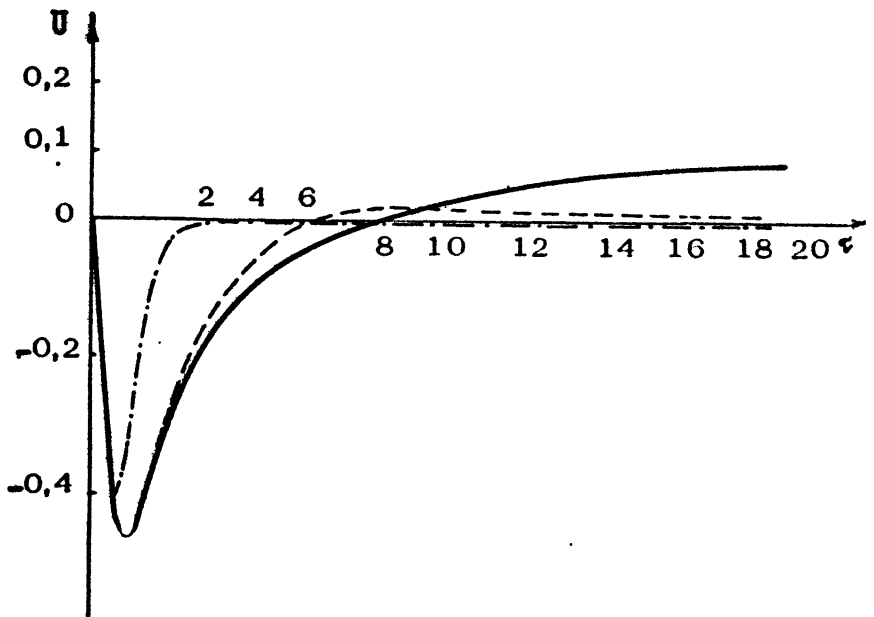
Для изучения характера поведения возмущений плотности были проведены расчеты на основе уравнения (24) при следующих граничных условиях

$$\tilde{R}|_{\tau=0} = 1, \quad d\tilde{R}/d\tau|_{\tau=0} = 1 - \Lambda_3, \quad (28)$$

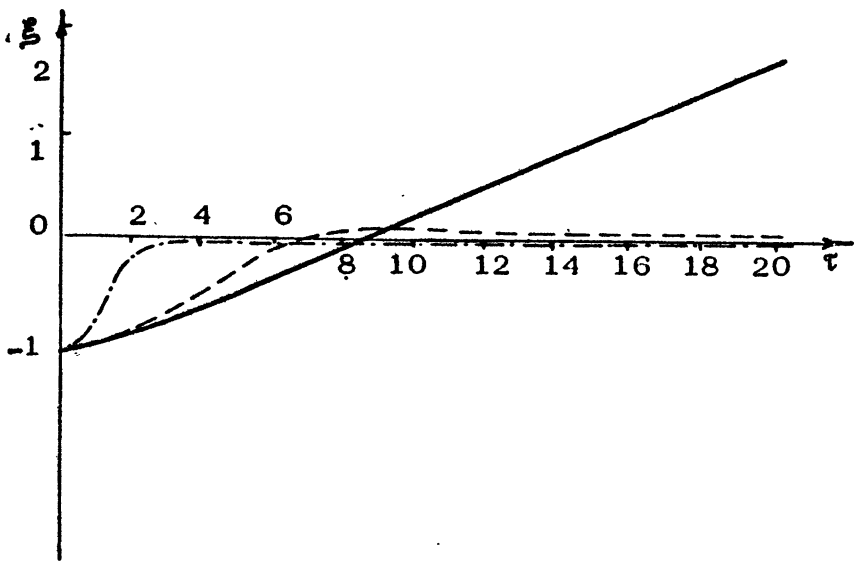
которые соответствовали условиям (27). Результаты расчета для $\Lambda_1 = 1/8$ представлены на рис. 7.



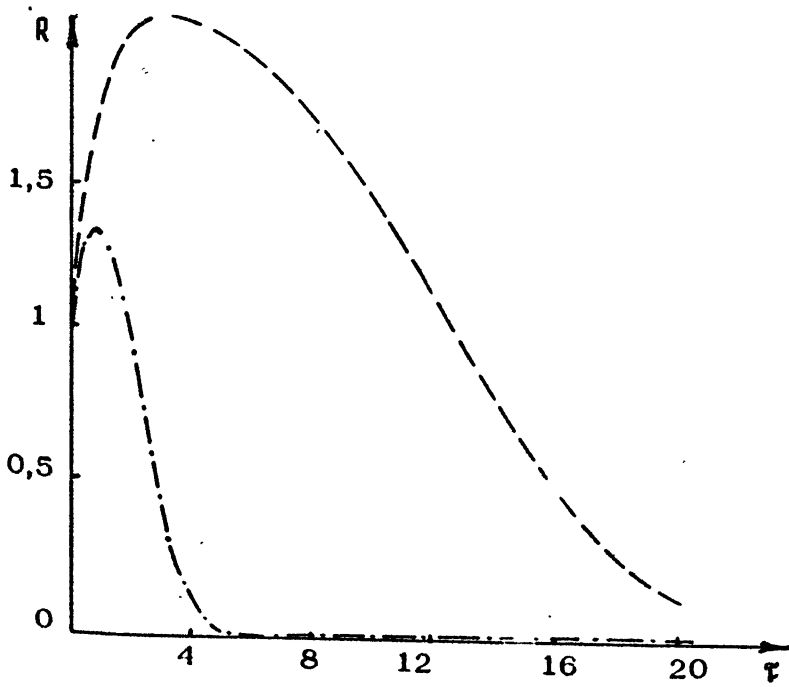
Р и с. 4.



Р и с. 5.



Р и с. 6.



Р и с. 7.

Пунктирная кривая соответствует $\Lambda_2 = 0,01$; $\Lambda_3 = 0,001$; штрихпунктирная — $\Lambda_2 = 1$; $\Lambda_3 = 0,1$. Сравнение с аналогичными кривыми для W , в том числе и для других значений Λ_1 , показывает, что возмущение плотности затухания значительно медленнее, чем возмущение вертикальной компоненты скорости W , что находится в соответствии с результатами асимптотического анализа. Отметим, что в бессдвиговом случае скорости затухания W и ξ совпадают.

Таким образом, на заключительной стадии эволюции мелкомасштабных возмущений в устойчивостратифицированной по одной компоненте, например температуре, среде наименьшей скоростью затухания обладают тонкие, вытянутые в горизонтальном направлении неоднородности, поведение которых определяется балансом, главным образом, эффектов коллапса и теплопроводности. Наличие стратификации по температуре и солености приводит к появлению неоднородностей, скорость затухания которых, определяемая балансом эффектов коллапса и диффузии соли, существенно меньше, чем у ранее указанных. Имеет место взаимное влияние распределений температуры и солености по глубине на вырождение возмущений.

Присутствие сдвига средней скорости вносит свои особенности в характер затухания мелкомасштабных возмущений. Наиболее характерной из них является различие скоростей затухания возмущений вертикальной компоненты скорости и плотности, чего не наблюдается в бессдвиговом случае.

Выше были рассмотрены отдельные вопросы, касающиеся вырождения мелкомасштабных возмущений на заключительной стадии. Все приведенные соображения относительно характера вырождения возмущений в полной мере могут быть применены и к поведению интрузий, находящихся на диффузионно-вязкой стадии.

Л и т е р а т у р а

1. Мюнин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеониздат, 1981.
2. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде. Киев: Наукова думка, 1988.
3. Мадерич В.С. О связи вертикального турбулентного обмена в океане с динамикой пятен турбулентности // Океанология 1982. Т.22, №6. С.936.

4. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density-stratified medium // J. Fluid Mech. 1969, v. 35, N 3, p. 531.
5. Gibson C.H. Internal waves, fossil turbulence and composite ocean microstructure spectra // J. Fluid Mech., 1983, v. 134, p. 195.
6. Pearson H.J., Linden P.F. The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid // J. Fluid Mech., 1983, v. 134, p. 195.
7. Франк А.М. Вырождающаяся турбулентность в стратифицированной жидкости: Препринт ВЦ СО АН СССР № 18. Красноярск, 1984.
8. Городцов В.А. Слоистых структурах на конечной стадии вырождения турбулентности в стратифицированных жидкостях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985, № 4, С.69.
9. Никишов В.И. О конечной стадии вырождения турбулентности в устойчиво-стратифицированной по температуре и солености среде // Гидромеханика. Киев: Наукова думка, 1987. Вып. 56. С.26.
10. Филлипс О.Л. Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969.
11. Гетман Е.И., Никишов В.И. О вырождении слоистых структур в стратифицированном сдвиговом потоке жидкости // Морск. гидрофиз. журн. 1989, № 1. С.11.
12. Criminale W.O., Cordova J.Q. Effect of diffusion in the asymptotics of perturbations in stratified shear flow // Phys. Fluids, 1985, v. 29, N 7, p. 2054.

РАЗВИТАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И МЕТОД РЕНОРМГРУППЫ

Э. В. Теодорович

1. ВВЕДЕНИЕ

Предложенная в 1941 г. А.Н. Колмогоровым теория развитой турбулентности [1], описывающая поведение мелкомасштабных флуктуаций гидродинамических полей при больших числах Рейнольдса, является феноменологической в том смысле, что она основывается на физических представлениях о подобии картины флуктуаций на различных масштабах и каскадном механизме переноса энергии по спектру, однако при этом динамические уравнения движения никак не используются. Тем не менее представляет интерес описание турбулентности на основе гидродинамического подхода, т. е. с помощью динамических уравнений движения жидкости (системы уравнений Навье-Стокса).

Развитая турбулентность, рассматриваемая как некоторая динамическая система, характеризуется рядом специфических особенностей, наличие которых существенно усложняет задачу ее гидродинамического описания. Из этих особенностей выделим две, представляющие наиболее существенными.

1) Режиму развитой турбулентности соответствует возбуждение очень большого числа мод (порядка $Re^{3/4}$), характерные масштабы которых изменяются в интервале от некоторого внешнего масштаба L до внутреннего (колмогоровского) масштаба $\ell = \nu_0^{3/4} \mathcal{E}^{-1/4}$ (\mathcal{E} — скорость диссипации энергии, ν_0 — молекулярная вязкость), при этом $L \sim \sim Re^{3/4} \ell$ [2]. Трудность заключается в том, что для описания турбулентности существенны моды всех масштабов, так

как согласно Ричардсону [3] они предст. зляют собой отдельные звенья длинной каскадной цепочки. Осуществляющие перенос энергии по спектру волновых чисел нелинейные межмодовые взаимодействия носят локальный характер в пространстве масштабов, поскольку взаимодействие волн (вихрей) с существенно различающимися масштабами сводится к кинематическим эффектам переноса мелкомасштабных пульсаций крупномасштабными без передачи энергии по спектру [4].

2) Межмодовые взаимодействия являются сильными. Если строить теорию возмущений, рассматривая в качестве возмущения нелинейный член в уравнении Навье-Стокса, то роль нормального параметра разложения в степенной ряд будет играть число Рейнольдса, являющееся очень большой величиной. Даже если этот ряд сходится, низшие приближения теории возмущений не могут служить надежным источником количественной и качественной информации о свойствах всего ряда. С помощью процедуры перенормировки, сводящейся к замене молекулярной вязкости на некоторое перенормированное значение, осуществляется перестройка ряда теории возмущений таким образом, что в результате параметром разложения становится эффективное число Рейнольдса, построенное по турбулентной вязкости. Эффективное число Рейнольдса оказывается величиной порядка единицы, что соответствует условию баланса энергии при стационарном режиме, когда нелинейная подкачка энергии к данной моде со стороны крупномасштабных мод компенсируется диссипацией энергии к мелкомасштабным модам.

Таким образом, перенормированная теория возмущений дает возможность в низших приближениях получить разумные результаты при рассмотрении отдельного акта межмодовых взаимодействий, т. е. описать отдельное звено каскадной цепочки. Однако длинная каскадная цепочка не может описываться небольшим числом членов ряда теории возмущений, так как ряду теории возмущений соответствует разложение по числу актов межмодовых взаимодействий. Поскольку бесконечно длинная каскадная цепочка содержит бесконечно большое число звеньев, то для ее описания необходимо иметь способ суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений. Это суммирование осуществляется с помощью метода ренормализационной группы, или более сокращенно - ренормгруппы (РГ). Тем самым метод РГ следует рассматривать как адекватный задаче описания каскадных процессов, характерных для развития турбулентности [5, 6].

Точность метода РГ зависит от степени локальности межмодовых связей в пространстве волновых чисел (пространстве масштабов).

Ниже в лекции дается краткое изложение метода РГ в адиабатической и полевой формулировках, которые иллюстрируются на примере вычисления подсеточной (эффективной) вязкости, а также приводится обзор применения метода РГ для описания развитой турбулентности.

2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕНОРМГРУППЫ

Метод РГ возник первоначально в квантовой теории поля в связи с идеей устранения расходимостей путем перенормировок. При перенормировке конечные значения наблюдаемых физических параметров получаются как разности бесконечных значений первоначальных (загравочных) параметров и связанных с учетом взаимодействия полевых добавок, также являющихся бесконечными. Поскольку процедура вычитания из одних бесконечности другой неоднозначна, возникает конечный произвол, связанный со способом задания исходных параметров задачи. Как было установлено в 1953 г. Штюкельбергом и Петерманом, конечные преобразования, описывающие переход от одного способа задания исходных параметров (условий нормировки) к другому, образуют группу, названную ими ренормализационной группой. Идеи РГ были использованы в 1954 г. Гелл-Манном и Лоу для нахождения асимптотических функций Грина квантовой электродинамики на малых расстояниях [7]. В дальнейшем Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков предложили использовать свойства симметрии уравнений теории поля относительно РГ-преобразований для улучшения теории возмущений, сформулировав так называемый метод РГ [8]. Метод РГ представляет собой способ просуммировать некоторую бесконечную подпоследовательность полного ряда теории возмущений, он, в частности, дает возможность получать результаты вблизи сингулярных точек, где теория возмущений вообще не применима.

Более наглядной является формулировка метода РГ, предложенная К.Вилсоном [9]. Согласно Вилсону РГ-метод представляет собой способ исследования многомодовой и многомасштабной системы путем последовательного исключения

мелкомасштабных (быстрых) мод при частичном усреднении по узкой полосе спектра волновых чисел мелкомасштабных мод (процедура Каданова) в сочетании с масштабным преобразованием [10]. В результате подобной операции получают уравнения движения для крупномасштабных (медленных) мод с учетом усредненного влияния мелкомасштабных (быстрых) мод. Усредненное влияние быстрых мод сводится к изменению (перенормировке) исходных параметров задачи. Подобная процедура очень близка к применяемому в теории нелинейных колебаний методу Крылова – Боголюбова – Митропольского, в котором усреднение по быстрым колебаниям на основной частоте приводит к уравнениям для эволюции медленных переменных – амплитуд и фаз [11].

Во всех рассматриваемых случаях приходится иметь дело с преобразованием масштаба $t \rightarrow t'$, $y \rightarrow y'$ и связанным с ним изменением числового параметра или системы параметров $q \rightarrow q'$ [12]. В качестве масштаба t может выступать максимальное значение волнового числа, на котором производится обрезание расходящихся интегралов в теории поля при формулировке Гелл-Манна и Тоу [7], положение точки нормировки в формулировке Боголюбова и Ширкова [8], размер ячейки при прямом численном моделировании крупномасштабных течений [13], в формулировке Вилс на – это граница между рассматриваемыми динамическим образом медленными модами и быстрыми модами, в котором проведено усреднение [9].

Измененное значение числового параметра q' является некоторой функцией отношения масштабов $t = t'/t$, других размерных параметров y и начального параметра q . Таким образом, система RG-преобразований имеет вид [12]

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t/t, & y &\rightarrow y' = y/t, & (1) \\ q &\rightarrow q' = \tilde{q}(t, y, q). \end{aligned}$$

Функция \tilde{q} удовлетворяет условию нормировки

$$\tilde{q}(1, y, q) = q. \quad (2)$$

Групповой закон композиции требует, чтобы преобразование с параметром t_1, t_2 можно было бы рассматривать как последовательное выполнение двух преобразований с параметрами t_1 и t_2 . Для масштабного преобразования это очевидно:

$$x \rightarrow x_2 = x/t_1 t_2 = x_1/t_2, \quad y \rightarrow y_2 = y/t_1 t_2 = y_1/t_2,$$

а для преобразования параметров должно выполняться соотношение

$$\tilde{q}(t_1, t_2, y, g) = \tilde{q}(t_2, y_1, g_1) = \tilde{q}(t_2, y/t_1, \tilde{q}(t_1, y, g)). \quad (3)$$

Уравнение (3) может быть переписано в виде функционального уравнения РГ

$$\tilde{q}(x, y, g) = \tilde{q}(x/t, y/t, \tilde{q}(t, y, g)), \quad (4)$$

из которого следует, что $\tilde{q}(x, y, g)$ является инвариантом РГ-преобразования, г. е.

$$\tilde{q}(x, y, g) = \tilde{q}(x', y', g'). \quad (5)$$

Если продифференцировать уравнение (4) по t и затем положить $t = 1$, то получится дифференциальное уравнение РГ (уравнение Овсянникова)

$$\left[-x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} + \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial y} \right] \tilde{q}(x, y, g) = 0, \quad (6)$$

где функция β (называемая также РГ-функцией, функцией Гелл-Манна-Лоу, функцией Вилсона) определена соотношением

$$\beta(y, g) = \left. \frac{\partial \tilde{q}(x, y, g)}{\partial x} \right|_{x=1}. \quad (7)$$

Таким образом, если известно поведение функции $\tilde{q}(x, y, g)$ вблизи точки $x = 1$ (задана ее производная в этой точке), то решение уравнения (6) дает возможность найти вид функции $\tilde{q}(x, y, g)$ во всей области изменения переменной x .

Здесь уместно провести аналогию с теорией непрерывных групп Ли, когда знание операторов бесконечно малых преобразований вблизи гождественного элемента (образующих соответствующую алгебру Ли) дает возможность на основании группового закона композиции найти операторы конечных преобразований, которые можно рассматривать как бесконечную последовательность действий операторов бесконечно малых преобразований. Роль операторов бесконечно малых преобразований играют РГ-функции $\beta(y, g)$.

В применении к исследуемому нами случаю бесконечной каскадной цепочки поведение описывающих систему функций вблизи некоторого значения волнового числа определяется единственным актом межмодового взаимодействия, информация о ко-

гором дает возможность найти функцию $f(\varphi, \varrho)$. Решение уравнения РГ (6) соответствует нахождению бесконечной последовательности актов межмодовых взаимодействий, т. е. описанию каскадной цепочки [14].

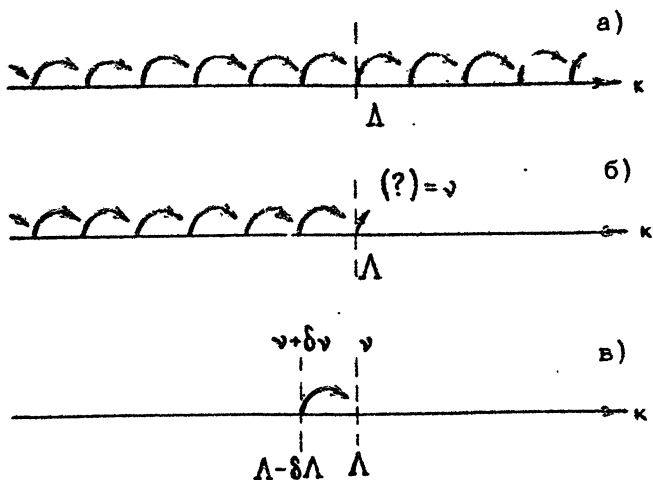
Как уже было отмечено выше, отдельное звено каскадной цепочки может быть рассмотрено по теории возмущений, т. е. для вычисления функции $\beta(\varphi, \varrho)$ достаточно использовать низшее приближение перенормированной теории возмущений. Тогда решение уравнения РГ (6) будет соответствовать нахождению описывающей каскадную цепочку некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений. В этом и состоит идея улучшения результатов теории возмущений с помощью РГ, предложенная Боголюбовым и Ширковым [8].

Наличие РГ-инвариантности соответствует предположению о том, что пространственно-временные свойства мод разных масштабов функ. лонально подобны, т. е. отличаются только набором числовых параметров. Это свойство получило название функциональной автомодельности [15]. Свойство функциональной автомодельности оказывается справедливым для очень широкого класса моделей физических систем, таких как квантовая теория поля, теория критических явлений при фазовых переходах второго рода, изгиб нагруженного упругого стержня с закрепленным концом, физика полимеров, плоская задача переноса излучения, задачи фильтрации, гидродинамическая и плазменная турбулентности и др. [12]. Функциональная автомодельность является обобщением свойства подобия и методов размерного анализа, широко используемых в различных областях науки (см., например, [16]).

Формулировка, основанная на вилсоновском подходе в методе РГ, иллюстрируется ниже на примере вычисления подсчетной вязкости. Формулировка, соответствующая предложенному Боголюбовым и Ширковым подходу в методе РГ [8], демонстрируется на примере вычисления вихревой вязкости в области неполной автомодельности.

3. ПОДСЕТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При прямом численном моделировании развитых турбулентных течений при больших числах Рейнольдса мощности современных ЭВМ оказываются недостаточными для описания всех определяющих турбулентный режим масштабов и часть масшта-



Схематическое изображение каскадных процессов

бов оказывается вне пределов разрешимости конечно-разностной сетки, т. е. мелкомасштабные вихри с характерными масштабами, меньшими масштаба сетки, оказываются неучтенными. На рис. 1, а символически изображен каскадный процесс переноса энергии по спектру волновых чисел как длинная последовательность отдельных актов межмодовых взаимодействий (изображенных стрелками). При использовании конечно-разностной сетки с масштабом Δ^{-1} методом прямого численного моделирования могут описываться только моды с $k < \Delta$ (надсеточные моды), а моды с $k > \Delta$ (подсеточные моды) исключаются (рис. 1, б). Однако подсеточные моды нельзя просто отбросить, так как они определяют сток турбулентной энергии, обеспечивающий стационарный режим турбулентных пульсаций. Тем самым возникает задача о прямом численном моделировании крупномасштабных движений с учетом усредненного влияния подсеточных мод за счет эффективного осреднения мелкомасштабных мод по объему элементарной ячейки [13]. Аналогично тому, как в статистической физике усредненное влияние молекулярного движения в гидродинамическом пределе описывается молекулярными коэффициентами переноса, усредненное влияние подсеточных мод моделируется с помощью введения эффективной (подсеточной) вязкости, зависящей от масштаба сетки (отметим, что подсеточная вязкость не тождественна вихревой или турбулентной

вязкости, вводимой для замыкания цепочки уравнений для статистических моментов). Вид этой зависимости неизвестен, однако он может быть найден на основании соображений РГ-инвариантности.

В рассматриваемой задаче свойство ренормализационной инвариантности заключается в естественном требовании независимости получаемого в результате численных расчетов поведения крупномасштабных мод от выбора масштаба сетки при соответствующем выборе зависимости коэффициента подсеточной вязкости от масштаба [17]. Пусть $F(\bar{\kappa}, \omega, X; \nu, \Lambda)$ — некоторая функция, описывающая крупномасштабные моды, X — набор характерных числовых параметров задачи, согласно теории Колмогорова в инерционном интервале единственным существенным параметром является скорость диссипации энергии ϵ). Из ренормализационной инвариантности следует

$$F(\bar{\kappa}, \omega, X; \nu, \Lambda) = F(\bar{\kappa}, \omega, X; \nu_1, \Lambda_1) \quad (8)$$

или

$$\frac{dF}{d\Lambda} = \left[\frac{d}{d\Lambda} + \beta(\nu, \Lambda, X) \frac{d}{d\nu} \right] F(\bar{\kappa}, \omega, X; \nu, \Lambda) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) находится методом характеристик. Уравнение для характеристики

$$d\Lambda = \frac{d\nu}{\beta(\nu, \Lambda, X)} \quad (10)$$

определяет зависимость подсеточной вязкости от выбора масштаба сетки. Для ее отыскания необходимо знать РГ-функцию $\beta = \delta\nu/\delta\Lambda$, определяемую величиной поправки к вязкости $\delta\nu$ за счет усредненного влияния взаимодействий с модами из узкой полосы спектра волновых чисел $(\Lambda \pm \delta\Lambda, \Lambda)$ (рис. 1, в). Соответствующая поправка находится по формуле, получающейся при итерировании уравнения Навье-Стокса или из общих правил диаграммной техники [18, 19, 20]

$$\delta\nu = - \frac{1}{d-1} \lim_{\vec{\kappa} \rightarrow 0} \frac{1}{\kappa^2} D_{ij}(\kappa) V_{lm}(\vec{\kappa}) \times \int_{(\delta\Lambda)} \frac{d\vec{\kappa}'}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi} G_{nn'}(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}', -\omega) \zeta_{mm'}(Q, \omega) V_{a'm'j}(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}'). \quad (11)$$

где

$$V_{ilm}(\vec{k}) = i(k_m \delta_{il} + k_n \delta_{im}), \quad G_{ij}(\vec{k}, \omega) = \rho_{ij}(\vec{k}) (-i\omega + \nu k^2)^{-1},$$

$$C_{ij}(\vec{k}, \omega) = \rho_{ij}(\vec{k}) B(k) (\omega^2 + \nu^2 k^4)^{-1}, \quad \rho_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2, \quad (1)$$

d - размерность пространства, интегрирование по q осуществляется по сферическому слою толщины $\delta\Lambda$. После выполнения суммирования по тензорным индексам и интегрирования по ω формула (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} \nu \nu &= \frac{1}{2(d-1)\nu^2} \rho_{ilm} \int_{\delta\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{B(q)}{k^2 q^2} \frac{k^2 q^2 - (\vec{k}\vec{q})^2}{q^2 + (\vec{k}-\vec{q})^2} \left[d-1 - 2 \frac{q^2(k^2 - \vec{k}\vec{q})}{k^2(\vec{k}-\vec{q})^2} \right] = \\ &= \frac{1}{4(d-1)\nu^2} \int_{\delta\Lambda} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^d} \frac{B(q)}{q^4} \left[1 - \frac{(\vec{k}\vec{q})^2}{k^2 q^2} \right] \left[d-3 + 6 \frac{(\vec{k}\vec{q})^2}{k^2 q^2} \right] = \quad (12) \\ &= \frac{1}{4(d-1)\nu^2 (2\pi)^d} \int_{\Lambda-\delta\Lambda}^{\Lambda} q^{d-5} B(q) d(\zeta) \int d^d \Omega (d-3 - 6 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

где θ - угол между векторами \vec{k} и \vec{q} в d -мерном пространстве. Используя правила интегрирования по углам d -мерном пространстве и условие малости $\delta\Lambda$, найдем

$$\beta(\nu, \Lambda) = -\frac{\delta\nu}{\delta\Lambda} = -\frac{d-1}{4(d+2)\nu^2} \frac{s_d}{(2\pi)^d} B(\Lambda) \Lambda^{d-5}, \quad (14)$$

где $s_d = 2 \cdot \pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$ - площадь поверхности d -мерной сферы единичного радиуса.

Функция $B(\Lambda)$ связана с корреляционной функцией эффективных случайных сил $f_i(\vec{k}, \omega)$, моделирующих нелинейную подкачку энергии к моде Λ :

$$\langle f_i(\vec{k}, \omega) f_j(\vec{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^{d-1} \delta_{ij} B(k) \delta(\omega + \omega') \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (15)$$

Условие самоподобия поля скорости в инерционном интервале оказывается выполненным в случае, когда $B(k)$ имеет степенной вид

$$B(k) = D_0 k^{-\alpha}, \quad (16)$$

при этом если потребовать согласно Колмогорову, чтобы в инерционном интервале единственным существенным размерным параметром была скорость диссипации энергии \mathcal{E} , то конст

та D_0 должна быть пропорциональна ζ , а для показателя степени в формуле (16) из соображений размерности должно быть $n = -d$. При этих предположениях интегрирование уравнения (10) с учетом (14) дает

$$\nu(\Lambda) = \left[\frac{3}{16} \frac{d-1}{d+2} \frac{s_0}{(2\pi)^2} \frac{D_0}{\Lambda^d} + c \right]^{1/3} \quad (17)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы при больших Λ , когда подсеточные моды соответствуют молекулярным движениям, подсеточная вязкость переходила в молекулярную, то следует положить $c = -\nu_0^3$. Согласно [21] коэффициент пропорциональности между D_0 и ζ может быть выражен через введенную Эдвардсом константу α , вычисляемую геометрически из условия локального баланса турбулентной энергии [22]. В результате найдем [21, 23]

$$\frac{s_0}{(2\pi)^2} D_0 = \frac{3}{(d-1)(d+2)\alpha} \zeta \quad (18)$$

В инерционном интервале $\Lambda^4 \ll D_0 \nu_0^{-3}$ для подсеточной вязкости будем иметь

$$\nu(\Lambda) = \left[\frac{9}{16(d+2)^2 \alpha} \right]^{1/3} \zeta^{1/3} \Lambda^{-4/3} \quad (19)$$

Используя геометрически найденное при $d = 3$ значение $\alpha = 0,1904$ [23], получим

$$\nu(\Lambda) = 0,4907 \zeta^{1/3} \Lambda^{-4/3} \quad (20)$$

Впервые метод РГ в описанной выше формулировке Вилсона был применен в работе [24] для вычисления показателей степенного поведения статистических моментов и функций отклика. Несколько позднее эта процедура была использована для нахождения также числовых коэффициентов в пределе малых волновых чисел [20]. Яхот и Орсаг [21] использовали метод РГ для вычисления без введения дополнительных подсеточных параметров большого набора универсальных констант, характеризующих развитую турбулентность, значения которых оказались в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными. Современный обзор применения методов РГ для описания развитой турбулентности содержится в работе [25].

4. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА РЕНОРМГРУППЫ

При георетико-полевым подходе с самого начала рассматриваются только усредненные характеристики системы, и поэтому кадановская операция частичного усреднения отсутствует. В качестве группового параметра в методе РГ при этом выступает не граничное волновое число Λ , а положение точки нормировки (ТН). Под ТН подразумевается значение волнового числа μ и частоты Ω (в дальнейшем принимается $\Omega = 0$), вблизи которых описывающая усредненный линейный отклик поля скорости на внешнее силовое воздействие функция Грина

$$G_{ij}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta \langle v_i(\vec{r}, t) \rangle / \delta f_j(\vec{r}', t').$$

совпадает с перенормированной функцией Грина при отсутствии междоузельных связей.

В случае однородной и стационарной системы можно все рассмотрение вести в пространстве фурье-образов. В линейном приближении (при пренебрежении междоузельными взаимодействиями) для обратной функции Грина имеем

$$G_{ij}^{(0)-1}(\vec{k}, \omega) = \delta_{ij} (-i\omega + \nu_0 k^2). \quad (21)$$

Можно показать, что при учете нелинейности обратная функция Грина представима в виде [19, 26]

$$G_{ij}^{-1}(\vec{k}, \omega) = (-i\omega + \nu_0 k^2) \delta_{ij} - \Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) = -i\omega \delta_{ij} + \tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \omega) k^2, \quad (22)$$

т. е. учет нелинейности ведет к замене молекулярной вязкости на эффективную вязкость

$$\delta_{ij} \nu_0 \rightarrow \tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \nu_0 \delta_{ij} - \Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) / k^2,$$

где $\Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega)$ — так называемый оператор собственной энергии [19]. Эффективная вязкость описывает перенос импульса при перемешивании как за счет молекулярных, так и за счет турбулентных движений.

Поставим задачу вычисления эффективной вязкости в статическом пределе

$$\tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}) = \tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \omega) |_{\omega=0}. \quad (23)$$

Для решения этой задачи проведем перенормировку вязкости путем замены в линейной части уравнения Навье-Стокса

$$\nu_0 \Delta v_i - \nu \Delta \tau_i, \quad \nu = Z_\nu \cdot \nu_0 \quad (24)$$

и добавления к рассматриваемой как возмущение нелинейной части "компенсирующего контрчлена" $\nu_0 (1 - Z_\nu) \Delta v_i$. Константа перенормировки вязкости Z_ν произвольна, ее значение можно фиксировать условием, что в ТН $k = \mu$, $\omega = 0$ перенормированная вязкость ν должна совпадать с эффективной

$$\tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \omega) = \nu \delta_{ij} - \sum_{\psi}^{(R)} (\vec{k}, \omega) / k^2, \quad (25)$$

что эквивалентно требованию

$$\sum_{ij}^{(R)} (\vec{k}, \omega) \Big|_{\text{ТН}} = 0. \quad (26)$$

При изменении μ , определяющем положение точки нормировки и задающем масштаб, значение константы перенормировки Z_ν меняется и происходит перестройка ряда теории возмущений, в результате которой каждый член ряда также меняется, но сумма ряда для физической величины (эффективной вязкости) остается неизменной. Условие независимости результата вычисления турбулентной вязкости от выбора точки нормировки и выражает свойство ренормализационной инвариантности:

$$\tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \delta, \nu_0; \mu_1, \nu_1) = \tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \delta, \nu_0; \mu_1, \nu_1). \quad (27)$$

Из свойства изотропии системы и соображений размерности следует

$$\tilde{\nu}_{ij}(\vec{k}, \delta, \nu_0; \mu, \nu) = \nu_0 \delta_{ij} F(k^2/\mu^2, \ell^2/\mu^2, \nu/\nu_0), \quad (28)$$

где функция $F(x, y, q)$ удовлетворяет функциональному уравнению РГ (4) и граничному условию (2) [26].

Для нахождения функции $F(x, y, q)$ путем решения уравнения (4) или эквивалентного ему дифференциального уравнения (6) надо на основе перенормированной теории возмущений вычислить $F(x, y, q)$ вблизи точки нормировки $x = 1$, что дает возможность найти РГ-функцию $\beta(y, q)$. Решение уравнений РГ (6) при граничном условии (2) может быть записано в неявном виде [8].

В общем случае выражение для оператора собственной энергии $\Sigma_{ij}^{(R)}$ содержит расходящиеся интегралы, однако когда структура расходящихся выражений совпадает со структурой контрчленов, то выбором соответствующих значений параметров перенормировки можно добиться компенсации расходимостей (это так называемые перенормируемые теории).

В указанном смысле соответствующая колмогоровской турбулентности теория ($\alpha = -d$ в (16)) не является перенормируемой, теория будет перенормируемой при $\alpha = d + 4$. Для этого случая используется предложенный Вилсоном и Фишером метод ϵ -разложения [27], когда α берется в виде

$$\alpha = -d + 4 - \epsilon$$

и имеющая место в перенормированной теории ($\epsilon = 0$) логарифмическая расходимость проявляется в виде полюса по ϵ с конечным вычетом. Переход к соответствующей колмогоровскому случаю "физической теории" $\epsilon = 4$ совершается с помощью аналитического продолжения по ϵ . Хотя строгого математического обоснования подобной процедуры пока найти не удалось, такой подход с успехом применялся в теории критических явлений [28]. В работе автора [26] было высказано предположение, что в теории турбулентности метод РГ в сочетании с ϵ -разложением представляет собой способ учета локальных в пространстве волновых чисел межмодовых взаимодействий и отфильтровывания математических эффектов переноса при взаимодействии мод с существенно различающимися масштабами. Это предположение основано на том, что вклад в РГ-функцию дают моды масштабов, близких к μ , хотя в функцию $F(\tau, y, q)$ по теории возмущений дают моды всех масштабов, при этом в теории с логарифмическими расходимостями вклад мод разных масштабов приблизительно одинаков (отсутствует выделенный масштаб) [10].

Краткое сравнение различных формулировок метода РГ (вилсоновской и полевой) дается в работе [17]. Интересно отметить, что полученные функциональные зависимости для подсеточной вязкости $\nu(\Lambda)$ (формула (17)) и эффективной вязкости $\tilde{\nu}(k)$ [26] оказались идентичными, хотя эти величины различны и способы получения аналитических выражений для них также различаются.

Л и т е р а т у р а

1. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
4. Кадомцев Б.Б. Турбулентность плазмы // Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1964. С. 188.
5. Theodorovich E.V. Application of the renormalization group method for description fully developed turbulence // Proc. of Sci. and Meth. Seminar on Ship Hydrodynamics, 18th session. Varna, Bulgaria, 1989. P.11-1.
6. Theodorovich E.V. On the prediction of Kolmogorov's constant in renormalization group approach to turbulence // Proc. of the 5th ERS Liquid State Conference on Turbulence. Moscow, 1989. P.13.
7. Gell-Mann M., Low F.E. Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. 1954. V.95, N5. P. 1300.
8. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1984.
9. Wilson K.G. Renormalization group and critical phenomena // Phys. Rev. B. 1971. V.4. P.3184.-3184.
10. Wilson K.G. The renormalization group: Critical phenomena and the Condo problem // Rev. Mod. Phys. 1975. V.47, N4. P. 773.
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
12. Ширков Д.В. Ренормгруппа и функциональная автомодельность в различных областях физики // ТМФ. 1984. Т.60, № 2. С.218.
13. Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 1985, Т. 25, № 12. С. 1856.
14. Теодорович Э.В. Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы // ПММ. 1988. Т. 52, № 2. С. 218.
15. Ширков Д.В. Ренормализационная группа, принцип инвариантности и функциональная автомодельность // ДАН СССР. 1982. Т. 263, № 1. С. 64.
16. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоназдат, 1978.

17. Теодорович Э.В. Развитая турбулентность и метод ренормгруппы // Тезисы докл. Всесоюз. семинара по гидродинамической устойчивости и турбулентности, Новосибирск, 1989. С. 99.
18. Wyld H.W. Formulation of the theory of turbulence in incompressible fluid // Ann. Phys. 1961. V.14, N2. P.143.
19. Теодорович Э.В. Методы теории поля и ренормализационной группы в статистической гидродинамике: Препринт ИПМ АН СССР № 302. М., 1987.
20. Fournier J.D., Frisch U. Remarks on the renormalization group in statistical fluid dynamics // Phys. Rev. A. 1983. V.28, N2. P.1000.
21. Yakhot V., Orszag S.A. Renormalization group analysis of turbulence. 1. Basic theory // J. Sci.Comp. 1986. V.1, N1. P.3.
22. Kraichnan R.H. - Inertial range transfer in two- and three-dimensional turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V.47, N2. P.525.
23. Теодорович Э.В. К вычислению константы Колмогорова при описании турбулентности методом ренормгруппы // ЖЭТФ, 1989, Т. 96, № 1 (7). С. 163.
24. Forster J.D., Nelson D.R., Stephen M.J. Large-distance and long-time properties of randomly stirred fluid // Phys. Rev. A. 1977. V.16, N2. P.732.
25. Теодорович Э.В. Об инфракрасных расходимостях и роли локальных и нелокальных взаимодействий в формировании режима развитой турбулентности: Препринт ИПМ АН СССР № 388. М., 1989.
26. Теодорович Э.В. К вычислению турбулентной вязкости // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1987. № 4. С. 20.
27. Wilson K., Fisher M. Critical exponents in 3.99 dimensions // Phys. Rev. Lett. 1972. V.28, N4. P.240.
28. Ма Ш.К. Современная теория критических явлений. М.: Ма, 1980.

ЛАБОРАТОРНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН РОССБИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

М. В. Курганский, Ю. Л. Черноушко

Волны Россби играют фундаментальную роль в современной динамической метеорологии и геофизической гидродинамике. Образно можно сказать, что они являются теми "кирпичиками", из которых построено здание общей циркуляции атмосферы, по крайней мере той его части, которая относится к высоким и умеренным широтам Земли. Своим существованием волны Россби обязаны особому рода упругости, или жесткости, которой обладает атмосфера в условиях быстрого вращения Земли и ее сферичности. Здесь решающая роль принадлежит закону сохранения потенциального вихря, когда, грубо говоря, каждая воздушная масса стремится сохранить исходное значение вертикальной компоненты абсолютной завихренности, отнесенное к массе столба воздуха. За счет сферичности Земли имеется существенный меридиональный градиент потенциального вихря для основного, фоновго состояния атмосферы. По тому воздушная масса, по каким-либо причинам переместившаяся, например, в Северном полушарии еще дальше на север, попадает в окружение воздушных частиц с большим значением потенциального вихря и будет испытывать с их стороны определенное индукционное воздействие, которое приводит в распределенной системе к возникновению волнового процесса с фазой, всегда распространяющейся против основного вращения жидкости, т.е. в условиях земной атмосферы — строго на запад.

Имеется хорошо известная аналогия между динамикой потенциального вихря Эртеля на изэнтропических поверхностях

[1] и двумерной гидродинамикой баротропной жидкости, реагирующей в условиях ее быстрого вращения. Опираясь на эту аналогию, мы попутно освобождаемся от влияния бароклинных факторов, которые хотя постоянно и присутствуют в реальной атмосфере, но при определенной постановке задачи играют опосредованную роль. Их воздействие сводится в основном к генерации или усилению волн в узком спектральном диапазоне. В рамках баротропной модели это можно заменить воздействием некоторого эффективного источника завихренности, а дальнейшую судьбу этой завихренности описывать уже достаточно строго, но в упрощенной модели.

Ниже излагаются результаты экспериментального и теоретического исследования волн Россби во вращающемся кольцевом канале с наклонным дном. Это позволяет имитировать крупномасштабные волны Россби в земной атмосфере, причем кольцевой канал является моделью атмосферы средних широт Земли. Возбуждение волн Россби производится двумя способами. Первый из них базируется на идее Дж.Холтона [2] и состоит в использовании резонансных эффектов, которые возникают при движении системы источников и стоков массы относительно быстро вращающейся жидкости со скоростью, близкой к скорости распространения нормальных мод волн Россби. Следует отметить, что в отличие от работы Холтона исследования проводятся в нелинейной постановке задачи, поскольку элементарные волны Россби являются решениями как линейных, так и нелинейных уравнений гидродинамики. Поэтому и в нелинейной постановке задачи те из них, которые являются баротропно устойчивыми, будут генерироваться внешними источниками, движущимися с резонансной скоростью. Чем определяется предпочтительная длина волны в наших экспериментах? Система источников — стоков массы играет роль внешнего привода с определенным (близким к равномерному) распределением амплитуды возбуждения по спектру нормальных мод в кольцевом канале. Вследствие бета-эффекта каждая нормальная мода имеет собственную фазовую скорость, причем эта скорость тем выше, чем меньше волновое число, т.е. чем более крупномасштабна данная мода. Поэтому, если скорость источника совпадает или близка к скорости какой-либо нормальной моды, возникает резонанс, в результате которого амплитуда резонансной гармоники будет выделяться на фоне остальных множителем, определяемым добротностью системы (отношением характерной частоты волны к декременту затухания за счет трения), которая в наших экспериментах достаточно велика.

Второй способ возбуждения волн Россби состоит в обтекании изолированных препятствий на дне канала потоком жидкости, создаваемым методом источников и стоков массы. Когда этих препятствий несколько (в конкретных экспериментах использовались два идентичных препятствия), в кольцевом сосуде возникают интересные резонансные эффекты: определенные нормальные моды волн Россби могут усиливаться, а другие, напротив, подавляться. Результаты проведенных экспериментов удовлетворительно согласуются с теоретическими, полученными на базе упрощенной теоретической модели [3,4].

Несколько слов необходимо сказать о том, как наши эксперименты соотносятся с другими экспериментами по моделированию волн Россби, проводимыми в настоящее время. Следует отметить, что в наших экспериментах оказывается существенной двумерная (в горизонтальной плоскости) сжимаемость жидкости, что принципиально отличает их от экспериментов, изложенных в работе [5], где моделирование ведется с помощью тонких слоев вращающейся в параболическом сосуде жидкости и эффект двумерной сжимаемости является определяющим. Степень деформации свободной поверхности жидкости в поле силы Кориолиса количественно характеризуется отношением масштаба исследуемого явления L к типичному радиусу деформации поверхности жидкости в поле указанной силы — масштабу Обухова-Россби L_0 (см. ниже). В наших экспериментах $L \ll L_0$ и эффект двумерной сжимаемости пренебрежимо мал; в экспериментах [5], где $L \gtrsim L_0$, он определяющий.

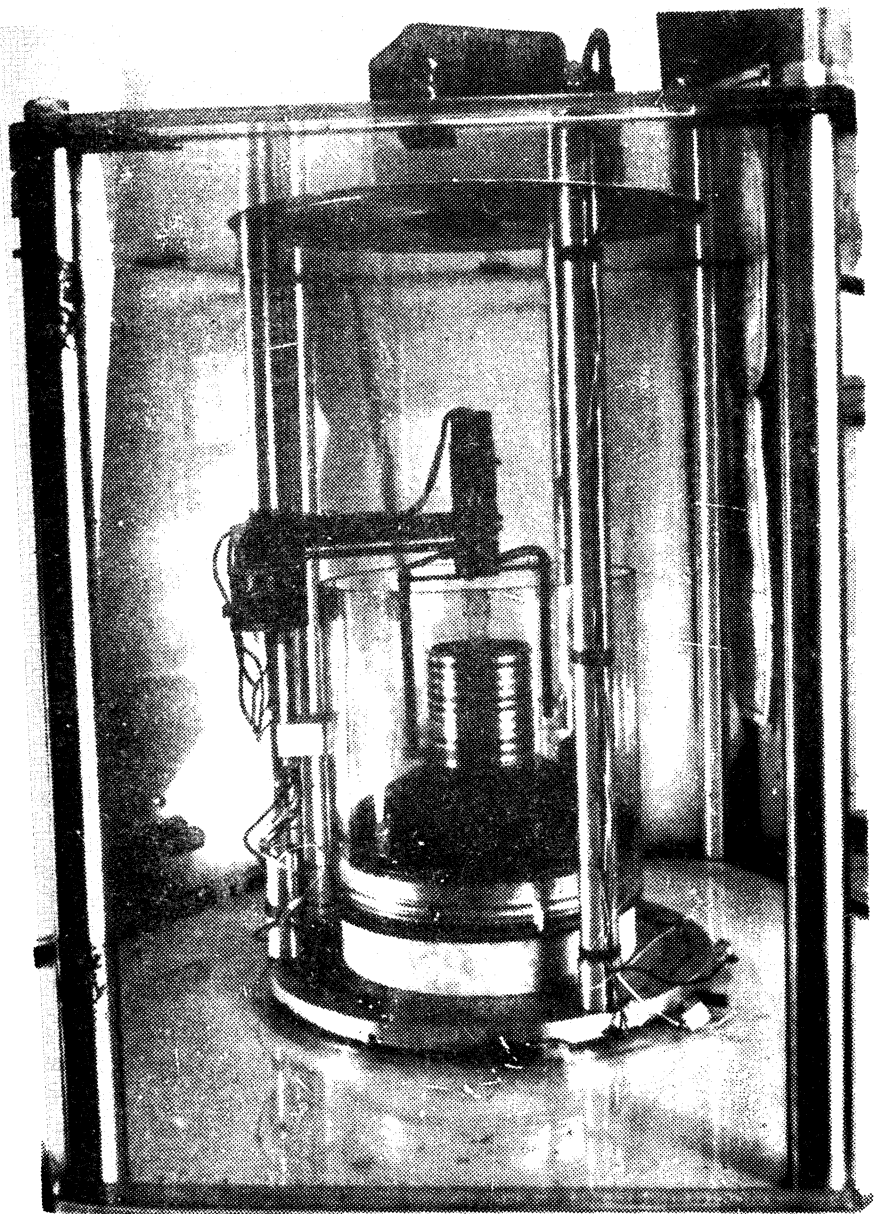
В экспериментах, описанных в данной работе, возбуждаемый зональный поток баротропно устойчив и генерация волн Россби осуществляется за счет чисто резонансных эффектов. Другой применяемый способ генерации волн Россби состоит в создании методом источников и стоков массы гидродинамически неустойчивого зонального потока струи [6] или резкого скачка скорости (фронта) [7,8], на которых развиваются возмущения, обладающие в присутствии среднего градиента потенциального вихря (бета-эффект) определенными свойствами волн Россби. Следует отметить и работу [9], где исследуется влияние азимутальных неоднородностей дна канала на бароклинные волны Россби, образующиеся при неоднородном нагреве жидкости в условиях ее вращения. В использованной в работе [9] установке наклон дна отсутствует, т. е. бета-эффект создается за счет наклона свободной поверхности жидкости при ее быстром вращении.

Волны Россби в кольцевом канале. Эксперименты по лабораторному моделированию волн Россби проводились в кольцевом канале с внутренним радиусом $\rho = 5$ см и внешним радиусом $\delta = 14,6$ см, который устанавливался на вращающуюся платформу, общий вид которой приведен на рис.1, а краткое техническое описание дано в работе [3]. Для регистрации картины лабораторных течений во вращающейся системе координат использовалась установленная на платформе фотоаппаратура, которая приводилась в действие дистанционно. Серии из нескольких фотографий, снятые через одинаковые промежутки времени, позволили судить о регулярности получаемой картины течения, а время экспозиции давало возможность определить скорость течения жидкости. Плавающие на поверхности белые частицы позволяли визуализировать течение жидкости в канале.

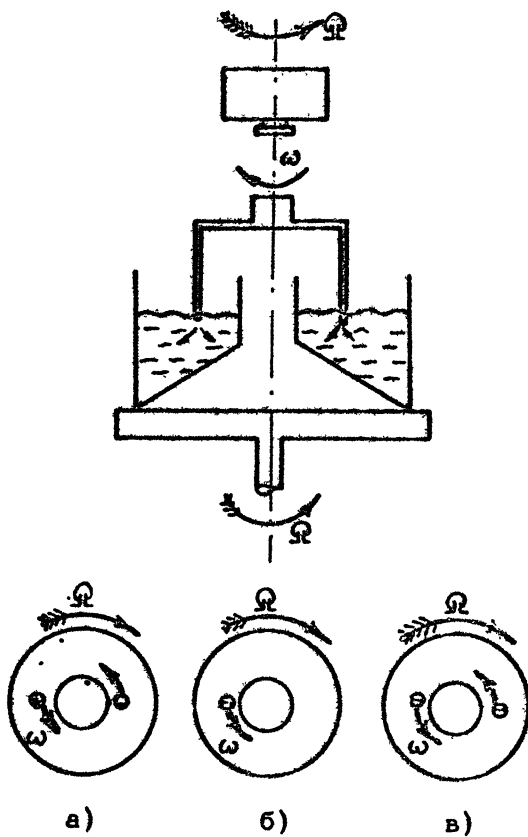
Точечные источники и стоки массы, вращающиеся относительно стенок канала, располагались вблизи поверхности жидкости на середине канала так, как схематично показано на рис.2. В тех случаях, когда на поверхности жидкости использовались только стоки массы, конструкция установки позволяла поддерживать постоянный уровень жидкости с помощью источников, равномерно распределенных в нижней периферийной зоне канала.

Система источник - сток вращалась относительно канала в направлении, противоположном основному вращению установки (рис.2,а). Основным регулируемым параметром была угловая скорость вращения канала Ω . В экспериментах наблюдались устойчивые стационарные волны Россби с азимутальным волновым числом $m_n = 3,5,7$ (равным числу волн, укладываемых вдоль окружности канала), зоны существования которых оказались достаточно широкими и практически смыкаются друг с другом. Картины таких течений показаны на рис.3,б,в. При малых скоростях углового вращения канала Ω течения носят нерегулярный характер (рис.3,а). В переходных зонах фазовая скорость волн заметно отличается от скорости движения источника и стока, при этом нередко наблюдается взаимный переход от одного режима течения к другому. Течения с волновым числом $m_0 > 7$ редко удавалось зарегистрировать, и они, как правило, имели менее регулярный характер.

Картину движения с четным m_0 удавалось получить в экспериментах с двумя движущимися стоками, расположенными в диаметрально противоположных точках (рис.2б). Вместо хаотической картины течения, как в случае с системой источник -



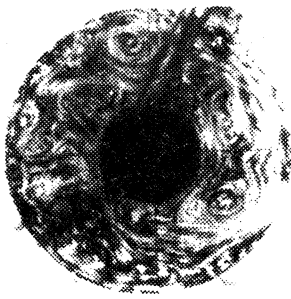
Р и с. 1. Общий вид экспериментальной установки



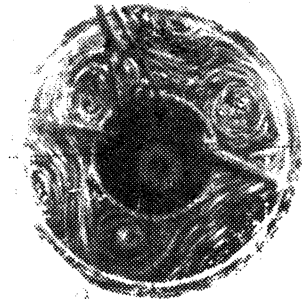
Р и с. 2. Схема эксперимента по резонансному возбуждению волн Россби системой источников и стоков массы: а - с источником и стоком, б - с одним стоком, в - с двумя стоками

сток при малых значениях Ω , два стока образуют устойчивое зональное течение, по направлению совпадающее с вращением канала (рис.3,г). Далее, по мере роста Ω удается получить достаточно устойчивые течения с двумя и четырьмя волнами (рис.3,д,е). Возникающее при больших оборотах течение с шестью волнами менее устойчиво.

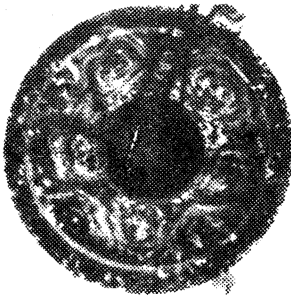
Чтобы получить устойчивые волны Россби с любым волновым числом, мы логически пришли к эксперименту с одним движущимся стоком (рис.2,в). В результате такого эксперимента получены регулярные волны с волновым числом от 2 до 6 в зависимости от внешних параметров; картины



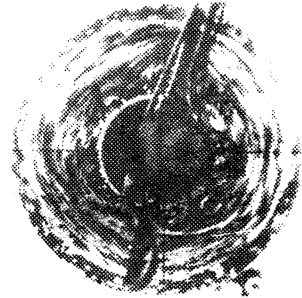
а)



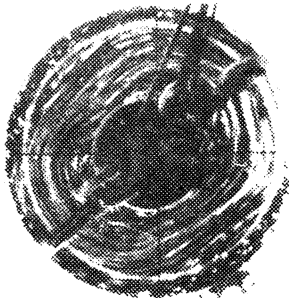
б)



в)



г)



д)



е)

Р и с. 3. Картины лабораторных течений, возбуждаемых системой из источника и стока массы (а, б, в) и системой из двух стоков массы (г, д, е); Ω изменяется в пределах от 1 до 4 с^{-1}

волновым числом более шести были неустойчивы. При малых Ω получается такой же зональный поток, как и в случае двух стоков, хотя и с некоторой асимметрией [10].

Устойчивость воли Россби (теория). В качестве упрощенной математической модели рассмотрим движение жидкости в прямолинейном канале с наклонным дном, вращающимся вокруг вертикальной оси. Введем декартову систему координат с осью x вдоль канала и y — поперек. Уравнение сохранения потенциального вихря в квазигеострофическом приближении, описывающее движение идеальной баротропной жидкости в таком канале, имеет вид *

$$\frac{d}{dt} (\nabla^2 \psi - L_0^{-2} \psi) + \mathcal{J}(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\beta = -2\Omega H_0^{-1} (dH/dy)$, где $H(y)$ — статически равновесная глубина жидкости в канале, H_0 — ее среднее значение, $\psi = qh/2\Omega$ — геострофическая функция тока, причем h — отклонение высоты свободной поверхности от H и q — ускорение свободного падения; $L_0 = (g/H_0)^{1/2}/2\Omega$. Основным условием справедливости уравнения (1) является малость относительных ускорений жидких частиц во вращающемся канале по сравнению с кориолисовыми ускорениями (малость параметра Кибеля–Россби), т.е. близость фактической скорости жидких частиц к геострофической. Уравнение (1) может быть получено из исходных уравнений движения путем их асимптотического разложения по степеням малого параметра Кибеля–Россби.

Задачи о движении жидкости в кольцевом и прямолинейном каналах сопоставимы, если ограничиться решением (1), удовлетворяющим условию периодичности вдоль канала. Предполагается непроницаемость боковых стенок и сохранение циркуляции скорости вдоль них. Элементарным решением (1), удовлетворяющим указанным граничным условиям, является волна Россби

$$\psi = A \sin k_0(x+ct) \cdot \sin q_0 y, \quad (2)$$

которая при $\beta > 0$ распространяется в сторону, противоположную основному вращению со скоростью

$$c = \beta / (k_0^2 + q_0^2 + L_0^{-2}).$$

*)

$$\mathcal{J}(a, b) = (\partial a / \partial x) (\partial b / \partial y) - (\partial a / \partial y) (\partial b / \partial x).$$

где $k_0 = 2\pi m_0/L_x$, $q_0 = \pi n_0/D$, $L_x = \lambda(u+v)$, $D = b-a$; m_0 и n_0 — целые числа, A — произвольная постоянная. Отметим, что величиной L_0^{-2} можно пренебрегать, поскольку в подавляющем большинстве экспериментов, описанных выше, $L_0^{-2} \ll (\pi/D)^2$. Исследование устойчивости проводится методом малых возмущений. Пусть ψ' — малое возмущение, наложенное на волну (2). В линейном приближении ψ' удовлетворяет уравнению с периодическими коэффициентами в системе отсчета ($s = x + ct$, y), связанной с волной (1):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + \frac{\beta}{\alpha_0^2} \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 \psi' + \alpha_0^2 \psi') + \\ & + A k_0 \sin q_0 y \cdot \cos k_0 s \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi' + \alpha_0^2 \psi') - \\ & - A q_0 \cos q_0 y - \sin k_0 s \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 \psi' + \alpha_0^2 \psi') = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Волновые числа основного течения снабжены нулевыми индексами, $\alpha_0^2 = k_0^2 + q_0^2$. При выводе (3) учтено дисперсионное соотношение. Принимая во внимание граничные условия, можно показать, что

$$\frac{d}{dt} \int_s^{s+L} \int_0^D [(\nabla \psi')^2 - \alpha_0^{-2} (\nabla^2 \psi')^2] ds dy = 0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что для устойчивости волны Россби достаточно знакоопределенности этого интеграла, как функционала от ψ' . Неопределенность знака функционала означает необходимое условие неустойчивости волны Россби, поскольку тогда существуют возмущения как более крупномасштабные ($\alpha^2 = k^2 + q^2 < \alpha_0^2$), так и более мелкомасштабные ($\alpha^2 > \alpha_0^2$), которые могут расти за счет энергии основного течения. Остановимся на этом более подробно. Решение уравнения (3) ищется в виде

$$\nabla^2 \psi' = \sum_{m,n} \Psi_{m,n}'(t) \exp(im k_0 s) \sin n q_0 y + (\text{к.с.})$$

где m и n — целые числа. Подставляя это решение в уравнение (3) получаем рекуррентное соотношение для комплексных амплитуд $\Psi_{m,n}'$. Отсылая за деталями к статье [3]

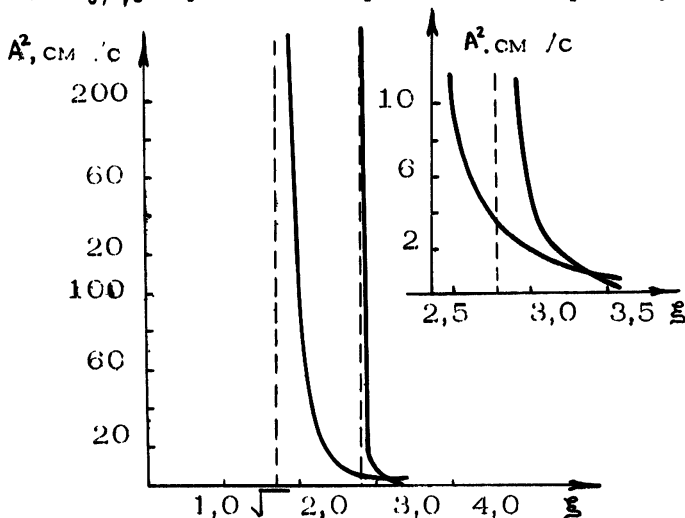
укажем, что получающаяся бесконечная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решается приближенным методом. Выделяется пентада возмущений

$$\| \Psi_0^n, \Psi_{-1}^{n-1}, \Psi_1^{n-1}, \Psi_{-1}^{n+1}, \Psi_1^{n+1} \|,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Остальные амплитуды полагаются равными нулю. Среди выбранных возмущений обязательно есть зональная компонента ($m = 0$), в противном случае не удовлетворяется необходимое условие неустойчивости. Анализ получающейся динамической системы пятого порядка приводит к следующему основному результату: при $n = 1$ неустойчивости нет, при $n = 2, 3$ условия неустойчивости задаются неравенствами

$$\begin{aligned} n=2 \quad A^2 > A_{2кР}^2 &= \frac{64 \beta^2 q_0^2}{(\kappa_0^2 + q_0^2)^2 (\kappa_0^2 + 9q_0^2) (\kappa_0^2 - 3q_0^2)}, \\ n=3 \quad A^2 > A_{3кР}^2 &= \frac{20 \beta^2 q_0^2}{(\kappa_0^2 + q_0^2)^2 (\kappa_0^2 + 6q_0^2) (\kappa_0^2 - 8q_0^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Зависимость критических значений амплитуд волн Россби от параметра $\xi = \kappa_0 / q_0$ приведена на рис. 4. Левая кривая устойчи-



Р и с. 4. Диаграмма устойчивости волн Россби, подсчитанная для геометрических параметров лабораторной установки при конкретном значении $\beta = 0,703 \text{ см}^{-1} \text{ с}^{-1}$, взятом из эксперимента. Пунктиром изображены асимптоты критических кривых

ности построена по первой формуле (5) для $n=2$; правая — по второй формуле (5), для $n=3$. Выше и справа от каждой из этих кривых находится область неустойчивости относительно соответствующих возмущений. В правом верхнем углу в увеличенном виде изображена зона пересечения этих кривых; слева от точки пересечения более "опасными" являются возмущения с $n=2$, справа — с $n=3$. Аналогичные кривые получаются для $A_{n,kr}^2$ при $n > 3$. Отметим, что асимптоты кривых критических амплитуд пересекают ось абсцисс в точках, которые образуют возрастающую последовательность. Можно ограничиться тетрадой возмущений (хотя это и менее естественно с точки зрения рекуррентного соотношения)

$$\| \Psi_0^n, \Psi_{-1}^{n+1}, \Psi_1^{n+1}, \Psi_0^{n+2} \|$$

и получить условия неустойчивости, аналогичные (5). Асимптоты кривых критических амплитуд (ср. рис.4) пересекают ось абсцисс в точках $\xi=2$ ($n=1$), $\xi=3$ ($n=2$) и т.д. Решаемая нами бесконечная система уравнений в действительности разбивается на две независимые подсистемы (аналог белых и черных полей на шахматной доске). В зависимости от четности индекса n полученные условия устойчивости относятся к тому или иному линейно независимому решению этой системы.

Использованный здесь приближенный метод решения можно интерпретировать как применение метода Галеркина. Этот метод используется, например, в линейной теории приливов [11] и обычно дает хорошую точность уже на первом шаге, когда берется минимальное число компонентов в разложении гидродинамических полей по координатным функциям. Вопрос о точности использованного здесь первого приближения метода Галеркина является сложным, но в данном случае решается путем сопоставления теории и эксперимента.

Рассмотрим случай $n_0=1$, реализующийся в эксперименте. Число волн m_0 , укладывающихся на длине канала $L = \pi(a+b)$, для нашей установки выражается через параметр ξ очевидным равенством

$$m_0 = \frac{\pi}{2} \frac{b+a}{b-a} \xi \approx 3.21 \xi. \quad (6)$$

Поэтому значению $\xi = \sqrt{3}$ (см. рис.4) отвечает $m_0 \approx 5,6$. Это означает, что волна с $m_0 < 6$ всегда устойчива: волны с $m_0 \geq 6$ могут быть неустойчивы, если их амплитуда превышает критическое значение. К примеру, для волны с $m_0=7$, наблю-

даемой в эксперименте, $A_{\text{кр}}^2 \approx 32,6 \text{ см}^4 \text{ с}^{-2}$, что соответствует амплитуде по скорости $U \approx 4,5 \text{ см/с}$. Оценка максимальной скорости U , сделанная по фотографиям, оказалась близкой к критической.

Известна эмпирическая формула Р.Хайда [12] для максимального из эллиптических чисел бароклинических волн Россби, наблюдаемых в кольцевых каналах

$$m_{\text{max}} = (0,67 + 0,02) \frac{\pi(b+a)}{b-a}$$

Делая подстановку $\xi = \sqrt{3}$ в равенство (6), получим, что для баротропных волн

$$m_{\text{max}} \approx 0,867 \frac{\pi(b+a)}{b-a},$$

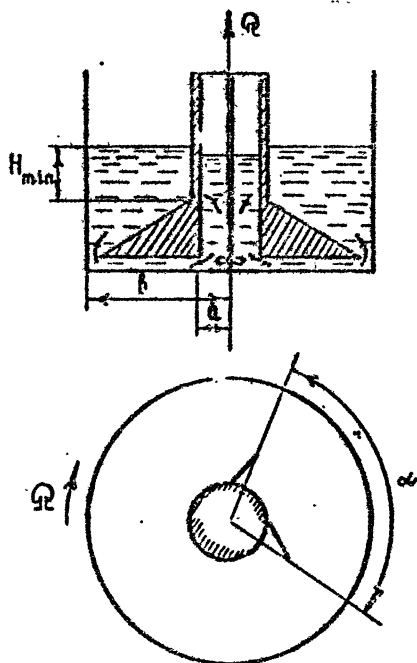
т.е. наша теоретическая оценка снизу для величины m_{max} согласуется с экспериментальной.

Стационарные волны Россби над препятствиями. Методом источников и стоков массы можно создать во вращающемся сосуде вполне стационарный зональный поток, направленный в ту же сторону, что и основное вращение. Если на дне канала имеются препятствия, то при определенных условиях над ними возникают стационарные волны Россби. Это позволило нам исследовать взаимодействие волн Россби, образующихся от двух одинаковых препятствий в канале (в зависимости от расстояния между ними), что ранее не проводилось и дать удовлетворительную теоретическую интерпретацию полученным результатам на основе простой теории линейного резонанса [4].

Эксперименты проводились на той же лабораторной установке, что и предыдущие, лишь с некоторой модификацией применительно к новым условиям задачи. Источники массы равномерно распределялись по внешней стенке канала, стоки — по внутренней. Реализующийся при этом в поле силы Кориолиса профиль азимутальной скорости потока, как показали измерения, линейен, за исключением узких зон вблизи стенок канала. Величина скорости падает от внешней стенки канала к внутренней. Схема эксперимента приведена на рис.5.

Вначале были проведены тестовые эксперименты по обтеканию изолированного препятствия в виде тонкой пластины с вертикальными образующими (крыла). Если скорость натекающего потока соответствует фазовой скорости той или иной

нормальной моды волн Россби, то образуется стационарная цепочка волн с соответствующим индексом симметрии m (рис.6). Основная серия экспериментов была посвящена изучению процесса обтекания двух идентичных тонких пластинок, помещенных на некотором удалении друг от друга вдоль по потоку. Расстояние между пластинами характеризуется углом α между ними (см. рис.5). Поскольку исследование проводилось при фиксированном значении Ω , то количество волн в цепочке всецело зависело от двух параметров: угла между пластинками α и средней скорости натекающего потока U (рис.7).



Р и с 5. Схема эксперимента по возбуждению стационарных волн Россби изолированными препятствиями

Теория линейного резонанса.

С целью объяснения основных результатов эксперимента была предложена простая теория, в основе которой лежит уравнение трансформации квазигеострофического потенциала вихря - ср. (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - L_0^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \tilde{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\lambda \nabla^2 \psi - \frac{2\Omega}{H_0} I + F. \quad (7)$$

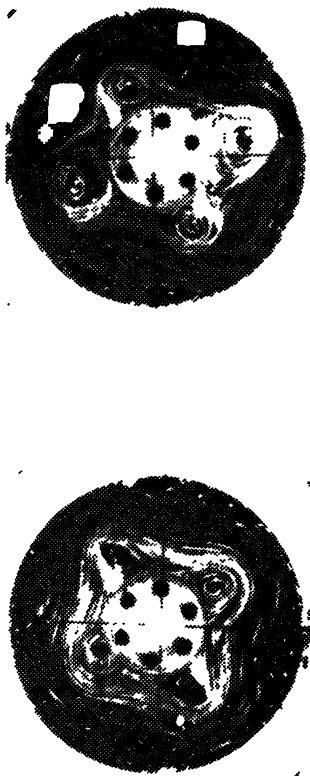
Выбрана цилиндрическая система координат: r - радиус, φ - азимут, $\tilde{\beta} = (2\Omega/H_0 r) (dH/dz)$, λ - коэффициент экмановского трения, равный $2\Omega \delta / H_0$, где $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$ - толщина экмановского пограничного слоя, $I(r)$ - азимутально однородные источники и стоки массы, формирующие основной поток, а функция

$$F = \alpha r \delta(\varphi) \delta(r-r_0) + \alpha_0 \delta(\varphi-\alpha) \delta(r-r_0),$$

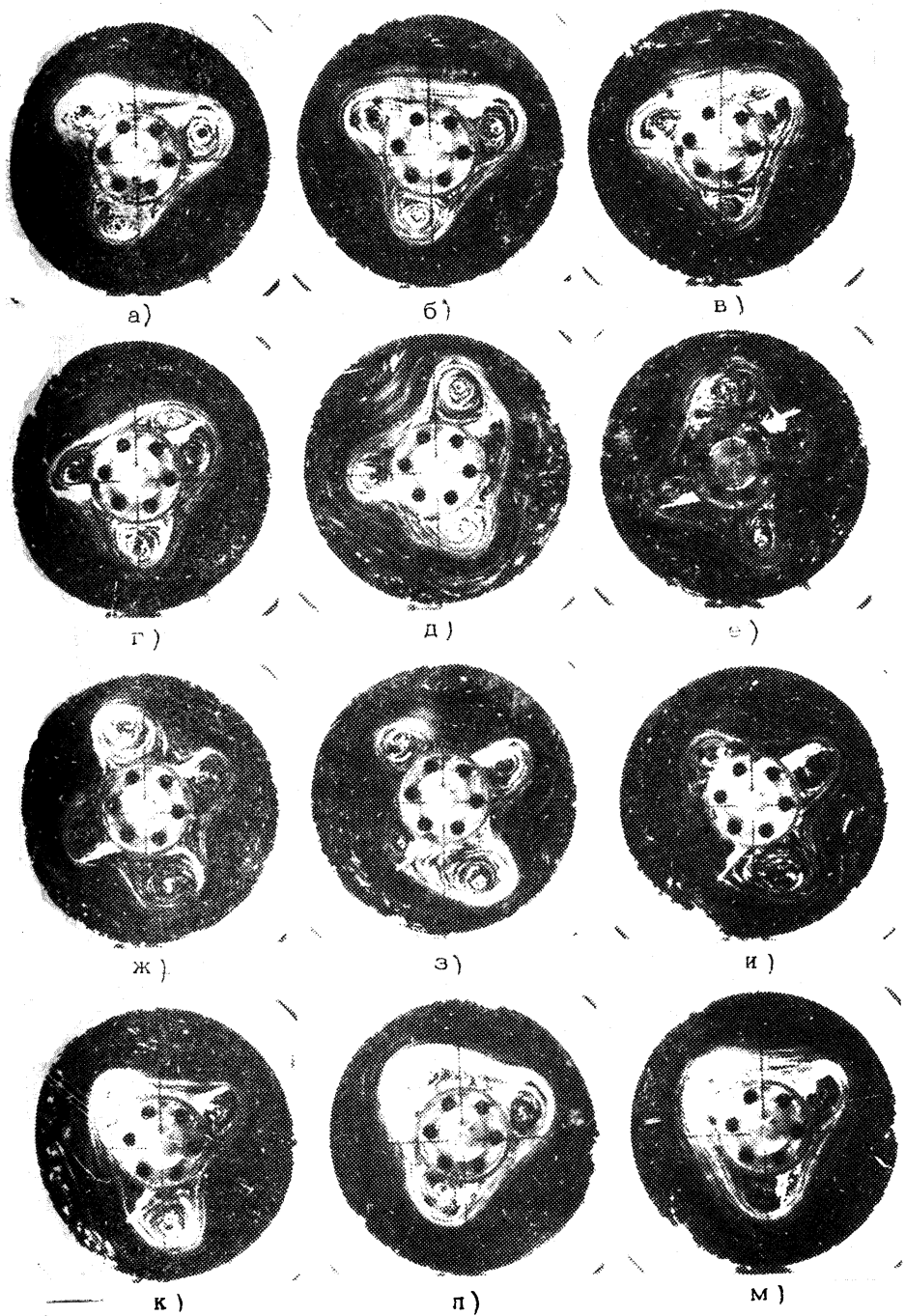
где $r_0 = (a+b)/2$, описывает эффект воздействия препятствий, взятых в форме пластинок, на натекающий поток. Предполагаем для простоты, что натекающий поток представляет собой твердое вращение с угловой скоростью ω . Отношение ω/Ω явля-



Р и с. 6. Картины обтекания одного препятствия при $\Omega = 6,0 \text{ с}^{-1}$ для различных значений расхода жидкости в насосе Q ($\text{г} \cdot \text{с}^{-1}$): а - 38, б - 35, в - 98



Р и с. 7. Картина обтекания двух препятствий при $\omega \approx 182^\circ$; $\Omega = 6,0 \text{ с}^{-1}$; а - $Q = 77$, б - $Q = 98$



Р и с. 8. Трансформация стационарной картины обтекания двух препятствий при изменении α от $113^{\circ} 20'$ до 238° с шагом $11^{\circ} 20'$

ется аналогом индекса циркуляции Россби-Блиновой в атмосфере. Полагая, что

$$\psi = \frac{1}{2} \omega r^2 + \psi', \quad F = \frac{\rho}{\beta} r \delta (r - r_0) + F',$$

после процедуры линеаризации уравнения (7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi' - L_0^{-2} \psi') + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi' + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi' = -\lambda \nabla^2 \psi' + F'.$$

Имеется стационарное решение этого уравнения ($\rho = r/b$)

$$\psi'(\rho, \varphi) = \sum_{m,n} C_{m,n} \sin(m\varphi - \varepsilon_{m,n}) Z_m(\mu_{m,n} \rho),$$

где $\mu_{m,n}$ - корни уравнения ($m, n = 1, 2, \dots$).

$$J_m(\eta \mu) Y_m(\eta \mu) - J_m(\eta \mu) Y_m(\mu) = 0, \quad \eta = \frac{\alpha}{\beta} < 1$$

и функции

$$Z_m(\mu_{m,n} \rho) = Y_m(\mu_{m,n}) J_m(\mu_{m,n} \rho) - J_m(\mu_{m,n}) Y_m(\mu_{m,n} \rho)$$

образуют полную систему функций, ортогональных на отрезке $[0, 1]$.

В этих формулах J_m и Y_m - функции Бесселя и Вебера соответственно. Амплитуды $C_{m,n}$ и фазовые сдвиги $\varepsilon_{m,n}$ относительно начала отсчета даются формулами, которые можно найти в работе [4].

Добиться резонансного возбуждения какой-либо нормальной моды Россби, отвечающей данной паре индексов (m, n), можно путем изменения как величины ω , так и подбора угла α (рис.8). Резонанс (максимум $C_{m,n}$) достигается при одновременном выполнении условий

$$\omega = \omega_{m,n},$$

$$m\alpha = 2\pi s, \quad s = 0, +1, +2, \quad (8)$$

Здесь $\omega_{m,n} = \tilde{\beta} b^2 / \mu_{m,n}^2$ - взятая с обратным знаком фазовая скорость нормальной моды Россби. Если же

$$m\alpha = (2s+1)\pi, \quad s = 0, +1, +2, \quad (9)$$

то вне зависимости от значений ω данная нормальная мода не возбуждается. В табл.1 представлены значения α , рассчитанные

Т а б л и ц а 1

m	2	3	4	5
α	$\pm 180^\circ$	$\pm 120^\circ$	$\pm 90^\circ, \pm 180^\circ$	$\pm 72^\circ, \pm 144^\circ$
	$\pm 90^\circ$	$\pm 60^\circ, \pm 180^\circ$	$\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$	$\pm 36^\circ, \pm 108^\circ, \pm 180^\circ$

танные для различных m на основании условий (8) (первая строка) и (9) (вторая строка). Табл.1, на наш взгляд, исчерпывающе объясняет основные результаты эксперимента, в частности тот факт, что при $\alpha \approx 180^\circ$ устойчивая четырехволновая картина наблюдается вплоть до самых больших значений ω , когда создаются благоприятные условия для резонансного возбуждения волны с $m=2$ (ср. рис.7). Из таблицы ясно также, почему при $\alpha \approx 72^\circ$ в эксперименте четко проявляется пятиволновая система.

Критерии подобия при моделировании волн Россби. Возникает вопрос, в какой мере используемая экспериментальная установка может служить аналогом земной атмосферы? Конкретно, соблюдаются ли при такого рода лабораторном моделировании необходимые критерии подобия? Ответ на эти вопросы постараемся дать с помощью табл.2, где в левой верхней части приведены числовые значения величин, характеризующих крупномасштабные процессы в атмосфере: U – скорость, L – горизонтальный масштаб, H_0 – высота однородной атмосферы (характерная толщина атмосферы), Ω – угловая скорость вращения Земли, ν – турбулентная вертикальная вязкость; справа вверху даны соответствующие цифры для вращающегося канала, причем здесь H_0 – средняя высота жидкости в канале, а ν – ее молекулярная вязкость, смысл всех остальных величин понятен. Внешним геометрическим масштабом в случае Земли является ее радиус R , в случае кольцевого канала – его ширина D . Приведенных данных в принципе достаточно для того, чтобы рассчитать значения основных безразмерных критериев задачи, которые вводятся из анализа размерностей и соображений удобства с учетом специфики задачи. Перечислим эти критерии:

- а) число Рейнольдса $Re = UL/\nu$, характеризующее отношение сил инерции к силам внутреннего трения (вязкости);
- б) число Кибеля–Россби $\epsilon = U/2\Omega L$, характеризующее отно-

	АТМОСФЕРА	КОЛЬЦЕВОЙ СОСУД
U	$10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$	$10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
L	10^6 м	10^{-1} м
H_0	10^4 м	10^{-1} м
2Ω	10^{-4} с^{-1}	1 с^{-1}
ν	$10 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	$10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$
$R(D)$	10^7 м	10^{-1} м
Re	10^6	10^3
ε	10^{-1}	10^{-1}
γ	10^{-1}	10^{-1}
E	10^{-3}	10^{-4}
δ	10^{-2}	10^0
$\hat{\beta}$	10^0	$10^0 \div 10^1$
Re^*	$10^0 \div 10^1$	10^1

шение сил инерции (произведение массы жидкой частицы на ее относительное ускорение) к силе Кориолиса;

в) число Экмана $E = \nu / \Omega H_0^2$, характеризующее отношение силы вязкости к силе Кориолиса;

г) параметр крупномасштабной сжимаемости $\gamma = (L/L_0)^2$, где $L_0 = (g H_0)^{1/2} / 2\Omega$ - масштаб Обухова-Россби; этот параметр характеризует степень двумерной сжимаемости - степень деформации свободной поверхности - жидкой пленки в поле силы Кориолиса для движений масштаба L ;

д) наконец, геометрический фактор $\delta = H_0/L$, характеризующий степень двумерности движения.

Однако этот набор критериев не учитывает наличия еще одного размерного параметра задачи — среднего градиента потенциального вихря β . В условиях земной атмосферы $\beta \sim 2\Omega/R$; в лабораторной установке $\beta \sim 2\Omega \operatorname{tg} \alpha / H_0$, где α — угол наклона дна в канале с учетом поправки на кривизну свободной поверхности при вращении. Естественно составить безразмерный параметр $\beta = \beta L^2 / U$, характеризующий отношение фазовых скоростей волн Россби к скорости жидких частиц. Внизу табл.2 приведены значения этих критериев для атмосферы (слева) и кольцевого канала (справа). Очевидно, что имеется подобие по всем критериям, за исключением числа Рейнольдса и геометрического фактора δ . Последнее на самом деле не страшно. Как показывает более тщательный анализ, с привлечением уравнений движения, критерием двумерности в поле силы Кориолиса является малость произведения $\delta \epsilon$, что, безусловно, имеет место и в природе, и в модели. Чуть сложнее дело обстоит с внутренним числом Рейнольдса. Здесь используем обычно предполагаемую автомодельность по числу Рейнольдса, которое весьма велико даже в условиях эксперимента (не говоря уже о природе) и исключаем поэтому внутреннее число Рейнольдса из определяющих критериев задачи. Однако вслед за работой [13] в качестве определяющего критерия задачи можно ввести число Рейнольдса по внешнему трению Re^* , характеризующее в данном случае отношение сил инерции к силе экмановского трения. Очевидно, что оно выражается через число Кибеля-Россби и число Экмана:

$$Re^* = \epsilon / E^{1/2}.$$

Из табл.2 видно, что по значениям Re^* атмосфера и модель сопоставимы, однако число Re^* можно считать большим лишь для кольцевого канала.

Полученные в работе результаты представляют интерес для решения проблемы предсказуемости и низкочастотной (характерные периоды ≈ 10 сут.) изменчивости атмосферных процессов, что, в свою очередь, тесно связано с теорией климата и задачами прогноза погоды.

Авторы благодарят А.М.Обухова за предложенную тему исследований и внимание к работе. Частично изложенные здесь результаты были получены совместно с Ф.В.Должанским и И.А.Писниченко, которым авторы выражают свою искреннюю признательность за полезное сотрудничество.

Л и т е р а т у р а

1. Hoskins B.J., McIntyre M.E., Robertson A.W. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 1985. V.111, N.470. P.877.
2. Holton J.R. An experimental study of forced barotropic Rossby waves // Geophys. Fluid Dyn. 1971. V.2, N.4. P.323.
3. Должанский Ф.В., Курганский М.В., Черноушко Ю.Л. Лабораторное и теоретическое исследование баротропных волн Россби во вращающемся кольцевом канале // Изв. АН СССР, ФАО. 1979. Т.15, №6. С.597.
4. Курганский М.В., Писниченко И.А., Черноушко Ю.Л. Лабораторное и теоретическое исследование стационарных волн Россби над изолированными препятствиями в кольцевом канале // Изв. АН СССР, ФАО. 1987. Т.23, №7. С.675.
5. Незлин М.В. Солитоны Россби // УФН. 1986. Т.150, №1. С.3.
6. Sommeria J., Meyers S.D., Swinney H.L. Laboratory model of a planetary eastward jet // Letters to Nature. 5 January 1989. V.337. P.58.
7. Черноушко Ю.Л. Экспериментальное исследование двумерных течений с горизонтальным сдвигом во вращающемся канале // Изв. АН СССР, ФАО. 1980. Т.16, №4. С.423.
8. Должанский Ф.В. О генерации вихревых возмущений на фоне двумерного течения со сдвигом, возбужденного в поле сил Кориолиса источниками и стоками массы // Изв. АН СССР, ФАО. 1981. Т.17, №6. С.563.
9. Li G.-Q., Kung R., Pfeffer R.L. Experimental study of baroclinic flows with and without two-wave bottom topography // Journ. Atm. Sci. 1986. V.43, N.22. P.2585.
10. Черноушко Ю.Л. Лабораторные эксперименты по моделированию баротропных волн Россби // Изв. АН СССР, ФАО. 1979. Т.15, №10. С.1084.
11. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1969.
12. Hide R., Mason P.J. Sloping convection in a rotating fluid // Adv. Phys. 1975. V.24, N.1. P.47.

13. Должанский Ф.В. О влиянии внешнего трения на устойчивость плоско-параллельных течений однородной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т.23, №4. С.348.

РЕЖИМЫ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Б. М. Бубнов, Г. С. Голицын

Изучение конвективных движений во вращающейся жидкости представляет большой интерес при рассмотрении многих астро- и геофизических задач, а также при анализе процессов, исследуемых в кристаллографии, металлургии, полупроводниковой промышленности и многих инженерных приложениях.

Регулярные исследования конвективных движений во вращающейся жидкости проводились с начала 50-х годов, хотя еще в начале века Джеффри [1] оценил стабилизирующее действие вращения на конвекцию. Для конвективных движений принципиально важным является взаимное расположение трех определяющих векторов: силы тяжести \vec{g} , градиента температуры ∇T и угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$. Самым простым случаем является сонаправленность этих векторов и неизменность в пространстве. Таким образом, рассмотрим плоский горизонтальный слой жидкости, вращающийся относительно оси вращения, перпендикулярной к границам слоя, нижняя из которых нагревается, а верхняя — охлаждается.

Основными внешними параметрами, которые определяют движения в плоском слое жидкости, являются числа Прандтля, Тейлора и Рэлея (определяемое по разности температур на границах слоя ΔT или по потоку тепла, проходящего через него):

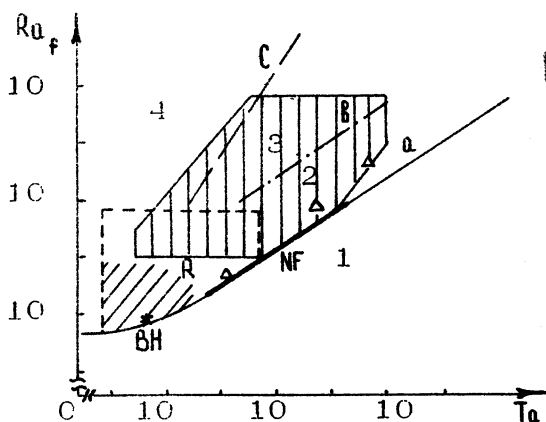
$$Pr = \nu \kappa^{-1}, \quad Ta = 4 \Omega^2 h^4 \nu^{-2}, \quad Ra = \alpha g \nabla T h^4 (\nu \kappa)^{-1}, \quad Ra_f = \alpha g f h^4 (\rho c_p \kappa^2 \nu)^{-1}$$

где α — коэффициент термического расширения; ν и κ — вязкость и температуропроводность жидкости; ρ — плотность; f — поток тепла, проходящий через слой толщиной h , вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω ; c_p — удельная

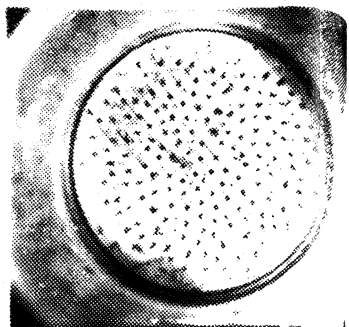
теплоемкость жидкости. Числа Ra_f и Ra связаны между собой через число Нуссельта - безразмерный поток тепла $Nu = Ra_f \cdot Ra^{-1}$.

Как известно, для невращающейся жидкости существует критическое число Рэлея, зависящее только от термических и динамических условий на границе слоя, начиная с которого развивается монотонная мода неустойчивости и возникают дивергенция в подогреваемом снизу слое. Для вращающегося слоя при числах Прандтля больше критического ($Pr_{кр} = 0,677$ для постоянной температуры на границах слоя со свободными поверхностями) также существует критическое число Рэлея, которое определяет развитие монотонной моды неустойчивости, причем это критическое число определяется однозначно, в зависимости от числа Тейлора. Если же число Прандтля меньше критического, то вначале в жидкости развивается колебательная неустойчивость, в этом случае критические кривые определяются числами Тейлора и Прандтля $Ra_{кр} = Ra(Ta, Pr)$ [2, 3]. Подробный обзор работ по возникновению конвективных движений и поведению жидкости при небольших числах Рэлея можно найти в работе [4]. Одним из основных результатов [2, 3] явилось изучение критических кривых конвекции при больших числах Тейлора и Рэлея. Было показано, что для критических кривых существует асимптотическое решение $Ra_{кр} \propto Ta^{2/3}$, причем начиная с чисел Рэлея больших 10^6 отличие критических значений от асимптотических составляет несколько процентов. Для невращающейся жидкости такое значение числа Рэлея определяет переход к турбулентной конвекции в жидкости, к режиму, в котором отсутствуют регулярные или квазирегулярные структуры. Можно предположить, что и для вращающейся жидкости рубеж $Ra > 10^6$ является принципиально важным, при этих значениях числа Рэлея конвективные движения не зависят от движений, возникающих в невращающейся системе; экспериментальные исследования [5] подтверждают это предположение.

Предлагается следующая классификация режимов для конвекции при числах Рэлея больших 10^6 (рис. 1): 1) отсутствует конвекция, все тепло передается только за счет теплопроводности (при числах Прандтля меньше критических в этой области может развиваться колебательная неустойчивость); 2) режим регулярных вихревых структур; 3) нерегулярный геострофический режим; 4) нерегулярный турбулентный режим. Здесь же на рис. 1 указаны области параметров, исследуе-



Р и с. 1



Р и с. 2

мые различными авторами: R – эксперименты [5], в которых был детально промерен поток тепла и при не очень больших числах Рэлея (штриховка внизу области R) измерен характерный масштаб конвективных движений, NF – граница перехода от режима 1 к режиму 2, треугольники – значения, при которых определялся характерный масштаб движения, BH – точка из работы [6]. Вертикальная штриховка – эксперименты [7 – 9].

Перейдем к краткому описанию режимов и границ переход между ними. Возникновение конвекции теоретически было рассмотрено в работах [2, 3], первые эксперименты – [3], где было показано, что конвективные движения при малых надкритических значениях числа Рэлея образуют регулярную структуру. Подробно эти регулярные структуры были исследованы в работах [7 – 9], где показано, что возникают такие структуры в результате неустойчивости кольцевой конвективной картины, которая возникает в процессе раскрутки жидкости. Структура состоит из интенсивных вихрей-стоков (рис. 2), жидкость в которых опускается по центру вихря с холодной поверхности и поднимается по цилиндрической поверхности C нагреваемой теплой границы. Вихри-стоки располагаются в вершинах правильных треугольников и образуют гексагональную структуру. Характерный масштаб движений при небольших надкритических числах Рэлея соответствует линейной теории [2, 3] и выражается $d \propto h \cdot \text{Ta}^{-1/6}$, где d – расстояние между вихрями. При отходе от критической кривой Ω на дис

грамме рис. 1 возникает дополнительная зависимость характерного масштаба конвекции от потока тепла, проходящего через жидкость, и выражение d/h может быть представлено в виде [7]

$$d/h = 5,1 \cdot Ra_f^{-1/12} \cdot Ta^{-1/4}$$

Граница перехода между областями 1 и 2 (см. рис. 1) подробно исследована в работах [2, 3, 10], где теоретически показано, что критические числа Рэлея в зависимости от тепловых условий на границе слоя могут изменяться более чем в три раза. Следует также отметить интересную закономерность для критических кривых возникновения конвекции: при постоянной температуре на границах слоя при малых числах Тейлора конвективные движения возникают раньше на слое со свободными границами по сравнению с твердыми, а при больших числах Тейлора картина меняется, и за счёт действия экмановских пограничных слоев более неустойчивыми становятся твердые границы. Одновременно возникает конвекция на свободных и на твердых граничных условиях при числах Рэлея равных числам Тейлора с точностью до 2 %.

При уменьшении числа Тейлора при неизменном числе Рэлея в регулярной вихревой решетке возникает взаимодействие между отдельными парами вихрей, которое приводит к разрушению устойчивой структуры, и образуются нерегулярные режимы - геострофический и турбулентный. Граница перехода между регулярным режимом и нерегулярным определялась экспериментально [7], и она может быть представлена в виде [11]

$$Ra_f = C_1 \cdot Ta^{2/3} \cdot Pr^{-4}$$

где $C_1 = 2,62 \cdot 10^5$ и коэффициент корреляции $r^2 = 0,953$ по 20 парам точек.

Теоретические основы для деления нерегулярных областей на геострофическую и турбулентную были предложены в работах [12, 13], где из соображений размерности и подобия было показано, что при нерегулярной конвекции условие геострофичности приводит к оценке масштаба скорости при малом числе Кибеля - Россби

$$U = C_2 (\alpha q_f / 2 \Omega \rho c_p) \quad (1)$$

Это выражение может быть подставлено в условие малости числа Кибеля - Россби, которое переписывается в виде

$$Ra = U (2\Omega h)^{-1} \ll 1, \quad Ra_f \ll Pr^2 \cdot Ta^{3/2}. \quad (2)$$

Выражение (2) может определять границу между режимами 3 и 4, которая соответствует разделению областей с различным влиянием вращения; в области 3 движение определяется геострофическим балансом, а в области 4 вращение практически не влияет на конвекцию. Логичность такого деления областей становится понятной при рассмотрении полей скоростей и температуры в режимах 3 и 4.

Если в области регулярных структур средняя температура внутри слоя жидкости линейно уменьшается с высотой, то для нерегулярных областей, за исключением пограничных слоев, температура постоянна внутри слоя. Для изучения поля температуры в этом случае следует рассматривать пульсации температуры. Для невращающейся жидкости в работах [14, 15] было показано, что существует наиболее вероятная частота пульсаций температуры τ_v , которая может быть представлена через внешние параметры системы:

$$\tau_v = 12,4 \cdot Ra_f^{-1/2}. \quad (3)$$

В работе [16] при использовании соотношения (3) были построены координаты, в которых спектр пульсаций температуры имеет универсальный вид, отличительной особенностью которого является отсутствие степенных зависимостей спектральной плотности S_T от частоты ω .

Такой спектр пульсаций температуры для невращающейся жидкости представлен на рис. 3 кривой 1. При малых скоростях вращения этот спектр не изменяется, при подходе к границе перехода между областями 3 и 4 (см. рис. 1) происходит смещение спектра влево, в область низких частот, при этом форма спектра не изменяется. При заходе в область 3 геострофической нерегулярной конвекции сдвиг спектра прекращается и для всех 26 точек из области 3 существует один спектр (кривая 2 на рис. 3).

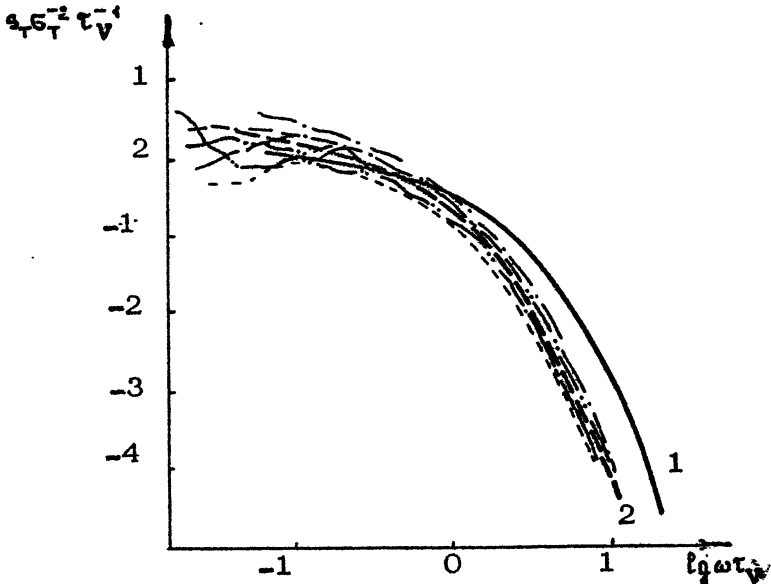
Отличительной особенностью спектров нерегулярных режимов является неизменность их формы при переходе области 3 в область 4, а также то, что все статистические характеристики могут быть выражены через внешние параметры. Выражение для τ_v представлено формулой (3); для области геострофической нерегулярной конвекции оно отличается в $3,0 \pm \pm 0,4$ раза. Для дисперсии пульсаций температуры можно получить выражение в виде

$$\epsilon_T = C_3 (f/\rho c_p)^{2/3} (\alpha g h)^{-1/3}$$

для области 4. Это выражение может быть переписано согласно [16]

$$\epsilon_T / \Delta T = C_3 Nu (Nu \cdot Ra \cdot Pr)^{-1/3}$$

где $C_3 = 0,98$. Коэффициент C_3 может изменяться в зависимости от того, в каком месте жидкости измеряется температура, так как зависимость ϵ_T от z достаточно сложная, хотя внутри основного ядра жидкости ϵ_T меняется слабо.



Р и с. 3

Для области геострофической нерегулярной конвекции выражение для ϵ_T может быть получено из выражения для турбулентного ветра, которое, учитывая (1), может быть записано в виде [12]

$$\epsilon_T = C_4 \cdot Q_f / \alpha g \rho c_p$$

Обработка всех 26 спектров из области 3 дает $r^2 = 0,96$ при $C_4 = 0,42$. Таким образом, с точки зрения пульсаций температуры деление областей можно проводить по асимптотическим положениям спектра пульсаций температуры, для обла-

стей 3 и 4 существуют универсальные спектры, положение которых не изменяется, если мы не переходим границы областей.

Аналогичное деление можно провести и для скоростей. Результаты измерения скоростей в горизонтальной плоскости при вращении описаны в работе [9]. Согласно (1) число Пекле может быть представлено в виде

$$Pe = U h k^{-1} = C_5 \cdot Ra_f^{1/2} Ta^{-1/4}$$

Для области 3 набралось 15 измерений значений горизонтальной скорости U . Корреляция этих значений с $Ra_f^{1/2} Ta^{-1/4}$ оказалась высокой: $r^2 = 0,984$ при $C_5 = 1,7$.

Отметим, что такое же деление по термическим и скоростным характеристикам наблюдается и для областей 2 и 3, т. е. регулярная конвективная структура обладает четко выделенными термическими и скоростными характеристиками. Так, наличие определенного вертикального градиента температуры внутри слоя в режиме регулярной решетки приводит к теплопередаче, определяемой числом Нуссельта

$$Nu \propto Ra^3 Ta^2;$$

тогда изолинии числа Нуссельта параллельны критической кривой возникновения конвекции, что подтверждается экспериментальными исследованиями, проведенными в работе [5].

Для скоростных характеристик в регулярной структуре интересно отметить тот факт, что вертикальная скорость W внутри вихря-стока не зависит от скорости вращения системы Ω и определяется выражением эквивалентным с выражением для средней скорости конвективных движений в невращающейся жидкости в турбулентном режиме

$$Re_W = W h \nu^{-1} = A \cdot \rho \tau^{2/3} Ra_f^{1/3}$$

с достаточно близкими коэффициентами $A = 0,80 \div 0,73$.

Проведенные исследования конвективных движений в плоском вращающемся слое жидкости показывают, с одной стороны, многообразие и сложность режимов движений, а с другой стороны — наличие при больших числах Рэлея областей, в которых удается получить достаточно простые закономерности для большинства определяющих параметров движения и структуры.

1. Jeffreys H. Some cases of instability in fluid motion // Proc. Roy. Soc. London. 1928. A.v.118, N.2. P. 195.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon: Oxford Univ. Press. 1961.
3. Nakagawa Y., Frenzen R. A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids // Tellus. 1955. V.7. P.1.
4. Язорская И.М., Беляев Ю.Н. Конвективные движения во вращающихся слоях // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1982. Т. 17. С. 1.
5. Rossby H.T. A study of Benard convection with and without rotation // J. Fluid Mech. 1968. V.36, N.2. P.309.
6. Busse F.H., Hikes K.E. Convection in a rotating layer: a simple case of turbulence // Science. 1980. V.208, N.444. P.173.
7. Boubnov B.M., Golitsyn G.S. Experimental study of convective structures in rotating fluids // J. Fluid Mech. 1986. V.167. P.503.
8. Бубнов Б.М. Термическая структура вихревых конвективных решеток // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 160.
9. Бубнов Б.М. Скорости и структура конвективных движений в плоском вращающемся слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 165.
10. Бубнов Б.М., Сенаторский А.О. Влияние граничных условий на конвективную устойчивость вращающегося горизонтального слоя жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 124.
11. Бубнов Б.М., Голицын Г.С. Классификация и некоторые количественные характеристики режимов конвекции горизонтального вращающегося слоя жидкости // ДАН СССР. 1990. В печати.
12. Голицын Г.С. Геострофическая конвекция // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 6. С. 1356.
13. Голицын Г.С. Структура конвекции при быстром вращении // ДАН СССР. 1981. Т. 261, № 2. С. 317.
14. Гизбург А.И., Голицын Г.С., Федоров К.Н. Измерения временного масштаба: конвекции жидкости при ее остыва-

нии с поверхности // Изв. АН СССР. ФАО. 1979.

Т. 15, № 3. С. 333.

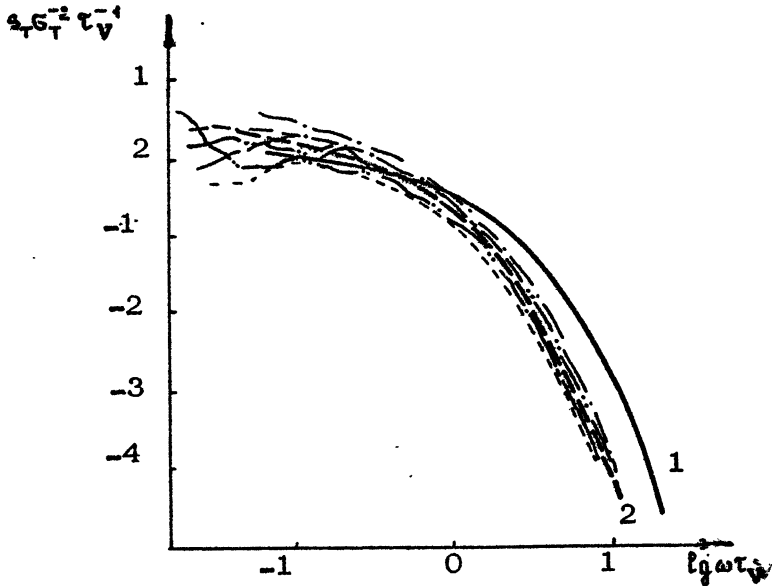
15. Foster T.D. The effect of initial conditions and lateral boundaries on convection // J. Fluid Mech. 1969. V.37. Part 1. P.81.
16. Бубнов Б.М., Иванов В.Н. Спектр пульсаций температуры в свободной турбулентной конвекции в слое жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24, № 5. С. 490.

$$\epsilon_T = C_3 (f/\rho c_p)^{2/3} (\alpha g h)^{-1/3}$$

для области 4. Это выражение может быть переписано согласно [16]

$$\epsilon_T / \Delta T = C_3 Nu (Nu \cdot Ra \cdot Pr)^{-1/3},$$

где $C_3 = 0,98$. Коэффициент C_3 может изменяться в зависимости от того, в каком месте жидкости измеряется температура, так как зависимость ϵ_T от z достаточно сложная, хотя внутри основного ядра жидкости ϵ_T меняется слабо.



Р и с. 3

Для области геострофической нерегулярной конвекции выражение для ϵ_T может быть получено из выражения для турбулентного ветра, которое, учитывая (1), может быть записано в виде [12]

$$\epsilon_T = C_4 \cdot \Phi_f / \alpha g \rho c_p.$$

Обработка всех 26 спектров из области 3 дает $\eta^2 = 0,96$ при $C_4 = 0,42$. Таким образом, с точки зрения пульсаций температуры деление областей можно проводить по асимптотическим положениям спектра пульсаций температуры, для обла-

стей 3 и 4. существуют универсальные спектры, положение которых не изменяется, если мы не переходим границы областей.

Аналогичное деление можно провести и для скоростей. Результаты измерения скоростей в горизонтальной плоскости при вращении описаны в работе [9]. Согласно (1) число Пекле может быть представлено в виде

$$Pe = U h \kappa^{-1} = C_5 \cdot Ra_f^{1/2} Ta^{-1/4}$$

Для области 3 набралось 15 измерений значений горизонтальной скорости U . Корреляция этих значений с $Ra_f^{1/2} Ta^{-1/4}$ оказалась высокой: $r^2 = 0,984$ при $C_5 = 1,7$.

Отметим, что такое же деление по термическим и скоростным характеристикам наблюдается и для областей 2 и 3, т. е. регулярная конвективная структура обладает четко выделенными термическими и скоростными характеристиками. Так, наличие определенного вертикального градиента температуры внутри слоя в режиме регулярной решетки приводит к теплопередаче, определяемой числом Нуссельта

$$Nu \propto Ra^3 Ta^2;$$

тогда изолинии числа Нуссельта параллельны критической кривой возникновения конвекции, что подтверждается экспериментальными исследованиями, проведенными в работе [5].

Для скоростных характеристик в регулярной структуре интересно отметить тот факт, что вертикальная скорость W внутри вихря-стока не зависит от скорости вращения системы Ω и определяется выражением эквивалентным с выражением для средней скорости конвективных движений в невращающейся жидкости в турбулентном режиме

$$Re_W = W h \nu^{-1} = A \cdot Pr^{2/3} Ra_f^{1/3}$$

с достаточно близкими коэффициентами $A = 0,80 \div 0,73$.

Проведенные исследования конвективных движений в плоском вращающемся слое жидкости показывают, с одной стороны, многообразие и сложность режимов движений, а с другой стороны — наличие при больших числах Рэлея областей, в которых удается получить достаточно простые закономерности для большинства определяющих параметров движения и структуры.

1. Jeffreys H. Some cases of instability in fluid motion // Proc. Roy. Soc. London. 1928. A.v.118, N.2. P. 195.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon: Oxford Univ. Press. 1961.
3. Nakagawa Y., Frenzen R. A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids // Tellus. 1955. V.7. P.1.
4. Яворская И.М., Беляев Ю.Н. Конвективные движения во вращающихся слоях // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1982. Т. 17. С. 1.
5. Rossby H.T. A study of Benard convection with and without rotation // J. Fluid Mech. 1968. V.36, N.2. P.309.
6. Busse F.H., Hikes K.E. Convection in a rotating layer: a simple case of turbulence // Science. 1980. V.208, N.444. P.173.
7. Boubnov B.M., Golitsyn G.S. Experimental study of convective structures in rotating fluids // J. Fluid Mech. 1986. V.167. P.503.
8. Бубнов Б.М. Термическая структура вихревых конвективных решеток // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 160.
9. Бубнов Б.М. Скорости и структура конвективных движений в плоском вращающемся слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 165.
10. Бубнов Б.М., Сенаторский А.О. Влияние граничных условий на конвективную устойчивость вращающегося горизонтального слоя жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 124.
11. Бубнов Б.М., Голицын Г.С. Классификация и некоторые количественные характеристики режимов конвекции горизонтального вращающегося слоя жидкости // ДАН СССР. 1990. В печати.
12. Голицын Г.С. Геострофическая конвекция // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 6. С. 1356.
13. Голицын Г.С. Структура конвекции при быстром вращении // ДАН СССР. 1981. Т. 261, № 2. С. 317.
14. Гинзбург А.И., Голицын Г.С., Федоров К.Н. Измерения временного масштаба: конвекции жидкости при ее остыва-

нии с поверхности // Изв. АН СССР. ФАО. 1979.
Т. 15, № 3, С. 333.

15. Foster T.D. The effect of initial conditions and lateral boundaries on convection // J. Fluid Mech. 1969. V.37. Part 1. P.81.
16. Бубнов Б.М., Иванов В.Н. Спектр пульсаций температуры в свободной турбулентной конвекции в слое жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24, № 5. С. 490.

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ВИХРЯМИ: ЛАБОРАТОРНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

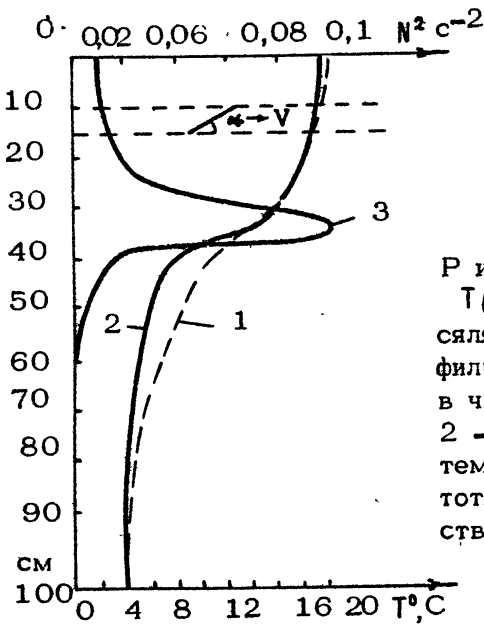
С.А. Баранов, А.В. Иванов, В.И. Казаков

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные аспекты генерации внутренних волн (ВВ) вихревыми источниками изучались как теоретически, так и экспериментально [1-3]. Данная работа посвящена исследованию ВВ, возбуждаемых в стратифицированной жидкости вихревыми парами (ВП), движущимися в вертикальном направлении с равновесного горизонта. Такие вихри могут создаваться при горизонтальном и равномерном движении прямоугольной пластины под углом атаки [4-5]. Силы плавучести стремятся вернуть ВП на равновесный горизонт и обуславливают осциллирующий режим движения завихренной области с частотой, соответствующей распространяющимся внутренним волнам. Подобный характер возмущений наиболее интересен с точки зрения генерации волн. Быстрое движение пластины обеспечивает практически двумерную структуру возмущений, а следовательно и внутренних волн. Наибольший интерес в этом случае представляет генерация слабодиспергирующих волн, амплитуда которых убывает лишь вследствие вязкости. В частности, при неглубоком залегании термоклина естественно считать, что для размеров завихренной области порядка толщины верхнего перемешанного слоя энергонесущие ВВ будут длинными и слабодиспергирующими. Ниже пойдет речь о генерации именно таких волн.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Эксперименты выполнялись в термостратифицированном бассейне (ТСБ), созданном в ИПФ АН СССР [6]. Размеры бассейна составляют 500x160x120 см. Стратификация, моделирующая верхний слой океана, создавалась за счет неоднородного нагрева боковых стенок. Возмущения генерировались тонкой прямоугольной пластиной с размерами 20x20 см, движущейся равномерно на глубине 15 см в горизонтальном направлении под положительным углом атаки. Невозмущенные профили температуры $T(y)$ и частоты Вайсяля-Брента $N^2(y)$, а также относительное положение пластины представлены на рис.1. Скорость движения пластины составляла 35 см и являлась максимальной для данной экспериментальной установки.



Р и с. 1. Профиль температуры $T(y)$ и квадрата частоты Вайсяля-Брента $N^2(y)$. 1 - профиль температуры, полученный в численных расчетах [11], 2 - экспериментальный профиль температуры, 3 - профиль частоты Вайсяля-Брента, соответствующий профилю температуры

Слой, в котором двигалась пластина, отличается более слабым градиентом температуры по сравнению со слоем скачка. Число Фруда F_{r_n} , характеризующее движение пластины, имеет порядок $10^2 - 10^3$, где $F_{r_n} = V/N_n \cdot b \cdot \sin \alpha$, b - хорда пластины, N_n - частота Вайсяля-Брента на горизонте протяжки. В таких условиях естественно считать, что влияние стратификации на формирование вихрей было пренебрежимо малым, а ВП по структуре и интенсивности близки к тем, которые создаются

тонкой пластиной в однородной жидкости. В этом случае коэффициент подъемной силы равен $C_y = 2 \cdot \pi \cdot \alpha$, а циркуляция $\Gamma = C_y \cdot V \cdot b / 2$ [7]. Углы атаки α менялись от 0° до 18° . Создаваемые ВП двигались вертикально вниз со скоростью $U_0 = \Gamma / 4 \cdot \pi \cdot s$, где s - полурасстояние между центрами вихрей [8]. Число Фруда Fr , характеризующее их движение, составляет $Fr = 2 \cdot U_0 / (\pi \cdot N_c) = 0,12$, где N_c - средняя частота Вайсяля-Брента в слое движения ВП. Число Рейнольдса $Re = D \cdot U_0 / \nu$, характеризующее движение ВП сразу после старта, в экспериментах менялось от 700 до 3000. Здесь D - диаметр ВП, ν - коэффициент кинематической вязкости.

Измерения волн осуществлялись точечными датчиками температуры, расположенными в 40 см от оси протяжки на различной глубине в термоклине. Результаты измерений вводились в ЭВМ.

Численное моделирование динамики ВП выполнялось на основе уравнений Навье-Стокса и теплопроводности для прямоугольного бассейна с продольным сечением 500×120 см. Расчет проводился для половины сечения бассейна. Конечно-разностная сетка содержала 129×48 узлов и выбиралась неравномерной в вертикальном направлении. Это позволило применить метод циклической редукции, эффективный для решения уравнения Пуассона на каждом временном слое, дающий существенный выигрыш во времени по сравнению с итерационными методами [9]. ВП в численном расчете моделировалась следующим образом. На фоне установившейся стратификации в прямоугольнике заданных размеров задавалось распределение завихренности, соответствующее вихревой паре с центрами вихрей на глубине 20 см и расстоянием между центрами ядер $2s = 20$ см. Ось ВП направлена поперек бассейна и расположена в 250 см от торцевых стенок. Изменение температуры фиксировалось в точках на уровне термоклина, расположенных на расстоянии 40 см от боковой стенки. Фиксировались также расстояния между вихрями и их вертикальная координата. Результаты представлены в виде изолиний температуры и завихренности в фиксированные моменты времени, а также в виде зависимостей амплитуды возмущений от времени. Расчеты были выполнены для различных значений начальной скорости ВП $U_0 = 5; 10; 15; 20$ см/с.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ЗАВИХРЕННОЙ ОБЛАСТИ

Исследования показали, что в эволюции завихренной области можно выделить три стадии: торможение, возвратное движение и коллапс.

Стадия торможения ВП силами плавучести изучалась ранее как теоретически, так и экспериментально [3,5,10-12]. На этой стадии ВП движется с сохранением внутренней регулярной структуры. Изменение скорости жидкости, переносимой вихрями, происходит в результате действия сил плавучести, стремящихся вернуть ВП на равновесный горизонт. На границе переносимой вихрями жидкости изопикны не совпадают с изобарами, что ведет к генерации вихревой пелены и деформации этой области в соответствии с уравнением для изменения завихренности:

$$d\omega/dt = [\nabla\rho \cdot \nabla(1/\rho)], \quad (1)$$

где ω — завихренность, ρ — давление, ρ — плотность жидкости. Действие вихревой пелены на пару точечных вихрей (вихрь Ламба) исследовалось в работах Сэффмена и Хилла [3,13]. Сэффмен предположил, что форма переносимой вихрями жидкости сохраняется такой же, какой она была на равновесном горизонте в отсутствие стратификации, а вихревая пелена, генерируемая на границе вихря Ламба, тормозит его, не меняя расстояния между точечными вихрями. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, если распределение в вихревой пелене симметрично относительно горизонтальной оси вихря Ламба. Движение вихря Ламба в таком приближении описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} d[(c\rho_0 + \rho_1)U]/dt &= (\rho_0 - \rho_1) \cdot g, \\ dy/dt &= U, \end{aligned} \quad (2)$$

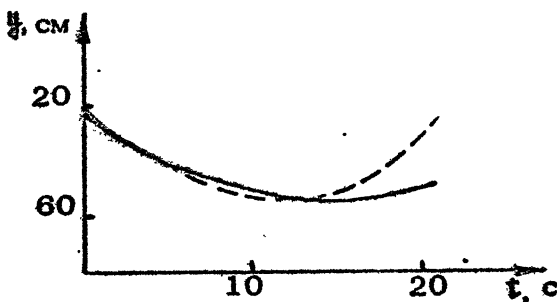
где U — скорость вертикального движения ВП, c — коэффициент присоединенной массы (для вихря Ламба $c=1,22$), $\rho_0(y)$ — плотность окружающей вихрь Ламба жидкости, ρ_1 — плотность переносимой вихрями жидкости, g — ускорение свободного падения. В линейно стратифицированной среде уравнения (2) описывают линейный осциллятор, период колебаний которого определяется градиентом плотности среды и не зависит от начальной скорости ВП U_0 . Численные исследования Хилла [13] показали, какую важную роль могут играть эффекты сноса завихренности в пелене, возникающие в соответствии с уравнением (1). Завихренность концентрируется

в хвостовой части ВП и создает поле скоростей, сближающее первоначальные вихри. Сближение вихрей, в свою очередь, приводит к увеличению скорости, создаваемой каждым вихрем в области, занятой другим вихрем. Результирующее поле скорости, создаваемое первоначальными вихрями и вихревой пеленой, может привести к увеличению глубины опускания ВП, а при достаточно больших числах Фруда — к инфинитному движению.

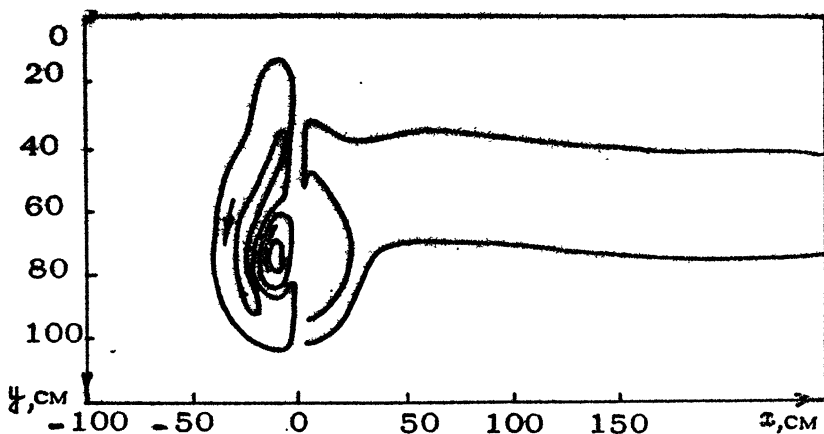
Вязкие эффекты, не учтенные в работах Сэффмена и Уилла, вызывают диффузию завихренности, которая может привести к вовлечению окружающей жидкости или к выбросу жидкости из рециркуляционной зоны в след. Эксперименты и численные расчеты, выполненные для вязкой линейно стратифицированной среды, показали, что, по крайней мере, при числах Фруда $Fr < 10$ и при числах Рейнольдса $Re < 10^3$ диффузия завихренности в вихревой пелене существенна, и ускоренного движения ВП не наблюдается [11-12].

Время движения ВП до остановки и максимальная глубина погружения в численных расчетах и в экспериментах превосходят на 20-40% соответствующие значения, предсказанные моделью Сэффмена.

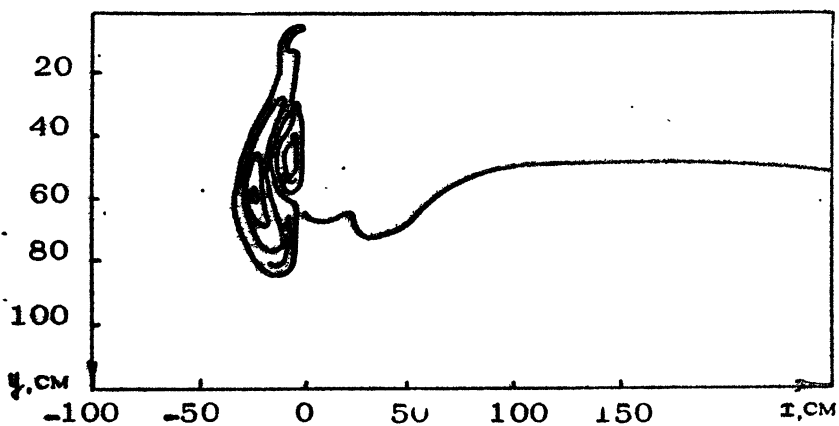
Выполненные в данной работе численные расчеты для стратификации, представленной на рис.1, качественно совпадают с результатами исследований ВП в линейно стратифицированной жидкости, опубликованными ранее [4,11-12]. В частности, на стадии торможения расстояние между вихрями несколько уменьшается. На рис.2 построено изменение вертикальной координаты центра вихрей в зависимости от времени. Здесь же представлена траектория вихря Ла́мба, рассчитанная



Р и с. 2. Зависимость вертикальной координаты центра ВП от времени для $U_0 = 5$ см/с; — — — расчет численным методом; - - - - - расчет динамики вихря Ламба на основе уравнений (2)



Р и с. 3. Изолинии функций тока (левая половина рисунка), и изолинии температуры (правая) в момент остановки ВП



Р и с. 4. Изолинии функций тока (левая половина рисунка) и изолинии температуры (правая) на стадии возвратного движения

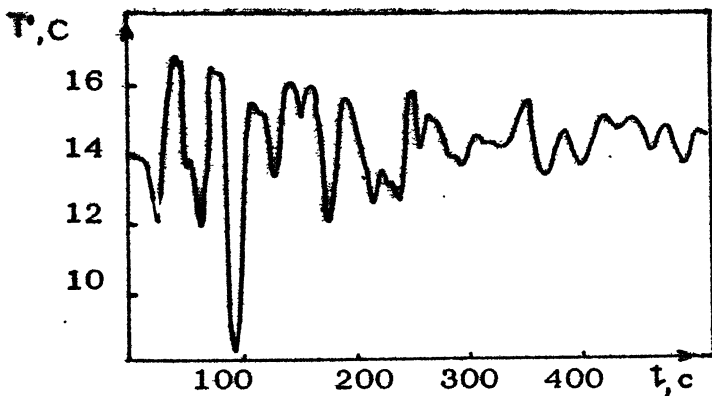
на основе уравнений (2) для тех же условий. Отличие в глубине и времени опускания ВП в исследованном диапазоне начальных скоростей и U_0 составляет не более 20%. Изолинии функций тока и изотермы в момент остановки ВП представлены на рис.3, из которого видно, что диффузия ослабляет эффекты сноса завихренности в хвостовую часть ВП по сравнению с невязкой моделью [13].

На стадии возвратного движения генерация вихревой пелены продолжается и ее влияние становится доминирующим, что ведет к интенсивному вовлечению окружающей жидкости в переносимую вихрями жидкость и к изменению ее средней плотности. На рис. 4 представлены изолинии функции тока и изотермы на стадии возвратного движения, рассчитанные для $t=28$ с. Дальнейшее движение завихренной области ведет к ее попаданию в более легкие слои, где она замедляется и останавливается. Однако из-за вовлечения остановка завихренной области наступает раньше и на большей глубине, чем в отсутствие вовлечения. Регулярная вихревая структура на стадии возвратного движения еще более ослабляется, и в динамике жидкости все большую роль начинает играть распределенная в пространстве завихренность. Какие-либо модели, описывающие динамику завихренной области на стадии возвратного движения, отсутствуют. В представленных в данной работе численных расчетах во всем диапазоне исследованных начальных скоростей ВП продолжительность стадии возвратного движения примерно равна продолжительности стадии торможения.

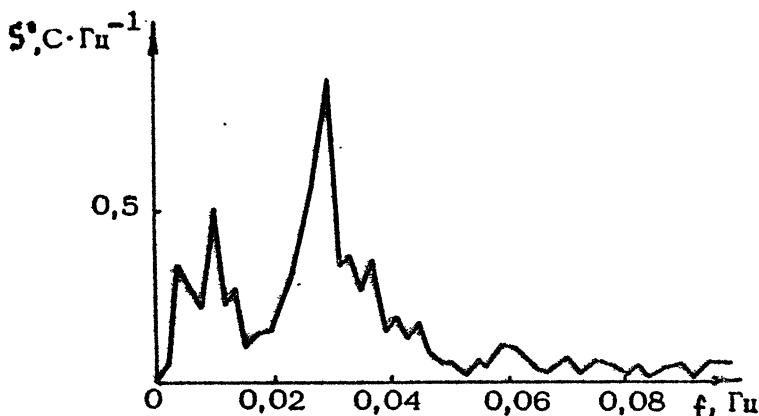
Следующая стадия эволюции завихренной области - стадия коллапса - начинается после разрушения регулярной вихревой структуры. На этой стадии в вертикальном движении участвует вся коллапсирующая область как единое целое. Такой характер движения существенно влияет на структуру генерируемых ВВ.

4. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ

Результаты экспериментов и численных исследований показали, что эволюция ВП приводит к генерации интенсивных ВВ. Характерный вид возмущений температуры в термоклине на удалении 40 см от оси протяжки представлен на рис. 5. Максимальный размах возмущений температуры достигает 9°C , причем наиболее энергонесущими являются колебания с периодом T_0 около 40 с. Соответственно спектр колебаний, представленный на рис. 6, имеет максимум при $f=1/T_0$. Аналогичные зависимости были получены во всем исследованном диапазоне начальных скоростей вихревой пары U_0 . Изменение температуры в фиксированной точке на расстоянии 100 см от оси ВП было рассчитано численно. На рис. 7 изображены возмущения температуры при начальной скорости $U_0=10$ см/с. Сравнение численных и экспериментальных результатов показало, что



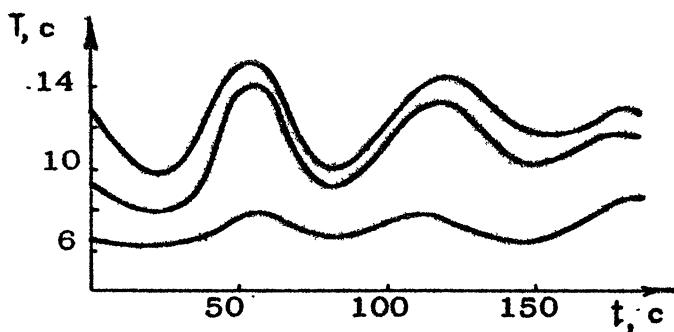
Р и с. 5. Реализация колебаний температуры в термоклине на расстоянии 40 см от оси протяжки



Р и с. 6. Спектр температурных возмущений, представленных на рис.5

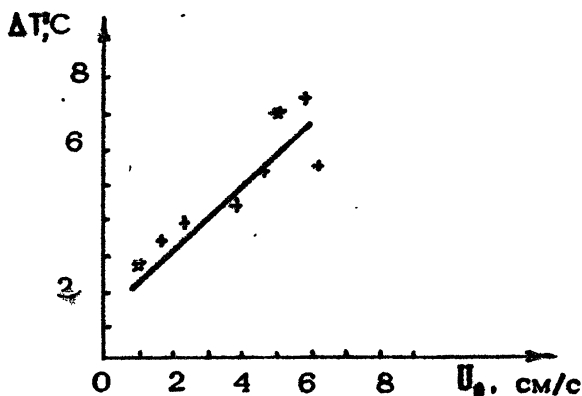
наблюдаемые в эксперименте возмущения имеют меньшие амплитуды и периоды колебаний, чем в расчетах. На рис.8 представлены полученные экспериментально и численно данные по максимальному перепаду возмущений температуры в термоклине ΔT . Это отличие может быть объяснено несовпадением расчетной стратификации от экспериментальной, как видно из рис.1.

Движение B_1 в стратифицированной жидкости носит характер сильно затухающих колебаний, сопровождающихся разрушением регулярной вихревой структуры. При этом период



Р и с. 7. Возмущения температуры в точке $x = 100$ см по данным численных расчетов для скорости $U_0 = 10$ см/с

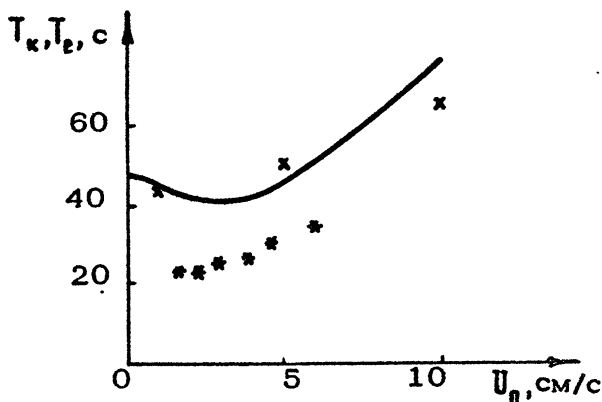
колебаний близок к периоду колебаний ВП T_k в модели Сэффмена [2]. Наибольший интерес представляет связь параметров генерируемых волн с параметрами ВП. Как следует из уравнений (2), в неэкспоненциально стратифицированной среде период колебаний T_k зависит от начальной скорости ВП U_0 .



Р и с. 8. Зависимость максимального перепада возмущений температуры ΔT от начальной скорости ВП U_0 ; * * * - экспериментальные данные, — - линейная аппроксимация экспериментальных результатов; + + + - численные данные

Колебательный характер движения ВП приводит, как показали численные эксперименты, к появлению в спектре ВВ соответствующих компонентов. Зависимости периода энергонесущих

внутренних волн $T_e(U_0)$ и периода колебаний вихря Ламба $T_k(U_0)$ представлены на рис. 9. В качестве T_k взято учетверенное время опускания ВП: $T_k = 4 \cdot T_{м}$. Сходство зависимостей $T_e(U_0)$ и $T_k(U_0)$ говорит о наличии связи между периодом колебаний завихренной области и периодом энергонесущих ВВ.



Р и с. 9. Зависимости периода колебаний вихря Ламба T_k и периодов энергонесущих внутренних волн T_e от начальной скорости ВП U_0 ; — T_k ; x — T_e по данным численных расчетов; $*$ — T_e по результатам экспериментальных исследований

Исследования модовой структуры показали, что эффективно возбуждается первая и вторая моды ВВ, причем их фазовые скорости соответствуют слабо диспергирующим ВВ. Основная часть энергии ВВ сосредоточена в первой моде, что обеспечивает максимальную скорость их распространения и минимальную вязкую диссипацию.

Таким образом, представленные в данной работе результаты показывают, что в неэкспоненциально стратифицированной жидкости имеется возможность управления периодом и амплитудой искусственно генерируемых ВВ. Возможность управления основана на том, что зависимость периода генерируемых волн от параметров ВП легко параметризуется и неплохо описывается моделью Сэффмена. При стратификации с ярко выраженным пикноклином период ВВ возрастает с ростом начальной скорости ВП. Возрастает также и амплитуда ВВ, причем в гораздо большей степени, чем период. Такие зависимости приводят к тому, что появляется возможность генерировать предлагае-

мым способом интенсивные крупномасштабные слабодиспергирующие ВВ.

Л и т е р а т у р а

1. Hurley D.G. Aerofoil theory for a stratified fluid // Quant. J. Mech. and Appl. Math. 1971. V.24, N1. P.37.
2. Saffman P.G. The motion of a vortex pair in a stratified atmosphere // Studies in Applied Mathematics. 1972. V.6, N1. P.8.
3. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
4. Necht A.M. Bilanin A.J., Hirsh J.E. Turbulent trailing vortices in stratified fluids // AIAA Journal. 1981.V.19, N6. P.691.
5. Юлисеенко Г.С. Движение спутных вихрей в стратифицированной жидкости // Проблемы стратифицированных течений. Т.1. Саласпилс, 1988. С.207.
6. Арабаджи В.В., Баранов С.А., Богатырев С.Д. и др. Лабораторный бассейн для моделирования волновых движений в стратифицированном океане // Методы гидрофизических исследований / ИПФ АН СССР. Горький, 1984. С.5-28.
7. Справочник по теории корабля / Под ред. Я.И.Войткунского. Ленинград: Судостроение, 1985. Т.1.
8. Уиднелл Ш. Структура и динамика вихревых нитей // Вихревые движения в жидкости. М.: Мир, 1979. С.126.
9. Баранов С.А., Богатырев С.Д., Брайловская В.А. и др. Конвекция и перенос тепла в бассейне с управляемой температурной стратификацией // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т.24, №11. С.1202.
10. Tulin M.P., Shwartz J. Aerofoil theory for a stratified fluid // Quant. J. Mech. and Appl. Math. 1971. V.24, N1. P.37.
11. Иванов А.В., Лебедев А.В., Островский Л.А., Пискарев А.Л. Экспериментальное исследование движения ламинарных вихревых пар в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖТ. 1987. №2. С.183.

12. Пискарев А.Л. Эволюция термиков в устойчиво стратифицированной среде: Препринт ИПФ АН СССР. №119 Горький, 1985.
13. Hill F.M. A numerical study of the descent of a vortex pair in a stratified atmosphere // J. Fluid Mech. 1975. V.75, N1.P.1.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОВОРОТОВ И АТМОСФЕРНЫХ СМЕРЧЕЙ КОНИЧЕСКИМИ ВЯЗКИМИ ТЕЧЕНИЯМИ

М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн

При анализе таких явлений, как смерчи и водовороты, пожалуй, наиболее существенными и пока нерешенными вопросами являются механизм концентрации импульса в малых областях пространства и возникновение (или усиление) вращательного движения. Здесь показано, что подобные эффекты имеют место для автомодельного конического класса решений уравнений Навье-Стокса и поэтому они могут служить простейшими, но достаточно содержательными моделями интенсивных природных вихрей.

1. КОЛЛАПС ИМПУЛЬСА И ЗАВИХРЕННОСТИ

Известно, что такое свойство жидкости, как вязкость, при одит к сглаживанию. Даже если начальное поле скорости имело особенности, например тангенциальные разрывы, то они исчезают [1]. Поэтому естественно ожидать, что внутри области течения вязкой жидкости сингулярности поля скорости появиться не могут. Однако есть примеры того, что такой парадоксальный эффект имеет место при определенных обстоятельствах, когда жидкость увлекается в достаточно интенсивное сходящееся движение [2]. Наиболее наглядно это можно продемонстрировать, используя аналитическое решение Сквайра [3]:

$$v_r = -\nu r^{-1} y'(z), \quad v_\theta = -\nu (r \sin \theta)^{-1} y(z), \quad z = r \cos \theta, \quad (1)$$

$$y = Re' (1-z)/z, \quad z = \lambda \operatorname{ctg} [\lambda \ln(1+z)] - 1/2, \quad \lambda = \frac{\sqrt{2Re-1}}{2} \quad (2)$$

Здесь u_r, u_θ - компоненты вектора скорости в сферической системе координат (r, θ, φ) , ν - кинематическая вязкость. Число Рейнольдса $Re = -\psi'(0)$ характеризует интенсивность сходящегося движения на плоскости $\dot{x} = 0$.

Сквайр интерпретировал найденное решение как струю, бьющую из малого отверстия в плоской стенке, но, поскольку условие прилипания не выполнено, эта интерпретация неудачна. Решение больше подходит для описания, например, воздушного течения над поверхностным стоком воды или недавно обнаруженных астрофизических струй [4,5]. Когда $Re < Re_* = 7,67$, роль функции $z(\tau)$ лежит вне интервала $[0,1]$. При формальном увеличении Re выше Re_* корень $z(\tau) = 0$ проходит через $\tau = 1$ и попадает внутрь интервала. Это означает, что $\psi(\tau)$ имеет полюс внутри области течения и решение (2) теряет физический смысл. С приближением Re к Re_* снизу в течении, которое состоит из сходящегося движения жидкости вблизи плоскости и приосевой струи, скорость на оси начинает неограниченно возрастать. Струя становится все более узкой и сильной, а при $Re = Re_*$ импульс струи обращается в бесконечность. При этом эжекционная способность струи вовлекать окружающую жидкость остается конечной. Это означает, что на оси симметрии формируется сток с обильностью на единицу длины $8\pi\nu$, как для струи Шлихтинга [1]. Конвективный перенос импульса и завихренности к оси, осуществляемый сходящимся потоком, становится таким сильным, что вязкая диффузия неспособна его сбалансировать в рамках стационарного осесимметричного режима без образования особенности на оси.

Аналогичный эффект был обнаружен Созоу [6] в задаче о течении проводящей вязкой жидкости, вызванном электрическим током, радиально растекающимся от точечного электрода, расположенного на поверхности. Кинематика течения качественно такая же, как для решения Сквайра. При определенной величине полного тока скорость на оси симметрии обращается в бесконечность. Впервые парадокс потери существования регулярного стационарного решения уравнений Навье-Стокса был обнаружен и математически исследован в задаче о взаимодействии вихревой нити с перпендикулярной плоскостью [7], которая имеет непосредственное отношение к рассматриваемому здесь вопросу о моделировании водоворотов и смерчей.

2. ЗАДАЧА О СМЕРЧЕ

Как и упомянутые решения Сквайра и Созоу, течение относится к коническому классу, но теперь азимутальная скорость отлична от нуля и представление (1) должно быть дополнено выражением

$$v_{\varphi} = \gamma \Gamma(r) / (r \sin \theta). \quad (3)$$

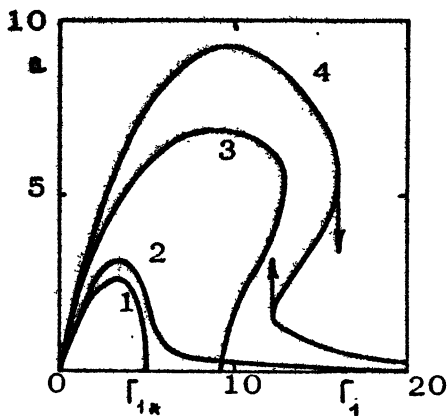
Подстановка (1) и (3) в уравнения Навье-Стокса приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (1-r^2)\psi' + 2r\psi - \psi^2/2 &= F, & (1-r^2)F'' &= 2\Gamma_1', \\ (1-r^2)\Gamma'' &= \psi\Gamma'. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия $\psi(0) = \psi'(0) = \Gamma(0) = 0$ отвечают прилипанию на плоскости, $F(1) = F'(1) = 0$ - требованию ограниченности v_{θ} и v_{φ} на оси симметрии, т.е. $\psi(1) = 0$ и $|\psi'(1)| < \infty$. Наконец, $\Gamma(1) = \Gamma_1$ соответствует заданию циркуляции вихревой нити, которая служит единственным источником движения. Такая задача может моделировать течение, вызванное вращением цилиндра. Присутствие стенки приводит к так называемому торцевому эффекту - помимо вращения в окружающей жидкости возникает меридиональное движение в виде конвергентного течения у плоскости и приосевой струи. С приближением Γ_1 к критическому значению $\Gamma_{1*} = 5,53$ струя усиливается, а при формальном увеличении Γ_1 выше Γ_{1*} внутри области течения возникает особенность.

Концентрация осевого импульса в данном случае сопровождается сосредоточением вращательного движения вблизи оси. Это, в частности отражается в немонотонной зависимости вращательного трения на стенке $\tau_{\theta\varphi} = \rho \nu^2 r^{-2} \Omega$, $\Omega = \Gamma'(0)$ от Γ_1 (рис.1, кривая 1). Сначала с ростом Γ_1 происходит усиление вращения жидкости, а затем ослабление и полное прекращение при $\Gamma_1 = \Gamma_{1*}$, что соответствует обращению Ω в нуль. В случае вращающегося цилиндра это означает, что вне малой (неавтономной) окрестности цилиндра жидкость не вовлекается во вращение.

Если заменить вихревую нить конусом $r = r_c$, на поверхности которого нормальная скорость принимается равной нулю, а касательная имеет ограниченное значение, согласующееся с представлениями (1), (3), то парадокс потери существования решения снимается [8], но немонотонный характер зависимости $\Omega(\Gamma_1)$ сохраняется (рис.1, кривая 2, $r_c = 0,99$).



Р и с . 1

При $\Gamma_1 > \Gamma_{1*}$ в пределе $\tau_c \rightarrow 1$ час в точках, пригледенных кривой 2, переходит на кривую 1, а остальные на полуось $a = 0$, $\Gamma_1 > \Gamma_{1*}$. Это означает, что как бы сильно ни вращался цилиндр, течение жидкости в автомоделной области не зависит от скорости его вращения и имеет такой же характер, как если бы оно вызывалось стоком, распределенным на оси, с удельной обильностью 8 г/л .

3. МОДЕЛЬ СЕРРИНА

Серрин [9] детально рассмотрел вопрос о применимости задачи [7] для моделирования атмосферных смерчей. Потерю существования решения он счел серьезным препятствием и, для того чтобы избежать коллапса, обобщил задачу, допустив существование логарифмической особенности ψ_r на оси. Математически это сводится к замене условия $F'(1) = 0$ на $F'(1) = -2f$, а физически означает присутствие сосредоточенной на оси силы с удельным значением $4\pi\rho v^2 f r^{-1}$ (ρ — плотность жидкости), направленной вверх при $f > 0$ и вниз при $f < 0$. Эта сила может быть, в частности, вызвана плавучестью, если ядро вихря имеет температуру, отличную от окружающей. Осевая сила является независимым источником движения и решение теперь зависит от двух параметров — Γ_1 и f . Естественно, это расширяет возможности моделирования и, в частности, как показано Серрином, позволяет описать достаточно сложную двухъячеистую структуру течения, характерную для ряда наблюдавшихся на территории США торнадо. Полученная им карта режимов (рис. 2 $\kappa = \Gamma_1/2$, $\rho = 1 + f\kappa^{-2}$) свидетельствует, что в зависимости от значений Γ_1 и f меридиональное течение может быть нисходящим, двухъячеистым и восходящим (области А, В и С на рис. 2). В общем случае потери существования избежать не удастся, она происходит на луче 1 при $\rho > 1$ и на кривой 2, правее которых решения исходной краевой задачи не существует. Серрин видел выход в том, чтобы считать параметр ρ не свободным, а выбирать его равным единице при $\Gamma_1 \leq \Gamma_{1*}$ и соответствующим кривой 2 при $\Gamma_1 > \Gamma_{1*}$.

Проведенный авторами анализ показал, что потеря существования, связанная с появлением дополнительной сингулярности, может происходить только при значениях параметров, соответствующих лучу 1 ($\Gamma_1^2 + 4f = 30,58$). Естественно, возник вопрос: что вызывает потерю существования на кривой 2? Оказалось, что решение задачи неединственно и при значениях параметров, соответ-

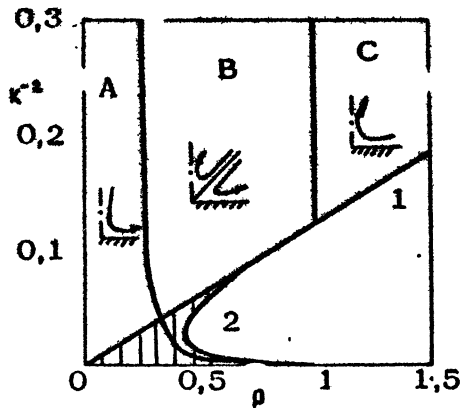


Рис. 2.

ствующих кривой 2, происходит слияние двух регулярных решений исходной краевой задачи. Можно сказать, что область В является двухлистной, сгиб происходит на кривой 2 и область В продолжается в область, заштрихованную на рис.2. На луче 1, где $\rho < 1$, второе решение теряет существование из-за появления дополнительной сингулярности.

Эти свойства задачи, в частности, отражаются в том, что зависимость $\alpha(\Gamma_1)$ при $f < 0$ становится неоднозначной (рис.1, кривая 3).

Для разрешения парадокса, связанного с появлением сингулярности, здесь используется другой подход. Параметры Γ_1 и f остаются независимыми, но вихревая нить заменяется конусом малого угла раствора, на котором ставятся соответствующие граничные условия. Такой подход представляется вполне естественным, поскольку вихревая нить служит ид. аналогией ядра торнадо, имеющего конечные размеры. Как и в частном случае, рассмотренном в разд.2, введение конуса приводит к тому, что решение существует уже при произвольных значениях Γ_1 и f . Но неединственность решения в определенной области значений Γ_1 и f сохраняется. Это иллюстрирует зависимость $\alpha(\Gamma_1)$ (рис.1, кривая 4), из вида которой, в частности, следует, что переходы между режимами имеют гистерезисный (катастрофический) характер (см. стрелки на кривой 4). Нижняя ветвь кривой 4 соответствует режимам, у которых вращательное движение сконцентрировано в приосевой зоне, в верхняя — режимам с вращением, рассеянным в широкой области.

Чтобы интерпретировать обнаруженное свойство применительно к природным процессам, целесообразно изменить параметризацию, введя вместо циркуляции удельный момент и пуль-

са, приходящийся на сферический слой единичной толщины. Для конических течений эта величина не зависит от радиуса сферы и конечна (в отличие от полного момента импульса). В силу законов сохранения момент импульса может измениться только за счет потока через границы области. Поэтому следует ожидать, что при достаточно быстром процессе перехода от одного стационарного режима к другому момент импульса почти не изменяется. С помощью управляющего параметра сохраняем силу. Согласно полученным результатам при увеличении силы, действующей вниз, смерч может внезапно разрушиться переходя в режим со слабым распределенным вращением. И наоборот, последний режим при другом, меньшем значении силы может посредством быстрого перехода преобразоваться в сильный смерч. Обнаруженная неединственность и гистерезис связаны с перераспределением в пространстве существующего момента импульса. А теперь рассмотрим возможные механизмы появления импульса в первоначально невращающемся автомодельном потоке.

4. СЛАБОЕ САМОВРАЩЕНИЕ

Вернемся к решению Сквайра (2). Снять парадокс потери существования решения таким сравнительно простым способом, как в задаче с вихревой нитью, здесь нельзя, так как ось симметрии свободна от каких-либо источников движения. Поскольку появлению сингулярности предшествует формирование сильной струи, а струйные течения, как известно, теряют устойчивость уже при сравнительно небольших числах Рейнольдса, естественно предположить, что потере существования предшествует потеря устойчивости и турбулизация течения. Обойдем пока сложную проблему перехода и ограничимся использованием простой модели турбулентного движения на основе эффективной вихревой вязкости. Будем полагать, что область турбулентного движения заключена внутри конуса $r > r_t$, вне которого течение ламинарно, что соответствует имеющимся измерениям и наблюдениям [10]. В качестве r_t выберем границу струи, за которую, следуя Бэтчелору, принимается место, где радиальная скорость обращается в нуль: $\psi'(r_t) = 0$. Для вязкости используем ступенчатое распределение по углу: $\nu = \nu_t$, $r_t < r < 1$ и $\nu = \nu_r$, $0 < r < r_t$. Величина турбулентной вязкости назначается согласно эмпирическим данным Шлихтинга [1] $\nu_t(r) = \nu - \psi'(r) = 460,5$. Такое моделирование

является довольно грубым, хотя и не лишено физических аргументов [2]. Оно позволяет рассмотреть и турбулентные струйные течения, оставаясь в рамках авторской модельной конической класса. Переход от гладкого распределения вязкости к разрывному приводит к условиям непрерывности векторов скорости и поверхностной силы на конусе $r=r_t$. Более подробный анализ случаев как непрерывного, так и ступенчатого распределений вязкости изложен в работе [11]. Альтернативный метод сшивки ламинарных и турбулентных течений предложен Шнайдером [12] (см. также работу [13], которая нам представляется спорной).

При малых числах Рейнольдса естественно считать, что $\gamma = \nu_t / \nu = 1$, т.е. течение ламинарное. В рамках принятой схемы предполагается, что переход к турбулентному режиму происходит, когда при $Re = Re_t$ $-\psi'(1)$ достигает значения 460,5, после чего γ определяется из условия $-\psi'(1) = 460,5$ при $Re > Re_t$. Величина $Re_t = 7,56$ лишь немного меньше, чем $Re_s = 7,67$. Характер зависимости $\gamma(Re)$ показан на рис. 3 (кривая 1). Решение для такой модели турбулентности существует уже при всех значениях числа Рейнольдса, причем при $Re \rightarrow \infty$ может быть аналитически получена асимптотическая оценка $\gamma = 2^{-7/4} Re^{3/4}$ [4].

В построенном решении

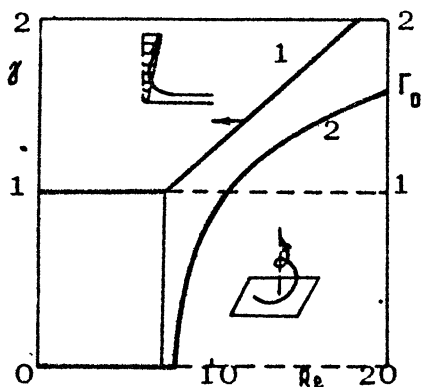


Рис. 3

вращательное движение отсутствует, т.е. $\Gamma'(r) \equiv 0$. Но, оказывается, в случае переменной вязкости возможно спонтанное возникновение вращения в результате бифуркации. Отсутствие внешних источников вращения должно быть отражено в граничных условиях для циркуляции. Одно из них, $\Gamma(1) = 0$, соответствует регулярности на оси. В качестве второго рассмотрим условие отсутствия вращательного трения на плоскости: $\Gamma'(0) = 0$. Это условие естественно для астрофизических струй [5], но и в задаче о возникновении водоворота трением между водой и воздухом из-за большого различия плотностей можно пренебречь. Условие нулевого трения более слабое, чем требование прилипания. Поэтому бифуркация вращательного режима называется здесь слабым самовращением:

Если вязкость постоянна, то из уравнения для циркуляции (4) следует, что она является строго монотонной функцией угла и поэтому поставленные граничные условия могут быть выполнены только при $\Gamma(\tau) \equiv 0$. В случае переменной вязкости это не так. Для ступенчатого распределения вязкости при $\tau = \tau_+$ зависимость $\Gamma(\tau)$ приобретает излом. Поскольку на интервале $(0, \tau_+)$ вязкость постоянна, из условия $\Gamma'(0) = 0$ следует $\Gamma(\tau) = 0$ при $0 < \tau < \tau_+$. На интервале $(\tau_+, 1)$ зависимость $\Gamma(\tau)$ должна уменьшиться до нуля при $\tau = 1$. Чтобы это случилось, угол излома должен быть достаточно большим. Величина угла растет вместе с γ и оказывается, что уже при соотношении $\gamma = \gamma_s$, незначительно превосходящем единицу, оба однородных граничных условия удается выполнить: $\gamma_s = 1,08$, $Re_s = 8,2$. Зависимость циркуляции на плоскости от числа Рейнольдса показана кривой 2 на рис.3. Поскольку происходит прямая вилочная бифуркация, следует ожидать, что исходный невращающийся режим теряет устойчивость, а новый режим с закруткой устойчив. Направление закрутки произвольно и, по-видимому, зависит от начального возмущения.

Возникает естественный вопрос: как появляется ненулевой момент импульса? В стационарном режиме поток импульса через любую полусферу равен нулю. В процессе установления стационарного режима (который здесь не рассматривается), вероятно, происходит подсос момента из бесконечности. В конечном классе циркуляция не зависит от радиуса, и поэтому на бесконечности в случае закрученного течения она не равна нулю, а значит бесконечность является потенциальным источником циркуляции.

С точки зрения возможных физических приложений представляет интерес задача о двухслойной среде (вода - воздух). Будем считать, что источник движения расположен на поверхности раздела, где задано сходящееся движение, характеризующее числом Рейнольдса $Re = \tau u_s(0) / \nu_{\text{вг}}$, где $\nu_{\text{вг}}$ - вязкость воды. Такое течение может быть вызвано термогравитационной неустойчивостью. Если воздух вблизи поверхности легче вышележащего, то в каком-то месте он прорывается наверх и образуется восходящая струя. Тогда в приповерхностном слое формируется сходящееся к основанию этой струи течение. Проведенный анализ показал, что в такой задаче при увеличении Re происходит следующая последовательность событий. При малых Re режим ламинарный, вблизи оси существует биполярная струя - восходящая в воздухе и нисходящая в воде. Поскольку кинематическая вязкость воды меньше, с рос-

том Re сначала турбулизируется водная струя, затем при числах Рейнольдса больших в число раз, соответствующее отношению вязкостей двух сред, турбулизируется и воздушная струя, а при еще чуть большем Re возникает закрученный режим. Циркуляция достигает максимума на границе водной турбулентной струи, сравнительно медленно убывает с ростом x как в воде, так и в воздухе и быстро падает до нуля на оси в обеих турбулентных зонах. При больших числах Рейнольдса возможно обращение потока воздуха на оси. В этом случае вращающееся воронкообразное течение возникает как в воде, так и в воздухе, что может быть опасно как для кораблей, так и для самолетов.

5. СИЛЬНОЕ САМОВРАЩЕНИЕ

Когда в задаче Сквайра о турбулентном обобщении течения вращательная скорость на плоскости принималась равной нулю ($\Gamma(0) = 0$), бифуркации самовращения обнаружить не удалось, хотя авторами были рассмотрены распределения $\psi(r)$ из довольно широкого класса. По-видимому, главным препятствием является одноячейстая структура течения. К этому выводу подводит опыт расчетов и качественный анализ задачи. Поэтому эксперименту на самовращения было подвергнуто более сложное двухячейстое течение, обнаруженное ранее в специальной задаче о тепловой конвекции [2,12].

Течение вызывается расположенной на плоской стенке точечной квадрупольной особенностью поля температур $T = T_\infty + \alpha \psi(r)$. Выбор такой зависимости позволяет получить автомодельное решение уравнений Буссинеска. Для упрощения примем число Прандтля равным нулю. В этом случае уравнение теплопроводности отщепляется от полной системы и $\psi(r)$ имеет общее решение

$$\psi = M(3r^2 - 1) + N \left[(3r^2 - 1) \ln \frac{1+r}{1-r} - 2 \right]. \quad (5)$$

Правая часть второго уравнения (4) при этом дополняется членом

$$f = \frac{\sigma_1}{4} (1-r^2)^2 \left[M_T + N \left(r \ln \frac{1+r}{1-r} - 2 \right) \right].$$

В задаче с постоянной вязкостью условие регулярности температуры на оси симметрии дает $N = 0$. Константа M

играет роль нормировки и может быть включена в число Грасгофа $\Gamma_1 = \alpha \rho g / \nu^2$, где β — коэффициент температурного расширения, а g — ускорение силы тяжести. При малых Γ_1 течение одноячейное и восходящее, а при $\Gamma_1 = \Gamma_{1*} = 62,7$ возникает сингулярность, как в решении, аналогичном описанному Сквайром. Сингулярность можно устранить введением переменной эффективной вязкости, но теперь переменной принимается и теплопроводность, причем полагается, что отношение теплопроводностей в турбулентной и ламинарной зоне такое же, как и для вязкости. Коэффициенты M и N имеют различные значения в разных зонах. В приосевой турбулентной области $N_1 = 0$, но $N_2 \neq 0$ и определяется вместе с M_2 из условий непрерывности температуры и теплового потока при $r = r_1$. В остальном модель турбулентности остается прежней. Переход к турбулентному режиму осуществляется при $\Gamma_{1*} = 61,09$, когда $-\psi'(1)$ достигает величины 460,5. При дальнейшем увеличении Γ_1 величина γ возрастает, усиливается и приосевая струя, но сохраняется турбулентное число Рейнольдса $\gamma u_*(1) / \nu_* = 460,5$. При $\Gamma_1 = \Gamma_{1c} = 280$ происходит отрыв течения

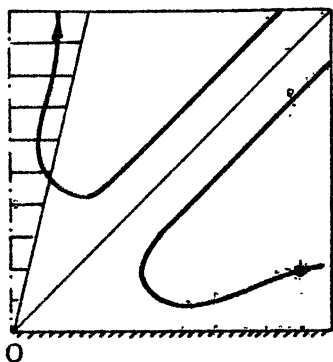


Рис. 4.

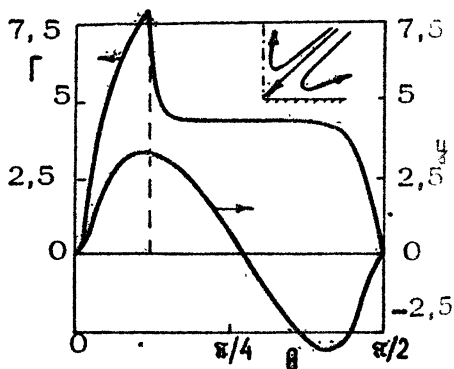


Рис. 5.

от стенки и его структура становится двухъячейстой (рис.4). Жидкость подтекает к началу координат вдоль конической поверхности и затем разделяется на два рукава, один из которых формирует приосевую струю, а второй — вверную растекающуюся струю вблизи плоскости. Турбулентная зона на рис.4 заштрихована. Вращательное движение по-прежнему пока отсутствует. Но когда число Грасгофа достигает значения $\Gamma_{1*} = 920$ (при этом $\gamma = 4,60$), уравнение для циркуляции при граничных условиях $\Gamma(1) = \Gamma(0) = 0$ приобретает нетривиальное решение. Характер распределения циркуляции и функции тока

по углу показан на рис.5. В турбулентной зоне циркуляция возрастает от нуля на оси до максимального значения на границе, затем резко уменьшается и в ядре течения практически постоянна. Со сменой знака $\psi(x)$ меняет знак и кривизна $\Gamma''(x)$, что в конце концов приводит к быстрому уменьшению циркуляции в пограничном слое у плоскости и обращению ее в нуль на стенке. В стационарном режиме существует поток циркуляции, т.е. момента импульса, из бесконечности, который поглощается стенкой. Таким образом, течение с такой структурой действует как концентратор момента импульса. Известно, что сильные пожары обычно сопровождаются интенсивным вращением — возникает так называемый огненный смерч. Рассмотренная задача может служить простейшей моделью и первым шагом в анализе этих грозных явлений.

Л и т е р а т у р а

1. Флихтинг Г. Течение пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука: 1989.
3. Squire H.B. Some viscous fluid flow problems. I Jet emerging from a hole in a plane wall // Phil. Mag. 1952. V.43, N7. P.942.
4. Goldshtik M.A., Stern V.N. Conical flow of fluid with variable viscosity // Proc. Roy. Soc. Lond. 1988. A419. P.91.
5. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. О механизме астрофизических струй // ДАН. СССР. 1989. Т.30-1, №5. С.1069.
6. Sozou C. On fluid motions induced by electric current source // J. Fluid Mech. 1971. V.46. Part 1. P.25.
7. Гольдштик М.А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье-Стокса // ПММ. 1960. Т.24, №4. С.610.
8. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Анализ парадокса взаимодействия вихревой нити с плоскостью // ПММ. 1989. Т.53, №3. С.418.
9. Serrin J. The swirling vortex // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. S. 1972. V.271, N1214. P.327.

10. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1989.
11. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Турбулентное вихревое динамо // ПММ. 1989. Т.53, №4. С.613.
12. Schneider W. Flow induced by jets and plumes // J. Fluid Mech. 1981. V.108. P.55.
13. Абрашкин А.А. К теории автомодельных осесимметричных течений вязкой жидкости. Препринт ИПФ АН СССР №195. Горький, 1988.
14. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Автомодельная конвекция вблизи теплового квадруполя // ИФЖ. 1988. Т.55, №6. С.913.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СОЛИТОНОВ И ВИХРЕЙ

Х.А.Горшков, Л.А.Островский

1. ВВЕДЕНИЕ

Локализованный гидродинамический вихрь представляет собой образование, способное при определенных условиях (например, при взаимодействии с "себе подобными") сохранять определенную структурную цельность. Именно на этом основано, в сущности, приближение "точечного вихря". Конечно, динамическое поведение вихря как целого (как "частицы") может наблюдаться только при достаточно слабом, неразрушающем воздействии. Естественно поэтому попытаться применить к вихрям конечного размера методы асимптотической теории, аналогичные методам возмущений, развитым для нелинейных уединенных волн (солитонов). Такого рода попытки уже предпринимались в ряде работ. Так, в [1] рассматривалась задача о взаимодействии пары вихрей Бюргерса, и в [2] - пары вихрей Россби. Однако локализованные вихревые образования, обсуждаемые в этих работах, имеют и существенные отличия от классических солитонов: вихри Бюргерса ближе к локализованным структурам в неравновесных средах (в модели присутствуют диссипация и активность); вихри Россби, существующие, как и солитоны, в волновой системе, допускают, в отличие от них, континуальный произвол параметров.

Забегая вперед, отметим, что использование одних лишь соотношений ортогональности, определяющих динамику солитонов как частиц, является необходимым, но не достаточным условием существования приближенных решений: требуется анализ всех вращающихся в исследуемом процессе возмущений, и этот анализ может в корне изменить результат. Вместе с тем

эта "овчинка стоит выделки", поскольку даже частичный успех "солитонного" подхода к анализу вихрей позволил бы описать их динамику, как целого и, следовательно, выделить класс структурно устойчивых "вихрей-частиц".

2. ЭЛЕМЕНТЫ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ

Теория возмущений для солитонов может быть построена в различных формах. Однако все они так или иначе связаны с требованием ограниченности возмущений исходного, порождающего решения, параметры которого предполагаются медленно "дрейфующими" во времени. Общая последовательность действий при этом следующая [3,4].

Рассмотрим волновую систему:

$$\hat{N}(\Phi, \epsilon) = 0, \quad (1)$$

где \hat{N} - нелинейный оператор, Φ - совокупность полевых переменных, ϵ - малый параметр. Предположим, что при $\epsilon = 0$ система (1) допускает локализованное^{*)} решение - уединенную волну $\Phi^{(0)}(\vec{r}, t, \vec{A})$, характеризуемое семейством параметров $\vec{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ (это могут быть координата, скорость, амплитуда волны и другие параметры). При учете возмущений, которые могут быть обусловлены неоднородностью или нестационарностью среды, внешними источниками, слабыми полями других уединенных волн и т.д., когда $\epsilon \neq 0$, интересующее нас решение в окрестности данного солитона отыскивается в виде ряда по степеням ϵ :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi^{(0)}(\vec{r}, t, \vec{A}) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \Phi^{(n)}(\vec{r}, t), \quad (2)$$

где главный член разложения $\Phi^{(0)}$ - известное уединенное решение. Подставляя (2) в систему (1) и приравнявая нулю слагаемые при каждой степени ϵ , получим в каждом приближении линейные уравнения для возмущений:

$$\hat{L} \Phi^{(n)} = N^{(n)}, \quad (3)$$

где \hat{L} - линеаризованный вблизи решения $\Phi^{(0)}$ оператор \hat{N} ,

^{*)} Локализованными будем называть такие решения $\Phi^{(0)}$, которые достаточно быстро убывают при $r \rightarrow \infty$ или стремятся к ненулевым константам, так что остаются конечными интегралы типа $\int \Phi^{2(n)} d\vec{r}$, либо $\int |\nabla \Phi^{(0)}|^2 d\vec{r}$.

а $H^{(n)}$ содержит лишь функции предыдущих приближений $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$.

Алгоритм построения приближенного решения (2) начинается с анализа характера решения начальной задачи (3). Будем предполагать, что исходное уединенное решение $\varphi^{(n)}$ устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных, так что часть решения (3), обусловленная возможным наличием начальных возмущений, остается ограниченной при любых временах. Для выяснения характера временного поведения части решения (3), обусловленной "источником" $H^{(n)}$, разложим $\varphi^{(n)}$ по полной системе собственных функций оператора $\hat{L}^{(n)}$

$$\varphi^{(n)}(\vec{r}, t) = \sum_d c_d(t) \cdot f_d(\vec{r}, t) + \int d\vec{k} c_{\vec{k}}(t) f_{\vec{k}}(\vec{r}, t), \quad (4)$$

где $\{f_d; f_{\vec{k}}\}$ и $\{c_d; c_{\vec{k}}\}$ — совокупность собственных функций и подлежащие определению коэффициенты разложения, относящиеся соответственно к дискретному и сплошному спектрам оператора \hat{L} . Если система (3) записана в нормальной форме относительно первых производных по времени (что, очевидно, всегда можно сделать), уравнение для коэффициентов $c_d, c_{\vec{k}}$ приобретает особенно простой вид:

$$\frac{dc_{d, \vec{k}}}{dt} = \int f_{d, \vec{k}}^+(\vec{r}, t) \cdot H^{(n)}(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (5)$$

где $f_{d, \vec{k}}^+$ — соответствующие собственные функции оператора \hat{L}^+ , сопряженного \hat{L} . Типичная особенность полученных таким образом решений — это секулярная (степенная по t) расходимость во времени части коэффициентов $c_d, c_{\vec{k}}$. Для возникновения такой расходимости (резонансов) достаточно, чтобы правые части (5) имели отличное от нуля среднее по времени. Однако для коэффициентов сплошного спектра $c_{\vec{k}}$ и такая расходимость обычно не приводит к росту соответствующей части решения (4). Дело в том, что поскольку для волновых систем собственные функции $f_{\vec{k}}$ не локализованы (они квадратично неинтегрируемы) и отвечают "падающим и рассеянным" волнам, секулярный рост коэффициентов $c_{\vec{k}}$ связан с ростом размеров области, занятой полем "рассеянных" волн

*) Ситуация, когда система собственных функций не полна, оказывается типичной для гидродинамических задач, однако и в этом случае решение линейной эволюционной задачи может быть построено и проанализировано; в этом и состоит одна из основных целей этой работы (см. ниже).

(излучения), и не приводит к росту величины самого поля излучения.

Иная ситуация складывается при секулярном росте коэффициентов L_d . Здесь расходимость коэффициентов приводит к расходимости части решения (4), отвечающей собственным функциям дискретного спектра, что обусловлено их пространственной локализацией: отток возмущений из моды при резонансном возбуждении невозможен.

Существенно, что среди локализованных собственных функций всегда есть такие, которые отвечают вариациям порождающего решения $\Phi^{(0)}$ по параметрам $\vec{\lambda}$ (это следует просто из того, что линейный оператор \hat{L} получается вариацией исходного нелинейного оператора). Ясно, что в случае, когда набор собственных функций дискретного спектра ограничивается только этими функциями, решение (2) может быть записано приближенно (с точностью до величины $O(\epsilon^2)$) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \Phi^{(0)}(\vec{r}, t, \vec{\lambda}) + t \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \lambda_i} + \dots = \\ &= \Phi^{(0)}(\vec{r}, t, \vec{\lambda} + \vec{\alpha} t) + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — некоторые постоянные порядка ϵ , а точками обозначена часть решения, остающаяся ограниченной при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, нарастающая (резонансная) часть возмущения приводит к сдвигу волны как целого в пространстве параметров $\vec{\lambda}$. Этот вывод указывает способ подавления возникающей секулярной расходимости. Для этого необходимо считать параметры λ_i порождающего решения $\Phi^{(0)}$ медленно меняющимися функциями времени, т.е. $\lambda_i = \lambda_i(\tau)$, где $\tau = \epsilon t$. Это несколько модифицирует правые части уравнения (3), так, в первом приближении $H^{(1)}$ заменяется на $H^{(1)} - \vec{\lambda}_t \cdot \vec{\partial}_{\vec{\lambda}} \Phi^{(0)}$. Возникающий таким образом произвол (неизвестные функции λ) используем для того, чтобы потребовать выполнения следующих условий:

$$\int f_d^*(\vec{r}, t) \cdot H^{(1)}(\vec{r}, t) d\vec{r} = 0. \quad (7)$$

Это условия ортогональности, предотвращающие рост коэффициентов дискретного спектра. Соотношения (7) естественно рассматривать как дифференциальные уравнения, определяющие зависимость параметров λ_i от времени и, следовательно, закон эволюции исходного решения под действием возмущений.

Подчеркнем, что в случае, когда все собственные функции дискретного спектра определяются вариациями $\Phi^{(n)}$ по \bar{A} , можно утверждать, что с помощью условий ортогональности устранены все расходимости (по крайней мере, в первом приближении число резонансов равно числу неизвестных функций Λ_i) в описание исходной распределенной системы сводится к решению конечномерной:

$$\frac{d\Lambda_i}{dt} \int f_d^+ \partial_{\Lambda_i} \Phi^{(n)} d\bar{z} = \int f_d^+ H^{(n)} d\bar{z}, \quad d=1,2,\dots,m. \quad (8)$$

Типичный пример — динамика солитонов, т.е. уединенных волн в консервативных системах, близких к точно интегрируемым. В таких системах дискретный спектр соответствующей линейной задачи всегда состоит только из указанного выше набора собственных функций. В случае одномерных уединенных волн, когда $\Phi^{(n)}$ зависит от одной фазовой переменной $Z = x - vt - t_0$ и двух параметров t_0 (координата солитона) и v (его скорость), структура уравнений для этих параметров в первом приближении такова:

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon E(v, X, t), \quad \frac{dX}{dt} = v + \varepsilon F(v, X, t), \quad (9)$$

где

$$X = X_0 + \int_0^t v dt, \quad E = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^+ \varphi_x^{(n)} H^{(n)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^+ \varphi_x^{(n)} dx},$$

$$F = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^+ \varphi_x^{(n)} H^{(n)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^+ \varphi_x^{(n)} dx}.$$

Слагаемое с F во втором уравнении (9) может быть опущено (оно в первом приближении не влияет на изменение величины v и существенно лишь для определения фазовой переменной X , точнее, учет этого слагаемого требует записи первого уравнения с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ включительно [5]). В пренебрежении этим слагаемым уравнение (9) эквивалентно уравнению движения классической частицы в потенциале, который задается внешним воздействием.

В этой связи упомянем задачу о взаимодействии двух солитонов как классических частиц. Каждый из солитонов находится в поле "хвоста" другого и уравнение (9) сводится к виду

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \alpha \operatorname{Re} e^{-\beta s} = U'(s), \quad (10)$$

где β — постоянная (может быть, комплексная, но $\operatorname{Re} \beta > 0$), сама экспонента в уравнении (10) своим происхождением обязана асимптотике поля отдельного солитона, $s = X_2 - X_1$ — расстояние между солитонами. Теперь результат взаимодействия зависит от характера β и знака α . Если $\operatorname{Im} \beta = 0$ и $\alpha > 0$, то это соответствует отталкиванию: после сближения солитоны неограниченно расходятся, сохраняя те же скорости, которые имели до взаимодействия. Именно так обстоит дело для известного уравнения Кортевега — де Вриза (рис.1,а); этот факт, обнаруженный сперва в численном эксперименте [6], и побудил рассматривать солитоны как "полевые частицы".

Если $\alpha < 0$ (притяжение), то солитоны неограниченно сближаются, и рано или поздно данное приближение (основанное на слабости взаимодействия) нарушается; но если предположить, что после неограниченного сближения они "проскакивают" друг сквозь друга, то из-за притяжения в дальнейшем процесс повторяется и возникает осциллирующее связанное состояние (рис.1,б).

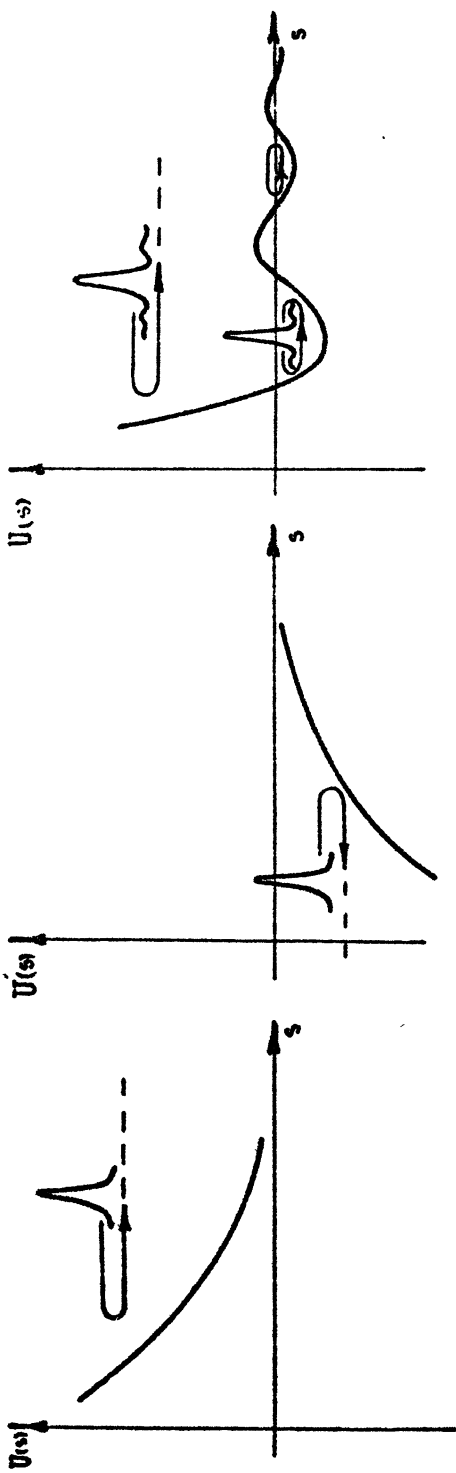
Наконец, при комплексном β каждый солитон находится в осциллирующем поле другого, и возможны разнообразные связанные состояния; можно показать, что таких состояний счетное множество (рис.1,в).

На основе этого подхода можно описать и поведение "решеток" солитонов"; в случае отталкивания такие решетки устойчивы и их динамика, в свою очередь, описывается известным уравнением решетки Тода. В случае притяжения ансамбль солитонов неустойчив и возможно появление динамического хаоса.

Другой пример применения теории — описание затухающего солитона или солитона в плавно неоднородной среде. Так, эволюция солитона в поверхностной волне на мелкой воде описывается модифицированным уравнением Кортевега—де Вриза:

$$\eta_t + c\eta_x + \frac{3c}{2h}\eta\eta_x + \frac{ch^2}{6}\eta_{xxx} + \frac{ch_x}{4h_0}\eta = 0.$$

Применяя метод возмущений, можно получить для амплитуды η солитона закон $A \sim h^{-1}$, что, заметим, отвечает гораздо более сильному изменению, чем в линейной волне, где $A \sim h^{-1/4}$ [7]



а) б) в)

Р и с. 1. Типичные зависимости парного потенциала взаимодействия солитонов $u(s) \sim \Delta \text{Re} s^{-p}$ в случае: а - отталкивания, б - притяжения, в - осциллирующего характера $U(s)$

Более подробно рассмотрение этих вопросов можно найти в работе [4]. Здесь укажем только, что двух- и трехмерные уединенные волны (локализованные образования, структуры) ведут себя во многом аналогично, в том числе образуют связанные состояния в виде вращающейся пары [8].

3. ВИХРИ. ОБЩИЙ ПОДХОД

Переходя к обсуждению вопроса об эволюции гидродинамических вихрей, рассмотрим простейшую постановку задачи такого рода: о цилиндрическом (двумерном) вихре, описываемом уравнением для функции тока $\Psi(\vec{r}, t)$:

$$\Delta \Psi_t + J(\Psi, \Delta \Psi) = \varepsilon \hat{R}(\Psi, \vec{r}, t), \quad (11)$$

где $J(u, v) = u_x v_y - u_y v_x$ - якобиан, а \hat{R} - некоторый функционал, описывающий возмущения. При $\varepsilon = 0$ уравнение (11) допускает решение в виде стационарного симметричного вихря с произвольной зависимостью $\Psi^{(0)}$ от $r = |\vec{r}|$. Будем предполагать, что для $\Psi^{(0)}$ выполняются естественные граничные условия $\partial_r \Psi^{(0)} = 0$ при $r \rightarrow 0, \infty$ (отсутствие скорости в центре вихря и на бесконечности), а полная завихренность $Q = \int_0^\infty r \Delta \Psi dr$ отлична от нуля (напомним, что локальная завихренность ω равна $\Delta \Psi$).

В соответствии с алгоритмом предыдущего раздела будем решать для уравнения (11) при $\varepsilon \neq 0$ начальную задачу с условием $\Psi(\vec{r}, t=0) = \Psi^{(0)}(r)$, отыскивая решение $\Psi(\vec{r}, t)$ в виде ряда аналогичного (2). В результате для поправок $\Psi^{(n)}$ получаем следующее линейное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi^{(n)} &= \Delta \Psi_t^{(n)} + J(\Psi^{(0)}, \Delta \Psi^{(n)}) + J(\Psi^{(n)}, \Delta \Psi^{(0)}) = H^{(n)}, \\ \Psi^{(n)}(\vec{r}, t=0) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение линейной задачи (12) будем строить методом разделения переменных. В полярных координатах r, φ , ввиду независимости $\Psi^{(0)}$ от φ, t , решение можно искать в виде

$$\Psi^{(n)}(\vec{r}, t) = \sum_m e^{im\varphi} \int_0^\infty \Psi_m^{(n)}(r, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda,$$

тогда уравнение (12) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left[\tau^{-1} \frac{d}{d\tau} \tau \frac{d}{d\tau} - \frac{m^2}{\tau^2} - \frac{im}{\tau} \frac{d}{d\tau} \frac{(\Delta \Psi^{(n)})}{\lambda + (im/\tau) \frac{d}{d\tau} \Psi^{(n)}} \right] \Psi_m^{(n)}(\tau, \lambda) =$$

$$= \tilde{H}_m^{(n)} \left(\lambda + \frac{im}{\tau} \frac{d}{d\tau} \Psi^{(n)} \right) = \tilde{H}_m^{(n)} \quad (13)$$

где m - номер азимутальной гармоники. λ - параметр преобразования Лапласа. Решение (13) может быть представлено в квадратурах:

$$\Psi_m^{(n)}(\tau, \lambda) = f_{1m} \left(C_{1m}^{(n)} + \int_a^\tau f_{2m} \tilde{H}_m^{(n)} W_m^{-1} d\tau' \right) +$$

$$+ f_{2m} \left(C_{2m}^{(n)} - \int_a^\tau f_{1m} \tilde{H}_m^{(n)} W_m^{-1} d\tau' \right), \quad (14)$$

где $f_{1,2m}(\tau, \lambda)$ - фундаментальная система решений однородного уравнения (13), $C_{1,2m}^{(n)}$ - произвольные константы (не зависящие от τ), $W_m(\tau, \lambda) = f'_{1m} f_{2m} - f_{1m} f'_{2m}$ - вронскиан, a - произвольная точка интервала $(0, \infty)$. Выбор фундаментальной системы решений, вообще говоря, произволен; для наших целей оказывается удобен следующий выбор: $f_{1m} \sim \tau^m$ при $\tau \rightarrow 0$ и $f_{2m} \sim \tau^{-m}$ при $\tau \rightarrow \infty$. В противоположных пределах ($\tau \rightarrow \infty$ для f_{1m} и $\tau \rightarrow 0$ для f_{2m}) эти решения, вообще говоря, расходятся как τ^m и τ^{-m} соответственно. Характер асимптотик $f_{1,2m}$ нетрудно установить, анализируя поведение решений в "упрощенном" однородном (с нулевой правой частью) уравнении (13) с опущенным последним слагаемым в левой части. Постоянные $C_{1,2m}^{(n)}$ определяются теперь из условия ограниченности решения (14) при $\tau \rightarrow 0, \infty$; эти условия имеют вид

$$C_{1m}^{(n)} = - \int_a^\infty f_{2m} \tilde{H}_m^{(n)} W_m^{-1} d\tau; \quad C_{2m}^{(n)} = \int_a^0 f_{1m} \tilde{H}_m^{(n)} W_m^{-1} d\tau.$$

В результате решение (14) может быть записано в виде

$$\Psi_m^{(n)}(\tau, \lambda) = \int_0^\infty \tilde{G}_m(\tau, \tau', \lambda) \tilde{H}_m^{(n)}(\tau', \lambda) d\tau', \quad (15)$$

где \tilde{G}_m - функция Грина ^{*)}, имеющая вид

^{*)} Отметим, что аппарат функции Грина хорошо известен в гидродинамике [9], однако его использование ограничивалось применением к вопросам устойчивости.

$$\hat{G}_m(r, r', \lambda) = \begin{cases} f_{-m}(r, \lambda) \cdot f_{2m}(r', \lambda); & r' < r \\ f_{+m}(r, \lambda) \cdot f_{2m}(r', \lambda); & r' > r \end{cases} \left\{ W_m^{-1} \left(\lambda + \frac{im}{r'} \Psi_{-2}^{(0)}(r') \right)^{-1} \right\}. \quad (16)$$

Временная зависимость возмущения находится обратным преобразованием Лапласа для каждой угловой гармоники. Это приводит к записи \hat{G}_m в виде отдельных слагаемых, отвечающих разным типам особенностей функции \hat{G}_m как функции комплексного параметра λ . Из формулы (16) видно, что таких особенностей, по меньшей мере, две. Полосам λ_j , обусловленным равенством нулю вронскиана W_m , отвечают локализованные собственные колебания (моды) вихря, принадлежащие дискретному спектру (таких особенностей счетное число — по числу корней трансцендентного уравнения $W_m(\lambda, r) = 0$).

Здесь уместно сделать следующее отступление. Сильные и слабые стороны метода возмущений для вихрей хорошо видны на частном случае $m = 1$. Собственная мода с этим номером отвечает сдвигу вихря как целого и, как нетрудно видеть, при произвольной $\Psi_1^{(0)}$ имеет вид $f_{(1)}(r) = \partial_r \Psi_1^{(0)}(r)$, $\lambda_1 = 0$. В этом случае соответствующая часть $\Psi_1^{(1)}$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(1)}(r, t) &= f_1(r) \int_0^t dt' \int_0^\infty R_1(\Psi_1^{(0)}, r, t')(r')^2 dr' = \\ &= f_1(r) \int_0^t dt' \int (x + iy) R dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Подавить секулярную расходимость в выражении (17) можно, вводя медленно зависящие от времени координаты центра вихря $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0\}$; в результате получаем

$$\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{\Omega} = \int \vec{r} R(\Psi^{(0)}, \vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (18)$$

Итак, одно необходимое условие ограниченности возмущений приводит к выводу о дрейфе вихрей (аналогичном, в известной мере, движению солитонов под действием возмущений). Однако это условие далеко не всегда достаточно. Чтобы решить этот вопрос, необходимо рассмотреть возмущения непрерывного спектра, которые отвечают второму типу полюсов в формуле (16), а именно $\lambda = i\Lambda_m(r) = \frac{im}{r} \partial_r \Psi^{(0)}$. Эти возмущения тоже локализованы в пространстве, но, очевидно, с непрерывным изменением собственных значений λ : величина Λ_m за

зависит от r и при каждом λ (из определенного интервала) найдется радиус, для которого реализуется полюс функции Грина. При вычислении мод непрерывного спектра необходимо, вообще говоря, учитывать неаналитическое поведение (логарифмическое ветвление) функций $f_{1,2m}$ вблизи точки Λ_m . Такая особенность отсутствует для вихря со ступенчатым распределением завихренности:

$$\Delta \Psi^{(0)} = \omega \begin{cases} 1, & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases},$$

для которого решение (15) приобретает вид:

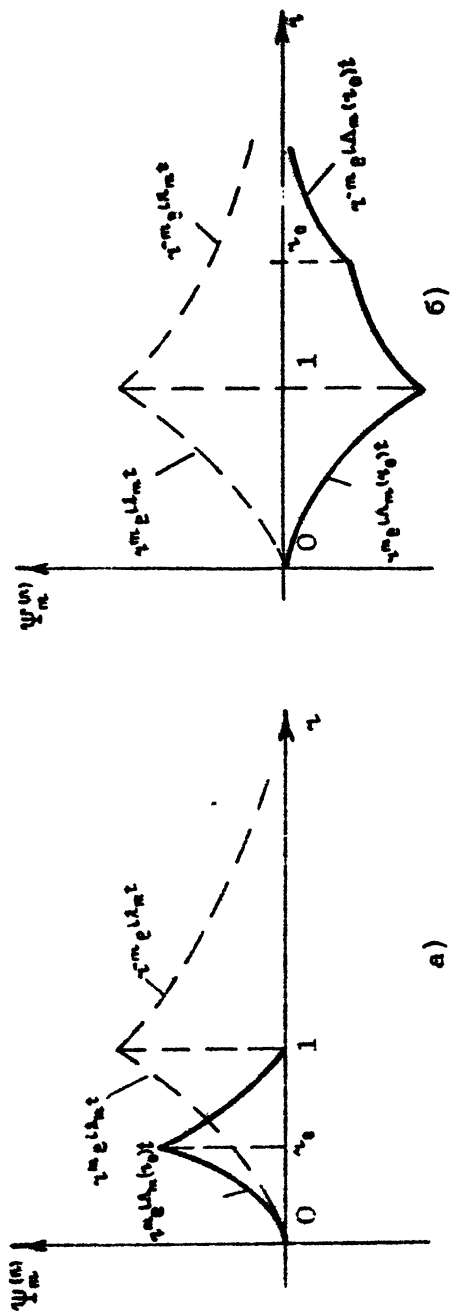
$$\Psi_m^{(n)}(r, t) = \int_0^t dt' \int_0^\infty dr' \left\{ G_{2m} \exp[i\Lambda_m(t-t')] + \right. \\ \left. + G_{2m} \frac{\exp[i\Lambda_m(t-t')] - \exp[i\lambda_m(t-t')]}{\Lambda_m - \lambda_m} \right\} H_m^{(n)}(r', t'), \quad (19)$$

$$G_{1m} = \frac{r'}{2m} \begin{cases} \left(\frac{r'}{r}\right)^m, & r' < r \\ \left(\frac{r}{r'}\right)^m, & r' > r \end{cases}; \quad G_{2m} = \frac{r'}{4m} f_m(r) f_m(r'),$$

$$f_m(r) = \begin{cases} r^m, & r < 1 \\ r^{-m}, & r > 1 \end{cases}; \quad \lambda_m = \frac{\omega}{2}(m-1); \quad \Lambda_m(r) = \frac{m}{r} \partial_{r'} \Psi^{(0)}(r').$$

Часть решения (19) с G_{2m} отвечает уже упомянутым модам дискретного спектра, тогда как часть, связанная с G_{1m} , описывает возбуждение мод сплошного спектра. Существенное отличие от солитонного случая состоит в том, что эти моды, как и моды дискретного спектра, локализованы в пространстве. Получить наглядное представление о структуре этих мод можно уже из решения однородной задачи (12) с начальными условиями для функций $\Delta_r \Psi_m^{(n)}$. Решение этой задачи имеет вид (19), где, однако, отсутствует интегрирование по времени, а величина $H_m^{(n)}$ не зависит от времени и определяется начальным возмущением. Задавая $H_m^{(n)}$, например, в виде $\delta(r-r_0)$, получаем зависимости $\Psi_m^{(n)}$, показанные на рис.2.

Как видно из рис.2 и выражения (19), δ -образное начальное возмущение порождает двухчастотные колебания, содержащие как моду дискретного спектра ($\sim e^{i\lambda_m t}$), так и моду сплошного спектра ($\sim e^{i\Lambda_m(r_0)t}$), имеющие одинаковую



Р и с. 2. Структура поправок функции тока $\psi_m^{(n)}$ обусловленных δ -образным начальным возмущением при: а - $\tau_0 < 1$, б - $\tau_0 > 1$; --- часть функции тока, отвечающая моде дискретного спектра, — часть функции тока, отвечающая возбуждению сплошного спектра

степень пространственной локализации ($\sim r^m (r \rightarrow 0)$; $\sim r^{-m} (r \rightarrow \infty)$). Таким образом, с течением времени начальные возмущения не покидают области начальных данных (в случае волновых систем моды сплошного спектра уносят начальные возмущения на бесконечность). Если вернуться к исходной линеаризованной задаче (19) с источником, то становится очевидным, что попадание "внешней силы" $H_m^{(n)}$ в резонанс с Λ_m или Λ_{-m} влечет за собой секулярный рост во времени мод как дискретного, так и сплошного спектра: из-за отсутствия излучения этих мод не обеспечивается отток возмущений в бесконечность, как это имеет место в волновых системах. Таким образом, разрушающая эволюция вихря возможна только при отсутствии резонансов между структурными возмущениями R и модами сплошного спектра, так как рост последних не может быть скомпенсирован медленной зависимостью параметров порождающего решения. Ниже приведем два примера (адиабатической и разрушающей эволюции кругового вихря), а здесь сделаем два комментария по поводу упоминавшихся работ [1, 2].

Вихри, изучаемые в работе [1], представляют собой тип конического течения, в котором жидкие частицы из бесконечности, опускаясь, сходятся к оси и затем вдоль нее поднимаются вверх. Хотя в целом течение трехмерное, его завихренность оказывается функцией, причем быстро убывающей, только расстояния от оси симметрии, что позволяет считать задачу о взаимодействии таких вихрей эффективно двумерной. В полном соответствии с алгоритмом, изложенным в разд. 2, авторами [1] найдены уравнения движения для координат центров таких вихрей и полных завихренностей из условий ортогональности, предотвращающих секулярный рост мод дискретного спектра. К сожалению, определенно высказаться по поводу роли мод сплошного спектра здесь не представляется возможным, поскольку спектральные свойства соответствующей линеаризованной задачи (существенно более сложной по сравнению с рассмотренной выше) остаются пока невыясненными.

В работе [2] исследовано взаимодействие вихрей (солитонов) Россби. В этом случае соответствующая спектральная задача принципиально отличается от обсуждаемой здесь; исходя из физических представлений, она ближе к спектральной задаче для волновых систем: сплошной спектр задачи заведомо содержит континуум падающих и рассеянных волн. Принципиально, однако, что задача в [2] решается в так называемом квазистационарном приближении, когда все поправки $\Phi^{(n)}$ в формуле (2) считаются зависящими не от t , а лишь от

"медленного" времени $\tau = \varepsilon t$. Поскольку оператор \hat{L} теперь зависит только от пространственных переменных, ясно, что постановка начальной задачи типа (3) становится бессмысленной. Поэтому вместо начальной задачи возникает краевая с естественными граничными условиями: $\Phi^{(n)}(\tau, t) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Известно [10], что такая задача может быть разрешима лишь при условии ортогональности правых частей ($H^{(n)}$) всем собственным решениям однородного сопряженного уравнения $\hat{L}^+ \Phi^+ = 0$, удовлетворяющим тем же граничным условиям $\Phi^+(\tau, t) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$ (теорема Фредгольма). Нетрудно видеть, что эти условия совпадают, правда, в общем случае лишь с частью ^{*)} условий ортогональности, предотвращающих секулярный рост поправок в начальной задаче.

Существенно, что, кроме этих условий, в работе [2] получен дополнительно и целый континуум условий ортогональности, обусловленный, по мнению автора, континуальным же произволом, содержащимся в порождающем решении, описывающем семейство солитонов Россби. Представляется весьма интересным реализовать для таких локализованных образований подход, описанный в разд.2. Основным препятствием на этом пути является нерешенность спектральной задачи для соответствующего линеаризованного уравнения (3).

4. ВИХРЕВАЯ ПАРА

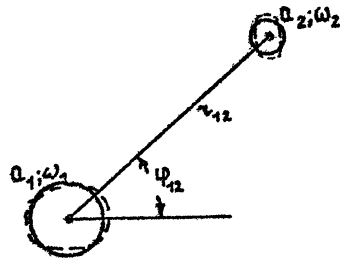
Рассмотрим с изложенных здесь позиций классическую задачу о движении двух вихрей в потенциальных полях друг друга (рис.3) в соответствии со сказанным выше, решение вблизи каждого из вихрей ищем в виде ряда

$$\Psi_{1,2}(\tau, t) = \Psi_{1,2}^{(0)}(\tau) + \sum_n \varepsilon^n \Psi_{1,2}^{(n)}(\tau, t), \quad (20)$$

где $\Psi_{1,2}^{(0)}$ - невозмущенные функции тока каждого вихря, $\Psi_{1,2}^{(n)}$ соответствующие поправки. Малым параметром задачи является отношение $\alpha_{1,2}/r_{1,2}$ ($\alpha_{1,2}$ - размеры вихревых ядер,

^{*)} Так, в частности, в краевой задаче отсутствуют собственные функции типа $\hat{L}_V \Phi^{(0)}$, содержащие в явном виде переменную t , если семейство порождающих решений имеет вид $\Phi^{(0)}(\tau - \vec{v}t - \vec{r}_0)$. Хотя, как уже отмечалось выше, уравнения для параметров уединенной волны, следующие из условий ортогональности к этому типу собственным функциям, в первом приближении оказываются несущественными.

r_{12} - расстояние между центрами вихрей (см. рис.3)). В каждом приближении поправка $\Psi_{1,2}^{(n)}$ содержит внешнюю по отношению к данному вихрю часть, обусловленную полем другого вихря. Величина поля $\Psi_2^{(0)}$ второго вихря в окрестности первого равна



Р и с. 3. Вихревая пара

$$\Psi_2^{(0)} = \omega_2 a_2^2 \ln \left| 1 + \left(\frac{r}{r_{12}} \right)^2 - 2 \frac{r}{r_{12}} \cos(\varphi - \varphi_{12}) \right|,$$

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad \tan \varphi_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (21)$$

а для поправки 1-го приближения $\Psi_1^{(1)}$ получим уравнение

$$\hat{L} \Psi_1^{(1)} = -\gamma (\Psi_2^{(0)}, \Delta \Psi_1^{(0)}). \quad (22)$$

Величину $\Psi_2^{(0)}$ из выражения (21) подставим в правую часть (22), предварительно разложив по степеням r/r_{12} и удержав лишь члены порядка $O(r/r_{12})$:

$$\begin{aligned} \gamma (\Psi_2^{(0)}, \Delta \Psi_1^{(0)}) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_2^{(0)}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \Delta \Psi_1^{(0)}}{\partial r} = \\ &= \frac{2}{r} \omega_1 \omega_2 a_2^2 \frac{r}{r_{12}} \delta(r - a_1) \cdot \sin(\varphi - \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (23)$$

В первом приближении возбуждается лишь первая (трансляционная) мода с $m=1$:

$$\Psi_1^{(1)} = \frac{\omega_1 \omega_2 a_2^2}{r_{12}} f_1(r) \exp[i(\varphi - \varphi_{12})] t, \quad (24)$$

которая растет секулярно во времени, что означает фактически снос вихря. Компенсация такой расходимости может быть осуществлена путем введения зависящих от времени координат центров вихрей: $\Psi_1^{(0)}[x - x_1(t), y - y_1(t)]$. Тогда правая часть (22) дополняется слагаемым

$$-\gamma(x, y - y_1(t); \Delta \Psi_1^{(0)}) = \frac{1}{r} \partial_r \Delta \Psi_1^{(0)} \partial_\varphi (y_1 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi). \quad (25)$$

Условия ортогональности в этом случае означают просто равенство нулю $H^{(1)}$, что дает

$$\dot{x}_{1,2} = \omega_{2,1} a_{2,1}^2 \frac{\sin \varphi_{12}}{r_{12}}; \quad \dot{y}_{1,2} = \omega_{2,1} a_{2,1}^2 \frac{\cos \varphi_{12}}{r_{12}}. \quad (26)$$

Уравнения (26) — это классические уравнения для пары точечных вихрей.

Не представляет труда получить решение и для поправок $\Psi_{1,2}^{(2)}$ в следующих приближениях. Так, с учетом известного решения при $n=1$ получаем

$$H_1^{(2)} = -\gamma (\Psi_2^{(1)}, \Delta \Psi_1^{(1)}),$$

где из $\Psi_2^{(1)}$ (см. (21)) извлекается лишь часть $\sim (\alpha_2/r_{12})^2$. Тогда

$$H_1^{(2)} = -\gamma (\Psi_2^{(1)}, \Delta \Psi_1^{(1)}) = \frac{1}{r} \omega_1 \omega_2 \alpha_2^2 \left(\frac{\alpha_1}{r_{12}} \right)^2 \delta(r - \alpha_1) \sin 2(\psi - \psi_{1,2}). \quad (27)$$

Из вида (27) заключаем, что во втором приближении возбуждается только вторая мода собственных колебаний вихревого ядра:

$$\Psi_1^{(2)} \sim \omega_2 \alpha_2^2 \left(\frac{\alpha_1}{r_{12}} \right)^2 \frac{\exp(i2\psi_{12}) - \exp(i\lambda_2 t)}{2\psi_{12} - \lambda_2}, \quad (28)$$

где

$$r_{12} = \text{const}, \quad \psi_{12} = \frac{\omega_1 \alpha_1^2 + \omega_2 \alpha_2^2}{r_{12}^2} = \text{const}$$

— решение системы (26). Резонансный знаменатель в приближении (28) не мал ($\psi_{12} \sim \omega_{1,2} (\alpha_{1,2}/r_{12})^2 \sim \epsilon \omega_{1,2}$, $\lambda_2 \sim \omega_{1,2}$), т.е. секулярного роста поправки нет и выполнения условий ортогональности не требуется. Решение (28) отвечает нулевым начальным условиям; слагаемое $\sim e^{i2\psi_{12}}$ описывает вынужденные колебания, возбуждаемые за счет неоднородности течения, создаваемого другим вихрем, а второе слагаемое $\sim e^{i\lambda_2 t}$ — собственные колебания. Отметим, что выражение (28) описывает эллиптические возмущения. Оно соответствует приближенному решению, описывающему взаимодействие эллиптических вихрей с малым эксцентриситетом [11,12], где также можно найти и подробное описание различных частных случаев, которые содержатся в (28).

5. ВИХРЬ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Обсуждение предыдущей задачи продемонстрировало, так сказать, "солитонную" ситуацию, когда в каждом приближении возбуждаются лишь моды дискретного спектра и полностью отсутствует возбуждение мод сплошного спектра. Теперь рассмотрим задачу в этом отношении противоположную, когда

структурные возмущения резонансно возбуждают весь континуум мод сплошного спектра. Обсудим эволюцию вихря в невесомой ($g = 0$) стратифицированной жидкости, невозмущенная плотность которой зависит от одной координаты ψ (пренебрегая действием силы тяжести, мы, однако, учитываем различие в инерционных свойствах элементов жидкости). Уравнения такой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \Psi + \mathcal{J}(\Psi, \Delta \Psi) &= - \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \times \frac{d\bar{V}}{dt} \right)_k, \\ \partial_t \rho + \mathcal{J}(\Psi, \rho) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Будем предполагать изменение ρ малым даже в глобальных масштабах. Тогда задача может быть сведена к виду, пригодному для решения методом возмущений. В нулевом приближении $\Psi = \Psi^{(0)}(\psi)$, $\rho = \rho_0 = \rho_0 \sin \psi$. Поправка первого приближения описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta \Psi^{(1)} + \mathcal{J}(\Psi^{(1)}, \Delta \Psi^{(0)}) + \mathcal{J}(\Psi^{(0)}, \Delta \Psi^{(1)}) &= \\ = - \left(\frac{\nabla \rho^{(1)}}{\rho_0} \times \frac{d\bar{V}^{(0)}}{dt} \right)_k &= \mathcal{J}(\rho^{(1)}, \rho^{(0)}), \quad (30) \\ \partial_t \rho^{(1)} + \mathcal{J}(\Psi^{(0)}, \rho^{(1)}) &= 0 \end{aligned}$$

со следующими начальными условиями:

$$\Psi^{(1)}(\vec{r}, t=0) = 0, \quad \rho^{(1)}(\vec{r}, t=0) = \rho^{(1)}(\psi), \quad (31)$$

где $\rho^{(1)}(\psi)$ — известная функция, описывающая начальную стратификацию, $\rho^{(0)}$ — давление в невозмущенном вихре. Второе уравнение (30) без труда интегрируется:

$$\rho^{(1)}(\psi, t) = \rho^{(1)} \left[\psi - \frac{t}{\tau} \Psi_{\psi}^{(0)} \right]. \quad (32)$$

С учетом (32) правая часть первого уравнения (30) может быть преобразована следующим образом:

$$H^{(1)} = \mathcal{J}(\rho^{(1)}, \rho^{(0)}) = \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \left(\frac{\partial_{\psi} \Psi^{(0)}}{\tau} \right)^2 \cos \left(\psi - \frac{t}{\tau} \Psi_{\psi}^{(0)} \right), \quad (33)$$

где производная $\rho^{(1)}$ берется по аргументу $\psi - \frac{t}{\tau} \Psi_{\psi}^{(0)}$.

Рассмотрим здесь пример двухслойной жидкости, когда в начальный момент времени ось вихря лежит на границе раздела (малым параметром задачи является величина $\varepsilon = 0(\Delta \rho / \rho_0)$). Этот пример допускает достаточно простой анализ решений

(19) во всех предельных случаях. Интересуясь, в частности, поведением решения вне вихревой области ($r > a$), выражение (19) для первой азимутальной гармоники ($m = 1$) можно привести к виду

$$\Psi_1^{(1)}(r > 1, t) \sim \left(\frac{\sqrt{t}}{2r} - \frac{r}{4\sqrt{t}} \right) \int_0^{r^2} r^{-1/2} e^{i\tau} d\tau + \frac{e^{it/r^2}}{2i} + \frac{\sqrt{t}}{r} \int_0^t r^{-1/2} e^{i\tau} d\tau. \quad (34)$$

Здесь и далее до конца переменные t и r считаются безразмерными (отнормированными соответственно на завихренность ω и радиус вихря a). Первые два слагаемых в выражении (34) описывают (автомодельным образом) вклад мод сплошного спектра, последнее слагаемое — трансляционную моду дискретного спектра.

Наиболее простой вид решение (34) принимает при $t \ll 1$ — это означает, что все жидкие частицы в вихре совершили лишь малую долю оборота:

$$\Psi_1^{(1)} \sim \frac{1}{2} \frac{t}{r} + O\left(\frac{t}{r^2}\right). \quad (35)$$

Здесь первый член демонстрирует сдвиг вихря как целостного образования (конечно, в таком приближении этот сдвиг много меньше размеров вихревой области).

При $t \gg 1$ (т.е. когда жидкие частицы в ядре вихря уже совершили много оборотов) неоднородность сдвига выявляется очень отчетливо. Так, при $t \gg 1, r \gg \sqrt{t}$, т.е. в области, где жидкие частицы по-прежнему еще не совершили ни одного оборота, решение имеет вид

$$\Psi_1^{(1)} \sim \frac{\sqrt{t}}{2r} + O\left(\frac{t}{r^2}\right), \quad (36)$$

т.е. периферия вихря (как и при $t \ll 1$) движется по-прежнему как целое; абсолютно сдвиг может быть даже большим (в единицах размеров ядра вихря), хотя относительно размера области, где справедливо соотношение (36), этот сдвиг мал.

В области же $r \ll \sqrt{t}$, т.е. $t \gg 1$ (область, где жидкие частицы совершили уже много оборотов)

$$\Psi_1^{(1)} \sim \frac{\sqrt{t}}{4r} + \frac{e^{i\pi k^2}}{2i} \quad (37)$$

и, судя по структуре первого слагаемого, можно было бы соотношение (37) трактовать как дрейф вихря. Однако, не-

смотря на ограниченность второго слагаемого в (37), имеющего осциллирующую структуру, оно оказывается преобладающим в выражении для азимутальной скорости ($\sim \partial_n \Psi_1^{(1)}$) и отражает процесс намотки границы раздела двухслойной жидкости на вихревое ядро. Ясно, что интерпретировать выражение (37) в целом как дрейф вихря нельзя: слишком быстро идет разрушение его структуры. Это связано здесь с "наматыванием" границы раздела на ядро вихря.

Другой пример, заслуживающий изучения, — динамика вихревой пары в плавно стратифицированной жидкости. Из экспериментов и простых теоретических моделей известно, что такая пара может двигаться в течение достаточно длительного времени как ограниченное тело с определенной плавучестью, совершая даже колебательные движения, и лишь затем разрушается [13-15]. Эта ситуация выглядит подходящей для описания ее в рамках теории возмущений.

В этой статье мы уделили основное внимание математическим методам и лишь кратко обсуждали их приложения. Тем не менее, общие свойства и различие между двумя типами локализованных структур — солитонами и гидродинамическими вихрями — проявились, на наш взгляд, достаточно ясно: структурная устойчивость вихревых структур оказывается "слабее", и она легче может быть разрушена воздействием слабых возмущений. Вместе с тем, провести резкую грань здесь вряд ли возможно, и аналогия "вихрь-частица" в ряде важных случаев имеет смысл. Нам кажется, что этот круг задач заслуживает внимания как теоретиков, так и экспериментаторов.

Л и т е р а т у р а

1. Гончаров В.П., Гряник В.М. Динамика уединенных диссипативных вихрей, вихревые решетки и их устойчивость // ЖЭТФ. 1986. Т.91, №5(11). С.1653.
2. Ларичев В.Д. Аналитическая теория слабого взаимодействия солитонов Россби // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Т.25, №2. С.125.
3. Keener J.R., McLaughlin D.W. Soliton under perturbation // J. Mat. Phys. 1977. V.18, N.7. P.2008.

4. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A. Interaction of solitons in nonintegrable systems // *Physica D*. 1981. V. 3, N.1, 2. P.428.
5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
6. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965. V.15, N.6 P.240.
7. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н. Трансформация волны на поверхности жидкости переменной глубины // *Изв. АН СССР ФАО*. 1970. Т.6, №9. С.934.
8. Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I. Three-dimensional particle-like solutions of coupled nonlinear fields // *Phys. Lett. A*. 1989. V.137, N.6. P.250.
9. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
10. Владимирова В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
11. Абрашкин А.А. К теории взаимодействия двух плоских вихрей в идеальной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1987. №1. С.62.
12. Melander M.V., Styczek A.S., Zabusky N.J. Elliptical desingularized vortex model for two dimensional Euler equations // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V.53, N.13. P.1222.
13. Saffman P.G. The motion of a vortex pair in a stratified atmosphere // *Studies in Appl. Math.* 1972. V.11, N.2. P.107.
14. Hill F.M. A numerical study of the descent of a vortex pair in a stratified atmosphere // *J. Fluid Mech.* 1975. V.71, N.1. P.1.
15. Иванов А.В., Лебедев А.И., Островский Л.А., Пискарев А.Л. Экспериментальное исследование движения ламинарных вихревых пар в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1987. №2. С.183.

ГЕНЕРАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

А. А. Коробкин, И. В. Стурова

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема учета влияния реальной глубины жидкости на волновые процессы внутри нее и на свободной поверхности относится к широкому кругу проблем о распространении сигнала в неоднородной среде. Исследования в этом направлении получили большое развитие в задачах дифракции и рефракции свободных волн. Однако изучению поведения вынужденных волн, характер возбуждения которых существенно зависит от глубины жидкости, посвящено пока сравнительно мало работ.

Необходимость учета реального рельефа дна на процессы, происходящие в жидкости и на ее поверхности, возникает в морской инженерии (проектирование сооружений в шельфовой зоне), судовождении (определение волнового следа и силы сопротивления при движении на разных глубинах), при анализе картины внутренних волн в океане.

В наиболее общем виде задача формулируется следующим образом. Движение жидкости описывается уравнениями Эйлера, на твердых границах выполняется условие непротекания, на свободной поверхности — динамическое и кинематическое условия. В начальный момент ($t = 0$) известны распределение плотности жидкости, положение свободной границы и нормальная скорость ее частиц. Во все время движения известно распределение давления вдоль свободной поверхности. Требуется определить движение жидкости и эволюцию свободной поверхности при $t > 0$, а также оценить влияние на волновые

процессы рельефа дна. Последнее осуществляется сравнением решения исходной задачи с решением вспомогательной задачи, в которой область, занятая жидкостью в состоянии покоя, заменяется полосой, причем ширина полосы совпадает со средней глубиной жидкости или равна бесконечности, условия на свободной границе и начальные условия имеют прежний вид. Заметим, что полное решение проблемы предполагает, что соответствующая начально-краевая задача для ровного дна или безграничной жидкости детально исследована. Однако даже для ровного дна полная нелинейная задача остается сложной, так как вид области течения при $t > 0$ заранее неизвестен и должен быть определен в ходе решения.

В полной постановке задача о генерации поверхностных волн над неровным дном была исследована для плоского случая в работе [1]. Решение исходной задачи сведено к определению двух аналитических в полосе постоянной толщины функций, одна из которых есть комплексный потенциал скоростей, а вторая осуществляет конформное отображение полосы на область течения. Граничные условия нелинейные и имеют достаточно сложный вид. С помощью интегралов типа Шварца эти условия приводятся к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений. Решение ищется в виде кусочно-постоянных функций на каждом шаге по времени. В качестве примера рассмотрено набежание одиночной волны на мелководье. Отмечается быстрое разрушение численного решения, что связывается с физической неустойчивостью задачи о волнах. При численных расчетах ошибки округления порождают мелкую "зыбь", для которой крутизна увеличивается со временем, приводя к "опрокидыванию" мелких волн. К этой работе примыкает [2], где в качестве примера рассматривается эволюция односвязной жидкой области конечных размеров, полностью ограниченной свободной поверхностью, внешние массовые силы отсутствуют. Способом, аналогичным [1], исходная задача сводится к нелинейной задаче Коши, решение которой ищется в шкале банаховых пространств. Получена оценка для времени существования решения.

Точные решения уравнений Эйлера для произвольно стратифицированной жидкости построены в [3] с учетом результатов Герстнера. Напомним, что Герстнер дал частное решение для вихревых волн конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости постоянной плотности. Как отмечено [3], это же решение применимо и для стратифицированной жидк

кости с изменением закона распределения давления. Для плоского наклонного дна предполагается, что вектор перемещений жидких частиц параллелен плоскости дна и описывается формулами Герстнера. Линия контакта свободной поверхности с твердой плоскостью дна представляет собой волну конечной амплитуды, перемещающуюся вдоль берега со скоростью $c = (g \sin \beta / \kappa)^{1/2}$, где g — ускорение свободного падения, β — угол наклона дна к горизонтали, κ — волновое число.

Этими работами, по-видимому, и ограничивается список исследований задачи о нестационарных волнах над неровным дном в точной постановке. Основной объем исследований выполнен для случая пологих волн, т.е. волн малой амплитуды, крутизна которых далека от критической.

Пусть функции, описывающие рельеф дна и деформацию свободной поверхности, достаточно гладкие. Принимая за масштаб длины характерную глубину водоема, введем в рассмотрение следующие безразмерные величины: κ_B — максимальная средняя кривизна дна, κ_F — максимальная средняя кривизна свободной поверхности, α_B — максимальное отклонение реального рельефа дна от некоторой срединной плоскости, α_F — максимальное отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного уровня. С помощью этих характеристик можно классифицировать приближенные теории следующим образом:

- 1) $\kappa_B \ll 1$, $\kappa_F \ll 1$, $\alpha_B \sim 1$, $\alpha_F \sim 1$ — теория "мелкой воды",
- 2) $\kappa_B \ll 1$, $\kappa_F \ll 1$, $\alpha_B \sim 1$, $\alpha_F \ll 1$ — линейная теория длинных волн,
- 3) $\kappa_B \ll 1$, $\kappa_F \sim 1$, $\alpha_B \sim 1$, $\alpha_F \ll 1$ — линейная "лучевая" теория,
- 4) $\kappa_B \sim 1$, $\kappa_F \sim 1$, $\alpha_B \sim 1$, $\alpha_F \ll 1$ — линейная теория,
- 5) $\kappa_B \sim 1$, $\kappa_F \sim 1$, $\alpha_B \ll 1$, $\alpha_F \ll 1$ — приближение "малой неровности" и т.д. В математическом плане две первые теории приводят к начально-краевым задачам для нелинейных (1) или линейных (2) дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Анализ такого сорта задач в настоящее время достаточно развит и требует специального рассмотрения. В настоящей работе ограничимся случаем, когда деформация свободной поверхности жидкости мала, что позволяет снести граничные условия на первоначально невозмущенный уровень и, в первом приближении, линеаризовать их. Уравнения движения и условие непротекания на дне при этом остаются без изменений.

Потенциальное движение однородной жидкости в рамках линейной теории полностью описывается потенциалом скоростей $\Phi(x, t)$, который удовлетворяет соотношениям

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \Phi_{tt} + \Phi_x = -p_t(x, y, t) \quad (\text{при } x=0),$$

$$\nabla\Phi \cdot n = 0 \quad (\text{на дне}), \quad \Phi_t = -\eta_0(x, y), \quad \Phi_x = \eta_1(x, y) \quad (t=0, x=0)$$

Р. венства записаны в безразмерных переменных в правой декартовой системе координат (x, y, z) , причем ось x направлена в сторону, противоположную направлению ускорения свободного падения, плоскость $x=0$ сопадает с невозмущенным уровнем жидкости. Здесь Ω — область, занятая жидкостью, $p(x, y, t)$ — заданное распределение давления вдоль свободной поверхности, $\eta_0(x, y)$ — начальное отклонение жидких частиц на свободной поверхности от невозмущенного уровня, $\eta_1(x, y)$ — начальное распределение нормальных к свободной поверхности скоростей жидких частиц. Если рельеф дна задан в виде $z = -H(x, y)$, то n — нормаль к линии дна — равна $n = (H_x, H_y, 1)$

Большинство результатов в проблеме генерации поверхностных волн получены в рамках приведенной линейной модели. Если дно бассейна ровное ($H \equiv 1$), то решение задачи выписывается в квадратурах и оно детально исследовано (см., например, обзоры [4, 5]). Однако для неровного дна проблема остается сложной даже в линейной постановке, так как требуется решать краевые задачи для уравнения Лапласа в областях с криволинейными границами. Поэтому трудно рассчитывать на создание единого метода решения такого сорта задач, за исключением прямого численного счета. Развиваются специальные методы, которые используют ту или иную особенность рельефа дна точно или приближенно.

2. ПЛОСКОЕ НАКЛОННОЕ ДНО

Проблема генерации поверхностных волн над равномерно понижающимся дном наиболее исследована. Ранние работы в этой области указаны в монографиях [6, 7]. Решения плоской задачи Коши—Пуассона и задачи о волнах, вызванных перемещением участка дна бассейна, представлены в работе [8]. Подробно изучено влияние периодического возмущения: пульсирующий погруженный источник [9–11] и поверхностное давление [12]. В данной задаче существуют такие частоты колебаний и положения источника, при которых энергия от источника не распространяется. Плоская нестационарная задача о генерации волн движущейся областью поверхностного давления

осциллирующего со временем, рассмотрена в работе [13]. Построена асимптотика решения на больших расстояниях от берега. По форме результаты совпадают со случаем безграничной жидкости с несколько измененными амплитудами.

В пространственном случае волновая картина в жидкости с наклонным дном существенно усложняется наличием береговых волн. Простейший тип этих волн существует для любых значений угла наклона плоскости дна к горизонтали β и связан с именем Стокса. Потенциал скорости береговой линейной волны Стокса имеет вид

$$\Phi = C_0 \cos(ky - \omega t) \operatorname{erf} [k(z \sin \beta - x \cos \beta)], \quad \omega^2 = gk \sin \beta.$$

Фазовая скорость распространения таких волн вдоль берега равна $c = (g \sin \beta / k)^{1/2}$ и совпадает со скоростью перемещения волн, изученных в [3]. Деформация свободной поверхности описывается формулой

$$\eta(x, y, t) = C_0 \frac{\omega}{g} \sin(ky - \omega t) \operatorname{erf}(-kz \cos \beta),$$

которая и объясняет название этих волн: вертикальные отклонения жидких частиц от невозмущенного уровня заметны только у береговой черты. В работе [14] показано, что в рамках линейной теории для заданного угла наклона β существует (помимо волн Стокса) конечное число береговых волн, дисперсионные соотношения для которых имеют вид

$$\omega^2 = gk \sin [(2n+1)\beta], \quad (2n+1)\beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Волна Стокса соответствует $n=0$.

Для пространственного случая при $\beta = \pi / [2(2n+1)]$, $n = 1, 2, \dots$ построены полная система собственных функций [15, 16], соответствующая непрерывному и дискретному спектрам, и нестационарная функция Грина. Асимптотический анализ полученных решений в дальнем поле показал, что составляющая волнового поля, обусловленная функциями дискретного спектра, локализована в прибрежной зоне. Получено также решение стационарной задачи об обтекании точечного массового источника равномерным потоком, направленным вдоль берега. Стационарное движение жидкости вблизи тела митчелловского типа для данной задачи исследовано в работе [17], где дано обобщение формулы Митчелла для волнового сопротивления на случай наклонного дна.

Подробное исследование стационарной задачи обтекания малой неровности, помещенной на наклонном дне, равномерным со скоростью U потоком жидкости, а также задачи о генерации волн заданным распределением поверхностного давления на потоке выполнено в работе [18]. Форма донного препятствия задается в виде

$$z' = \int_0^{\infty} b(\kappa) \exp(-\kappa t' C_n) \cos \kappa y \, d\kappa,$$

$$t' = t \cos \beta - z \sin \beta, \quad z' = z \cos \beta + t \sin \beta, \quad C_n = \cos[2\beta(n+1)]$$

и рассматривается решение, соответствующее дискретной части спектра. Для данного n волны существуют только вниз по потоку и представляют собой суперпозицию $n+1$ стоячих береговых волн, длина которых равна

$$\lambda_n = \frac{2\pi U^2}{g \sin[(2n+1)\beta]} \quad (n = 0, 1, \dots, n).$$

При $n=0$ возбуждается только одна береговая волна ($n=0$), которая является волной Стокса. Расчеты показывают, что если высота препятствия знакопостоянна, то доминирующее влияние оказывает береговая волна Стокса. При более сложном рельефе преобладающими могут оказаться более высокие моды.

3. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ БАРЬЕР В БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

Впервые задача рассеяния монохроматической волны, падающей на погруженную вертикальную пластину, была решена в [19]. Дальнейшие обобщения этой задачи содержатся в работах [20-23]. Основным элементом этих решений является введение вместо потенциала скоростей Φ -й искомой функции так, что $\Phi_z - \omega^2 \Phi = f$, где ω - частота падающей волны. Функция гармоническая внутри области течения, равна нулю на свободной границе, ее нормальная производная обращается в нуль на вертикальных стенках. Такая функция может быть построена в общем виде с помощью методов теории аналитических функций, после чего потенциал скоростей определяется как решение неоднородного дифференциального уравнения пер-

вого порядка. Пространственная задача решена методом сопряжения [24]. Получено интегральное уравнение относительно составляющей скорости жидких частиц непосредственно над барьером. Для бесконечно глубокой жидкости это уравнение решается явно, что позволяет детально проанализировать вид решения.

Соответствующая нестационарная задача была рассмотрена в [25] и использованы методы, разработанные для периодического случая. Построенное решение дает асимптотику движения жидкости при больших временах, но не позволяет проследить эволюцию процесса. Используя метод, несколько отличный от классического, в [26] получено решение плоской нестационарной задачи в квадратурах. Интересно отметить, что решение построено при дополнительном условии его ограниченности на больших временах.

К этим задачам примыкает так называемая задача Ларсена [27], в которой рассматривается плоское движение экспоненциально стратифицированной жидкости в канале под крышкой в присутствии вертикального барьера на дне. Внутренняя вынужденная монохроматическая волна рассеивается на барьере, что приводит к сложной картине течения. При анализе использовано представление решения с помощью нормальных мод и даны явные формулы для случая набегания главной моды. Отмечается, что для построения траекторий жидких частиц приходится использовать до 300 первых мод. Родственная, но уже нестационарная задача о малых горизонтальных колебаниях барьера как единого целого исследована в работе [28]. Решение такой задачи удается построить в квадратурах благодаря оригинальному представлению решения вспомогательной задачи о движении стратифицированной жидкости в полуполосе, вызванном колебаниями по заданному закону вертикальной стенки канала. Эта работа была существенно обобщена [29] на случай произвольных колебаний барьера, а также рассмотрены новые задачи, когда барьер не касается стенок канала или два барьера образуют в канале диафрагму. В таких работах подтверждается впервые отмеченное Ларсеном явление распространения особенностей поля скоростей, возникающих на ребре барьера, вдоль характеристик уравнения периодических внутренних волн и их отражений от стенок канала. Нестационарная задача о движении слабо стратифицированной жидкости под крышкой, вызванном диполем, проходящим со сверхкритической скоростью над вертикальным барьером

на дне, рассмотрена в [30]. Основными элементами построенного решения является матрица рассеяния, элементы которой зависят от геометрии препятствия, но не от механизма генерации волн, и некоторые универсальные функции, не зависящие от наличия в канале барьера.

4. ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕРОВНОСТЬ ДНА

Среди неровностей рельефа дна, влияние которых на установившиеся волновые процессы может быть успешно исследовано, отметим те, для которых область течения представима в виде объединения или пересечения канонических областей. В каждой канонической области решение краевых задач для уравнения Лапласа записывается в явном виде и затем используется либо метод сопряжения (если область течения есть объединение нескольких канонических областей), либо альтернирующий метод Шварца (если область течения может быть представлена как результат пересечения нескольких более простых областей). Метод сопряжения приводит либо к интегральным уравнениям на участках сопряжения, либо к бесконечной системе линейных уравнений, которые затем решаются численно.

Такой прием использован, например, для системы двух параллельных вертикальных барьеров на дне [31], бесконечного уступа [32], прямоугольной траншеи на дне [33] и т.д. В отличие от метода сопряжения альтернирующий метод Шварца приводит к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается краевая задача для уравнения Лапласа, но уже в области более простой формы, чем исходная. Нам неизвестны работы, в которых бы использовался этот метод. Неизвестны также работы, в которых метод сопряжения применялся бы для решения нестационарных задач. Отметим только, что его применение к задачам поверхностных волн приводит либо к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра, либо к абстрактному уравнению Вольтерра, у которых ядро есть нелокальный оператор по пространственным переменным.

В общем виде плоская задача о рассеянии монохроматической волны на неровном участке рассмотрена в работе [34]. При использовании конформного отображения области течения на прямолинейную полосу исходная задача сводится к одному интегральному уравнению относительно значения потенциала скоростей на свободной поверхности. Это уравнение может

быть решено методом последовательных приближений при некотором ограничении на характер неровности дна. Ограничение имеет вид интегрального неравенства. Найдены верхний и нижний пределы для коэффициента отражения, они вычисляются по известному конформному отображению.

Для плоской задачи в [35] разработан метод, который в случае локализованной неровности дна позволяет определить форму свободной поверхности с наперед заданной точностью. Известно, что задача о генерации и эволюции линейных поверхностных волн над неровным дном может быть сведена к задаче Коши для одного эволюционного нелокального уравнения относительно значения потенциала скоростей на свободной границе $\varphi_0(x, t) = \Phi(x, 0, t)$,

$$\varphi_{0xt} + N \langle \varphi_0 \rangle = f(x, t) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^1);$$

$$\varphi_0 = a_0(x), \quad \varphi_{0t} = a_1(x) \quad (t=0, x \in \mathbb{R}^1).$$

Пусть в каждый момент времени на свободной поверхности известна функция $\Phi(x, 0, t)$. Решая краевую задачу для уравнения Лапласа в области течения, можно определить $\Phi_z(x, 0, t)$. Линейный нелокальный оператор $N: \Phi(x, 0, t) \rightarrow \Phi_z(x, 0, t)$ называется оператор "нормальная производная". Определение вида этого оператора — самостоятельная непростая задача. Пусть известно конформное отображение $z_1 = z_1(\xi), z_1 = x + iy, \xi = \lambda + i\mu$ единичной полосы $-1 < \mu < 0, -\infty < \lambda < +\infty$ на область течения, тогда оператор N имеет вид

$$N \langle \varphi_0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda'_f(\sigma) \varphi_0(\sigma, t) d\sigma}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} [\lambda_f(x) - \lambda_f(\sigma)]}.$$

Функция $\lambda_f(x)$ — такая, что $x = \operatorname{Re} z_1(\xi) = x_1[\lambda_f(x), 0]$, — имеет простой физический смысл: если заменить свободную границу твердой крышкой и организовать обтекание неровности дна равномерным потоком с единичной скоростью, то скорость жидких частиц на верхней границе будет равна $\lambda'_f(x)$. Оператор N допускает разложение $N = N_0 + N_R$, где N_0 — оператор "нормальная производная" для ровного дна ($\lambda_f(x) = x$), а N_R — сглаживающий оператор. Выделяя с учетом указанного разложения главную часть эволюционного уравнения и обращая ее, приходим к абстрактному интегральному уравнению Вольтерра

$$\varphi_0(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x, t) + \int_0^t \Lambda(t-\tau) \varphi_0(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{\varphi}_0(x, t)$ - решение исходной задачи для ровного дна, Λ - нелокальный оператор, зависящий от времени. Этот оператор переводит интегрируемую функцию в бесконечно дифференцируемую, т.е. является сглаживающим. Это его свойство позволяет свести решение исходной задачи к решению бесконечной вполне регулярной системы интегральных уравнений Вольтерра относительно счетного набора вспомогательных функций.

В качестве примера в работе [36] рассмотрена задача Коши-Пуассона для слоя жидкости глубиной H с вертикальным барьером на дне высотой $0,8H$. Относительное отклонение деформации свободной границы от случая ровного дна достигает 20% при $t = 10(H/g)^{1/2}$.

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

При произвольном характере рельефа дна задача о генерации волн даже в линейном приближении считается сложной, поэтому широкое распространение получили различные приближенные подходы в тех случаях, когда рельеф дна имеет некоторый специальный вид. Наиболее известными приближениями являются лучевое приближение и приближение малой неровности.

5.1. Лучевое приближение

Пусть отношение глубины водоема к характерному линейному масштабу D , на котором глубина меняется существенно мало по сравнению с единицей. Тогда говорят, что рельеф дна меняется плавно, и используют для описания распространения поверхностных волн лучевой метод, метод эквивалентных уравнений, а в более сложных случаях - метод канонического оператора Маслова.

Лучевой метод применяется в стационарных задачах о рассеянии набегающей волны неровным участком дна, причем длина падающей волны много меньше D (коротковолновое приближение). Характерной особенностью метода является предполо-

жение, что, проходя над неровностью, волна плавно меняет свои амплитуду и длину, но сохраняет свою структуру. Такое предположение позволяет получить приближенные уравнения, описывающие деформацию набегающей волны. Аналогичные рассуждения с некоторыми модификациями используются и при анализе нестационарных задач о волнах, генерируемых начальным локальным возмущением свободной границы.

Рассматривается плоская линейная начально-краевая задача

$$\Delta \Phi = 0 \quad (-h(\epsilon \tau) < z < 0), \quad \Phi_{tt} + \Phi_z = 0 \quad (z=0) \quad (1)$$

$$\Phi_z + \epsilon h'(\epsilon \tau) \Phi_x = 0 \quad (z = -h(\epsilon \tau)), \quad \Phi = 0, \quad \Phi_t = -\delta(\tau - \tau_0) \quad (t=0, z=0),$$

которая описывает в безразмерных переменных движение жидкости в криволинейной полосе. Движение вызвано распадом под действием силы тяжести начального концентрированного возвышения свободной границы. Функция h гладкая, параметр ϵ характеризует плавность изменения глубины бассейна. При $\epsilon |\tau - \tau_0| = O(1)$, $\epsilon \dot{\tau} = O(1)$ т.е. когда возмущения отошли от источника недалеко (в масштабе D), дно считается ровным, глубина бассейна равна $h(\epsilon \tau_0)$. Такая задача решается обычными методами и позволяет получить параметры сформировавшегося нестационарного цуга волн, который организуется при $1 \ll t \ll 1/\epsilon$. Структура этого цуга следующая:

$$\Phi(x, 0, t) \approx t^{1/2} F(\alpha) \operatorname{erf} \left\{ \sqrt{\alpha} [\alpha(x - \tau_0) + Q(\alpha)t] \right\} + \text{с.с.} + \dots$$

$$\alpha = \alpha \left[(x - \tau_0)/t \right], \quad Q(\alpha) = \left[\alpha \operatorname{th} \alpha h(\epsilon \tau_0) \right]^{1/2}. \quad (2)$$

При $t \sim 1/\epsilon$ цуг начинает испытывать влияние неровности, причем по предположению структура решения сохраняется. Отсюда

$$\Phi(x, z, t) = \epsilon^{1/2} \operatorname{erf} \left[\frac{z}{\epsilon} \theta(\xi, \tau) \right] \sum_{j=0}^{\infty} (i\epsilon)^j A_j(\xi, z, \tau), \quad (3)$$

где $\xi = \epsilon x$, $\tau = \epsilon t$, фазовая функция θ и амплитудные функции A_j являются искомыми. Подставляя представление (3) в уравнение (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ , будем получать задачи для определения искоемых функций. Например, для фазовой функции имеем уравнение

$$\theta_{\tau}^2 = \theta_{\xi} \operatorname{th}(\theta_{\xi} h(\xi)),$$

которое по форме совпадает с дисперсионным соотношением для бассейна глубиной $h(\xi)$ (ξ - параметр). Построение главного члена разложения (3) сводится к задаче Коши для шести уравнений первого порядка [37,38].

Заметим, что в нестационарном процессе участвуют как короткие волны ($\alpha \gg 1$), так и длинные ($\alpha \approx 0$). И если для первых сделанное выше предположение справедливо, то для длинных волн оно теряет силу. На это указывает уже то обстоятельство, что $F(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$ в выражении (2). Положение облегчает, что длинные волны сосредоточены вблизи головной волны, короткие волны отстают от них и формируют осциллирующий шлейф цуга, эволюция которого описывается разложением (3). В области головной волны решение имеет другую структуру, вид которой получается, если записать асимптотику типа (2) для области длинных волн:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau}(x, z, t) = \epsilon^{-1/3} \int_{\tau=0}^{\infty} \epsilon^{\tau} \left[A_j(\xi, z, \tau) \operatorname{Ai}(\epsilon^{-2/3} \rho(\xi, \tau)) + \right. \\ \left. + \epsilon^{-1/3} B_j(\xi, z, \tau) \operatorname{Ai}'(\epsilon^{-2/3} \rho(\xi, \tau)) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\operatorname{Ai}(\tau)$ - функция Эйри. Как и для коротких волн, искомые функции A_j, B_j, ρ определяются с помощью задачи Коши для системы уравнений первого порядка. Оказывается, что представление (4) включает в себя (3), т.е. при $\epsilon \tau \sim 1$, $\epsilon t \sim 1$ как для длинных, так и для коротких волн главный член асимптотики может быть получен из представления (4). К этому же результату можно подойти с помощью метода эквивалентных уравнений. Метод состоит в том, что исходная задача сравнивается с некоторой модельной задачей, имеющей точное решение и содержащей все характерные особенности исходной задачи. За такую модельную задачу естественно принять задачу для ровного дна и искать асимптотическое разложение для задачи (1) в виде соответствующего интеграла с несколькими неопределенными функциями.

Другой метод предложен в работе [39] и заключается в том, что начальные данные исходной задачи разлагаются на длинноволновую и коротковолновую составляющие. Например, для начального возвышения свободной границы $\eta_0(\tau)$ можно написать

$$\eta_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0^F(\xi) \chi(\xi) e^{i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0^F(\xi) [1 - \chi(\xi)] e^{i\xi x} d\xi,$$

где $\chi(\xi) \in C_0^\infty(R^1)$, $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi| < 1/2$ и $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi| > 1$. Первое слагаемое дает длинноволновую составляющую $\eta_g(x)$, второе — коротковолновую $\eta_k(x)$. Соответственно (1) разбивается на две задачи. Первая задача (при $\eta(x, 0) = \eta_g(x)$) решается методом эквивалентных уравнений, причем за модельную задачу принимается задача о распространении длинных волн на мелкой воде. Вторая задача ($\eta(x, 0) = \eta_k(x)$) решается лучевым методом.

Следует указать, что в трехмерном случае ситуация осложняется тем, что лучевой метод применим не для всех видов пологих неровностей. Так, например, может происходить фокусировка волн и могут появляться области, в которых лучевой метод предсказывает неограниченные амплитуды возмущений. Согласно методу сращиваемых асимптотических разложений такие области следует выделять и строить для них внутреннюю асимптотику, которая должна быть согласована в зонах перекрытия с результатом лучевого метода. Эта задача решается с помощью канонического оператора Маслова. Оператор Маслова фиксирует структуру "внутренней" асимптотики и обеспечивает согласование с "внешним" разложением. Грубо говоря, в особых областях решение представляется в виде обратного преобразования Фурье от разложения (3), причем функции θ , Λ_j зависят не только от ξ, ζ, τ (ξ, ζ — горизонтальные переменные трехмерной задачи), но и от переменной интегрирования. Этим методом в работе [40] построено асимптотическое решение нестационарной задачи и дано его обоснование. В качестве примера представлены формы волновых следов, возбуждаемых источником, движущимся нестационарно над переменным рельефом дна.

Решение пространственной задачи Коши—Пуассона для бассейна с плавно меняющимся дном с помощью лучевого метода представлено в работе [41]. Исходная начально-краевая задача сведена к системе (14) обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлены примеры расчетов.

Задача о поле внутренних волн, возбуждаемых движущимся над плавно меняющимся дном точечным источником массы, рассмотрена в [42]. Выписан первый член асимптотики решения

в окрестности фронта отдельной моды. В качестве примера рассмотрено равномерное горизонтальное движение источника параллельно берегу над наклонным дном в однородно стратифицированной жидкости.

В заключение раздела, посвященного плавно меняющемуся дну, отметим, что в этом приближении полностью отсутствуют отраженные волны. Это свойство может служить косвенной проверкой справедливости использования этого приближения.

5.2. Приближение малой неровности

На основе метода возмущений можно исследовать влияние локализованной донной неровности, высота которой мала по сравнению со средней глубиной жидкости. При этом решение ищется в виде ряда, первый член которого представляет собой хорошо известное решение для ровного дна, а следующие (как правило, ограничиваются лишь первым приближением) описывают влияние неровного дна. Влияние донного рельефа в этом приближении проявляется следующим образом: в дополнение к тем волновым движениям, которые возникают в жидкости с ровным дном от рассматриваемого генератора волн, появляются волновые возмущения, вызванные колебаниями участка дна, соответствующего размерам донной неровности. Можно сказать, что одновременно с началом действия основного генератора начинает "звучать" донная неровность. Появляются дополнительные волновые возмущения и, следовательно, в задачах о движущемся источнике — изменение волнового сопротивления. Нетрудно определить поток энергии, вносимой этими фиктивными колебаниями, величина которого в какой-то степени может служить энергетической мерой влияния донной неровности на волновое поле.

Условие применимости приближения малой неровности проверено сопоставлением с численным решением данной линейной задачи конечно-разностным методом [43]. Как в задаче Коши-Пуассона, так и в задаче о движущемся давлении удовлетворительное совпадение приближенного решения с численным наблюдается лишь для неровностей, высота которых не превышает 20% от полной глубины жидкости.

Плоская задача Коши-Пуассона для двухслойной жидкости с неровным дном исследована в работе [44]. Усложняющим обстоятельством в данной задаче является то, что в волновых добавках, вызванных донной неровностью, не удается подсчитать независимо вклады поверхностной и внутренней мод.

В этом приближении рассмотрен также один из интересных типов донных неровностей — рифленое дно [45]. Источником волн является круговой цилиндр, движущийся с постоянной скоростью. Предполагается, что цилиндр старует далеко от неровности и при подходе к ней за телом уже сформировался стационарный волновой пучок. Рассмотрено два типа стратификации жидкости: двухслойная жидкость под твердой крышкой и однородно стратифицированная полубезграничная жидкость. Для двухслойной жидкости (и в частном случае для поверхностных волн в однородной жидкости) при выполнении условий брэгговского резонанса (длина набегающей волны в два раза превышает длину волны донной неровности) отраженная волна становится максимальной, ее амплитуда линейно возрастает с числом рифелей. Проходящая волна отсутствует в том случае, когда на длине неровности укладывается целое число периодов рифелей. Для случая однородно стратифицированной жидкости наиболее заметное влияние волнистое дно оказывает тогда, когда длина набегающей внутренней волны совпадает с длиной волны донной неровности.

В настоящей работе не рассматриваются проблемы, связанные с исследованием корректности постановок начально-краевых задач о генерации волн и обоснованием приближенных моделей. С основными результатами в этом направлении можно ознакомиться по монографии [46]. Для линейного приближения исследование свойств решения в зависимости от данных задачи проведено в работе [47].

Л и т е р а т у р а

1. Дородницын А.А. Плоская задача неустановившихся движений тяжелой жидкости // Приложения теории функций в механике сплошной среды: Тр. междунар. симпоз. (Тбилиси, 17-23 сентября 1963 г.) / Под ред. Н.И. Мусхелишвили, Л.И. Седова, К. Михайлова. Т. 2: Механика жидкости и газа, математические методы. М.: Наука, 1965. С.171.
2. Овсянников Л.В. Плоская задача о неустановившемся движении несжимаемой жидкости со свободной границей // Динамика сплошной среды. Вып. 8. Новосибирск, 1971. С.22.

3. Chia-Sshun Yih. Note on edge waves in a stratified fluid // J. Fluid Mech., 1966, v.28, p.765.
4. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik, Berlin Springer, 1960. Bd 9, S. 446.
5. Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Мех. жидкости и газа / ВИНТИ. М. 1987. Т.21. С.93.
6. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
7. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981. Т.2.
8. Дорфман А.А. Плоская задача о неустановившихся волнах над наклонным дном // Исслед. цунами, 1986, № 1. С.102.
9. Сретенский Л.Н. Периодические волны, создаваемые источником, находящимся над наклонным дном // ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 5. С.1050.
10. Сретенский Л.Н. Периодические волны, создаваемые источником, находящимся над наклонным дном // ПММ. 1963. Т.27, № 6. С.1012.
11. Morris C.A.N. The generation of surface wave over a sloping beach by an oscillating line-source. I. The general solution. II. The existence of wave-free source positions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1974, v. 76, N 3, p. 545, 555.
12. Chaudhuri K. Gravity waves due to a periodic surface pressure on a sloping beach // Proc. Indian Nat. Sci Acad., 1985, v. A51, N 2, p. 419.
13. Pramanik A.K. The waves generated by a moving oscillatory surface pressure on a sloping beach // ZAMM, 1973, v. 53, N.10, p. 601.
14. Ursell F. Edge waves on a sloping beach // Proc. R. Soc. Long. 1952, v. A 214, p. 79.
15. Дорфман А.А. Пространственная задача Коши-Пуассона для области переменной глубины // ДАН СССР. 1986. Т.286. № 2. С.321.

16. Дорфман А.А. Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины // Изв. АН СССР. МЖТ. 1986. № 2. С.104.
17. Дорфман А.А. Пространственная задача об установившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины // Колебания и волны в жидкости. Горький, 1988. С.28.
18. Evans D.V. Mechanisms for the generation of edge waves over a sloping beach // J. Fluid Mech., 1988, v. 186, p. 379.
19. Dean W.R. On the reflection of surface waves by a submerged plane barrier // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1945, v. 41, p. 231.
20. Ursell F. The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1947, v. 43, p. 374.
21. Ursell F. On the waves due to the rolling of a ship // Quart. J. Mech Appl. Math., 1948, v. 1, p. 246.
22. Хаскинд М.Д. Излучение и дифракция поверхностных волн вертикально плавающей пластиной // ПММ. 1959. Т. 23, № 3. С. 546.
23. Lewin M. The effect of vertical barriers on progressing waves // J. Math. Phys., 1963, v. 42, N 4, p. 287.
24. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: ЛГУ. 1981.
25. Mei C.C. Radiation and scattering of transient gravity waves by vertical plates // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1960, v. 19, Pt. 4, p. 417.
26. Коробкин А.А. Задача Коши-Пуассона для бассейна с вертикальным барьером // ПМТФ (в печати).
27. Larsen L.H. Internal waves incident upon a knife edge barrier // Deep Sea Res., 1969, v. 16, N 5, p. 411.
28. Габов С.А., Крутицкий П.А. О нестационарной задаче Ларсена // Журн. вычислительной матем. и матем. физики. 1987. Т. 27, № 8. С.1184.
29. Крутицкий П.А. Малые нестационарные колебания вертикальных пластин в канале со стратифицированной жидкостью // Журн. вычислительной матем. и матем. физики. 1988. Т. 28, № 12. С.1843.

30. Коробкин А.А. Генерация внутренних волн в слое экспоненциально стратифицированной жидкости в присутствии вертикального барьера // Проблемы стратифицированных течений: Тез. докл. Всесоюз. конф. (Юрмала, 1988). Саласпилс, 1988. Т. 1. С.93.
31. Алешков Ю.З., Лиодт Г.О. Прохождение волн через систему двух параллельных вертикальных пластин // Водные ресурсы. 1978. № 4. С. 159.
32. Newman J.N. Propagation of water waves over an infinite step // J. Fluid Mech., 1965, v. 23, Pt. 2, p. 399.
33. Lee J.-J., Ayer R.M. Wave propagation over a rectangular trench // J. Fluid Mech., 1981, v. 110, p. 335.
34. Kreisel G. Surface waves // Quart. Appl. Math., 1949, v. 7, N 1, p. 21.
35. Коробкин А.А. Неустановившееся движение жидкости над неровным дном // Изв. АН СССР. МЖТ (в печати).
36. Korobkin A.A., Protodorov B.Ye. Unsteady fluid motion over rough bottom // Sess. 17: Proc. Scienc. and Methodol. Seminar on Ship Hydrodyn. Varna, Bulg. Ship. Hydrod. Center, 1988, v. 1, p. 15.
37. Коробкин А.А. Фундаментальное решение задачи Коши-Пуассона для бассейна с неровным дном // ПМТФ (в печати).
38. Коробкин А.А., Стурова И.В. Плоская задача Коши-Пуассона для бассейна с плавно меняющимся дном. Примеры численных расчетов // ПМТФ (в печати).
39. Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н. Нестандартные характеристики и оперативный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19, № 4, С.43.
40. Доброхотов С.Ю. Жевандров П.Н. Операторный метод Маслова в задаче о волнах на воде, возбуждаемых движущимся над неровным дном источником // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21. № 7. С.744.
41. Коробкин А.А., Стурова И.В. Пространственная задача Коши-Пуассона для бассейна с плавно меняющимся дном // Динамика сплошной среды. Новосибирск (в печати).
42. Владимиров Ю.В. Поле внутренних волн в окрестности фронта, возбужденное источником, движущимся над плавно меняющимся дном // ПМТФ. 1989 (в печати).

43. Протопопов Б.Е., Стурова И.В. Генерация плоских поверхностных волн при наличии малой неровности дна // ПМТФ. 1989. № 1. С.125.
44. Стурова И.В. Плоская задача Коши-Пуассона для двухслойной жидкости с неровным дном // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1989. № 84. С.106.
45. Стурова И.В. Движение кругового цилиндра в стратифицированной жидкости с неровным дном // Проблемы стратифицированных течений: Тез. докл. Всесоюз. конф. (Юрмала, 1988). Саласпилс. 1988. Т. 1. С.131.
46. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, Наука, 1985.
47. Garipov R.M. On the linear theory of gravity waves; the theorem of existence and uniqueness // Arch. of Rat. Mech. and Anal. 1967, v. 24, N 5, p. 352.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРОГРАФИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ГОР СРЕДНЕГО МАСШТАБА

В. Н. Кожевников

Горы существенно воздействуют на движения атмосферы. Это известно очень давно, однако мы только сейчас начинаем в полной мере понимать, насколько трудно это явление описать количественно и тем более смоделировать. Частично эту проблему удается решать, рассматривая ее как задачу гидродинамики о движении атмосферы над неровностями нижней границы. Подавляющее большинство результатов здесь получено для неровностей среднего масштаба, когда вращением земли можно пренебречь и, значит, можно не учитывать действие сил Кориолиса. Кроме того, рассматривается адиабатическое и невязкое приближение. Система уравнений, описывающая эту задачу, имеет хорошо известный вид:

$$\frac{d}{dt} \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{q},$$

$$\frac{d}{dt} \theta = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \vec{\nabla}), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho (\vec{\nabla} \vec{V}) = 0,$$

где \vec{V} - вектор скорости; ρ и p - плотность и давление; \vec{q} - ускорение силы тяжести; $\vec{\nabla}$ - стандартный векторный оператор набла; θ - потенциальная температура, которая, как известно, сохраняется при адиабатических движениях и определяется через температуру T , давление, стан-

давление p_0 и отношение удельных теплоемкостей κ выражением

$$\theta = T(p_0/p)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad \kappa = c_p/c_v. \quad (2)$$

Подразумевается также, что всегда и всюду выполняется уравнение состояния, т. е. из трех термодинамических величин независимыми являются только две.

Возмущения, возникающие при гидродинамическом взаимодействии такой движущейся атмосферы с неровностями рельефа, получили название орографических. Их соотносят с основным состоянием атмосферы, за которое принимается состояние равномерного невозмущенного движения над горизонтальной землей. Это состояние удовлетворяет известному соотношению гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (3)$$

и его можно однозначно определить, задаваясь стратификацией по высоте скорости и любой из термодинамических величин — скажем, температуры. Обычно полагают, что это движение направлено вдоль горизонтальной оси x и что оно имеет место достаточно далеко перед горой, т. е. при $x \rightarrow -\infty$. Тогда это состояние можно представить посредством

$$\bar{V} \rightarrow \bar{U}(x), \quad T \rightarrow \bar{T}(x). \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (4)$$

(здесь, как и везде далее, чертой сверху выделяются величины в основном состоянии).

Было установлено, что исходная расслоенность атмосферы по высоте в данной задаче имеет существеннейшее значение. Дело в том, что стратификация термодинамических величин атмосферы обеспечивает ее устойчивость по отношению к быстрым вертикальным смещениям частиц с исходных равновесных уровней. Данная устойчивость равносильна своеобразной упругости системы, а мерой такой упругости может служить частота Брента — Вайсяля, определяемая для основного состояния атмосферы соотношением

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} = g \frac{\gamma_0 - \gamma}{T_1}, \quad \gamma = -\frac{d\bar{T}}{dz}, \quad (5)$$

где γ_0 — сухоадиабатический градиент температуры, T_1 — характерное (среднее) значение температуры. В моделях, непосредственно использующих предположение о несжимаемо-

сти среды, вместо (5) зачастую получают выражение для N через градиент плотности, т. е.

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left| \frac{d\bar{\rho}}{dz} \right|. \quad (5a)$$

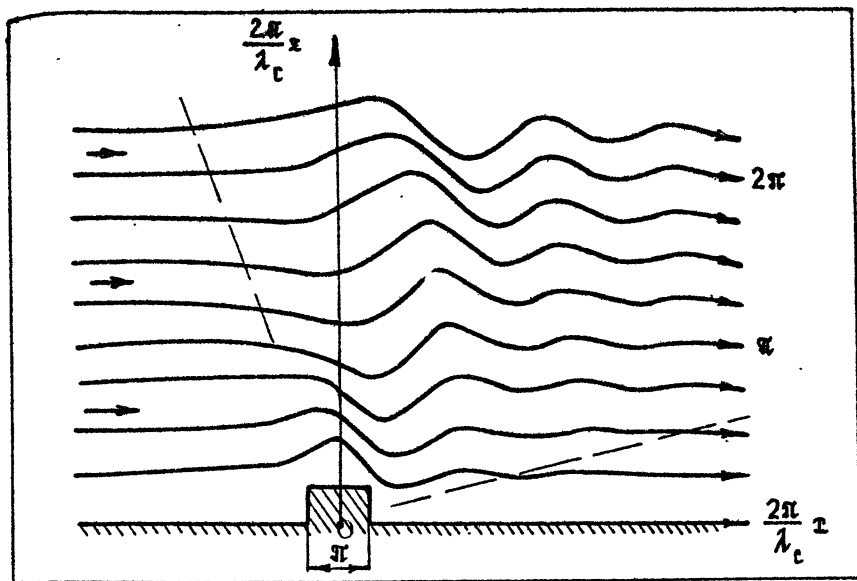
Скорость U и частота N совместно определяют такой важнейший параметр явления, как характерный, или собственный масштаб явления, впервые введенный в 1943 году Луга [1]:

$$\lambda_c = 2\pi U/N. \quad (6)$$

Если представить себе, что в основном состоянии некоторая частица смещена с ее равновесной высоты, то в дальнейшем данная частица, благодаря упругой расслоенности атмосферы, начнет колебаться вдоль вертикального направления с частотой N , а ее движение в пространстве будет происходить по чисто гармонической траектории с длиной волны по горизонтали равной λ_c . Пространственные характеристики реальных орографических возмущений над горами в значительной мере определяются величиной этого масштаба. Интересно также отметить, что λ_c^{-1} совпадает с главной частью известного параметра Скорера [2].

Сформулированная проблема остается чрезвычайно сложной. Главные ее трудности определяются, как легко заметить, тремя обстоятельствами: нестационарностью, нелинейностью и пространственностью. Из-за этого пока удалось продвинуться только за счет дальнейших упрощений. Первое упрощение — это отказ от нестационарности, т. е. исследование стационарных решений. В таких задачах в уравнениях (1) опускают слагаемые, определяемые локальной производной по времени, и при этом предполагают, что получаемые решения следуют из нестационарных после длительного периода стационарирования, в течение которого сохраняется основное состояние, т. е. остаются справедливыми соотношения (4). Именно на таких стационарных задачах мы и остановимся далее.

Второе упрощение — это отказ от пространственности. В этом случае рассматривается двумерная задача, т. е. случай, когда профиль горы полностью определяется, скажем, в плоскости $t-z$, а от оси y ничего не зависит. Подавляющее число полученных результатов по проблеме в целом отнесется именно к этому случаю. На этих результатах и сосредоточим наше внимание, а для большей наглядности та-



Р и с. 1. Обтекание прямоугольной горы в линеаризированном приближении по [1]

кую постановку проиллюстрируем рис. 1, где дано поле траекторий в плоскости $x-z$ при обтекании локализованного вблизи начала координат некоторого искривления, стилизованного прямоугольником, о котором скажем чуть позже. Сейчас же обратим внимание на то, что набегающий невозмущенный поток "набегает" на гору слева из бесконечности, где он характеризуется параллельными и прямыми траекториями. Возмущение появляется над горой и вниз по потоку от нее. Вязкости нет и поэтому на нижней границе граничное условие имеет характер скольжения; на рисунке это и проявляется, в частности, в том, что вблизи горизонтальных частей нижней границы траектории прямолинейны. Полезно постановку задачи сформулировать так: рассматривается в стационарном двумерном приближении вынуждающее действие локального искривления нижней границы на поток жидкости, обладающей упругостью, определяемой величиной N . При такой формулировке сразу становится понятным, что возмущения должны иметь волновой характер. Возникающие волны получили название внутренних гравитационных. Гравитационных – потому, что расслоение определяется действием силы гравитации. Внутренних – потому, что волны возникают не на поверхностях раздела, а внутри жидкости.

Теперь о нелинейности. По способу преодоления этой существеннейшей трудности все исследования традиционно разделяют на две неравные группы. К первой относят так называемые линеаризованные задачи, в которых используется предположение о том, что возмущения малы относительно характеристик основного потока. В этом случае в уравнениях (1) упрощениям такого рода подвергаются не только термодинамические величины, но, что более важно, поле скоростей (упрощается учет адвективных изменений величин), т. е. слагаемое, определяемое наличием оператора $(\bar{V} \bar{V})$.

Иллюстрацией такого исследования могут служить результаты, полученные Луа в [1] и представленные частично на рис. 1. В этом исследовании автор показывает, что в случае, когда скорость и градиент падения температуры (устойчивость) в натекающем потоке не зависят от высоты, т. е. выполняются условия

$$U = \text{const}, \quad \gamma = \text{const} \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad (7)$$

после линеаризации исходной системы уравнений задача может быть сведена к уравнению Гельмгольца для аналога вертикальной скорости w_1 . Это уравнение и определение w_1 через вертикальную скорость представлены следующим образом:

$$(\nabla^2 + k^2) w_1 = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$w_1 = w \exp \left[\left(\frac{x}{a-1} \gamma_a - \gamma \right) z / T_1 \right]. \quad (8)$$

Коэффициент уравнения Гельмгольца, и значит главные свойства возмущений, определяется соотношением

$$k = U/N = 2\pi / \lambda_c. \quad (9)$$

Решалась открытая задача для полупространства. Нижнее граничное условие скольжения линеаризировалось в предположении малости искривления границы. На рис. 1 представлен результат расчета для прямоугольного выступа. Уместно здесь подчеркнуть, что представленное на рисунке поле траекторий на самом деле обтекает не прямоугольную гору, а более сложный рельеф. Это типичная ситуация для таких задач. В них практически никогда не известна точно форма обтекаемой горы, так что поле траекторий следует трактовать

вать как поле для некоторого источника возмущений вблизи начала координат. Выделение единственного несимметричного решения у Лута осуществляется двумя методами, один из них использует гипотезу о монотонности поведения возмущений навстречу натекающему потоку, т. е. гипотезу об особо быстром загухании всех возмущений в этом направлении. Из рисунка видно, что решение имеет волновой характер; волны при удалении от горы загухают и имеют не малые амплитуды внутри некоторого конуса направлений, заметно отклоняющегося от вертикали в сторону основного течения: слева от почти вертикального пунктира имеем невозмущенный натекающий поток, ниже почти горизонтального пунктира волны вырождаются из-за близости невозмущенной горизонтальной границы.

В линеаризованных задачах удалось наиболее полно изучить проблему с разных сторон: нестационарные свойства, в частности вопросы о стационарировании, дисперсионном соотношении и групповых скоростях внутренних гравитационных волн, некоторые характеристики пространственности, зависимость от изменения скорости и стратификации по высоте и т. д. Вместе с тем во всех случаях для таких исследований характерна известная некорректность: возмущения скоростей получаются слишком большими, выходящими за рамки исходной гипотезы о малости. Из-за этого в ряде работ (их значительно меньше, чем первых) исследователи стали отказываться от линеаризации подобного рода. Такие задачи получили название нелинейных. Главные результаты здесь получены аналитическим путем в стационарном двумерном приближении. При этом предварительно каждый раз исходное нелинейное уравнение задачи сводилось к линейному, поскольку рассматривался определенный частный закон стратификации натекающего потока.

На рис. 2 представлен один из наших результатов решения такой нелинейной задачи для полупространства [3, 4]. Здесь система (1) в предположении стационарности, двумерности и несжимаемости, т. е. при

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (10)$$

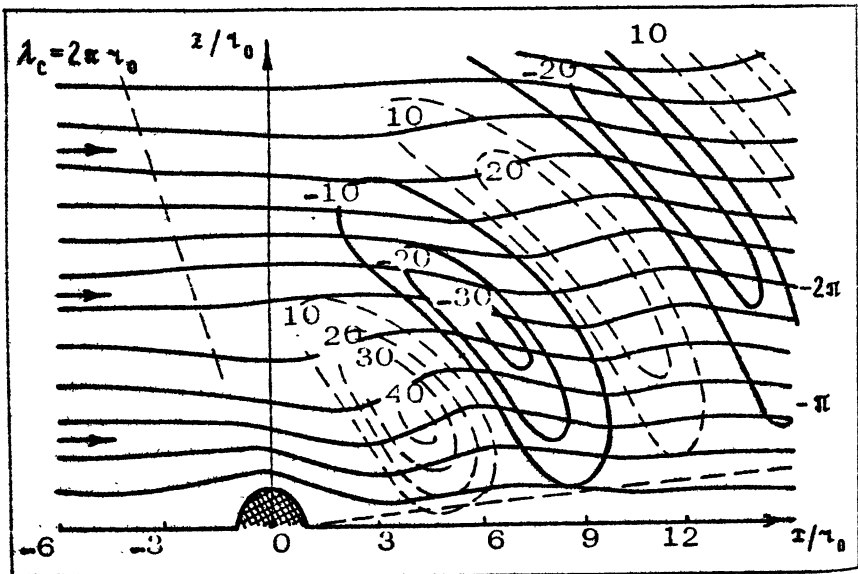
для частного случая стратификации (7) сводится, как и у Лута, к уравнению Гельмгольца, но не для аналога вертикальной скорости, а для возмущения функций тока ψ' :

$$(V^2 + \kappa^2) \psi' = 0, \quad \bar{\psi}' = \psi - \bar{\psi}, \quad \bar{\bar{\psi}}' = -Uz. \quad (11)$$

Здесь решалась задача для полупространства над полуцилиндрической горой радиуса r_0 , решалась она при точном учете условия скольжения, т. е. разделением переменных в цилиндрических координатах. Единственность (и несимметричность) решения обеспечивалась аналогичной гипотезой о монотонности поведения решения навстречу потоку. Оказалось, что главные свойства возмущений зависят от параметра

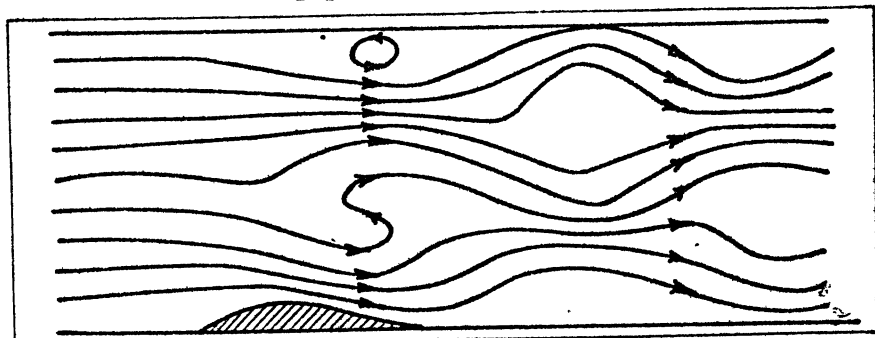
$$F_i = U/\Omega a = \lambda_c / 2\pi a, \quad (12)$$

в котором a — характерный масштаб, в данном случае $a = r_0$. На рис. 2 представлено поле траекторий в случае, когда $F_i = 1$, т. е. когда $\lambda_c = 2\pi r_0$. Пунктирные прямые здесь имеют тот же смысл, что и на рис. 1, а кривые в зоне наибольших возмущений представляют изолинии относительных возмущений вертикальной скорости (в долях U).



Р и с. 2. Обтекание полуцилиндрической горы по линейной модели [3, 4]. Траектории движения представлены сплошными линиями, начинающимися далеко перед горой (при $x = -\infty$). Замкнутые кривые представляют изолинии возмущений вертикальной скорости в долях $0,01 U$

Первым нелинейную задачу обтекания подробно исследовал в 1953 - 1955 гг. Long [5 - 7]. В отличие от вышеизложенной задачи для полуцилиндра он рассматривал внутреннюю задачу - задачу об обтекании неровности на дне канала. Из его интереснейших результатов выделим три. Во-первых, оказалось, что волновые возмущения определяются главным образом двумя параметрами - максимальной высотой горы h и безразмерным числом F_i , которое, как и выше, определяется соотношением (12), но в качестве масштаба u в нем фигурирует высота твердой горизонтальной верхней границы H . (Автор это число называет внутренним числом Фруда). Во-вторых, было выяснено, что для любого фиксированного F_i при увеличении высоты горы амплитуды волновых возмущений растут и могут стать столь большими, что в ламинарном потоке появятся роторы, т. е. области, в которых частицы могут двигаться либо вертикально, либо навстречу потоку, либо даже обособляться от общего потока, вращаясь в замкнутом вихревом движении. Пример такого течения из работы [7] представлен на рис. 3. В роторах



Р и с. 3. Обтекание гладкого препятствия на дне канала по нелинейной модели [7] с образованием роторов

по всем признакам должна повышаться неустойчивость так, что, когда их развитие по мере увеличения высоты горы достигает определенной степени, должен осуществляться переход от ламинарного волнового течения к гурбулентному, при котором теория становится нерепрезентативной. В-третьих, был получен качественно новый результат. Оказалось, что интенсивность возмущений может расти не только при увеличении, но и при уменьшении скорости. Эти результаты были получены для канала, когда было возможно резонансное

отражение всей волновой энергии от верхней горизонтальной границы. В наших работах [3,4] (о них частично сказано ранее) и Miles [8, 9], исследовавших возмущения в неограниченной атмосфере, первые два результата, по существу, подтвердились (в части зависимости от h и F_1), а третий получил новое звучание. Оказалось, что имеет место лишь одна зависимость от скорости: интенсивность волн растет только с уменьшением скорости. Этот же закон определяет переход от ламинарного к турбулентному течению и пределы репрезентативности теории. Получалось, что только при скоростях потока, больших некоторой величины, можно было изучать явление в рамках стационарной невязкой модели.

Следует еще раз подчеркнуть, что нелинейные задачи сводятся к решению линейных уравнений за счет перехода к рассмотрению частных случаев стратификации потока. Эти принципиальные возможности рассматривались в исследованиях [3 - 12], а доведены до конкретных расчетов прежде всего в [3, 4, 7 - 9, 12]. При этом выяснилось, что два реализованных здесь частных случая для несжимаемой жидкости фактически совпадают и соответствуют предположению, что в натекающем потоке от высоты практически не зависят скорость и устойчивость. Кроме того, выяснилось, и об этом убедительно говорится в работе [2], что в данном частном случае нелинейная модель является "вырожденной", поскольку она дает результаты, совпадающие с соответствующими результатами линеаризованной задачи. Все это говорит о том, что мы только начинаем учитывать нелинейные аспекты проблемы.

Изучение волновых орографических возмущений показало, что последние могут распространяться до больших высот. Исследования [13] стационарной линеаризованной задачи привели к выводу, что поток волновой энергии в атмосфере должен оставаться постоянным по высоте, причем в самых верхних ее слоях энергия должна беспрепятственно излучаться вверх. Этот эффект в невязкой среде целиком определяется наличием указанной выше упругости. Мерами этого потока энергии могут служить волновое сопротивление \mathcal{D} , коэффициент сопротивления $\zeta_{\mathcal{D}}$ и напряжение трения τ_x :

$$\mathcal{D} = - \int_{-\infty}^{\infty} (\rho w/u) \Big|_{x=h(x)} dx, \quad (13)$$

$$\zeta_{\infty} = -\mathcal{D} / \left(\frac{1}{2} \bar{\rho}_0 H U^2 \right), \quad \tau_x = -\mathcal{D} / L, \quad (14)$$

где используются стандартные обозначения: $z=h(x)$ – уравнение любой траектории, в том числе наземной; $\bar{\rho}_0$ – плотность натекающего потока на Земле; H – высота однородной атмосферы; L – протяженность горы по горизонтالي. Оценки показывают, что для идеализированной горы высотой около 1 км (т. е. локализованной и с гладким профилем) \mathcal{D} составляет около 10^5 Н/м (на единицу длины двумерной горы вдоль оси y), а ζ_{∞} – около 0,1; для реальной же горной системы аналогичной Северному Уралу эти величины составляют соответственно $4 \cdot 10^5$ и 0,35 [14]. Отсюда ясно, что работа против этой силы в последнем случае сравнима с кинетической энергией натекающего потока.

Поток волновой энергии можно определить по формуле (штрихами здесь выделены возмущения)

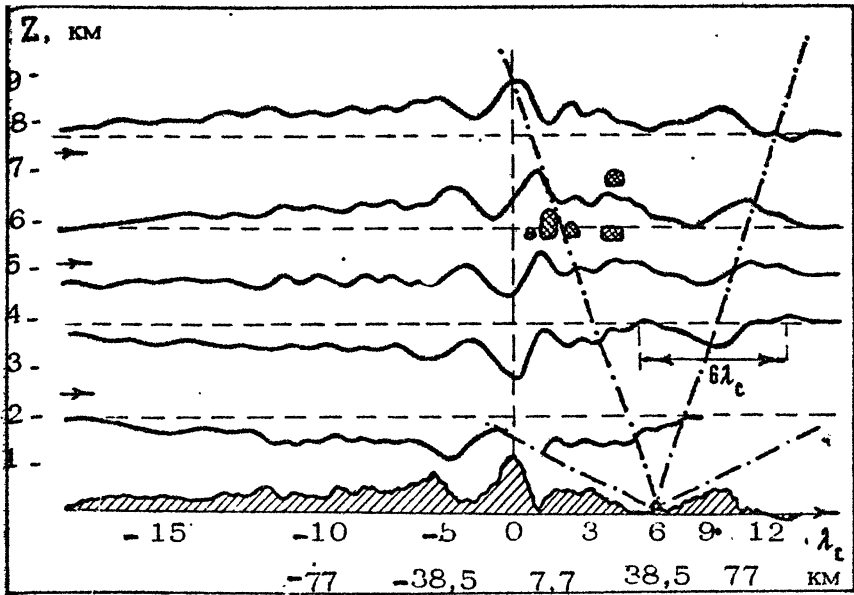
$$E' = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho' w) \Big|_{z=h(x)} dx = U \mathcal{D} + \int_{-\infty}^{\infty} (\rho' u' w / w) \Big|_{z=h(x)} dx. \quad (15)$$

Для Северного Урала наши оценки по этой формуле показали, что поток должен обладать плотностью 60 Вт/м^2 , а напряжение трения τ_x порядка 20 дин/см^2 . Приведенные выше результаты наших расчетов согласуются с оценками других исследователей. Особенно интересно отметить результаты Клепп и Lilly для Скалистых гор США [15]. По данным их расчетов величина τ_x составила 30, а по данным самолетных измерений – 47 дин/см^2 .

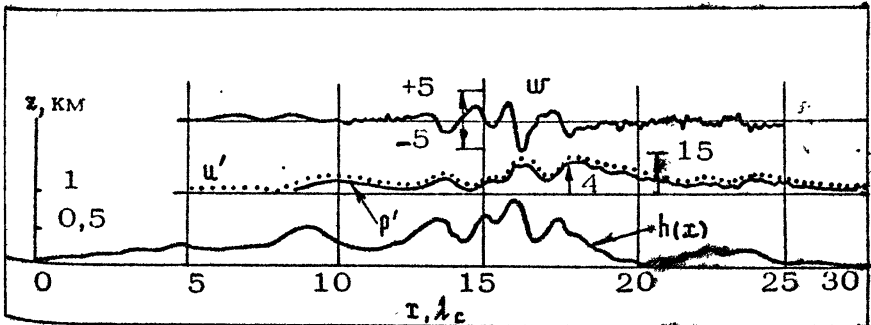
Еще не до конца выяснено, как приложить результаты теоретических оценок, полученных для идеальной жидкости, к реальной атмосфере. Наибольшие трудности здесь связаны с тем, что в значительной мере орографические волновые возмущения либо квазистационарны, либо даже полностью нестационарны, а такие модели разработаны пока совершенно недостаточно. В рамках стационарных приближений ответ на поставленный вопрос пока выглядит так. Потoki волновой энергии проявляться должны там, где амплитуда предсказываемых волн столь велика, что должно происходить "обрушивание волн", т. е. переход режима течения от ламинарного к турбулентному. Это должно происходить примерно в таких или более развитых рогорах, как на рис. 3. На этих уровнях турбулентная вязкость должна приводить к переходу значи-

гельной части потока энергии в тепло. Тогда выше поток энергии и амплитуда волн станут незначительными. Примером такой случай был зарегистрирован упомянутыми измерениями Klemm и Lilly (резкое ослабление потока наблюдалось в нижней стратосфере) где-то на высоте 15 - 16 км. Теория подсказывает, что появление "уровней обрушивания" и их высота определяются размерами и формой гор, в частности кругизной подветренного склона. Важную роль здесь играет также стратификация устойчивости и скорости. Некоторые авторы в связи с этим исследовали вопрос о роли "критического уровня", т. е. уровня, где скорость потока меняет направление на обратное. Велопаузу, где легом западный перенос сменяется на восточный, обычно отождествляют с таким уровнем. Вывод здесь однозначный: через такой уровень волновая энергия не должна проходить. На наш взгляд, исследования этого вопроса чересчур схематичны. На самом деле ветер на велопаузе не обращается, а поворачивает в некотором диапазоне высот, так что это явление следует изучать в рамках пространственной, но не двумерной модели.

Интересные оценки высоты уровня "обрушивания волн" провел Смит в работе [16]. Получилось, что обычно таких уровней теория предсказывает несколько с разнесением их по высоте в соответствии с масштабом λ_c ; при этом возможны различные варианты, когда 1-й (нижний) уровень лежит прямо над горами, когда он располагается в средней тропосфере или еще выше. При этом автор высказывает убеждение, что, если "обрушивание" не произошло на 1-м уровне, то оно обязательно произойдет на 2-м из них. Убедительных экспериментальных данных об орографических волнах на больших высотах пока очень мало. Существует мнение, что перламутровые облака, наблюдающиеся на высоте около 20 км, свидетельствуют о наличии именно такого рода волн в стратосфере. Такое суждение основано на двух их особенностях - на их форме и на том, что они наблюдаются над горными районами. Однако такие облака наблюдаются очень редко и, насколько нам известно, систематически их измерять почти не удается. Интересное свидетельство возможности проникновения энергии орографических возмущений до высот 70 - 80 км получено недавними измерениями температурных неоднородностей группы профессора Красовского (ИФА АН СССР). Надо надеяться, что развитие этих работ позволит получить нам еще более убедительные и интересные данные об этом.



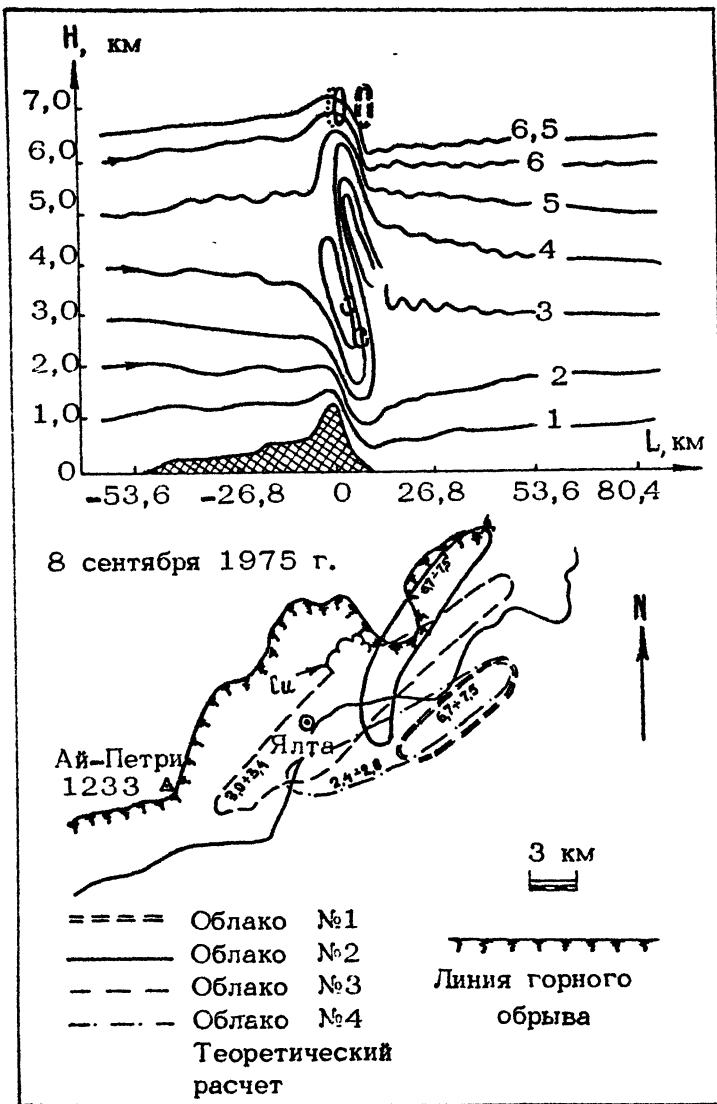
Р и с. 4. Обтекание реальной горной системы согласно [19]: сплошные кривые – траектории движения, (пунктир – их исходные уровни в натекающем потоке), рельеф заштрихован, штрихпунктиром показаны зоны обзора из точки наблюдения



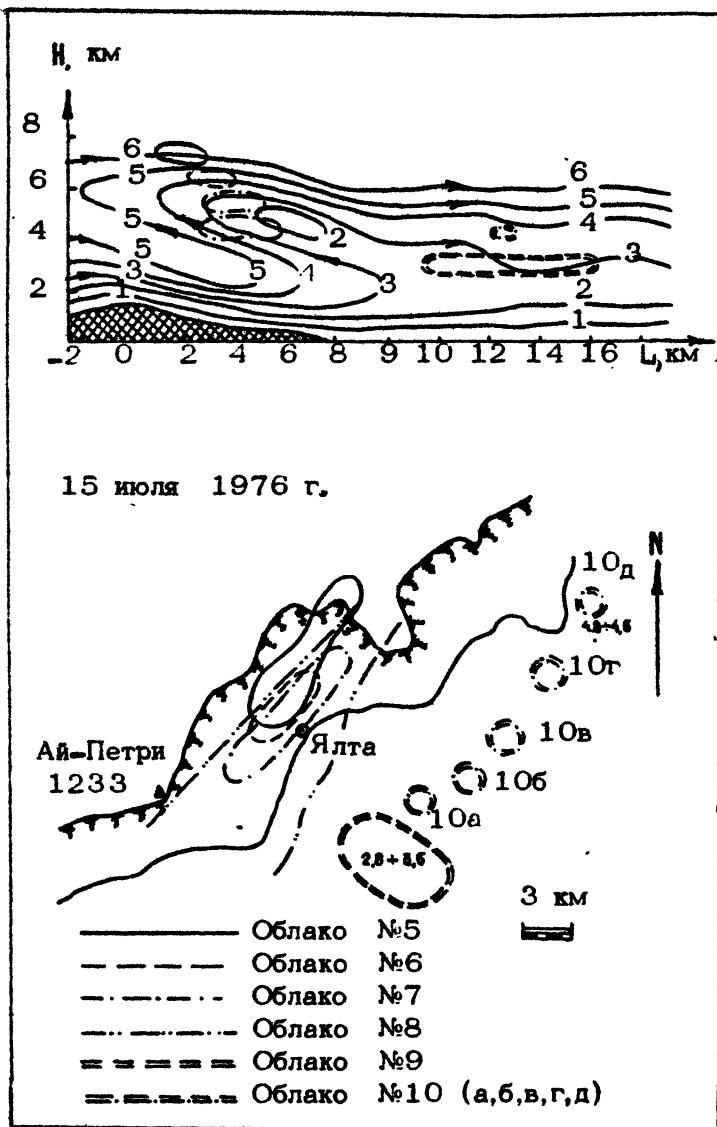
Р и с. 5. Поля возмущений при обтекании реальной горной системы согласно [14]: $h(x)$ – форма рельефа, w , u' , p' – возмущения вертикальной скорости (в диапазоне ± 5 м/с), горизонтальной скорости (в диапазоне $0 + 15$ м/с) и давления (в диапазоне $0 \div 4$ мбар) – все на поверхности Земли

В заключение остановимся на основных результатах многолетних исследований орографических возмущений, полученных нашей научно-исследовательской группой на кафедре физики атмосферы и математической геофизики МГУ. Удалось обобщить метод теоретического определения траекторий движения для варианта (7), (10), (11) на случай горной системы произвольной формы, достаточно протяженной по потоку. Оказалось, что возмущения от отдельных хребтов в реальной горной системе могут сильно интерферировать, в результате чего в поле траектории масштаб λ_c может проявляться только в отдельных частях пространства над горами, но зато должен проявиться более крупный масштаб, характеризующий крупные детали формы горной системы в целом [17, 18]. На рис. 4, 5 представлены траектории движения и обтекаемый рельеф Северного Урала в районе Североуральска [19], а также поля возмущений ψ , ψ' , ρ' на поверхности земли [14]. Интересно обратить внимание на величину возмущений давления — оно воздействует на поверхность земли с силой достаточной, чтобы привлечь орографические возмущения к рассмотрению некоторых сейсмических свойств земной коры.

В нашей группе одновременно с теоретическими проводятся также инструментальные измерения этих эффектов в природе во время экспедиционных работ в различных районах. Главным элементом этих измерений является стереофотографический метод наблюдений за волновыми облаками $Aslent$. Наиболее интересные из полученных этим путем результатов опубликованы в работах [19, 20]. В первой из них речь шла о Северном Урале, в последней — о горах Крыма. Один пример сопоставления измерений и расчетов для Северного Урала представлен на рис. 4, где даны линии тока совместно с проекцией полей облачности. Два небольших примера для Крыма представлены на рис. 6, 7. В верхней половине последних рисунков даны траектории и проекции полей облачности в вертикальной плоскости, перпендикулярной горам. В нижней половине дано схематическое изображение рельефа и поля облачности в проекции на горизонтальную плоскость. На рис. 6 вертикальный масштаб сильно отличается от горизонтального, что позволяет лучше представить характер поля траекторий; на рис. 7 масштабы по вертикали и горизонтали одинаковы, что помогает лучше понять пространственное распределение полей облачности.



Р и с. 6. Пример совместного анализа результатов расчета траекторий движения и наблюдений волновых облаков 8 сентября 1975 года в районе Крыма [20]. Вверху представлена проекция траекторий и полей облачности на вертикальную плоскость, перпендикулярную горам, внизу - плановая проекция рельефа и полей облачности



Р и с. 7. Пример анализа аналогичного рис. 6, но для 15 июля 1976 года [20]

Кратко результаты можно резюмировать так.

1) Было обнаружено для этих районов, что обтекание реальных гор в значительной толще тропосферы носит двумерный характер.

2) Характер возмущений воспроизводится с помощью модели (7), (10), (11) неплохо для гор Северного Урала и несколько хуже для гор Крыма.

3) Не исключено, что система орографических волн квазистационарна, — она как бы пульсирует с периодом 5–30 мин.

4) Развитие конвекции в середине дня регулярно на время прекращает процесс квазистационарного обтекания.

5) С подветренной стороны гор Крыма на высотах 3–5 км возможно квазистационарное существование крупных вихревых циркуляций с горизонтальной осью параллельной линии гор.

Л и т е р а т у р а

1. Lyra G. Theorie der stationaren Leewellenstromung in freier Atmosphere // Z. Angew. Math. und Mech. 1943. Bd. 23, N 1. P. 1.
2. Скорер Р. Аэродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980.
3. Кожевников В.Н. К одной нелинейной задаче об орографическом возмущении стратифицированного воздушного потока // Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1963. № 7. С. 1108.
4. Кожевников В.Н. Орографические возмущения в двухмерной стационарной задаче // Изв. АН СССР. ФАО. 1968. Т. 4, № 1. С. 33.
5. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. I. A theoretical investigation // Tellus, 1953. V. 5, N 1. P. 42.
6. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. II. Experiments with a two-fluid system // Tellus, 1954. V. 6, N 2. P. 97.
7. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. III. Continous density gradients // Tellus, 1955. V. 7, N 3. P. 341.

8. Miles J.W. Lee waves in a stratified flow. Part I. Thin barrier // J. Fluid Mech. 1968. V. 32, N 3. P. 549.
9. Miles J.W. Lee waves in a stratified flow. Part II. Semi-circular obstacle // J. Fluid Mech. 1968. V. 33, N 4. P. 803.
10. Yih Ch.-Sh. Exact solutions for steady two-dimensional flow of a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1960. N 2. P. 1161.
11. Yih Ch.-Sh. A transformation for non-homentropic flows with an application to large amplitude motion in the atmosphere // J. Fluid Mech. 1960. V. 9, N 1. P. 68.
12. Claus A.J. Large-amplitude motion of a compressible fluid in the atmosphere // J. Fluid Mech. 1964. V. 19, N 2. P. 267.
13. Eliassen A., Palm E. On the transfer of energy in stationary mountain waves // Geoph. Publ. 1960. V. 22, N 3. P. 1.
14. Кожевников В.Н., Зидлев Н.Н., Перцев Н.Н. Волновое сопротивление от мезомасштабных гор // Изв. АН СССР. ФАО. 1981. Т. 17, № 3. С. 227.
15. Klemp J.B., Lilly D.K. Numerical stimulation of hydrostatic mountain waves // J. Atmos. Sci. 1978. V. 35, N 1. P. 78.
16. Smith R.B. The steepening of hydrostatic mountain waves // J. Atmos. Sci. 1977. V. 34, N 10. P. 1634.
17. Кожевников В.Н., Козодеров В. Теоретическая картина обтекания крымского хребта в районе Ялты // Изв. АН СССР. ФАО. 1970. Т. 6, № 10. С. 979.
18. Кожевников В.Н., Лосев А.С. О построении модели обтекания при точном выполнении граничного условия на цилиндрическом профиле // Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика. Астрономия. 1982. Т. 23, № 5. С. 43.
19. Кожевников В.Н., Бибикина Т.Н., Журба Е.В. Орографические возмущения атмосферы над Северным Уралом. // Изв. АН СССР. ФАО. Т. 13, № 5. С. 451.
20. Кожевников В.Н., Бибикина Т.Н., Журба Е.В. Орографические волны, облака и рогоры с горизонтальной осью над горами Крыма // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т. 22, № 7. С. 682.

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА
ВНУТРЕННИХ ВОЛН,
ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ
ПОТОКОМ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ**

Е.Н.Морозов, С.А.Ульянов, Л.Т.Буркова

Одним из информативных методов исследования внутренних гравитационных волн является метод голографической интерферометрии. Суть метода состоит в регистрации и восстановлении двух волновых фронтов, прошедших через исследуемый объем в различные моменты времени и несущих информацию о состоянии исследуемой среды. На стадии восстановления эти два фронта интерферируют между собой и при наличии возмущений плотности в среде, вызываемых обтеканием препятствия, дают изображение изучаемой области, покрытое интерференционными полосами [1,2]. Эти интерференционные полосы характеризуют изменения, произошедшие в стратифицированной среде за время между двумя экспозициями и соответствуют изменению фазы световых волн на величину $2\pi m$, где номер интерференционной полосы

$$m = \frac{1}{\lambda} \int_P \Delta n(x, y, z) dP. \quad (1)$$

Здесь λ - длина волны излучения лазера, $\Delta n(x, y, z)$ - изменение показателя преломления в стратифицированной среде на пути светового луча между двумя экспозициями.

Применение голографической интерферометрии для плоской задачи обтекания стратифицированной жидкостью с постоянной

частотой Вайсяля N цилиндрического препятствия позволяет получить количественные данные по амплитудам внутренних гравитационных волн, поскольку величина изменения показателя преломления среды остается постоянной вдоль линии просвечивания, и на интерферограмме фиксируется величина $\Delta n \cdot L$, где L — длина образующей цилиндра. Пересчет к полю возмущений плотности $\Delta \rho(x, y)$ производится по формуле Лоренц-Лоренца [3].

В трехмерном случае можно получить, таким образом, лишь интегральную характеристику возмущенного поля вдоль направления просвечивающего луча

$$\int_{\ell} \Delta \rho(x, y, z) d\ell. \quad (2)$$

Однако, если волновое поле представимо в виде интеграла по плоским волнам

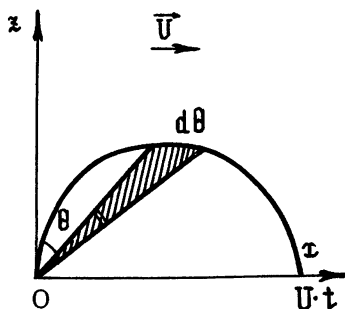
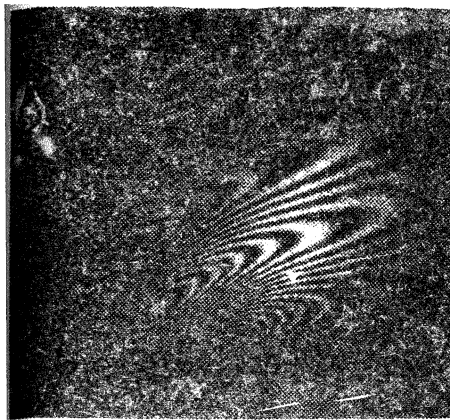
$$\Delta \rho(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{k}) e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} d\vec{k}, \quad (3)$$

интеграл (2) имеет и другой физический смысл. В самом деле, для произвольно ориентированной ортогональной системы координат (ξ, η, ζ) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta \rho^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \rho d\eta = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(k_\xi, k_\eta, k_\zeta) dk_\xi dk_\eta dk_\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_\xi \xi + k_\eta \eta + k_\zeta \zeta)} d\eta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(k_\xi, 0, k_\zeta) e^{i(k_\xi \xi + k_\zeta \zeta)} dk_\xi dk_\zeta, \end{aligned} \quad (4)$$

из которого видно, что наблюдаемое при просвечивании вдоль направления η поле внутренних гравитационных волн представляется суперпозицией лишь тех плоских волн из представления (3), для которых $k_\eta = 0$.

В плоском случае картина гравитационных волн (рис.1) определяется спектром $F(k_x, k_y)$, который может быть найден, если применить к наблюдаемой картине волн $\Delta \rho(x, y)$ преобразование Фурье. Возможен и другой путь нахождения спектра $F(k_x, k_y)$. В самом деле, простое рассмотрение показывает [4],



Р и с. 1. Картина внутренних волн при обтекании стратифицированным потоком препятствия в виде полуцилиндра на дне канала: $U = 0,41 \text{ см с}^{-1}$, $N = 0,52 \text{ с}^{-1}$, $r = 0,5 \text{ см}$

Р и с. 2. Область стационарных волн

что возмущения стратифицированной среды, образованные у малого препятствия за время t , предшествующее текущему моменту, создают картину присоединенных волн с одинаковой длиной волны $\Lambda = 2\pi U / N$ в области, имеющей вид полукруга диаметром Ut (рис.2). При этом волны частотного интервала $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ располагаются в секторе $\Delta\theta$, определяемом дисперсионным соотношением

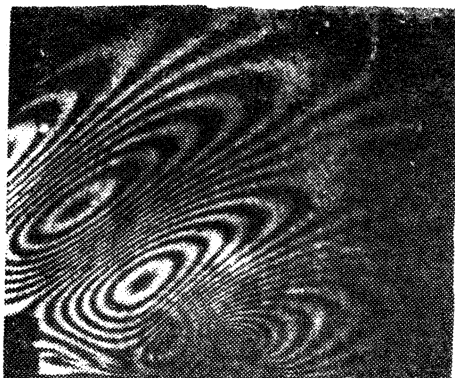
$$\omega = N \sin \theta. \quad (5)$$

Это позволяет применить теорему Планшереля (пространственный аналог) к сектору $\Delta\theta$ поля стационарных внутренних волн. Учитывая, что плоские волны спектра $F(k_x, k_y)$ отличаются лишь направлением \vec{k} , но не величиной, получаем

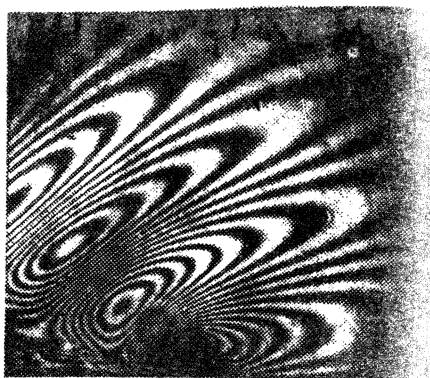
$$R=Ut\sin\theta \int_0^R |\Delta p(R, \theta)|^2 R dR d\theta = \frac{1}{2\pi} |F(k_\theta)|^2 \Delta k_\theta. \quad (6)$$

Отсюда

$$|F(k_\theta)| = \Lambda \int_0^{R=Ut\sin\theta} |\Delta p(R, \theta)|^2 dR. \quad (7)$$



а)



б)

Р и с. 3. Картина внутренних волн при обтекании стратифицированным потоком препятствия в виде полусферы на дне канала: $U = 1,16 \text{ см с}^{-1}$, $N = 1,0 \text{ с}^{-1}$, $r = 1,5 \text{ см}$,
 $\alpha - \varphi = 0^\circ$, $\beta - \varphi = 45^\circ$

Уравнение (7) позволяет по экспериментальным данным $\Delta p(R, \theta)$ и Δ находить пространственный спектр $|F(\kappa_\theta)|$. Эту операцию можно еще упростить, приняв во внимание известную зависимость $\Delta p(R)$ в цилиндрической волне:

$$|F(\kappa_\theta)| = (\Delta R_c)^{1/2} |\Delta p(R_c, \theta)| \left[\frac{Ut \cos \theta}{2} + \frac{\sin(\kappa U t \cos \theta)}{4\kappa} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

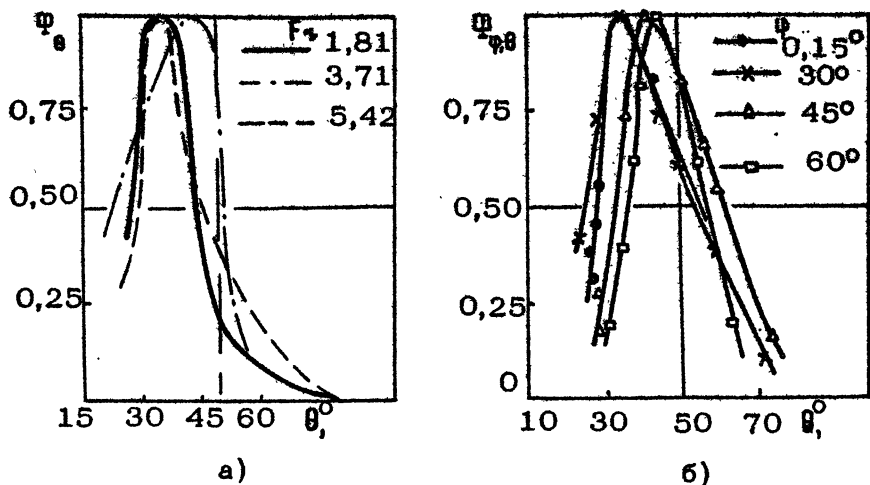
где R_c — некоторое значение радиуса, при котором $|\Delta p(R_c, \theta)|$ принимает амплитудное значение. Обычно $\kappa U t \cos \theta > 2\pi$, тогда вторым членом можно пренебречь и

$$|F(\kappa_\theta)| = |\Delta p(R_c, \theta)| \left(\frac{\pi R_c}{N} t \cos \theta \right)^{1/2} \cdot U, \quad (9)$$

а нормированный пространственный спектр равен

$$\varphi_\theta = \frac{|F(\kappa_\theta)|}{|F(\kappa_{\theta_{\max}})|} = \frac{|\Delta p(R_c, \theta)|}{|\Delta p(R_c, \theta_{\max})|} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_{\max}} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Трехмерный случай в соответствии с результатом (4) сводится к рассмотренному плоскому, но спектр $F_\varphi(\kappa_\theta)$ волн с волновым вектором $\vec{\kappa}$, лежащим в вертикальной плоскости, составляющей угол φ с вектором скорости потока \vec{U} , определяется уже не Δp , а Δp^* . Формулы (7)–(10) остаются в силе, если вместо скорости U взять ее проекцию $U \cos \varphi$.



Р и с. 4. Пространственный спектр внутренних волн: а - Φ_θ , б - $\Phi_{\psi, \theta}$

на указанную выше плоскость. Так, соотношения (9) и (10) преобразуются к виду

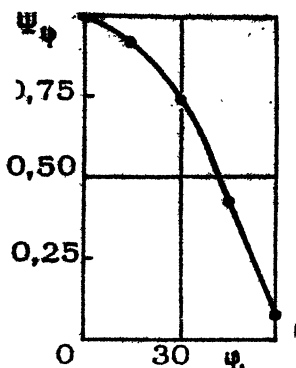
$$|F_\psi(k_\psi)| = |\Delta p_\psi^*(R_c, \theta)| \left(\frac{\pi R_c}{N} \cdot t \cos \theta \right)^{1/2} U \cos \psi, \quad (11)$$

$$\Phi_{\psi, \theta} = \frac{|F_\psi(k_\psi)|}{|F_{\psi, \max}(k_{\psi, \max})|} = \frac{|\Delta p_\psi^*(R_c, \theta)|}{|\Delta p_{\psi, \max}^*(R_c, \theta_{\max})|} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_{\max}} \right)^{1/2} \frac{\cos \psi}{\cos \psi_{\max}}$$

Совокупность интерферограмм (рис.3), полученных для направлений ψ от совпадающего с направлением скорости потока U до нормального к этому направлению, определяет полный спектр внутренних гравитационных волн, найдя который, можно найти и пространственное распределение $\Delta p(x, y, z)$ в гравитационной волне.

Пространственный спектр присоединенных внутренних волн в плоском случае (рис. 4,а) характеризуется максимумом при $\theta \approx \theta_m$ и шириной $\Delta \theta$. При $F_r = 2\pi U / Nd > \pi$, $\theta \approx 60^\circ$, а $\Delta \theta \approx 33^\circ$.

При уменьшении числа Фруда F_r , максимум спектра смещается в сторону меньших углов, а его ширина несколько увеличивается. Это изменение сопровождается уменьшением



Р и с. 5. Зависимость амплитуды пространственного спектра от φ

амплитуд спектральных компонентов и, по-видимому, связано с ростом потерь при уменьшении длины внутренней волны.

В трехмерном случае пространственный спектр внутренних волн (рис. 4,б) для $\varphi = \text{const}$ имеет максимум при $\theta \approx 45^\circ$, как и в плоском случае. Величина же этого максимума плавно меняется от наибольшего значения при $\varphi = 0$ до нулевого значения при $\varphi \rightarrow \pi/2$ (рис.5).

Л и т е р а т у р а

1. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гушин В.А. и др. Численное и экспериментальное моделирование гравитационных волн при движении тела в стратифицированной жидкости // ДАН СССР. 1984. Т.279, №3. С.562.
2. Морозов Е.Н., Онуфриев А.Т., Ульянов С.А. Численное моделирование в аэродинамике. М.: Наука, 1986. С.151
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
4. Stevenson T.N. The phase configuration of internal waves around a body moving in a density stratified fluid// J.Fluid Mech. 1973. V.60, n.4. P.759.

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ЛАБОРАТОРНОМ БАССЕЙНЕ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

С.А.Баранов, В.И.Казakov, Ю.А.Степаняни

1. ВВЕДЕНИЕ

Опыт проведения экспериментальных работ в экспедиционных условиях многими исследователями привел к выводу о необходимости создания искусственного управляемого источника внутренних волн (ВВ), способного генерировать по заданной программе ВВ в естественных водоемах: озерах, заливах и даже морях. О задачах, возникающих в связи с этим, говорилось еще на первой школе в лекции Л.А.Островского [1]. Там же был предложен в качестве простейшей модели механический волнопродуктор, представляющий собой огромную пригипленную цистерну, способную совершать вертикальные колебания. Несмотря на то, что приведенные теоретические оценки [1] позволяли надеяться на получение ВВ с приемлемыми параметрами в море и успешные испытания такого волнопродуктора в лабораторном бассейне, его практическая реализация до сих пор не была осуществлена. Причины этого заключаются в том, что столь большой волнопродуктор (длина порядка десятков метров, диаметр порядка метров) трудно изготовить, укрепить в нужном районе моря, предохранить от дрейфовых течений и штормов; не просто так же и управлять таким волнопродуктором. В связи с этим большое практическое значение имеют исследование альтернативных возможностей генерации ВВ немеханическим способом и реализация на их основе других типов волнопродукторов. Не исключено, что на этом пути могут быть созданы

также новые волнопродукторы и для лабораторных условий, которые по тем или иным причинам могут оказаться более предпочтительными по сравнению с механическими, традиционно используемыми в лабораторных экспериментах. Здесь мы представляем один из таких альтернативных волнопродукторов, основанный на тепловом источнике [2]. Проведенные нами лабораторные эксперименты и численные расчеты показали, что данный волнопродуктор удобен в управлении и эффективен в работе. К его недостаткам следует, пожалуй, отнести относительно большую энергоемкость, что приводит к большим необратимым потерям энергии и, как следствие, к низкому КПД. В лабораторных условиях этот недостаток практически не ощутим, ибо потребляемой от электросети энергии с лихвой хватает для возбуждения ВВ в гидролотках и даже бассейнах, однако в натуральных условиях большая энергоемкость волнопродуктора может оказаться сильно сдерживающим фактором на пути его реализации.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ГЕНЕРАЦИИ ВВ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Численные расчеты генерации ВВ были проведены для модели термостратифицированного бассейна, подробно описанного в работе [3]. Основная система уравнений гидродинамики для двумерных возмущений (зависящих от одной горизонтальной координаты x и вертикальной координаты z) имеет вид [3]

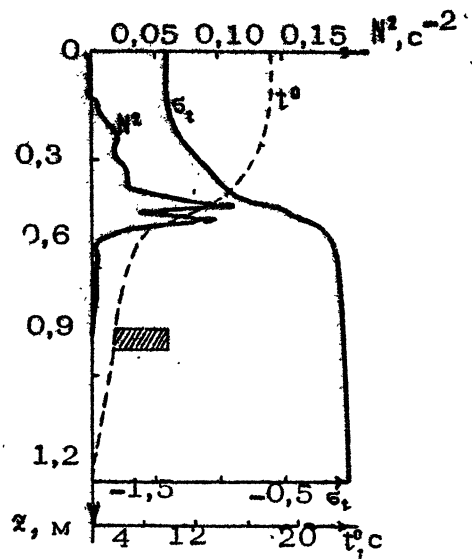
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} = \Delta \omega - Gr \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\omega = \Delta \Psi, \quad (1)$$

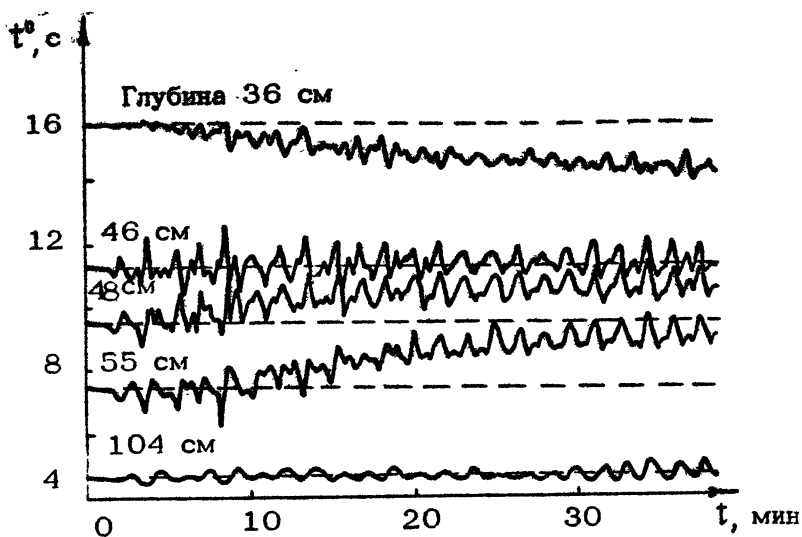
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\Delta T}{Pr},$$

где u, w — компоненты вектора скорости жидкости $\vec{v} = (u, w)$, $\omega = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$ — завихренность, Ψ — функция тока, Gr — число Грасгофа, Pr — число Прандтля. При расчетах полагалось $Gr = 2,8 \cdot 10^{10}$, $Pr = 7$. Расчет проводился для половины продольного сечения бассейна, полные размеры которого составляли 5 x 1,6 x 1,2 м. Использовалась монотонная схема с неравномерным шагом по вертикали и общим

рис. 1. Зависимость температуры t° , условной плотности σ_t и квадрата частоты плавучести N^2 от глубины x для численной модели бассейна. Заштрихованный прямоугольник показывает возмущение температуры, обусловленное тепловым источником

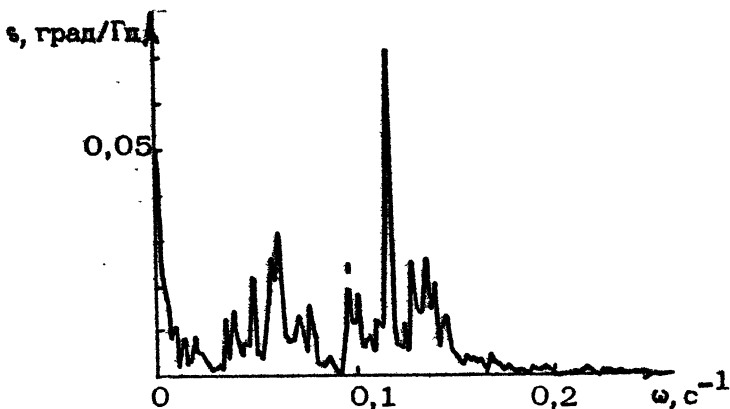


числом узлов 48×129 . В начальный момент задавалась равновесная для данной модели бассейна стратификация с температурой жидкости у поверхности 18°C , у дна 4°C и выраженным термоклином на глубине 43 см (рис. 1). На фоне этой равновесной стратификации на глубине 80 см была задана нагретая до температуры 10°C цилиндрическая область с прямоугольным поперечным сечением размером $10 \times 4\text{ см}$. Вследствие образовавшегося дефицита плавучести нагретая область начинает всплывать, взаимодействуя с термоклином и вызывая ВВ. Амплитуды последних зависят от многих факторов: глубины залегания нагретой области, ее температуры, объема и т. д. При прочих фиксированных параметрах амплитуды ВВ зависят также от периода включения источника и от длительности нагрева (скважности импульсов). В наших расчетах исследовался одноимпульсный режим нагрева и периодическое включение источника. По указанной на рис. 1 гидрологии были вычислены дисперсионные кривые для первых трех мод ВВ и определены значения максимальных фазовых и групповых скоростей для этих мод: $V_1 = 5,3\text{ см/с}$, $V_2 = 1,6\text{ см/с}$, $V_3 = 1\text{ см/с}$. При этом максимальная частота Брента - Вайсяля $N_{\text{max}} = 0,34\text{ с}^{-1}$ (соответствующий период $T_{\text{min}} = 18,7\text{ с}$).

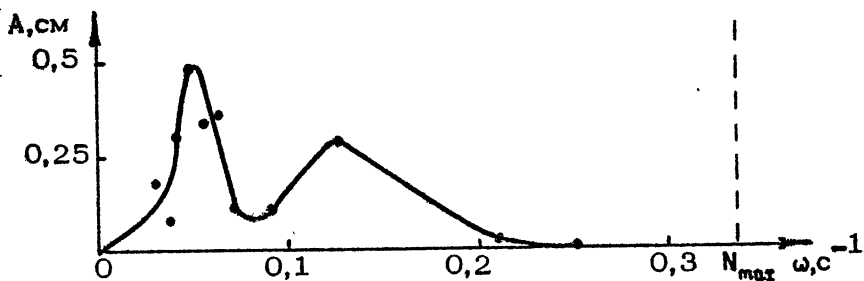


Р и с. 2. Колебания температуры на различных глубинах при периодическом возбуждении ВВ тепловым источником (численный расчет)

Поскольку возмущение задавалось двумерным, то и возбуждаемые ВВ были плоскими, они распространялись по горизонтали вдоль бассейна, слабо затухая с расстоянием. На рис. 2 показаны колебания температуры со временем на различных горизонтах вдоль вертикальной линии, расположенной неподалеку от периодически нагреваемой области. Период следования импульсов составлял 100 с, длительность нагрева внутри каждого импульса составляла 10 с. Как видно из рисунка, возмущения температуры на каждом горизонте носят квазипериодический характер, причем колебания происходят практически в одинаковой фазе на всех глубинах. Это говорит о том, что возбуждается преимущественно первая мода ВВ, примесь же остальных мод незначительна. Амплитуда смещений в термоклине достигает 0,5 см. Из рисунка также видно, что со временем наблюдается медленный тренд кривых, причем нижние кривые поднимаются, а верхние опускаются. Это говорит о том, что вблизи термоклина происходит медленное перемешивание жидкости, обусловленное всплывающими термиками. На практике, однако, в лабораторных экспериментах, о которых речь пойдет ниже, перемешивание выражено не столь заметно.



Р и с. 3. Спектр колебаний температуры на глубине 46 см (численный расчет)



Р и с. 4. Зависимость амплитуды возбуждаемых ВВ от частоты внешнего воздействия (численный расчет)

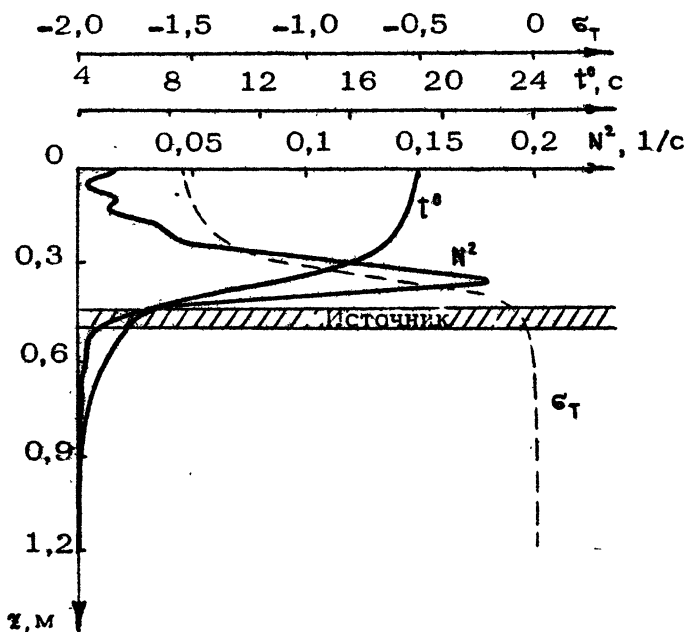
По полученным записям колебаний температуры были вычислены временные спектры ВВ на различных глубинах. На этих спектрах ярко выражен острый пик, соответствующий частоте включения теплового источника (рис. 3). Этот пик особенно хорошо проявляется на горизонте термоклина, где температурный гренд практически отсутствует.

При других периодах включения теплового источника качественная картина возникновения ВВ оставалась такой же, как показано на рис. 2, но при этом изменялась величина гренда и амплитуда возбуждаемых ВВ. На рис. 4 показан график зависимости амплитуды синусоидальной волны, соответствующей максимуму в спектре, от частоты включения источника - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ). Из графика видно, что на определенных частотах эффектив-

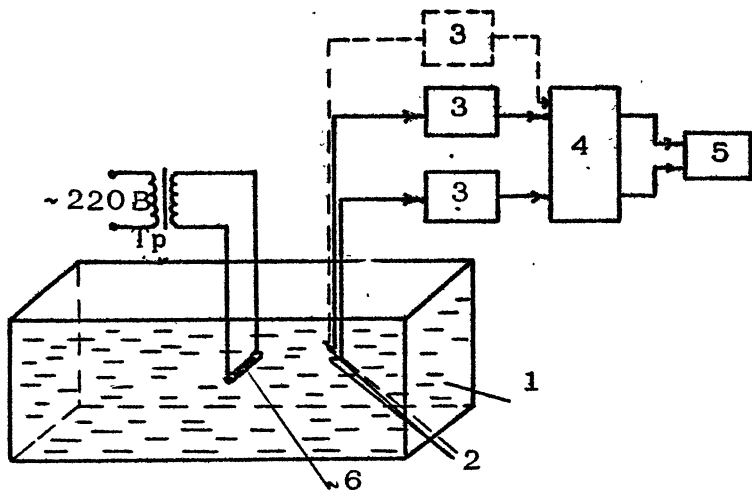
ность возбуждения гармонических ВВ максимальна. Впрочем, АЧХ цилиндрического волнопродуктора, совершающего вертикальные колебания в жидкости, имеет качественно такой же вид (см. рис. 17 в работе [3]). Поведение кривой $A(\omega)$, по-видимому, объясняется скорее свойствами ВВ, а не конкретным типом волнопродуктора.

3. ЛАБОРАТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ГЕНЕРАЦИИ ВВ ТЕПЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Эксперименты проводились в термостратифицированном бассейне ИФФ АН СССР (промежуточная модель [3]) с оригинальной системой создания и поддержания тепловой стратификации, которая показана на рис. 5. На рис. 6 изображена блок-схема установки. Размеры бассейна указаны в разд. 2. Тепловой источник представлял собой цилиндрическую батарею из 6 параллельно расположенных кварцевых галогенных

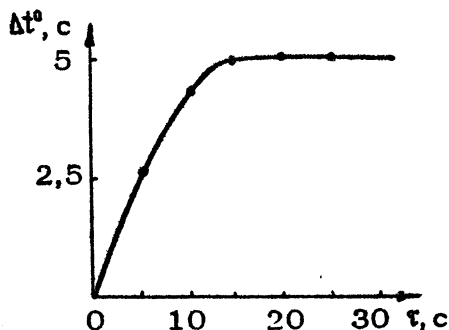


Р и с. 5. Зависимости температуры t^0 , условной плотности σ_t и квадрата частоты плавучести N^2 от глубины z бассейна



Р и с. 6. Блок-схема экспериментальной установки для возбуждения ВВ в лабораторном бассейне: 1 – термо-стратифицированный бассейн, 2 – датчики температуры, 3 – измерительный мост, 4 – мини-ЭВМ, 5 – графо-построитель, 6 – тепловой источник

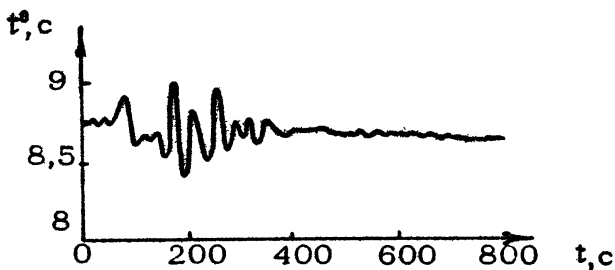
ламп КГТ-200-600. Длина каждой лампы 50 см, диаметр 1,2 см, мощность 600 Вт. Диаметр всей батареи 6 см. При подаче на лампы импульса переменного тока 220 В около батареи образуется нагретая область, плотность которой ниже, чем у окружающей жидкости. В результате этого возникает всплывающий гермик, который, взаимодействуя с термоклином, порождает ВВ. На рис. 7 показана зависимость $\Delta t^0 = t_t^0 - t_1^0$ (t_t^0 – температура внутри гермика,



Р и с. 7. Зависимость разности температур Δt^0 внутри гермика и в окружающей жидкости от длительности включения источника τ

t_1^0 - температура окружающей жидкости) от длительности включения ламп Φ .

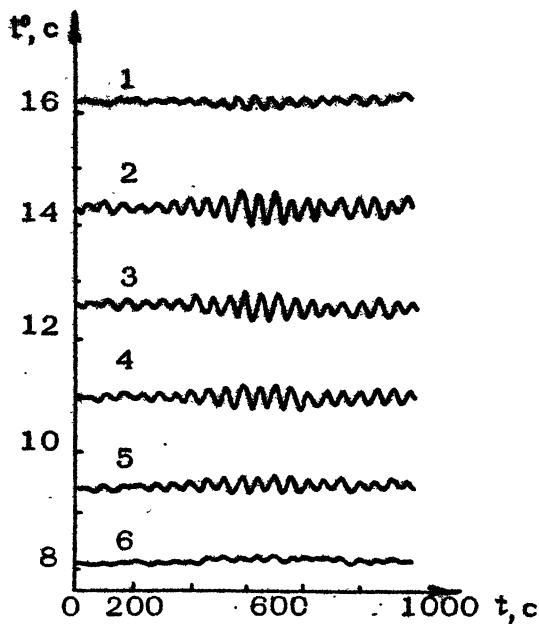
Во время экспериментов тепловой источник располагался на глубине 45 см. Измерения ВВ проводились двумя гирляндами точечных датчиков температуры конструкции В.Г.Карманова. Одна гирлянда содержала 6 датчиков, расположенных по вертикали, на расстоянии 200 см от теплового источника. Другая гирлянда состояла из 10 датчиков, расположенных на одинаковой глубине и на различном удалении от источника. Такая антенна датчиков позволяла составить подробную пространственную картину возбуждаемых источников ВВ. Данные о колебаниях температуры, поступавшие с датчиков в виде непрерывного сигнала, вводились в мини-ЭВМ в оцифрованном виде и подвергались дальнейшей обработке.



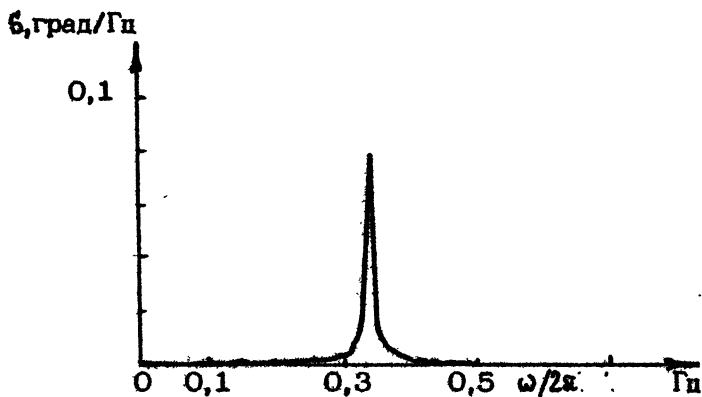
Р и с. 8. Цуг ВВ, возбуждаемый одиночным импульсом длительностью 15 с

При воздействии на источник одиночным электрическим импульсом возникал гермик цилиндрической формы, который при всплывании порождал цуг ВВ преимущественно первой моды. На рис. 8 в качестве примера изображен волновой пакет, порождаемый одиночным импульсом напряжения длительностью 15 с. Амплитуду колебаний ВВ в таком пакете (максимальное отклонение температуры от равновесного значения) и их длительность можно изменять, располагая источник на различных глубинах и меняя длительность питающего электрического импульса.

При периодическом включении источника в бассейне возникал режим бегущих квазигармонических ВВ, соответствующих первой моде (на горцевых стенках бассейна устанавливались волногасители с тем, чтобы максимально ослабить отраженные волны). На рис. 9 приведены записи ВВ на раз-

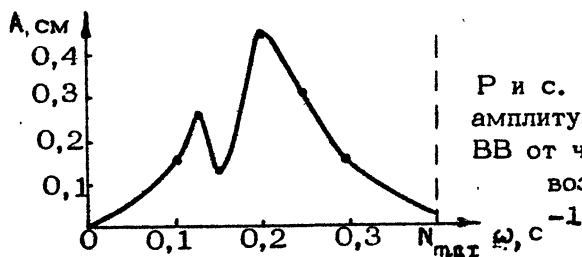


Р и с. 9. Колебания температуры на различных глубинах в бассейне при периодическом возбуждении ВВ тепловым источником



Р и с. 10. Спектр колебаний температуры на глубине 35 см

личных глубинах вдоль одной вертикали (число импульсов включения 20, длительность импульса $\tau = 15$ с, период включения $T = 30$ с). Как видно из этого рисунка, колебания на различных глубинах происходят почти в одинаковых фазах, что свидетельствует о возбуждении преимущественно первой моды ВВ. Более подробный анализ модовой структуры, выполненный с использованием ЭВМ, подтвердил, что примесь других мод ВВ незначительна. Из этих записей видно также, что возбуждаемые волны являются квазигармоническими (соответствующий спектр с острым пиком на частоте возбуждения изображен на рис. 10), причем степень монохроматичности в эксперименте выражена значительно лучше, чем в численных расчетах (ср. рис. 2, 3). Еще одно отличие экспериментов от численных расчетов состоит в почти полном отсутствии среднего тренда на записях ВВ, что говорит о малой степени перемешивания жидкости в термоклине. Эти отличия, по нашему мнению, могут быть обусловлены, с одной стороны, сглаживающим влиянием различных диссипативных факторов, не учитываемых в численных расчетах (трение о дно и боковые стенки, наличие турбулентной вязкости и др.), а с другой стороны – более мощным потоком тепла в бассейне, который в состоянии поддерживать среднюю стратификацию на стационарном уровне.



Р и с. 11. Зависимость амплитуды возбуждаемых ВВ от частоты внешнего воздействия

Полученная в эксперименте АЧХ так же, как и в численных расчетах, имеет двугорбый вид (рис. 11), но максимум на высоких частотах больше, чем на низких (ср. рис. 4).

Таким образом, эксперименты, как и численные расчеты, показывают, что тепловой источник является удобным управляемым генератором ВВ, с помощью которого можно легко получать как периодические ВВ заданной частоты, так и одиночные цуги ВВ с требуемыми свойствами. В лабораторных условиях такой источник вполне может конкурировать с тра-

ационально используемыми механическими волнопродукторами по эффективности возбуждения ВВ и в ряде случаев может оказаться более предпочтительным. Основным недостатком предлагаемого теплового источника является его относительно большая энергоемкость, что затрудняет его использование в реальных морских условиях.

4. ОЦЕНКА КПД ТЕПЛООВОГО ИСТОЧНИКА КАК ВОЛНОПРОДУКТОРА

Приведем оценку эффективности работы теплового источника, определяя КПД как отношение потока энергии, возбуждаемой ВВ, P_6 к электрической мощности, потребляемой источником от сети, W_3 в процентах: $\eta = (P_6 / W_3) \cdot 100\%$. Аппроксимируем для простоты переходный слой резким скачком температуры (и соответственно плотности). Будем считать, что на глубине $h_1 = 35$ см происходит ступенчатый перепад температуры от 10 до 4° С (соответствующий скачок ϵ_t от $-1,5$ до 0). Запишем выражение для потока энергии линейной ВВ, усредненное по ее периоду:

$$P_6 = LV_{гр} W_6 = LV_{гр} \left\langle \frac{\rho_2}{2} \int_{-H}^{-h_1} (\bar{v}_2)^2 dz + \frac{\rho_1}{2} \int_{-h_1}^0 (\bar{v}_1)^2 dz + (\rho_2 - \rho_1) g \xi^2 \right\rangle, \quad (2)$$

где W_6 - средняя за период плотность энергии ВВ, выражение для которой содержится в угловых скобках, сами угловые скобки обозначают усреднение за период; L - ширина фронта плоской ВВ (в нашем случае ширина бассейна); $H = h_1 + h_2$ - полная глубина бассейна, ξ - отклонение границы раздела слоев от равновесия; $\rho_{1,2}$ - плотности верхнего и нижнего слоев; $\bar{v}_{1,2}$ - скорости частиц в слоях; g - ускорение силы тяжести; $V_{гр} = d\omega/dk$ - групповая скорость волны. В линейном приближении, достаточном для наших оценок, легко можно вычислить зависимости $\xi(t, x)$, $v_{1,2}(t, x, z)$ и найти дисперсионное соотношение

$$\omega^2(x) = \frac{(p_2 - p_1)gk}{p_1 \operatorname{cth} kh_1 + p_2 \operatorname{cth} kh_2} \quad (3)$$

После этого из формулы (2) получаем

$$p_2 = (p_2 - p_1)gA^2L V_{gr},$$

где A — амплитуда гармонической волны. Электрические затраты, приводящие к возбуждению ВВ, легко сосчитать по формуле $W_2 = W_A \tau / T$, где W_A — электрическая мощность, потребляемая одной лампой, n — число ламп в батарее (в нашем случае $n = 6$), τ — время включения лампы в течение одного периода T .

Далее, полагаем для оценок $p_1 = 0,9985 \text{ г/см}^3$, $p_2 = 1 \text{ г/см}^3$, $g = 10^3 \text{ см/с}^2$, $A = 0,5 \text{ см}$, $L = 160 \text{ см}$, $W_A = 600 \text{ Вт}$, $\tau = 10 \text{ с}$, $T = 30 \text{ с}$, $k = 0,058 \text{ л/см}$ ($\lambda \approx 108 \text{ см}$).

В результате находим $\eta \approx 10^{-6} \%$. Полученное значение КПД представляется крайне малым. Поэтому в натуральных условиях рассмотренный здесь волнопродуктор едва ли можно использовать. Если принять для оценок в морских условиях

$\Delta \rho = 10^{-3} \text{ г/см}^3$, длину волнопродуктора $L = 50 \text{ м}$ [1], то для возбуждения ВВ с периодом $T = 6 \text{ мин}$ ($\lambda \approx 40 \text{ м}$) и амплитудой $A = 1 \text{ см}$ ($p_2 \approx 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}$) потребуется электрическая мощность порядка 750 кВт. Такая мощность хоть и велика, но все же вполне достижима.

Вместе с тем при использовании данного волнопродуктора в небольших водоемах или в лабораторных условиях потребуются значительно меньшие мощности для его запитки.

Л и т е р а т у р а

1. Островский Л.А. Поверхностные и внутренние волны как средство диагностики океана // Методы гидрофизических исследований / ИПФ АН СССР. Горький, 1984. С. 185.
2. Казаков В.В., Степанянц Ю.А. Способ возбуждения внутренних волн: А. с. 1543275 СССР, кл. В 01 М 10/00. Оpubл. в БИ, 1990, № 6.
3. Арабаджи В.В., Баранов С.А., Богатырев С.Д. и др. Лабораторный бассейн для моделирования волновых движений в стратифицированном океане // Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984. С. 5.

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ

С.Б.Лебле, Д.А.Верещагин, А.К.Щекин

Предлагаемая работа посвящена развитию метода модельных кинетических уравнений для описания волновых возмущений в вертикально стратифицированном газе. Основная трудность при теоретическом рассмотрении волновых движений в стратифицированном газе заключается в появлении негидродинамического режима в какой-либо области пространства или спектра частот волн. В этой области будет нарушаться условие малости числа Кнудсена K_n — малости длины свободного пробега молекулы по сравнению с характерным масштабом неоднородности газа, определяемого либо стратификацией газа, либо длиной распространяющейся волны. Указанная трудность принципиально не может быть преодолена в рамках системы уравнений Навье — Стокса.

Близкой по постановке является задача о распространении звука фиксированной частоты в однородном газе произвольной плотности. Проведенное в работах [1 — 10] теоретическое и экспериментальное исследование этого вопроса является показательным в отношении того, как меняются свойства акустической волны с ростом числа Кнудсена, отвечающим переходу ко все более разреженным газам. Можно отметить две особенности поведения параметров волны в кнудсеновском и переходном от гидродинамического к кнудсеновскому режимах движения газа. Во-первых, существенное изменение законов дисперсии и диссипации в области $K_n \sim 1$ по сравнению с гидродинамикой. Во-вторых, исчезновение определенности понятий волнового вектора и частоты в области значений $K_n \sim 5 \div 10$. Подчеркнем, что, как оказыва-

ется, волновое описание является действенным в гораздо более широком диапазоне чисел $K\lambda$, чем можно было бы предполагать, опираясь на гидродинамику.

В данной работе за основу описания стратифицированного газа при произвольных числах Кнудсена берется модельное кинетическое уравнение Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК) [11]. Так же, как и в работах [3, 4, 7], можно было бы рассмотреть и более точные модельные уравнения, выводимые по методу Гросса – Джексона [12], но получаемые при этом результаты оказываются более громоздкими. В то же время уравнение БГК, как показано в работах [8 – 10], является и достаточно простым, и эффективным, давая в теории звука хорошее согласие с экспериментальными данными [5, 6].

МОДЕЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем рассматривать малые по амплитуде возмущения в экспоненциально стратифицированном по плотности однокомпонентном газе без внутренних степеней свободы, находящемся в гравитационном поле Земли. Считается, что газ простирается неограниченно высоко (кривизной поверхности Земли, ее вращением и зависимостью ускорения свободного падения от координаты на больших высотах пренебрегаем).

При малых амплитудах возмущения газа функция распределения молекул газа по скоростям $\vec{v} (v_x, v_y, v_z)$ и координатам $\vec{r} (x, y, z)$ может быть записана в виде

$$f = f_0 (1 + \varphi), \quad |\varphi| \ll 1, \quad (1)$$

где

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{z}{H} - \frac{mv^2}{2k_B T_0} \right), \quad (2)$$

f_0 – равновесная функция распределения Максвелла – Больцмана, n_0 и T_0 – невозмущенные значения плотности и температуры, m – масса молекулы газа, z – вертикальная координата, $H = (k_B T_0) / (mg)$ – высота однородной атмосферы, k_B – постоянная Больцмана, g – ускорение свободного падения.

Для неравновесного возмущения φ функции распределения имеем следующее кинетическое уравнение БГК:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\vec{v} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} \right) - q \frac{\partial \psi}{\partial v_z} = \nu z^{2/n} \left[\sum_{i=1}^5 M_i(t, \vec{r}) x_i(\vec{v}) - \psi \right]. \quad (3)$$

Здесь $\nu = (n_0 k_B T_0) / \eta$ — характерная частота столкновений молекул в газе при $z = 0$, η — динамическая вязкость, функции x_i — инварианты столкновения:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= \sqrt{2} \frac{v_x}{v_T}, & x_3 &= \sqrt{2} \frac{v_y}{v_T}, \\ x_4 &= \sqrt{2} \frac{v_z}{v_T}, & x_5 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{v^2}{v_T^2} - \frac{3}{2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}},$$

v_T — средняя тепловая скорость движения молекул газа. Величины M_i являются моментами функции распределения и определяются через скалярное произведение функций x_i и ψ как

$$M_i = \langle x_i, \psi \rangle = \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} \int d\vec{v} \exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right) x_i \psi. \quad (5)$$

Первые пять моментов связаны с обычными гидродинамическими неравновесными переменными: плотностью n , средней скоростью \vec{U} , температурой T

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{n - n_0}{n_0}, & M_2 &= \sqrt{2} \frac{U_x}{v_T}, & M_3 &= \sqrt{2} \frac{U_y}{v_T}, & M_4 &= \sqrt{2} \frac{U_z}{v_T}, \\ M_5 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{T - T_0}{T_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

ВЫВОД ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3). Пренебрегая влиянием границ, запишем только начальное условие ψ в виде

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(\bar{r}, \bar{v}). \quad (7)$$

Целью излагаемого ниже подхода будет сведение интегродифференциального уравнения (3) с начальным условием (7) к интегральному уравнению для функции φ . Имея это в виду, преобразуем (3) с помощью следующей замены переменных. Обозначим полный набор переменных, от которых зависит функция φ , как $\{\alpha\}$. Тогда установим связь между новыми и старыми переменными в виде

$$\begin{aligned} \{\alpha'(t)\} & & \{\alpha(t')\}, \\ t'(t) &= t, & t(t') = t', \\ z'(t) &= z - v_x t, & z(t') = z' + v_x' t', \\ y'(t) &= y - v_y t, & y(t') = y' + v_y' t', \\ x'(t) &= z - v_x t - \frac{1}{2} g t^2, & x(t') = z' + v_x' t' - \frac{1}{2} g t'^2, \\ v_x'(t) &= v_x, & v_x(t') = v_x', \\ v_y'(t) &= v_y, & v_y(t') = v_y', \\ v_x(t) &= v_x + g t, & v_x(t') = v_x' - g t'. \end{aligned} \quad (8a) \quad (86)$$

$\{\alpha'(t)\}$ - набор новых переменных, $\{\alpha(t')\}$ - старые переменные, выраженные как функции новых.

В новых переменных уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} + v \varphi \operatorname{стр} \left[-\frac{z(t')}{H} \right] = \\ = v \operatorname{стр} \left[-\frac{z(t')}{H} \right] \cdot \sum_{i=1}^5 M_i(t', \bar{r}(t')) \alpha_i(\bar{v}(t')), \end{aligned} \quad (9)$$

где $z(t')$, $\bar{r}(t')$, $\bar{v}(t')$ определяются с помощью (86).

Если функцию φ представить в виде

$$\varphi = \operatorname{стр} \left\{ -v \int_0^{t'} \operatorname{стр} \left[-\frac{z(t'')}{H} \right] dt'' \right\} \psi, \quad (10)$$

то для новой неизвестной функции ψ в левой части уравнения (9) сохранится только производная по времени и уравнение формально интегрируется:

$$\psi = \nu \int_0^{t'} d\tilde{t} \exp \left\{ \nu \int_0^{\tilde{t}} \exp \left[-\frac{z(t'')}{H} \right] dt'' - \frac{z(\tilde{t})}{H} \right\} \times \\ \times \sum_{i=1}^5 M_i(\tilde{t}, \vec{r}(\tilde{t})) \alpha_i(\vec{v}(\tilde{t})) + \psi_0(\vec{r}(0), \vec{v}(0)). \quad (11)$$

Свободный член ψ_0 в (11) определяется начальным условием (7). Возвращаясь к функции ψ и переходя к старым переменным с помощью соотношений (8a), после замены интегрирования по \tilde{t} и t'' на интегрирование по $\tau = t - \tilde{t}$ и $\tau_1 = t - t''$ получим

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{v}) = \nu \int_0^t d\tau \Phi_0(\tau, \vec{r}, \vec{v}_2) \sum_{i=1}^5 M_i(t-\tau, \vec{r}'(\tau)) \alpha_i(\vec{v}'(\tau)) + \\ + \exp \left\{ -\nu \int_0^t d\tau \exp \left[-\frac{z'(\tau)}{H} \right] \right\} \psi_0(\vec{r}'(t), \vec{v}'(t)), \quad (12)$$

где

$$\Phi_0(\tau, \vec{r}, \vec{v}_2) = \exp \left\{ -\nu \int_0^{\tau} \exp \left[-\frac{z'(\tau_1)}{H} \right] d\tau_1 - \frac{z'(\tau)}{H} \right\}. \quad (13)$$

Уравнение (12) представляет собой интегральную форму интегриродифференциального кинетического уравнения (3) с учетом начального условия (7). Эквивалентность (12) и (3) легко может быть проверена дифференцированием (12) по t , \vec{r} и \vec{v}_2 . Преимущество формы уравнения (12) состоит в том, что она позволяет получить замкнутую систему интегральных уравнений для моментов функции распределения M_i , которые зависят уже только от пространственных координат и времени. Решение системы уравнений для M_i фактически означает решение и уравнения (12), так как остается только представить найденные M_i в правую часть (12).

Воспользовавшись определением (5), скалярно умножим обе части уравнения (12) на функции α_i :

$$M_i(t, \vec{r}) = \int_0^t dt' \Phi_i(t', \vec{r}, v_i) \chi_i(\vec{v}') \chi_i(\vec{v}'(t')) M_i(t-t', \vec{v}'(t')) + \\ + \exp\left\{-\int_0^t dt' \exp\left[-\frac{z'(t')}{H}\right]\right\} \Psi_i(\vec{r}(t), \vec{v}'(t)) \chi_i(\vec{v}'). \quad (14)$$

Хотя система уравнений (14) является замкнутой системой относительно набора обычных пяти гидродинамических величин, тем не менее (14) описывает все режимы течения газа: от гидродинамического до кнудсеновского. Это достигается благодаря появлению в правой части уравнений кинетического начального условия и интегрированию M_i по всем предшествовавшим моментам времени.

Здесь важно отметить, что интегрирование в уравнении (14) осуществляется только по времени и скорости. Таким образом, пространственные координаты входят в уравнение как параметры. Это обстоятельство облегчает дальнейшее исследование неоднородного газа и, в частности, позволяет построить дисперсионные соотношения для акустико-гравитационных волн в виде разложения по числу Кнудсена.

ЛОКАЛЬНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В области малых чисел Кнудсена из системы интегральных уравнений (14) можно получить и прямые аналитические результаты, касающиеся дисперсионных соотношений для акустических и гравитационных волн. С этой целью будем искать приближенные решения (14) в виде

$$M_i(t, \vec{r}) = \bar{M}_i \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (15)$$

Так как нас будет интересовать дисперсионное соотношение для ω и \vec{k} , то исключим в (14) влияние начального условия. Поступим следующим образом. Положим начальный момент времени равным не нулю, а t_0 . Тогда в уравнении (14) на верхнем пределе интегрирования будет стоять не t , а разность $t-t_0$. Если теперь устремить t_0 к $-\infty$ (в бесконечное прошлое), то верхний предел в первом слагаемом в правой части (14) заменится на ∞ , а второе слагаемое обратится в нуль. Получим

$$M_i(t, \tau) = \nu \int_0^{\infty} dt \varphi_0(\tau, x, \sigma_i) \chi_i(\bar{v}) \chi_j(\bar{v}'(t)) M_j(1-\tau, \bar{v}'(t)) \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), приходим к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных величин \bar{M}_j :

$$\bar{M}_i = \Lambda_{ij} \bar{M}_j$$

с коэффициентами Λ_{ij} , равными

$$\Lambda_{ij} = \left\langle \int_0^{\infty} dt \tilde{\Lambda}_{ij} \right\rangle \quad (17)$$

Здесь

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \epsilon \exp \left\{ -\epsilon \int_0^{\tau} dt_1 \exp \left(c_2 \frac{\tau_1}{\tau_0} + \frac{\tau_1^2}{4\tau_0^2} \right) + c_2 \frac{\tau}{\tau_0} + \frac{\tau^2}{4\tau_0^2} + \right. \\ \left. + i \left(\omega - (\bar{k}, \bar{v}) v_T \right) \tau - i \frac{k_x H \tau^2}{4\tau_0^2} \right\} \chi_i(\bar{v}) \chi_j(\bar{v}'(\tau)) \quad (18)$$

и введены новые обозначения:

$$\tau_0 = \frac{H}{v_T}, \quad \bar{v} = \frac{\bar{v}}{v_T}, \quad \epsilon = \nu e^{-x/H} \quad (19)$$

Очевидно, τ_0 — характерный временной масштаб задачи, \bar{v} — безразмерная скорость молекул газа, ϵ — эффективная частота столкновений при заданном x (на высоте x). При этом условие малости числа Кнудсена может быть записано в виде

$$(\epsilon \tau_0)^{-1} \ll 1.$$

В силу зависимости ϵ от x это сильное неравенство имеет место только в определенном интервале высот, соответственно и приближенное решение (15) справедливо в том же интервале.

Поскольку экспонента в выражении (18) содержит параметр ϵ , то в области значений x , где $\epsilon \tau_0 \gg 1$, существенный вклад в решение будет давать лишь область малых значений $\tau \sim 1/\epsilon$. В этом случае показатель экспоненты для $\tilde{\Lambda}_{ij}$ может быть разложен в ряд Тейлора вблизи значения $\epsilon = 0$, что эквивалентно разложению по малому параметру $(\epsilon \tau_0)^{-1}$. С точностью до первого порядка малости

по параметру $(\varepsilon \tau_0)^{-1}$ все выражение для \tilde{A}_{ij} может теперь быть записано в виде

$$\tilde{A}_{ij}(\tau) = \varepsilon e^{-\varepsilon \tau} \left(\tilde{A}_{ij}^{(0)} + \tilde{A}_{ij}^{(1)} \frac{\tau}{\varepsilon \tau_0} \right), \quad (20)$$

$$\tilde{A}_{ij}^{(0)} = \alpha_i(\bar{\tau}) \alpha_j(\bar{\tau}),$$

$$\tilde{A}_{ij}^{(1)} = \varepsilon v(\tau, \bar{\tau}) \alpha_i(\bar{\tau}) \alpha_j(\bar{\tau}) + \alpha_i(\bar{\tau}) \frac{d\alpha_j(\bar{\tau}(\tau))}{d\bar{\tau}} \Big|_{\tau=0} \varepsilon \tau_0, \quad (21)$$

$$v(\tau, \bar{\tau}) = -\varepsilon \frac{c_x}{2} \tau + c_x + i\tau_0 (\omega - (\bar{\kappa}, \bar{\tau}) \nu_T). \quad (22)$$

Подстановка $\tilde{A}_{ij}^{(0)}$ и $\tilde{A}_{ij}^{(1)}$ в уравнение (17) дает

$$\hat{A} = \hat{I} + \frac{1}{\varepsilon} \hat{A}^{(1)}, \quad (23)$$

где \hat{I} — единичная матрица, а матрица $\hat{A}^{(1)}$ определяется как

$$\hat{A}^{(1)} = \left\{ A_{ij}^{(1)} \right\} = \begin{pmatrix} i\omega & -i\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_x \nu_T & -i\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_y \nu_T & -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\kappa_z \nu_T + \frac{1}{\varepsilon} \right) & 0 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_x \nu_T & i\omega & 0 & 0 & -i\frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_x \nu_T \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_y \nu_T & 0 & i\omega & 0 & -i\frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_y \nu_T \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}} \kappa_z \nu_T & 0 & 0 & i\omega & -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(i\kappa_x \nu_T + \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ 0 & -i\frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_x \nu_T & -i\frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_y \nu_T & -i\frac{1}{\sqrt{3}} \kappa_z \nu_T & i\omega \end{pmatrix} \quad (24)$$

Как видим, условием разрешимости системы уравнений (16) для \bar{N}_i является

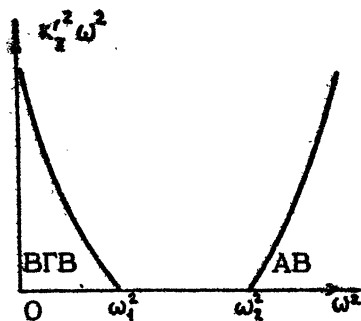
$$\det(\hat{A} - \hat{I}) = 0$$

или

$$\det \left\{ A_{ij}^{(1)} \right\} = 0. \quad (25)$$

Для дальнейшего анализа достаточно ограничиться двумерным случаем ($\kappa_y = 0$). Для волновых возмущений в газе условие (25) определяет дисперсионное соотношение между ω и $\bar{\kappa}$. В первом порядке разложения по κ_l вещественная κ'_x и мнимая κ''_x часть κ_x оказываются связанными с ω и κ_z следующими выражениями:

Дисперсионные кривые для
акустико-гравитационных волн



$$\omega^4 - \frac{3}{5} \omega^2 u_T^2 \left(k_x^2 + k_x'^2 + \frac{1}{4H^2} \right) + \frac{2}{3} k_x^2 g^2 = 0, \quad (26)$$

$$k_x'' = -\frac{1}{2H}.$$

Соотношение (26) представляет собой хорошо известное дисперсионное соотношение для акустико-гравитационных волн в бездиссипативной атмосфере [13]. Оно задает кривую, изображенную на рисунке, где левая область ($\omega^2 < \omega_1^2$) соответствует внутренним гравитационным волнам (ВГВ), правая область ($\omega^2 \geq \omega_2^2$) — области акустических волн (АВ). В случае длинных внутренних волн ($\omega^2 \ll 1/\tau_0^2$; $k_x^2 \ll 1/H^2$)

$$\omega_1^2 \approx \frac{4}{5} k_x^2 u_T^2, \quad (27a)$$

а в случае одномерной акустической волны ($k_x = 0$)

$$\omega_2^2 \approx \frac{5}{24 \tau_0^2}. \quad (27b)$$

В области частот $\omega_1^2 < \omega^2 < \omega_2^2$ решения в виде плоской волны не существует.

При учете следующего порядка малости по числу $K\lambda$ следует помнить, что во втором порядке по малому параметру $(\varepsilon \tau_0)^{-1} \ll 1$ решение вида (15) не удовлетворяет системе (14). Удовлетворить системе уравнений (14) можно, если выбрать решения в виде локально-плоской волны

$$M_i(t, \vec{r}) = \bar{M}_i \exp[-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} + \Phi_i(z)] \quad (28)$$

с различными фазовыми функциями Φ_i , на которые, в свою очередь, должны быть наложены определенные дифференциальные уравнения связи. Появление индекса i у фазовых функций Φ_i обусловлено стратификацией газа. В пределе однородного газа все Φ_i должны быть равны.

Так как функции Φ_i являются поправочными по малому параметру $(\epsilon\tau_0)^{-1} \ll 1$ в показателе экспоненты (28), то они должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\left| \frac{d\Phi_i}{dz} \right| \ll \kappa_z; \quad |\Phi_i - \Phi_j| \ll 1. \quad (29)$$

Отметим, что, как видно из (29), мы не требуем малости $|\Phi_i|$ по сравнению с единицей.

После подстановки решений вида (28) в уравнение (16) получим

$$\bar{M}_i = \left\langle \int_0^{\infty} A_{ij}(\tau) \exp[\Phi_j(z'(\tau)) - \Phi_i(z)] d\tau \right\rangle \bar{M}_j. \quad (30)$$

Разложив аналогично (18) показатель экспоненты в \tilde{A}_{ij} и $\exp[\Phi_j(z'(\tau)) - \Phi_i(z)]$ под знаком интеграла в (30) в ряд Тейлора в окрестности $\tau = 0$ и удерживая три члена разложения, получим

$$\tilde{A}_{ij} = \epsilon e^{-\epsilon\tau} \left(\tilde{A}_{ij}^{(0)} + \tilde{A}_{ij}^{(1)} \frac{\tau}{\epsilon\tau_0} + \tilde{A}_{ij}^{(2)} \frac{\tau^2}{2\epsilon^2\tau_0^2} \right), \quad (31)$$

$$\exp[\Phi_j(z'(\tau)) - \Phi_i(z)] \approx 1 + \Phi_j(z) - \Phi_i(z) - \frac{d\Phi_j}{dz} \text{Hc}_z \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (32)$$

Величины $\tilde{A}_{ij}^{(0)}$ и $\tilde{A}_{ij}^{(1)}$ в выражении (31) имеют тот же смысл, что и раньше, а $\tilde{A}_{ij}^{(2)}$ определено соотношением

$$\tilde{A}_{ij}^{(2)} = \epsilon^2 \left[-\epsilon \left(c_z^2 + \frac{1}{2} \right) + b^2(\tau, \bar{r}) \right] \chi_i(\bar{r}) \chi_j(\bar{r}) + 2b(\tau, \bar{r}) \chi_i(\bar{r}) \frac{d\chi_j(\bar{r}(\tau))}{d\tau} \Big|_{\tau=0} - \epsilon^2 \tau_0 + 2\chi_i(\bar{r}) \frac{d^2\chi_j(\bar{r}(\tau))}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} \epsilon^3 \tau_0^2. \quad (33)$$

Покажем, что получается в случае одномерной акустической волны: $\vec{\kappa} = (0, 0, \kappa_z)$. После подстановки разложения (31) и (32) в уравнение (30) и вычисления интегралов, с учетом дисперсионного соотношения (26), получим систему уравнений для Φ_i :

$$\bar{M}_4 \left(i k_z v_T - \frac{1}{\tau_0} \right) (\varphi_4 - \varphi_1) + \bar{M}_4 v_T \frac{d\varphi_4}{dz} = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 i \frac{1}{\sqrt{2}} k_z v_T (\varphi_1 - \varphi_4) + \bar{M}_1 \frac{v_T}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi_1}{dz} + \bar{M}_5 \frac{1}{\sqrt{3}} \left(i k_z v_T - \frac{1}{\tau_0} \right) (\varphi_5 - \varphi_4) + \\ + \bar{M}_5 \frac{v_T}{\sqrt{3}} \frac{d\varphi_5}{dz} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{3} k_z^2 v_T^2 \bar{M}_4, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\bar{M}_4 \frac{2}{3} i k_z v_T (\varphi_4 - \varphi_5) + \bar{M}_4 \frac{2}{3} v_T \frac{d\varphi_4}{dz} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{5}{9} \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega} \bar{M}_4.$$

Кроме дисперсионного соотношения (26), первый порядок позволяет установить связь между величинами \bar{M}_1, \bar{M}_4 и \bar{M}_5 в одномерном случае. Тогда получим

$$\bar{M}_1 = \frac{k_z v_T + i/\tau_0}{\sqrt{2} \omega} \bar{M}_4,$$

$$\bar{M}_5 = \frac{k_z v_T}{\sqrt{3} \omega} \bar{M}_4. \quad (35)$$

Систему (34) можно разрешить относительно любой из величин $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_5$. Для определенности сделаем это относительно φ_4 . Подставляя (35) в (34) и исключая последовательно φ_1 и φ_5 , получим дифференциальное уравнение относительно φ_4 в виде

$$\frac{d^2 \varphi_4}{dz^2} + 2i \left(k_z + \frac{i}{2H} \right) \frac{d\varphi_4}{dz} = - \frac{4}{5} i \frac{\omega k_z^2}{\varepsilon} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right). \quad (36)$$

Интегрирование (36) дает

$$\frac{d\varphi_4}{dz} = - \frac{2}{5} \frac{\omega k_z}{\varepsilon} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right) + c_0 \exp \left[-2i \left(k_z + \frac{i}{2H} \right) z \right], \quad (37)$$

$$\varphi_4 = - \frac{2}{5} \frac{H \omega k_z}{\varepsilon} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right) - c_0 \frac{\exp[-2i(k_z + i/2H)z]}{2i(k_z + i/2H)} + c_1, \quad (38)$$

где c_0 и c_1 - постоянные интегрирования, которые определяются из условий на функцию φ_4 . Заметим, что константа c_0 определяет вклад в общее решение уравнения (36) от решения однородной части (36). Поскольку амплитуды \bar{M}_i

в уравнении (28) не фиксированы какими-либо условиями, то, как, например, отмечается в работе [14], при построении теории возмущений нет необходимости в каждом порядке рассматривать решение однородного невозмущенного уравнения. Можно показать, что учет решения однородного уравнения приводит просто к перенормировке \bar{H}_1 . Таким образом, можно сразу перейти к поиску частного решения (36), пользуясь в уравнениях (37) и (38) $\Gamma_0 = 0$. Для определения Γ_4 воспользуемся очевидным граничным условием для функции Φ_4 :

$$\Phi_4 \Big|_{z=0} = 0. \quad (39)$$

Итак, подставляя (38) в (39), с учетом $\Gamma_0 = 0$ и (19) получим

$$\Phi_4 = -\frac{2H\omega k_z}{5\nu} \left(1 + \frac{5}{12} \frac{k_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right) (e^{-z/H} - 1). \quad (40)$$

Согласно (28) величина $-i d\Phi_4/dz = (\Delta k_z)_4$ представляет собой локальную поправку к z -компоненте волнового вектора в выражении для вертикальной компоненты средней скорости. Тогда из (37) с учетом $\Gamma_0 = 0$ для вещественной $(\Delta k_z)_4'$ и мнимой $(\Delta k_z)_4''$ частей $(\Delta k_z)_4$ получаем

$$(\Delta k_z)_4'' = \frac{3}{5} \frac{\omega k_z'}{\varepsilon} \left(1 - \frac{5}{18} \frac{v_T^2}{\omega^2 H^2} \right), \quad (41)$$

$$(\Delta k_z)_4' = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\varepsilon H} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{v_T^2}{\omega^2 H^2} \right), \quad (42)$$

где k_z' и ω связаны вытекающим из (26) соотношением для звука:

$$k_z'^2 = \frac{6}{5} \frac{\omega^2}{v_T^2} - \frac{1}{4H^2}.$$

Можно показать, что если применить аналогичный подход к системе гидродинамических уравнений Навье - Стокса, то для $(\Delta k_z)_4'$ и $(\Delta k_z)_4''$ получим соответственно

$$(\Delta k_z)_4'' = \frac{4}{5} \frac{\omega k_z'}{v_T^2 m n_0} \left[\eta + \frac{\pi v_T^2}{6k_B \omega^2} \left(\frac{6}{5} \frac{\omega^2}{v_T^2} - \frac{1}{H^2} \right) \right], \quad (43)$$

$$(\Delta k_z)_4' = \frac{2}{5} \frac{\omega}{v_T^2 m n_0 H} \left[\eta + \frac{\pi v_T^2}{6k_B \omega^2} \left(\frac{9}{5} \frac{\omega^2}{v_T^2} - \frac{1}{2H^2} \right) \right]. \quad (44)$$

Здесь η и ϑ — коэффициенты вязкости и теплопроводности соответственно. Если же теперь положить в уравнениях (43) и (44) $\eta = \rho_0 \kappa_E T_0 / \nu$ и число Прандтля

$$Pr_1 = \frac{\eta c_p}{\vartheta} = 1,$$

что соответствует значению Pr_1 , получаемому в БГК-модели, то (43) и (44) перейдут в соотношения (41) и (42).

Отметим, что аналогичным методом, но на основе кинетического уравнения Гросса — Джексона, можно получить соотношения, полностью совпадающие с (43) и (44). Соотношения (43) и (44) при коэффициенте теплопроводности $\vartheta = 0$ совпадают с результатами [15].

Как известно, отношение $(\Delta \kappa_z)'_4 / \omega$ определяет поправку к обратной фазовой скорости, а $(\Delta \kappa_z)''_4$ — коэффициент амплитудного роста или затухания в зависимости от знака $(\Delta \kappa_z)''_4$. Если исследовать знак $(\Delta \kappa_z)''_4$, то видим, что при $\omega_2^2 \leq \omega^2 \leq \frac{4}{3} \omega_2^2$ знак $(\Delta \kappa_z)''_4$ отрицателен, а при $\omega^2 > \frac{4}{3} \omega_2^2$ знак $(\Delta \kappa_z)''_4$ положителен. Положительному знаку $(\Delta \kappa_z)''_4$ отвечает затухание волны, а отрицательному — рост амплитуды. Любопытно отметить, что если положить коэффициент теплопроводности ϑ равным нулю, то, как следует из соотношения (43), затухание акустической волны будет во всем диапазоне ω . В гидродинамике вязкого, но не теплопроводного газа формулы (43) и (44) при $\vartheta = 0$ были получены в работе [15]. Однако с учетом теплопроводности из (43) видим, что и в гидродинамике обнаруживается интервал частот $\omega_2^2 \leq \omega^2 \leq \frac{12}{7} \omega_2^2$, отвечающий росту амплитуды волны вертикальной скорости. При корректном определении уравнения переноса энергии рост амплитуды отдельных гидродинамических волновых компонент, сопровождающийся убыванием амплитуды других компонент, не противоречит общему затуханию энергии, переносимой волной. Нарастание амплитуды вертикальной скорости в области инфразвука, когда длина акустической волны становится порядка H , возможно и является артефактом теории эзотермической атмосферы, однако показывает на различие во влиянии вязкости и теплопроводности на распространение волн в стратифицированном газе.

Если произвести в рамках рассматриваемой теории расчет временных инкрементов затухания акустической волны в диссипативной атмосфере, то для вертикальной скорости получим $\omega = \omega_0 + \tilde{\omega} / \epsilon(x)$, где

$$\omega_0^2 = \kappa'_z{}^2 + \frac{1}{4H^2}.$$

Для $\tilde{\omega}'$ и $\tilde{\omega}''$ из соотношений (43) и (44) находим

$$\tilde{\omega}' = -\frac{5}{12} \frac{\kappa'_z{}^2 u_T^2}{H} \frac{\kappa'_z{}^2 + 1/20H^2}{\kappa'_z{}^2 + 1/4H^2},$$

$$\tilde{\omega}'' = -\frac{1}{2} \kappa'_z{}^2 u_T^2 \frac{\kappa'_z{}^2 - 1/12H^2}{\kappa'_z{}^2 + 1/4H^2}.$$

Значения $\tilde{\omega}' < 0$ отвечают загуханию, а $\tilde{\omega}'' > 0$ — росту амплитуды волны со временем. Если исследовать знак $\tilde{\omega}''$, то видно, что при $\kappa'_z{}^2 < 1/12H^2$ знак $\tilde{\omega}''$ положительный, а при $\kappa'_z{}^2 > 1/12H^2$ — отрицательный. Если сравнить эти результаты с результатами, полученными в рамках кинетического подхода в работе [13], увидим их отличие. Это связано с тем, что в [13] фактически решалась задача для постоянных кинематических вязкости и теплопроводности. Это позволило искать поправки к дисперсионному соотношению через равенство нулю детерминанта для системы моментных уравнений. В пределе коротких волн $\kappa'_z{}^2 \gg 1/H^2$, как и следовало ожидать, наши результаты совпадают с [13] при $\beta_1 = 1$. Кроме того, следует отметить наличие не равной нулю $\tilde{\omega}'$, которая исчезает при $\kappa'_z{}^2/H \rightarrow 0$. Отличная от нуля добавка $\tilde{\omega}'$ получается также, если рассчитать $\tilde{\omega}'$ на основе результатов, полученных в работе [14].

Область применимости полученных результатов определяется сильными неравенствами (29), которые эквивалентны требованию малости числа Кнудсена. Однако это не означает, что полученные нами соотношения (40) — (42) позволяют учесть только поправки к поведению акустической волны. Так же, как в классической задаче Стокса о загухании звука в однородном газе, отдельно взятые мнимые и вещественные части Φ_4 и $(\Delta \kappa_z)_4$ могут быть при определенных условиях сопоставимы соответственно с мнимыми или вещественными частями $i\kappa_z z$ и $\kappa_z z$ — членов главного порядка. Интересно сравнить $\kappa'_z{}^2 z$ и $\Phi'_4(z)$ — вещественную часть фазовой поправки Φ_4 . Используя (26) и (40), для отношения Φ'_4 к $\kappa'_z{}^2 z$ получим следующую оценку:

$$\frac{\Phi'_4}{\kappa'_z z} \sim \frac{e^{zH} - 1}{z} \frac{\omega \kappa'_z H^2}{\omega}$$

Отсюда видим, что при $\kappa'_z H \gg 1$ или при $z \gg H$ отношение $\Phi'_4 / \kappa'_z z$ может быть сравнимо с единицей или даже превосходить ее, несмотря на выполнение условия малости числа Кнудсена.

Аналогичные вычисления и анализ были проведены для случая длинных внутренних волн. Опуская детали расчета, приведем некоторые конечные формулы. Для вещественной и мнимой частей $(\Delta \kappa_z)_4$ для длинных внутренних волн получим

$$(\Delta \kappa_z)'_4 = \frac{\omega v_T^2}{5H^3 \epsilon \left(\frac{5}{3} \kappa_z^2 v_T^2 - 2\omega^2 \right)} \left(1 + \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{5\omega^2} - \frac{\kappa_z^4 v_T^4}{\omega^4} \right), \quad (45)$$

$$(\Delta \kappa_z)''_4 = \frac{\omega \kappa'_z v_T^2}{3H^2 \epsilon \left(\frac{5}{3} \kappa_z^2 v_T^2 - 2\omega^2 \right)} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} - \frac{\kappa_z^4 v_T^4}{\omega^4} \right), \quad (46)$$

где κ'_z , ω и κ_z связаны согласно (26) при $\omega^2 \ll 1/\tau_0^2$ и $\kappa_z^2 \ll 1/H^2$ как

$$\kappa_z'^2 = \frac{1}{4H^2} \left(\frac{4}{5} \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

Исследуя знак $(\Delta \kappa_z)''_4$, видим, что при $\frac{4.7}{8} \omega_1^2 \leq \omega^2 \leq \omega_1^2$ этот знак положителен, и, следовательно, амплитуда волны загужает. Однако при $\omega^2 < \frac{4.7}{8} \omega_1^2$ знак $(\Delta \kappa_z)''_4$ становится отрицательным, соответственно в этой области частот должен наблюдаться рост амплитуды волны и в рассматриваемом втором приближении по числу Кнудсена.

Интересно сравнить (45) и (46) с результатами, которые получаются для $(\Delta \kappa_z)'_4$ и $(\Delta \kappa_z)''_4$ для длинных внутренних волн из системы уравнений Навье - Стокса. Можно показать, что имеют место следующие соотношения:

$$(\Delta \kappa_z)'_4 = \frac{2\omega}{15H^3 m_0 \left(\frac{5}{3} \kappa_z^2 v_T^2 - 2\omega^2 \right)} \left[2\eta \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{15}{16} \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right) + \frac{2\pi}{\kappa_z} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} \frac{\kappa_z^4 v_T^4}{\omega^4} \right) \right], \quad (47)$$

$$(\Delta \kappa_z)''_4 = \frac{4}{15H^2 m_0} \frac{\kappa'_z \omega}{\left(\frac{5}{3} \kappa_z^2 v_T^2 - 2\omega^2 \right)} \left[2\eta \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{5}{16} \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\alpha m}{\kappa_6} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{\kappa_z^2 v_T^2}{\omega^2} - \frac{1}{4} \frac{\kappa_z^4 v_T^4}{\omega^4} \right) \Big] \quad (48)$$

Из соотношения (48) видим, что отрицательный знак у $(\Delta \kappa_z)^2$ будет при $\omega^2 < \frac{5}{8} \omega_1^2$, что незначительно отличается от результата, полученного с помощью уравнения БГК. Следует отметить, что в отличие от звука, для которого при равном нулю коэффициенте теплопроводности α амплитуда волны затухала во всем диапазоне частот, для длинных внутренних волн имеется область частот, где амплитуда волны растет и при $\alpha = 0$.

РЕЛАКСАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Покажем теперь, что некоторые выводы о характере эволюции начального возмущения можно сделать с помощью (14) в случае больших чисел Кнудсена. Пренебрегая при $\chi \gg H$ столкновениями молекул газа вообще, из формулы (14) получим следующую систему соотношений для моментов M_i :

$$M_i(t, \vec{r}) = \langle \psi_0(\vec{r}(t), \vec{v}(t)) \alpha_i(\vec{v}) \rangle \quad (49)$$

Возьмем для определенности в качестве начального возмущения возмущение плотности $\psi_0 = \psi(\vec{r})$. Учитывая связь (6) между $M_i(t, \vec{r})$ и гидродинамическими переменными, для фурье-образов гидродинамических переменных из соотношений (49) после интегрирования по скоростям получаем

$$\begin{aligned} n(\vec{k}, t) &= \psi(\vec{k}) \exp \left[- \frac{v_T^2 t^2}{4} \left(\frac{i k_x}{H} + \kappa_x^2 \right) \right], \\ \vec{u}(\vec{k}, t) &= - \frac{\vec{k} v_T^2 t}{4} n(\vec{k}, t), \\ T(\vec{k}, t) &= - \frac{\kappa^2 v_T^2 t^2}{6} n(\vec{k}, t), \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\psi(\vec{k}) = \int d\vec{r} \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \psi(\vec{r}).$$

Система (50) описывает свободномолекулярное движение вертикально стратифицированного газа с начальным возмущением плотности. В пределе однородного газа при $H \rightarrow \infty$ получим

$$n(\vec{k}, t) = \psi(\vec{k}) \exp\left(-\frac{\kappa_z^2 u_T^2 t^2}{4}\right)$$

- известный [16] результат для однородного газа, откуда, в частности, вытекает, что время релаксации начального возмущения можно оценить как $t_{\chi 1} \sim L_z / u_T$, где L_z - характерный вертикальный масштаб области начального возмущения. Наличие в показателе экспоненты для стратифицированного газа слагаемого $i\kappa_z u_T^2 t^2 / 4H$ приводит к осцилляциям $n(\vec{k}, t)$ с изменением κ_z при каждом значении t . Это по лемме Римана - Лебега дает еще одно время релаксации $t_{\chi 2} \sim \sqrt{H} L_z / u_T$. В зависимости от соотношения между $t_{\chi 1}$ и $t_{\chi 2}$ процесс релаксации будет определяться либо $t_{\chi 1}$, либо $t_{\chi 2}$. При $L_z \gg H$ $t_{\chi 1} \gg t_{\chi 2}$, следовательно, в рассматриваемом случае релаксация системы произойдет за время $t_{\chi 2}$.

В заключение еще раз отметим, что буквальное соответствие локальных дисперсионных соотношений, получаемых в рамках системы Навье - Стокса и на основе модельных кинетических уравнений, достигается только в модели Гросса - Джексона. Однако и существенно более простая модель БГК дает качественно правильные результаты. Более того, методика позволяет получить локальные дисперсионные соотношения в третьем и более старших порядках по числу Кнудсена.

Основным результатом данной статьи является система интегральных уравнений, которую можно рассматривать как обобщенное дисперсионное соотношение для волновых возмущений стратифицированного газа при любых χ , а значит и при любых числах Кнудсена. При предельном переходе к случаю однородного газа при $H \rightarrow \infty$ эта система приводит к соотношению между частотой ω и волновым вектором \vec{k} , установленному при произвольных κ_z для ультразвука Сироничем и Зарбером [4]; при этом оказывается возможным достаточно простое аналитическое представление для распространяющихся волн. В стратифицированном газе явное построение представления для распространяющихся волн требует решения спектральной задачи для системы (14), которое при произвольных χ и заданном значении частоты ω может быть выражено через некоторые специальные функции.

Предложенный подход к описанию волновых возмущений в стратифицированном газе позволяет рассмотреть дополнительно задачу с граничным режимом для функции распределения, а также задачу в полупространстве с начальным и граничным условием.

Л и т е р а т у р а

1. Wang Chang C.S., Uhlenbeck G.E. The kinetic theory of gases // Studies in Statistical Mechanics / Ed. J. de Boer, G.E. Uhlenbeck, N.Holland. Amsterdam, 1970. V.5, p.1.
2. Foch J.D., Jr., Ford G.W. The dispersion of sound in monoatomic gases // Studies in Statistical Mechanics / Ed. J. de Boer, G.E. Uhlenbeck, N.Holland. Amsterdam, 1970. V.5, p.103.
3. Sirovich L., Thurber J.K. Propagation of forced sound waves in rarefied gasdynamics // J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V.37, N2. P.329.
4. Sirovich L., Thurber J.K. Plane wave propagation in kinetic theory // J. Math. Phys. 1967. V.8, N4. P.888.
5. Greenspan M: Propagation of sound in five monoatomic gases // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V.28, N4. P.644.
6. Meyer E., Sessler G. Schallausbreitung in Gasen bei hohen Frequenzen und sehr niedrigen Drucken // Z. Phys. 1957. V.149. P.15.
7. Buckner J.K., Ferziger J.H. Linearized boundary value problem for a gas and sound propagation // Phys. Fluids. 1966. V.9, N12. P.2315.
8. Thomas J.R., Jr., Sievert G.E. Sound wave propagation in a rarefied gas // Trans. Theory and Stat. Phys. 1979. V.8. P.219.
9. Aoki K., Cercignani C. A technique for time-dependent boundary value problem. II Application to sound propagation // J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 1984. V.35, N3. P.345.
10. Loyalka S.K., Cheng T.S. Sound wave propagation in a rarefied gas // Phys. Fluids. 1979. V.22, N5. P.830.

11. Bhatnagar P.E., Gross E.P., Krook M.
Phys. Rev. 1954. V.94. P.511.
12. Gross E.P., Jackson E.A. Kinetic models and the linearized Boltzmann equation // Phys. Fluids 1959. V.2, N4. P.432.
13. Григорьев Г.И., Савина О.Н. Метод кинетического уравнения для акустико-гравитационных волн // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 6. С. 811.
14. Голицын Г.И., Романова Н.Н. Вертикальное распространение звуковых волн в атмосфере с переменной по высоте вязкостью // Изв. АН СССР. ФАО. 1968. Т. 4, № 2. С. 210.
15. Резибуа П., Де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980. С. 169.

**АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВНУТРЕННИХ ВОЛН,
ГЕНЕРИРУЕМЫХ ДВИЖУЩИМИСЯ АТМОСФЕРНЫМИ
ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

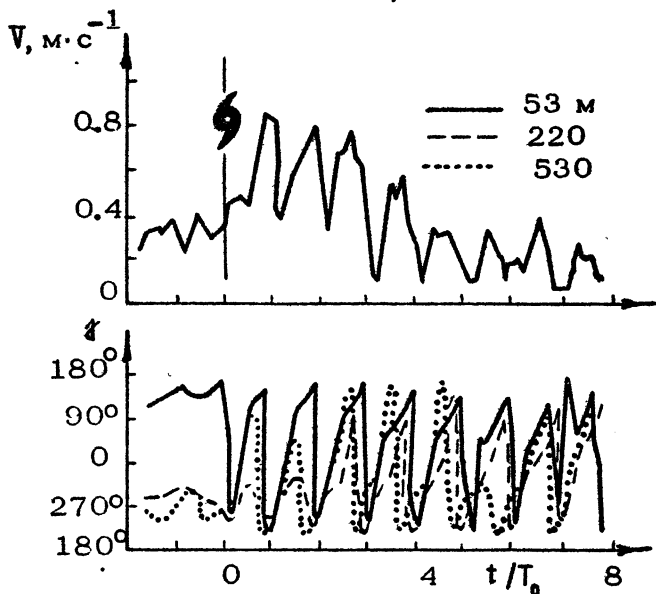
С. Ф. Доценко

ВВЕДЕНИЕ

Среди разнообразных энергетических источников внутренних волн в Мировом океане одно из центральных мест отводится динамическим процессам в атмосфере. Воздействие атмосферы на океан носит многофакторный характер и осуществляется непосредственно через его поверхность. Основными его составляющими являются локальные изменения атмосферного давления, касательных напряжений ветра и потока плавуности на границе океан – атмосфера [1]. Как правило, второй из этих факторов наиболее эффективно возбуждает внутренние волны [2], особенно в низкочастотной области спектра атмосферных возмущений [3].

Согласно [4], преобладающая часть энергии атмосферных возмущений переносится вихревыми среднемасштабными системами-циклонами и системами-антициклонами. Например, в широтном поясе 35–75° с.ш. на их долю приходится около 80% кинетической энергии атмосферы. Одновременно над поверхностью Земли в среднем существует около 40 циклонов и антициклонов. Перемещаясь над океанскими акваториями, они производят инструментально зарегистрированное термодинамическое воздействие на водную среду, вызывая изменения ее термохалинной структуры, образование ветровых и внутренних волн, крупномасштабное смещение уровня океана и другие эффекты [4–6].

Вопрос о возбуждении внутренних волн при перемещении атмосферных аномалий интересен с точки зрения изучения возможных механизмов генерации таких волн в океанических условиях. Горизонтальные масштабы аномалий метеополей значительно превосходят глубину океана. Поэтому эффекты вращения Земли должны проявляться в отклике гидрофизических полей океана на атмосферное возмущение. Правомерность такого заключения подтверждают результаты наблюдений (рис.1), демонстрирующие появление интенсивных квазинерционных колебаний скорости течения после прохождения тайфунов. Таким образом, в математических моделях, имеющих целью описание



Р и с. 1. Колебания модуля горизонтальной скорости V (а) и её направления φ (б) на трех горизонтах по глубине в Мексиканском заливе при прохождении урагана Элоиз (сентябрь, 1975 г.) [7]. В момент времени $t=0$ тайфун находился непосредственно в зоне буйковой станции

бароклининой реакции океана на движущуюся атмосферную аномалию, необходим учет как вертикальной плотностной стратификации, так и вращения Земли.

Теоретическое изучение совместного влияния плотностной стратификации и вращения на волны, генерируемые движущимися атмосферными возмущениями, проводилось в рамках ана-

литического, аналитико-численного и численного подхода. Плоская задача для фронта касательных напряжений, перемещающегося по поверхности двухслойного вращающегося океана, изучалась в работе [8] с учетом турбулентного трения. Случай равномерной стратификации и движущейся области поверхностных давлений рассмотрен в [9]. Близкие к реальным плотностные стратификации удалось рассмотреть в работах [10,11], применяя аналитико-численный подход и моделируя фронт касательных напряжений локальными течениями или массовой силой в верхнем квазиоднородном слое океана. Пространственная структура и количественные характеристики бароклинного волнового следа за атмосферным возмущением изучались для двухслойного [12,13], равномерно стратифицированного [14] и многослойного [7] океанов. Результаты численного моделирования термодинамической реакции стратифицированного океана на движущиеся циклоны описаны в работах [5,6].

Многие вопросы в этой области геофизической гидродинамики исследованы недостаточно полно. В частности, требуют дальнейшего изучения общие свойства волнового следа для произвольной устойчивой плотностной стратификации и зависимости амплитудных характеристик внутренних волн от скорости перемещения и горизонтального масштаба атмосферной аномалии. Практически не проводилось сопоставление эффективности возбуждения внутренних волн движущимися зонами возмущений атмосферного давления и касательных напряжений ветра. Ряд из этих вопросов обсуждается ниже.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ АТМОСФЕРНОЙ АНОМАЛИИ

Рассмотрим безграничный по горизонтальным координатам x, y океан постоянной глубины H , вращающийся с угловой скоростью ω относительно вертикальной оси Oz ($\omega = \omega_0 \sin \varphi$, ω_0 - угловая скорость вращения Земли, φ - широта места). В невозмущенном состоянии вертикальное распределение плотности является устойчивым и описывается функцией $\rho_0 = \rho_0(x)$.

Пусть в момент времени $t=0$ к свободной поверхности покоящегося океана прикладываются давления

$$\rho = \rho_0(x_1 + Ut, y) \quad (U = \text{const} > 0), \quad (1)$$

где $\rho_0(x, y) \rightarrow 0$ при $x, y \rightarrow \infty$. Внешнее возмущение (1) моделирует движущуюся со скоростью U в отрицательном направлении оси Ox_1 аномалию атмосферного давления. Исследуем линейные внутренние волны, генерируемые движущимся распределением давления (1). Движение жидкости будем рассматривать в связанной с внешним возмущением системе координат $Oxyz$, где $x = x_1 + Ut$.

Искомые гидродинамические поля удовлетворяют системе уравнений

$$Du - \ell v = -\rho_0^{-1}(\rho_x + \rho_{0x}), \quad Dv + \ell u = -\rho_0^{-1}(\rho_y + \rho_{0y}), \quad (2)$$

$$Dw = -\rho_0^{-1}(g\rho + \rho_z), \quad (3)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad D\rho + \rho_{0z} w = 0 \quad (4)$$

с граничными и начальными условиями

$$\rho - \rho_1, \quad g\xi = 0, \quad D\xi = w \quad (z=0), \quad w = 0 \quad (z = -H); \quad (5)$$

$$u = v = w = \rho = \xi = 0 \quad (t < 0). \quad (6)$$

Здесь $D = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$; u, v, w - составляющие скорости по осям Ox, Oy и Oz ; ρ и ρ - динамические возмущения давления и плотности; ξ - смещения свободной поверхности; $\ell = 2\omega$ - параметр Кориолиса; $\rho_1 = \rho_0(0)$; g - ускорение свободного падения.

Генерацию внутренних волн движущимся полем касательных напряжений можно моделировать, вводя массовую силу, распределенную в верхнем квазиоднородном слое океана, как это сделано, например, в работах [11-13]. Другой подход описан в [15]. Он предполагает, что морская среда состоит из двух горизонтальных слоев. Верхний слой является приповерхностным однородным, и в нем существенна роль турбулентного трения, а нижний можно рассматривать как слой идеальной жидкости. В случае пространственнеоднородного поля ветра на нижней границе $z = -h$ экмановского пограничного слоя индуцируется вертикальный компонент скорости $w = w_n(x, y, t)$. Его флуктуации и являются источником внутренних волн в расположенном ниже слое.

Приближенное выражение для w_n имеет вид [15]

$$w_n = -\frac{1}{\rho_1} \int_0^t [\tau_{12}(x, y, \xi) + \tau_{21}(x, y, \xi)] \cos \ell(t - \xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\rho_1} \int_0^{\tau} [\tau_{1y}(x, y, \xi) - \tau_{2x}(x, y, \xi)] \sin l(t - \xi) d\xi, \quad (7)$$

где τ_1 и τ_2 — компоненты вектора касательных напряжений ветра по осям Ox и Oy соответственно. В общем случае толщина погранслоя h зависит от x, y и t . Этого факта описанная модель генерации не учитывает. Перенесем граничное условие $\psi = \psi_h$ с горизонта $x = -h$ на невозмущенную свободную поверхность $x = 0$. Такую замену можно интерпретировать как переход к асимптотическому граничному условию для поля внутренних волн вне приповерхностного погранслоя [3].

Таким образом, задача (2)–(6) описывает генерацию линейных волн движущейся аномалией атмосферного давления (1). После замены граничных условий (5) на

$$\psi = \psi_h (x=0), \quad \psi = 0 (x=-h) \quad (8)$$

получим новую математическую задачу, позволяющую анализировать генерацию волн движущейся областью касательных напряжений ветра. Поля атмосферного давления и касательных напряжений ветра предполагается независимыми, хотя, вообще говоря, их функциональная зависимость осуществляется через уравнения динамики атмосферы. Примером такой связи метеополей являются формулы Аккерблома [6].

ПРИБЛИЖЕНИЕ КВАЗИСТАТИКИ

Горизонтальные масштабы атмосферных возмущений обычно значительно превосходят глубину океана. Это позволяет воспользоваться приближением квазистатики (гидростатики), в соответствии с которым $D\psi = 0$ в уравнении (3) [1]. Приняв его, исключив из (2), (4), (5) и (6) ψ с помощью кинематического соотношения $\psi = D\xi$, где $\xi(x, y, z, t)$ — вертикальные смещения частиц жидкости, и проинтегрировав уравнение для плотности (4) по t , получим такую математическую задачу:

$$Du - \rho_0^{-1} \rho_x = -\rho_0^{-1} (\rho_x + \rho_{0x}), \quad Dv + \rho_0^{-1} \rho_y = -\rho_0^{-1} (\rho_y + \rho_{0y}), \quad (9)$$

$$\rho_x + g\rho = 0, \quad u_x + v_y + D\xi_x = 0, \quad \rho + \rho_{0x}\xi = 0; \quad (10)$$

$$p - p_0 g \xi = 0 \quad (x=0), \quad \xi = 0 \quad (x=-H); \quad (11)$$

$$u = v = 0, \quad (t < 0). \quad (12)$$

Приближение квазистатики упрощает математическую постановку задачи, но вносит искажения, которые тем меньше, чем больше длины возбужденных внутренних волн. Возникает вопрос об определении области применимости приближения квазистатики. Такие оценки можно получить, проводя сопоставление дисперсионных зависимостей для внутренних волн, найденных в общей линейной постановке и в приближении квазистатики.

В общей линейной постановке дисперсионные зависимости $\sigma = \sigma_j(m)$ (σ - частота, m - волновое число) и вертикальные моды $\psi = W_j(mz)$ (j - номер моды) находятся из краевой задачи [1, 15]

$$\begin{aligned} (\rho_0 W')' + m^2 \frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - p^2} \rho_0 W &= 0 \quad (-H < z < 0), \\ W' - \frac{g m^2}{\sigma^2 - p^2} W &= 0 \quad (z=0), \quad W = 0 \quad (z=-H), \end{aligned} \quad (13)$$

где $N(x)$ - частота Вейселя-Брента, штрих - производная по z . В приближении квазистатики дисперсионные зависимости имеют вид

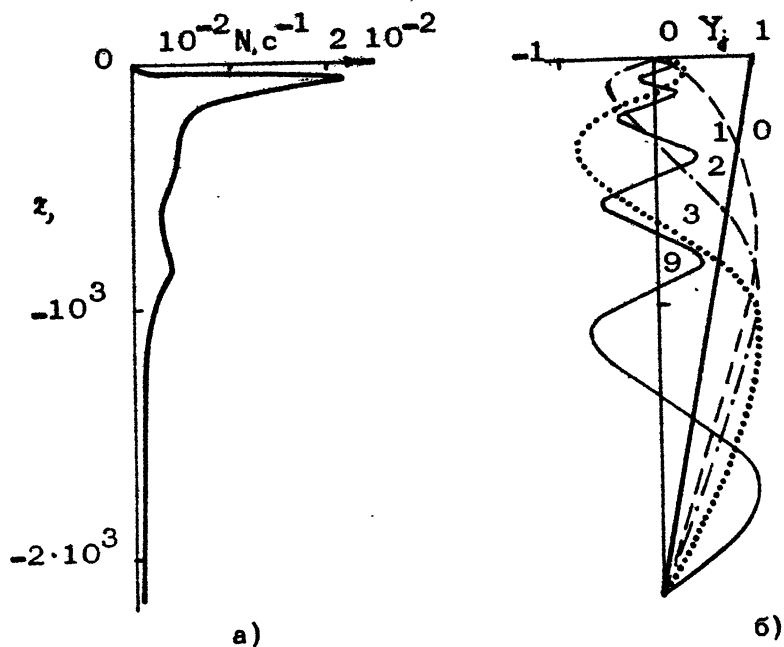
$$\sigma = \sqrt{p^2 + c_j^2} m^2 \quad (14)$$

причем величины c_j и вертикальные моды $\psi = Y_j(z)$ определяются из такой задачи:

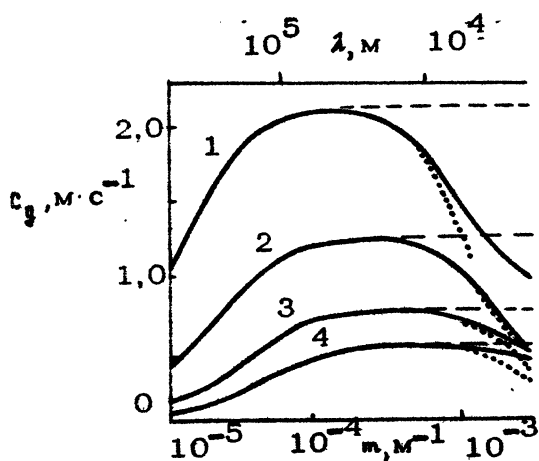
$$\begin{aligned} (\rho_0 Y')' + c_j^{-2} \rho_0 N^2 Y &= 0, \\ Y'(0) - g c_j^{-2} Y(0) &= 0, \quad Y(-H) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим область применимости приближения квазистатики для профиля $N(x)$, представленного на рис. 2, а. Вертикальные моды для него найденные численно из задачи (15), приведены на рис. 2, б, где номера кривых - порядковые номера мод, причем для баротропной моды $j=0$, для бароклиных $j > 1$. Скорости c_j для внутренних волн, занумерованные в порядке убывания, оказались близкими к значениям $c_j = 2,2 j^{-1} m \text{ с}^{-1}$ ($j > 1$).

Сравнение групповых скоростей внутренних волн, найденных с использованием приближения квазистатики и без него



Р и с. 2. Профиль частоты Вэйсэля-Брента в Карибском море на широте $16^{\circ}27'$ (а) и соответствующие ему вертикальные квазистатические моды (б)



Р и с. 3. Групповые скорости внутренних волн для четырех низших мод: — выражение (13) ····· (16) - - - - (14)

(рис. 3), показывает, что квазистатическое приближение применимо для описания волн с длинами $\lambda \geq \lambda_j^*$, где значения $\lambda = \lambda_j^*$ соответствуют максимумам групповых скоростей.

Для оценки λ_j^* можно воспользоваться приближением слабой частотной дисперсии (см. рис. 3). В рамках этого приближения дисперсия описывается выражением [16]

$$\epsilon = \sqrt{c^2 + \frac{c_j^2 m^2}{1 + d_j m^2}}, \quad d_j = \frac{\int_{-H}^0 \rho_0 V_j^2 dz}{\int_{-H}^0 \rho_0 Y_j' dz}. \quad (16)$$

Используя (16), найдем приближенную формулу

$$\lambda_j^* \approx 2\pi \sqrt{\frac{c_j \sqrt{3d_j}}{p}},$$

согласно которой $\lambda_1^*, \dots, \lambda_4^*$ равны соответственно 64,4; 38,5; 25,5; 19,5 км. Поэтому для рассматриваемой плотностной стратификации приближение квазистатики практически не искажает характеристики внутренних волн для всех мод, если их длины $\lambda \geq 50$ км.

ДВУМЕРНЫЙ ВОЛНОВОЙ СЛЕД

Решения задач (2)–(6) и (9)–(12) в форме суммы интегралов могут быть получены как в плоском, так и пространственном случаях по схемам, описанным в работах [9,14].

Рассмотрим первый из них. Его можно интерпретировать как генерацию внутренних волн движущимся атмосферным возмущением типа фронт.

Ограниченная по x перемещающаяся область давлений $p = p_0(x + Ut)$ вызывает возмущения океана, которые существуют не только непосредственно в зоне атмосферной аномалии, x и вне ее. Важная особенность перемещающихся возмущений – возможность образования при определенных условиях затухающего с расстоянием волнового следа. Он формируется из тех вертикальных мод, для которых могут существовать свободные волны, стационарные в связанной с внешним возмущением системе координат. Волновые числа таких волн должны удовлетворять уравнению

$$U = m^{-1} \epsilon_j(m). \quad (17)$$

Опуская детали математического анализа интегралов, приведем окончательные выражения для установившихся волн

вдали от зоны генерации, полученные из задачи (9)–(12).

Получим

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(t, x), \quad (18)$$

где ξ_j – волновое поле, соответствующее j -й моде. Для него справедливы асимптотические оценки:

$$\begin{aligned} \text{а) } U < c_j, \\ \xi_j \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \pm \infty); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } U > c_j, \\ \xi_j \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\xi_j \sim \frac{1}{\rho_0 q} A_j(z) \operatorname{Im} \left\{ \rho(m_j) e^{i\rho(m_j, t)} \right\} \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (21)$$

Здесь $\rho(m)$ – преобразование Фурье функции $\rho_0(x)$,

$$m_j = \frac{l}{\sqrt{U^2 - c_j^2}}, \quad A_j = - \frac{l \rho_0 c_j^2 Y_j'(0) Y_j(x)}{(U^2 - c_j^2)^{3/2} \int_{-h}^0 \rho_0 Y_j'^2 dx}.$$

Существование качественно различных волновых режимов при $U \gtrless c_j$ следует из формул (17), (14).

Выражения (18)–(21) позволяют установить ряд общих свойств незатухающего волнового следа.

1. Равномерно движущаяся аномалия при всех скоростях перемещения $U > 0$ генерирует незатухающий волновой след.

2. Существует набор критических скоростей перемещения возмущения $U = c_j$, при переходе через которые происходит качественное изменение структуры волнового следа. Так, при $U > c_0$ он формируется из поверхностной и всех мод внутренних волн, а при $c_{j+1} < U < c_j$ ($j \geq 0$) волновой след включает только моды внутренних волн с номерами $j \geq j+1$. Поэтому при уменьшении скорости перемещения атмосферного возмущения происходит обеднение модального состава волнового следа.

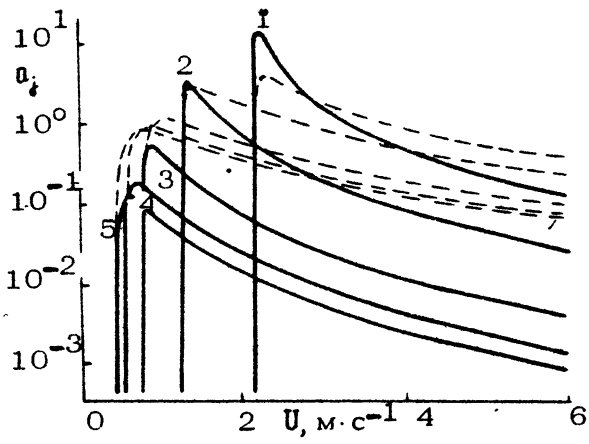
Рассмотрим количественные оценки амплитуд внутренних волн для профиля частоты Вэйсяля–Брента, показанного на рис.2,а, и модельного распределения возмущений атмосферного давления

$$\rho_0(x) = \frac{a}{1 + 36L^{-2} x^2}, \quad (22)$$

где L — характерная ширина зоны возмущений. Максимальные смещения во внутренних волнах могут быть определены по формуле

$$a_j^p = \pi a_T |\zeta_j| \left(\frac{a}{\rho_1 g} \right)^{-1}$$

Типичные зависимости a_j от U представлены на рис. 4. Они позволяют дополнить указанные выше физические закономерности волнового следа следующими.



Р и с. 4. Зависимости амплитуд внутренних волн в волновом следе для 1-5 мод от скорости переноса зоны атмосферных возмущений шириной $L = 200$ км:

- — — — — аномалия атмосферного давления;
- - - - - поле касательных напряжений ветра

3. Наиболее эффективное возбуждение внутренних волн происходит при скоростях перемещения возмущения, несколько больших критических значений. Дальнейшее увеличение скорости переноса атмосферной аномалии сопровождается монотонным уменьшением амплитуды j -й моды.

4. Эффективность возбуждения внутренних волн при перемещении аномалий атмосферного давления заметно убывает с ростом номера моды. При достаточно больших скоростях ($U > c_1$) определяющую роль играет низшая бароклинная мода. В диапазоне скоростей $c_{J+1} < U < c_J$ ($J \geq 1$) доминирующий вклад в волновой след дает мода с номером $J+1$. Поэтому переход

через критические скорости $U = c_j$, означает как качественное, так и количественное изменение характеристик незатухающих внутренних волн.

5. При скоростях перемещения возмущения, несколько больших c_1 , периоды возбужденных внутренних волн близки к инерционному.

Выводы о доминирующей роли низших мод внутренних волн и квазиинерционном характере колебаний гидрофизических полей в волновых следах за движущимися атмосферными возмущениями соответствуют результатам натуральных наблюдений и численного моделирования [5-7, 10-13]. В то же время при типичных для океанических условий скоростях переноса метеополы ($5-15 \text{ мс}^{-1}$) амплитуды возбужденных внутренних волн сравнительно невелики даже для перепадов давления, соответствующих тайфунам ($\Delta p / \rho_1 g = (0,3 - 1 \text{ м})$ [4]). Поэтому представляет интерес рассмотрение генерации внутренних волн движущейся областью касательных напряжений ветра.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ВОЗМУЩЕНИЯМИ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ И КАСАТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ВЕТРА

Рассмотрим перемещающуюся по поверхности океана область касательных напряжений

$$\{\tau_1, \tau_2\} = \tau_0(x + Ut) \{ \cos \psi; \sin \psi \}, \quad (1)$$

где $\tau_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, ψ - угол между направлением вектора касательных напряжений и осью Ox . Решение задачи (9), (10) ($\rho_0 = 0$), (8), (12), описывающей процесс возникновения внутренних волн, имеет вид аналогичный (18)-(21), но несколько иной функцией A_j . Если предположить, что пространственные распределения $\rho_0(x)$ и $\tau_0(x)$ пропорциональны, то легко установить следующую связь максимальных амплитуд незатухающих волн, генерируемых возмущениями (22) и (23)

$$\frac{a_j^{\tau}}{a_j^{\rho}} = \frac{\pi \Delta t |\tau_0|}{\rho_1 c_j^2 m_j} \sqrt{\cos^2 \psi + \frac{\beta^2}{\epsilon_j^2} \sin^2 \psi},$$

где $a_j^{\tau} = \frac{\pi \Delta t}{x_j} |\mathcal{E}_j|$ - максимальная амплитуда волн для j -й моды, генерируемая полем касательных напряжений.

Рассчитанные зависимости a_j^{τ} от U для идентичного (22) распределения касательных напряжений ветра при $|\tau_0| = 0,1 \text{ Н м}^{-2}$ (скорость ветра около $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$) и $\psi = 0$ при-

ведены на рис.4. Они показывают, что в диапазоне реальных скоростей перемещения атмосферных возмущений поле касательных напряжений ветра более эффективно возбуждает внутренние волны. При достаточно больших скоростях ветра амплитудные значения смещений во внутренних волнах могут достигать десятков метров. Представленные зависимости также подтверждают установленный ранее (для периодических во времени возмущений [17]) факт об определяющей роли касательных напряжений ветра в генерации высших мод внутренних волн.

Таким образом, рассмотренные выше достаточно легко реализуемые аналитико-численные модели позволяют не только объяснить ряд наблюдающихся в океане закономерностей бароклинных волновых следов за перемещающимися метеонаомалиями, но и оценить характеристики возбуждаемых ими внутренних волн в условиях реальной плотностной стратификации.

Л и т е р а т у р а

1. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981. Ч. 1,2.
2. Thorpe S.A. The excitation, dissipation and interaction of internal waves in the deep ocean // J. Geophys. Res. 1975. V.80, N.3. P.328.
3. Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С. Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
4. Лаппо С.С. Среднемасштабные динамические процессы океана, возбуждаемые атмосферой. М.: Наука, 1979.
5. Хаин А.П., Сутырин Г.Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоиздат, 1983.
6. Григоркина Р.Г., Фукс В.Р. Воздействие тайфунов на океан. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
7. Price J.F. Internal wave wake of a moving storm: Part 1. Scales, energy budget and observations// J. Phys. Oceanogr. 1983. V.13, N.6. P.949.
8. Хуа Б.Л., Крепон М. Линейная реакция двухслойного океана на движущееся метеорологическое возмущение // Материалы сов.-франц. симпоз. по океанографии / ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1978. Ч.1. С.148.
9. Доценко С.Ф. Генерация неустановившихся внутренних и инерционных волн в непрерывно стратифицированных пото-

лек // Поверхностные и внутренние волны / МГИ АН УССР
Севастополь, 1981. С.70.

10. Gill A.E. On the behavior of internal waves in the wakes of storms // J. Phys.Oceanogr. 1984. V.14, N.7. P.1129.
11. Kundu P.K., Thomson R.E. Inertial oscillations due to a moving front // J. Phys. Oceanogr. 1985. V.15 N.8. P.1076.
12. Longuet-Higgins M.S. The response of a stratified ocean to stationary or moving wind system // Deep-Sea Res. 1965. V.12, N.6. P.923.
13. Geisler J.E. Linear theory of the response of a two-layer ocean to a moving hurricane // Geophys. Fluid Dyn. 1970. V.1, N.4. P.249.
14. Доенко С.Ф. О неустановившихся волнах в непрерывно стратифицированной вращающейся жидкости за движущейся аномалией давления // Изв. АН СССР. ФАО. 1981. Т.17, №10. С. 1084.
15. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
16. Доенко С.Ф. Аппроксимации дисперсионных зависимостей для внутренних волн в районе ПОЛИМОДЕ // Океанология. 1985. Т.25, №2. С.201.
17. Goodman L., Levine E.R. Generation of oceanic internal waves by advecting atmospheric fields // J. Geophys. Res. 1977. V.82, N.12. P.1711.

**ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ
В БАССЕЙНЕ
С ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ**

А. Е. Букатов

Рассмотрим изгибные деформации ледяного покрова и возмущение двухслойной жидкости под ним, обусловленные поверхностными и внутренними волнами при движении по льду ограниченной области давлений и проанализируем влияние физических параметров льда и характеристик давлений на возмущения в ближней и дальней зонах.

1. Пусть на поверхности двухслойной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн постоянной глубины H , плавает сжатый ледяной покров. Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний — толщину H_2 и плотность ρ_2 . Начиная с момента времени $t=0$ по льду с постоянной скоростью v перемещаются давления

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\epsilon t), \quad x_1 = x + vt. \quad (1)$$

Рассмотрим возбуждаемые при этом изгибные колебания льда и волновое возмущение жидкости, предполагая, что до начала действия давлений жидкость не возмущена, а поверхность лед — вода S_1 и граница раздела слоев S_2 горизонтальны.

Считая движение жидкости потенциальным, а ее возмущение и прогиб льда, моделируемого тонкой упругой пластинкой [1], малыми, определим потенциалы скорости φ_1 в верхнем и φ_2 в нижнем слоях из уравнений Лапласа

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad 0 < z < H_1; \quad \Delta \varphi_2 = 0, \quad -H_2 < z < 0 \quad (2)$$

с граничными

$$F S_1 + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\rho_1 f(x_1, y) \exp(i\epsilon t), \quad z = H_1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_2 - \varepsilon_0 \varphi_1) + \rho_2 \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad z=0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad z=-H_2; \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad z=H_1; \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad z=0 \quad (3)$$

и начальными условиями

$$\varphi_{1,2} = \xi_{1,2} = 0, \quad t=0. \quad (4)$$

Здесь

$$F = DV^4 + QV^2 + a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1 g}, \quad \varepsilon = 1 - \varepsilon_0,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho_1 g}, \quad Q = \frac{\tilde{Q}}{\rho_1 g}, \quad a = \frac{\rho h}{\rho_1 g}, \quad V^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

E, h, ρ, ν - модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда; \tilde{Q} - усилие ледового сжатия.

Переходя к системе координат x_1, y, z , связанной с движущейся областью, и применяя комплексное преобразование Фурье по горизонтальным координатам x_1, y и преобразование Лапласа по времени t , при осесимметричном распределении давлений из соотношений (1)-(4) после замены $x_1 = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ получим

$$\xi_j = \frac{\rho_1}{8\pi^2} (J_{j1} - J_{j2}) \exp(i\omega t), \quad j=1,2, \quad (5)$$

$$J_{jk} = \int_0^\infty f_{jk}(r) J_k(r, R, \gamma) dr, \quad J_k = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \psi_k(r, \theta) \exp(i\lambda R) d\theta,$$

где

$$\psi_k = \frac{2}{\Delta_{1k} \Delta_{2k}} - \frac{1}{\tau_k \Delta_{1k}} \exp(-i\Delta_{1k} t) + \frac{1}{\tau_k \Delta_{2k}} \exp(-i\Delta_{2k} t),$$

$$\Delta_{jk} = \sigma + \gamma v \cos \theta + (-1)^j \tau_k(r), \quad \lambda = \gamma \cos(\theta - \gamma),$$

r и θ - полярные координаты в плоскости переменных Фурье, а τ_k и f_{jk} известные [2] функции, зависящие от характеристик льда, толщины слоев и скачка плотности жидкости. Интегралы J_{j1} характеризуют вклад поверхностных, а J_{j2} - внутренних волн в формирование изгибных деформаций льда ($j=1$) и возмущений границы раздела слоев ($j=2$).

Таблица 1

v	γ	k	ϵ
$0 < v < v_{01}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	4	$0 < \epsilon < \epsilon_0$
$v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	3,4	
$v_{11} < v < v_{02}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	1,4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$	1,2,3,4	
	$\gamma_1 < \gamma \leq \pi$	3,4	
$v > v_{02}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$	2,3,4	
	$\gamma_3 < \gamma \leq \pi$	3	
$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	4	$\epsilon > \epsilon_0$
$v > v_{11}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$	2,3,4	
	$\gamma_3 < \gamma \leq \pi$	3	

Таблица 2

v	γ	k	ϵ
$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	7	$\epsilon > 0$
$v > v_{12}$	$0 \leq \gamma < \gamma_{22}$	5	
	$\gamma_{22} < \gamma < \gamma_{11}$	5,6,7	
	$\gamma_{11} < \gamma \leq \pi$	7	

Используем выражение [3]

$$\int_0^t \exp(-i\alpha \xi) d\xi = -i [1 - \exp(-i\alpha t)] \alpha^{-1},$$

интегралы J_{j1}, J_{j2} можно переписать в виде

$$J_{jk} = i \int_0^{\infty} \int_0^t \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\gamma}{\tau_k} f_{jk}(\tau) \sum_{l=1}^2 \exp[iR T_{lk}(\gamma, \xi, \theta)] d\theta d\xi d\tau, \quad (6)$$

$$T_{lk} = 1 - R^{-1} \xi \Delta_{lk}, \quad j=1,2; \quad k=1,2,$$

удобном для асимптотического анализа при больших R и t .

2. Рассмотрим возмущения, обусловленные поверхностными волнами.

Для анализа возмущений в дальней зоне применим к интегралу J_{j1} , взятому из формулы (6) метод стационарных фаз для многомерных интегралов. Стационарные точки определим из условий $\nabla T_{j1} = 0$. Каждое из значений $\tau = \alpha_n$, соответствующих стационарным точкам, характеризует систему поверхностных волн $\xi_{j1}^{(n)}$ на границе лед - вода ($j=1$) и разделе слоев ($j=2$). Количество стационарных точек α_n зависит от величины угла γ на физической плоскости, частоты колебаний ω и скорости перемещения давлений. Это иллюстрирует табл. 1 для $\nabla T_{11} = 0$ и табл. 2 для $\nabla T_{21} = 0$, где приведены значения n для α_n при отсутствии ледового сжатия. Видно, что при движении по льду давлений (1) может возбуждаться до семи систем поверхностных волн $\xi_{j1}^{(n)}$, образующихся в областях $R < \alpha_1^{(n)} t$ угловых зон, соответствующих диапазону изменения скорости перемещения давлений [4]. Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2$. Границы зон волновых возмущений $\xi_{j1}^{(n)}$ перемещаются со скоростью $\alpha_1^{(n)} = [\bar{v} + \tau'(\alpha_n)] \cos \gamma$ при $n=1-4$ и $\alpha_1^{(n)} = [\bar{v} - \tau'(\alpha_n)] \cos \gamma$ для $n=5-7$. Волны $\xi_{j1}^{(4)}, \xi_{j1}^{(5)}, \xi_{j1}^{(6)}$ обусловлены периодическими изменениями давлений со временем ($\sigma > 0$). Из них волны $\xi_{j1}^{(4)}$ имеют характер поперечных, а $\xi_{j1}^{(5)}$ - продольных корабельных [3,5,6] волн, возникающих в соответствующих угловых зонах за движущейся областью периодических давлений. Однако в случае сплошного льда ($\sigma > 0$) они образуются при $\tau > \tau_2$, а в бассейне с битым льдом ($\xi = 0$) или открытой поверхностью ($h = 0$) - при $\tau > 0$.

Волны $\Sigma_{j_1}^{(4)}$ генерируются как при $v > 0$, так и в случае, когда область периодических давлений не перемещается. Они имеют вид кольцевых. Такие волны образуются и в жидкости с открытой поверхностью, и в бассейне с ледяным покровом. В зависимости от v волны $\Sigma_{j_1}^{(4)}$ могут находиться вокруг области давлений ($v < v_{02}$) или в угловой зоне $|\eta| < \eta_3$ за ней ($v > v_{02}$). При $v_{02} < v < v_{10}$ непосредственно перед давлениями по курсу их следования волны $\Sigma_{j_1}^{(4)}$ не образуются, а на параллельных этому курсу направлениях возмущения, обусловленные волнами $\Sigma_{j_1}^{(4)}$, опережают давления ($\eta_3 > \pi/2$). При $v > v_{10}$ опережения нет ($\eta_3 < \pi/2$).

Поперечными и продольными корабельными волнами являются соответственно и волны $\Sigma_{j_1}^{(1)}$, $\Sigma_{j_1}^{(2)}$, возникающие за областью. Они образуются и при движении по льду (свободной поверхности) давлений постоянной интенсивности [7,8]. В условиях сплошного льда волны $\Sigma_{j_1}^{(1)}$, $\Sigma_{j_1}^{(2)}$ генерируются при $v_{11} < v < v_{02}$ и $v > v_{11}$. В бассейне с битым льдом или открытой поверхностью волны $\Sigma_{j_1}^{(1)}$ образуются при $0 < v < v_{02}$, а $\Sigma_{j_1}^{(2)}$ - при $v > 0$.

Волны $\Sigma_{j_1}^{(3)}$, $\Sigma_{j_1}^{(7)}$ изгибные. Они генерируются движущейся областью давлений только в условиях сплошного льда. Волны $\Sigma_{j_1}^{(3)}$ образуются при $v > v_{01}$, $\Sigma_{j_1}^{(7)}$ - при $v > v_{03}$. Из них волна $\Sigma_{j_1}^{(3)}$ возбуждается давлениями переменной ($\sigma > 0$) и постоянной ($\sigma = 0$) интенсивности, а $\Sigma_{j_1}^{(7)}$ - только при перемещении периодических по времени давлений. Волны $\Sigma_{j_1}^{(3)}$ при $v_{01} < v < v_{11}$ и $\Sigma_{j_1}^{(7)}$ при $v_{03} < v < v_{12}$ находятся вокруг области давлений, а при $v > v_{11}$ и $v > v_{12}$ - в угловых зонах $\eta_2 < |\eta| < \pi$ и $\eta_{22} < |\eta| < \pi$. Анализ зависимости значений v_{0k} при $k = 1-3$ и v_{1k} при $k = 0, 1, 2$ от частоты колебаний ω и размеров угловых зон возмущений от скорости v выполнен в работе [4].

Отметим, что при движении по сплошному льду области постоянных ($\sigma = 0$) давлений [8,9,10] есть только три критических значения скорости $v_0, v_1, \sqrt{gH} = c$, причем $\lim_{\omega \rightarrow 0} v_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} v_1 = v_0$, $\lim_{\omega \rightarrow 0} v_2 = \lim_{\omega \rightarrow 0} v_3 = v_2$. В случае битого льда или открытой поверхности для движущейся области периодических давлений критическими скоростями будут v_{01}, v_{10} , учитывающие с ростом частоту колебаний ω , а для постоянных давлений есть только одна критическая скорость $v = c$. Скорости v_{01}, v_{10}, v_{12} критические и при перемещении по сплошному льду плоского фронта периодических давлений [11]. При движении по сплошному льду плоского фронта постоянных давлений критическими будут $v_{01}, v_{10}, v = c$. Если лед битый или отсутствует, то для плоского

фронта давлений критической будет $v = v_{02}$ при $\epsilon > 0$ и $v = c$ для $\epsilon = 0$.

Влияние ледового сжатия на фазовую структуру трехмерных поверхностных возмущений, генерируемых движущейся по сплошному льду областью постоянных давлений, рассмотрено в работах [8,10], где, в частности, показано, что имеющаяся при $v > \sqrt{gH}$ в волновом следе за давлениями угловая зона с амплитудами волн порядка не ниже $1/R$, уменьшается с увеличением сжимающего усилия. При $Q_1 = Q_0$ эта зона отсутствует и весь волновой след покрывают волны, затухающие как $1/\sqrt{R}$. Если $Q_1 > Q_0$, то в следе за областью левая и правая относительно трассы угловые зоны как упругой, так и продольной корабельной волн могут частично перекрывать друг друга. Величины Q_0 и ϵ_0 можно определить из работы [11].

Условия возбуждения поверхностных волн и структура волнового возмущения (число и характер образующихся волн, их передние фронты, размеры угловых зон и фазовые портреты), обусловленного ими в неоднородной жидкости [12], практически такие же, как и в однородной жидкости. Слабо влияет неоднородность жидкости и на амплитуду поверхностных волн. Оно составляет менее 1%, а на изгибных волнах вообще не проявляется.

Исследование поверхностных возмущений в ближней зоне постоянных давлений, движущихся по сплошному льду со скоростью $v < v_0$, выполнено путем численного счета интегралов $J_{\mu,1}$ из формулы (5) в установившемся режиме. При $v > v_0$ для вычисления этих интегралов применена [13] теория вычетов с последующим численным анализом интегралов вдоль контуров, дополняющих до замкнутого исходный путь интегрирования, выбранный с учетом условия излучения.

Анализ результатов, полученных при сосредоточенной нагрузке, показал, что при малых значениях v в случае $Q = 0$ прогиб льда имеет форму, близкую к осесимметричной. С увеличением v осесимметричность нарушается, но симметрия относительно координатных осей сохраняется, причем глубина прогиба максимальна под нагрузкой. Впереди и за нагрузкой образуются возвышения, вытянутые в направлении, перпендикулярном курсу следования нагрузки. В этом же направлении растягивается и прогиб под нагрузкой. Крутизна прогиба становится максимальной перед нагрузкой и за ней, а минимальной — в направлении, перпендикулярном к трассе.

Локальные возвышения имеют место и по обе стороны от трассы. Их высота увеличивается с ростом v медленнее, чем

высота поднятий по курсу. При ν близких к ν_0 высота боковых возвышений составляет менее 20% от высоты возвышений по трассе. Увеличение h льда приводит к уменьшению, а рост скорости ν — к увеличению глубины прогиба и образующихся по трассе поднятий. Расстояние между центрами оснований прогиба и поднятий по трассе увеличивается с ростом h и уменьшается с увеличением ν .

Пространственное распространение амплитуд возмущений в жидкости на фиксированной глубине качественно такое же, как и на поверхности лед — вода, но их затухание с глубиной вне трассы следования нагрузки происходит медленнее, чем под трассой.

Изменения топографии прогиба под влиянием сжатия при фиксированном ν качественно такие же, как при изменении ν при $Q = 0$. Глубина прогиба и высота поднятий на трассе увеличиваются с ростом сжимающего усилия и убывают с увеличением растягивающего.

При $\nu > \nu_0$ сохраняется симметрия топографии прогиба льда только относительно трассы. Точка максимального прогиба находится теперь за нагрузкой, удаляясь от нее с увеличением ν . Геометрическое место этих точек имеет распределение, близкое к гиперболическому с вершиной на трассе.

Волновые возмущения перед и за прогибом с удалением от нагрузки затухают медленнее (примерно как $1/\sqrt{R}$), чем в случае $\nu < \nu_0$. Передний склон прогиба круче заднего. Перед нагрузкой волна заметно короче, чем за ней. Однако с удалением от трассы длины волн постепенно выравниваются. Глубина прогиба и амплитуды волновых возмущений с ростом ν при $\nu > \nu_0$ убывают. Длины волн перед нагрузкой уменьшаются, а за ней увеличиваются.

При малых превышениях ν над ν_0 амплитуды волн перед и за нагрузкой примерно одинаковые. Они, как и при $\nu < \nu_0$, монотонно затухают вдоль своих гребней. Дальнейшее увеличение ν приводит к появлению локальных экстремумов на гребнях (впадинах) возмущений перед нагрузкой. Линия, соединяющая максимальные по высоте (глубине) экстремумы, имеет вид ветви гиперболы с вершиной в точке максимального прогиба на трассе. Чем больше ν , тем больший угол образуют эти ветви с направлением движения нагрузки. В волновом следе за областью давлений желоб прогиба расширяется, приобретая слабо выраженную холмистость ложа, т.е. глубина желоба убывает монотонно с удалением от трассы.

Отметим, что если $\nu > \nu_1$, то волновую структуру приобретают и боковые границы желоба в волновом следе. Указанный эффект, по-видимому, обусловлен вкладом продольных корабельных волн. В случае $\nu > c$ волновые возмущения за прогибом в следе незначительны. Кроме того, первый гребень перед прогибом приобретает ярко выраженную волнистость.

Анализ результатов численных расчетов также показал, что уменьшение толщины льда при фиксированном значении ν в каждом из диапазонов $\nu_0 < \nu < \nu_1$, $\nu_1 < \nu < c$, $\nu > c$ приводит к увеличению глубины прогиба и амплитуд максимальных волновых возмущений. Кроме того, гребни волн перед нагрузкой становятся еще более холмистыми. Возможно и появление заметных локальных возвышений по разные стороны от трассы за прогибом при скоростях из диапазона $\nu_0 < \nu < \nu_1$. Угол между желобом прогиба и трассой с уменьшением толщины льда убывает.

Равномерное сжатие увеличивает максимальную глубину прогиба. Угол между направлением желоба прогиба и осью абсцисс убывает с ростом сжимающего усилия. Возвышение за прогибом с ростом Q растягивается вдоль трассы и сужается в поперечном направлении. Его высота при этом существенно возрастает, что, возможно, является следствием суперпозиции изгибных, продольных и поперечных корабельных волн, имеющей место вблизи трассы за нагрузкой [8,10] при сжимающих усилиях, превышающих Q_0 . Структура желоба прогиба и распределений амплитуд возмущений вдоль гребней перед нагрузкой с ростом сжимающего усилия изменяются качественно так же, как и с увеличением скорости перемещения нагрузки.

Амплитуды изгибных возмущений (перед нагрузкой) затухают с глубиной жидкости быстрее гравитационных и обусловленных прогибом (за нагрузкой). С ростом скорости перемещения нагрузки, сжимающего усилия затухание изгибных возмущений с глубиной усиливается вследствие уменьшения их длин. Это приводит и к усилению различий топографий возмущений в жидкости на заданной глубине и на поверхности лед - вода. Точка максимального отклонения от невозмущенного уровня на фиксированной глубине отстает от нагрузки сильнее, чем соответствующая ей точка максимального прогиба пластинки. Холмистость гребней изгибных возмущений и желоба прогиба сглаживается с ростом глубины, при этом точки максимумов амплитуд изгибных возмущений удаляются от трассы.

Сопоставление профилей деформаций льда и критических значений скорости перемещения нагрузки, полученных теоретически [14] для натуральных условий на озерном и морском льду,

с экспериментальными [15,16], показало возможность применения модели и метода расчета для исследования возмущений в ближней зоне.

3. Рассмотрим теперь возмущения, обусловленные внутренними волнами в дальней и ближней зонах при удалении области постоянных ($\epsilon = 0$) давлений. Асимптотический анализ проведем методом стационарных фаз, предварительно переписав $J_{j,2}$ из формулы (6) в виде

$$J_{j,2} = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} f_{j,2}(r) \exp[ikT_2(r, \gamma, \theta)] d\theta d\gamma dr$$

и определив стационарные точки из

$$\nabla T_2 = 0, \quad T_2 = \lambda - R^{-1} \epsilon \Delta_2, \quad \Delta_2 = r v \cos \theta + \tau_2(r).$$

Число стационарных точек $r = \beta_n$ зависит только от скорости перемещения давлений и величины угла γ , как показано в табл.3, где приведены значения n для β_n , а $c_0 = c \sqrt{\epsilon H_1 H_2 / H^2} + O(\epsilon^{3/2})$. Следовательно, в двухслойном бассейне с ледяным покровом, кроме рассмотренных выше поверхностных волн, возбуждаются одна $\Sigma_{j,2}^{(1)}$ или две $\Sigma_{j,2}^{(1)}, \Sigma_{j,2}^{(2)}$ внутренних волны в областях $R \pm u_2^{(n)} t$, $u_2^{(n)} = [v + \tau_2'(\beta_n)] \cos^{-1} \gamma$ соответствующих угловых зон. Волны $\Sigma_{j,2}^{(1)}$ - поперечные, а $\Sigma_{j,2}^{(2)}$ - продольные корабельные,

Т а б л и ц а 3

v	γ	n
$v < c_0$	$\gamma = 0$	1
	$0 < \gamma < \gamma_{21}$	1, 2
	$\gamma_{21} < \gamma < \pi$	-
$v > c_0$	$\gamma = 0$	-
	$0 < \gamma < \gamma_{20}$	2
	$\gamma_{20} < \gamma < \pi$	-

обусловленные неоднородностью жидкости ($\epsilon > 0$). Их амплитуды затухают как $1/\sqrt{R}$. Влияние характеристик льда на χ_{21} , χ_{22} а также на фазовые портреты колебаний, обусловленных внутренними волнами, и скорости перемещения их передних фронтов, практически не проявляется, в то время как амплитуды волн под воздействием льда могут уменьшаться. Изменяется при этом и характер распределения амплитуд вдоль дуг гребней. На поверхности лед - вода и на разделе слоев влияние льда проявляется по-разному. Отметим, что если $t_0 < t_0$, то в двухслойном бассейне при движении постоянной нагрузки со скоростью $v < v_0$ возбуждаются только внутренние волны.

Исследование внутренних волн в ближней зоне проведем тем же методом, что и поверхностных. Анализ полученных результатов [2] показал, что при малых докритических скоростях нагрузки лед практически не вносит качественных изменений в структуру возмущений поверхности скачка плотности где под областью образуется локализованное поднятие, вытянутое поперек трассы. За поднятием возмущение формируется в основном поперечными корабельными волнами. С увеличением v в диапазоне $(0, t_0)$ влияние продольных волн на формирование возмущений усиливается, а поперечных уменьшается. Локализованное поднятие трансформируется в гребень гиперболической формы, задний склон которого круче переднего. Впадина за первым гребнем приобретает сложную структуру с холмистым дном. Перед первым хребтом в направлении движения заметно локализованное понижение уровня поверхности скачка плотности. Такая структура возмущений на разделе слоев характерна и при отсутствии льда, и в ледовых условиях. Ледяной покров, воздействуя лишь на амплитудные характеристики возмущений, уменьшает высоту гребня и сглаживает рельеф дна впадины за ним.

Возмущения, формируемые на поверхности бассейна и на разделе слоев за счет неоднородности жидкости, в качественном отношении отличаются только тем, что фазы колебаний у них противоположные, а локализованные впадины вдоль трассы движения на разделе слоев не проявляются на поверхности. Амплитуды внутренних волн и их проявлений на границе лед - вода убывают с ростом h .

При $v > t_0$ поперечные внутренние волны не возбуждаются и возмущения, обусловленные неоднородностью жидкости в дальней зоне, формируются только продольными волнами. В ближней зоне за нагрузкой локализованное поднятие на поверхности скачка плотности и понижение на границе лед - вода, как и в

$v < c_0$, переходят соответственно в гребень и впадину гиперболической формы. Однако угол между гребнем (впадиной) и трассой перемещения давлений меньший, чем для $v < c_0$. С ростом v этот угол и высота гребня (глубина впадины) убывают. Понижение (поднятие), наблюдающееся для $v < c_0$, перед нагрузкой при скорости $v > c_0$, приобретает вид впадины (гребня) гиперболической формы с локализованными ложбинами (холмами), вершины которых расположены по бокам от локализованного возвышения за нагрузкой. Перед нагрузкой как по трассе, так и вне ее возмущений практически нет. Такая структура топографий возмущений для $v > c_0$ характерна при отсутствии льда и в ледовых условиях. Влияние льда проявляется в слабом уменьшении амплитуд в волновом следе и незначительной деформации структуры возмущений в малой окрестности трассы.

Л и т е р а т у р а

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные внутренние волны в ближней зоне при движении нагрузки по поверхности плавающей упругой пластинки // Изв. АН СССР. МЖТ. 1990. № 3. С.68.
3. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. Киев.: Наукова думка, 1973.
4. Букатов А.Е., Ярошенко А. А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // Журн. прикл. мат. и техн. физики. 1986. Т.45. С.54.
5. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. Федосенко В.С. Развитие волн, возникающих от движущихся периодических возмущений // Морские гидрофиз. исслед. 1971. № 1. С.62.
7. Доценко С.Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неуставившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. МЖТ. 1978. № 5. С.26.
8. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖТ. 1984. № 6. С.78.

9. Davys J.W., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V.158. P.269.
10. Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Part 2 // J. Fluid Mech. 1987. V.180. p.297.
11. Букатов А.Е. Влияние продольно сжатой упругой пластики на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. 1980. № 45. С.68.
12. Букатов А.Е., Жарков В.В. Развитие трехмерных внутренних волн в море с ледяным покровом // Морской гидрофиз. журн. 1986. № 6. С.3.
13. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные изгибно-гравитационные колебания вблизи движущейся нагрузки // Журн. прикл. мат. и техн. физики. 1989. № 3. С.158.
14. Букатов А.Е., Жарков В.В. Моделирование трехмерных изгибных колебаний ледяного покрова при движении нагрузки // Морской гидрофиз. журн. 1990. № 2. С.9.
15. Takizawa T. Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving floe // Gold. Reg. Sci. and Techn. 1985. N11. P.171.
16. Squire V.A., Langhorne P.J., Robinson W.H. e.a. Moving loads on sea ice // Polar Record. 1987. N2 (146). P.569.

**ИССЛЕДОВАНИЕ
ВНУТРЕННИХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН
В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ
ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТИ ДНА
ПОТОКОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ
ЖИДКОСТИ**

*К.А.Бежанов, П.Г.Заец, А.Т.Онуфриев,
А.М.Тер-Крикоров*

Исследованию пространственных задач обтекания различного рода источников возмущений потоком слоистой жидкости посвящено значительное число работ [1 - 5]. Обычный способ исследования - аппарат интегральных преобразований Фурье и изучение дальнего поля путем вычислений асимптотики интегралов. В работах [6 - 9] были получены асимптотики дальнего поля в окрестности границ волновых зон отдельных мод, которые были выражены через функции Эйри или интегралы Френеля.

В работах [10, 11] был предложен несколько другой подход к исследованию подобного рода задач. Для неровности дна, имеющей форму полусферы, и для больших значений числа Фруда решение было выражено через некоторые универсальные функции, позволяющие получить законы подобия для расходящихся волн. Оказалось, что характерным размером в направлении оси потока является длина волны, а характерным поперечным размером волновой зоны в ближнем поле - глубина потока. Кольцевые возмущения оказались в первом приближении не зависящими от длины волны. В дальнейшем эти результаты нашли экспериментальные подтверждения в работах [12, 13].

В настоящей работе исследовано ближнее и дальнее поле для ряда горизонтальных сечений, включая и свободную поверхность, в случае обтекания полуэллипсоида, лежащего на горизонтальной плоскости. Для достаточного числа первых мод численным интегрированием однократных интегралов методом быстрого преобразования Фурье и методом трапеций было показано, что ширина волновой зоны вблизи полуэллипсоида имеет порядок глубины потока, растет по мере удаления от дна и оказывается самой широкой на свободной поверхности. Волновые зоны внутри жидкости ограничены двумя горбами, а на свободной поверхности — двумя впадинами. Амплитуды волн в каждом горизонтальном сечении максимальны вблизи оси потока сразу за неровностью дна, убывают с высотой и минимальны на свободной поверхности. Были получены также законы подобия для расходящихся волн на свободной поверхности, а неволновые возмущения оказались зависимыми от полярного угла и не зависящими в первом приближении от длины волны. Предложено также решение задачи обтекания неровности дна методом потенциалов. Получено новое представление для функции Грина при больших значениях чисел Фруда. Показано, что в области, где еще несправедливы формулы, полученные методом стационарной фазы, волновое поле может быть описано диполем с моментом, зависящим от суммы массы препятствия и его присоединенной массы.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассматривается пространственное установившееся течение идеальной несжимаемой тяжелой слоистой жидкости конечной глубины над плоским горизонтальным дном, имеющим местную неровность. Начало правой декартовой системы координат расположено на горизонтальной плоскости дна, ось Ox направлена вдоль оси потока, а ось Oz — вертикально вверх. В качестве единиц длины и скорости берутся глубина потока h и скорость набегающего потока V_0 , которая предполагается постоянной. При $t \rightarrow -\infty$ поток асимптотически невозмущен, является одномерным и траектория жидкой частицы асимптотически стремится к прямой, параллельной оси Ox . Пусть $\xi(x, y, z)$ — лагранжева координата

дана, задающая расстояние от этой прямой до плоскости Oxy . Тогда величина

$$Z(x, y, z) = z - \xi(x, y, z)$$

задает отклонение по вертикали траектории жидкой частицы от ее асимптоты.

Преобразуем систему уравнений гидродинамики

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (\vec{V}, \nabla \rho) = 0,$$

$$\nabla \frac{V^2}{2} - \nabla \times \operatorname{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho - \nabla z, \quad (1)$$

где ρ — давление, ρ — плотность, $\vec{V} = (u, v, w)$ — скорость, $V^2 = (\vec{V}, \vec{V})$, $\nabla = gh / V_0^2$.

Поскольку величина $\xi(x, y, z)$ постоянна вдоль траектории жидкой частицы, то

$$(\vec{V}, \nabla \xi) = 0 \quad (2)$$

и в силу второго уравнения системы (1) $\rho = \rho(\xi)$. Тогда из уравнения движения Эйлера и уравнения (2) можно получить интеграл Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\rho}{\rho} + \nabla z = \Phi(\xi), \quad (3)$$

где функция $\Phi(\xi)$ есть полная энергия жидкой частицы.

Исключим из третьего уравнения системы (1) и уравнения (3) величину ρ/ρ , получим

$$\vec{V} \times \operatorname{rot} \vec{V} = \nabla \xi \left\{ \Phi'(\xi) + \omega_0^2(\xi) \left[\frac{V^2}{2} + \nabla z - \Phi(\xi) \right] \right\}, \quad \omega_0^2(\xi) = -\frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}, \quad (4)$$

где штрих здесь и ниже означает операцию дифференцирования. Поскольку

$$z \rightarrow \xi, \quad \nabla \rightarrow (1, 0, 0) \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

то из уравнения (4) получим

$$\Phi'(\xi) - \omega_0^2(\xi) \left(\Phi(\xi) - \frac{1}{2} - \nabla z \right) = 0. \quad (5)$$

Вычитая из уравнения (4) равенство (5), получим

$$\nabla \cdot \text{rot} \mathbf{V} = \omega_0^2 (\mathcal{E}) \left(\frac{V^2}{2} + \nu Z - \frac{1}{2} \right) \nabla \mathcal{E}. \quad (6)$$

Умножая выражение (6) скалярно сначала на $\text{rot} \mathbf{V}$, потом на $\nabla \mathcal{E}$, получим совместно с уравнением неразрывности и уравнением (2) следующую систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций u, v, w и Z :

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{V} &= 0, & (\nabla, \nabla \mathcal{E}) &= 0, & (\text{rot} \mathbf{V}, \nabla \mathcal{E}) &= 0, \\ (\text{rot} \mathbf{V}, \nabla \mathcal{E}, \mathbf{V}) &= \omega_0^2 (\mathcal{E}) (\nabla \mathcal{E})^2 \left(\frac{V^2}{2} - \frac{1}{2} + \nu Z \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Линеаризация системы (7) дает

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial Z}{\partial x}, & \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \omega_0^2 (\mathcal{E}) (U - \nu Z), \end{aligned} \quad (8)$$

где $U = u - 1$.

Исключая переменные U, v и w из системы (8), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Delta_y Z - \omega_0^2 (\mathcal{E}) \frac{\partial Z}{\partial z}) + \nu \omega_0^2 (\mathcal{E}) \Delta Z = 0, \quad (9)$$

где Δ_y - оператор Лапласа по переменным x, y и z , а Δ - оператор Лапласа по переменным x и y .

Все остальные неизвестные выразятся через функцию Z : w при помощи формулы (8), а для U и v можно получить из системы (8) уравнения

$$\Delta U = - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2 \partial z}, \quad \Delta v = - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y \partial z}. \quad (10)$$

Получим еще формулу для давления. Для этого линеаризуем интеграл Бернулли (3)

$$\frac{p}{\rho} = \Phi(\mathcal{E}) - \nu z - U - \frac{1}{2}, \quad (11)$$

откуда, переходя к пределу при $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$ получим

$$\frac{p(\mathcal{E})}{\rho} = \Phi(\mathcal{E}) - \nu \mathcal{E} - \frac{1}{2}, \quad (12)$$

где $p(z)$ - гидростатическое давление. Вычитая из выражения (11) формулу (12), получим

$$\frac{p - p(z)}{\rho} = U - \nu Z. \quad (13)$$

Если взять еще оператор Лапласа от обеих частей формулы (13) и воспользоваться первым уравнением (10), то получим

$$\Delta \frac{p - p(z)}{\rho} = \frac{\partial^3 Z}{\partial t^2 \partial z} - \nu \Delta Z. \quad (14)$$

На свободной поверхности давление постоянно и равно $p(1)$, тогда из формул (13) и (14) получим

$$U + \nu Z = 0 \quad \text{при} \quad z=1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial t^2 \partial z} - \nu \Delta Z = 0 \quad \text{при} \quad z=1. \quad (16)$$

Поскольку для широкого диапазона величин V_0 и h параметр ν можно считать большим, то из граничного условия (15) следует, что в первом приближении граничное условие на свободной поверхности можно взять в приближении "твердой крышки"

$$Z = 0 \quad \text{при} \quad z=1. \quad (17)$$

На дне должно выполняться граничное условие, выражающее условие отсутствия протекания.

2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается пространственная задача обтекания малой неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины. Стратификация предполагается малой и устойчивой, уравнение (9) берется в приближении Буссинеска, а граничное условие на свободной поверхности берется в приближении "твердой крышки" (17). Тогда имеем граничную задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta_1 Z + \frac{1}{F_1} \Delta Z = 0, \quad (x, y, z) \in T,$$

$$Z(x, y, 0) = f(x, y), \quad Z(x, y, 1) = 0,$$

$$Z = 0 \quad (\text{втр}(\mathbb{R}, \mathbb{R})), \quad x \rightarrow -\infty, \quad F_n = \frac{V_0}{Nh},$$

$$T = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < 1\}, \quad (18)$$

где функция $f(x, y)$ задает форму неровности дна и имеет носитель, целиком расположенный в круге радиуса r , F_n — число Фруда, N — частота Брента — Вайсяля, $\epsilon > 0$.

Решение граничной задачи (18) можно выразить через ряд Фурье по полной и ортогональной в $L_2(0, 1)$ системе синусов

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x, y) \sin(\pi n z) + (1-z) f(x, y), \quad (19)$$

а для коэффициентов ряда получить уравнение четвертого порядка, решение которого методом преобразования Фурье имеет следующий вид:

$$Z_n(x, y) = \frac{1}{\pi^2 n} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\xi^2)(\xi^2 + \eta^2)}{B_n(\xi, \eta)} \times \hat{f}(\xi, \eta) \text{втр}[\nu(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta, \quad (20)$$

$$B_n(\xi, \eta) = \xi^4 + \xi^2(\eta^2 + \epsilon_n^2 - 1) - \eta^2, \quad \epsilon_n = \pi n F_n,$$

где переменные x и y отнесены к величине $\lambda = h F_n$ без изменения обозначений, $\hat{f}(\xi, \eta)$ — преобразование Фурье функции $f(x, y)$, которая ниже предполагается четной как по переменной x , так и по переменной y .

Введем обозначения

$$\Omega_1 = \{(x, y) : |x| > x_0, \quad -\infty < y < +\infty\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, \quad |y| > y_0\},$$

где $2x_0$ — максимальный размер носителя функции $f(x, y)$ по переменной x , а $2y_0$ — по переменной y .

Запишем двойной интеграл в формуле (20) в виде повторного и вычислим внутренний интеграл методом теории вычетов.

При $(x, y) \in \Omega_1$ получим

$$Z_n(x, y) = \mathcal{H}^1(x - x_0) Z_{n1}(x, y) + Z_{n2}(x, y). \quad (21)$$

Здесь

$$Z_{n1}(x, y) = \frac{4}{\pi n} \int_0^{+\infty} \frac{[a^2(\eta) - 1][a^2(\eta) + \eta^2]}{a(\eta) D(\eta^2)} \cdot \\ \cdot \hat{f}(a(\eta), \eta) \sin[a(\eta)x] \cos(\eta y) d\eta, \quad (22)$$

$$Z_{n2}(x, y) = \frac{2}{\pi n} \int_0^{+\infty} \frac{[b^2(\eta) + 1][b^2(\eta) - \eta^2]}{b(\eta) D(\eta^2)} \cdot \\ \cdot \hat{f}(b(\eta), \eta) \exp[-b(\eta)|x|] \cos(\eta y) d\eta, \quad (23)$$

$$a^2(\eta) = \frac{D(\eta^2) - \eta^2 - \varepsilon_n^2 + 1}{2}, \quad b^2(\eta) = \frac{\eta^2}{a^2(\eta)},$$

$$D(\eta^2) = \sqrt{(\eta^2 + \varepsilon_n^2 - 1)^2 + 4\eta^2}, \quad (24)$$

где $\mathcal{H}^1(x)$ — единичная функция Хевисайда.

При $(x, y) \in \Omega_2$ запишем

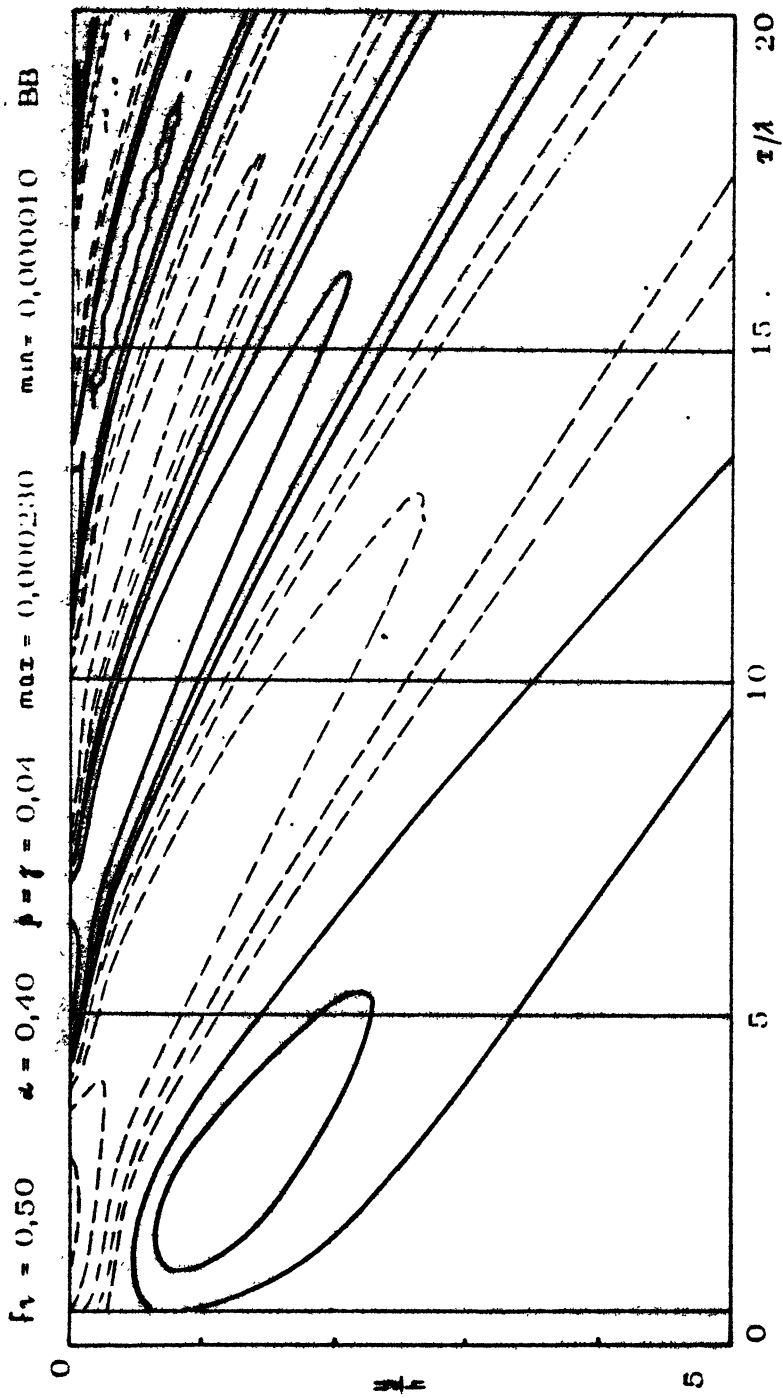
$$Z_n(x, y) = Z_{n3}(x, y) + Z_{n4}(x, y), \quad (25)$$

где

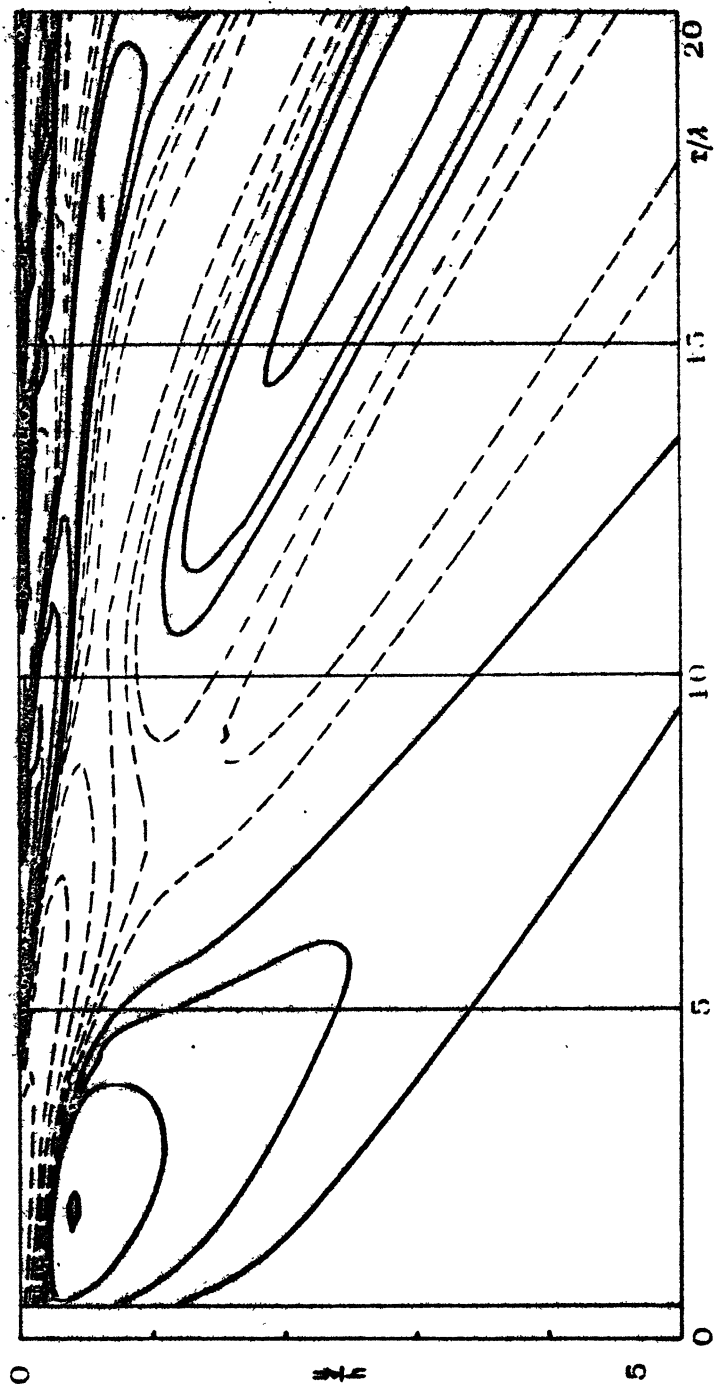
$$Z_{n3}(x, y) = \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \frac{d^2(\xi) + \xi^2}{d(\xi)} \hat{f}(\xi, d(\xi)) \cdot \\ \cdot \sin[d(\xi)|y| - \xi x] d\xi, \quad (26)$$

$$Z_{n4}(x, y) = \frac{2}{\pi n} \int_1^{+\infty} \frac{e^2(\xi) - \xi^2}{e(\xi)} \hat{f}(\xi, e(\xi)) \cdot \\ \cdot \exp[-e(\xi)|y|] \cos(\xi x) d\xi, \quad (27)$$

$$d(\xi) = \sqrt{\frac{\xi^2(\xi^2 + \varepsilon_n^2 - 1)}{1 - \xi^2}}, \quad e(\xi) = \sqrt{\frac{\xi^2(\xi^2 + \varepsilon_n^2 - 1)}{\xi^2 - 1}}. \quad (28)$$



$F_1 = 0,50$ $\omega = 0,40$ $\beta = \gamma = 0,01$ $m\alpha_1 = 0,001082$ $m\alpha_2 = 0,000010$ ИВ



Р и с. 2

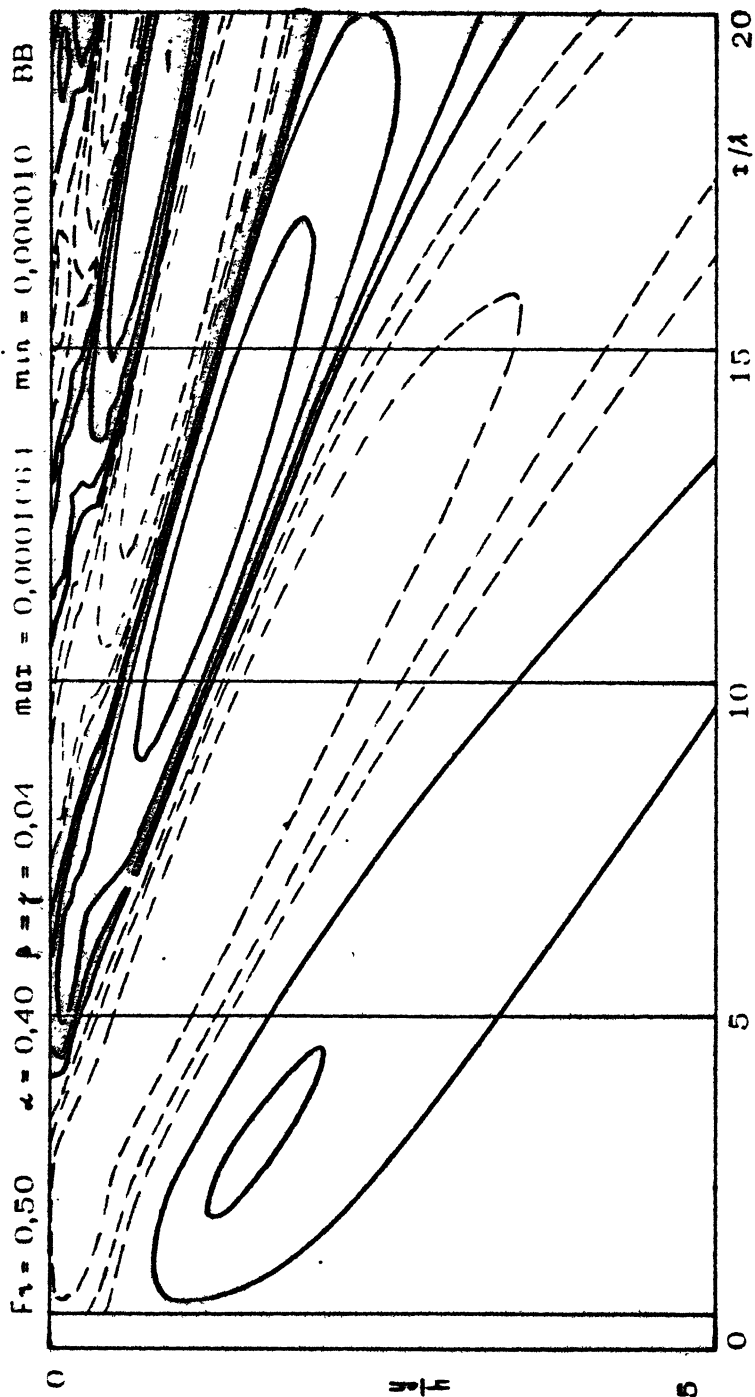


Рис. 3

В формулах (21) - (24) выражение для $Z_{n1}(x, y)$ описывает расходящиеся волны, распространяющиеся вниз по потоку, а выражение для $Z_{n2}(x, y)$ - кольцевые возмущения, которые вносят заметный вклад вблизи неровности дна и экспоненциально убывают при $|x| \rightarrow \infty$. В формулах (25) - (28) нет чистого разделения на расходящиеся волны и кольцевые возмущения. Выражение (26) для $Z_{n3}(x, y)$ дает лишь главный вклад в волновую картину, а выражение (27) для $Z_{n4}(x, y)$ вносит основной вклад в окрестности оси потока, экспоненциально убывает при $|y| \rightarrow \infty$ и, как показывают расчеты, гасит слабую волну, идущую вверх по потоку, вносимую выражением (26).

В дальнейшем форма неровности дна берется в виде полуэллипсоида, в этом случае

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \frac{\sin R - R \cos R}{R^3},$$

$$R = \sqrt{\alpha_1^2 \xi^2 + \beta_1^2 \eta^2}, \quad (29)$$

где полуоси α_1, β_1 и γ_1 отнесены к величине λ .

На рис. 1 - 3 приведены изолинии значений амплитуд, рассчитанных по формулам (19) и (22), интегралы считались методом быстрого преобразования Фурье. Минимальным абсолютным значениям амплитуд, указанным на рисунках, соответствуют крайние замкнутые линии, далее происходит увеличение амплитуд в два раза при переходе к каждой последующей изолинии с наибольшим значением в центре. Сплошные линии соответствуют положительным значениям амплитуд, пунктирные - отрицательным. Абсолютные максимальные значения амплитуд наблюдались сразу за неровностью дна около оси потока в каждом горизонтальном сечении и их значения указаны на рисунках. Расчеты показали, что для каждой отдельной моды ширина волновой зоны имеет порядок глубины потока h . Самую широкую волновую зону имеет первая мода и каждая последующая мода содержится внутри предыдущей, т. е. с ростом n волновые зоны сужаются. На рис. 1 приведена первая мода при $\xi = 1/5$ или $\xi = 4/5$. Однако суммарная ширина волновой зоны, рассчитанная для первых четырех мод на глубине $1/5$ (см. рис. 2) заметно уже, чем на глубине $4/5$ (см. рис. 3), расчеты проведены при $\alpha = 0,4$ $\beta = \gamma = 0,04$, а полуоси α, β и γ отнесены к величине h . Таким образом, ширина волновой зоны рас-

тет по мере удаления от дна, а амплитуды воды заметно падают с высотой. Кроме того, с ростом числа Фруда волновая зона несколько сужается.

На рис. 4 - 6 приведены результаты расчетов по формулам (26), (27) и (29), интегралы считались методом трапеций. На рис. 4 приведены изолинии величины $Z_{n3}(x, y)$, а на рис. 5 - величины $Z_{n4}(x, y)$, на рис. 6 дана суммарная картина. Здесь также видна широкая волновая зона вблизи препятствия. Заметно гашение волны, возникающей впереди препятствия на рис. 4. В остальном описание рис. 4 - 6 аналогично приведенному ранее.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При наличии свободной поверхности граничное условие (17) надо заменить на граничное условие (16) и при больших ν искать решение в виде ряда

$$Z = Z^{(0)} + \frac{1}{\nu} Z^{(1)} + \dots, \quad (30)$$

где $Z^{(0)}$ - решение в приближении "твердой крышки", а $Z^{(1)}$ - добавок, учитывающий влияние свободной поверхности. Подставляя разложение (30) в граничное условие (16), получим

$$\Delta W = \frac{\partial^3 Z^{(0)}}{\partial x^2 \partial z} \quad \text{при} \quad z = 1, \quad (31)$$

где $W(x, y) = Z^{(1)}(x, y, 1)$, $(x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$.

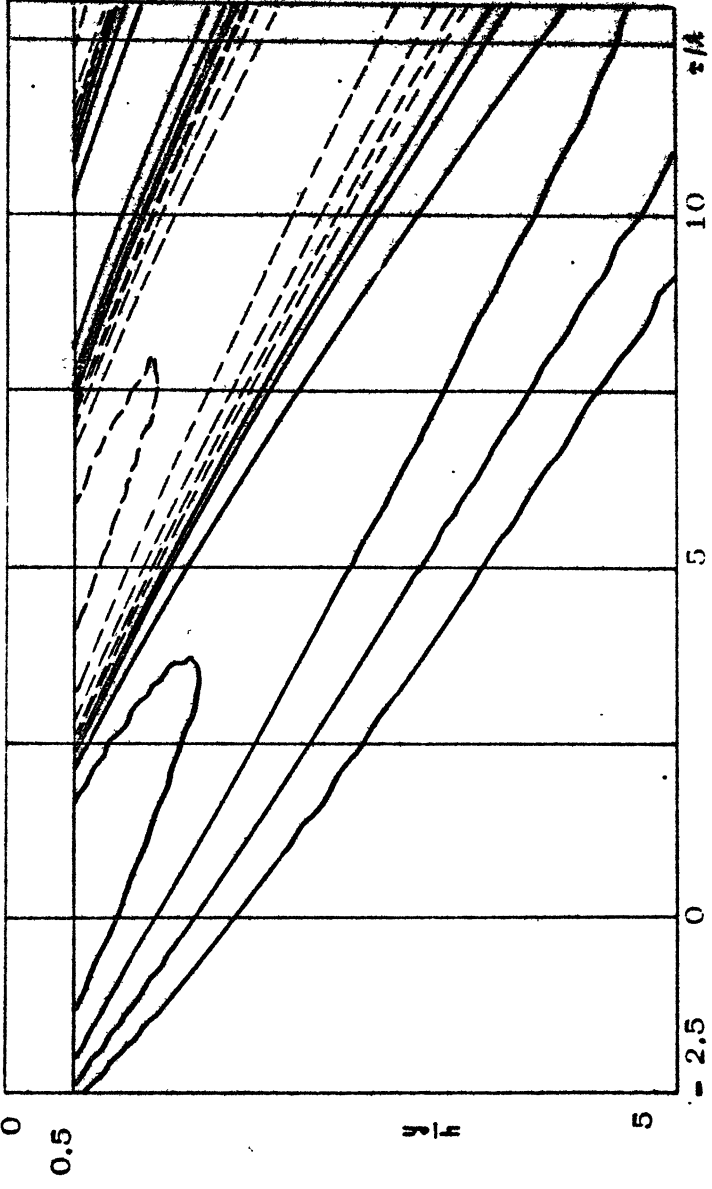
Подставляя в уравнение (31) выражение (19) и решая получившееся уравнение методом преобразования Фурье, получим при $(x, y) \in \Omega_1$

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi(x-x_n) W_{n1}(x, y) + W_{n2}(x, y)]. \quad (32)$$

где

$$W_{n1}(x, y) = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{[a^2(\eta) - 1] a(\eta)}{D(\eta^2)} \dots$$

$\beta_1 = 1$ $\alpha = 0,04$ $\beta = 0,4$ $\gamma = 0,04$ $m_{01} = 0,000201$ $m_{10} = 0,000010$



Р и с. 4

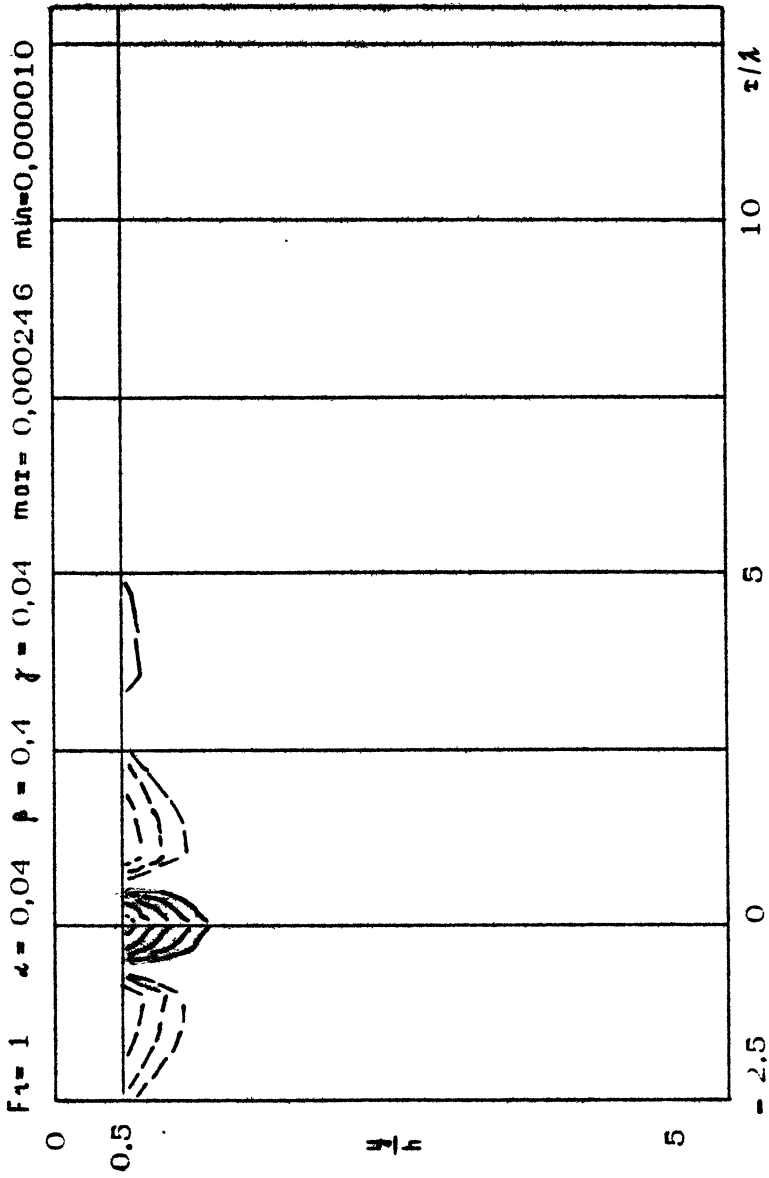
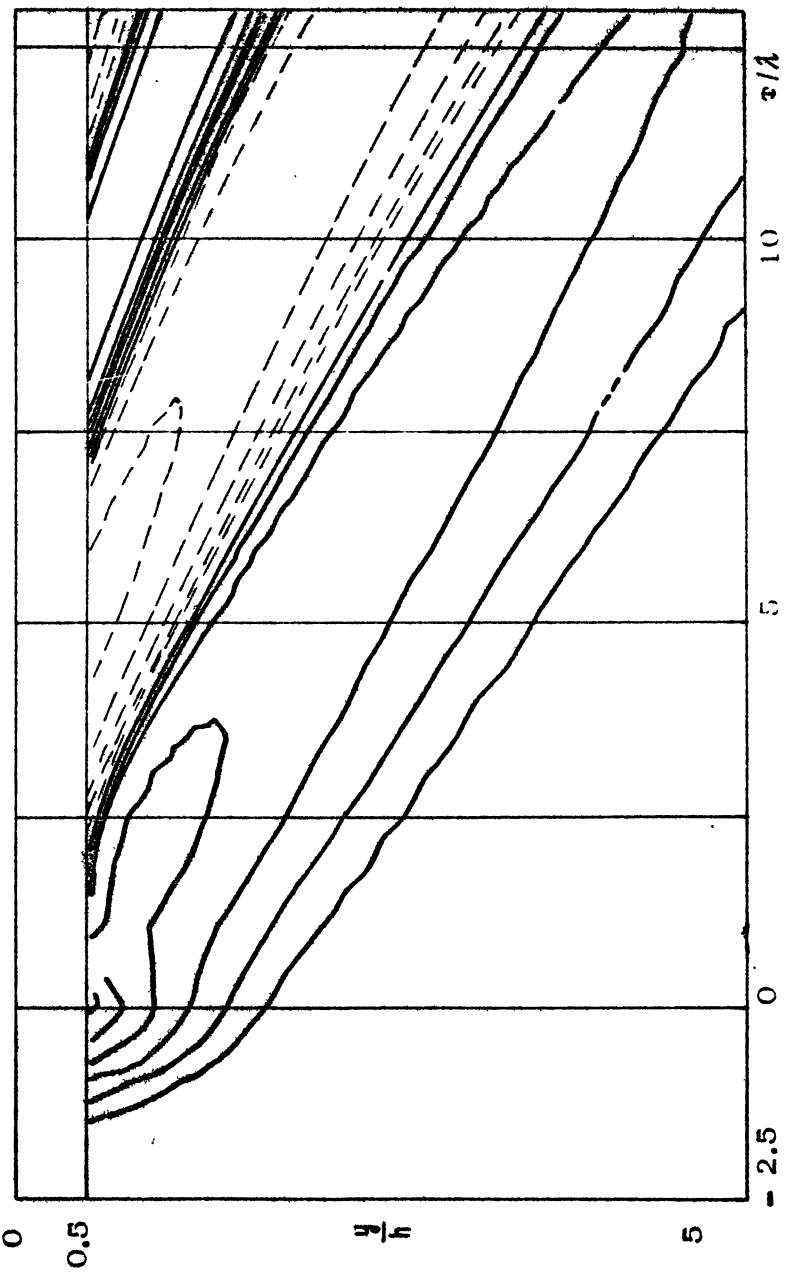


Рис. 5

$\alpha = 0,01$ $\beta = 0,1$ $\gamma = 0,01$ $\text{max} = 0,000383$ $\text{min} = 0,000010$



Р и с. 6

$$\cdot \hat{f}(a(\eta), \eta) \sin [a(\eta) x] \cos (\eta y) d\eta, \quad (33)$$

$$W_{n2}(x, y) = (-1)^n 2 \int_0^{+\infty} \frac{[b^2(\eta)+1] b(\eta)}{D(\eta^2)} \times$$

$$\times \hat{f}(ib(\eta), \eta) \exp [-b(\eta)|x|] \cos (\eta y) d\eta. \quad (34)$$

При $(x, y) \in \Omega_2$ получим

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [W_{n3}(x, y) + W_{n4}(x, y)], \quad (35)$$

где

$$W_{n3}(x, y) = (-1)^n 2 \int_0^1 \frac{\xi^2}{d(\xi)} \hat{f}(\xi, d(\xi)) \times$$

$$\times \sin [d(\xi)|y| - \xi(x)] d\xi, \quad (36)$$

$$W_{n4}(x, y) = (-1)^{n+1} 2 \int_1^{+\infty} \frac{\xi^2}{e(\xi)} \hat{f}(\xi, ie(\xi)) \times$$

$$\times \exp[-e(\xi)|y|] \cos (\xi x) d\xi. \quad (37)$$

Нулевые приближения для \bar{U} и \bar{v} можно найти из уравнений (15) и (10), причем для определения $\bar{v}^{(0)}$ надо решить уравнение Пуассона методом преобразования Фурье.

Расчеты, проведенные по формулам (33), (29) и (24), представлены на рис. 7 и 8, описания которых аналогичны данным ранее для внутренних волн. Интегралы считались методом быстрого преобразования Фурье, рассчитаны волновые поля расходящихся волн для суммы первых четырех мод. Видна широкая волновая зона, ограниченная двумя симметричными впадинами, расстояние между которыми сразу за полуэллипсоидом приблизительно равно $1,5 \div 2,0 h$. Максимальные абсолютные значения амплитуд здесь также наблюдались сразу за неровностью дна вблизи оси потока. Расчеты, проведенные по формулам (35) - (37), (29) и (28), дали волновые картины, аналогичные представленным на рис. 4 - 6, но с более широкой волновой зоной, ограни-

ченные двумя симметричными впадинами. Исследованное ранее волновое поле свободной поверхности однородной жидкости не дало широкой волновой зоны [14].

При больших значениях параметра ϵ_n можно получить следующие выражения для расходящихся волн и неволновых возмущений в размерных переменных без изменения обозначений:

$$W_{n1}(x, y) = (-1)^n \frac{1}{3n F r^3} \left(\frac{r}{h}\right)^3 \psi\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\pi n y}{h}\right),$$

$$\psi(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} r^{2k+1} e^{-t} R_k(t), \quad n = 1, 2, \dots, m,$$

$$R_k(t) = \rho_k'''(t) - 3\rho_k''(t) + 3\rho_k'(t) - \rho_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

$$\rho_k(t) = \frac{2k-2-t}{2(k+2)} \rho_{k-1}(t) + \frac{t}{2(k+2)} \rho'_{k-1}(t), \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$R_0(t) = \frac{t^2 - t - 1}{4}, \quad \rho_1(t) = \frac{t^3 + 3t^2 + t}{24},$$

$$W_{n2}(x, y) = (-1)^n 2\pi^2 n^2 \left(\frac{r}{h}\right)^3 \epsilon_n \left(\frac{\pi n r}{h}\right) \times$$

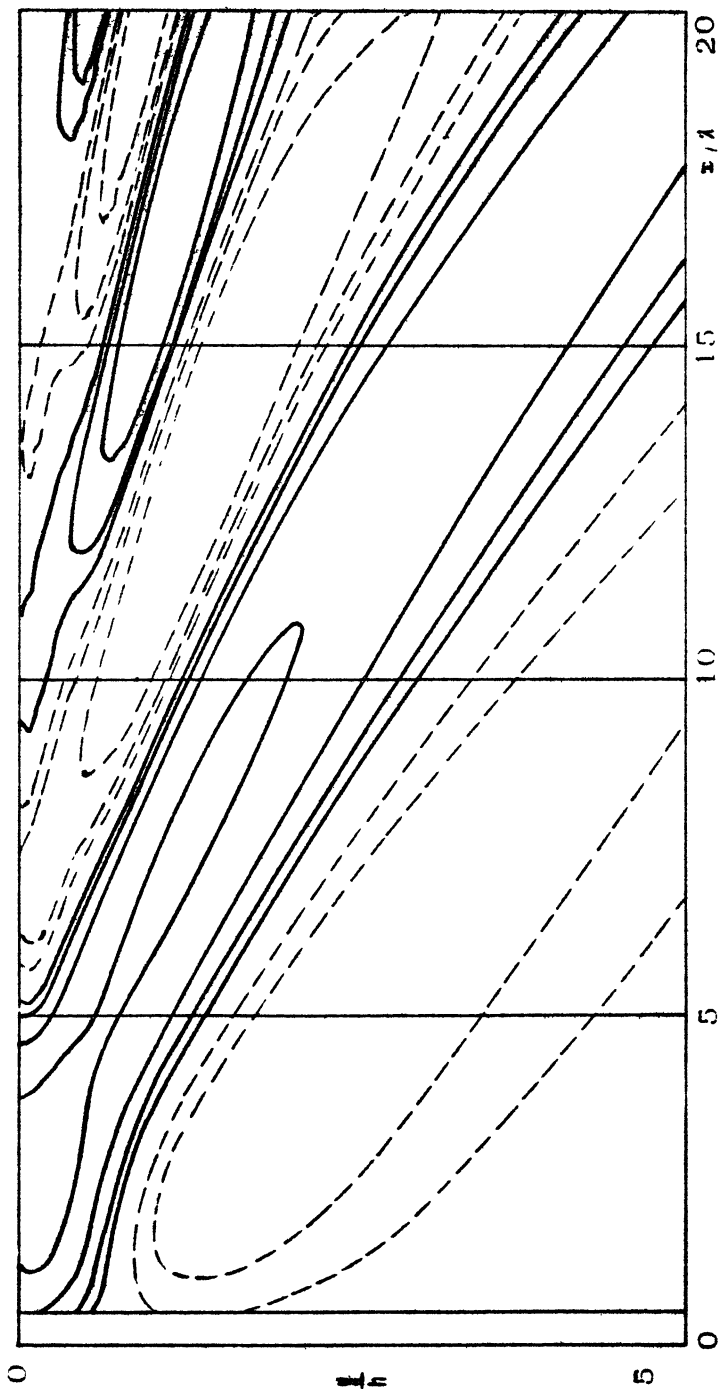
$$\times \left[\cos^2 \theta K_0\left(\frac{\pi n r}{h}\right) + \cos 2\theta \frac{h}{\pi n r} K_2\left(\frac{\pi n r}{h}\right) \right], \quad (39)$$

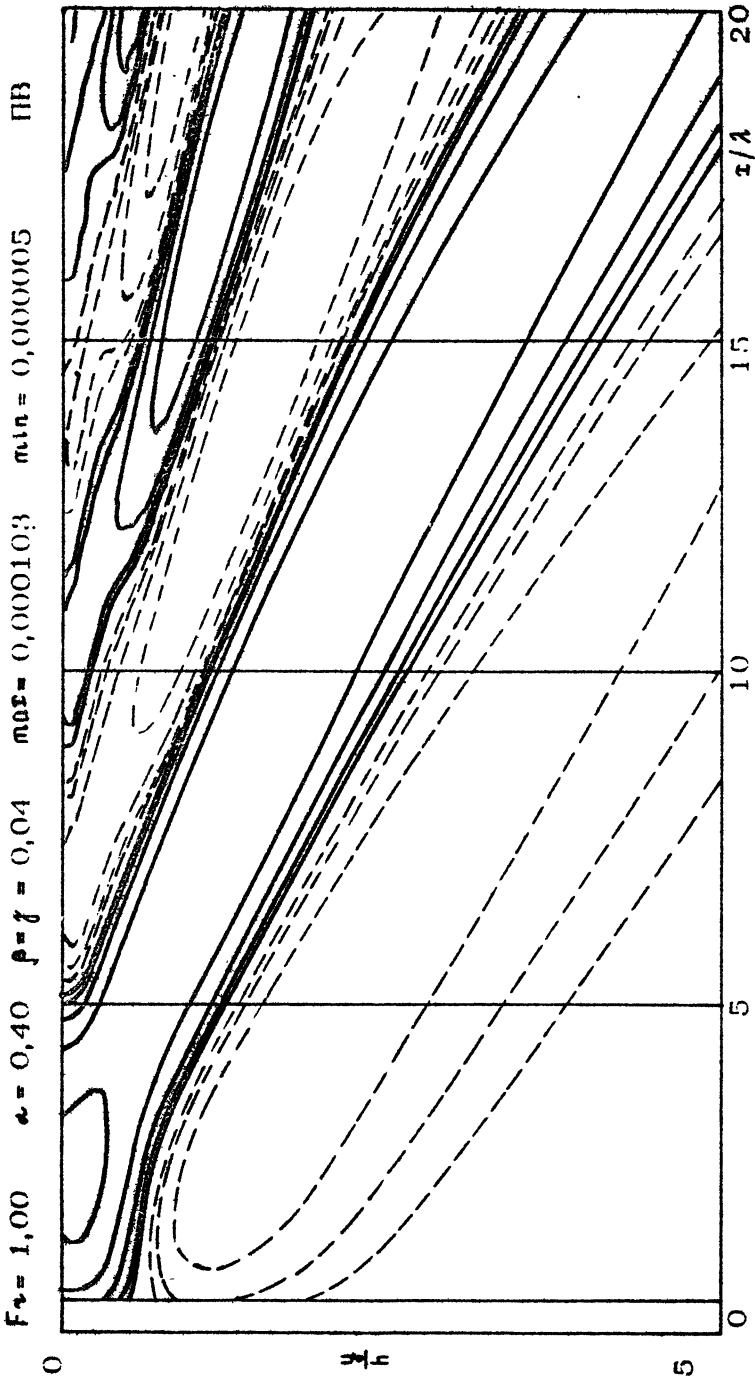
$$\epsilon_n(r) = \frac{r \operatorname{ch} r - \operatorname{sh} r}{r^3}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

где r - радиус полусферы, $K_0(r)$ и $K_2(r)$ - модифицированные функции Бесселя [15].

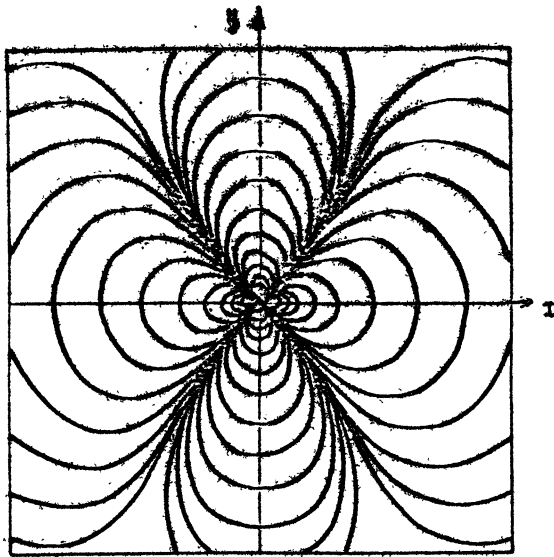
Из формул (38) следует, что для расходящихся волн имеет место закон подобия, при котором характерным размером в направлении оси потока является величина λ , а в направлении перпендикулярном оси потока - величина h . Выражение (39) для неволнового возмущения не зависит от величины λ . Вблизи полусферы неволновые возмущения имеют главный вклад в возмущение свободной поверхности.

$F_T = 0,50$ $\alpha = 0,40$ $\beta = \gamma = 0,04$ $\max = 0,000120$ $\min = 0,000010$ ПВ





Р и с. 8



Р и с. 9

На рис. 9 приведены изолинии величины $W(x, y) / (\pi x)^3 y^{-4}$ при $\epsilon = 0,05 h/\pi$, рассчитанные для суммы 100 неволновых мод. Максимальное значение в центре равно двум, далее - уменьшение в два раза при переходе к каждой последующей изолинии. Из рис. 9 и формулы (39) видно, что смещение свободной поверхности равно нулю вблизи прямых $y = \pm x$, причем перед полусферой и за ней имеет место понижение уровня свободной поверхности, а по бокам от оси потока - ее возвышение.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Отобразим границу препятствия симметрично относительно плоскости Oxy , получим замкнутую поверхность S , ограничивающую область Ω . Примем в качестве единицы длины величину h/π и обозначим через T_0 двусвязную область, получающуюся в результате удаления из полосы

$$T_1 = \{ (x, y, z) : -\infty < x, y < +\infty, |z| < \pi \},$$

области Ω . Если продолжить функцию $Z(x, y, z)$ нечетным образом по переменной z , то получим следующую граничную задачу:

$$LZ = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta, Z + \omega^2 \Delta Z = 0, \quad (x, y, z) \in T_0,$$

$$Z(x, y, \pm z) = 0, \quad Z|_S = f(M), \quad (40)$$

$$Z = 0 \text{ (в } \text{exp}(\pm z)), \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad \omega = 1/\sqrt{\epsilon\mu},$$

$$M = (x, y, z),$$

где $f(M)$ – нечетная по z и непрерывная на S функция. Предполагается, что поверхность S удовлетворяет принятым в теории потенциала условиям Ляпунова.

Построим нечетную по z и 2π -периодическую функцию Грина граничной задачи (40):

$$L\Gamma = \delta(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_0 + 2\pi n) - \delta(z + z_0 + 2\pi n)],$$

$$\Gamma = 0 \text{ (в } \text{exp}(\pm z)), \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad 0 < z_0 < \pi, \quad (41)$$

где $\delta(x, y)$ и $\delta(z - z_0)$ – дельта-функции Дирака [16].

Решая задачу (41) методом Фурье, получим

$$\Gamma(x, y, z, z_0) = H(x, y, z - z_0) - H(x, y, z + z_0), \quad (42)$$

$$H(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \Gamma_n(x, y) \cos(nz), \quad (43)$$

$$\Gamma_n(x, y) = \frac{1}{(2\pi\omega)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{exp} [i\omega (\xi x + \eta y)]}{B_n(\xi, \eta)} d\xi d\eta. \quad (44)$$

Запишем двойной интеграл в формуле (44) через повторный и вычислим внутренний интеграл методом теории вычетов:

$$\Gamma_n(x, y) = \sigma(x) \Gamma_{n1}(x, y) + \Gamma_{n2}(x, y). \quad (45)$$

Здесь

$$\Gamma_{n1}(x, y) = -\frac{1}{2\pi\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\omega n(\eta)x] \cos(\omega \eta y)}{a(\eta) D(\eta^2)} d\eta, \quad (46)$$

$$G_{n,2}(x, y) = -\frac{1}{4\pi\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\tau \rho} [-\omega b(\eta)|\tau|] \cos(\omega\eta y)}{a(\eta) D(\eta^2)} d\eta. \quad (47)$$

Из формул (42) - (47) после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = & G'(x) \left[\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x, y, z, z_0) + \Phi_1(x, y, z, z_0) \right] + \\ & + \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, y, z, z_0) + \Phi_2(x, y, z, z_0). \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \omega J_{2k+1}(\omega x) \left[\Phi_k(y, z - z_0) + \right. \\ & \left. + \Phi_{k+1}(y, z - z_0) - \Phi_k(y, z + z_0) - \Phi_{k+1}(y, z + z_0) \right], \end{aligned} \quad (49)$$

$$\Phi_k(y, z) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{2^m C_{k-1}^m}{(m+1)!} y^{m+1} \frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}} \chi(y, z), \quad k \geq 1,$$

$$\Phi_0(y, z) = \frac{1}{4} \chi(y, z), \quad \chi(y, z) = y - \ln 2 - \ln(\operatorname{ch} y - \cos z),$$

где $J_{2k+1}(\tau)$ - функция Бесселя первого рода [15],

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} = & -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(n \sqrt{x^2 + y^2}) \sin(n z_0) \sin(n z) - \\ = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0 + 2\pi k)^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Функция $\Phi(x, y, z, z_0)$ имеет при $\omega \rightarrow 0$ непрерывные и ограниченные частные производные, причем при фиксированном x она равномерно по переменным y, z, z_0 стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$ и в более высоком порядке, чем $\partial^2 G_1 / \partial x^2$. Функция $\Phi_2(x, y, z, z_0)$ имеет ограниченные частные производные и равномерно стремится к нулю по переменным y, z, z_0 при $\omega \rightarrow 0$.

При $\omega \tau = 0(1)$ и $\omega \rightarrow 0$ формулы (49) дают более точные выражения, чем формулы, полученные методом стационарной фазы. Из формулы (50) следует, что с точностью до непрерывной функции, стремящейся к нулю при $\omega \rightarrow 0$, величина $\partial^2 G_z / \partial \tau^2$ представима в виде суммы источников и стоков и решает задачу обтекания точечного источника однородным потоком. Из формул (48) - (50) следует, что функция Грина имеет логарифмическую особенность на луче $x = x_0, \tau > 0$ и аналитична вне этого луча, ее производные интегрируемы на S с любой степенью $\nu < 2$.

Положим далее

$$R(M, Q) = -2 \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau - \tau_0, y - y_0, z, z_0), \quad Q = (\tau_0, y_0, z_0) \quad (51)$$

будем искать решение задачи обтекания неровности дна в виде потенциала двойного слоя

$$Z(M) = \int_S \mu(Q, \omega) \frac{\partial}{\partial N} R(M, Q) dS, \quad (52)$$

где \bar{N} - внешняя нормаль к поверхности S .

Используя граничное условие (40) на поверхности S , получим для определения плотности $\mu(M, \omega)$ интегральное уравнение Фредгольма

$$\mu(M, \omega) + \int_S \mu(Q, \omega) \frac{\partial}{\partial N} R(M, Q) dS = f(M). \quad (53)$$

При $\omega = 0$ интегральное уравнение (53) разрешимо, так как ему соответствует задача обтекания неровности дна потоком однородной жидкости. Положим

$$\mu(M, \omega) = \mu_0(M) + \omega \mu_1(M, \omega), \quad \mu_0(M) = \mu(M, \omega)$$

и подставим это выражение в интегральное уравнение (52). Обрасывая величину $\omega \mu_1(M, \omega)$ как малую более высокого порядка по сравнению с $\mu_0(M)$, получим

$$Z = -2 \int_S \mu_0(\tau_0, y_0, z_0) \frac{\partial}{\partial N} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}(\tau - \tau_0, y - y_0, z, z_0) dS. \quad (54)$$

На расстояниях, значительно превышающих размеры препятствия, из формулы (54) можно получить приближенное выражение

$$Z = -2 \int_S \mu_0(Q) \cos \varphi dS \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial z_0} (x, y, z, 0), \quad (55)$$

где φ - угол между нормалью \bar{N} и осью Oz_0 .

Формула (55) справедлива в области аналитичности функции Грина и получается удалением из области T_0 всех лучей, проходящих через точки поверхности S параллельно оси потока и в положительном направлении оси Ox . Используя формулу для потенциала обтекания неровности дна потоком однородной жидкости, можно приближенно вычислить интеграл в правой части формулы (55). Тогда

$$Z(x, y, z) = - \frac{M + M_1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial z_0} (x, y, z, 0),$$

где M - масса, заключенная в области Q , а M_1 - ее присоединенная масса.

Л и т е р а т у р а

1. Дородницын А.А. Некоторые задачи обтекания неровностей поверхности земли воздушным потоком // Труды Главн. геофиз. обсерватории. 1940. Вып. 31. С. 3.
2. Miles J.W. Internal waves generated by a horizontally moving source // Geophys. Fluid Dynamics. 1972. V.2. N1. P.63.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наукова думка, 1976.
4. Докучаев В.П., Долина И.С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1977. Т. 13, № 6. С. 655.
5. Стурова И.В. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 200.
6. Боровиков В.А., Владимиров Ю.В., Кельберг М.Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализо-

- важными источниками // Изв. АН СССР. ФАО. 1984. Т. 20, № 6. С. 526.
7. Санников В.Ф. Дальнее поле установившихся волн, создаваемых локальными источниками возмущений в потоке стратифицированной жидкости // ПММ. 1986. Т. 50, № 6. С. 987.
 8. Санников В.Ф. Дальнее поле волн, образуемых диполем в потоке текущей с критической скоростью стратифицированной жидкости // ЖПМТФ. 1988. № 1. С. 73.
 9. Gray E.P., Hart R.W., Farrel R.A. The structure of internal wave Mach front generated by a point source moving in stratified fluid // Phys. Fluids. 1983. V.26, N10. P.2919.
 10. Бежанов К.А., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком слоистой жидкости // ДАН СССР. 1987. Т. 296, № 2. С. 303.
 11. Бежанов К.А., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М. Исследование дальнего и ближнего полей в задаче обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 86.
 12. Бежанов К.А., Можаяев В.В., Морозов Е.Н. и др. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком стратифицированной жидкости. Теория и лабораторный эксперимент // Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри / ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 48.
 13. Аксенов А.В., Можаяев В.В., Скороваров В.Е., Шеронов А.А. Фазовая структура трехмерных внутренних волн в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 129.
 14. Веденьков В.Е., Санников В.Ф. Ближнее поле поверхностных волн, генерируемых в потоке малой неровностью дна // Теоретические исследования волновых процессов в океане. Севастополь. 1983. С. 22.
 15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд. физико-матем. лит. 1962.
 16. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ПОТОКАМИ

ВИХРЕВЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

А.А.Абрашкин, Д.А.Зенькович

Возбуждение поверхностных и внутренних волн в натуральных условиях связано, как правило, с действием непотенциальных сил. Вследствие этого возникающие волновые движения в некоторых физических ситуациях являются принципиально вихревыми, принося дополнительную завихренность в течение. Предметом настоящего исследования служат нелинейные стационарные вихревые поверхностные и внутренние волны, распространяющиеся на фоне сдвигового потока, а основной целью является определение разложений типа Стокса для общего вида двумерных возмущений.

Построение теории возмущений в задачах распространения непотенциальных волн представляет в ряде случаев существенные трудности, и потому перерастает в разряд одной из проблем гидродинамического описания вихревых движений жидкости. Поясним это на примере поверхностных волн на сдвиговом течении.

Традиционный путь рассмотрения возмущений, бегущих по поверхности сдвигового потока с профилем скорости $U(y)$ [1, 2], связан с представлением поля скорости как малого отклонения от плоскопараллельного течения (заданного в эйлеровых координатах) и последующего нахождения величины отклонений. Но нетрудно заметить, что такой подход является весьма частным, поскольку свойства волн — их скорость распространения, структура и величина завихренности — определяются только видом исходного профиля. В то же время, если перейти в систему отсчета, движущуюся с волной (где течение стационарно), то завихренность (постоянная на линии тока $u = \text{const}$) может быть

произвольной, зависящей от ψ функцией. Сдвиговый поток однозначно определяет завихренность нулевого приближения (невозмущенного течения). В каждом же из следующих приближений при общем описании плоских волновых возмущений ее величина должна задаваться некоторой функцией ψ . В такой постановке решение этой задачи всеми известными ранее методами не представляется возможным.

Ниже предлагается новый метод описания стационарных волн на сдвиговом течении (метод модифицированных лагранжевых координат), позволяющий решить указанную задачу (разд. 1). В разд. 2 результаты для поверхностных волн обобщаются на случай внутренних волн. Для обоих типов волн построены разложения типа Стокса.

Заключительный раздел посвящен изучению свойств сильно нелинейных поверхностных волн, показано, что угол заострения предельной вихревой волны может иметь два значения - 0° и 120° .

1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

1. Рассмотрим стационарные волны, распространяющиеся по свободной поверхности сдвигового потока $U(b)$, b - вертикальная лагранжева координата, изменяющаяся от $b=0$ (на свободной границе) до $b=-h$ (на дне). При исследовании волн ограничимся теми случаями, когда плоскопараллельный поток устойчив и по его поверхности могут распространяться линейные гравитационные волны, не имеющие критических слоев. В частности, эти условия выполнены при $U'' < 0$, $U' \geq 0$, а также $U'' > 0$, $U' \leq 0$ [3]. В качестве исходной информации о волне задается распределение завихренности на линиях тока

$$\Omega = -U'(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_n(b),$$

где $\Omega_n(b)$ - произвольные функции.

Уравнения двумерной гидродинамики в лагранжевых переменных a, b запишем в виде [4]

$$X_{tt} = -N_a Y_b + N_b Y_a, \quad Y_{tt} = -N_b X_a + N_a X_b,$$

$$X_a Y_b - X_b Y_a = 1, \quad H = \frac{p}{\rho} + gY, \quad (1)$$

где $X(a, b, t), Y(a, b, t)$ - координаты местоположения жидкой частицы, p - давление, ρ - плотность, g - ускорение свободного падения.

При изучении волнового движения жидкости удобно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью распространения волны c , где течение стационарно. В лагранжевых переменных произвольное двумерное стационарное течение имеет вид

$$X = X(q, b), \quad Y = Y(q, b), \quad q = a + \epsilon(b)t, \quad (2)$$

где $\epsilon(b)$ - произвольная функция. В справедливости этого утверждения проще всего убедиться, если записать поле скорости течения (2) в эйлеровых координатах. Поскольку лагранжевы компоненты скорости $X_t = \epsilon X_q, Y_t = \epsilon Y_q$, как и функции X, Y зависят только от q и b , то эйлерово поле скорости $X_t(X, Y), Y_t(X, Y)$ не зависит явно от времени и, следовательно, стационарно.

В модифицированных лагранжевых переменных q, b уравнения (1) запишутся так:

$$\epsilon^2 X_{qq} = [Y, H], \quad \epsilon^2 Y_{qq} = [H, X], \quad [X, Y] = 1. \quad (3)$$

Здесь и далее квадратные скобки означают взятие якобиана по q и b . Функции $\epsilon(b)$ в нашей задаче можно придать вполне определенный физический смысл. Так, если волновые возмущения на потоке отсутствуют, то $\epsilon(b)$ совпадает с выражением для профиля сдвигового течения $U(b)$ (в этом случае решением (3) является $X=q, Y=b$). При наличии возмущений конечной амплитуды на потоке функцию ϵ удобно представить следующим образом:

$$\epsilon(b) = U(b) + u(k, b) - c(k), \quad (4)$$

где $u(k, b)$ - дрейфовое течение, возникающее в присутствии возмущений. Слагаемое $-c(k)$ в формуле (4) отражает факт перехода в систему отсчета, движущуюся со скоростью волны $c(k), k = 2\pi/\lambda, \lambda$ - длина волны возмущения.

Достоинство введенных нами координат в отличие от обычных лагранжевых переменных заключается в том, что при построении с использованием их теории возмущений во втором и следующих приближениях не возникнут секулярные члены. Обратимся непосредственно к изложению метода.

Положим в уравнениях (3) $X=q+\xi$, $Y=b+\eta$, где ξ, η — периодические функции q , имеющие смысл отклонения траекторий жидких частиц от плоскопараллельного течения, и запишем систему уравнений для определения стационарных возмущений:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \xi_{qq} &= -H_q + [\eta, H], & \epsilon^2 \eta_{qq} &= -H_\xi - [\xi, H], \\ \xi_q + \eta_\xi &= -[\xi, \eta]. \end{aligned} \quad (5)$$

Из этой системы уравнений можно получить уравнение для вертикальной компоненты скорости $w = \epsilon \eta_q$:

$$\begin{aligned} \epsilon \Delta w - \epsilon^2 w &= -\frac{\partial I}{\partial b} + J, \\ I &= \epsilon^2 \frac{d}{dq} [\xi, \eta] + [\eta, H], & J &= \frac{d}{dq} [\xi, H], \end{aligned} \quad (6)$$

исследовать которое иногда намного удобнее, нежели систему (5).

Уравнения гидродинамики следует дополнить граничными условиями. Давление на свободной поверхности постоянно, поэтому $H(q, 0) = g\eta(q, 0)$. В терминах функции w это условие имеет вид

$$\epsilon^2 w_b - (g + \epsilon^2 c)w = -\epsilon I, \quad \text{при } b=0, \quad (7)$$

на дне, очевидно, обращается в нуль нормальная компонента скорости, т. е. $w(q, -h) = 0$.

Представим неизвестные функции $\xi, \eta, w, H, u, c, \zeta$ так же как и завихренность Ω , в виде рядов по степеням некоторого параметра ϵ , малого для слабонелинейных возмущений:

$$(\xi, \eta, w, H, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (\xi_n, \eta_n, w_n, H_n, u_n), \quad c = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n c_n. \quad (8)$$

В соответствии с этими разложениями функция ϵ также запишется в виде ряда

$$\epsilon = U - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n (u_n - c_n) = \epsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \epsilon_n. \quad (9)$$

Подставляя разложения (8), (9) в уравнения (5), (6), можно получить цепочку уравнений теории возмущений. Функции ϵ_n , входящие в них, выражаются через завихренность n -го приближения Ω_n и решения предыдущих $(n-1)$ приближений для волновых возмущений. Покажем это.

Как известно, в лагранжевых переменных завихренность течения определяется равенством [5]

$$\Omega = \frac{D(X_1, X)}{D(a, b)} + \frac{D(Y_1, Y)}{D(a, b)}$$

В используемых нами переменных после перехода к возмущениям ξ, η это выражение запишется так:

$$\Omega = -\epsilon \cdot (1 + 2\xi_q + \xi_q^2 + \eta_q^2) + \epsilon (\eta_{qq} - \xi_{qs} + [\xi_q, \xi] + [\eta_q, \eta]). \quad (10)$$

Функции ξ, η являются периодическими по переменной q , но в силу стационарности течения величина завихренности зависит только от b . Поэтому данное соотношение можно упростить, уничтожив периодические по q члены путем усреднения. Выражение для Ω при этом примет вид

$$\Omega = -\epsilon^2 \left[\overline{\epsilon \xi_q, \xi} + \overline{\epsilon \eta_q, \eta} \right],$$

где черта — усреднение по переменному q на длине волны. Подставляя в это выражение разложения в ряд вида (8), найдем соотношение, связывающее величины Ω_n, ϵ'_n и ξ_m, η_m ($m < n$).

2. Перейдем непосредственно к изучению свойств возмущений. Волнам симметричной формы соответствуют решения вида

$$\begin{aligned} (\xi_n, \eta_n, I_n, J_n) &= \sum_{m \neq n} (X_{nm}, W_{nm}, I_{nm}, J_{nm}) \sin m k q, \\ (\eta_n, H_n) &= \sum_{m \neq n} (Y_{nm}, H_{nm}) \cos m k q. \end{aligned} \quad (11)$$

Все функции с двойным индексом здесь зависят только от координаты b .

Выпишем согласно (5) — (8) уравнения первого приближения:

$$\epsilon_0^2 \xi_{1q} = -N_{1q}, \quad \epsilon_0^2 \eta_{1q} = -N_{1q}, \quad \xi_{1q} + \eta_{1q} = 0,$$

$$\epsilon_0 \Delta w_1 - \epsilon_0'' w_1 = 0, \quad \epsilon_0^2 w_{1b} - (q + \epsilon_0' \epsilon_0) w_1 = 0, \quad b = 0, \quad (12)$$

$$w_1(q, -h) = 0.$$

Полагая $w_1 = W_{11}(b) \sin \kappa q$, приходим к следующей краевой задаче для функции $W_{11} \equiv W_1$:

$$W_1'' - \left(\frac{\epsilon_0''}{\epsilon_0} + \kappa^2 \right) W_1 = 0, \quad \epsilon_0 = U - c_0, \quad (13)$$

$$\epsilon_0^2 W_1' - (q + \epsilon_0' \epsilon_0) W_1 = 0, \quad b = 0; \quad W_1(-h) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (13) – это хорошо известное уравнение Рэлея. Как показано в работе [3], если профиль скорости $U(b)$ удовлетворяет условиям $U'' < 0$, $U' \geq 0$ или $U'' > 0$, $U' \leq 0$, течение является устойчивым и на потоке возможно распространение линейных поверхностных волн без возникновения критических слоев (т. е. везде в области течения $\epsilon_0 = U - c_0(\kappa) \neq 0$).

Точное аналитическое решение (13), имеющее физический смысл, может быть получено только для линейного профиля скорости. Известен также ряд приближенных методов, позволяющих записать в аналитической форме решение уравнения Рэлея для произвольного профиля течения, в частности решение Лилли [6], полученное в предположении малости отношения $[\max U(b)]/c_0$, а также решение [7] для случая длинных волн ($\kappa h \ll 1$).

В дальнейшем будем полагать функцию W_1 и, следовательно, дисперсионную характеристику линейных волн $c_0(\kappa)$ известными. По найденной W_1 легко восстанавливаются величины смещений и давления (см. (12)). Подставляя выражения для них в исходные разложения уравнений (6) в представлении (8), нетрудно получить в явном виде систему уравнений второго приближения. Распределение амплитуды вертикальной компоненты скоростей первых двух гармоник W_{11}, W_{12} будет удовлетворять неоднородному уравнению Рэлея. Не описывая всю процедуру вычислений, приведем линейную по амплитуде поправку к скорости распространения волны:

$$c_1 = u_1(0) + \frac{\int_{-h}^0 \Omega_1 [\epsilon_0 (W_1^2 \epsilon_0^{-2})' + \int_{-h}^b \epsilon_0' (W_1^2 \epsilon_0^{-2})' d\tilde{b}] d\tilde{b}}{2g\epsilon_0^{-2}(0)W_1^2(0) + \int_{-h}^0 \epsilon_0' (W_1^2 \epsilon_0^{-2})' d\tilde{b}}, \quad u_1' = \epsilon_0' = -\Omega_1. \quad (15)$$

Величина $u_1(0)$ играет в этой формуле роль произвольной постоянной. Для жидкости бесконечной глубины, например, ее удобно выбрать так, чтобы $u_1(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow -\infty$, откуда

$$u_1(0) = - \int_{-\infty}^0 \Omega_1(b) d\tilde{b}.$$

Стандартным образом можно построить и решить уравнения следующих приближений. Авторы подробно изучили свойства вихревых возмущений вплоть до третьего приближения (см. подробно [8]). Не приводя ввиду громоздкости основные результаты этого вычисления, остановимся кратко на некоторых примерах найденного класса волновых движений.

3. В качестве примеров, иллюстрирующих построенное решение, рассмотрим вначале ряд частных случаев, соответствующих известным классам стационарных волн конечной амплитуды.

а) Решение уравнений (5), построенное для нулевой завихренности (все $\Omega_n = 0$), представляет собой потенциальные волны Стокса [4], свойства которых легко могут быть изучены предлагаемым здесь методом.

б) Для исследованных Гуйоном вихревых волн [4] $U' = 0$, и ряд для завихренности начинается с первой степени ϵ . Как видно из соотношения (15), при $\Omega_1 \neq 0$ возникает дрейфовое течение первого порядка

$$u_1(b) = u_1(0) - \int_0^b \Omega_1(\tilde{b}) d\tilde{b} \quad (16)$$

и соответствующее слагаемое в дисперсионной зависимости

$$c_1 = u_1(0) + \frac{c_0^2}{gW_1^2(0)} \int_{-h}^0 \Omega_1(b) W_1' W_1 d\tilde{b}, \quad (17)$$

где $W_1 = c_0 \operatorname{sh} \kappa(b+h) / c_1 \operatorname{sh} \kappa h$. Для бесконечно глубокой жидкости зависимость (17) сводится к выражению

$$c_1 = c_1(0) + \int_{-\infty}^0 \Omega_1(b) \operatorname{erf}(2\kappa b) db,$$

совпадающему с результатом Гуйона [4].

в) Известное точное решение Герстнера [9] для стационарных вихревых волн в жидкости бесконечной глубины при отсутствии сдвигового течения характеризуется чисто периодическим движением частиц: $U(b) = 0$, $u_n(b) = 0$ для всех n . В данном случае удобно считать заданными функции u_n , а завихренность определять из формулы (10) по найденным выражениям для волновых возмущений предыдущих приближений^{*)}. Построенное таким образом решение является приближенным, но тем не менее обладает всеми характерными свойствами волн Герстнера: $c_0 = \sqrt{g/\kappa}$, $c_n = 0$ для всех $n > 1$.

г) Потенциальные возмущения конечной амплитуды на сдвиговом течении с линейным профилем скорости исследовались впервые в работе [2], где решение проведено по аналогии с методом Стокса для первых трех приближений. Результаты указанной работы могут быть получены и при нашем подходе, если положить $U = \alpha b$, $\alpha = \operatorname{const}$, $\Omega_n = 0$ для всех $n > 1$.

д) Наиболее общая формулировка метода возмущений в Рилеровом описании, пригодная для рассмотрения стационарных волн на поверхности произвольного устойчивого сдвигового течения, предложена в работе [1]. Тем не менее, как уже указывалось во введении, этот подход принципиально не охватывает всего многообразия возможных типов вихревых волн, так как завихренность возмущений в [1] для всех приближений определяется только видом функции $U(y)$. В нашем описании этому случаю соответствует задание завихренности в виде ряда, где все коэффициенты функционально зависят от вида исходного профиля.

е) В качестве оригинального примера, демонстрирующего влияние вихревой компоненты на характеристики волн, рас-

^{*)} Это отвечает другой возможной формулировке задачи, когда задаются выражения для дрейфовых течений $u_n(b)$ каждом из приближений.

смотрим возмущения на поверхности потока с линейным профилем скорости: $U = \alpha z$, $\alpha = \text{const}$. Предположим, что данное волновое семейство обладает ненулевой завихренностью первого порядка $\Omega_1 \neq 0$. Тогда согласно (15) отлична от нуля c_1 . Для экспоненциального распределения завихренности возмущений $\Omega_1 = \omega \exp(\gamma z)$ величина c_1 выражается через интегральные показательные функции:

$$c_1 = \frac{\omega c_0^2}{g + \kappa c_0^2 \text{th } \kappa h} \left[1 - \frac{\gamma c_0 \exp(\gamma c_0 / \alpha)}{4\alpha \text{sh}^2 \kappa h} G \right],$$

$$G = e^{2\kappa d} \left\{ E_1 \left[(2\kappa + \gamma) \frac{c_0}{\alpha} \right] - E_1 \left[(2\kappa + \gamma) d \right] \right\} - e^{-2\kappa d} \left\{ E_1 \left[(2\kappa - \gamma) \frac{c_0}{\alpha} \right] - E_1 \left[(2\kappa - \gamma) d \right] \right\} - 2 \left[E_1(\gamma c_0 / \alpha) - E_1(\gamma d) \right], \quad d = h + c_0 / \alpha,$$

$$c_0 = -\frac{\alpha}{2\kappa} \text{th } \kappa h \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\kappa^2} \text{th}^2 \kappa h + \frac{g}{\kappa} \text{th } \kappa h},$$

где c_0 - скорость распространения линейных волн на сдвиговом течении с постоянной завихренностью.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

Развитый в предыдущем разделе метод описания нелинейных стационарных течений удается обобщить и на случай волнового движения неоднородной жидкости.

При стационарном течении стратифицированной жидкости завихренность жидких частиц уже не сохраняется, но по-прежнему (как и в однородной жидкости) на линиях тока остается неизменным значение функции Бернулли $B = \rho + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g Y$. Дюбрей - Жакогэн указала другой инвариант [4]:

$$\Phi = -\rho \Omega + \rho \left(\frac{1}{2} V^2 + g Y \right) = \Phi(\psi), \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\psi}, \quad (18)$$

связанный с функцией Бернулли простым соотношением $\Phi = dB/d\psi$ (ψ - функция тока). В однородной жидкости ($\rho' = 0$) инвариантность Φ означает сохранение завихренности на линиях тока.

Традиционный подход к изучению стационарных внутренних волн основывается на исследовании нелинейного диффе-

ренциального уравнения (18) для функции тока ($\Omega = -\Delta\psi$, $V^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2$) при определенных частных предположениях относительно вида Φ (см. подробно [10, 11]). Наш подход, в отличие от ранее известных, позволяет не только рассматривать произвольные профили скорости и плотности (конечно, при условии линейной устойчивости течения), но и дает возможность существенно расширить класс исследуемых возмущений. Это расширение семейства волн связано с тем, что при построении разложений типа Стокса интеграл движения Φ представляется в виде ряда по степеням ε , а коэффициенты разложения Φ_n могут быть произвольными функциями вертикальной лагранжевой координаты δ (в стационарном течении изолинии ψ и δ совпадают). Всем известным ранее формулировкам данной задачи соответствует либо учет только нулевого приближения Φ_0 , либо некий частный вид Φ_n .

1. Рассмотрим периодическую внутреннюю волну, распространяющуюся без изменения формы на фоне сдвигового течения с профилем скорости $U(\delta)$ и плотности $\rho(\delta)$. Будем предполагать число Ричардсона $Ri = N^2(U')^{-2} > 1/4$ ($N^2 = -\rho'g/\rho$ — частота Брента — Вэйсяля), что достаточно для устойчивости течения в линейном приближении [12]. Вычисления удобно провести в системе отсчета, движущейся со скоростью волны ε , где волновое движение стационарно.

Уравнения стационарного течения стратифицированной жидкости в модифицированных лагранжевых переменных имеют вид

$$\rho \varepsilon^2 X_{\eta\eta} = [Y, \rho], \quad \rho \varepsilon^2 Y_{\xi\xi} = -[X, \rho] - \rho g, \quad [X, Y] = 1. \quad (19)$$

Функция ε по-прежнему представляется соотношением (4).

Процедура построения и решения уравнений теории возмущений аналогична проведенной в разд. 1. Вводя возмущения гидрофизических полей по формулам

$$X = q + \xi, \quad Y = \delta + \eta, \quad \rho = \rho(0) + g \int_{\delta}^0 \rho d\delta + \rho,$$

где ξ, η, ρ — периодические функции q , из системы (19) можно получить уравнение для вертикальной компоненты скорости $w = \varepsilon \eta_{\xi}$:

$$\varepsilon^2 (\rho w_{\xi})_{\xi} + \rho \varepsilon^2 w_{\eta\eta} - \left[\varepsilon (\rho \varepsilon')' + \rho' g \right] w = -\varepsilon (I_{\xi} + J),$$

$$I = [\eta, \rho] + \rho \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial q} [\xi, \eta], \quad J = \frac{\partial}{\partial q} \left\{ [\xi, \rho] + \rho g [\xi, \eta] \right\}. \quad (20)$$

Граничными условиями для этого уравнения служат равенства $\psi(q, -h) = \psi(q, 0) = 0$. Подставляя ρ, ξ, η в виде рядов по степеням ϵ (см. (8), (9)), на основе уравнения (20) можно эффективно построить теорию возмущений для рассматриваемого класса волн.

Величина Φ , являющаяся интегралом уравнений (19), в наших переменных запишется так:

$$\Phi = -\Omega + \rho' \rho^{-1} \left[\frac{1}{2} \epsilon (X_q^2 + Y_q^2) + g \epsilon^{-1} Y \right] - \Phi(b),$$

где Ω определяется формулой (10). Функции Φ_n , выражающие вклад нелинейных эффектов в завихренность течения, в каждом из рассматриваемых приближений должны задаваться из физических соображений.

2. Решение уравнений теории возмущений при определенном Φ_n носит стандартный характер. В линейном приближении поперечная структура возмущений вертикальной компоненты скорости $W_1(b)$ ($w_1 = W_1(b) \sin k_1 q$) описывается хорошо известным уравнением Тейлора – Гольдштейна [12].

Во втором и более высоких приближениях для нахождения характеристик и структуры волн требуется решать неоднородное уравнение Тейлора – Гольдштейна. Не выписывая подробно решения этих приближений, приведем в качестве наиболее важной формулы выражение для нелинейной поправки первого порядка к скорости распространения волны, найденное из уравнений второго приближения:

$$c_1 = u_1(0) \left\{ \int_{-h}^0 \rho \left[\epsilon_0' \left(\frac{W_1^2}{\epsilon_0^2} \right)' + \frac{2N^2 W_1^2}{\epsilon_0^3} \right] db \right\}^{-1} \cdot \int_{-h}^0 u_1' \left\{ \rho \epsilon_0' \left(\frac{W_1^2}{\epsilon_0^2} \right)' + \int_{-h}^b \rho \left[\epsilon_0' \left(\frac{W_1^2}{\epsilon_0^2} \right)' + \frac{2N^2 W_1^2}{\epsilon_0^3} \right] d\bar{b} \right\} db.$$

Для однородной жидкости это соотношение переходит в формулу (15).

3. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАВИХРЕННАЯ ВОЛНА

Разложение типа Стокса, построенное в разд. 1, описывает слабонелинейные поверхностные волны. Ниже изучается одно из свойств сильнонелинейных (предельных) волн — величина угла заострения при вершине.

1. Рассмотрим предельную вихревую волну неизменного профиля в системе отсчета, бегающей со скоростью волны, и предположим, что ее профиль симметричен относительно вертикали, проходящей через вершину, и имеет угол заострения при ней 2α . Функция тока, описывающая волновое завихренное течение, удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = -\Omega(\psi)$.

Положим вначале для простоты $\Omega = \Omega_0$, где Ω_0 — некоторая постоянная (примером такого течения являются волны на поверхности потока с линейным сдвигом скорости). Однородно завихренное течение внутри угла раствора 2α можно описать функцией тока

$$\psi(r, \theta) = -\frac{\Omega_0 r^2}{4} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\alpha}\right) + A r^m \cos m\theta, \quad (21)$$

где r, θ — полярные координаты (угол отсчитывается от вертикали, проходящей через вершину, начало координат в точке заострения).

Функция тока ψ обращается в нуль на свободной поверхности, если

$$m\alpha = \pi/2. \quad (22)$$

Для определения m выражение (21) следует подставить в интеграл Бернулли. В итоге получим

$$\frac{\Omega_0(3 - 2\cos 2\alpha \cos 2\theta + \cos^4 \theta)}{4 \cos^2 2\alpha} r^2 + A^2 m^2 r^{2m-2} + \frac{A \Omega_0 m}{\cos 2\alpha} [\cos(m-2)\theta - \cos 2\alpha \cos m\theta] r^m = 2g r \cos \theta.$$

Нетрудно убедиться, что единственным значением m , для которого это условие выполняется при $\theta \rightarrow \alpha$, $r \rightarrow 0$, является $m = 3/2$. Найденное значение соответствует углу заострения при вершине 120° .

2. Пусть теперь завихренность неоднородна. Поскольку на свободной поверхности $\psi = 0$, то для непрерывной $\Omega(\psi)$ справедливо разложение

$$\Omega(\psi) = \Omega(0) + \psi \Omega'(0) + O(\psi^2),$$

из которого ясно, что рассматривая достаточно малую окрестность гребня, можно всегда ограничиться учетом только первого члена, т. е. считать течение однородно завихренным. Результаты для волны с постоянной завихренностью тем самым переносятся и на произвольно завихренную.

Отметим, что наше исследование включало все значения угла α кроме нулевого. Из формулы (22) видно, что при $\alpha \rightarrow 0$ величина m обращается в бесконечность. Это означает, что представление (21) не описывает течение вблизи гребня с нулевым углом заострения, и последнее требует отдельного изучения. Пример вихревой волны с нулевым углом заострения демонстрирует предельная волна Герстнера (правда, для нее завихренность на свободной поверхности обращается в бесконечность).

Итак, угол заострения при вершине стационарной предельной вихревой волны равен либо 120° , либо 0° ; случай нулевого угла должен исследоваться особо ^{*)}.

Л и т е р а т у р а

1. Ninh F.V. Stokes waves on shear flow // Oceanologia. 1984. V.18. P.5.
2. Цао С. Поведение поверхностных волн на линейно изменяющемся течении // Тр. МФТИ. Исследования по механике и прикладной математике. 1959. Вып. 3. С. 66.
3. Yih Ch.-Sh. Surface waves in flowing water // J. Fluid Mech. 1972. V.51. Pt 2. P.209.
4. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
5. Стокер Дж. Волны на воде. М.: Изд. иностр. лит., 1959.
6. Hidy G.M., Plate E.J. Wind action on water waves standing in a laboratory channel // J. Fluid Mech. 1966. V.26. Pt 4. P.651.

^{*)} Это замечание остается справедливо и для потенциальной волны.

7. Burns J.C. Long waves in running water // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V.49. P.695.
8. Абрашкин А.А., Зенькович Д.А. Вихревые стационарные волны на сдвиговом потоке // Изв. АН СССР, ФАО. 1990 (в печати).
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1948.
10. Физика океана: Т. 2. / Под ред. А.С.Монина. М.: Наука, 1978.
11. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
12. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.

ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДВУХСЛОЙНОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ И ВЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Н. Н. Романова

В данной статье излагаются результаты, относящиеся к исследованию сугубо нелинейного механизма неустойчивости сдвиговых течений — так называемой взрывной неустойчивости. В некоторых моделях, характеризующихся достаточно резкими градиентами скорости течения, может возникнуть ситуация, когда амплитуды распространяющихся на фоне течения волн, участвующих в резонансном трехволновом взаимодействии, нарастают одновременно, причем за конечное время t_0 уходят в бесконечность. Если в рассматриваемой модели существуют тройки волн, удовлетворяющих условию синхронизма $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_3$, то амплитуды A_j волн, участвующих в резонансном взаимодействии, медленно эволюционируют со временем, подчиняясь известной системе уравнений:

$$\frac{dA_1}{dt} = K_1 A_3 A_2^*, \quad \frac{dA_2}{dt} = K_2 A_3 A_1^*, \quad \frac{dA_3}{dt} = K_3 A_1 A_2. \quad (1)$$

В случае, если все коэффициенты взаимодействия K_j имеют одинаковый знак, то решение системы (1) сингулярно, и в окрестности сингулярной точки амплитуды всех трех волн имеют порядок $A_j \sim 1/(t_0 - t)$, т.е. становятся бесконечными за конечное время. Такого рода взаимодействия возможны, когда в среде существуют волны отрицательной энергии [1]. В этом случае, если знак энергии волны суммарной частоты противоположен знаку энергии двух других волн, возникает взрывная неустойчивость.

Возможность такого рода взаимодействий в геофизике впервые была рассмотрена достаточно подробно в работе [2]. Количественные оценки инкремента взрывной неустойчивости в трехслойной среде впервые были получены в [3], где приведены выражения для коэффициентов взаимодействия взрывного резонансного триплета. Естественным образом возникает вопрос, к каким эффектам приводит наличие в системе волн отрицательной энергии, если рассматривать гравитационные резонансные взаимодействия во всем спектральном диапазоне. При исследовании слабонелинейных волновых взаимодействий, охватывающих весь спектр, часто бывает удобен аппарат гамильтоновского формализма. Однако достаточно полно этот аппарат разработан лишь для изучения волновых взаимодействий в равновесных средах, когда квадратичная часть гамильтониана является положительно определенной квадратичной формой. При анализе волновых взаимодействий в неравновесных средах, когда в спектре появляется область волн с отрицательной энергией, аппарат гамильтоновского формализма в геофизических задачах практически не применялся. На принципиальную возможность таких исследований указано в работе [4]. Гамильтонова структура уравнений для волн на фоне полойно-равнозавихренных течений была получена в работе [5]. Здесь представлено дальнейшее развитие идей, содержащихся в [5]. Рассмотрена некая простейшая модель, в которой оказываются возможными взрывные трехволновые взаимодействия. Для этой модели вводятся нормальные переменные, в которых матрица квадратичной части гамильтониана диагональна, получены коэффициенты трехволнового взаимодействия, ответственные как за взрывные, так и за распадные типы взаимодействий.

Рассмотрим двухслойную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью, в невозмущенном состоянии подчиняющейся уравнению $z = h$. Верхний слой толщиной h движется со скоростью $V_0(z) = V'_0 z$, линейно зависящей от глубины, нижний бесконечно глубокий слой неподвижен. Поверхность скачка завихренности в невозмущенном состоянии задана уравнением $z = 0$. Уравнения движения для возмущений в верхнем слое выглядят следующим образом:

$$u_{1t} + V_0(z)u_{1z} + V'_0 w_1 + \rho_{1z} + u_1 u_{1z} + w_1 u_{1z} = 0,$$

$$w_{1t} + V_0(z)w_{1z} + \rho_{1z} + u_1 w_{1z} + w_1 w_{1z} = 0,$$

$$u_{1z} + w_{1z} = 0.$$

В нижнем неподвижном слое

$$u_{2t} + \rho_{2x} + u_2 u_{2x} + w_2 u_{2z} = 0,$$

$$w_{2t} + \rho_{2z} + u_2 w_{2x} + w_2 w_{2z} = 0,$$

$$u_{2x} + w_{2z} = 0.$$

Здесь u и w - горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, ρ - давление, 1, 2 - индексы, отвечающие соответственно верхнему и нижнему слоям. В данной модели, как и в случае однородного течения, можно для возмущенной скорости ввести в обоих слоях потенциал $\Psi_j(x, z)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Обозначим через $\tilde{\eta}(x, t)$ выражение для формы возмущенной поверхности раздела, а через η - для формы возмущенной свободной поверхности. Кинематическое и динамическое условия на обеих поверхностях приводят к следующей системе уравнений:

$$\left. \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = \Psi_{1x} - [V_0(\hat{\eta}) + \Psi_{1z}] \hat{\eta}_x \right|_{z=\hat{\eta}(x)},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + V_0(\hat{\eta}) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi_{1z} + V_0' \Psi_{1z} + \frac{1}{2} (\Psi_{1x}^2 + \Psi_{1z}^2)_x + g \hat{\eta}_x - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\hat{\eta}_x}{\sqrt{1+\hat{\eta}_x^2}} \right) = 0 \Big|_{z=\hat{\eta}(x)},$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = (\Psi_{2z} - \Psi_{2x} \tilde{\eta}_x) \right|_{z=\tilde{\eta}(x)} = (\Psi_{1z} - \Psi_{1x} \tilde{\eta}_x) \Big|_{z=\tilde{\eta}(x)}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (\Psi_{1x} - \Psi_{2x}) + V_0' \Psi_{1z} + \frac{1}{2} (\Psi_{1x}^2 + \Psi_{1z}^2)_x - \frac{1}{2} (\Psi_{2x}^2 + \Psi_{2z}^2)_x = 0 \right|_{z=\tilde{\eta}(x)},$$

где g - ускорение силы тяжести, α - коэффициент поверхностного натяжения.

Обозначим $\Psi_j(x, t) \Big|_{z=\tilde{\eta}(x,t)} = \Phi_j(x, t)$, $\Phi_0(x, t) = \Phi_2(x, t) - \Phi_1(x, t)$. Система уравнений (2), как показано в [5], может быть записана в виде

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \hat{\eta}} - V_0' \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_0}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{\eta}} + V_0' \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi_0},$$

где \mathcal{H} - выражение для полной энергии системы, равное

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_{2x}^2 + \Psi_{2y}^2) dx + \frac{1}{2} g \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}^2 dx + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{1 + \hat{\eta}_x^2} - 1) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\hat{\eta}}^{\hat{\eta}} \left\{ [\Psi_{1x} + V_0(x)]^2 + \Psi_{1x}^2 \right\} dx. \quad (4)$$

В терминах преобразования Фурье систему (3) можно представить следующим образом:

$$\hat{A} \vec{d} = i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{d}^*}. \quad (5)$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение, вектор $\vec{d}(k) = [\hat{\eta}(k), \Phi_1(k), \hat{\eta}(k), \Phi_0(k)]$, а эрмитова матрица \hat{A} равна

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -V_0'/k & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_0'/k & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

В дальнейшем используем приближение слабой нелинейности, считая малыми отклонения поверхностей раздела от невозмущенного состояния: $\eta = \hat{\eta} - h \ll h$, $\hat{\eta} \ll h$. Запишем первые два члена разложения гамильтониана \mathcal{H} по малому параметру η в фурье-представлении. Для этого нужно проделать громоздкие выкладки, связанные, в частности, с необходимостью решать краевую задачу с соответствующими граничными условиями для уравнения Лапласа в обоих слоях. Выражение для квадратичной части гамильтониана \mathcal{H}_2 имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_2 = \pi \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{d}^* \hat{h}_2 \vec{d}) dk.$$

Эрмитова матрица \hat{h}_2 равна

$$\hat{h}_2 = \begin{pmatrix} g & iV_0'(h)k & 0 & 0 \\ -iV_0'(h)k & |k| & 0 & |k| \exp(-|k|h) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |k| \exp(-|k|h) & 0 & |k| [1 + \exp(-2|k|h)] \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\bar{g} - g + 4k^2 + V_0' V_0'(h)}$$

Замена выражения для гамильтониана \mathcal{H} на \mathcal{H}_2 в системе (5) приводит к линеаризованной системе уравнений, определяющей дисперсионное соотношение для данной волновой системы. Нашей целью является нахождение нормальных переменных $\tilde{a}_j(\kappa)$, в которых матрица \hat{h}_2 квадратичной части гамильтониана диагональна, а система (5) имеет гамильтонову структуру:

$$\frac{d\tilde{a}_j}{dt} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \tilde{a}_j^*}.$$

Эта задача сводится к поиску линейного преобразования, диагонализующего матрицы \hat{h}_2 и \hat{A} . Такое преобразование существует, вектор старых зависимых переменных $\vec{d}(\kappa)$ выражается через новые, нормальные переменные $\vec{a}(\kappa) = [\tilde{a}_1(\kappa), \tilde{a}_2^*(-\kappa), \tilde{a}_3^*(\kappa), \tilde{a}_4^*(-\kappa)]$ при $\kappa > 0$ следующим образом:

$$\vec{d} = Z \vec{a}$$

Введем нормальные переменные $a_j(\kappa)$ определенные на всей оси (пренебрегая взаимодействием с нулевой модой):

$$a_j(\kappa) = \begin{cases} \tilde{a}_j(\kappa), & \kappa > 0 \\ \tilde{a}_j^*(\kappa), & \kappa < 0, \end{cases} \quad a_2(\kappa) = \begin{cases} \tilde{a}_2(\kappa), & \kappa > 0 \\ 0 & \kappa < 0. \end{cases}$$

Старые переменные $\vec{d}(\kappa)$ выражаются через переменные $a_{j,2}(\kappa)$ следующим образом:

$$\eta(\kappa) = I_1(\kappa) a_1(\kappa) + I_1(-\kappa) a_1^*(-\kappa) + I_2(\kappa) a_2(\kappa) + I_2(-\kappa) a_2^*(-\kappa),$$

$$\Phi_1(\kappa) = -\frac{i}{\kappa} [b_1(\kappa) I_1(\kappa) a_1(\kappa) + b_1(-\kappa) I_1(-\kappa) a_1^*(-\kappa) + b_2(\kappa) I_2(\kappa) a_2(\kappa) + b_2(-\kappa) I_2(-\kappa) a_2^*(-\kappa)],$$

$$\tilde{\eta}(\kappa) = -2 \left[\frac{b_1(\kappa)}{A_1(\kappa)} I_1(\kappa) a_1(\kappa) + \frac{b_1(-\kappa)}{A_1(-\kappa)} I_1(-\kappa) a_1^*(-\kappa) + \frac{b_2(\kappa)}{A_2(\kappa)} I_2(\kappa) a_2(\kappa) + \frac{b_2(-\kappa)}{A_2(-\kappa)} I_2(-\kappa) a_2^*(-\kappa) \right],$$

где

$$I_j(\kappa) = \sqrt{\mathcal{L}(\omega_j, \kappa)^{-1}}, \quad b_j(\kappa) = \frac{(g + \alpha \kappa^2) \kappa}{\Omega_j(\kappa)} - V_0',$$

$$A_j(\kappa) = V_0' (e^{\kappa h} + e^{-\kappa h}) - 2\omega_j \operatorname{Sgn} \kappa \exp(-|\kappa| h),$$

$$\Omega_j(\kappa) = \omega_j(\kappa) - V_0(h) \kappa, \quad \mathcal{L}(\omega_j, \kappa) = \frac{\partial}{\partial \omega} \mathcal{D}(\omega, \kappa) \Big|_{\omega = \omega_j}.$$

а $\mathcal{D}(\omega, \kappa)$ - правая часть дисперсионного уравнения линейной задачи:

$$\frac{\Omega^2 [\omega(1 + \text{Sgn} \kappa) - V_0'] e^{n\kappa} + [\omega(1 - \text{Sgn} \kappa) + V_0'] e^{-n\kappa}}{[\omega(1 + \text{Sgn} \kappa) - V_0'] e^{n\kappa} + [\omega(1 - \text{Sgn} \kappa) + V_0'] e^{-n\kappa}} + V_0' \Omega - (q + \alpha \kappa^2) \kappa = 0. \quad (6)$$

Переменная $a_1(\kappa)$ и частота ω_1 отвечают поверхностным волнам, искаженным приповерхностным течением, а a_2 и ω_2 внутренним волнам на скачке эвихренности. Ответственный за трехволновые взаимодействия кубичный гамильтониан \mathcal{H}_3 в нормальных переменных имеет вид

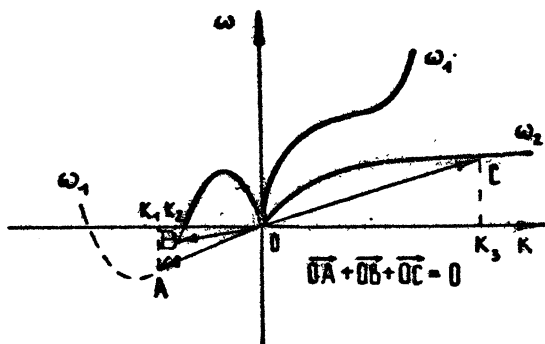
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = & \frac{1}{2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} da_1 da_2 da_3 \left\{ \delta(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) [V^{1,1,1}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_1(\kappa_1) a_1(\kappa_2) a_1(\kappa_3) + \right. \\ & + V^{2,2,2}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_2(\kappa_1) a_2(\kappa_2) a_2(\kappa_3) + 3V^{1,1,2}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_1(\kappa_1) a_1(\kappa_2) a_2(\kappa_3) + \\ & + 3V^{1,2,2}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_1(\kappa_1) a_2(\kappa_2) a_2(\kappa_3) + \text{к.с.}] + \delta(\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) [3V^{1,1,1}(-\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_1^*(\kappa_1) a_1(\kappa_2) a_1(\kappa_3) + \\ & + 3V^{2,2,2}(-\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_2^*(\kappa_1) a_2(\kappa_2) a_2(\kappa_3) + 6V^{1,1,2}(-\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_1^*(\kappa_1) a_1(\kappa_2) a_2(\kappa_3) + \\ & + 3V^{1,2,2}(-\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_1^*(\kappa_1) a_2(\kappa_2) a_2(\kappa_3) + 6V^{2,2,1}(-\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_2^*(\kappa_1) a_2(\kappa_2) a_1(\kappa_3) + \\ & \left. + 3V^{2,1,1}(-\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) a_2^*(\kappa_1) a_1(\kappa_2) a_1(\kappa_3) + \text{к.с.}] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V^{j,l,m}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = & \frac{1}{3} \left\{ 6V_0' \frac{b_l(\kappa_1) b_j(\kappa_2) b_m(\kappa_3)}{A_l(\kappa_1) A_j(\kappa_2) A_m(\kappa_3)} + \right. \\ & \times [V_0' - (\omega_1(\kappa_1) \text{Sgn} \kappa_1 + \omega_2(\kappa_2) \text{Sgn} \kappa_2 + \omega_m(\kappa_3) \text{Sgn} \kappa_3)] + \\ & + V_0'^2 - V_0' \left[\frac{f(\kappa_1)}{\Omega_l(\kappa_1)} + \frac{f(\kappa_2)}{\Omega_j(\kappa_2)} + \frac{f(\kappa_3)}{\Omega_m(\kappa_3)} \right] + \\ & + \left[\frac{f(\kappa_1)}{\Omega_l(\kappa_1)} \frac{f(\kappa_2)}{\Omega_j(\kappa_2)} + \frac{f(\kappa_1)}{\Omega_l(\kappa_1)} \frac{f(\kappa_3)}{\Omega_m(\kappa_3)} + \frac{f(\kappa_2)}{\Omega_j(\kappa_2)} \frac{f(\kappa_3)}{\Omega_m(\kappa_3)} \right] + \\ & \left. + \left[\Omega_l(\kappa_1) \Omega_j(\kappa_2) + \Omega_l(\kappa_1) \Omega_m(\kappa_3) + \Omega_j(\kappa_2) \Omega_m(\kappa_3) \right] \right\} = \\ & = I_l(\kappa_1) I_j(\kappa_2) I_m(\kappa_3), \end{aligned}$$

$$f(\kappa) = (q + \alpha \kappa^2) \kappa.$$

Анализ дисперсионного уравнения (6) показывает, что при выполнении неравенства $4\alpha q/V_0^4(h) < 1$ появляется диапазон волновых чисел с отрицательными значениями частоты



Дисперсионная кривая и резонансная тройка векторов. Пунктиром отмечена область волн отрицательной энергии

(область волн отрицательной энергии). При этом условии на рисунке схематически изображены дисперсионные кривые, отвечающие уравнению (6) и правильному выбору ветвей (рассматриваются те ветви, где $\mathcal{L}(\omega, k) > 0$). Простые геометрические построения (см., например, [3]) показывают, что для изображенных на рисунке векторов справедливо равенство $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$, или $\omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) + \omega_3(k_3) = 0$, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Это есть условие взрывного резонансного взаимодействия двух поверхностных и одной внутренней волны. Следовательно, третий член в кубическом гамильтониане, пропорциональной функции $V^{1,1,2}(k_1, k_2, k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3)$ и отвечающий межмодовому взаимодействию двух поверхностных и одной внутренней волн, не может быть исключен каноническим преобразованием и является существенным (см. [6]). Именно этот член является ответственным за взрывную неустойчивость. Остальные члены, пропорциональные функции $\delta(k_1 + k_2 + k_3)$, не являются существенными, т.е. устраняются каноническим преобразованием.

Остальные неустраняемые члены в \mathcal{H}_3 отвечают распаднему типу взаимодействий — как межмодовых, так и внутримодовых взаимодействий поверхностных волн, происходящих в гравитационно-капиллярном диапазоне. Заметим, что если сделать предельный переход $V'_0 \rightarrow 0$, который отфильтровывает внутреннюю моду, то из выражения для $V^{1,1,1}(k_1, k_2, k_3)$ получаем выражение для коэффициента кубического гамильтониана, приведенного в работе [7].

Аналогичным образом можно осуществить переход к нормальным переменным в n -слойной модели, учитывающей

скачки плотности, градиента и самой скорости ветра на границах слоев. Эта задача сводится к поиску ливейного преобразования, диагонализующего две эрмитовы матрицы порядка 2 n .

Изложенные здесь результаты могут быть основой для исследования кинетики воли в неравновесных средах.

Л и т е р а т у р а

1. Островский Л.А., Рыбак С.А., Цимринг Л.Ш. Волны отрицательной энергии в гидродинамике // УФН. 1986. Т.150, №3. С.417.
2. Воронович А.Г., Рыбак С.А. Взрывная неустойчивость стратифицированных течений // ДАН СССР. 1978. Т.239, №6. С.1457.
3. Craik A.D.D., Adam J.A. "Explosive" resonant wave interactions in a three-layer fluid flow // J. Fluid Mech. 1979. V.92. Pt. 1. P.15.
4. Воронович А.Г. Гамильтоновский формализм для внутренних волн в океане // Изв. АН СССР. ФАО. 1979. Т.15, №1. С.82.
5. Гончаров В.П. Нелинейные волны в послойно равнозавихренных течениях // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т.22, №5. С.468.
6. Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т.17, №4. С.431.
7. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Журн. прикл. мат. и техн. физики. 1968. №2. С.86.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С ВЕТРОМ

Л. Ш. Цимринг

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из центральных проблем в теории ветрового волнения является выяснение механизмов генерации волн ветром или, в более широком контексте, взаимодействия волн с ветром. Эта проблема имеет давнюю историю, ею в частности, занимались в середине прошлого века Кельвий и Гельмгольд. Предложенный ими механизм неустойчивости тангенциального разрыва скорости (см. [1]) применительно к задаче о генерации волн ветром давал существенно завышенное значение пороговой скорости ветра ($U \approx 6,5$ м/с). Прогресс в понимании физического механизма взаимодействия волн с ветром был достигнут сравнительно недавно, начиная с работы Дж. Майлса [2], опубликованной в 1957 г. Майлс показал, что в основе генерации волн ветром лежит резонансное взаимодействие волн с частицами воздуха, движущимися со скоростью, близкой к фазовой скорости волны в узком "слое синхронизма" на профиле ветра. Последующие эксперименты (см. [3]) подтвердили основные представления этой теории, хотя ряд вопросов все же оставался невыясненным. Одним из них является вопрос о роли нелинейных эффектов при взаимодействии поверхностных волн с ветром. Освещение этого вопроса и является предметом настоящей лекции. Однако прежде чем перейти к рассмотрению нелинейных эффектов, следует обсудить ставшую уже классической линейную неустойчивость Майлса [2].

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МАЙЛСА

Неустойчивость Майлса возникает при взаимодействии малых колебаний водной поверхности с индуцируемыми колебаниями воздушного потока, имеющего плавный профиль скорости. При анализе обычно используется так называемая "квазиламинарная модель" [4], в которой профиль ветра предполагается логарифмическим, как в обычно турбулентном пограничном слое, при этом самими турбулентными пульсациями пренебрегается. Дрейфовым течением в воде также пренебрегается. Система уравнений, описывающая малые колебания водной поверхности, обдуваемой воздушным потоком, имеет следующий вид.

Вода:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{zz} + \psi_{zz} = 0, \quad z < 0, \\ \rho_w (\psi_z + g\eta) = -p \\ \eta_t = \psi_z \end{aligned} \right\} z = 0 \quad (1)$$

Воздух:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - U'_{zz} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad z > 0, \\ \eta_t = -\psi_z, \\ \rho_z = \rho_a (U'_z \psi_z - \psi_{zt}) \end{aligned} \right\} z = 0. \quad (2)$$

Здесь ψ - потенциал волновых движений в воде, ψ - функция тока в воздухе, η - смещение водной поверхности, p - давление, ρ_a и ρ_w - плотность воздуха и воды, U

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z+z_0}{z_0} \quad (3)$$

- логарифмический профиль скорости ветра, u_* - динамическая скорость ветра, z_0 - высота шероховатости, $\kappa \approx 0,4$ - постоянная Кармана. Подстрочные индексы z, z, t (1), (2) означают дифференцирование по горизонтальной и вертикальной координатам и времени соответственно. Для амплитуды неоднородных плоских волн вида $\psi = \Psi(z) e^{i\tau} [i\kappa(z-ct)]$ из системы (2) следует известное уравнение Рэлея:

$$\Psi''_{zz} - \left(\frac{U'_{zz}}{U-c} + \kappa^2 \right) \Psi = 0. \quad (4)$$

Здесь k - волновое число, а c - фазовая скорость плоской волны. Как будет видно далее, полюс при $U=c$, содержащийся в уравнении Рэлея, и приводит к росту волновых возмущений водной поверхности.

Подставляя в уравнения (1) волновые возмущения в виде

$$\{\varphi, \rho, \eta\} \sim \{\psi_k, \rho_k, \eta_k\} \exp[ik(x-ct)].$$

и исключая амплитуду смещения водной поверхности η_k , нетрудно получить, что при $x=0$

$$\rho_w (gk - c^2 k^2) |\psi_k|^2 = ic k \rho_k \psi_k^* \quad (5)$$

Используя граничные условия из (2), нетрудно выразить правую часть уравнения (5) через амплитуду функции тока ψ_k . Взяв мнимую часть от этого соотношения, получим

$$\text{Im} \left\{ \rho_w (gk - c^2 k^2) |\psi_k|^2 \right\} = -\rho_a c^2 k \text{Im} \left\{ \psi \psi'_{kz} \right\} \Big|_{z=0} \quad (6)$$

Мнимая часть выражения, стоящего в левой части, отлична от нуля только при комплексном c , т.е. при наличии неустойчивости или затухания. Полагая $c = c_r + i\gamma/k$, $\gamma \ll \omega = c_r k$ (γ - инкремент неустойчивости, ω - частота), получим

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\rho_a}{\rho_w} c |\psi_k|^2 \text{Im} \left\{ \psi_k^* \psi'_{kz} \right\} \Big|_{z=0} \quad (7)$$

Величина, стоящая в правой части (7), пропорциональна так называемым "невязким напряжениям Рейнольдса", или волновому потоку горизонтальной компоненты импульса в вертикальном направлении

$$\tau = -\rho_a \langle u w \rangle, \quad (8)$$

где u и w - горизонтальная и вертикальная компоненты волновой скорости в воздухе. Используя уравнения Рэлея, нетрудно показать, что функция $\text{Im} \left\{ \psi_k^* \psi'_{kz} \right\}$ кусочно-постоянна и может испытывать скачок только в критическом слое z_c где $U(z_c) = c$. Действительно, домножив уравнение Рэлея на ψ_k^* и интегрируя его по x от z_c до ∞ , получим

$$\int_{z_c}^{\infty} \left[\psi_k^* \psi'_{kz} - \left(\frac{U'_{zz}}{U-c} + k^2 \right) |\psi_k|^2 \right] dz = 0,$$

или, используя условие отсутствия возмущений при $z \rightarrow \infty$,

$$\operatorname{Im} \left\{ \psi_k^* \psi'_{kz} \right\} \Big|_{z=z_1}^{\infty} = \operatorname{Im} \int_{z_1}^{\infty} \frac{U'_{zz}}{U-c} |\psi_k|^2 dz. \quad (9)$$

Отсюда следует, что при $z_1 > z_c$ $\operatorname{Im} \left\{ \psi_k^* \psi'_{kz} \right\} = 0$, а при $z_1 < z_c$ в частности, при $z_1 = 0$

$$\operatorname{Im} \left\{ \psi_k^* \psi'_{kz} \right\} \Big|_{z=0}^{\infty} = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{U'_{zz}}{U-c} |\psi_k|^2 dz. \quad (10)$$

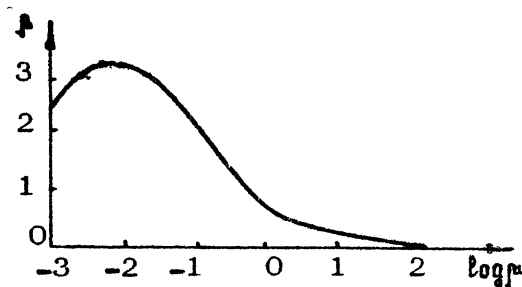
Мнимая часть интеграла в правой части (10) определяется полюсом в критическом слое z_c , где $U(z_c) = c$. Правило вычисления подобных интегралов, нередко возникающих в теории гидродинамической устойчивости, установил Линь [5] с помощью учета малой вязкой диссипации в окрестности критического слоя. Формально правило обхода Линя выражается следующим соотношением:

$$\frac{1}{U-c} = \mathcal{P} \frac{1}{U-c} - i\pi \delta(U-c), \quad (11)$$

где \mathcal{P} означает главное значение, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. То же правило обхода получается из асимптотики решения начальной задачи о включении синусоидальной волны при $t \rightarrow -\infty$ [6]. Вычисляя интеграл в формуле (10) с учетом правила обхода Линя (11), получим следующее выражение для инкремента неустойчивости Майлса [2]

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\rho_e}{\rho_w} \frac{c U'_{zz}}{U'_z} \frac{|\psi_k(z_c)|^2}{|\psi_k(0)|^2} \Big|_{z=z_c}. \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что инкремент неустойчивости Майлса пропорционален амплитуде функции тока и кривизне профиля скорости в критическом слое. Физический смысл полученного результата состоит в том, что волновое возмущение эффективно взаимодействует с ветром лишь в узкой (порядка амплитуды) окрестности критического слоя, где скорость жидких частиц близка к фазовой скорости волны (см. [7]). При этом "быстрые" частицы, обгоняющие волну, передают ей часть своей энергии, а "медленные", напротив, забирают часть энергии волны. Соотношение числа быстрых и медленных частиц в окрестности



Р и с. 1. Зависимость безразмерного инкремента Майлса от безразмерной высоты критического слоя [7].

критического слоя и определяется знаком и величиной второй производной профиля скорости ветра.

Безразмерная амплитуда функции тока в критическом слое является функцией безразмерного параметра $\mu = k z_c$. Для типичных условий генерации волн ветром $\mu \ll 1$. В этом приближении для решения уравнения Рэля можно применить метод сращиваемых асимптотических разложений [7] и найти, что

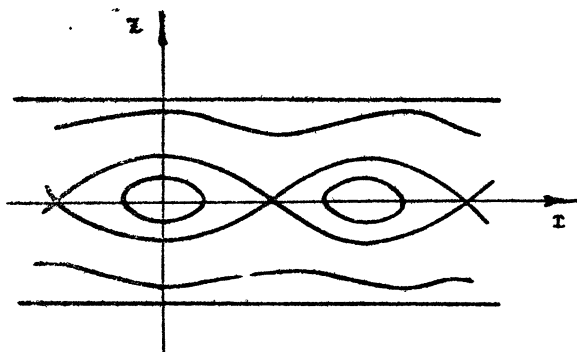
$$\frac{|\psi_k(z_c)|^2}{|\psi_k(0)|^2} = \mu^4 \ln^2 \mu. \quad (1)$$

При произвольном μ решение уравнения Рэля находится численно [8]. На рис. 1 показана зависимость безразмерного

инкремента $\beta = \frac{\delta \mathcal{E}^2 c_{p_w}}{v_z^2 k r_a} \gamma$ от μ . Инкремент достигает максимума при $\mu \sim 0,01$, а при больших μ спадает экспоненциально: $\beta \sim \exp(-2\mu)$.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАЙЛСА ДЛЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

Экспоненциальное нарастание поверхностных волн, обусловленное неустойчивостью Майлса, рано или поздно должно привести к "вступлению в игру" нелинейных механизмов, ограничивающих рост амплитуды волн. Среди таких механизмов можно отметить обрушивание гребней волн, трансформацию энергии по спектру волнения и др. В этом разделе рассмотрим специальный механизм ограничения неустойчивости Майлса, связанный с деформацией профиля ветра под действием волны в окрестности ее критического слоя [9].



Р и с. 2. Структура линий тока вблизи критического слоя - "кошачьи глаза"

Для поверхностных волн малой, но конечной амплитуды картина линий тока в окрестности критического слоя имеет характерный вид "кошачьих глаз" (рис.2). Вертикальный размер "кошачьих глаз" δ имеет порядок амплитуды смещения свободной поверхности, и предположим, что $\delta \ll z_c$. Нетрудно показать, что нелинейность раньше всего проявляется именно внутри кошачьих глаз, где велика амплитуда завихренности, индуцируемой волной. В работе [9] было сделано предположение, что вне критического слоя волновые движения линейны, а нелинейность можно учесть в граничном условии, связывающем волновые возмущения по обе стороны критического слоя. Эти граничные условия, фактически обобщающие правило обхода Линя на нелинейный случай, имеют вид [9]

$$[\psi]_{z_c} = 0; \quad [\psi']_{z_c} = - \int_{z_c - \delta}^{z_c + \delta} \zeta dz, \quad (14)$$

Где квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на критическом слое, а интеграл по ширине критического слоя берется от основной гармоники завихренности $\zeta = \Delta \psi$ волнового движения. Сама же завихренность в двумерной невязкой задаче, как известно, является интегралом движения и сохраняется на траекториях частиц. Нелинейная динамика волны в этом случае может быть исследована с помощью метода интегрирования по траекториям частиц. Траектории жидких частиц в окрестности "кошачьих глаз" описываются системой уравнений

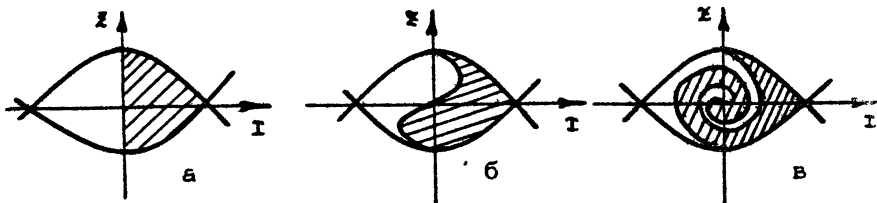
$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{x}; \quad \frac{d\tilde{z}}{dt} = \text{Re}(i\beta e^{-i\tilde{x}}), \quad (15)$$

где $b = \frac{\pi}{2} \frac{\rho_0}{\rho} |U_{zz}'| \omega^2 \eta^3$ - безразмерная амплитуда поверхностной волны, $\tilde{x} = k(x - ct)$, $\tilde{z} = U_c' k(x - z_c) / \eta$ - безразмерные координаты, $\tilde{t} = \eta t$ - безразмерное время.

Сама амплитуда волны b подчиняется следующему уравнению [9]:

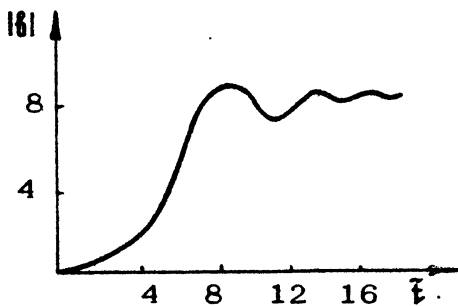
$$\frac{db}{d\tilde{t}} = -\frac{i}{\alpha^2} \operatorname{sign} U_{zz}' \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}_0 e^{i\tilde{x}} d\tilde{x}_0 d\tilde{z}_0, \quad (16)$$

где \tilde{x}_0 и \tilde{z}_0 - безразмерные координаты жидких частиц при $\tilde{t} = 0$. Горизонтальная координата частицы \tilde{x} , входящая в подынтегральное выражение (16), является функцией \tilde{x}_0 , \tilde{z}_0 и \tilde{t} . Ввиду неизохронности движения частиц по замкнутым траекториям внутри "кошачьих глаз" возникает так называемый "эффект размешивания" (рис.3), и при больших \tilde{t} координата \tilde{x} становится быстроосциллирующей функцией \tilde{x}_0 .



Р и с. 3. Перемешивание частиц внутри "кошачьих глаз":

а - $t = t_1$, б - $t = t_2$, в - $t = t_3$; $t_1 < t_2 < t_3$



Р и с. 4. Эволюция безразмерной амплитуды монохроматической внутренней волны при насыщении майсовской неустойчивости

и \tilde{z}_0 , что и приводит к уменьшению интеграла в уравнении (16) и к стабилизации роста амплитуды волны. Зависимость $\delta(\tilde{t})$, полученная с помощью численного интегрирования системы (15), (16) [9], показана на рис.4. Физически нелинейный механизм ограничения неустойчивости Майлса, рассмотренный в настоящем разделе, связан с перемешиванием и, следовательно, выравниванием числа "быстрых" и "медленных" частиц в окрестности критического слоя.

4. КВАЗИНЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С ВЕТРОМ [4]

Модельная задача, в рамках которой в предыдущем разделе был получен эффект стабилизации неустойчивости Майлса, содержит ряд существенных идеализаций. В частности, предполагалось, что имеется одна монохроматическая волна, тогда как в действительности ветер генерирует сразу широкий спектр волн. В настоящем разделе рассмотрим теорию, позволяющую описать нелинейную динамику широкого спектра поверхностных волн при взаимодействии с ветром.

Пусть на поверхности воды возбужден широкий спектр поверхностных волн, причем фазы всех спектральных компонент случайны. Наиболее удобной для описания волн на воде является в этом случае спектральная плотность волнового действия n_k , которая определяется соотношением

$$\langle \eta_k \eta_{kz}^* \rangle = 2n_k \delta_{kz}, \quad (17)$$

где $\delta_{kz} = 1$ при $k=z$ и $\delta_{kz} = 0$ во всех остальных случаях. Приближение квазилинейной теории [4], о которой пойдет речь ниже, состоит в следующем. Предполагается, что процесс генерации волн ветром линеен, т.е. описывается обычной майлсовской теорией, а нелинейность проявляется в деформации среднего профиля ветра под действием волн. В отличие от случая монохроматической поверхностной волны, которая перемешивала жидкие частицы в узком амплитудном слое в окрестности z_c (разд.3), в данном случае широкому спектру волн соответствует широкий интервал на профиле ветра, в котором скорость ветра совпадает со скоростью какой-либо из спектральных составляющих. Взаимодействие волн с ветром приводит к перемешиванию всего этого слоя и к соответствующему изменению майлсовского инкремента.

Уравнение для профиля скорости ветра можно получить непосредственным осреднением уравнения Эйлера для горизонтальной составляющей скорости воздуха, предполагая горизонтальную однородность поля ветра и волнового поля:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \langle u w \rangle = 0, \quad (18)$$

где U — средняя, а u и w — волновые скорости движения воздуха. Как уже отмечалось в разд.2, величина $\langle u w \rangle$ пропорциональна невязке напряжению Рейнольдса, связанному с наличием волновых движений в воздухе. В соответствии с предположением о случайности фаз спектральных составляющих величина $\langle u w \rangle$ представляет собой сумму вкладов от каждой спектральной составляющей:

$$\langle u w \rangle = \sum_k \langle u_k w_k \rangle = -\text{Im} \sum_k \kappa^3 \langle \psi_k^* \psi'_{kz} \rangle. \quad (19)$$

Правая часть равенства (19) фактически была вычислена нами в разд.2:

$$\text{Im}(\psi \psi'_{kz}) = -\pi \left[\frac{U'_{zz}}{U_z} \right]_{z_c} |\psi_k(z_c)|^2 H(z_c - z), \quad (20)$$

где $H(z)$ — функция Хэвисайда. Используя (20), нетрудно получить из уравнения (18)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_k \pi \kappa^3 \frac{U'_{zz}}{U_z} |\psi_k(z_c)|^2 \delta[z - z_c(\kappa)], \quad (21)$$

или в пределе сплошного спектра волны

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \pi \int \kappa^3 \frac{U'_{zz}}{U_z} |\psi_k(z_c)|^2 \delta(z - z_c) d\kappa. \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что (22) представляет собой нелинейное диффузионное уравнение вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D(U, n_\kappa) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (23)$$

где

$$D(U, n_\kappa) = \pi \int \frac{\omega^3}{\kappa} n_\kappa \frac{|\psi(z_c)|^2}{|\psi(0)|^2} \delta(U - \epsilon) d\kappa \quad (24)$$

имеет смысл коэффициента диффузии. Уравнение (23) вместе с уравнением для спектра волнения

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2\gamma_m [U] n_k, \quad (25)$$

(γ_m - майлсовский инкремент (12)) представляет собой замкнутую систему уравнений, описывающую совместную эволюцию волн и ветра. Очевидно, что на начальном этапе развития волнения, пока n_k мало, профиль ветра не деформируется, и волны нарастают экспоненциально. По мере развития коэффициент диффузии (24) увеличивается, а диффузия приводит к уменьшению кривизны профиля ветра U''_{zz} на высоте, где расположены критические слои возбужденных волн и, следовательно, к уменьшению майлсовского инкремента (12). При $t \rightarrow \infty$ система "ветер+волны" выходит на стационарный режим, в котором $U''_{zz} = 0$ и $\partial n_k / \partial t = 0$. Раньше всего стабилизируется рост коротких волн, обладающих наибольшим инкрементом, так что постепенно интервал майлсовской неустойчивости должен смещаться в длинноволновую область.

5. ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ВЕТРОМ

В настоящем разделе рассмотрим специфический нелинейный механизм взаимодействия волн с ветром, который, в отличие от неустойчивости Майлса (разд.2) и ее нелинейной стадии (разд.4), приводит не к росту спектральных компонент ветрового волнения, а к перераспределению волновой энергии между этими компонентами. Как будет видно из дальнейшего, этот механизм наряду с нелинейным четырехволновым взаимодействием [10] может играть существенную роль в формировании наблюдаемого спектра ветрового волнения. Речь идет об индуцированном рассеянии волн ветром [10,11], которое на качественном уровне обсуждалось еще в обзоре [12]. Физический механизм, лежащий в основе индуцированного рассеяния, близок к механизму майлсовской неустойчивости. Она фактически связана с наличием резонанса между волной и частотами в критическом слое, что выражается условием синхронизма

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{U}(z_c), \quad (26)$$

где ω - частота, а \vec{k} - волновой вектор поверхностной волны. Индуцированное рассеяние поверхностных волн ветром связано с выполнением условия синхронизма пары поверхност-

ных волн с частицами в соответствующем критическом слое ^{*}

$$\omega \pm \omega' = (\vec{k} \pm \vec{k}') \vec{U}(\vec{z}_c'), \quad (27)$$

причем высота \vec{z}_c' , на которой находится критический слой, сама определяется условием (27).

Запишем систему исходных уравнений задачи. Движение воды по-прежнему считаем потенциальным, однако в отличие от (1.) учитываем нелинейность в граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi + \varphi_{zz} &= 0, \\ g \eta + \left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \varphi_z^2 \right] &= -\frac{\rho}{\rho_w} \\ \eta_t + (\nabla \varphi \cdot \nabla) \eta &= \varphi_z \end{aligned} \right\} \vec{z} = \eta(\vec{r}, t). \quad (28)$$

Движение воздуха, так же как и в теории Майлса (см. разд.2), исследуется в рамках квазиламинарной модели, однако ввиду принципиально неоднородной постановки задачи вместо уравнения для функции тока типа (2) используются уравнения Эйлера и неразрывности:

$$\left. \begin{aligned} v_t + \left((\vec{U}(\vec{x}) + \vec{v}) \cdot \nabla \right) (\vec{U}(\vec{x}) + \vec{v}) + w \left(\vec{U}(\vec{x}) + \vec{v} \right)'_z &= -\frac{1}{\rho_a} \nabla p, \\ w_t + \left((\vec{U}(\vec{x}) + \vec{v}) \cdot \nabla \right) w + w w'_z &= -\frac{1}{\rho_a} p_z, \\ w_z + (\nabla \vec{v}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Здесь $\vec{r}(x, y)$ - горизонтальный радиус-вектор, $\vec{v} = (u, v)$ - вектор горизонтальной скорости, w - вертикальная скорость,

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В интересующем нас случае малых колебаний величину $[\varphi]_{z=\eta}$ можно разложить в ряд по степеням крутизны волн $k\eta \ll 1$. Сохраняя в граничных условиях (28) члены до второго порядка малости включительно и сводя получившуюся систему к одному уравнению для φ и ρ , получим

^{*} Строго говоря, индуцированному рассеянию соответствует только знак минус в соотношении (27). Знак плюс соответствует нелинейной "взрывной" неустойчивости, связанной с одной временной генерацией пары волн ветром (ср. [12]).

$$\rho_w (\psi_{tt} + q \psi_z) = -p_t - (\nabla \psi \cdot \nabla) (\rho + \rho_w \psi_t) - \frac{\rho_w}{2} [(\nabla \psi)^2 + \psi_z^2]_t - \\ + \psi_{zz} (\rho + \rho_w \psi_t) + \frac{1}{g} \psi_{ztt} (\rho - \rho_w \psi_t) + \frac{1}{g} \psi_{zt} (\rho + \rho_w \psi_t), \quad (30)$$

где потенциал скорости вычисляется на невозмущенной поверхности $z=0$, а давление берется на истинной границе раздела $z=\eta$. В уравнении (30) члены, пропорциональные ρ ($\vec{\tau}, \uparrow$), описывают взаимодействие (линейное и нелинейное) поверхностных волн с воздушным потоком. Для замыкания уравнения (30) следует воспользоваться уравнениями движения воздуха (29). Опуская промежуточные выкладки (см. [11]), запишем сразу кинетическое уравнение для спектральной плотности волнового действия n_k (см. (17)), которое получается из (29), (30) в приближении случайных фаз:

$$\frac{dn_k}{dt} = -\frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\tau}{2\omega k} n_k - \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{1}{4\pi\omega k} \left\{ \tau \left[\frac{\vec{k} \vec{k}' + \vec{k}' \vec{k}}{k'^2} \frac{\omega}{|\omega'|} (\vec{k} \vec{U}') - \right. \right. \\ \left. \left. - \left((\vec{k} \vec{U}'_0) - \frac{(\vec{k}' \vec{k}') (\vec{k}' \vec{U}'_0)}{k'^2} - \frac{(\vec{k}' \vec{k}') (\vec{k}' \vec{U}'_0)}{k'^2} \right) \frac{\omega'}{|\omega'|} \right] + \right. \quad (31) \\ \left. + \tau' \left[\frac{2(\vec{k} \vec{k}') (\vec{k} \vec{U}'_0)}{k'^2} + \frac{(\vec{k}' \vec{k}') (\vec{k}' \vec{U}'_0)}{k'^2} + \frac{(\vec{k}' \vec{k}') (\vec{k}' \vec{U}'_0)}{k'^2} - (\vec{k} \vec{U}'_0) \right] - \right. \\ \left. - \tau \left[\frac{(\vec{k}' \vec{U}'_0)}{k'^2} (\vec{k} \vec{k}' \frac{\omega'}{\omega} + \vec{k}' \vec{k}) + \frac{(\vec{k}' \vec{U}'_0)}{k'^2} (\vec{k} \vec{k}' \frac{\omega''}{\omega} + \vec{k}' \vec{k}') \right] \frac{\omega'}{\omega} \right\} \times \\ \times \left[\frac{g^2 k' (\vec{k} \vec{k}' + k k')}{(\omega'^2 - g k') \omega \omega'} + g \frac{\vec{k} \vec{k}'}{2\omega \omega'} + (k^{3/2} - k'^{3/2}) \frac{g^{1/2}}{2\omega'} \right] n_k n_{k'} dk' + \mathbb{I}_4.$$

Здесь $\vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}'$ и $\omega'' = \omega - \omega'$ — волновой вектор и частота биения пары волн \vec{k} и \vec{k}' ; $\tau, \tau', \tau'' = \pi (U_{1z}^2 / U_1^2) (g \omega^2 / 1 \eta^2)$ $z=z_c, z'_c, z''_c$ — нормированные скачки напряжений Рейнольдса волн \vec{k}, \vec{k}' и \vec{k}'' в соответствующих критических слоях $\omega = \vec{k} \vec{U}(z_c)$, $\omega' = \vec{k}' \vec{U}(z'_c)$, $\omega'' = \vec{k}'' \vec{U}(z''_c)$; $U'_0 = U'_0(0)$ — градиент скорости ветра при $z=0$. Первый член в правой части (31) соответствует линейной неустойчивости Майлса, приводящей к экспоненциальному росту волн, квадратичные по плотности волнового действия слагаемые отражают вклад трех различных процессов. Первое соответствует резонансу с ветром на высоте z'_c , т.е. описывает индуцированное рассеяние волн ветром, второе соответствует резонансу с критическим слоем волны $n_{k'}$ при $z=z'_c$,

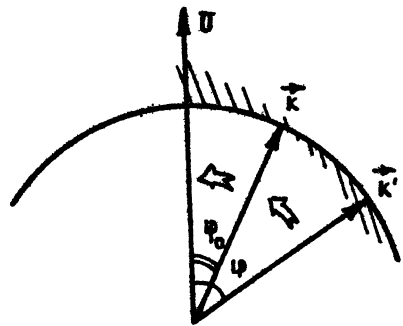
третье обусловлено резонансом при $\tau = \tau_c$, т.е. является нелинейной поправкой к инкременту Майлса. В правую часть кинетического уравнения (31) добавлен также интеграл столкновений I_4 , ответственный за четырехволновые и более слабые взаимодействия поверхностных волн между собой.

Поскольку с уменьшением k фазовая скорость поверхностных волн увеличивается как $k^{-1/2}$, одновременно экспоненциально растет высота критического слоя z_c , что приводит к быстрому спаду инкремента Майлса в область малых k (см. также [2,7]). Поэтому в энергонесущем диапазоне спектра развитого ветрового волнения вклад первого слагаемого в правой части (31) пренебрежимо мал по сравнению с I_4 [10]. По этой же причине можно пренебречь и третьим квадратичным слагаемым в правой части (31). В то же время процесс индуцированного рассеяния может оказаться существенным и в длинноволновом диапазоне, поскольку при $k-k' \ll |\vec{k} - \vec{k}'|$ высота слоя совпадения $z_c^* \ll z_c, z_c'$. В некоторых ситуациях может оказаться важен и нелинейный перенос неустойчивости с волны $n_{k'}$ в волну n_k , описываемый вторым квадратичным членом в (31). Рассмотрим характерный пример, в котором нелинейное взаимодействие пары волн с ветром оказывается существенным.

6. ФОРМИРОВАНИЕ УЗКОГО УГЛОВОГО СПЕКТРА ВОЛНЕНИЯ В ЭНЕРГОНЕСУЩЕМ ДИАПАЗОНЕ

Задача объяснения узости углового спектра ветрового волнения в последнее время привлекает к себе повышенный интерес [11,13]. Предложено несколько конкурирующих механизмов формирования углового спектра, один из них [11] связан с индуцированным рассеянием волн ветром. Дело в том, что эффективно взаимодействуют друг с другом через вевер волны, имеющие различное направление, но близкие модули волнового вектора. Нетрудно показать, что в таких парах волн энергия передается от волны, распространяющейся под большим углом к ветру (рис.5). Это и приводит к сужению спектра волнения. Количественно этот процесс удобно описать в так называемом "квазиодномерном" приближении (ср. [14]), считая спектр уже достаточно узким вблизи направления ветра и разлагая коэффициент нелинейного взаимодействия в интеграле столкновений (31) по степеням полярного угла φ , отсчи-

Р и с. 5. Индуцированное рассеяние волн ветром. Штриховкой выделен диапазон волн κ' , эффективно взаимодействующих с волной κ . Стрелками показано направление спектральной перекатки волнового действия



тываемого от направления ветра. При этом получается приближенное кинетическое уравнение, описывающее перераспределение волнового действия по углу на $\bar{\kappa}$ -плоскости [11]:

$$\frac{\partial n_{\kappa}(\varphi)}{\partial t} = \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{v^4 \kappa^8}{2\pi \alpha^4 g z_0} \int_0^{\infty} \frac{\beta(\mu)}{\mu} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi' - \varphi| (\varphi'^2 - \varphi^2) n_{\kappa}(\varphi) n_{\kappa}(\varphi') d\varphi'. \quad (32)$$

В диапазоне существования автомодельного спектра Захарова-Филоненко (см. [10]), отвечающего постоянному потоку действия в область длинных волн и связанного с наличием члена Γ_u в кинетическом уравнении (31), можно ввести нормированный угловой спектр действия $\tilde{n}_{\kappa}(\varphi)$:

$$n_{\kappa}(\varphi) = N_{\kappa} \tilde{n}_{\kappa}(\varphi), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{n}_{\kappa}(\varphi) d\varphi = 1, \quad (33)$$

где $N_{\kappa} = \alpha \rho^{1/2} g^{-1/2} \kappa^{23/6}$ - спектральная плотность волнового действия, проинтегрированная по углу φ ; $\alpha = 0,83$; $\rho = 1,4 \cdot 10^{-8} U_a^4 / g^2$ - поток действия по спектру; $U_a = 30 v_w$ - скорость ветра на стандартной высоте. Безразмерное кинетическое уравнение для $\tilde{n}_{\kappa}(\varphi)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial \tilde{n}_{\kappa}(\varphi)}{\partial \tilde{t}} = \tilde{n}_{\kappa}(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi' - \varphi| (\varphi'^2 - \varphi^2) \tilde{n}_{\kappa}(\varphi') d\varphi', \quad (34)$$

где

$$\tilde{t} = 0,13 \frac{\rho_a v_w^{16/3} \kappa^{19/6}}{\rho_w 2\pi \alpha^4 g^{19/6} z_0} \int_0^{\infty} \frac{\beta(\mu)}{\mu} d\mu \cdot t.$$

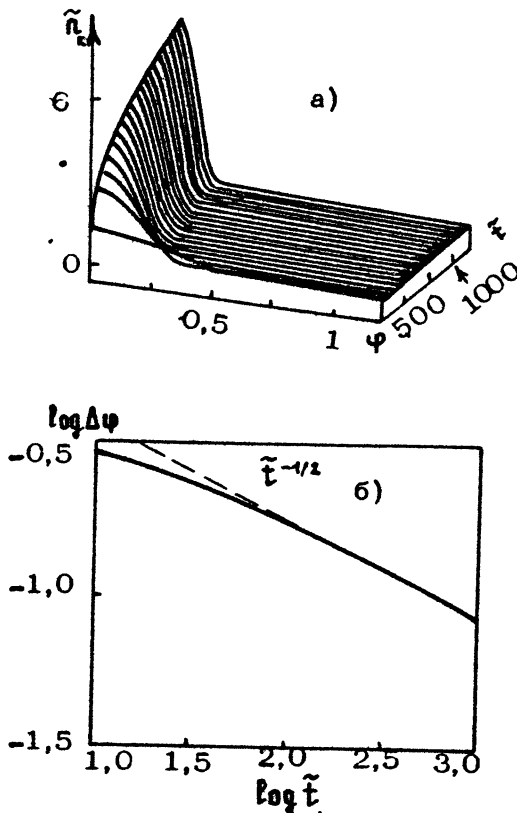
Нетрудно показать [11], что уравнение (34) действительно описывает сжатие или "коллапс" углового спектра волн. Из уравнения (34) легко также получить закон автомодельного сжатия углового спектра:

$$\tilde{n}_k(\varphi) = B \tilde{t}^{1/3} N(\varphi \tilde{t}^{1/3}), N(0) = 1. \quad (35)$$

Вид функции $N(\tau)$ и значение постоянной B могут быть найдены численно. На рис. 6,а показана эволюция во времени изначально гауссовского углового спектра

$$\tilde{n}_k(\varphi)|_{k=0} = (\pi \Delta\varphi_0)^{-1/2} \exp(-\varphi^2/\Delta\varphi_0^2). \quad (36)$$

для $\Delta\varphi_0 = 0,5$. На рис. 6,б показана зависимость угловой ширины спектра $\Delta\varphi$ от времени \tilde{t} , выходящая при больших \tilde{t} на автомодельную зависимость $\Delta\varphi = C t^{-1/3}$. На основании численных расчетов были найдены постоянные $B \approx 0,59$ и $C \approx 0,85$. В размерных переменных для $v_* = 0,3$ м/с, $k = 0,63$ рад/м зависимость $\Delta\varphi$ от t имеет вид $\Delta\varphi = 8,5 t^{-1/3}$ (время t в секундах).



Р и с. 6. Эволюция формы (а) и ширины (б) углового спектра ветровых волн в нормированных переменных \tilde{n}, \tilde{t} при $\Delta\varphi_0 = 0,5$

Заметим в заключение данного раздела, что учет четырехволновых процессов, описываемых членом I_4 в кинетическом уравнении (31), в "квазидомомерном" приближении приводит к экспоненциальному уширению углового спектра волнения [14]. Совместный учет индуцированного рассеяния и нелинейного четырехволнового взаимодействия ведет к установлению стационарного режима с угловой шириной спектра в энергонесущем диапазоне порядка 10^0 , что качественно согласуется с данными наблюдений.

Здесь рассмотрены лишь основные физические представления о взаимодействии поверхностных волн с воздушным потоком. За рамками статьи остались важные вопросы, связанные с наличием турбулентных пульсаций в воздухе, дрейфовых течений, наличия на поверхности воды пленок поверхностно-активных веществ и пр. Все эти факторы, несомненно, играют важную роль в процессе генерации волн ветром и к ним в настоящее время приковано внимание исследователей.

Л и т е р а т у р а

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, М.: Наука; 1986.
2. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows// J.Fluid Mech. 1957. V.3, pt.2. P.185.
3. Barnett T.P., Kenyon K.E. Recent advances in the study of wind waves// Repts.Progr.Phys. 1975. V.38, n.6. P.667.
4. Фабрикант А.Л. Квазилинейная теория генерации ветровых волн // Изв. АН СССР. ФАО. 1976. Т. 12, № 8. С.858.
5. Линь Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
6. Дикий Л.А. Устойчивость плоско-параллельных потоков идеальной жидкости // ДАН СССР. 1960. Т.135, № 5. С.1068.
7. Андронов А.А., Фабрикант А.Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979.
8. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows. Pt.2// J.Fluid Mech. 1959. V.6, pt.4. P.568.
9. Реутов В.П. Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн // Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана. 1980. Т.16, №12. С.1266.

10. Захаров В.Е., Заславский М.М. Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН СССР. ФАО. 1982. Т.18, №9 С. 970.
11. Цимринг Л.Ш. Формирование узкого углового спектра ветрового волнения при нелинейном взаимодействии волн с ветром // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Т.25, №4. С.411.
12. Романова Н.Н., Шпира В.И. Врывная генерация поверхностных волн ветром // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т.24, №7. С.723.
13. Заславский М.М. Об узконаправленном приближении кинетического уравнения для спектра ветровых волн // Изв. АН СССР. ФАО. 1989. Т.25, №4. С.402.
14. Захаров В.Е., Смилга А.В. О квазиодномерных спектрах слабой турбулентности // ЖЭТФ. 1981. Т.81, №4. С.1318.

МЕТОДЫ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

РАДИОЛОКАТОР С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ КАК СРЕДСТВО ДИСТАНЦИОННОГО ИЗУЧЕНИЯ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. Б. Каневский

В арсенале средств дистанционного наблюдения Мирового океана особое место принадлежит радиолокатору с синтезированной апертурой (РСА). Всезонный, с полосой обзора 50-100 км, космический РСА СВЧ-диапазона способен обеспечить глобальный сбор детальной информации о морской поверхности.

Высокое разрешение по азимутальной, т.е. поперечной по отношению к направлению зондирования, координате ψ (рис.1) достигается путем специальной когерентной обработки принятого сигнала ^{*)}, осуществляемой с помощью следующей операции:

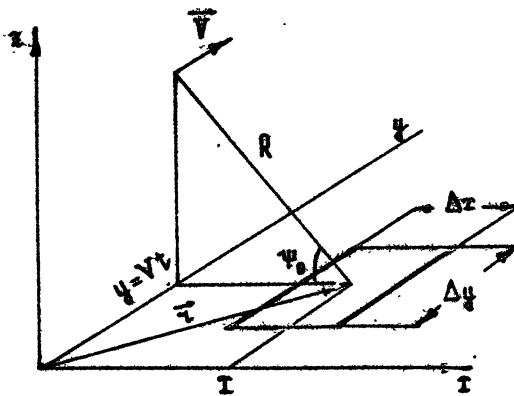
$$A_c(t) \sim \int_{t-t_c/2}^{t+t_c/2} dt' \varphi^{-1}(QV|t-t'|) A(t') \exp\left[-i \frac{\kappa}{R} V^2 (t'-t)^2\right], \quad (1)$$

где A и A_c - комплексные амплитуды принятого и синтезированного сигналов; Δt_c - временной интервал синтеза; V - скорость носителя РСА; $\kappa = 2\pi/\lambda$ - волновое число зондирующего излучения. $T, \varphi(|x'-x|, |y'-y|)$ - множитель, описывающий распределение амплитуды поля в пределах физического элемента разрешения. В дальнейшем для φ примем простую аппроксимацию:

^{*)} Необходимое разрешение вдоль x обеспечивается применением коротких или сжатых импульсов - способ, общий для РСА и радиолокатора с реальной апертурой.

$$\varphi(|\vec{r}' - \vec{r}|) = \begin{cases} 1 & (\vec{r}' - \vec{r} \in \Delta(\vec{r})), \\ 0 & (\vec{r}' - \vec{r} \notin \Delta(\vec{r})), \end{cases} \quad (2)$$

где $\Delta(\vec{r})$ - прямоугольная область с размерами Δx и Δy (см. рис.1).



Р и с. 1. Геометрия задачи

Поясним смысл операции (1), для чего временно отвле-чемся от непринципиальной в данный момент зависимости физических величин от координаты x и рассмотрим одну строку изображения вдоль y . Используя линейно-квадратичное представление фазы отраженного сигнала, запишем

$$A(t') = \exp(i2\pi R) \int_{\Delta y} \chi(y) \exp\left[i \frac{\kappa}{R} (y - Vt)^2\right] dy, \quad (3)$$

где $\chi(y)$ - коэффициент отражения подстилающей поверхности. Из сопоставления формул (3) и (1) ясно, что формула (1) есть не что иное, как операция согласованной фильтрации, направленная на "извлечение" из отраженного сигнала той его части, которая обусловлена отражением от точки $y = Vt$. Действительно, на протяжении времени Δt_c сигналы от этой точки складываются синфазно, тогда как фазы сигналов от остальных точек рассогласованы. Тем самым как бы воспроизводится ситуация, когда линейная антенна (правда, формируемая последовательно по ходу перемещения носителя РСА в пространстве в течение Δt_c) принимает плоскую волну от бесконечно удаленной точки $y = Vt$.

Размер и форму элемента разрешения РСА, учитывая линейный характер связи A_c и $\tau(\eta)$, можно найти через импульсную характеристику РСА как линейного фильтра, для чего в соотношении (3) положим $\tau(\eta) \sim \delta(\eta - \eta_0)$. В результате из формулы (1) с учетом (2) получим

$$I_c(t) = |A_c(t)|^2 \sim \text{sinc}^2 \left[\frac{\kappa V \Delta t_c}{R} (\eta_0 - Vt) \right], \quad \text{шир. п.} = \frac{\text{шир. п.}}{2}, \quad (4)$$

откуда видно, что размер пятна, создаваемого точечным отражателем в плоскости изображения, по половинной мощности $\Delta_c \approx \approx 2R/2V\Delta t_c$. Это и есть номинальное разрешение РСА, которое, как будет видно из дальнейшего, отличается от реального в силу особенностей работы РСА по морской поверхности. Если учесть, что интервал синтезирования не может превышать времени нахождения отражателя в пределах физической диаграммы направленности, создаваемой антенной размером D , т.е. $\Delta t_c \leq \lambda R/DV$, то оказывается, что независимо от дальности

$$\Delta_c \geq D/2$$

— результат впечатляющий, поскольку для радиолокатора с реальной апертурой $\Delta \eta = \lambda R/D$.

Однако как инструмент изучения морской поверхности РСА отнюдь не эквивалентен некогерентному радиолокатору с гипотетическим сверхвысоким разрешением. Вопрос о структуре РСА-изображения моря очень непрост и является предметом дискуссии уже более десяти лет (см. обзор [1]). Суть проблемы состоит в том, что реальная эволюция фазы сигнала, отраженного от фиксированного элемента поверхности, вследствие случайного движения этого элемента в поле волнения отличается от модели (3), закладываемой в процедуру согласованной фильтрации.

Оставаясь в рамках представления РСА как линейной системы, нетрудно понять, что эффекты, связанные с волнением, — это сдвиг и уширение элемента разрешения РСА. Положим $\tau(\eta) \sim \delta(\eta - \eta_0) \exp[i2\kappa \int_{t_0}^t v^{РАД} dt']$, где $v^{РАД}$ — радиальная по отношению к направлению зондирования составляющая скорости точечного отражателя. Если $v^{РАД} = \text{const}$, то

$$I_c(t) \sim \text{sinc}^2 \left[\frac{\kappa V \Delta t_c}{R} \left(\eta_0 - Vt - \frac{R}{V} v^{РАД} \right) \right], \quad (5)$$

т.е. изображение отражателя оказывается сдвинутым относительно η_0 на расстояние $Rv^{РАД}/V$ в ту или иную сторону

в зависимости от знака v^{RAA} . В случае $v^{RAA} \neq const$ фазовый множитель может быть разложен в спектр:

$$\exp[i2kv^{RAA}(t')t'] = \int d\omega_D a(\omega_D) \exp(i\omega_D t').$$

Поскольку одна доплеровская частота $\omega_D = 2kv^{RAA}$ дает сдвиг элемента разрешения на расстояние $\omega_D R / 2kV$, наличие спектра частот приводит к "расползанию" элемента, которое может быть оценено как $(R/V)(\partial v^{RAA} / \partial t) \Delta t_c$.

Однако указанными эффектами вопрос о влиянии волнения на РСА-изображение морской поверхности не исчерпывается. Для его более полного освещения изложим основные моменты теории [2,3].

В соответствии с теорией брэгговского рассеяния СВЧ-излучения на морской поверхности последнюю представим в виде суперпозиции крупномасштабного рельефа $\xi(\vec{r}, t)$ энергонесущего волнения и покрывающей этот рельеф ряби $\xi(\vec{r}_F(\vec{r}, t), t) = f_1(\vec{r}_F) \xi(\vec{r}_F, t)$; \vec{r}_F - радиус-вектор на поверхности ξ . Множитель f_1 описывает модуляцию амплитуды ряби вдоль профиля энергонесущей волны ("гидродинамическая модуляция"). Случайные поля ξ и ξ считаем статистически независимыми, однородными и стационарными.

Для комплексной амплитуды поля, отраженного от морской поверхности, с учетом (2) запишем

$$A(x, t) - J(x, t) = \int_{\Delta(\vec{r})} d\vec{r}' \frac{f(\vec{r}_F(\vec{r}', t))}{[1 - \sigma'^2(\vec{r}_F(\vec{r}', t))]^{1/2}} \xi(\vec{r}_F(\vec{r}', t), t) \times \\ \times \exp \left\{ 2ik \left[(t' - t) \cos \psi_0 - \xi(\vec{r}', t) \sin \psi_0 + \frac{1}{2R} (y' - Vt)^2 \right] \right\}. \quad (6)$$

Функция $f(\vec{r}_F) = f_1(\vec{r}_F) f_2[\sigma'(\vec{r}_F)]$ описывает модуляцию амплитуды отраженного поля, обусловленную наряду с гидродинамической модуляцией еще и наклонами σ' крупномасштабного рельефа $\xi(\vec{r}, t)$. Применим к уравнению (6) преобразование (1):

$$A_c(x, t) - J_c(x, t) = \int_{t - \Delta t_c / 2}^{t + \Delta t_c / 2} dt' \int_{\Delta(\vec{r})} d\vec{r}' \frac{f(\vec{r}_F, t')}{[1 - \sigma'^2(\vec{r}_F, t')]^{1/2}} \xi(\vec{r}_F(\vec{r}', t'), t') \times \\ \times \exp \left\{ 2ik \left[(t' - t) \cos \psi_0 - \xi(\vec{r}', t) \sin \psi_0 + \frac{1}{2R} [y'^2 - 2Vt'(y' - Vt) - V^2 t'^2] \right] \right\}. \quad (7)$$

Введем пропорциональную интенсивности синтезированного сигнала величину $I'_c = \int_c J_c^*$ (звездочка сверху – знак комплексного сопряжения) и составим корреляционную функцию ее флуктуаций:

$$B_c(\vec{p}) = \langle I'_c(\tau, t) I'_c(\tau + \rho_\tau, t + \tau) \rangle - \langle I'_c(\tau, t) \rangle^2,$$

где $\vec{p} = \vec{p}\{\rho_\tau, V\tau\}$, а угловые скобки означают статистическое усреднение.

Полагаем, что поле \mathcal{E} имеет гауссову статистику и корреляционную функцию $B_{\mathcal{E}}(\vec{r}'_x - \vec{r}''_x, |t' - t''|) = B_{\mathcal{E}}(\vec{r}' - \vec{r}'', |t' - t''|)$; последнее соотношение справедливо в силу малости наклонов поверхности \mathcal{E} . Четвертый корреляционный момент гауссова поля выразим через парные корреляции и после довольно длинного ряда преобразований найдем

$$B_c = B_c^{(1)} + B_c^{(2)} + B_c^{(3)},$$

$$B_c^{(1)} = \langle A_1(x, t) A_1(x + \rho_x, t + \tau) \rangle - \langle A_1(x, t) \rangle^2,$$

$$B_c^{(2)} = \langle A_2(x, t; \rho_x, \tau) A_2^*(x, t; \rho_x, \tau) \rangle;$$

$$B_c^{(3)} \approx (\lambda/\Delta x)^2 B_c^{(2)} \ll B_c^{(2)};$$

$$A_1 \sim \int dy F(x, y, t) \operatorname{sinc}^2 w(x, y, t), \quad (8)$$

$$A_2 \sim (1 - |\rho_x|/\Delta x) \exp \left[i \frac{2\kappa V^2 \tau}{R} (t + \tau/2) \right] \int_L dy F(x, y, t) \times \\ \times \operatorname{sinc} w(x, y, t) \operatorname{sinc} w(x, y, t + \tau) \quad (|\rho_x| \leq \Delta x),$$

$$A_2(|\rho_x| > \Delta x) = 0, \quad w(\vec{r}, t) = \kappa \Delta t_c \left[v_{\text{PAB}}^{\text{PAB}}(\vec{r}, t) - \frac{V}{R} (y' - Vt) \right].$$

Здесь $F(\vec{r}, t)$ – функция, описывающая модуляцию интенсивности отраженного сигнала, $v_{\text{PAB}}^{\text{PAB}}$ – радиальная составляющая орбитальной скорости, с которой в поле крупномасштабного волнения движется рассеивающая сигнал рябь. Область интегрирования по y ограничена сравнительно узким интервалом вблизи точки $y = Vt$ (см. ниже). Формулы (8) получены в предположении, что за время синтезирования крупномасштабный рельеф энергонесущего волнения меняется мало и, кроме того, размер элемента разрешения вдоль x мал по сравнению с длиной основной энергонесущей волны.

Несмотря на некоторую громоздкость формул (8), их физический смысл довольно прозрачен.

Рассмотрим $s(\tau, t) = \sin c^2 w$ как функцию y . Эта функция представляет собой случайную последовательность максимумов различной величины. Вершины главных максимумов ($\xi = 1$) расположены в точках y_n , являющихся корнями уравнения

$$s_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(y) = \frac{V}{R} (y - Vt). \quad (9)$$

Эти корни, число которых N , сосредоточены вблизи $y = Vt$ в конечной области размером $L \approx 2R\epsilon_v/V$, где ϵ_v — среднеквадратическое значение радиальной составляющей орбитальной скорости. Очевидно, при $N > 1$ интеграл от функции $s(y)$ суммирует сигналы от нескольких участков морской поверхности, изображения которых в соответствии с соотношением (5) случайным образом смещаются и накладываются одно на другое.

Пусть $v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(y)$ — гауссовский процесс с нулевым средним, дисперсией ϵ_v^2 и спектром $W_v(z)$. Тогда

$$\langle N \rangle = 2\sqrt{2\pi} \beta \operatorname{erf}[-(2\sqrt{2}\pi\beta)^{-2}] + \operatorname{erfc}[(2\sqrt{2}\pi\beta)^{-1}],$$

$$\beta = R\epsilon_v/V\Lambda, \quad \Lambda = 2\pi/\langle z^2 \rangle^{1/2}, \quad (10)$$

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{\epsilon_v^2} \int_0^{\infty} dz \cdot z^2 W_v(z), \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du.$$

Параметр β — отношение среднеквадратического смещения РСА-изображения элемента поверхности к характерной длине волны в спектре орбитальных скоростей. Этот параметр является ключевым в теории РСА-изображения морской поверхности.

Оценим характерную ширину максимума функции $\sin c^2 w(y)$:

$$\delta y = \frac{\pi}{\kappa \Delta t_c \langle \gamma_n \rangle}, \quad \gamma_n = \left| \frac{\partial}{\partial y} v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(y_n) - \frac{V}{R} \right|. \quad (11)$$

Для гауссовского процесса нетрудно показать, что $\delta y = 2R/2V\Delta t_c \langle N \rangle$. Следовательно, при $\beta \rightarrow 0$ (как видно из формул (10), при этом $\langle N \rangle \rightarrow 1$) $\delta y = \Delta_c$, т.е. характерная ширина максимума есть номинальная разрешающая способность РСА.

Полагая $\delta y < \Lambda$, представим $s(y)$ в виде суммы:

$$s(y) = \sum_{n=1}^N \text{sinc}^2 [\kappa \Delta t_c \tau_n (y - y_n)].$$

Тогда

$$\int_L F(x, y, t) \text{sinc}^2 \omega(y) dy = \frac{\pi}{\kappa \Delta t_c} \sum_{n=1}^N \frac{F(x, y_n, t)}{\tau_n}$$

и, следовательно,

$$A_1(x, t) \sim \sum_{n=1}^N \frac{F(x, y_n, t)}{\left| 1 - \frac{R}{V} \frac{\partial}{\partial y} v_{\text{эфф}}^{\text{ПА}}(y_n) \right|} \quad (12)$$

Заметим, что

$$A_2(x, t; \rho_x, 0) = A_1(x, t) (1 - |\rho_x| / \Delta \tau), \quad (|\rho_x| < \Delta \tau),$$

и, учитывая характер подынтегральной функции в A_2 , запишем

$$B_c^2(\vec{p}) = \begin{cases} \langle \Lambda_1^2 \rangle (1 - |\rho_x| / \Delta \tau)^2 B(V\tau) & (|\rho_x| < \Delta \tau), \\ 0 & (|\rho_x| > \Delta \tau). \end{cases} \quad (13)$$

где $B(V\tau)$ - функция, равная единице в нуле и существенно убывающая при $V\tau = \delta y$.

Очевидно, $B_c^{(2)}$ описывает пятнистую структуру с характерными размерами пятен порядка размеров номинального элемента разрешения ($\Delta \tau$ вдоль оси x и Δ_c вдоль оси y) - шум пятнистости или спекл-шум.

Рассмотрим теперь флуктуации, описываемые $B_c^{(1)}$ - ковариационной функцией величины A_1 , посредством которых формируется собственно изображение волнения. Обратившись к соотношению (12), замечаем, что флуктуации A_1 вызваны следующими причинами

1. Флуктуации модулирующей функции $F(\vec{r}, t)$. Если рассматривать F (или радиолокационное сечение рассеяния $\sigma_0 \sim F$) как линейную функцию возвышений поверхности $\xi(\vec{r}, t)$ [4], то соответствующий механизм формирования изображения является линейным. Этот механизм общий для РСА и некогерентного лоатора, причем для последнего он является определяющим. Поскольку для волн, распространяющихся в азимутальном направлении, флуктуации F малы, некогерентный лоатор эти волны практически "не видит".

2. Флуктуации производной $\frac{\partial}{\partial y} v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}$. Сама по себе эта величина линейна по ξ в силу линейности $v_{\text{орб}}$, а соответствующий механизм оказывается линейным лишь при малых β .

3. Флуктуации величины N . Из предыдущего ясно, что N есть число пересечений прямой $\varphi(y) = \frac{V}{R}(y - Vt)$ со случайным процессом $v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(y)$; преобразование $v_{\text{орб}}^{\text{РАА}} \rightarrow N$ нелинейно. Характер РСА-изображения существенным образом зависит от значения параметра β .

Рассмотрим вначале случай $\beta \rightarrow 0$. Выражение для A_1 преобразуется к виду

$$A_1(\bar{\tau}) \sim 1 + \frac{\bar{F}(\bar{\tau})}{\bar{F}} + \frac{R}{V} \frac{\partial}{\partial y} v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(\bar{\tau}) + \frac{R}{V} \frac{1}{\bar{F}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{F}(\bar{\tau}) v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(\bar{\tau}) \right] + \dots \quad (14)$$

Здесь $\bar{\tau} = \tau \{ \alpha, Vt \}$, \bar{F} и \bar{F} — постоянная и переменная части модулирующей функции ($F = \bar{F} + \bar{F}$), члены второго и более высоких порядков по β опущены. Как уже отмечалось, первые два флуктуационных члена в формуле (14) линейны по ξ . Это означает, что спектр соответствующих флуктуаций изображения выражается через спектр возвышений поверхности ξ простым образом — через модуляционную передаточную функцию [4]. Третий член — квадратичный по ξ , он дает "пьедестал" в спектре изображения (частично исследован в работе [2]). Однако дальнейший анализ (см. ниже) показал, что квазилинейный подход, основанный на выражении (14), даже без учета собственных шумов РСА справедлив лишь в весьма ограниченной области значений физических параметров.

Обратимся к случаю произвольного β , причём для простоты рассмотрим ситуацию, когда волны распространяются в азимутальном направлении, т.е. $\bar{F} = 0$:

$$A_1(Vt) \sim \sum_{\alpha=1}^{n(Vt)} \left| 1 - \frac{R}{V} \frac{\partial}{\partial y} v_{\text{орб}}^{\text{РАА}}(y_{\alpha}) \right|^{-1} \quad (15)$$

Как следует из соотношений (11), каждый член суммы пропорционален ширине n -го главного максимума функции $s(y)$. Дальнейший анализ проведем в предположении, что средняя ширина максимума мало отличается от δy , а флуктуации

ширины различных максимумов некоррелированы. Это предположение совместно с принятым выше условием $\bar{F} = 0$ дает возможность исследовать третий (нелинейный) механизм формирования изображения независимо от первых двух. Для последующего сравнения линейного и нелинейного механизмов визуализации волнения через орбитальные скорости выпишем вместе соответствующие выражения для $A_1(y=Vt)$:

$$A_1(Vt) \sim \begin{cases} 1 + \frac{R}{V} \frac{\partial}{\partial y} v_{\text{орб}}^{\text{ма}}(Vt) & (\text{лин.}), \\ \langle N \rangle^{-1} N(Vt) & (\text{нелин.}). \end{cases} \quad (16)$$

Соответственно для пространственного спектра $W_{\text{PEA}}^{(1)}(z)$ части PСA-изображения, определяемой корреляционной функцией $B_c^{(1)}$, получим

$$W_{\text{PEA}}^{(1)}(z) \sim \begin{cases} \left(\frac{R}{V}\right)^2 g z^3 \sin^2 \psi_0 W_{\Sigma}(z) & (\text{лин.}), \\ \langle N \rangle^{-2} W_N(z) & (\text{нелин.}), \end{cases} \quad (17)$$

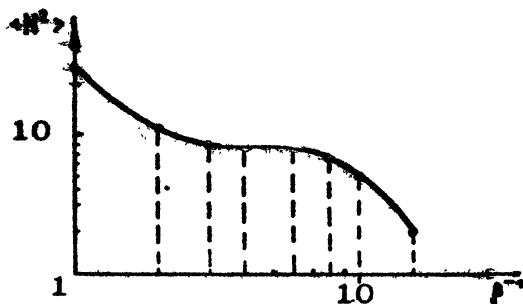
где $W_{\Sigma}(z)$ - спектр волнения, $W_N(z)$ - спектр флуктуаций числа пересечений, $g = 9,8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$. Стоящий перед W_{Σ} множитель и есть упоминавшаяся выше модуляционная передаточная функция для случая азимутально направленного волнения. Если направление бега волн отличается от азимутального, то зависимость этой функции от z промежуточная между z^2 и z^3 [4].

Из формулы (16) видно, что дисперсия ϵ_1^2 флуктуаций, формирующих изображение волнения, в первом случае имеет порядок β^2 , а во втором $\epsilon_1^2 = \langle N \rangle^{-2} \epsilon_N^2$, где ϵ_N^2 - дисперсия числа пересечений; для сравнения двух механизмов следует сравнить β^2 и ϵ_N^2 .

Корреляционная функция $B_N(V\tau) = \langle N(Vt)N(V(t+\tau)) \rangle$ в соответствии с методикой [5] находится следующим образом:

$$B_N(V\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} dy_1 dy_2 \iint_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 |\eta_1| |\eta_2| \times \\ \times \rho \left\{ \frac{V}{R} (y_1 - Vt), \frac{V}{R} (y_2 - V(t+\tau)); \eta_1 + \frac{V}{R}, \eta_2 + \frac{V}{R} \right\}, \quad (18)$$

где $\rho \{v(y_1), v(y_2); v'(y_1), v'(y_2)\}$ - совместная плотность вероятности процесса $v(y)$ и его производной в двух точках. Вычис-



Р и с. 2. Средний квадрат числа пересечений как функция β^{-1}

ления по формуле (18) были проведены [3] для гауссовской плотности $\rho(\cdot)$ и простой модели корреляционной функции орбитальных скоростей

$$W_V(\rho') = \epsilon_V^2 e^{-\alpha^2 \rho'^2} \cos(\alpha, \rho'), \quad \rho' = \psi_1 - \psi_2, \quad (19)$$

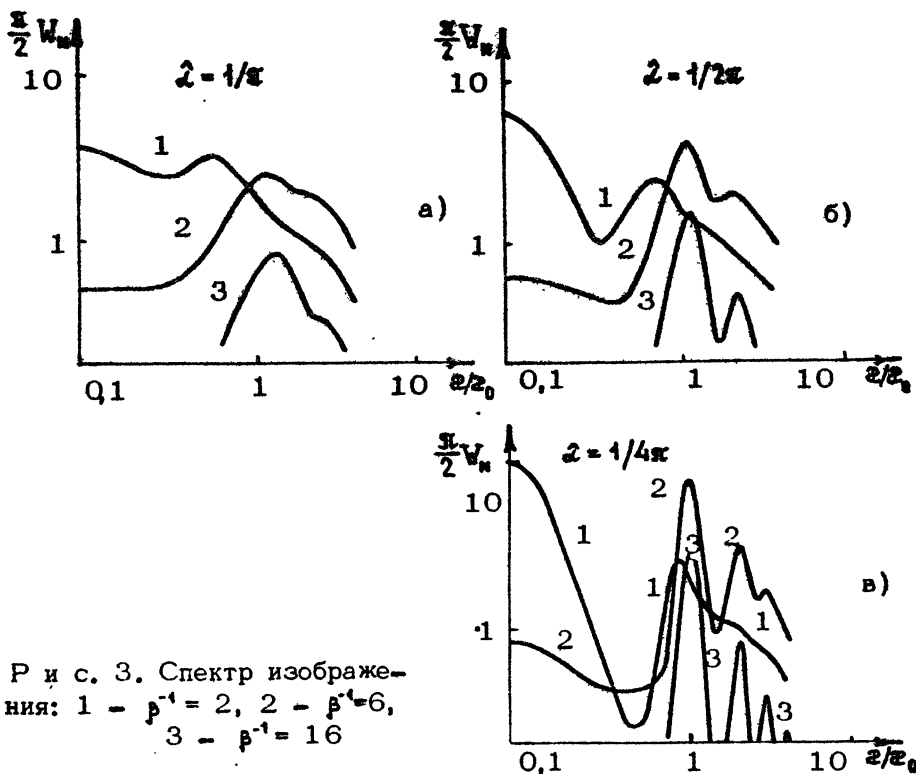
позволяющей наглядным образом продемонстрировать влияние интенсивности волнения и ширины его спектра на характер РСА-изображения морской поверхности.

Заметим, что в соответствии с моделью (19) введенная выше характерная длина волны Λ (см. (10)) определяется выражением

$$\Lambda = 2\pi/\alpha_0 [1 + 2(\alpha/\alpha_0)^2]^{1/2}.$$

Для расчетов были взяты следующие значения безразмерных параметров $\hat{\alpha} = \alpha/\alpha_0$ и β : $\hat{\alpha} = 1/\pi, 1/2\pi, 1/4\pi$; $\beta^{-1} = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 16$. Зависимость $\langle N^2 \rangle$ от β^{-1} представлена на рис.2 одной кривой, поскольку, как оказалось, в выбранном интервале значений $\hat{\alpha}$ величина $\langle N^2 \rangle$ слабо зависит от ширины спектра волнения. Спектры W_N выборочно представлены на рис. 3.

Прежде всего обращает на себя внимание тот факт, что $\epsilon_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ при уменьшении β сохраняет порядок единицы вплоть до $\beta = 0,06$, после чего быстро убывает (как об этом можно судить, экстраполируя кривую рис.2 в сторону малых β). Следовательно, при $\beta = 0,06$ нелинейные флуктуации более чем на два порядка превышают по мощности линейные. Подставив в неравенство $\beta > 0,06$ значения $R/V = 120$ с Seasat-SAR, США) и $R/V = 35$ с (SIR-B, США), убеж-



даемса в том, что в обоих случаях космический РСА "видит" азимутально направленные волны "нелинейным образом". Если в выражении для β заменить Λ на $\Lambda/\sin\psi$, где ψ - угол между осью Γ и направлением бега волн, то оказывается, что вклады линейного и нелинейного механизмов визуализации волнения через орбитальные скорости сравнимы в пределах узких (порядка нескольких градусов) секторов вблизи $\psi=0; \pi$. Но в случае почти радиально направленных волн над обоими этими механизмами доминирует механизм визуализации волнения через флуктуации функции $F(\vec{r})$, т.е. через флуктуации сечения рассеяния.

Как видно из рис.3, нелинейное преобразование (18) существенным образом изменяет исходный спектр орбитальных скоростей. Характер спектра изображения определяется конкурирующим влиянием двух факторов. Первый фактор - число пересечений N , определяемое параметром β . Согласно (10) уменьшение β приводит к уменьшению числа пересечений вплоть до $N=1$, т.е. в конечном счете к исчезновению модуляции сигнала. Вторым фактором - отношение масштаба корреляции

$L_{кор}$ процесса $\tau_{pp}(y)$ к размеру области $L \approx 25 R/V$, в которой сосредоточены точки пересечения: $u = (L_{кор}/L) \cdot (2\beta)^{-1}$. Очевидно, при $u \gg 1$, когда все точки пересечения лежат внутри коррелированного участка процесса $\tau_{pp}(y)$, масштаб корреляции процесса $N(Vt)$ близок к $L_{кор}$ и, кроме того, последний также является квазипериодическим. Это означает, что, во-первых, ширина максимума в спектре изображения близка к ширине спектра орбитальных скоростей и, во-вторых, в спектре изображения присутствуют гармоники основной частоты; на рис. 3,б,в при $\beta^{-1} \gg 6$ гармоники выражены достаточно отчетливо. При $u \lesssim 1$ процесс $N(Vt)$ быстро раскоррелируется, спектр W_N "белеет", его максимум становится менее выраженным и смещается в низкочастотную область (это смещение ранее отмечалось как в эксперименте [6,7], так и в теоретической работе [8]). Конкуренция указанных факторов приводит к тому, что величина спектрального максимума при узкополосном волнении с уменьшением β стремится к нулю немонотонно.

Все сказанное свидетельствует о том, что восстановление детальной структуры волнения по его РСА-изображению - непростая задача, еще ждущая своего полного решения. Используемая в работе [9] линейная в своей основе процедура восстановления спектра волнения с помощью модуляционной передаточной функции корректна лишь постольку, поскольку направление распространения волн близко к радиальному.

Что касается образований на морской поверхности с масштабами, превышающими $L \approx 2R_{св}/V \approx 100 \div 200$ м, то космический РСА прекрасно "видит" внутренние волны, нефтяные пленки, корабли и их кильватерные следы, а также мелкомасштабные вариации интенсивности волнения (см., например, обзор [10]).

Л и т е р а т у р а

1. Hasselmann K., Raney R.K., Plant W.J. et al. Theory of synthetic aperture radar ocean imaging: A Marsden view // Journ. Geophys. Res. 1985. V.90, NC3. P.4659.
2. Каневский М.Б. К теории РСА-изображения морской поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31, №6. С.645.
3. Каневский М.Б., Нериков Л.В. К теории РСА-изображения морских волн, распространяющихся в азимутальном направлении // Исслед. Земли из космоса. 1990. №4. С.12.

4. Alpers W.R., Ross D.B., Rufenach C.L. On the detectability of ocean surface waves by real and synthetic aperture radar // Journ. Geophys. Res. 1981. V.86, NC7. P.6481.
5. Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.
6. Beal R.C., Tilley D.G., Monaldo F.M. Large-and small-scale spatial evolution of digitally processed ocean wave spectra from SEASAT synthetic aperture radar // Journ. Geophys. Res. 1983, V.88, NC3. P.1761.
7. Vesecky J.F., Assal H.M., Stewart R.H., e.a. Seasat-SAR observations of surface waves. Large scale surface features and ships during the JASIN experiment // Geosci. and Remote Sens. Symp. (IGARSS'82). Munich. June 1-4, 1982, Dig. V.1. N.-Y. P.982. WP3 1/1-WP3 1/5.
8. Иванов А.В., Мошков А.В. О преобразовании спектра морского волнения в спектр изображения радиолокаторами с синтезированной апертурой // Исслед. Земли из космоса. 1984. № 6. С.91.
9. Monaldo F.M., Lyzenga D.R. On the estimation of wave slope-and height-variance spectra from SAR imagery. // IEEE Trans. on Geosci. and Remote Sens. 1986. V.GE-24, N4. p.543.
10. Vesecky J.F., Stewart R.H. The observation of ocean surface phenomena using imagery from the SEASAT synthetic aperture radar // Journ. Geophys. Res. 1982. V.87, NC5. P.3397.

КОГЕРЕНТНОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ГИДРОАКУСТИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

К. К. Ляпин

Дистанционные методы исследования океана, использующие электромагнитные волны, рассеянные поверхностью воды, находят все большее применение, так как они обладают большой производительностью с точки зрения получения информации о больших акваториях океана [1]. Для построения методов необходимо знание зависимости пространственно-временных характеристик сигнала, рассеянного поверхностью, от пространственно-временных характеристик самой поверхности и сил, возмущающих эту поверхность.

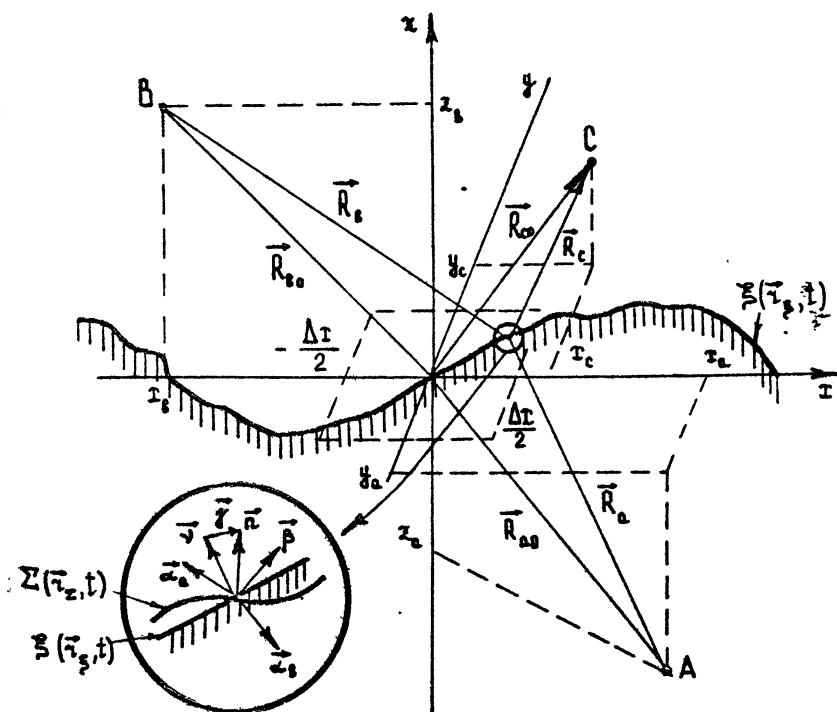
В нашей и зарубежной литературе вопросам рассеяния электромагнитных волн взволнованной поверхностью посвящено большое количество работ. Вопросам рассеяния электромагнитных волн на гидроакустических возмущениях взволнованной поверхности уделялось недостаточно внимания. Первая публикация [2], посвященная этому вопросу, показала, что в отраженном электромагнитном сигнале от поверхности жидкости, колеблющейся под действием гидроакустических волн, возможно выделить составляющие, несущие информацию о гидроакустическом поле. Эксперименты на установках, описанных в вышеуказанной работе [2], позволили сформулировать проблемы, возникающие при считывании информации с помощью электромагнитного поля о гидроакустических полях. К этим проблемам относятся:

- проблема уменьшения вредного влияния волнения поверхности жидкости на эффективность выделения полезного сигнала;
- проблема углов облучения поверхности, отличных от нормали; смысл этой проблемы заключается в следующем: поло-

жительный эффект в этих экспериментах достигался только при облучении электромагнитными и акустическими волнами поверхности жидкости по нормали; при отклонении углов облучения от нормали полезный сигнал резко уменьшался.

Работы, выполненные нами [3,4,6], показали, что одно из направлений решения вышеуказанных проблем заключается в использовании явления когерентного комбинационного отражения (ККО) электромагнитных волн гидроакустическими возмущениями поверхности жидкости. В работах [3,4] изложены вопросы теории и экспериментального исследования эффекта ККО. В этих работах построена приближенная теория, которая не позволяла описать резонансные свойства и пространственную структуру эффекта когерентного комбинационного отражения.

В настоящей работе приводится решение граничной задачи для нахождения электромагнитного поля, рассеянного взволнованной поверхностью воды, возмущенной гидроакустическим полем. Решение анализируется для зоны Френеля.



Р и с. 1

Пусть поверхность моря $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ (рис.1) описывается уравнением

$$\vec{r}_z = \vec{r}_z + \vec{v} [\xi_p(\vec{r}_z, t) + \xi_a(\vec{r}_z, t)], \quad (1)$$

где: \vec{v} - орт нормали к поверхности $\xi_a(\vec{r}_z, t)$, определяемой радиус-вектором \vec{r}_z и описывающей крупномасштабные волны; $\xi_p(\vec{r}_z, t), \xi_a(\vec{r}_z, t)$ - функции, описывающие отклонения поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ по нормали от поверхности крупных волн $\xi(\vec{r}_z, t)$, функция $\xi_p(\vec{r}_z, t)$ определяет поверхность ряби на крупных волнах, функция $\xi_a(\vec{r}_z, t)$ - поверхность микромасштабных образований на поверхности крупных волн за счет воздействия гидроакустических колебаний жидкости. В общем случае $\xi(\vec{r}_z, t)$ и $\xi_p(\vec{r}_z, t)$ - случайные функции координат и времени. Положим, что эти функции описывают стационарные гауссовы процессы, параметры которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\delta_x}{\lambda} \gg 1, \quad \frac{\delta_x}{\lambda_a} \gg 1, \quad \frac{l_{x\pm y}}{\lambda} \gg 1, \quad \frac{l_{x\pm y}}{\lambda_a} \gg 1, \quad (\nabla \xi) \sim \frac{\delta_x}{l_x} \ll 1$$

(δ^2 - дисперсии, l - радиусы корреляции по соответствующим осям), т.е. высоты и длины крупных морских волн, значительно большие длин волн электромагнитного (λ) и акустического (λ_a) излучения, а углы наклона крупных морских волн малы. Положим также $l_p/l_x \ll 1$, т.е. радиусы корреляции ряби значительно меньше радиусов корреляции крупных волн.

Функцию $\xi_a(\vec{r}_z, t)$, описывающую возмущение поверхности $\xi(\vec{r}_z, t)$ под действием монохроматического гидроакустического поля (Ω - круговая частота гидроакустических колебаний), изучаемого источником, находящимся в точке А (см. рис. 1), можно в первом приближении представить в виде

$$\xi_a(\vec{r}_z, t) = \frac{a_a(\vec{v}, \vec{\alpha}_a)}{R_a} \cos(\Omega t - k_a R_a).$$

Пусть источник электромагнитных волн, находящийся в точке В, создает падающую волну, вектор напряженности электрического поля которой в точке, определяемой радиусом-вектором \vec{R}_g , можно представить в следующем виде:

$$\vec{E}_n(\vec{R}_g) = \frac{q}{R_g} E_n f(\vec{\alpha}_g) \exp[-i(\omega t - k R_g + \psi)], \quad (2)$$

где \vec{q} - орт, определяющий поляризацию излучения электромагнитных волн частоты ω ; $E_n = \sqrt{60 P D}$; P - мощность, поступающая в антенну; D - максимальное значение коэффициента усиления антенны; $f(\vec{\alpha}_g)$ - нормированная диаграмма направ-

ленности антенны, которая определяет величину облучаемой площадки на поверхности моря с размерами Δx и Δy (см. рис. 1).

Для решения граничной задачи в нашем случае представляется возможным использовать приближенные граничные условия Леонтовича [7]

$$\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}_z) = Z_2 \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}_z)), \quad (3)$$

где Z_2 - волновое сопротивление морской среды.

Следуя методу малых возмущений для криволинейной поверхности [8, 9], переведем граничные условия (3) на поверхность "гладких крупных" волн $\Sigma(\vec{r}_z, t)$. Для этого разложим векторы \vec{E}_z и \vec{H}_z в ряд по малому параметру ξ , ограничиваясь в разложении двумя первыми членами. Представляя поле в воздушной среде в виде сумм основного поля \vec{E}_z^0 и \vec{H}_z^0 , удовлетворяющего граничному условию Леонтовича на поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ и поля возмущения \vec{E}_z^1 , получим выражение для поля возмущения через основное поле

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}_z^1 = & -\vec{\nabla} \times \vec{E}_z^0 - \xi \vec{\nabla} \times [(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_z^0) \vec{e}_z] + Z_2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}_z^0) + \\ & + Z_2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}_z^0) + Z_2 \xi \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_z^0) \vec{e}_z]. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, граничные условия (3) для электромагнитного поля на сложной поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ мы свели к более простым граничным условиям на гладкой поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$, а влияния мелкоструктурных образований, определяемых функциями $\xi_p(\vec{r}_z, t)$ и $\xi_a(\vec{r}_z, t)$, будем учитывать через дополнительные токи на поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ (токи возмущения \vec{j}_M^1), которые можно определить через основное поле по формуле (4).

Основное поле на расстоянии ξ от поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ можно определить в приближении Кирхгофа

$$\vec{E}^0(\xi) = E_n(0) (\vec{q} \operatorname{erf} [ik(\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\nu})\xi] + \vec{q}_0 \operatorname{erf} [-ik(\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\nu})\xi]), \quad (5)$$

где
$$\vec{q}_0 = N_n(\vec{q} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu} - N_n(\vec{q} \cdot \vec{p}) \vec{p} + N_1(\vec{q} \cdot \vec{\tau}) \vec{\tau}, \quad (6)$$

N_n, N_1 - коэффициент Френеля, $\vec{\nu}, \vec{p}, \vec{\tau}$ - орты локальной системы координат на поверхности $\Sigma(\vec{r}_z, t)$:

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{\nu} \times \vec{\alpha}_0}{\sqrt{1 - (\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{\nu})^2}}, \quad \vec{p} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}.$$

С учетом (5) и (6) выражение (4) для токов возмущения будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_n(0)} \vec{T}_n^0 = & -\vec{\gamma} \times (\vec{q} + \vec{q}_0) + |Z_2| \operatorname{etr}(i\psi_2) \left\{ \vec{\gamma} \times [\vec{\nu} \times (\vec{\alpha}_0 \times \vec{q})] + \right. \\ & \left. + \vec{\gamma} \times [\vec{\nu} \times (\vec{\alpha}_0 \times \vec{q}_0)] - 2(\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \vec{\gamma} \times [\vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times \vec{q}_0)] \right\} - \\ & - i\kappa \mathfrak{E}(\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \left\{ \vec{\nu} \times (\vec{q} - \vec{q}_0) - |Z_2| \operatorname{etr}(i\psi_2) [\vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times (\vec{\alpha}_0 \times \vec{q})) - \right. \\ & \left. - \vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times (\vec{\alpha}_0 \times \vec{q}_0))] + 2(\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times \vec{q}_0)) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя общий интеграл уравнений Максвелла в виде формулы Стрэттона - Чу [10] для определения напряженности электрического поля в точке $[\vec{R}_c]$, рассеянного поверхностью $\Sigma(\vec{r}_z, t)$ и опуская промежуточные выкладки, получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}_c) = & -\frac{i\kappa}{4\pi} E_n \operatorname{etr}[-i(\omega t + \psi)] \int_{\Sigma_0} f(\vec{\alpha}_0) \left\{ \vec{\nu} \times (\vec{\alpha}_0 \times \vec{q}_0) + \right. \\ & \left. + \vec{\beta} \times (\vec{\nu} \times \vec{q}_0) - 2(\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \vec{\nu} \times (\vec{\nu} \times \vec{q}_0) - \vec{\beta} \times [\vec{\gamma} \times (\vec{q} + \vec{q}_0) - \right. \\ & \left. - |Z_2| \operatorname{etr}(i\psi_2) \vec{\nu} \times [\vec{\alpha}_0 \times (\vec{q} + \vec{q}_0) - 2(\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \vec{\nu} \times \vec{q}_0] \right\} - \\ & - i\kappa \mathfrak{E}(\vec{r}_z, t) (\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \vec{\beta} \times [\vec{\nu} \times (\vec{q} - \vec{q}_0) - |Z_2| \operatorname{etr}(i\psi_2) \vec{\nu} \times [\vec{\alpha}_0 \times (\vec{q} - \vec{q}_0) + \\ & \left. + 2(\vec{\alpha}_0 \vec{\nu}) \vec{\nu} \times \vec{q}_0] \right\} \frac{\operatorname{etr}[i\kappa(R_c + R_B)]}{R_B R_c} \eta(\vec{R}_B, \vec{\alpha}_0) \eta(\vec{R}_c, \vec{\beta}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $|Z_2|$ и ψ_2 - модуль и аргумент комплексного волнового сопротивления морской воды, Σ_0 - облучаемая поверхность.

Первые три слагаемых в фигурных скобках подынтегрального выражения (8) не зависят в первом приближении от мелкоструктурных образований на поверхности моря и определяют поле, рассеянное крупными гладкими волнами. Влияние параметров морской воды на рассеянное поле учитывается через френелевские коэффициенты отражения, входящие в вектор \vec{q}_0 . Остальные слагаемые в фигурных скобках определяют поле, рассеянное мелкоструктурными образованиями на поверхности крупных волн.

Используем интегральное выражение (8) и получим решения для частных случаев:

- поле, рассеянное акустическими возмущениями плоской поверхности жидкости;
- поле, рассеянное акустическими возмущениями крупных гладких волн.

С помощью метода стационарной фазы для взятия интеграла в выражении (8) для случая плоской поверхности моря, вибрирующей под действием акустического поля, получены выражения для верхней и нижней комбинационных составляющих (ВКС и НКС) рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}_s = & \frac{1}{2} a_0 \cdot k E_M \exp \left\{ -i [(\omega - \Omega)t + \psi - \kappa(R_{bs} + R_{cs}) - \kappa_a R_{as}] \right\} \times \\ & \times \frac{\frac{1}{2} \vec{N}(x_s, 0) - L \vec{M}(x_s, 0)}{R_{as} R_{cs} \sqrt{[]_s^8 []_y^8}} \left\{ F \left[\sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2}} \left(\frac{\Delta x}{2} - x_s \right) \right] + \right. \\ & \left. + F \left[\sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2}} \left(\frac{\Delta x}{2} + x_s \right) \right] \right\} F \left(\sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2}} \frac{\Delta y}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_n = & -\frac{1}{2} a_0 \kappa E_M \exp \left\{ -i [(\omega - \Omega)t + \psi - \kappa(R_{bs} + R_{cs}) + \kappa_a R_{as}] \right\} \times \\ & \times \frac{\frac{1}{2} \vec{N}(x_s, 0) + L \vec{M}(x_s, 0)}{R_{as} R_{cs} \sqrt{[]_x^8 []_y^8}} \left\{ F \left[\sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2}} \left(\frac{\Delta x}{2} - x_s \right) \right] + \right. \\ & \left. + F \left[\sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2}} \left(\frac{\Delta x}{2} + x_s \right) \right] \right\} F \left(\sqrt{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2}} \frac{\Delta y}{2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь обозначено

$$[]_x^{8, n} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(x_s - x_c)^2}{R_{bs}^2} \right] + \frac{R_{bs}}{2R_{cs}} \left[1 - \frac{(x_s - x_c)^2}{R_{cs}^2} \right] \pm L \frac{R_{bs}}{R_{as}} \left[1 - \frac{(x_s - x_a)^2}{R_{as}^2} \right], \quad (11)$$

$$[]_y^{8, n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y_s^2}{R_{bs}^2} \right) + \frac{R_{bs}}{2R_{cs}} \left(1 - \frac{y_s^2}{R_{cs}^2} \right) \pm L \frac{R_{bs}}{R_{as}}, \quad (12)$$

индекс s соответствует знаку плюс (ВКС), а индекс n - знаку минус (НКС);

$$L = \frac{1}{2\lambda_a},$$

$F(\cdot)$ - функция Френеля,

$$\begin{aligned} \vec{M} = & (\vec{\alpha}_{a_0} \vec{x}_0)(\vec{\alpha}_a \vec{x}_0) \vec{\beta} \times \left\{ \vec{x}_0 \times \left[\vec{q}_0 + \vec{q}_0 - |Z_2| e^{i\psi_2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[\vec{x}_0 \times (\vec{\alpha}_s \times (\vec{q}_0 + \vec{q}_0)) - 2(\vec{\alpha}_s \vec{x}_0) \vec{x}_0 \times \vec{q}_0 \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \vec{N} = & (\vec{\alpha}_{b_0} \vec{x}_0)(\vec{\alpha}_b \vec{x}_0) \vec{\beta} \times \left\{ \vec{x}_0 \times \left[\vec{q}_0 - \vec{q}_0 + |Z_2| e^{i\psi_2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left[\vec{x}_0 \times (\vec{\alpha}_s \times (\vec{q}_0 - \vec{q}_0)) + 2(\vec{\alpha}_s \vec{x}_0) \vec{x}_0 \times (\vec{x}_0 \times \vec{q}_0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аргументом интегралов Френеля в выражениях для напряженности электрического поля ВКС и НКС является относительная величина облучаемой площадки, выраженная в радиусах первой зоны Френеля. Для радиолокационного случая и для встречного падения электромагнитных и акустических волн радиусы первой зоны Френеля нашей задачи определяются выражением

$$R_{fz} = \sqrt{\frac{\lambda R_{\text{об}}}{1 + \frac{\lambda}{2\lambda_0} \frac{R_{\text{об}}}{R_{\text{зо}}}}} \cdot (1/2 \cos \theta) \quad \text{по оси } z, \quad (15)$$

$$R_{fy} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda R_{\text{об}}}{1 + \frac{\lambda}{2\lambda_0} \frac{R_{\text{об}}}{R_{\text{зо}}}}} \quad \text{по оси } y. \quad (16)$$

В аргументы интегралов Френеля входят также координата точки стационарной фазы, выражения в радиусах первой зоны Френеля (r_s/R_{fz}). По аналогии с дифракцией на отверстиях амплитуды напряженности электрического поля ВКС и НКС будут иметь максимум, если точка стационарной фазы лежит в пределах облучаемой площадки, и резко будут уменьшаться, если точка стационарной фазы выходит за пределы облучаемой площадки.

Ориентация максимумов амплитуд напряженностей ВКС и НКС выражается уравнениями, определяющими координаты точки стационарной фазы, которые через вектор рассеяния $\vec{q} = \vec{\alpha}_s - \vec{\beta}$ имеют вид

$$q_{sz} \pm \frac{\lambda}{\lambda_n} \alpha_{sz} = 0, \quad (17)$$

$$q_{sy} \pm \frac{\lambda}{\lambda_n} \alpha_{sy} = 0. \quad (18)$$

Единичный вектор $\vec{\beta}$, удовлетворяющий уравнениям (17) и (18), будет определять ориентацию максимумов ВКС и НКС:

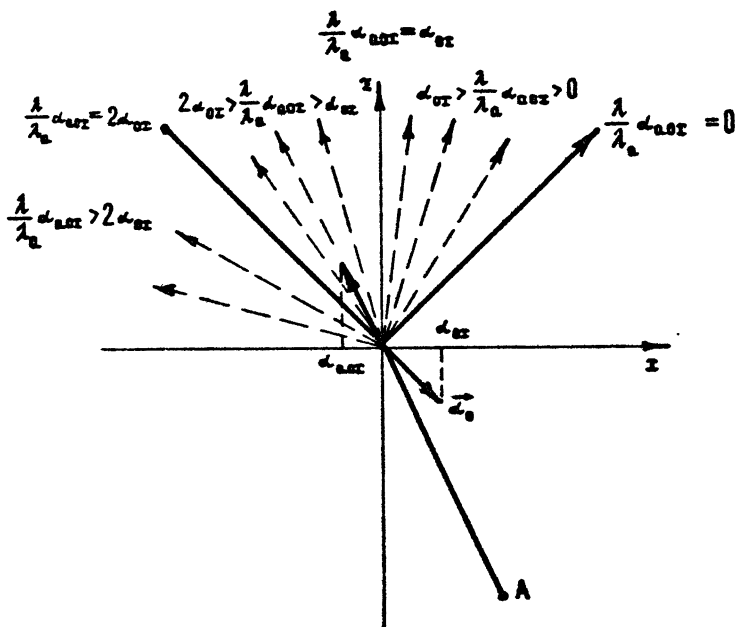
$$\beta_{sz} = \alpha_{sz} \pm \frac{\lambda}{\lambda_n} \alpha_{sz}, \quad (19)$$

$$\beta_{sy} = \alpha_{sy} \pm \frac{\lambda}{\lambda_n} \alpha_{sy}. \quad (20)$$

Из уравнения (18) следует, что если гидроакустический излучатель расположен в плоскости xOz так, что максимум диаграммы излучения лежит в этой плоскости, то $\alpha_{\theta y} = 0$. Это означает, что вектор рассеяния $\vec{\psi}_0$ должен быть параллелен плоскости xOz , т.е.

$$\alpha_{\theta y} = \beta_{\theta y} = 0 \quad \cap \quad \alpha_{\theta y} = \beta_{\theta y}. \quad (21)$$

Ориентация максимумов комбинационных составляющих (θ_0) определяется направлением зондирования водной поверхности электромагнитными и гидроакустическими волнами, а также отношением λ/λ_a (выражение (19)).

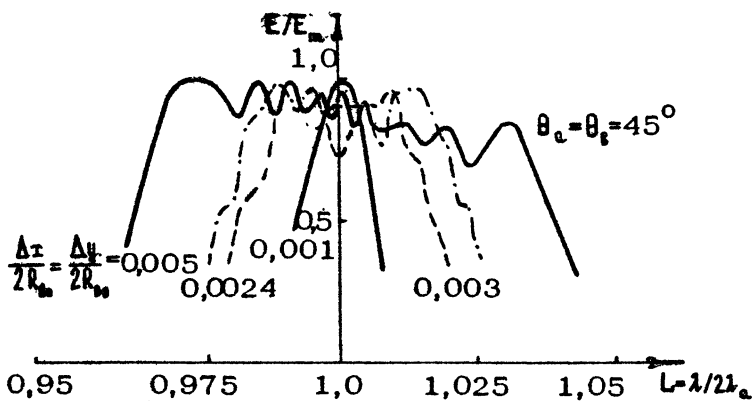


Р и с. 2

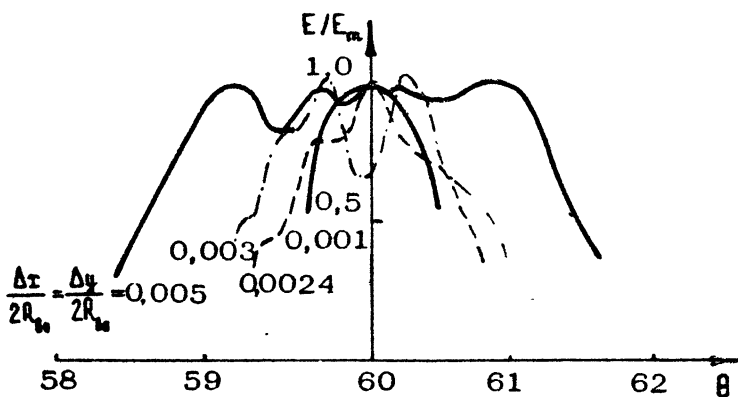
На рис.2 схематически изображена ориентация максимумов ВКС в зависимости от отношения длин волн λ/λ_a , углов падения ($\alpha_{\theta z}, \alpha_{a z}$) электромагнитных и акустических волн.

По выражению (9) приведены расчеты резонансной кривой в пространственном лепестке ВКС рассеянного поля. На рис.3 и 4 приведены эти зависимости для различных величин облучаемой площадки $\Delta x/2R_{\theta}$ и $\Delta y/2R_{\theta}$.

Из анализа кривых на рис.3 следует ярко выраженный резонансный характер явления ККО. При уменьшении площадки



Р и с. 3



Р и с. 4

облучения ширина резонансной кривой уменьшается. При приближении углов падения к нормальным ширина резонансной кривой увеличивается. При облучении плоской поверхности по нормали комбинационные составляющие совпадают по направлению с основной составляющей на несущей частоте и резонансная зависимость от соотношения длин волн электромагнитной и акустической отсутствует.

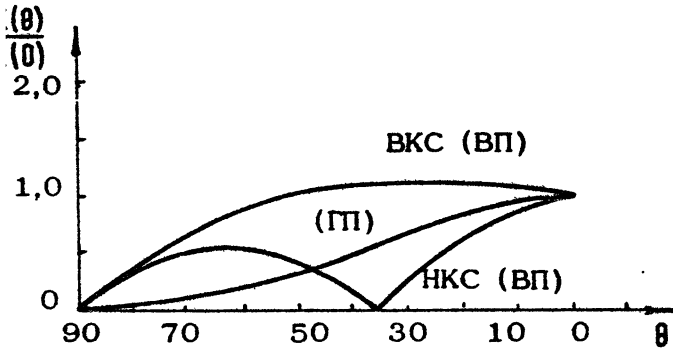
При увеличении размеров облучаемой площадки $\Delta \tau / 2R_{00}$ ширина пространственного лепестка увеличивается (см. рис.4).

Получены выражения поляризационного отношения для ВКС и НКС. Для встречного облучения поверхности отношения амплитуд ВКС и НКС на вертикальной и горизонтальной поляризациях имеют вид

$$\frac{|E_s(\vec{q}_s)|}{|E_s(\vec{q}_s)|} = 1 + 2L \operatorname{tg}^2 \theta_0 = 1 + \frac{2}{\lambda_a} \operatorname{tg}^2 \theta_0, \quad (22)$$

$$\frac{|E_n(\vec{q}_s)|}{|E_n(\vec{q}_s)|} = 1 - 2L \operatorname{tg}^2 \theta_0 = 1 - \frac{2}{\lambda_a} \operatorname{tg}^2 \theta_0. \quad (23)$$

Зависимость НКС и ВКС от угла падения показана на рис.5 (ГП и ВП – горизонтальная и вертикальная поляризации).



Р и с. 5.

Выражения (22) и (23) и зависимости рис.5 говорят о том, что для снятия информации об акустическом поле с поверхности необходимо использовать вертикальную поляризацию и верхнюю комбинационную составляющую рассеянного поля.

С помощью общего выражения (8) можно получить решение задачи по нахождению рассеянного поля электромагнитных волн акустическими вибрациями взволнованной поверхности моря в виде крупных волн [4]. Выражение для комплексной амплитуды верхней комбинационной составляющей в этом случае получено в виде

$$\langle \vec{E}_s(\vec{R}_c) \rangle = E_0^k V_g \vec{\Phi}_0 \int_{-\frac{\lambda_x}{2}}^{\frac{\lambda_x}{2}} \int_{-\frac{\lambda_y}{2}}^{\frac{\lambda_y}{2}} \exp[i\psi_n(x, y)] dx dy, \quad (24)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \psi_n(x, y) = & (kq_x + k_a \alpha_{ax}) + (kq_y + k_a \alpha_{ay}) + \\ & + k(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{R_{00}} + \frac{1}{R_{c0}} \right) + k_a(x^2 + y^2) \frac{1}{R_{a0}}, \end{aligned} \quad (25)$$

$\overline{\Phi}_1$ — медленно меняющийся множитель, который зависит от поляризации и углов падения;

$$V_{\xi} = \langle \exp[i(kQ_z + k_a \alpha_{az}) \xi(x, y, t)] \rangle \quad (26)$$

— характеристическая функция случайной величины $\xi(x, y, t)$, которая определяет влияние волнения поверхности моря на когерентную составляющую поля.

В случае нормального закона распределения этот множитель имеет вид

$$V_{\xi} = \exp\left[-\frac{1}{2}(kQ_z + k_a \alpha_{az})^2 \langle \xi^2 \rangle\right]. \quad (27)$$

При выполнении условия

$$kQ_z = -k_a \alpha_{az} \Rightarrow \cos \theta_{b_0} + \cos \theta_{c_0} = 2L \cos \theta_{a_0} \quad (28)$$

или для радиолокационного случая $\theta_{b_0} = \theta_{c_0}$

$$\cos \theta_{b_0} = L \cos \theta_{a_0} \quad (29)$$

величина $U_{\xi} = 1$ при любом конечном значении дисперсии $\langle \xi^2 \rangle$ (для любых значений высоты волн), что свидетельствует об отсутствии влияния моря на верхнюю комбинационную составляющую отраженного поля в точках наблюдения, определяемых вектором $\overline{\beta}$.

Интеграл в выражении (24) определяет отражение ВКС от плоской поверхности моря и выражается через интегралы Френеля, как в формуле (9). Поэтому будет представлять интерес случай, когда условие (28) выполняется совместно с условиями (17) и (18), т.е.

$$\vec{\alpha}_{b_0} - \vec{\beta}_0 = -2L \vec{\alpha}_{a_0}. \quad (30)$$

Тогда поле ВКС представляет волну, фаза которой полностью определяется фазами падающих волн (акустической и электромагнитной) и не зависит от неровностей поверхности моря и их перемещений. Это означает, что ВКС при наличии волнения и при выполнении условия (30) сохраняет свою когерентность и переизлучается направленно. Поэтому описанное явление мы назвали когерентным комбинационным отражением электромагнитных волн от взволнованной поверхности, возмущенной акустическим полем.

Использование эффекта ККО позволяет существенно уменьшить вредное влияние волнения поверхности моря при смене носителя информации с акустического на электромагнитное поле.

Из условия (30) и рис.2 следует два вывода.

1) Для совмещенных передающей и приемной антенн и для встречного облучения поверхности моря акустическими и электромагнитными волнами условие ККО будет иметь вид $\lambda = 2\lambda_a$, т.е. электромагнитная длина волны должна быть равна двум акустическим длинам волн.

2) Для случая, когда акустическая длина волны много больше электромагнитной ($\lambda_a \gg \lambda$), верхнюю комбинационную составляющую необходимо считать с помощью двухпозиционной РЛС (приемная антенна должна располагаться в направлении близком к направлению зеркально отраженного луча), этот случай соответствует оптическому диапазону электромагнитных волн или СНЧ-диапазону акустических волн.

Л и т е р а т у р а

1. Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри: Материалы 2-й Всесоюз. школы / ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.294.
2. Tremain D.E., Angelakos D.J. Detection of underwater sound sources by microwave radiation reflected from the water surface // P.IEEE. 1972. V.60, N.6.
3. Дьяков Ю.П., Есипов И.Б., Ляпин К.К. и др. Когерентное комбинационное отражение электромагнитных волн от взволнованной границы раздела двух сред при воздействии на нее акустического излучения // Акуст. журн. 1986. Т.32, № 3. С.334.
4. Дьяков Ю.П., Ляпин К.К., Поздняков Н.И., Соколов В.И. Некоторые особенности взаимодействия зондирующих полей при совместном облучении взволнованной водной поверхности акустическими и электромагнитными волнами // Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри / ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.294.
5. Курьянов Б.Ф. Доплеровское рассеяние электромагнитных волн на ряби, вызванной звуковыми и капиллярными волнами // Акуст. журн. 1977. Т.23, №1. С.167.
6. Дьяков Ю.П., Ляпин К.К., Поздняков Н.И. и др. Радиофизические методы зондирования гидроакустических полей // Тезисы 14-й всесоюз. школы-семинара по статистической гидрофизике / Акустический ин-т. М., 1986. С.94.

7. Леонтович М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. Т.2./ Изд-во АН СССР, 1948 . С.1.
8. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
9. Басс Ф.Р., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. С.424.
10. Страттон Д.А. Теория электромагнетизма. М.: Гостехизда 1948.

УДК 551.46

О з м и д о в Р.В. Полигонный метод исследования диффузии примесей в океане // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 8.

Дается обзор методов и средств изучения диффузии примеси на полигоне. Примеси моделируются флуоресцирующими красителями (родамин, флуоресцин), которые могут быть детектированы в морской воде в малых концентрациях с помощью оптических приборов — флуориметров. Для исследования формы и трансформации струй и пятен примеси используется аэрофотосъемка. Для учета адвективных факторов выполняется гидрологическая съемка полигона. Рассматривается пример такого комплексного полигона на Черном море вблизи Болгарии.

Ил. 1, список лит. 2 назв.

УДК 551.465.15

К у р б а ц к и й А. Ф. Вопросы моделирования процессов перемешивания и переноса примесей в турбулентных течениях // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 19.

Анализируются эффекты нелокальности турбулентного переноса импульса, тепла и примеси на примерах слоев смешения в свободной турбулентной конвекции. Этот механизм описывает модель турбулентности, в котором потоки являются неизвестными решениями дифференциальных уравнений переноса (метод статистических моментов 2-го порядка). Рассматриваются трудности метода статистических моментов 2-го порядка в моделировании диффузии пассивной примеси в поле однородной изотропной турбулентности. Кратко обсуждаются альтернативные подходы к решению проблемы моделирования турбулентной диффузии.

Ил. 5, список лит. 13 назв.

УДК 551.465.15

М а д е р и ч В. С. Внутреннее турбулентное перемешивание в океане // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.35.

Рассмотрены соотношения между динамикой и энергией турбулентных пятен и внутренним перемешиванием в океане. Характеристики перемешивания исследовались с помощью метода Монте-Карло посредством имитационного моделирования ансамбля эволюционирующих во времени турбулентных пятен. Обнаружено, что главным источником поддержания статистически стационарного состояния турбулентности является порождение новых пятен при неустойчивости внутренних волн и течений. Быстрое вырождение турбулентности в пятнах вызывает перемежаемость и логнормальность распределения скорости диссипации. Результаты моделирования сравниваются с данными измерений в океане и теоретическими моделями турбулентного перемешивания.

Ил. 6, табл. 1, список лит. 40 назв.

УДК 551.465.15

Н и к и ш о в В. И. Вырождение мелкомасштабных возмущений в стратифицированной среде // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 56.

Рассмотрена заключительная стадия затухания мелкомасштабных возмущений в стратифицированной среде. В отсутствие сдвига средней скорости рассмотрены обусловленные наличием стратификации особенности вырождения возмущений. При наличии сдвига средней скорости анализируются различия в характере вырождения возмущений плотности и скорости. Приводятся асимптотические выражения, характеризующие поведение возмущений.

Ил. 7, список лит. 12 назв.

УДК 532.5

Т е о д о р о в и ч Э. В. Развитая турбулентность и метод ренормгруппы // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 72.

В теоретико-полевой и вильсоновской формулировках описан метод ренормализационной группы. Отмечается, что при рассмотрении каскадных процессов, характерных для развитой турбулентности, ренормгрупповой подход является адекватным. Получено выражение для подсеточной вязкости, которая мо-

делирует осредненное влияние мелко-масштабных мод на крупномасштабные, на основе вильсоновского подхода. Теоретико-полевое описание иллюстрируется на основе турбулентной вязкости, определяющей линейный отклик поля скорости на внешнее силовое воздействие

Ил. 1, список лит. 29.

УДК 532.59

К у р г а н с к и й М. В., Ч е р н о у с ь к о Ю. Л. Лабораторное и теоретическое исследование волн Россби в кольцевом канале // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.87.

В гидродинамическом лабораторном вращающемся кольцевом канале с наклонным дном, заполненным жидкостью, моделируются волны Россби. Методом точечных источников и стоков массы, движущихся относительно жидкости, резонансно возбуждаются волны Россби с конечной амплитудой. Теоретически исследуется параметрическая неустойчивость волн Россби. Проведены лабораторные исследования стационарных волн Россби, обусловленных обтеканием потоком жидкости изолированных препятствий на дне канала. Исследовано взаимодействие волн Россби, образующихся от двух одинаковых препятствий, расположенных на некотором удалении друг от друга вдоль по потоку, в зависимости от расстояния между ними.

Ил. 8, табл. 2, список лит. 13 назв.

УДК 536.24.01

Б у б н о в Б. М., Г о л и ц ы н Г.С. Режимы конвекции во вращающейся жидкости // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 108.

Рассматриваются конвективные движения в плоском слое, вращающемся вокруг вертикальной оси. Предложена классификация различных режимов конвекции, которая включает теплопроводный и регулярный режимы, а также геострофическую и термическую турбулентность. Изучены скоростные характеристики различных режимов. На основе теории размерностей предложены закономерности для различных характеристик

режимов. Также представлены различные геофизические результаты, связанные с полученными режимами конвекции.

Ил. 3, список лит. 16 назв.

УДК 551.466.8

Баранов С. А., Иванов А. В., Казанков В. И. Генерация внутренних волн вихрями: лабораторное и численное моделирование // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.117.

На основе экспериментальных и численных исследований изучен механизм генерации внутренних волн вихревыми парами. Исследована эволюция пространственной структуры завихренной области. Выявлена связь генерируемых внутренних волн большой амплитуды с динамикой вихревой пары. Предложена модель для прогнозирования волн, генерируемых вихревой парой. В исследованном диапазоне параметров вихревой пары результаты численных и экспериментальных исследований близки, а модель позволяет предсказывать период энергонесущих волн.

Ил. 9, список лит. 13 назв.

УДК 532.516.552.511

Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Моделирование водоворотов и атмосферных смерчей коническими вязкими течениями // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 129.

Рассмотрены автомодельные решения уравнений Навье-Стокса и Буссинеска, в которых скорость обратно пропорциональна расстоянию. Обнаружены новые свойства таких решений: концентрация импульса и момента импульса около оси симметрии, неединственность стационарных решений и гистерезис, спонтанное возникновение вращения. Обсуждается возможность моделирования водоворотов, торнадо и огненных смерчей на основе полученных результатов.

Ил. 5, список лит. 14 назв.

УДК 532.516

Горшков К.А., Островский Л.А. Теория возмущений для солитонов и вихрей // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИФФ АН СССР. Горький, 1990. С.141.

Кратко изложены идеи теории возмущения для локализованных нелинейных волн – солитонов, обсуждается возможность аналогичного описания динамики гидродинамических вихрей. Анализ показывает, что движение вихря как целого (как "частицы") возможно, если (как и для солитонов) возмущения приводят к росту только мод дискретного спектра. Простейший пример – взаимодействие пары вихрей. В других случаях, когда нарастают и возмущения сплошного спектра, вихрь разрушается, как это имеет место для вихря в стратифицированной среде. На этих примерах обсуждаются некоторые перспективы и трудности описания динамики вихревых структур.

Ил. 3, список лит. 15 назв.

УДК 532.59

Коробкин А.А., Стурова И.В. Генерация поверхностных и внутренних волн в жидкости переменной глубины // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИФФ АН СССР. Горький, 1990. С.161.

Рассмотрено возбуждение поверхностных и внутренних волн источниками для случая негоризонтального дна. Рассмотрены частные случаи: дна с постоянным наклоном, погруженного вертикального барьера; малых неоднородностей дна; плавных неоднородностей дна; локализованной неоднородности дна. Для каждого из случаев предложены соответствующие методики расчета волнового поля.

Список лит. 47 назв.

УДК 532.5

Кожевников В. Н. Некоторые свойства орографических возмущений от гор среднего масштаба // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИФФ АН СССР. Горький, 1990. С. 180.

Исследуются свойства орографических возмущений на основе рассмотрения гидродинамической задачи. Изучены роль упру-

гости основного состояния атмосферы, внутренние гравитационные волны, частота Брента-Вайсяля и собственный масштаб. Обсуждается место двумерных стационарных моделей, линейных и нелинейных моделей. Для открытой задачи и для течения в канале найдены внутреннее число Фруда, его значения для канала и атмосферы, волновое сопротивление, поток волновой энергии вверх и ее "усвоение" атмосферой.*

Рассмотрены подветренные орографические волны над реальными хребтами, обсуждается возможная связь с ними сейсмических явлений. Изучаются масштабные квазистационарные вихри с горизонтальной осью над подветренными склонами гор.

Ил. 7, список лит. 20 назв.

УДК 532.59

Буркова Л. Т., Морозов Е. Н., Ульянов С. А. Применение метода голографической интерферометрии для определения пространственного спектра внутренних волн, генерируемых при обтекании препятствия потоком неоднородной жидкости // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.197.

Методом голографической интерферометрии найден пространственный спектр внутренних волн, генерируемых при обтекании препятствия потоком неоднородной жидкости. В безграничной (полубезграничной) среде. Пространственный спектр в плоском случае имеет максимум для внутренних волн, распространяющихся от препятствия под углом $\theta = 45^\circ$ к вертикали, а в трехмерном случае имеет максимум также для $\theta = 45^\circ$ для всех углов φ между направлением течения и плоскостью поляризации гравитационной волны. Пространственный спектр при $\theta = \text{const}$ имеет максимум для $\varphi = 0$. Замечены изменения ширины пространственных спектров внутренних волн при изменении числа Фруда.

Ил. 7, список лит. 4 назв.

УДК 432.541;532.529.2

Баранов С.А., Казаков В. И., Степанинц Ю. А. Генерация внутренних волн в лабораторном бассейне тепловым источником // Методы гидрофизических

исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИФФ АН СССР. Горький, 1990. С.203.

Изложены результаты численных и экспериментальных исследований возможности генерирования внутренних волн протяженным тепловым источником в жидкости с непрерывной стратификацией и выраженным термоклином. Исследованы параметры внутренних волн при импульсном и периодическом возбуждении. Определена зависимость амплитуды генерируемых волн от частоты внешнего воздействия. Показана возможность эффективного возбуждения квазимонохроматических внутренних волн первой моды с узкополосным спектром. Приведены оценки КПД теплового источника.

Ил. 11, список лит. 3 назв.

УДК 533.6.011

Лебле С. Б., Верещагин Д. А., Шекин А. К. Кинетическое описание волновых возмущений в стратифицированном газе // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИФФ АН СССР. Горький, 1990. С.215.

На основе модельного кинетического уравнения БГК построено описание волновых возмущений в стратифицированном газе при произвольных числах Кнудсена. Выведена замкнутая система интегральных уравнений для моментов функции распределения в задаче с начальным условием. Изучены фазовые и дисперсионные соотношения для акустических и внутренних волн в первых двух порядках по числу Кнудсена. Найдены области частот, в которых реализуется рост или убывание амплитуды волн с высотой. Приведены оценки области применимости полученных результатов как по диапазону частот, так и по интервалу высот. Рассмотрены особенности релаксации начального возмущения в бесстолкновительной области.

Ил. 1, список лит. 15 назв.

УДК 551.466.81

Доценко С. Ф. Аналитико-численное моделирование внутренних волн, генерируемых движущимися атмосферными возмущениями // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИФФ АН СССР. Горький, 1990. С.234.

В линейной постановке выполнено исследование плоских внутренних волн, генерируемых в слое вертикально стратифицированной по плотности вращающейся жидкости равномерно перемещающейся областью поверхностных давлений. Используется приближение квазистатики, предполагающее волны длинными. Основное внимание уделено изучению физических закономерностей волнового процесса и количественному анализу совместных эффектов стратификации и вращения жидкости.

Ил. 4, список лит. 10 назв.

УДК 532.593 + 539.3 + 624.131

Букатов А. Е. Волны от движущихся возмущений в бассейне с ледяным покровом // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.247.

В приближении линейной теории выполнено исследование изгибно-гравитационных поверхностных и внутренних волн в покрытой льдом жидкости со скачком плотности при движении плоского фронта или круговой области давлений как постоянной, так и переменной интенсивности. Проведено сопоставление критических скоростей нагрузки и профилей прогиба льда с известными из литературных источников результатами натуральных экспериментов.

Табл. 3, список лит. 16 назв.

УДК 532.593

Бежанов К.А., Заец П.Г., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А. М. Исследование внутренних и поверхностных волн в пространственной задаче обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 259.

Рассмотрена задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины. В приближении твердой крышки решение получено в виде ряда Фурье по вертикальной координате. Приближенно найдены волновые и неволновые возмущения свободной поверхности. Предложено решение задачи обтекания неровности дна методом потенциалов. Показано, что в той области, где не справедливо

приближение стационарной фазы, волновое поле может быть описано диполем с моментом, зависящим от суммы массы препятствия и его присоединенной массы.

Ил. 9, список лит. 16 назв.

УДК 532.59

А б р а ш к и н А.А., З е н ь к о в и ч Д. А. Вихревые гравитационные волны на сдвиговом течении // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.284.

Предложен новый подход к описанию нелинейных стационарных периодических вихревых возмущений на сдвиговом течении, основанный на использовании модифицированных лагранжевых переменных. Методом возмущений построено и исследовано новое семейство вихревых поверхностных и внутренних гравитационных волн конечной амплитуды на фоне сдвигового течения с произвольным профилем скорости при отсутствии критических слоев. Показано, что рассматриваемый класс волн включает в себя как частные случаи все известные нелинейные периодические волновые движения. Отдельно рассмотрен вопрос о форме предельной вихревой гравитационной волны на поверхности жидкости.

Список лит. 12 назв.

УДК 532.59

Р о м а н о в а Н. Н. Трехволновые взаимодействия в двухслойном сдвиговом течении и взрывная неустойчивость // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 298.

Исследуются волновые движения в жидкости со свободной границей, верхним слоем конечной толщины, движущимся со скоростью, линейно зависящей от высоты, и неподвижным нижним слоем бесконечной глубины. Для описания волновых процессов в этой модели построена система нормальных переменных. Получены выражения для структурных функций, описывающие внутримодовые и межмодовые трехволновые взаимодействия. Нелинейное взаимодействие поверхностных волн с внутренней волной, возникающей на скачке завихренности, приводит к "взрывной неустойчивости", т.е. росту амплитуд

всех трех взаимодействующих волн до бесконечности за конечное время.

Ил. 1, список лит. 7 назв.

УДК 551.466.3

Ц и м р и н г Л. Ш. Нелинейные эффекты в теории взаимодействия поверхностных волн с ветром // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 306.

Дается обзор механизмов, лежащих в основе взаимодействия поверхностных волн с воздушным потоком. Описана линейная теория Майлса генерации волн ветром, а также механизмы нелинейного ограничения майлсовской неустойчивости. Кратко изложена также теория нелинейного индуцированного рассеяния поверхностных волн ветром, позволяющая объяснить формирование узкого углового спектра ветрового волнения.

Ил. 6, список лит. 14 назв.

УДК 551.46.086:629.78

К а н е в с к и й М. Б. Радиолокатор с синтезированной апертурой как средство дистанционного изучения морской поверхности // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С. 323.

Излагаются основные положения теории радиоизображения морской поверхности, формируемого радиолокатором с синтезированной апертурой.

Ил. 3, список лит. 10 назв.

УДК 534.29:537.874.6:551.466

Л я п и н К. К. Когерентное комбинационное отражение электромагнитных волн гидроакустическими возмущениями поверхности жидкости // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1990. С.336.

На основе использования методов Кирхгофа и малых возмущений излагается решение электродинамической задачи по нахождению напряженности электрического поля, рассеянного возмущенной поверхностью жидкости при воздействии на нее

гидроакустического поля. Анализ общего выражения для напряженности электрического поля приводится в зоне Френеля как для плоской поверхности, так и для крупных гладких волн, возмущенных гидроакустическим полем.

Дается вывод векторного условия когерентного комбинационного отражения электромагнитных волн от гидроакустических возмущений волной поверхности.

Ил. 5, список лит. 10 назв.

METHODS OF HYDROPHYSICAL STUDY.
TURBULENCE AND MICROSTRUCTURE.

(Ed. A.V. Gaponov-Grekhov,
S.Z. Khristianovich, L.A. Ostrovsky)

ABSTRACTS

*O z m i d o v R. V. The polygon study of contaminant diffusion in the ocean using polygon

The methods and means of studying contaminant diffusion on polygon are received. Contaminant flares are modeled by impinging fluorescent dye (rodamin, fluorescein), whose small concentration in sea water can be detected by optic devices - fluorimeters. Aerial photography is applied to investigate forms and transformation of jets and spots. Hydrological mapping of the polygon is performed to take into account advection factors. An example of such a complex in polygon in the Black Sea near Bulgaria is considered.

K u r b a t s k y A. F. The problems of modeling the processes of contaminant mixing and transport in turbulent flows

The effect of nonlocal character of the mechanism of the turbulent transfer of pulse, heat, and substance are analyzed using mixing layers and the free turbulent convection as an example. The mechanism describes a model of turbulence in which the flows are the unknown functions of differential equations of transfer (the method of the 2nd order statistic momenta (SM)). The difficulties of the method

of the 2nd order SM concerning the modeling of the passive scalar diffusion in the field of homogeneous and inhomogeneous turbulence are considered. Alternative approaches to the solution of the problem of the turbulent diffusion modeling are discussed briefly.

M a d e r i c h V. S. Internal turbulent mixing in the ocean methods of hydrophysical study turbulence and micro-structure

The relation between dynamics and energy of turbulent spots and internal mixing in the ocean is considered. To define the characteristics of mixing, the Monte-Carlo method is applied by initiation modeling of an ensemble of turbulent spots developing in time. It is found out that the main source of maintaining a statistically stationary state of turbulence is the appearance of new spots due to the instability of internal waves and flows. A rapid degeneration of turbulence in spots gives rise to intermittence and lognormality of statistical functions of the dissipation velocity distribution. The results of modeling are compared with the data of measuring in the ocean and theoretical models of turbulent mixing.

N i k i s h o v V. I. The degeneration of small-scale perturbations in a stratified medium

The final stage of damping of small scale perturbations in a stratified medium is considered. The peculiarities of perturbation degeneration caused by stratification are considered in the absence of the mean velocity shift. The difference in the character of the degeneration of density and velocity perturbations is analyzed when the mean velocity shift is present. Asymptotic expressions characterizing the behavior of perturbation are given.

T e o d o r o v i c h E. V. The developed turbulence and the method of a renormgroup

The method of a renormalization group (RG) given in theoretic-field and Wilson formulation is described. It is stated that RG method is consideration of cascade processes characteristic for the developed turbulence, which is adequate to the given problem. An expression for undergrid viscosity which models the averaged influence of small-scale modes on large-scale ones on the basis of the Wilson approach. A theoretic field approach is illustrated on the basis of turbulent viscosity defining the linear response of the velocity field on the external force action.

K u r g a n s k y M. V., C h e r n o - u s' k o Y u .L. Laboratory and theoretical study of Rossby waves in a ring channel

Rossby waves are modeled in laboratory hydrodynamic rotating ring channel with inclined bottom filled with water. Rossby waves with finite amplitude are excited resonantly by the method of point sources and the sinks of mass moving with respect to the fluid. Parametric instability of Rossby waves is studied theoretically. Stationary Rossby waves caused by liquid flowing around isolated obstacles on the channel bottom are studied in the laboratory. The interaction of Rossby waves forming by two equal obstacles locating at some distance from each other along the stream is investigated as a function of the distance between them.

B u b n o v B. M., G o l i t s i n G. S. The regime of convection in rotating liquid

Convective motions are considered in a plane layer rotating around a vertical axis. The classifi-

cation of various regimes of convection including heat-conducting and regular regimes as well as geostrophical and thermal turbulence is proposed. The velocity characteristics of various regimes are studied. Regularities for various characteristics of regimes are proposed on the basis of the theory of dimensions. Various geophysical results related to the obtained regimes of convection are also given.

Baranov S. A. , Ivanov A. V. , Kazakov V. I. The generation of internal waves by vortices: laboratory modeling and numerical simulation

The mechanism of the internal waves generation by vortex pairs is studied experimentally and numerically. The evolution of the spatial structure of the vortex region is investigated. The effect of generated large-amplitude waves on the dynamics of the vortex pair is made clear. A model for predicting waves generated by the vortex pair is proposed. For the investigated parameter range the results of numerical stimulation almost coincide with those of the experimental study. The model permits one to predict the period of energy-carrying waves.

Gol'dshchik M. A. , Shtern V. N. The modeling of whirlpools and atmosphere tornados by canonical viscous flows

Self-similar solutions of Navier-Stokes and Boussinesque equations within which the velocity is inversely proportional to the distance, are considered. New properties of such solutions are revealed: pulse and pulse momentum concentration near the symmetry axis, non-singular stationary solutions, hysteresis, spontaneous arising of rotation. The possibility to model whirlpools, tornados and fire tornados on the basis of the obtained results is discussed.

G o r s h k o v K. A. , O s t r o v s k y L. A.
Theory of perturbation for solitons and vortices

The ideas of the perturbation theory for localized nonlinear waves (solitons) are briefly outlined. The possibility of the analogous description of the dynamics of hydrodynamic vortices is discussed. The analysis shows that the motion of a vortex as a whole (as "a particle") is possible if perturbation leads to the growth only of discrete spectrum modes (like for solitons). The simplest example is the interaction of the pair of vortices. In other cases when also the perturbation of a continuous spectrum increases, a vortex breaks, as it occurs with a vortex in a stratified medium. Some perspectives and difficulties of describing dynamics of vortical structures are discussed using these examples.

K o r o b k i n A. A. , S t u r ' o v a I. V.
Generation of surface and internal waves in a liquid with variable depth

Excitation of surface and internal waves by sources is considered for the case of a nonhorizontal bottom. Particular cases are considered: a bottom with a constant slope, submerged vertical barrier, small bottom inhomogeneities, smooth bottom inhomogeneities, localized bottom inhomogeneities. The corresponding methods of the wave field calculation are proposed for all the cases.

K o z h e v n i k o v V. N. Some properties of orographic disturbance from mean-scale mountains

Properties of orographic disturbance are studied by considering a hydrodynamic problem. The role of the elasticity of the atmosphere ground state, internal gravitational waves, Brunt-Vaisala frequency

cy and the eigenscale are investigated. The position of two-dimensional stationary models, linear and nonlinear models are discussed. Internal Froude number, its importance for a channel and atmosphere, wave resistance, the wave energy flux upwards and its absorption by the atmosphere are found for the open problem and for the stream in the channel.

Lee orographic waves above real crests are considered, their possible connection with seismic phenomena is discussed. Mean-scale quasistationary waves with a horizontal axis above mountain lee slopes are studied.

Burkova L. T., Morozov Ye. N., Ulijanov S. A. Method of holographic interferometry applied to determination of the spatial spectrum of internal waves generated by inhomogeneous fluid flowing around an obstacle

Spatial spectrum of internal waves generated by inhomogeneous fluid flowing around an obstacle is found by the method of holographic interferometry in an unbounded (semi-unbounded) medium. The spatial spectrum in the plane case reaches the maximum for internal waves propagating from the obstacle at the angle $\theta = 45^\circ$ to the vertical axis; in the three-dimensional case it has the maximum also for $\theta = 45^\circ$ for all the angles φ between the flowing direction and the plane of gravitational wave polarization. The spatial spectrum with $\theta = \text{const}$ has the maximum for $\varphi = 0$. Variation of the spatial spectrum width with variations of the Froude number is noticed.

Baranov S. A., Kazakov V. I., Stepanyants Yu. A. Internal wave generation by a thermal source in a laboratory basin.

The paper presents results of numerical and

experimental investigations of possibility of internal wave generation by an extended thermal source in the fluid with continuous stratification and sharp thermocline. Parameters of internal waves generated by pulse and periodic excitations are presented. Dependence of the generated waves amplitude on frequency of the external effect is determined. Possibility of effective excitation of quasimonochromatic first-mode internal waves with a narrow-band spectrum is shown. Efficiency of the thermal source is evaluated.

Leble S. B., Vereshchagin D. A.
Shchekin A. K. Kinetic description of
wave disturbances in a stratified gas

Wave disturbances in a stratified gas with arbitrary Knudsen numbers are described on the basis of the model kinetic Boussinesq-Helmholtz-Kirchhof equation. A closed set of integral equations is constructed for the moments of the distribution function for the problem with an initial condition. Phase and dispersion relations for acoustic and internal waves in first two orders by the Knudsen number are investigated. Frequency regions where the wave amplitude increases or decreases with its height, are found. Applicability of the obtained results to the frequency and height ranges are evaluated. Peculiarities of initial perturbation relaxation in the collisionless region are considered.

Dotsenko S. F. Analytical-numerical
modeling of internal waves generated by moving atmospheric perturbations

Plane internal waves generated in a layer of the vertically density-stratified rotating fluid by

an uniformly moving region of surface pressures are investigated linearly. Quasistatic approximation assuming the waves to be long, is used. Particular emphasis is given to the study of physical properties of the wave process and to numerical analysis of joint effects of stratification and fluid rotation.

B u k a t o v A. Ye., Waves from moving perturbations in a basin with ice cover

Gravitational-bending surface waves and internal waves in ice-covered fluid with a density jump in a case of the motion of the plane front or circular region of pressure of constant, as well as varying, intensity, are investigated within the linear approximation. Critical load velocities and ice bending profiles are correlated to the full-scale experiment results known in literature.

B e z h a n o v K. A., Z a y e t s P. G.,
O n u f r i e v A. T., T e r - K r i k o r o v
A. M. Investigation of internal and surface waves within the spatial problem of the exponentially stratified fluid flowing around bottom bottom roughness

The problem of the exponentially stratified fluid flowing around a bottom roughness is considered for a finite depth of the fluid. The decision is obtained in the form of the Fourier series along the vertical axis within the solid lid approximation. Wave and non-wave perturbations of the free surface are found approximately. Decision of the problem of flowing around a bottom roughness using the method potentials is proposed. It is shown that in that region where the approximation of the stationary phase is not valid, the wave field can be

described by a dipole with a momentum depending on the sum of the obstacle mass and its associated mass.

A b r a s h k i n A. A., Z e n ' k o v i c h
D. A. Vortex gravitational waves on a shear flow

A new approach using modified Lagrangian variables is proposed to describe nonlinear stationary periodic vortex perturbations on a shear flow. With the help of the perturbation method a new set of vortex surface and internal gravitational waves of ϵ finite amplitude on the background of a shear flow with an arbitrary velocity profile in the absence of critical layers is constructed and investigated. It is shown that the class of waves under consideration includes all known nonlinear periodic wave motions as special cases. Particular attention is given to the problem of the form of a limiting vortex gravitational wave on the fluid surface.

R o m a n o v a N. N. Three-wave interactions in a two-layer shear flow and explosive instability

Wave motions in a fluid with a free boundary, with an upper layer of a finite thickness moving with the velocity depending linearly on the height, and with a motionless lower layer of an infinite depth, are investigated. To describe wave process within this model, a system of normal variables is constructed. Equations for structural functions describing inner-mode and inter-mode three-wave interactions, are obtained. Nonlinear interaction of surface waves with an internal wave appearing at the vorticity step, results in "explosion instability", i.e., increase of amplitudes of all three interacting waves up to infinity in a finite time.

T s i m r i n g L. Sh. Nonlinear effects within the theory of surface wave-wind interaction

A review of mechanisms of air flow-surface wave interaction is presented. The linear Miles theory of wave generation by wind is described, as well as mechanisms of nonlinear limitation of Miles instability. The theory of nonlinear induced scattering of surface waves by wind explaining the narrow angular spectrum of wind waves formation is also briefly presented.

K a n e v s k y M. B. Radar with synthesized aperture as a tool for remote investigations of the sea surface

Main concept of the theory of the sea surface radio image formed by a radar with synthesized aperture is formulated.

L y a p i n K. K. . Coherent combination reflection of electromagnetic waves by hydroacoustic perturbations of the fluid surface

A solution for the electric field reflected by perturbed surface of fluid effected by hydroacoustic field is obtained using the Kirchhof and small perturbations methods, is presented. General solution is analyzed in a Frenel zone for flat surface and large smooth waves perturbed by hydroacoustic field.

A derivation of the vector condition for coherent combination reflection of electromagnetic waves by hydroacoustic perturbation of the water surface is presented.