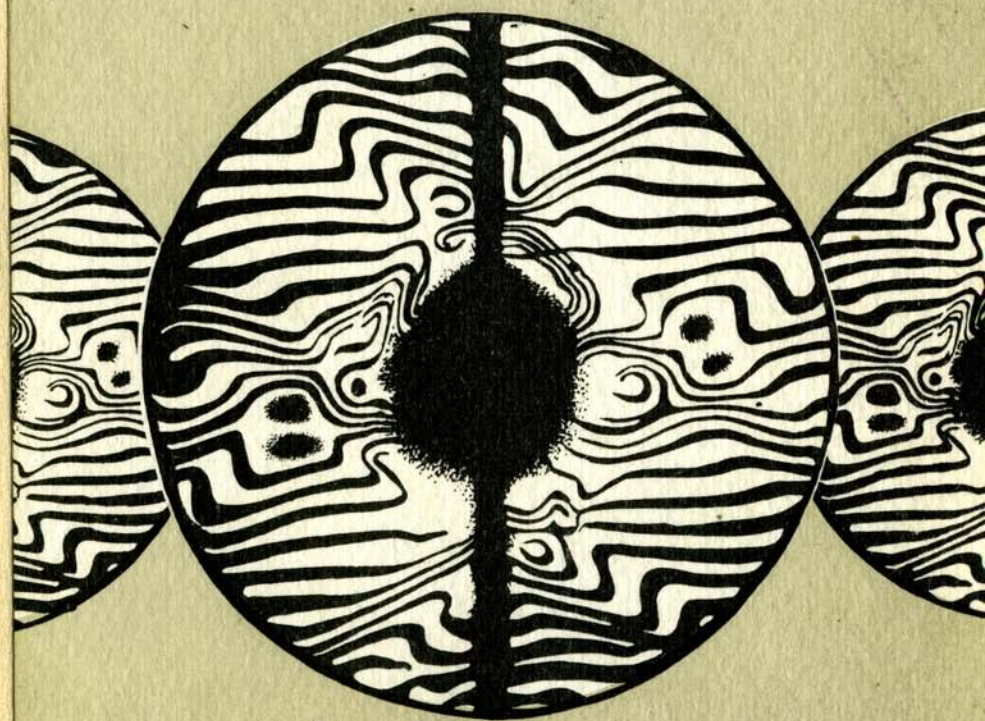


Методы гидрофизических исследований ВОЛНЫ И ВИХРИ



Издано по решению Редакционно-издательского совета
Института прикладной физики АН СССР

УДК 532.5+551.46

Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри
/ИИФ АН СССР. Горький, 1987.

Сборник содержит материалы лекций II Всесоюзной школы по методам гидрофизических исследований (март 1986 г.). Рассматриваются закономерности физических процессов, протекающих в водной среде, и методы их контактной и дистанционной диагностики. В тематику сборника входят следующие вопросы: волны и турбулентность, аналитические и численные методы в динамике жидкости, дистанционные методы и техника гидрофизического эксперимента.

Сборник рассчитан на широкий круг специалистов в области геофизической гидродинамики, океанологии, гидромеханики и смежных областях.

Рецензенты

член-корреспондент АН СССР Г. С. ГОЛИЦЫН,
доктор физико-математических наук С. Н. ГУРБАТОВ

Ответственные редакторы

А. В. ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, С. А. ХРИСТИАНОВИЧ

Редколлегия

Л. А. ОСТРОВСКИЙ (зам. отв. редактора),
Л. Ш. ЦИМРИНГ, Н. А. ГОРОДЕЦКАЯ (отв. секретарь)

СОДЕРЖАНИЕ

Волны и турбулентность

<i>Р. В. Озмидов.</i> Методы исследования тонкой структуры гидрофизических полей и мелкомасштабной турбулентности в океане	9
<i>Л. А. Островский, Ю. А. Степаняц.</i> Уединенные внутренние волны в океане: теория и натурные наблюдения	18
<i>К. А. Божанов, В. В. Можаяев, Е. Н. Морозов, А. Т. Онуфриев, А. Ю. Петрович, В. Е. Скороваров, А. М. Тер-Крикоров, С. А. Ульянов, А. А. Шеронов.</i> Пространственная задача обтекания неровности дна потоком стратифицированной жидкости. Теория и лабораторный эксперимент.	48
<i>Ю. Д. Чашечкин, В. И. Неклюдов, Е. Я. Сысоева.</i> Внутренние волны, вихри и регулярные структуры в стратифицированных средах. Лабораторное моделирование.	66
<i>В. А. Владимиров.</i> Аналогия эффектов плотностной стратификации и вращения и ее использование в теории устойчивости	76
<i>В. А. Боровиков, Е. С. Левченко.</i> Распространение внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной жидкости со средними сдвигowymi течениями.	91

Численные и аналитические методы

<i>О. М. Белоцерковский.</i> Моделирование когерентных структур в турбулентности (вычислительный эксперимент)	111
<i>В. А. Гуцин, В. Н. Коньшин.</i> Особенности построения численных методов расчета течений стратифицированной жидкости.	135
<i>А. И. Толстых.</i> О численных методах исследования гидрофизических полей.	148
<i>Э. В. Теодорович.</i> Методы теории поля в статистической гидродинамике	163
<i>И. С. Долина, Е. Н. Пелиновский.</i> Длинноволновое приближение в задачах рассеяния морских волн препятствиями.	184
<i>М. И. Железняк, В. С. Мадерич.</i> Аналитические и численные решения уравнений турбулентного переноса	195

Дистанционные методы и техника гидрофизического эксперимента

<i>Г. К. Коротаев.</i> Проблемы и возможности спутниковой гидрофизики.	222
<i>К. Н. Федоров.</i> Некоторые формы упорядоченных движений в приповерхностном слое океана (по спутниковым данным) и их воспроизведение в лаборатории	241
<i>С. А. Ермаков.</i> Пленочные слики на морской поверхности	259

<i>И. Б. Есипов, К. А. Наугольных, В. Н. Носов, С. Ю. Пашин.</i> Лазерная регистрация статистических характеристик взволнованной поверхности	278
<i>Ю. П. Дьяков, К. К. Ляпин, Н. И. Поздняков, В. И. Соколов.</i> Некоторые особенности взаимодействия зондирующих полей при совместном облучении взволнованной водной поверхности акустическими и электромагнитными волнами.	294
<i>В. М. Бухштабер, В. К. Маслов.</i> Методы решения трехмерных обратных задач дистанционного зондирования океана	305
<i>А. Н. Гинзбург, Ю. К. Постоенко.</i> Проблемы и методология автоматизации экспериментальных исследований в гидрофизике	321
<i>Б. С. Ринкевичюс.</i> Эффект Доплера в гидрофизических исследованиях.	349

CONTENTS

WAVES AND TURBULENCE

- R.V.Ozmidov. Methods of study of a fine structure of hydrophysical fields and small-scale turbulence in the ocean..... 9
- L.A.Ostrovsky, Yu.A.Stepanyants. Internal solitary waves in the ocean: theory and observation..... 18
- Yu.A.Bezhanov, V.V.Mozhaev, E.N.Morozov, A.T.Anufriev, A.Yu.Petrovich, V.E.Skorovarov, A.M.Ter-Krikorov, S.A.Uljanov, A.A.Sheronov. Three-dimensional problem on the flow around of a bottom inhomogeneity by the stream of a stratified fluid..... 48
- Yu.D.Chashechkin, V.I.Neklyudov, E.Ya.Sysoeva. Internal waves, vortices and regular structures in stratified media (Laboratory modeling)..... 66
- V.A.Vladimirov. Analogy between density stratification and rotation effects and its application to the stability theory..... 76
- V.A.Borovikov, E.S.Levchenko. The propagation of internal gravity waves in a layer of a stratified fluid with mean shear flows..... 91

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS

- O.M.Belotserkovsky. Modeling of coherent structure in turbulence (Computer experiment)..... 111
- V.A.Gushchin, V.N.Kon'shin. Specific aspects of numerical methods for computation of stratified flows..... 135

A.I.Toistyykh. On numerical methods of investigation of hydrophysical fields.....	148
E.V.Teodorovich. Field theory methods in statistical hydrodynamics.....	163
I.S.Dolina, E.N.Pelinovsky. Long-wave approximation in problems of sea wave scattering by obstacles.....	184
M.I.Zheleznyak, V.S.Maderich. Analytical and numerical solutions of the turbulent transport equation.....	195
REMOTE METHODS AND HYDROPHYSICAL EXPERIMENTAL TECHNIQUE	
G.K.Korotayev. Problems and potentialities of satellite hydrophysics.....	222
K.N.Fedorov. Some types of regular motions in the ocean.....	241
S.A.Ermakov. Film slicks on sea surface.....	259
I.B.Esipov, K.A.Naugol'nykh, V.N.Nosov, S.Yu. Pashin. Laser recording the statistical characteristics of wavy surface.....	278
Yu.P.Djakov, K.K.Lyapin, N.I.Pozdnyakov, V.I.Sokolov. Some peculiarities of the probing field interaction at simultaneous irradiation of rough sea surface by acoustic and electromagnetic waves.....	294
V.M.Bukhshtaber, V.K.Maslov. Solution methods for three-dimensional inverse problems of remote sensing of the ocean.....	305
A.N.Ginzburg, Yu.K.Postoenko. Problems and methods of automatic experimental research in hydrophysics.....	321
B.S.Rinkevichus. Doppler effect in hydrophysical studies.....	349

Сборник объединяет двадцать лекций, прочитанных на второй Всесоюзной школе-семинаре "Методы гидрофизических исследований", состоявшейся весной 1986г. Уже первая школа выявила основные тенденции в современной гидрофизике океана (а обе проведенные школы, несмотря на широту тематики, обнаруживали явную "морскую" направленность, хотя мы не считаем это совершенно обязательным для всех последующих школ). Среди этих тенденций — развитие методов дистанционной диагностики, увеличение роли лабораторного и численного эксперимента, применение методов теории нелинейных волн в теоретической гидрофизике. За прошедшие два года прогноз в целом подтвердился, что и определило характер лекций и семинаров на второй школе.

К особенностям этой школы можно отнести растущее понимание необходимости тесной увязки теории и эксперимента, постановки экспериментов "под теоретические модели". Более половины помещенных ниже статей имеют прямое отношение к натурному и лабораторному экспериментам. Заметим, что натуральный эксперимент занимал на второй школе значительно больше места, чем на первой. При этом широко обсуждались дистанционные методы исследования. Впервые на школе была прочитана лекция по автоматизации гидрофизического эксперимента.

Что касается теории, то здесь налицо активное внимание к волнам, вихрям и турбулентности в стратифицированной жидкости — взаимосвязанным элементам структуры океана как нелинейной системы.

По сравнению с предыдущей, на второй школе удалось не только укрепить ее "учебную" ориентацию — был прочитан ряд обзорных лекций по достаточно широкому кругу вопросов: спутниковой океанографии, уединенным внутренним волнам, методам

лазерной диагностики, вихрям в океане, океанской турбулентности и др.

Лекции, по тем или иным причинам не опубликованные в этой книге (в основном из-за их публикации в других изданиях), были посвящены тому же кругу вопросов: вихревым структурам, турбулентности, поверхностным и внутренним волнам, а также дистанционным и контактными методами исследования океана. Как и на первой школе ряд оригинальных теоретических и экспериментальных работ в области гидрофизики был представлен на семинарах. Мы сожалеем, что объем сборника не позволяет опубликовать их здесь, и надеемся, что большинство из них увидит свет в других изданиях.

В целом, как нам кажется, школа-семинар "Методы гидрофизических исследований" показала свою актуальность и способность объединить интересы физиков и механиков, теоретиков и экспериментаторов. Мы надеемся, что она войдет в число "долгоживущих" научных школ физического профиля.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОКЕАНЕ

Р.В.Озмидов

Методы исследования любого гидрофизического явления в океане зависят прежде всего от его пространственно-временных масштабов и от взаимосвязей с другими процессами, с которыми изучаемое явление обменивается энергией, веществом, энтропией. Такой обмен в нелинейных системах, к которым следует отнести и океан, в ряде случаев может быть очень существен, а в ряде случаев сравнительно мал. Например, внутренние волны в океане при опрокидывании (сильнонелинейное явление) могут порождать пятна мелко-масштабной турбулентности большой интенсивности. В то же время прохождение цуга слабонелинейных волн будет вызывать лишь практически обратимые трансформации вертикальных профилей гидрофизических характеристик, в связи с чем после прохождения цуга каких-либо заметных изменений в структуре полей не произойдет.

С гидродинамической точки зрения океан представляет собой некоторый объем жидкости, гидрофизические поля в котором описываются уравнениями гидротермодинамики. На твердых и жидких границах этого объема задаются некоторые граничные условия, достаточные для решения системы уравнений. Если на твердых границах условия для скорости движения жидкости могут быть приняты нулевые, то для свободной поверхности океана задание граничных условий — более сложная задача. Дующий над поверхностью океана ве-

гер оказывает как касательные, так и нормальные воздействия на водную поверхность, причем интенсивность этих воздействий зависит не только от скорости ветра, но и от состояния водной поверхности. Достаточно сложно задать граничные условия на поверхности океана и для полной температуры и солености океанских вод.

При теоретическом исследовании гидрофизических полей океана прежде всего следует решить, с каким типом движения вод — ламинарным или турбулентным — мы имеем дело. Подсчет числа Рейнольдса Re для всего океана (характерный размер 10^8 см, характерная скорость 10 см/с) приводит к огромному значению Re порядка 10^{11} , что, казалось бы, должно свидетельствовать о развитом турбулентном режиме движения вод океана. Однако наблюдения показывают, что в штилевую погоду даже в верхних слоях океана движение жидкости часто бывает малотурбулизированным. Еще чаще квазиламинарный режим движения вод наблюдается в глубинных слоях океанских вод. Следовательно, при оценке числа Рейнольдса для движений вод океана не всегда следует использовать глобальный пространственный масштаб. В океане может существовать целый ряд внешних масштабов энергоснабжающих процессов. Глобальный масштаб связан с различием нагрева вод океана в экваториальной и приполярных областях земного шара, а также с глобальными системами ветров и центров действия атмосферы. Большой внешний масштаб связан и с приливообразующими силами, вызывающими приливные движения вод. Значительно меньший масштаб имеют процессы, обусловленные муссонными или бризовыми ветрами. Внешними энергоснабжающими процессами для океанских вод могут служить и отдельные порывы ветра, и разности в нагреве вод океана из-за экранирования Солнца отдельным облаком. Для пятна турбулизированной жидкости, порожденного опрокидыванием внутренней или поверхностной волны, внешним масштабом будет характерный размер волны, а для турбулентности в тонкоструктурных прослойках жидкости — размеры "ступенек" на вертикальных профилях гидрофизических характеристик.

Перечень энергоснабжающих океан процессов, естественно, может быть продолжен. При этом возникает вопрос: осуществляется ли такое энергоснабжение практически по всему диапазону пространственно-временных масштабов, или

оно все же локализовано вблизи отдельных "выделенных" масштабов? В первом случае определение числа Re для движений вод океана было бы весьма затруднительно из-за неопределенности характерного масштаба энергоснабжения. Во втором случае такая трудность снимается, но дискретная схема энергоснабжения океана приводит к целому набору гичичных масштабов L_i , и следовательно чисел Re_i .

Энергия, переданная внешними силами океанским движениям масштаба L_i , из-за нелинейных взаимодействий будет далее передаваться в основном более мелким движениям, вплоть до следующей энергопередающей зоны L_{i+1} . Если в этой зоне приток энергии достаточно велик, то движения масштаба L_{i+1} будут в значительной степени определяться силами того же масштаба, а энергетические воздействия масштаба L_i будут проявляться лишь как слабый "тренд" гидрофизических полей. Влияние же следующих энергоснабжающих зон (меньшего масштаба) часто можно рассматривать лишь как небольшие шумовые добавки к рассматриваемым движениям. Исходя из такой дискретно-непрерывной картины строения гидрофизических полей океана, следует осуществлять и осреднения уравнений движения и переноса, описывающих эти поля. Если спектр энергии движений разного масштаба непрерывен, без четко выраженных "провалов" и пиков, то выделение различных классов движений в океане и их раздельное описание уравнениями гидротермодинамики было бы затруднено, так как при повторных осреднениях этих уравнений нарушались бы правила осреднения Рейнольдса. Действительно, в этом случае сама операция разделения полей на осредненные и пульсационные составляющие не могла бы быть четко осуществлена, так как между движениями разного масштаба в этом случае должны наблюдаться значительные корреляции.

В случае четко выделенных энергетических пиков масштаб осреднения уравнений гидротермодинамики естественным образом должен определяться масштабом L_i того энергосодержащего, "закономерного" процесса, который предполагается описывать данной системой осредненных уравнений. В качестве гурбулентных, случайных пульсаций в этом случае будут выступать действительно случайные колебания полей с масштабами меньшими L_i . Правда, при этом в качестве случайных пульсаций будут фигурировать и "закономер-

ные (обусловленные детерминированными внешними силами) движения следующей $(i + 1)$ -й энэргоснабжающей зоны. Но если она расположена достаточно "далеко" от i -й зоны, а приток энергии здесь сравнительно невелик, то вариации полей с масштабами L_{i+1} будут давать лишь небольшие "добавки" в пульсационные составляющие рассматриваемых гидрофизических полей.

Для понимания особенностей исследуемого явления весьма важно знать потоки энергии и энстрофии к данному процессу от "производящих" движений. От интенсивности и изменчивости этих потоков будут зависеть все пространственно-временные и энергетические характеристики гидрофизического процесса. В связи с этим при экспериментальном исследовании такого процесса необходимо, вообще говоря, измерять не только особенности гидрофизических полей, связанных с самим процессом, но и характеристики "производящих" движений. Такой вывод привел к разработке так называемого полигонного метода исследования мелкомасштабных процессов в океане [1]. Суть этого метода заключается в выборе на акватории Мирового океана ограниченного числа районов (полигонов), отличающихся по характеристикам "производящих" (чаще называемых фоновыми) явлений. Для мелкомасштабных процессов в качестве фоновых, генерирующих явлений можно указать дрейфовые и геострофические течения, поверхностные и внутренние волны, конвективные движения жидкости. Гидродинамическими параметрами, характеризующими эти явления с точки зрения их способности к генерации мелкомасштабных процессов, можно считать вертикальные градиенты (которые обычно на несколько порядков превосходят горизонтальные) скорости течения $\partial u / \partial z$ и плотности жидкости $\partial \rho / \partial z$, скорость диссипации турбулентной энергии (скорость потока энергии по каскаду движений разного масштаба) ϵ , скорость выравнивания температурных (плотностных) неоднородностей N . Определяющими процесс также можно считать физические константы среды: кинематические коэффициенты молекулярной вязкости ν и теплопроводности χ воды, параметр плавучести $\alpha \rho_0$ (α - коэффициент термического расширения морской воды, ρ_0 - ускорение свободного падения).

Представительный набор значений указанных параметров может быть получен при выборе измерительных полигонов

в районах океана с положительными и отрицательными потоками тепла через поверхность океана, в районах со спокойными, умеренными и штормовыми погодными условиями, с малой, средней или большой динамической активностью вод (районы без четко выраженных течений, зоны пограничных течений типа Гольфстрима, район экваториальных течений). Различные комбинации фоновых термодинамических условий на полигонах обычно приводят к достаточно протяженным маршрутам рейсов научно-исследовательских судов, посвященных изучению мекомасштабных явлений в океане [1]. Такого рода экспедиция в своем распоряжении должна иметь, кроме малоинерционных измерителей, парк приборов разной инерционности для фоновых исследований.

Работы на полигоне обычно должны начинаться с определения общей гидрометеорологической обстановки. Для этой цели используются стандартные метеорологические приборы, гидрологические серии или гидрологические зонды, а также буйковые постановки с измерителями течений. Экспресс-анализ таких измерений позволяет уточнить горизонты для мелкомасштабных измерений, определить фоновые значения ряда гидродинамических параметров (частоту Вайсяля-Ерента, число Ричардсона). Для измерения среднемасштабных фоновых процессов (с характерными масштабами порядка секунд - десятков минут, метров - десятков метров) могут использоваться гидрологические зонды, а также нестандартные измерительные комплексы типа "термотрал". Этот прибор представляет собой буксируемую цепочку датчиков температуры, расположенных вдоль буксирной линии через интервалы в 1-2 м. На верхней и нижней точках гирлянды располагаются датчики глубины. В процессе измерения все датчики последовательно опрашиваются с частотой порядка 0,1 с. Полный цикл опроса всех датчиков занимает обычно несколько секунд. Буксировка термотрала дает возможность получить детальную картину термической структуры верхнего слоя океана с вертикальным разрешением порядка метра и горизонтальным - порядка десяти метров (при скорости буксировки в 5-6 узлов). Поступающая с датчиков термотрала информация вводится в судовую ЭВМ, где рассчитывается положение изотерм в исследуемом слое океана, определяются статистические характеристики поля температуры.

При исследовании с помощью термографа поля внутренних температурных волн возникает необходимость исключения эффекта Доплера, так как скорости распространения внутренних волн и скорость буксировки измерительной системы могут быть соизмеримы. Наиболее употребительный способ исключения эффекта Доплера — измерения термографом при буксировке в различных направлениях. Если предположить, что направление распространения внутренних волн и их основные геометрические характеристики за период измерений не меняются, то по данным разнонаправленных измерений можно восстановить истинные значения параметров волнового процесса.

Представительный материал по тонкой вертикальной структуре гидрофизических полей может быть получен при помощи многократных измерений зондирующим прибором с соответствующим набором датчиков. Вертикальное разрешение лучших образцов серийно выпускаемых зондов может достигать 10–20 см. Однако из-за возмущений, вызываемых качкой судна, фактически достоверные данные о вертикальных структурах полей обычно ограничиваются размерами порядка метра. Временные интервалы между последовательными зондированиями зависят от глубины зондирования и его скорости. Стремление уменьшить время между зондированиями лучше удовлетворять не увеличением скорости зондирования (так как при этом ухудшается вертикальное разрешение прибора), а выбором сравнительно тонкого, но интересного по своей структуре слоя, где и осуществляются многократные измерения зондом. Независимо от того, осуществляются измерения с дрейфующего или заякоренного судна, получаемую информацию следует рассматривать, вообще говоря, как пространственно-временную, так как и в первом, и во втором случаях измерения осуществляются в движущейся относительно прибора водной массе.

Для исследования мелкомасштабной турбулентности требуются приборы с чувствительными элементами весьма высокого пространственно-временного разрешения. Минимальные размеры турбулентных образований, существующих в океане, могут быть оценены по формуле локально изотропной турбулентности $l_{\min} = \sqrt[4]{\nu^3/\epsilon}$. При типичных значениях ϵ для океана в 10^{-2} – 10^{-5} см².с⁻³ получаем для l_{\min} значения в 1 мм – 1 см. Очевидно, что при желании полу-

читать достоверную информацию о турбулентности в интервале диссипации измерительный прибор должен иметь чувствительные элементы с разрешением, превосходящим эти цифры. Серийных приборов с такими характеристиками в настоящее время еще не существует. Однако макетные образцы подобного рода измерителей в последние годы создаются в ряде стран. В СССР успехи в создании морских турбулиметров достигнуты в Институте океанологии им. П.П. Ширшова АН СССР, Морском гидрофизическом институте АН УССР и в ряде других учреждений. В наиболее совершенных образцах приборов малоинерционные (пульсационные) датчики обычно монтируются вместе с более инерционными измерителями для освещения фоновой обстановки в непосредственной близости от места измерения турбулентных пульсаций.

Примером подобного рода измерительного комплекса может служить система "Тунец" [2], разработанная в Опытном конструкторском бюро океанологической техники (ОКБ ОТ) при Институте океанологии им. П.П. Ширшова АН СССР. В комплексе имелся набор из 12 датчиков для пульсационных и средних значений скорости течения, температуры и электропроводности воды, скорости распространения звука в океане. В буксируемом варианте в системе располагалось также дополнительно 10 термисторных измерителей температуры для определения поля температуры вблизи пульсационных измерителей. Первичными преобразователями пульсаций скорости в системе служили термоанемометрические датчики с тонкими платиновыми пленками, гидрорезисторные датчики, в которых роль чувствительного элемента играли объемы воды, расположенные между электродами, а также электромагнитные датчики. Размеры чувствительных элементов в датчиках не превышали нескольких миллиметров, полоса частот простиралась в ряде образцов датчиков до 1000 Гц, а уровень шумов не превышал долей миллиметра в секунду. В качестве пульсационных датчиков электропроводности и температуры воды в системе также использовались как гидрорезисторные, так и термоанемометрические преобразователи. Для измерения средних (мезомасштабных) значений температуры и скорости потока употреблялись термисторы и микровертушки. Кроме того, для измерения скорости звука и скорости потока применялись акустические датчики различной конструкции. Сигналы со всех измерите-

лей системы записывались на магнитные носители в цифровой или аналоговой форме. Сигналы могли также непосредственно в ходе эксперимента вводиться в ЭВМ для статистической обработки. Для оперативного контроля над ходом эксперимента как первичные сигналы, так и данные их обработки могли визуализироваться на самописцах или экранах дисплеев.

При исследовании мелкомасштабных процессов длительность наблюдений на полигоне может быть сравнительно небольшой. Так, если изучается мелкомасштабная турбулентность, а в качестве ее энергоснабжающего (фонового) процесса – внутренние гравитационные волны, то длительность работ на полигоне может не превышать нескольких суток. Такая же продолжительность наблюдений требуется для исследования трансформации тонкоструктурных профилей гидродинамических полей под действием внутренних волн и турбулентности. Молекулярные же процессы трансформации могут иметь большие характерные периоды, в связи с чем для их исследования могут потребоваться более длительные наблюдения. При выборе интервала дискретности наблюдений весьма желательно иметь данные о характеристиках высокочастотных процессов. Как известно из теоремы Котельникова, полная (неискаженная) информация о процессе может быть получена, если дискретность наблюдений Δt (или ΔT) соотносится с частотой (или волновым числом) самой высокочастотной составляющей исследуемого сигнала f_n как $\Delta t \leq 1/2 f_n$. Исходя из этого соотношения и должна выбираться дискретность наблюдений.

При измерениях в режиме буксировки или зондирования получаются, естественно, лишь одномерные сечения исследуемого поля. Такие сечения представляют собой, вообще говоря, случайные функции пространственной координаты и времени. При достаточных скоростях буксировки и зондирования для высокочастотных составляющих сигнала можно использовать гипотезу "замороженной турбулентности", рассматривая получаемые реализации как чисто пространственные. Для таких реализаций можно строить многомерные или одномерные законы распределений исследуемой величины. Можно определять также моменты распределений – среднее значение, среднее квадратическое отклонение, асимметрию, эксцесс и т.д. Весьма информативными для исследуемого процесса являют-

ся спектральные, корреляционные и структурные функции. При взаимном статистическом анализе двух рядов подсчитывается комплекс взаимных статистических характеристик, в частности двумерные плотности распределений, взаимные корреляционные функции, коспектры, квадратурные спектры, взаимные амплитудные и фазовые спектры, а также спектры когерентности. При анализе векторных полей интересно разделить продольные и поперечные корреляционные и спектральные функции.

Измерительные комплексы с целым набором различных датчиков позволяют, вообще говоря, определять не только взаимные статистические характеристики различных полей (в частности, потоки различных субстанций), но и их пространственные и временные производные. Это, в свою очередь, дает возможность оценивать различные члены в осредненных уравнениях движения и переноса, что весьма важно для исследования баланса сил и потоков вещества в исследуемых процессах. В частности, оценка членов в уравнении баланса турбулентной энергии позволяет определить направление и оценить величину потоков осредненной и турбулентной (пульсационной) энергии в системе. Меняя масштаб осреднения, можно оценить вклады в энергетику турбулентности различных фоновых процессов в их взаимосвязи и взаимообусловленности. Все это, в конечном итоге, позволяет строить адекватные модели мелкомасштабных процессов в океане, дает возможность рассчитывать и прогнозировать параметры этих процессов по данным о характеристиках внешних определяющих явлений.

Л и т е р а т у р а

1. Озмидов Р.В. Экспериментальные исследования мелкомасштабной океанической турбулентности в Институте океанологии им. П.П. Ширшова АН СССР / Исследование океанической турбулентности. М.: Наука, 1973. С.3.
2. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоздат, 1981.

УЕДИНЕННЫЕ
ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ:
ТЕОРИЯ И НАТУРНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ

Л.А.Островский, Ю.А.Степанянц

1. ВВЕДЕНИЕ

Выбор темы этой статьи стимулировался двумя факторами. Во-первых, потребностью в отражении на 2-й всесоюзной школе проблематики нелинейных волн (такие пожелания высказывались неоднократно). Во-вторых, мнением авторов о важности выделения в хаосе океанских движений достаточно стабильных детерминированных процессов, для которых можно построить четкие теоретические модели. Отметим, что основной массив данных, добываемых океанологами, до сих пор имеет статистический характер (во всяком случае это относится к микро- и мезомасштабным движениям с характерными длинами от 10 м до 10 км). Значительный вклад в мезомасштабные движения океана вносят внутренние волны (ВВ). Статистическая обработка результатов натурных исследований позволила Гаррету и Манку построить эмпирическую модель спектра ВВ, которая в дальнейшем испытала ряд уточнений. Вместе с тем, имеется много теоретических моделей, в рамках которых можно описать основные свойства ВВ, как линейных, так и нелинейных. Часть этих моделей была проверена в лабораторных опытах, но лишь очень малая часть - в натурных условиях. Дело в том, что в теории чаще всего исследуются динамические задачи о распространении волн, а на практике следить за эволюцией какого-то фиксированного волнового образования трудно, поскольку стандартные гидрофизические датчики дают обычно лишь локальную информацию. Правда, общая картина волнового поля иногда видна

сверху – с самолета или со спутника (об этом мы еще поговорим ниже), но в этих случаях редко известны надежные гидрологические данные, позволяющие построить теоретическую модель явления. В результате вопрос "откуда берется и куда девается энергия внутренних волн?", сформулированный более десяти лет назад [1], до сих пор остается в значительной степени открытым.

Итак, ВВ и нелинейность... Не будем обсуждать всех аспектов этой проблемы (об этом можно прочитать в различных обзорах и монографиях), а остановимся в этой части на одной из них, весьма интересной с точки зрения приведенных выше соображений. Речь идет о внутренних солитонах. Что такое солитон – уединенная нелинейная волна – сейчас знают, вероятно, все, кто вообще как-то соприкасается с изучением волновых процессов. Существование таких объектов – локализованных волн, устойчивых по отношению к широкому классу возмущений, естественно ожидать для ВВ в океане: теоретические модели предсказывали их для вполне реальных волновых параметров. Действительно, океанологи сплошь и рядом "натываются" на одиночные внутренние возмущения, которые нередко и принимают за солитоны. Однако долгое время для этого не было достаточно веских оснований, поскольку не удавалось ни провести теоретические расчеты с учетом всех реальных факторов, ни проследить столь долго за распространением одиночной волны, чтобы утверждать, что она сохраняет свою форму. И лишь в самое последнее время сочетание методов космической океанографии, подводной акустики и "обычной" контактной техники позволило существенно продвинуться в этом вопросе.

Приведем вначале краткую характеристику теоретических моделей, описывающих уединенные ВВ в океане, затем обсудим реальные натурные данные.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВВ

При описании ВВ исходят из известных уравнений динамики слоистой жидкости, для которой задаются равновесное распределение плотности $\rho_0(z)$ и, вообще говоря, скорости гидродинамических течений $\bar{U}_0(z)$, а также граничные условия на поверхности ($z=0$) и на дне ($z=-H$) (иногда пригодна модель бесконечно глубокого океана, тогда $H \rightarrow \infty$). Часто эти условия соответствуют "твердым крышкам", т.е. $\psi|_{z=0} =$

$=\psi|_{z=-h} = 0$, где ψ - вертикальная проекция скорости жидкости. Пока будем говорить о жидкости без сдвиговых течений, когда $\vec{U}_0(z) \equiv 0$.

Солитоны умеренной амплитуды могут существовать лишь при наличии относительно тонкого слоя в океане, когда характерный масштаб волны Δ велик в сравнении с глубиной всего океана или какого-либо его выделенного слоя; тогда и дисперсия, и нелинейность малы, но сравнимы между собой. Начнем с простейшей модели двухслойного океана, когда зависимость плотности от глубины имеет вид скачка на некоторой глубине h , а выше и ниже этого уровня она постоянна. Тогда длинная волна, распространяющаяся вдоль горизонтальной оси x , описывается хорошо изученным уравнением Кортевега-де Вриза (КдВ) [2]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где $\eta(x, t)$ - отклонение границы раздела слоев от невозмущенного уровня,

$$c = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)h_1 h_2}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2}; \quad \alpha = \frac{3}{2} \frac{c}{h_1 h_2} \frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2}; \quad \beta = \frac{c h_1 h_2}{6} \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2},$$

ρ_1, ρ_2 - плотности верхнего и нижнего слоев соответственно, а h_1, h_2 - их толщины. В пределе малых амплитуд волн из уравнения (1) следует дисперсионное уравнение

$$\omega = ck - \beta k^3. \quad (2)$$

Будем рассматривать солитонные решения этого уравнения. КдВ (1), имеющие следующий вид:

$$\eta(x, t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - Vt}{\Delta}. \quad (3a)$$

Скорость солитона V и его характерный полуразмер Δ при этом связаны с амплитудой η_0 соотношениями

$$V = c + \frac{\alpha \eta_0}{3}; \quad \Delta^2 = \frac{12\beta}{\alpha \eta_0}. \quad (3b)$$

Отметим, что дисперсионный коэффициент β положителен, что соответствует "отрицательной" дисперсии ВВ (фазовая скорость $V_\phi = \omega/k = c - \beta k^2$ является убывающей функцией волнового числа). Поэтому соотношение (3b) для Δ^2 имеет смысл, если

$\alpha \eta_0 > 0$, т.е. солитоны могут иметь лишь одну полярность, определяемую знаком α : если $\rho_2 h_1^2 < \rho_1 h_2^2$, то солитоны представляют собой впадины на пикноклине, если же $\rho_2 h_1^2 > \rho_1 h_2^2$, то солитоны — это возвышения пикноклина. В пограничном случае, когда $\rho_2 h_1^2 = \rho_1 h_2^2$, нелинейный коэффициент α обращается в нуль и тогда при выводе уравнения (1) необходимо удерживать следующий нелинейный член, пропорциональный η^3 . В этом случае возмущения пикноклина описываются модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза (МКдВ) [2]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (4)$$

где
$$\alpha_1 = \frac{3c}{h_1^2 h_2^2} \left[\frac{7}{8} \left(\frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2} \right)^2 - \frac{\rho_2 h_1^3 + \rho_1 h_2^3}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2} \right].$$

Это уравнение при $\alpha_1 > 0$ также обладает солитонными решениями, которые имеют следующий вид:

$$\eta(x, t) = \eta_0 \operatorname{sch} \frac{x - Vt}{\Delta}, \quad (5a)$$

где
$$V = c + \frac{\alpha_1 \eta_0^2}{6}, \quad \Delta^2 = \frac{6\beta}{\alpha_1 \eta_0^2}. \quad (5b)$$

Причем их полярность теперь уже может быть любой. Если же $\alpha_1 < 0$, то решений в виде уединенных волн у уравнения (4) нет. Однако в этом случае оно обладает решениями в виде стационарно движущихся фронтов ("бездиссипативных ударных волн"), которые, в сущности, тоже являются солитонами:

$$\eta(x, t) = \eta_0 \operatorname{th} \frac{x - Vt}{\Delta}, \quad (6a)$$

$$V = c + \frac{\alpha_1 \eta_0^2}{3}, \quad \Delta^2 = -\frac{6\beta}{\alpha_1 \eta_0^2}. \quad (6b)$$

При этом вертикальная компонента скорости $w = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ имеет вид импульса.

Возможны также ситуации, когда коэффициент α не равен в точности, но близок к нулю, тогда результирующее уравнение содержит оба нелинейных слагаемых с коэффициентами α и α_1 [2]. Солитонное решение в этом случае имеет вид

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0}{1 + \alpha \operatorname{sh}^2 \frac{x - Vt}{\Delta}}, \quad (7a)$$

$$V = c + \frac{\alpha \eta_0}{3} + \frac{\alpha_1 \eta_0^2}{6}; \quad \Delta^2 = \frac{12\beta}{\alpha \eta_0 + 0,5 \alpha_1 \eta_0^2}, \quad \alpha = \frac{\alpha + \alpha_1 \eta_0}{\alpha + 0,5 \alpha_1 \eta_0}. \quad (76)$$

Другая модель — тоже двухслойная, но с очень глубоким нижним слоем, когда $h_1 \ll \Lambda \ll h_2$, и можно положить $H(\equiv h_1 + h_2) \rightarrow \infty$. В этом случае радикально изменяется характер дисперсии (возмущения в нижнем слое экспоненциально убывают с глубиной):

$$\omega = ck - \delta |k|k. \quad (8)$$

Нелинейные волны при этом описываются уравнением Бенджамин-Оно [2]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} - \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(x', t)}{x - x'} dx' = 0, \quad (9)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} g h_1}; \quad \alpha = \frac{3}{2} \frac{c}{h_1}; \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} ch.$$

Солитонные решения уравнения (9) также хорошо известны — это так называемые алгебраические солитоны со степенными асимптотиками при $|x|, |t| \rightarrow \infty$ (тогда как солитоны (3), (5) обладают экспоненциально спадающими асимптотиками):

$$\eta(x, t) = \frac{-\eta_0 \Delta^2}{\Delta^2 + (x - Vt)^2}, \quad (10a)$$

$$V = c + \frac{\alpha \eta_0}{4}; \quad \Delta = \frac{4\delta}{\alpha \eta_0}. \quad (106)$$

Полярность этих солитонов отрицательна, что соответствует углублениям на пикноклине (в тех случаях, когда пикноклин прижат к дну под глубоким слоем воды, решение (10a) содержит знак плюс перед η_0 , и полярность солитонов положительная).

Как будет показано ниже, в экспериментах нередко наблюдаются такие возмущения, для которых характерный масштаб сравним с глубиной нижнего слоя h_2 , но значительно превы-

шает глубину верхнего слоя h_1 . В этом случае исходные уравнения гидродинамики сводятся к уравнению Джолефа [3], которое в предельных случаях переходит как в уравнение КдВ, так и в уравнение Бенджамина-Оно:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} - \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} G(x'-x) \eta(x', t) dx' = 0, \quad (11)$$

где коэффициенты c и α такие же, как и в уравнении (9), а ядро интеграла G определяется следующим образом:

$$G(\xi) = \frac{c}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{\kappa h_1}{2} \left(\operatorname{cth} \kappa h_2 - \frac{1}{\kappa h_2} \right) \right] e^{i\kappa \xi} d\kappa. \quad (12)$$

Дисперсионное уравнение, вытекающее из (11), имеет вид

$$\omega = ck \left[1 - \frac{\kappa h_1}{2} \left(\operatorname{cth} \kappa h_2 - \frac{1}{\kappa h_2} \right) \right]. \quad (13)$$

Солитонные решения уравнения (11) можно представить в форме

$$\eta(x, t) = \frac{A h_2 \frac{\beta^2}{a^2}}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{x-Vt}{ah_1} \right) + \frac{\beta^2}{a^2} \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x-Vt}{ah_1} \right)}, \quad (14a)$$

где

$$V = c \left[1 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{1}{\beta a} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{\beta a} \right) \right]; \quad \beta = \frac{h_1}{h_2} \ll 1, \quad (14b)$$

безразмерные параметры A, a, β связаны между собой соотношениями: $A = -\frac{4}{3a} \operatorname{tg} \frac{1}{\beta a}$; $\beta = -\frac{4}{3A}$. Эти формулы справедливы при $a \gg \frac{2}{\beta a}$; $A \ll 1$. Предельные выражения, следующие из этих формул в случаях, когда пространственный масштаб возмущений мал по сравнению с толщиной нижнего слоя h_2 или, наоборот, велик, а также переходы от формулы (14) к формулам (3), (10), содержатся в работе [3].

Конечно, в природных условиях стратификация далеко не всегда может быть аппроксимирована простой двухслойной моделью. При плавной стратификации поле ВВ в линейном приближении можно представить в виде суперпозиции счетного набора мод, структура которых определяется решением линейной краевой задачи. В нелинейном случае моды могут взаимодей-

ствовать, но при слабой нелинейности это взаимодействие часто несущественно (если не выполняются специальные резонансные условия), и можно рассматривать эволюцию каждой моды по отдельности, а вертикальную структуру моды считать такой же, как и в линейном случае. Существует несколько различных способов описания нелинейных ВВ. В одном из самых общих подходов [4] в качестве основных переменных принимаются горизонтальная скорость жидкости \vec{u} и смещение изопикнических поверхностей ξ ; в этом случае разделяются вертикальные и горизонтальные компоненты движений: $\xi(x, y, z, t) = f_n(z) \eta_n(x, y, t)$; $\vec{u} = H \frac{df_n}{dz} \vec{U}(x, y, t)$, где n обозначает номер моды, а $f_n(z)$ определяется из решения линейной краевой задачи. Как показано в работе [4], излагаемый подход позволяет записать для ВВ двумерные уравнения, сходные по виду с уравнениями "мелкой воды", хорошо известными в теории поверхностных волн. Для плоской бегущей волны из них опять следует уравнение КдВ (1), где

$$\alpha = (3/2) c_n \frac{\int_{-H}^0 \rho_0(z) (f'_n)^3 dz}{\int_{-H}^0 \rho_0(z) (f'_n)^2 dz}, \quad \beta = (3c_n/2) \frac{\int_{-H}^0 \rho_0(z) f_n^2 dz}{\int_{-H}^0 \rho_0(z) (f'_n)^2 dz},$$

(здесь штрих обозначает дифференцирование по z). Скорость линейных возмущений c_n в длинноволновом пределе ($\kappa \rightarrow 0$) и собственная функция $f_n(z)$ моды с номером n определяются из решения краевой задачи:

$$\frac{d}{dz} \left(\rho_0(z) \frac{df_n}{dz} \right) + \rho_0(z) \frac{N^2(z)}{c_n^2} f_n = 0,$$

$$f_n(0) = f_n(-H) = 0. \quad (15)$$

При переходе к двухслойной модели отсюда, конечно, следуют приведенные выше выражения для коэффициентов α и β . При использовании известного приближения Буссинеска, когда изменение плотности с глубиной считается пренебрежимо малым (точнее, $\rho'_0 \rightarrow 0$, $g \rightarrow \infty$, но $g\rho'_0 = \text{const}$), в формулах для α и β плотность не содержится. Любопытная ситуация возникает, если океан экспоненциально стратифицирован, так что частота Брента-Вайсяля $N = \sqrt{-g(\rho'_0/\rho)}$ постоянна (отметим, что в приближении Буссинеска линейная стратификация не отли-

чается от экспоненциальной). Тогда собственные функции краевой задачи (15) – это просто синусоиды, и, очевидно, $\alpha \sim \int_{-H}^0 (f'_n)^3 dz = 0$. Чтобы учесть влияние нелинейности, здесь приходится либо удерживать кубическую нелинейность, переходя к уравнению МКДВ, либо отказываться от приближения Буссинеска, либо учитывать свободную поверхность (впрочем, и в точной постановке коэффициент α может быть равен нулю для некоторых частных видов стратификации).

Аналогичное обобщение можно сделать и для уравнения Бенджамина–Оно (9) [5,6]; при этом коэффициенты α и δ равны

$$\alpha = (3/2)c_n \frac{\int_{-\infty}^0 \rho_0(z) (f'_n)^3 dz}{\int_{-\infty}^0 \rho_0(z) (f'_n)^2 dz}; \quad \delta = (c_n/2) \frac{\int_{-\infty}^0 \rho_0(z) f_n^2 dz}{\int_{-\infty}^0 \rho_0(z) (f'_n)^2 dz},$$

где c_n и $f_n(z)$ определяются из той же краевой задачи (15), но с другими граничными условиями: $f_n(0) = 0$ и $f'_n(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$.

Уравнения КдВ и Бенджамина–Оно применительно к солитонам изучены очень подробно – для них получены семейства точных решений. Важный вывод теории состоит в том, что солитоны в рамках этих уравнений представляют собой конечный результат эволюции для весьма широкого класса начальных возмущений. При этом они обладают устойчивостью по отношению к взаимодействию с другими типами возмущений, а также к воздействию диссипации, неоднородности и т.п. Это позволяет предположить, что модели КдВ и Бенджамина–Оно могут быть использованы для первичной оценки реальных океанских ситуаций. Однако для детального сопоставления с натурными данными здесь не хватает учета многих факторов; перечислим некоторые из них:

- вращение Земли; его учет приводит к повышению порядка исходного уравнения для бегущей волны [4];
- расходимость и сходимость волн "в плоскости океана"; для области, не слишком близкой к источнику, их описание сводится к добавлению в уравнениях (1), (4), (9), (11) слагаемого вида $\eta/2\tau$;
- неоднородность океана, которая приводит к зависимости коэффициентов α и β от τ и появлению дополнительных слагаемых в указанных уравнениях;

- затухание; этот фактор трудно учесть однозначно, поскольку причины затухания могут быть различными. Некоторые механизмы диссипации рассматривались в работах [7,8];

- сдвиговые течения. Этот важный фактор зачастую радикально меняет ситуацию, поскольку скорости течений вполне могут быть сопоставимы и даже превышать скорости распространения ВВ. Основным параметром здесь является, как известно, число Ричардсона $Ri = \left[\frac{N(z)}{U'_0(z)} \right]^2$. Если повсюду $Ri > \frac{1}{4}$, то, согласно теореме Майлса-Ховарда [9], течение является устойчивым и влияет лишь на дисперсионные свойства ВВ. Для этих условий в работе Ли и Бедсли [10], а затем и других авторов [11-13] было получено уравнение КдВ с учетом течений. При этом основные параметры уравнения (1) имеют вид

$$\alpha = \frac{1}{q} \int_{-H}^0 \left\{ \frac{\rho_0 f_n^3}{2(U_0 - c_n)} \left[\frac{2U'_0 (N^2)'}{q(U_0 - c_n)} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0 U''_0}{U_0 - c_n} \right)' + \frac{U_n - c_n}{gN^2} \left(\frac{N^4}{(U_0 - c_n)^3} \right)' \right. \right. \\ \left. \left. + \rho'_0 f_n (f'_n)^3 + f_n^2 f'_n \left[\frac{2}{g} \rho_0 (U_0 - c_n) \left(\frac{N^2}{U_0 - c_n} \right)' \right] \right\} dz, \\ \beta = \frac{1}{q} \int_{-H}^0 \rho_0 f_n^2 dz; \quad q = \int_{-H}^0 \frac{f_n^2}{(U_0 - c_n)^2} \left[(\rho_0 U'_0)' + \frac{2\rho'_0}{U_0 - c_n} \right] dz,$$

где f_n и c_n определяются из решения линейной краевой задачи Тейлора-Гольдштейна

$$\frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{df_n}{dz} \right) - \frac{f_n}{(U_0 - c_n)^2} \left[(U_0 - c_n) \frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{dU_0}{dz} \right) + \frac{d\rho_0}{dz} \right] = 0, \\ f_n(0) = f_n(-H) = 0. \quad (16)$$

Любопытно, что и здесь иногда возникают такие ситуации, при которых $\alpha_n = 0$ для четных мод и $\alpha_n \neq 0$ для нечетных мод, т.е. вторые оказываются "более нелинейными" и описываются уравнением КдВ, тогда как первые - уравнением МКдВ.

Если же $Ri < \frac{1}{4}$ при некоторых значениях z , то течения могут быть неустойчивыми, а ВВ - нарастающими. Неустойчивостью такого рода, по-видимому, может быть связан важный механизм возбуждения ВВ, возможно даже приводящий к формированию и усилению солитонов. Однако соответствующие натурные наблюдения еще слишком неопределенны в этом отношении, и использовать такие "неустойчивые" модели для

сравнения с реальными данными затруднительно. Тех, кто хочет ознакомиться подробнее с этой интересной проблемой, отсылаем к работам [14,15].

Прежде чем переходить к анализу данных натурных наблюдений уединенных ВВ, упомянем вкратце о некоторых лабораторных экспериментах [16-19], в которых изучался вопрос о границах применимости рассмотренных здесь теоретических моделей. Из результатов этих работ вытекают следующие выводы.

1) Двухслойная модель, используемая чаще всего при анализе натурных и лабораторных экспериментов, является все же слишком грубой и может служить лишь для оценки величин тех или иных параметров. Учет конечности толщины пикноклина вносит заметную поправку и приводит к лучшему согласию теоретических и экспериментальных данных.

2) Модель КдВ оказалась на удивление универсальной, а границы ее применимости шире, чем можно было предполагать. В частности, форма уединенных волн, наблюдавшихся в экспериментах [16-18], значительно лучше описывается формулой (3), чем (10) или (14), даже в тех случаях, когда характерный размер волны вдоль направления ее движения сравним или несколько меньше глубины нижнего слоя. Формула (3) оказалась также пригодной и для описания волн с немалой амплитудой, когда амплитуда уединенной ВВ была сравнима и даже несколько превышала толщину верхнего слоя жидкости, хотя собственно уравнение КдВ обычно выводится в предположении о слабой нелинейности. По-видимому, этот факт объясняется тем, что, как было показано в работе [20], стационарные уединенные волны произвольной амплитуды (но все же достаточно длинные) могут быть описаны формулой (3) (правда, в работе [20] точное аналитическое решение вида (3) получено лишь для двух моделей с плавным изменением плотности в случаях линейной и экспоненциальной стратификации). Так или иначе, эксперименты [16-18] показали, что рамки применимости модели Джозефа значительно уже, чем модели КдВ.

Перейдем теперь к обсуждению данных натурных наблюдений.

3. НАТУРНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ УЕДИНЕННЫХ ВВ

Первые инструментальные исследования ВВ в морях и океанах были проведены еще в конце 20-х - начале 30-х годов. Однако интенсивное систематическое исследование ведется

лишь на протяжении последних 20 лет. Уже в первых экспериментах [21,22] было обнаружено, что поле ВВ часто имеет выраженный дуговой характер, причем внутри отдельных дугов крутизна волн (отношение амплитуды к длине) может достигать довольно больших значений (порядка 0,1–0,2 и более). Этот факт свидетельствует о существенной нелинейности поля ВВ. Другая важная особенность поля ВВ, заключается в том, что на записях приборов время от времени отмечаются отдельные всплески, значительно превосходящие по амплитуде, крутизне, скорости распространения "фоновые" ВВ, типичные для данного района наблюдений. Первоначально эксперименты проводились преимущественно во внутренних морях и озерах или в мелководных областях шельфовой зоны, где по теоретическим соображениям (наличие сравнимых по величине эффектов нелинейности и дисперсии) естественно было ожидать появления удивительных ВВ. И лишь последние 3–5 лет стали изучаться удивительные ВВ в глубоководных районах океана, для которых долгое время возможность существования таких волн считалась сомнительной. Заметим, что в ранних экспериментах использовалась недостаточно совершенная аппаратура, позволявшая, как правило, регистрировать колебания температуры лишь в одной точке. Добытые таким образом экспериментальные данные не позволяют провести детального сравнения с теоретическими предсказаниями, поскольку для теории требуется знание профилей плотности и скорости сдвиговых течений. Кроме того, если речь идет о солитонах, то наблюдений в одной точке обычно недостаточно, поскольку при этом трудно сделать определенные заключения о направлении распространения волны, ее стационарности и т.п. В качестве примера приведем эхограмму, на которой изображено одиночное образование, похожее по форме на солитон^{*)} (рис.1,а). Однако повторное зондирование в том же районе спустя 25 мин показало, что это возмущение за короткое время полностью распалось на дуги (рис.1,б). Измерения, проводившиеся Коняевым [23] в Каспийском море с помощью антенны из пространственно разнесенных датчиков, также указывают на то, что одиночные образования нередко оказываются нестационарными возмущениями, которые сравнительно быстро изменяются по форме от датчика к датчику на расстояниях порядка 30 м, т.е. практически на масштабе своей длины.

^{*)} Частное сообщение Д.А.Селивановского, эхограмма получена им в Японском море.



а)



б)

Р и с. 1. Эхограмма ВВ, иллюстрирующая одиночный импульс, похожий на солитон (а) и эхограмма того же района спустя 25 мин (б)

Эти примеры показывают, что при измерениях в одной точке в условиях неполного знания гидрологии и пространственной картины поля ВВ трудно сделать уверенные заключения о соответствии экспериментальных данных теоретическим представлениям. Тем не менее, попытки хотя бы грубого сравнения данных теории и эксперимента проводились многими авторами; неудивительно, что при этом отмечается довольно большое несоответствие между сопоставляемыми величинами.

Проводимые в последние годы эксперименты в глубоководных районах океана хотя и обеспечены более совершенной аппаратурой, но все же часто обладают теми же недостатками: отсутствие информации о поле средних течений, наблюдения с помощью контактных датчиков в одной точке. К этим недостаткам добавляется еще и плохо контролируемый дрейф судна, с которого ведутся измерения, или буя (в мелководных районах измерения можно проводить со стационарных платформ [23] или даже с пирса [24]). Правда, дополнительная информация о направлении движения ВВ и ширине их фронта может быть получена либо визуально, либо с использованием дистанционных оптических и радиолокационных средств, устанавливаемых на самолетах или спутниках. Одним из перспективных средств исследования ВВ в океане является использование акустических эхолокаторов и доплеровских сонаров, которые в натуральных экспериментах применяются еще недостаточно широко.

Итак, вначале приведем сведения об экспериментах, проводившихся в мелководных прибрежных районах, а затем об экспериментах в глубоком океане. Такое разделение эксперимен-

тов на "мелководные" и "глубоководные" до некоторой степени условно, однако оно все же имеет определенные основания, связанные с различием гидрологии, характера проявления ВВ, их гипичных параметров.

3.1. Уединенные внутренние волны на мелководье

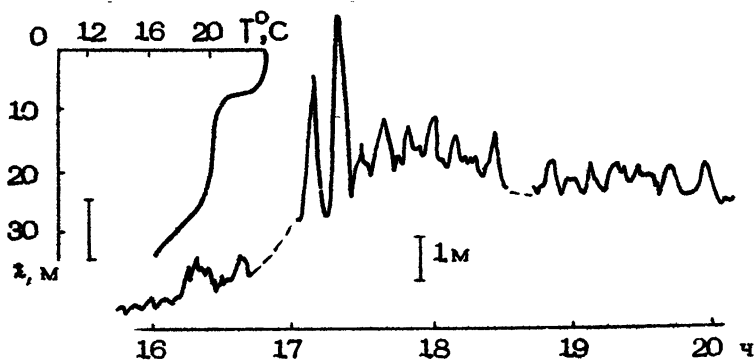
Опишем основные свойства и особенности уединенных ВВ в шельфовых районах морей с глубинами порядка 30–50 м. В этих областях нередки случаи, когда стратификация носит ярко выраженный двухслойный характер, причем нижний слой бывает и толще, и тоньше верхнего. В периоды штормов в шельфовой зоне происходит интенсивное перемешивание воды, после которого температурная стратификация восстанавливается в течение нескольких суток благодаря двум процессам: медленному заглублению верхних, прогретых солнцем слоев и постепенному подъему придонных слоев из-за притока холодной воды из открытых частей моря. В зависимости от того, какой из этих процессов преобладает, термоклин устанавливается либо вблизи поверхности, либо вблизи дна (отметим, что в прибрежных районах плотность морской воды определяется почти исключительно температурой, соленость при этом оказывается распределенной практически равномерно по глубине). Нередки случаи, когда на протяжении многих суток наблюдается плавное распределение температуры без резко выраженного термоклина.

Другая важная гидрологическая характеристика района наблюдений – структура поля течений – до сих пор исследована мало. Отсутствие данных о поле течений, как уже отмечалось, не позволяет правильно рассчитать коэффициенты соответствующих модельных уравнений, о которых шла речь в предыдущем разделе, что в конечном счете приводит к заметному расхождению между параметрами наблюдаемых одиночных образований и параметрами солитонов. Некоторую коррекцию в теоретические расчеты иногда можно внести, используя усредненные по многолетним наблюдениям данные о поле течений, которые содержатся в тех или иных атласах, справочниках, лоциях и других изданиях.

На шельфовом термоклине часто наблюдается внутренний бор – резкое ступенчатое изменение уровня термоклина, сопровождаемое импульсными колебаниями большой амплитуды. Такого рода события отмечались неоднократно в разных условиях. Торп [25], Ханкикс и Флигель [26], Фармер [27] на-

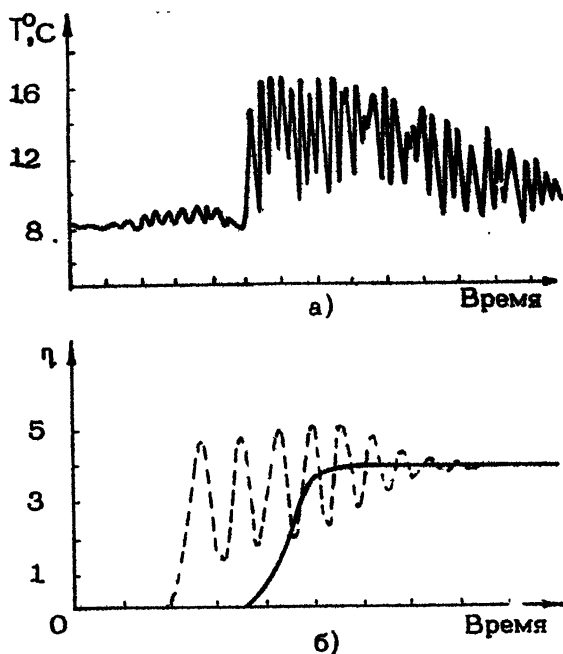
блюдали резкие заглублиения гермоклина, движущиеся вдоль продольной оси длинных и узких озер. Аналогичное явление в Массачусетском заливе было описано в работах Хэлперна [28] и Хаури, Бриско и Орра [29]. В некоторых работах описано появление боров в виде поднятия придонного гермоклина, прижатого ко дну. Винант [24] наблюдал это явление на небольшой глубине (около 5 м) с пирса Скриппсовского океанографического института на Тихоокеанском побережье США. В нашей стране подобные явления неоднократно регистрировались Ивановым, Коняевым и Серебряным [23,30-31] в Каспийском море. Причины, вызывающие появление боров, в настоящее время изучены еще недостаточно, однако уже сейчас можно назвать некоторые из них. Так, при наблюдении в озерах [25-26] отмечалось, что бор возникал после ослабления ветра, дувшего почти вдоль оси вытянутых озер; в других случаях вероятная причина образования боров могла быть связана с интрузией теплых поверхностных или холодных придонных масс воды из открытых областей моря. В открытых морях, непосредственно связанных с океаном, боры могут образовываться в результате эволюции бароклинных волн, которые сами возникают при трансформации баротропных приливных движений [28], что, по-видимому, часто бывает в дальневосточных морях СССР. В Каспийском море приливные движения незначительны; здесь более вероятной причиной образования бора является трансформация длинной внутренней волны при ее выходе на мелководье [23,30].

Появление боров интересно для нас тем, что оно сопровождается интенсивной генерацией уединенных короткопериодных волн. Как правило, самые крупные уединенные ВВ наблюдаются вблизи фронтов боров (рис.2), однако бывают и опережающие уединенные ВВ, движущиеся перед фронтами боров. В целом характер трансформации бора весьма напоминает распад прямоугольной "ступеньки" на последовательность солитонов, хорошо изученный теоретически для уравнения КдВ [32-34]. Однако в количественном отношении применимость модели КдВ для описания такого рода процессов нередко оказывается сомнительной, поскольку амплитуды уединенных волн достигают довольно больших значений, так что нелинейность нельзя считать малой. Например, в одной из первых работ по наблюдению уединенных ВВ Хэлперном [28] отмечались возмущения с амплитудой 10 м при общей глубине залива всего 25 м. Используя данные Хэлперна, Ли и Бедечи [10] в дальнейшем вывели уравнение КдВ, а затем дополнили его кубичным сла-



Р и с. 2. Наблюдение бора [23], на фронте которого отчетливо видны уединенные ВВ. Слева – зависимость температуры от глубины в районе работ (Каспийское море) и положение распределенного датчика температуры

гаемым, в результате чего получилось комбинированное уравнение КдВ–МКдВ, которое, по мнению авторов, более подходит для описания волн с немалой амплитудой. В рамках этого уравнения ими был произведен расчет на ЭВМ эволюции сглаженной "ступеньки". Расчет показал, что в процессе движения такое возмущение распадается на солитоны (рис.3), параметры которых лучше согласуются с параметрами уединенных ВВ, наблюдавшихся Хэлперном [28]: чем это даст линейная теория. Например, скорость солитонов в расчетах [10] составляла 0,53 м/с, тогда как линейная теория дает 0,41 м/с для бесконечно длинных ВВ и 0,35 м/с для волн с таким же периодом, как и в наблюдавшемся случае. Согласно же данным Хэлперна [28] скорость перемещения пакета уединенных ВВ составляла $(0,88 \pm 0,22)$ м/с. Как видно из этих данных, имеются все же значительные различия между выводами нелинейной теории и экспериментально измеренными величинами (отметим, впрочем, относительно низкую точность эксперимента – всего 25%). Наиболее вероятная причина такого расхождения теории и эксперимента, по нашему мнению, может быть обусловлена наличием не контролируемых в эксперименте течений. В такой ситуации, когда точные значения параметров α и β в уравнении КдВ (1) рассчитать не удается, можно по экспериментальным данным определить величину произведения ампли-



Р и с. 3. Наблюдение бора в Массачусетском заливе (а) [28] и численное моделирование распада сглаженной "ступеньки" на солитоны (б) [10]. Масштабы временных осей различны и здесь не указаны в виду качественного сравнения процессов

гуды уединенной волны η_0 на квадрат ее характерной полуширины Δ . Согласно формуле (36) это произведение для солитонов КдВ постоянно и зависит только от параметров среды. Скорость же солитонов линейно связана с их амплитудой — см. (36), что тоже можно проверить экспериментально, если наблюдения проводятся хотя бы в двух различных точках. Произведение $\eta_0 \Delta^2$ вычислялось в работе [31] для одиночных возмущений, наблюдавшихся в Каспийском море. Эта величина оказалась довольно изменчивой; так, для одной группы одиночных ВВ она заключалась в пределах 5 – 8 м·мин², а для другой группы — 1,7 – 7 м·мин². Максимальные всплески волн при этом колебались от 3 – 5 м в большинстве случаев до 11 м в отдельных событиях. Характерные масштабы одиночных образований лежали в пределах 65 – 250 м (наблюдения проводились на термоклине, залегавшем в 6 м от дна при об-

шей глубине моря в районе работ около 36 м [31]). По этим данным сколько-нибудь уверенно говорить о наблюдении солитонов не приходится, хотя и не исключено, что часть из обнаруженных импульсов действительно представляла собой солитоны. Изменчивость произведения $\eta_0 \Delta^2$ могла быть связана либо с нестационарностью среды (например, переменные во времени течения), либо с нестационарностью возмущений (на стадии формирования солитонов указанная величина может значительно изменяться).

Подводя итог первому этапу исследований уединенных волн в мелких морях и озерах, проведенному за десятилетие в 70-х годах, приходится признать, что убедительных доказательств существования солитонов ВВ в этих экспериментах получено не было, хотя одиночные образования, похожие по форме на солитоны, отмечались многократно различными авторами. Основные недостатки этого этапа исследований, по нашему мнению, заключаются в том, что в этих экспериментах использовалась еще недостаточно совершенная аппаратура (в основном контактные датчики для измерения температуры слоя воды), не была отработана методика проведения эксперимента по регистрации пространственной эволюции уединенных волн (эксперименты, как уже говорилось, проводились преимущественно в одной точке), не было полных данных о характере гидрологии в районе работ (течения измерялись лишь в редких случаях на отдельных горизонтах). Вместе с тем уже эти первые эксперименты дали много полезной информации о поле ВВ в мелководных областях, выявили достаточно частую распространенность одиночных образований, привели к открытию такого явления, как "подводный" бор. В этих же исследованиях проявились одна из важнейших причин генерации короткопериодных ВВ в открытых морях, связанная с трансформацией баротропных полусуточных приливов.

На следующем этапе исследований - с начала 80-х годов - интерес исследователей в большей степени переместился на изучение уединенных ВВ в глубоководных районах океана. Соответствующие эксперименты опишем в следующем разделе.

3.2. Уединенные волны в глубоководных районах океана

Еще несколько лет назад существование уединенных стационарных ВВ в открытом океане представлялось сомнительным. Теперь же стало ясно, что, по крайней мере, в пришельфовой

глубоководной полосе на расстояниях 300–500 км от материков, уединенные ВВ встречаются нередко; более того, сейчас известны районы, в которых уединенные волны можно наблюдать регулярно по два раза в сутки в соответствии с периодичностью полусуточных приливных возмущений. В данном разделе опишем известные к настоящему времени эксперименты по наблюдению уединенных ВВ в глубоководных районах океана (с глубинами от 500 м и выше), проведенные с начала 80-х годов.

Прежде всего отметим, что в глубоководных районах стратификация не подвержена столь быстрым (в течение нескольких часов) и кардинальным изменениям, как в мелководных районах. Обычно в океане в тропических и умеренных широтах наблюдаются два достаточно отчетливо выраженных пикноклина: сезонный, расположенный на глубинах 50–100 м, и главный, залегающий на глубинах 100–300 м. Первый из них, проявляющийся в летние месяцы года и незаметный в зимние (что и отражено в названии "сезонный"), как правило, сопровождается более резкими перепадами температуры, солености и плотности и является относительно тонким (с характерной толщиной порядка 10–30 м, иногда до 50–70 м). Он обусловлен интенсивным прогревом поверхности океана солнцем, перемещением верхнего слоя обрушивающимися ветровыми волнами, интрузиями распресненных вод с материков и другими факторами. Параметры же главного пикноклина практически не подвержены сезонным изменениям, он характеризуется менее резкими градиентами гидрофизических полей, его толщина составляет 50–100 м. Во всех экспериментах, о которых речь пойдет ниже, как сезонный, так и главный пикноклины были расположены ближе к поверхности океана, чем ко дну, так что отношение глубин верхнего и нижнего слоев составляло $h_1/h_2 = 0,01-0,25$.

О наблюдении уединенных ВВ в глубоководных районах океана сообщалось в работах [35–40, 41–42]. Согласно имеющимся данным, уединенные ВВ могут проявляться как в сезонном, так и в главном пикноклине. Скорости их распространения составляют от 1 до 2,5 м/с. При этом они представляют собой "углубления" на пикноклине с амплитудой от 20 до 100 м (в отдельных случаях до 130 м^{*)}). Характерный размер уединенных ВВ (ширина на уровне 0,5 от максимальной величины) составляет 200 – 3000 м. Длина фронта, измеренная с помо-

^{*)} Частное сообщение К.Д.Сабинина.

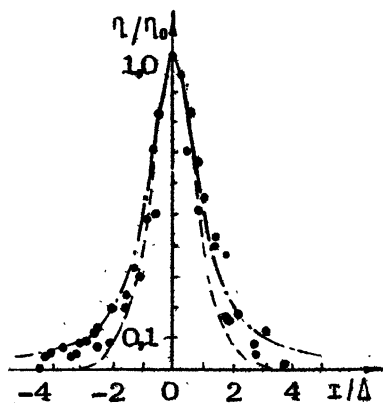
шью фотографирования из космоса по их проявлению на поверхности океана в виде полос усиленно о волнения, достигает 350 км.

Основной причиной, порождающей уединенные ВВ в океане, является, по-видимому, полусуточный прилив, причем уже сегодня известны такие районы, где уединенные волны появляются регулярно группами (например, Андаманское море [35] или море Сулу [39,40]). В работах [35,39-40], а также в ряде других, отмечалась четкая корреляция между интенсивностью уединенных ВВ и их количеством, с одной стороны, и высотой прилива - с другой (в сизигию наблюдается большее количество более крупных уединенных ВВ, чем в квадратуру). Количество уединенных ВВ генерируемых в одном приливном цикле, может достигать 20 [43], при этом они содержат энергию порядка 10^{20} эрг, или 10% от полной энергии прилива. По оценкам других авторов [44], во ВВ может трансформироваться до 95% энергии прилива. По-видимому, этот процесс сильно зависит от географического района и местных условий.

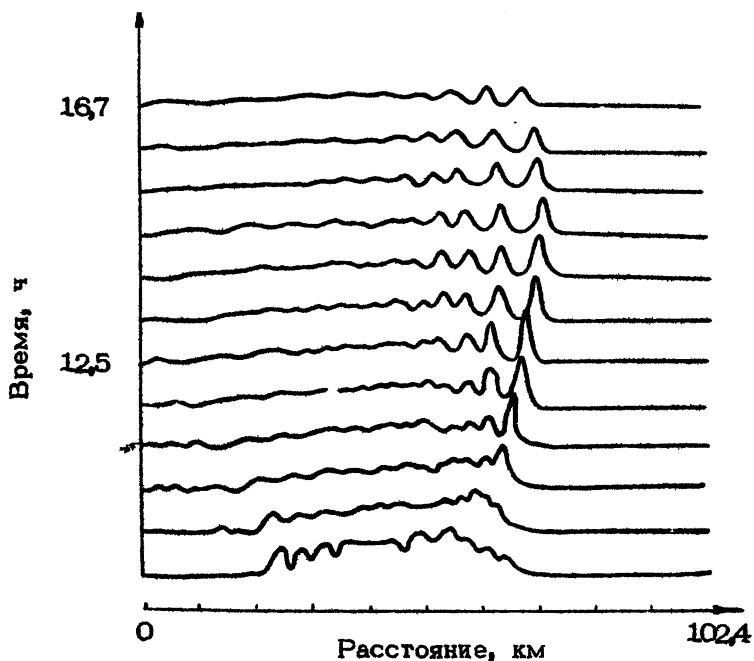
Что касается вопроса о том, являются ли наблюдавшиеся в глубоком океане уединенные ВВ солитонами, то в большинстве случаев уверенного положительного ответа дать опять же нельзя, ибо и здесь чаще всего натурные наблюдения ведутся в одной точке, и поэтому ничего нельзя сказать о пространственно-временной эволюции таких возмущений. В этих условиях обычно сравнивают наблюдаемую форму волны с одной из теоретических (3), (10), (14) в зависимости от того, какая из моделей оказывается наиболее адекватной экспериментальной ситуации. Здесь следует отметить тот факт, что разброс экспериментальных данных оказывается большим, нежели тонкие различия в теоретической форме солитонов КдВ, Бенджамина-Оно или Джозефа. На рис.4 сопоставляются экспериментально измеренные уединенные волны в Гвианской котловине [36] с солитонами КдВ и Бенджамина-Оно. Интересно, что модель КдВ оказывается пригодной для описания уединенных волн значительной амплитуды, характерная длина которых порядка глубины океана, - факт, который уже отмечался при описании лабораторных экспериментов.

Наиболее полное исследование динамики уединенных ВВ от момента их зарождения до разрушения на береговом шельфе проведено в работах [39-40]. Измерения проводились как контактными методами в трех различных точках вдоль направления движения волн, так и дистанционными методами со спутников и судов. В этих работах была установлена связь между появ-

Р и с. 4. Сопоставление экспериментально измеренных уединенных волн [36] с солитоном КдВ (пунктир) и БО (штрихпунктир)



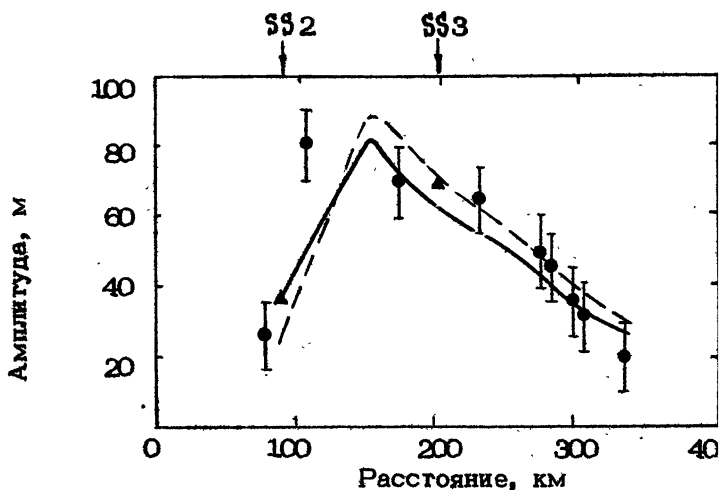
лением прилива в море Сулу и генерацией уединенных ВВ. Наблюдения показали, что приливная волна создает начальное возмущение, которое по мере распространения постепенно становится круче, образует ондулярный бор, в свою очередь затем распадающийся на ряд уединенных волн. Амплитуды этих волн на глубине 200 м составляли 70, 51, 20 м и т.д. (всего около шести уединенных волн). Детальное измерение гидрологии (температуры воды, ее солености и распределения скорости сдвигового течения с глубиной) позволило авторам рассчитать коэффициенты уравнения КдВ, дополненного членами, описывающими диссипацию энергии ВВ, обусловленную турбулентной вязкостью, и цилиндрическую расходямость. Проведенные авторами численные расчеты (рис.5) показали хорошее согласие между параметрами наблюдавшихся уединенных ВВ и параметрами солитонов, полученных из решения этого уравнения. На рис.6 показана зависимость амплитуды лидирующей в группе волны от расстояния (сплошная кривая – численный расчет, точки и треугольники – экспериментальные данные). На начальном этапе эволюции амплитуда лидирующей волны увеличивается из-за формирования на ее фронте солитона (согласно теории КдВ, амплитуда первого солитона примерно вдвое превышает амплитуду начального возмущения, если число солитонов в группе достаточно велико), а затем происходит плавное убывание амплитуды солитона вследствие вязких потерь и цилиндрической расходямости. Отметим, что оба эти эффекта могут быть рассчитаны аналитически в рамках приближенной адиабатической теории, хорошо согласующейся как с численными расчетами, так и с натурными наблюдениями. Время жизни наблюдавшихся уединенных ВВ составляло 2,5 суток; за это время они прохо-



Р и с. 5. Численный расчет [40] эволюции начального возмущения с образованием солитонов и их последующим затуханием

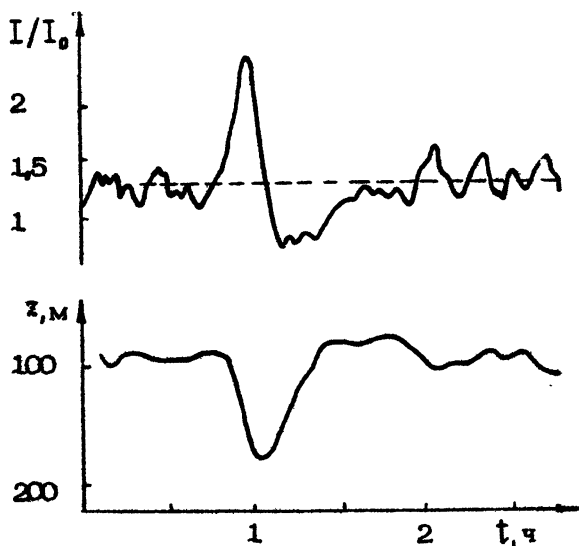
дили расстояние около 300 км. Эти работы [39,40] убедительно показали, что в глубоководных районах океана (глубины более 3000 м) могут существовать солитоны ВВ, описываемые уравнением КдВ. Одновременно эти работы позволяют думать, что и в других случаях [35–38,42,43] наблюдались солитоны, соответствующие первой моде ВВ, поскольку внешние условия во всех случаях были схожими.

Остановимся вкратце на поверхностных проявлениях ВВ. Нагурные наблюдения показывают, что при скоростях ветра от 2 до 11 м/с движение уединенных ВВ сопровождается сопутствующим движением по поверхности океана полос повышенного поверхностного волнения. Ширина полос может достигать 1 км, а располагаются полосы обычно над передним фронтом волны. В области полос поверхностное волнение настолько интенсивно, что наблюдается обрушение волн с образованием пенных барашков, в результате чего эти полосы хорошо различимы даже не-



Р и с. 6. Изменение амплитуды лидирующего сгона в группе [40]. Сплошная кривая и пунктир — численный расчет по начальному возмущению, измеренному на глубинах 200 и 100 м соответственно. Точками и треугольниками отмечены экспериментальные данные, полученные различными приборами; стрелками отмечены положения буйковых станций

вооруженным глазом. По данным работы [35], амплитуда поверхностных волн в области полос усиленного волнения достигала 1,8 м, тогда как амплитуда волн вне сулоя была 0,6 м. Частота обрушения волн на единицу поперечной длины сулоя может в пять раз превышать среднюю частоту в спокойном море [45]. Интересно, что в спокойном море над интенсивными ВВ наблюдается полоса выравнивания, в которой поверхностное волнение подавлено относительно фона. Так, амплитуды поверхностных волн в полосе выравнивания во время наблюдения уединенных ВВ составляли 0,1 м. Такое выравнивание морской поверхности уменьшает ее отражательные свойства, в результате чего создается эффект блестящей (полосу выравнивания часто называют от английского слова *sleek* — приглаженный, лоснящийся). Слик проявляется не только в оптическом, но и в радиолокационной зоне и хорошо регистрируется с помощью судовых радаров. На рис.7, взятом из работы [45], изображены примеры одиночной ВВ и порождаемое ею изменение



Р и с. 7. Синхронное наблюдение уединенной ВВ (внизу) и порождаемого ею изменения интенсивности радиолокационного сигнала (вверху) [45]

ности радиолокационного сигнала. Хорошо заметно, что увеличение интенсивности сигнала наблюдается на переднем фронте уединенной волны, там, где обычно возникает сулой, который, собственно, и порождает увеличение отражательной способности морской поверхности. Над задним склоном уединенной волны располагается область выглаживания, которой соответствует понижение уровня радиолокационного сигнала. Более подробно теория проявления сулая и выглаживания изложена в работе [46].

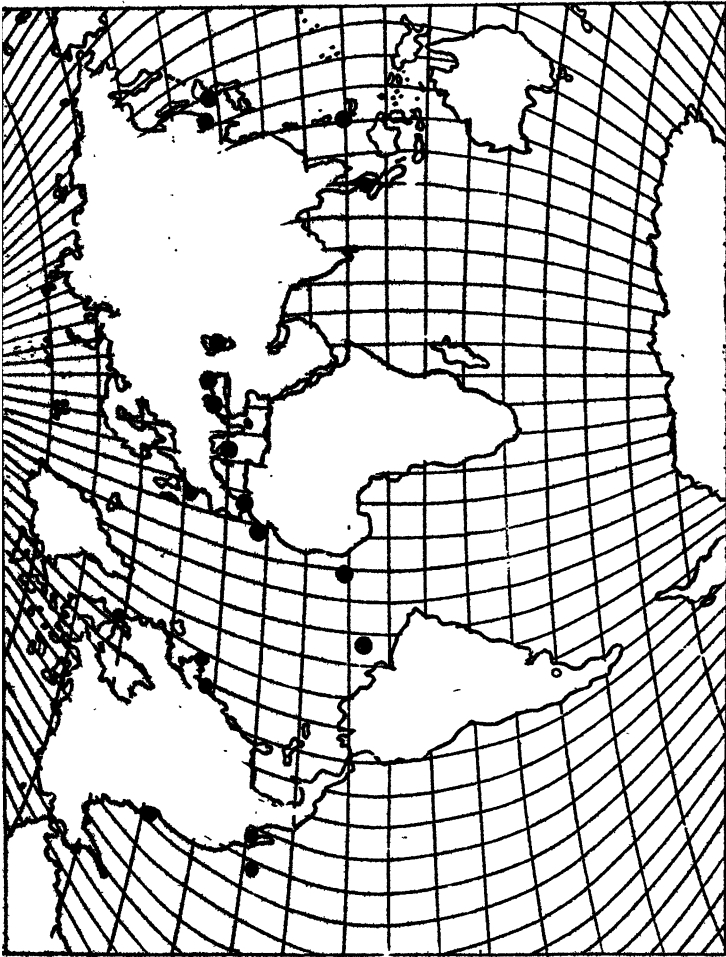
По проявлениям ВВ на поверхности океана можно в принципе измерить их основные параметры методами аэрокосмической съемки. При этом, однако, необходимо знать гидрологию изучаемого района. Здесь обычно приходится использовать усредненные данные, характерные для того или иного времени года. Например, в работах [43,47] с помощью фотоснимков поверхности на основе модели КдВ удалось оценить общее число солитонов, генерируемых в приливном цикле, оценить параметры солитонов (амплитуду, характерную ширину, скорость движения). С помощью этих данных авторы работы [47] сделали попытку решить обратную задачу - восстановили модель гидрологии океана, предполагая стратификацию двухслойной. Не останавли-

ваясь здесь на деталях, отметим лишь принципиальную возможность восстановления двухслойной гидрологии по параметрам солитонов — см. формулы (3), (5) — (7), (10), (14).

Упомянем еще о тех случаях, когда пикноклин в океане имеет сложную структуру. Подобная ситуация описана Пинкелем [41], проводившим измерения в Тихом океане, в 300 км к юго-западу от г. Сан-Диего. Наличие хорошо выраженных слоев с резкими градиентами плотности приводит к тому, что на каждом таком слое могут существовать сильно нелинейные ВВ. Данные, полученные в [41] с помощью доплеровского сонара (дистанционного измерителя скорости жидкости по отраженному звуковому сигналу), показывают наличие интенсивной уединенной ВВ на второй моде. Отношение скорости частиц в волне к скорости ее распространения превышало 0,5, а характерная длина волны составляла 32 м. Глубина океана в районе наблюдения [41] была около 4000 м. Эти данные указывают на необходимость использования модели Бенджамина-Оно для описания подобных возмущений. Эта работа, пожалуй, единственная, в которой описано наблюдение уединенных волн на отдельных прослойках. Такие уединенные волны гораздо труднее наблюдать, хотя их интенсивность может быть весьма значительной. Так, согласно [41], плотность кинетической энергии в уединенной ВВ была на два порядка больше, чем в окружающем фоне. Практически ничего не известно о причинах генерации таких уединенных волн, временах жизни, скорости диссипации и т.п.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Натурные наблюдения приносят все новые данные об уединенных ВВ, имеющих значительную амплитуду (до 100 м и более) и рекордную крутизну (0,15 и более). Ясно, что такие динамические образования (по всем признакам нелинейные) могут играть существенную роль в обмене энергией между различными слоями океанской толщи, переносить энергию волнового движения на большие расстояния (сотни, а может быть даже и тысячи километров), оказывать влияние на надводное и особенно подводное судоходство (напомним, что, согласно гипотезе американского океанолога Айселина, причиной гибели атомной подводной лодки "Трешер" в 1963 г. могли быть интенсивные ВВ [48]). Эксперименты последних лет позволяют предположить, что уединенные ВВ — достаточно характерный



элемент внутренних движений не только в шельфовой зоне, но и в глубоководных районах (рис.8); не исключено, что это вообще один из типичных конечных результатов трансформации баротропных приливов в бароклинные движения. Об этом свидетельствуют и теоретические модели. Вместе с тем в этой области сейчас многое еще неясно. Так, количественные характеристики распространенности уединенных ВВ в океане в настоящее время отсутствуют. Важный, почти совсем нерешенный вопрос — о квазистационарности, "солитонности" таких волн и вообще об их адекватном теоретическом описании; для его решения в большинстве случаев просто не хватает гидрологических данных, в особенности данных о течениях. Единственным исключением является цикл работ [39,40], в которых представлены комплексные натурные исследования и их теоретическая интерпретация. В последнее время методика проведения экспериментов стала заметно совершеннее, улучшилась также обеспеченность экспедиций современными океанологическими приборами, и в ближайшем будущем можно ожидать существенных продвижений в решении этой интересной проблемы.

1. Briscoe M.G. Introduction to collection of papers on oceanic internal waves //J.Geophys. Res. 1975. V.80. N 3. P.289.
2. Djordjevic V.D., Redecopp L.G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography //J.Phys. Oceanogr. 1978. V.8. N 6. P.1016.
3. Joseph R.I. Solitary waves in a finite depth fluid //J.Phys.A: Math.Gen. 1977. V.10. N 12. P. 1225.
4. Островский Л.А. Нелинейные внутренние волны в океане //Нелинейные волны, М.: Наука, 1979. С.292.
5. Левиков С.П. О неустановившихся слабонелинейных внутренних волнах в глубоком океане //Океанология, 1976. Т.16, Вып.6. С.968.
6. Ablowitz M.J., Segur H. Long internal waves in fluids of great depth //Stud.Appl.Math. 1980. V.62. P.249.
7. Müller P., Olbers D.J. On the dynamics of internal waves in the deep ocean //J.Geophys. Res. 1975. V.80. N 27. P.3848.
8. Иванов А.В., Островский Л.А., Соустова И.А., Цимринг Л.Ш. Взаимодействие внутренних волн и турбулентности в верхнем слое океана //Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность /ИПФ АН СССР. Горький, 1982. С.75.
9. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flow //J.Fluid Mech. 1961. V.10. Pt.4. P.496.
10. Lee Ch.-Yu., Beardsley R.C. The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow // J.Geophys.Res. 1974. V.79. N 3. P.453.
11. Maslowe S.A., Redekopp L.G. Long nonlinear waves in stratified shear flows //J.Fluid Mech. 1980. V.101. Pt.2. P.321.
12. Grimshaw R. Evolution equations for long nonlinear internal waves in stratified shear flows// Stud.Appl.Math. 1981. V.65. P.159.

13. Суворов А.М. Об эволюции квазиплоских слабонелинейных внутренних волн в потоке вязкой жидкости //Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. №6. С.158.
14. Островский Л.А., Степанянц Ю.А. Нелинейная стадия сдвиговой неустойчивости в стратифицированной жидкости конечной глубины //Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. №4. С.63.
15. Ostrovsky L.A., Stepanyants Yu.A., Tsimiring L.Sh. Radiation instability in a stratified flow //Intern.J. Non-Linear Mech. 1984. V.19. N 2. P.151.
16. Koop C.G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system// J.Fluid Mech. 1981. V.112. P.225.
17. Segur H., Hammack J.L. Soliton models of long internal waves //J.Fluid Mech. 1982. V.118. P.285.
18. Kao T.W., Pan F.-Sh., Renonard D. Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope// J.Fluid Mech. 1985. V.159. P.19.
19. Букреев В.И., Гаврилов Н.В. Экспериментальное исследование уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости //ПМТФ. 1983. №5. С.51.
20. Benny D.J., Ko D.R.S. The propagation of long large amplitude internal waves //Stud.Appl. Math. 1978. V.59. N 3. P.187.
21. Ziegenbein J. Short internal waves in the Strait of Gibraltar //Deep-Sea Res. 1969. V.16. P.479.
22. Ziegenbein J. Spatial observations of short internal waves in the Strait of Gibraltar // Deep-Sea Res. 1970. V.17. P.867.
23. Коняев К.В. Спектральный анализ случайных волновых полей в море: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. /Акуст. ин-т им. Н.Н.Андреева АН СССР, М., 1979.
24. Winant C.D. Internal surges in coastal water //J.Geophys.Res. 1974. V.79. N.30. P.4523.
25. Thorpe S.A. Asymmetry of the internal seiche in Loch Ness //Nature, 1971. V.231. N 4301. P. 306.
26. Hunkins K., Fliegel M. Internal undular surges in Seneca lake: a natural occurrence of solitons //J.Geophys.Res. 1973. V.78. N 3. P.539.

27. Farmer D.M. Observation of long nonlinear internal waves in a lake // *J.Phys.Oceanogr.* 1978. V.8. N.11. P.63.
28. Halpern D. Semidiurnal internal tides in Massachusetts Bay // *Geophys.Res.* 1971. V.76. N 27. P.6573.
29. Haury L.R., Briscoe M.G., Orr M.H. Tidally generated internal wave pockets in Massachusetts Bay // *Nature.* 1979. V.278. N 5702. P.312.
30. Иванов В.А., Коняев К.В. Бор на гермоклине // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1976. Т.12. №4. С.416.
31. Иванов В.А., Коняев К.В., Серебряный А.Н. Группы интенсивных внутренних волн в шельфовой зоне моря // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1981. Т.17. №12. С.1302.
32. Гуревич А.В., Пятаевский Л.Г. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // *ЖЭТФ.* 1973. Т.65. Вып.2. С.590.
33. Хруслов Е.Я. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки // *Математический сборник.* 1976. Т.99. №2. С.261.
34. Пелиновский Е.Н., Степанянц Ю.А. О времени образования солитонов из начальных возмущений в рамках уравнения Кортевега-де Вриза // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1981. Т.24. №7. С.908.
35. Osborn A.R., Burch T.L. Internal solitons in the Andaman sea // *Science.* 1980. V.208. N 4443. P.451.
36. Кузнецов А.С., Парамонов А.Н., Степанянц Ю.А. Исследование одиночных внутренних волн в тропической зоне Западной Атлантики // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1984. Т.20. №10. С.975.
37. Sandstrom H., Elliott J.A. Internal tide and solitons on the Scotian shelf: a nutrient pump at work // *J.Geophys.Res.* 1984. V.89. N C4. P.6415.
38. Cummins P.F., Le Blond P.H. Analysis of internal solitary waves observed in Davis strait // *Atmos.Ocean.* 1984. V.22. N 2. P.173.
39. Apel J.R., Holbrook J.R., Liu A.K., Tsai J.J. The Sulu sea internal soliton experiment // *J.Phys.Oceanogr.* 1985. V.15. N.12. P.1625.
40. Liu A.K., Holbrook J.R., Apel J.R. Nonlinear internal wave evolution in the Sulu sea // *J.Phys.Oceanogr.* 1985. V.15. N 12. P.1613.

41. Pinkel R. Observations of strongly nonlinear internal motion in the open sea using a range-gated Doppler sonar //J.Phys.Oceanogr.1979. V.9. N 4. P.675.

42. Pingree R.D., Mardell G.T. Solitary internal waves in the Celtic Sea //Progr.Oceanogr. 1985. V.14. P.431.

43. Fu L.-L., Hott B. Internal waves in the Gulf of California: observation from a spaceborne radar //J.Geophys.Res. 1984. V.89. N C2. P.2053.

44. Freeland H.J., Farmer D.M. Circulation and energetics of a deep, strongly stratified inlet// Can.J.Fish.Aquat.Sci. 1980. V.37. N. 9. P.1398.

45. Бурдюгов В.М., Верещак А.И., Гродский С.А. и др. Оценки параметров внутренних волн по радиолокационному сигналу //Изв. АН СССР. ФАО, 1987. Т.23. №8. С.877.

46. Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность: Сб. науч. ст. /ИПФ АН СССР. Горький, 1982.

47. Гришин Г.А., Гродский С.А. Оценка параметров двухслойной стратификации океана по спутниковым наблюдениям внутренних волн //Исследование Земли из космоса. 1985. №4. С.5.

48. Глинский Н.Т. Внутренние волны в океанах и морях. М.: Наука, 1973.

49. Gargett A.E. Generation of internal waves in the Strait of Georgia, British Columbia //Deep-Sea Res. 1976. V. 23. P.17.

50. Proni J.R., Ostapoff F., Sellers R.L. Acoustic observations of high-frequency, near-surface internal wave groups in the deep ocean during GATE// Deep-Sea Res. 1978. V.25. P.299.

51. Иванов В.А., Серебряный А.Н. Внутренние волны на мелководном шельфе бесприливного моря //Изв. АН СССР. ФАО, 1983. Т.19. №6. С.661.

52. Иванов В.А., Серебряный А.Н. Проявление внутренних волн малых амплитуд на поверхности моря //Изв. АН СССР. ФАО, 1985. Т.21. №7. С.795.

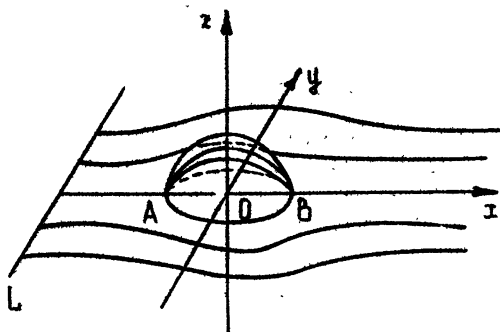
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА
ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТИ ДНА
ПОТОКОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ.
ТЕОРИЯ И ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

К.А.Бежанов, В.В.Можаев, Е.Н.Морозов,
А.Т.Онуфриев, А.Ю.Петрович, В.Е.Скороваров,
А.М.Тер-Крикоров, С.А.Ульянов, А.А.Шеронов

В настоящее время значительное число работ посвящено исследованию дальнего поля в пространственных задачах обтекания неровности дна и тела потоком идеальной несжимаемой тяжелой слоистой жидкости [1,2,3]. В отличие от аналогичных задач для однородной жидкости значение угла, в котором сосредоточены основные волновые возмущения в дальнем поле в потоке, здесь зависит от внутреннего числа Фруда Fr и при $Fr \gg 1$ оно оказывается существенно меньше величины угла Кельвина. В подобного рода задачах важным является исследование ближнего поля, поскольку волны, распространяющиеся вниз по потоку, — длинные. Исследование ближнего поля позволяет построить амплитудно-фазовые характеристики волнового движения жидкости в непосредственной близости возмущенного дна. Оказывается, что сразу за неровностью дна поперечный размер зоны возмущений имеет порядок глубины слоя жидкости и вначале медленно расширяется вниз по потоку, т.е. картина обтекания существенно отличается от картины корабельных волн в однородной среде [4]. Можно также отметить, что кольцевые возмущения, которые в дальнем поле вообще не рассматриваются из-за их экспоненциального затухания с расстоянием, могут внести заметный вклад в ближнем поле, и их влияние также должно быть учтено.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В линейном приближении рассматривается пространственная задача обтекания малой неровности дне потоком идеальной несжимаемой тяжелой экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины h в приближении условия твердой крышки на свободной поверхности. Декартова система координат выбрана так, что плоскость xOy расположена на горизонтальной плоскости дна, а ось Oz направлена вертикально вверх (рис.1). Предполагается, что при $x \rightarrow -\infty$ поток асимптотиче-



Р и с. 1

ски одномерный и течет с постоянной скоростью V в положительном направлении оси Ox , а стратификация мала. В качестве единицы длины выбирается величина h , а единиц скорости и плотности — величины V и средней плотности одномерного потока ρ_0 [5,6,7].

Ниже в качестве независимых переменных берутся эйлеровы координаты x, y и лагранжева координата ξ , задающая при $x \rightarrow -\infty$ расстояние от горизонтального дна до невозмущенной линии тока, а в качестве зависимой переменной — эйлерова координата z [5,6,7]. Если предположить, что скорость потока не обращается в нуль, то у траекторий не будет особых точек и они образуют поверхность

$$z = z(x, y, \xi), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} z(x, y, \xi) = \xi. \quad (1)$$

В силу уравнений гидродинамики плотность постоянна на траектории. Поэтому, если плотность постоянна на несобственной прямой ($\tau = -\infty, -\infty < \eta < +\infty, \xi = \tau$), то она постоянна на всей поверхности (1) и равна $\rho(\tau)$ [7].

В переменных τ, η, ξ дно становится плоскостью $\xi = 0$, а уравнение $\tau(\tau, \eta, 0) = f(\tau, \eta)$ задает форму дна. Таким образом, дно есть поверхность постоянной плотности, что накладывает определенные ограничения на режим обтекания и форму неровности дна. Эти ограничения можно связать с фазовой картиной траекторий, лежащих на дне. В простейшем случае плоского горизонтального дна прямолинейные траектории лежат в плоскости дна, и в этом случае у поля скоростей нет особых точек. Если дно подвергнуть малой гладкой и финитной деформации, то все возмущенные траектории по-прежнему покрывают все дно, у поля скоростей не появятся особые точки, и дно будет поверхностью постоянной плотности. Если дно подвергнуть малой но не гладкой деформации, то у поля скоростей появятся особые точки, в которых скорость обращается в нуль, и характер поведения фазовых кривых в окрестности этих точек изменится. Для линейных задач поверхность дна и в этом случае будет поверхностью постоянной плотности. Пусть фазовая картина имеет вид, изображенный на рис.1, где имеются критические точки А и В. В этом случае существуют траектории двух типов: не проходящие через точки А и В и проходящие через эти точки. Траектории первого типа пересекают несобственную прямую L ($\tau = -\infty, -\infty < \eta < \infty, \xi = 0$) и на них плотность такая же, как и на прямой L . Траектории второго типа проходят через точки А и В, разветвляясь на неровности дна, но на них плотность такая же, как и в точке А или на прямой L . Таким образом, и в этом случае поверхность дна есть поверхность постоянной плотности.

В случае малой стратификации и малой неровности дна судить о фазовой картине траекторий, лежащих на дне, можно по соответствующей картине обтекания потоком однородной жидкости рассматриваемой неровности дна. Этим приемом, в сущности, пользуются в моделях, аппроксимирующих обтекаемое тело точечными или распределенными особенностями типа источников, стоков и диполей [2,3,8]. Удобно ввести новую искомую функцию

$$\psi(\tau, \eta, \xi) = \tau(\tau, \eta, \xi) - \xi,$$

представляющую малые возмущения поверхности постоянной плотности, а для автоматического учета условия излучения на

бесконечности вводится искусственная вязкость по Рэлею с коэффициентом $\mu \rightarrow +0$. Тогда в приближении Буссинеска и в безразмерных переменных имеем следующую граничную задачу [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mu \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{F \tau^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$-\infty < \tau, y < +\infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$w(\tau, y, 0) = f(\tau, y), \quad w(\tau, y, 1) = 0,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} w(\tau, y, \xi) = 0, \quad F \tau = V/Nh, \quad (2)$$

где N — частота Брента-Вайсяля, которая в рассматриваемом случае постоянна, а носитель функции $f(\tau, y)$ целиком расположен в круге радиуса ζ .

2. РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Решение граничной задачи (2) ищется в виде ряда Фурье по полной и ортогональной в $L_2(Q)$ системе функций $\{\sin(n\pi\xi)\}$, $Q = \{\xi: 0 \leq \xi \leq 1\}$, а уравнения для коэффициентов ряда решаются методом преобразования Фурье по переменным τ, y . Далее в выражении для обратного преобразования Фурье внутренний интеграл вычисляется методом теории вычетов при $|\tau| > \zeta$, и коэффициент μ устремляется к нулю. Окончательно решение имеет вид

$$\frac{z(\tau, y, \xi)}{h} = \xi + \theta^*(x - \zeta) \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{N}{V} \tau, \frac{N}{V} y \right) \sin(n\pi\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left(\frac{N}{V} \tau, \frac{N}{V} y \right) \sin(n\pi\xi),$$

$$|\tau| > \zeta, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad (3)$$

$$E_n(\xi, \eta) = \frac{\delta}{n} \int_0^{+\infty} \frac{[a^2(q) - 1][a^2(q) + \eta^2]}{a(q) D(q^2)} F(a(q), q) \times$$

$$\times \sin[\alpha(q)|\xi|] \cos(q\eta) dq; \quad (4)$$

$$G_n(\xi, \eta) = \frac{4}{n} \int_0^{\infty} \frac{[\beta^2(q) + 1][\beta^2(q) - q^2]}{\beta(q) D(q^2)} F(i\beta(q), q) \times \\ \times e^{i\pi} [-\beta(q)(\xi)] \cos(q\eta) dq; \quad (5)$$

$$\alpha^2(q) = \frac{2q^2}{D(q^2) + q^2 + \epsilon_n^2 - 1}, \quad \beta^2(q) = \frac{q^2}{\alpha^2(q)}, \\ D(q^2) = \sqrt{(q^2 + \epsilon_n^2 - 1)^2 + 4q^2}; \quad \epsilon_n = n\pi\sqrt{\nu}. \quad (6)$$

Здесь и далее x, y, z и ξ – размерные переменные без изменения обозначений, $\theta'(x)$ – единичная функция Хевисайда, $F(\rho, q)$ – преобразование Фурье финитной непрерывной функции $f(Nx/V, Ny/V)$ и, следовательно, целая функция переменных ρ и q . Формулы (4) и (6) описывают систему радиальных волн, распространяющихся вниз по потоку, а формулы (5) и (6) – кольцевые возмущения, распространяющиеся во все стороны. Из формул (4) – (6) видно, что рассматриваемая модель не приводит к расходимости интегралов на оси потока, которая характерна для случаев моделирования тела точечными источниками [2, 3, 8].

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Вначале рассматривается ближнее поле. Для изучения возмущенного течения жидкости при $|x| > \zeta$ применяется приближенный метод вычисления интегралов (4) – (6), основанный на использовании малости параметра $1/\sqrt{\nu}$, что согласуется с предположением о малой стратификации среды. Чтобы не усложнять выкладок и получить обзорную качественную картину обтекания, рассматривается случай обтекания полусферы радиуса ζ . Оставляя в интегралах (4) – (6) главные члены по большому параметру ϵ_n , можно получить основную формулу для волнового поля внутренних волн:

$$\frac{x(x, y, \xi)}{h} = \xi - \frac{2}{\pi^2 \sqrt{\nu}} \theta'(x - \zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \theta\left(\frac{N}{V} x, \frac{\alpha_n(y - \zeta)}{h}\right) - \right. \\ \left. - \theta\left(\frac{N}{V} x, \frac{\alpha_n(y + \zeta)}{h}\right) + \frac{\alpha_n \zeta}{h} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \left(\frac{N}{V} x, \frac{\alpha_n(y - \zeta)}{h}\right) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} \left(\frac{N}{V} x, \frac{\pi n (y+l)}{h} \right) \left. \right\} \frac{\sin(\pi n \xi)}{n^3} + \\
& + 2\pi \left(\frac{l}{h} \right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n \varepsilon \left(\frac{\pi n l}{h} \right) K_0 \left(\frac{\pi n}{h} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sin(\pi n \xi); \\
& |x| > l, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (7)
\end{aligned}$$

где $K_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя [9], а универсальная функция $\mathcal{P}(u, v)$ - нечетная функция переменных u , которая при $v \gg 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(u, v) &= \frac{\pi}{4} u I_0(v) + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1} e^{-v} \rho_k(v); \\
\rho_k(v) &= \frac{1}{2(k+1)} \left[(2k-2-v) \rho_{k-1}(v) + v \rho'_{k-1}(v) \right]; \\
I_0(v) &= \frac{\pi}{4} \left[2 - (v+2) e^{-v} \right]; \quad \rho_1(v) = \frac{1}{4} (v^2 + v); \quad k=2, 3, \dots \quad (8)
\end{aligned}$$

Формулы (7), (8) можно упростить при $l \ll h$, в этом случае величину $\varepsilon = \pi n l / h$ можно считать малой для $n=1, 2, \dots, m$, где целое число m зависит от отношения l/h . Разлагая выражение в первой сумме (7) по формуле Тейлора по малому ε , ограничиваясь главным членом разложения, получим

$$\begin{aligned}
\frac{x(x, y, \xi)}{h} &= \xi - \frac{\pi}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{l}{h} \right)^3 \mathcal{P}'(x-l) \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} x \left(\frac{N}{V} x, \frac{\pi n}{h} y \right) \sin(n \pi \xi) + 2\pi \left(\frac{l}{h} \right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n \varepsilon \left(\frac{\pi n l}{h} \right) \times \\
& \times K_0 \left(\frac{\pi n}{h} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sin(n \pi \xi); \\
& |x| > l, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (9)
\end{aligned}$$

где $x(u, v)$ - четная функция переменных u и имеет вид

$$\alpha(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1} e^{-v} R_k(v), \quad v \geq 0;$$

$$R_k(v) = Q_k''(v) - 2Q_k'(v) + Q_k(v),$$

$$Q_k(v) = P_k'(v) - P_k(v), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$Q_0(v) = 1+v, \quad \epsilon(\rho) = (\rho \operatorname{ch} \rho - \operatorname{sh} \rho) / \rho^3. \quad (10)$$

Формулы (7) - (10) задают закон подобия для радиальных волн. Характерный масштаб в направлении потока V/N - большая величина по сравнению с глубиной жидкости h , следовательно, радиальные волны - длинные. Характерный масштаб поперек потока для n -й моды есть $h/\alpha n$ и для больших n сравним с величиной h .

В заключение коротко о закономерностях для дальнего поля. При $\epsilon_n > 1$ можно найти вклады в асимптотику интеграла (4), (6) при $\chi \rightarrow \infty$ от стационарных точек, (χ, θ) - полярные координаты. Показывается, что для каждого угла существует единственная стационарная точка, которая при больших расстояниях может попасть в клиновидную область

$$-\theta_0 < \theta < \theta_0; \quad \theta_0 = \alpha \chi \operatorname{ctg} \left(1 / \sqrt{\epsilon_n^2 - 1} \right),$$

где амплитуды волн убывают как $1/\sqrt{\chi}$.

Вклад от концевых точек интеграла (4), (6) имеет порядок $1/\chi$ и им можно пренебречь в сравнении с вкладом от стационарных точек.

На границах волновой области при $\theta = \pm \theta_0$ имеется только возвышение, убывающее с расстоянием по закону $1/\chi^{2/3}$, что согласуется с результатами, полученными в ближнем поле, где два крайних горба не колеблются, о чем будет говориться подробнее в следующем разделе.

Интеграл (5) - (6), описывающий кольцевые возмущения, убывает с расстоянием по экспоненциальному закону и поэтому дает малый вклад в асимптотику.

Все эти результаты для асимптотик в дальнем поле были получены ранее другими авторами, большинство из которых моделировали обтекаемое тело точечными источниками [1, 2, 3, 10, 11].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Из закона подобия для радиальных волн следует, что с ростом номера моды волновые возмущения сжимаются к оси Oz , поэтому для описания волновой картины на некотором расстоянии от оси достаточно рассмотреть несколько первых мод. Результаты расчетов для первой моды по формулам (7) - (10) при $0,5 \leq u \leq 30$, $0 \leq v \leq \infty$, $\epsilon = 0,25$ с шагом 0,5 по переменным u и v были практически одинаковы, поэтому далее рассматривается более простая функция $\chi(u, v)$. Был заглаблирован график функции

$$\chi(u, v), \quad 0,5 \leq u \leq 30, \quad 0 \leq v \leq 10;$$

на рис.2 приведены сечения волновой зоны плоскостью, перпендикулярной оси потока.

В каждом таком сечении четные функции одной переменной

$$\chi(u_i, v), \quad 0 \leq v < +\infty, \quad i=1,2,\dots,60$$

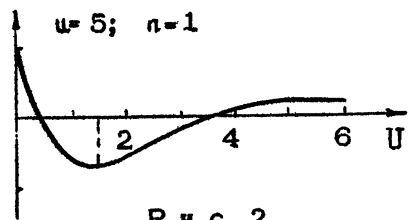
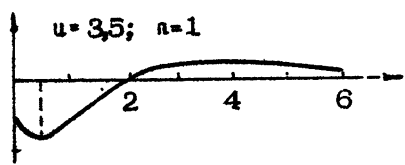
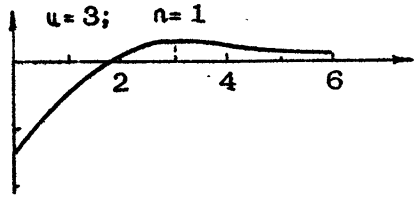
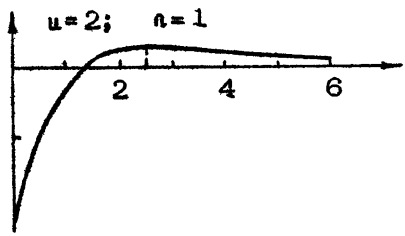
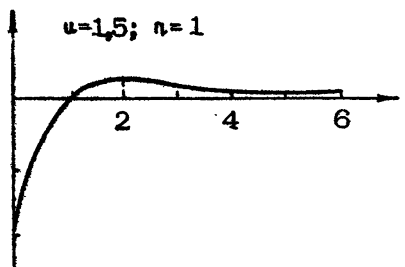
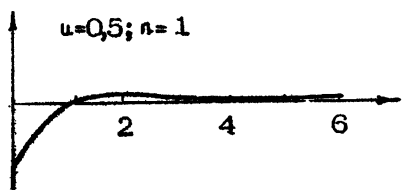
имеют конечное число экстремумов, причем крайний от оси обязательно максимум, горб. А далее $\chi(u_i, v)$ монотонно стремится к нулю с увеличением расстояния от оси. Число экстремумов функций $\chi(u_i, v)$ растет с увеличением переменной u_i . Можно отметить, что величина крайнего максимума, высота горба, при $1 \leq u \leq 7$ меняется незначительно. Из графиков можно отметить, что при $u > 3$ начинается дальнее поле, т.е. с момента появления второго экстремума (рис.2, в, ж). При этом граница горба совпадает с границей волновой зоны в дальнем поле.

На оси потока волновая картина имеет излом, что можно объяснить изломом у неровности дна, в рассматриваемом случае -- полусферы. На оси потока происходит осцилляция амплитуды волны, закон для первой моды имеет вид

$$\chi(u, 0) = -2 J_1(u),$$

где $J_1(u)$ -- функция Бесселя.

Отметим также, что сходимость первого ряда в формуле (7) обусловлена множителем n^3 в знаменателе. При переходе к решению (9), т.е. в χ -приближении, этот множитель отсутствует и вопрос о поведении частичной суммы первого ряда (9) требует дополнительного исследования. При $y \neq 0$ эта сумма является частичной суммой сходящегося ряда благодаря наличию множителя $\exp(-v)$ в выражении для $\chi(u, v)$ в формуле (10).



Р и с. 2

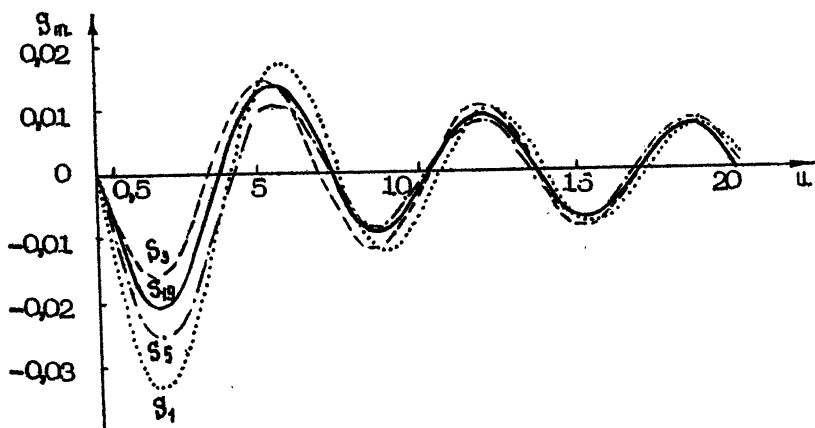
На оси погока функция $\alpha(N\tau/V, 0)$ не зависит от n , и соответствующая сумма в формуле (9) является частичной суммой расходящегося ряда. Поэтому при $y = 0$ вычисления надо проводить по более сложным формулам (7).

Первая сумма в формуле (7) с учетом нечетности по переменной v функции $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v)$ и четности по v ее производной принимает вид при $\tau > \zeta$

$$\Phi(u, \xi) = -\frac{4}{\pi^3 F_4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\varphi\left(u, \frac{\pi n \zeta}{h}\right) + \frac{\pi n \zeta}{h} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\left(u, \frac{\pi n \zeta}{h}\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin \pi n \xi}{n^3} \right], \quad u = \frac{N}{V} \tau. \quad (11)$$

Были вычислены на ЭВМ частичные суммы $S_m(u, \xi)$ ряда (11) при $\xi = 0,5$ и $0,5 < u < 20$ с шагом $0,5$ и при $m = 1, 3, 5, \dots, 19$. Значения $h = 10$ см и $\zeta = 1,7$ см соответствовали эксперименту. Множитель $-4/\pi^3 F_4$ впереди суммы при этом не рассматривался, и поэтому все расчеты не зависели от числа Фруда.

На рис.3 приведены графики S_1, S_3, S_5, S_{19} . Видно, что при $m \geq 3$ графики сумм S_m мало отличаются друг от друга, а вне окрестности трех первых экстремумов S_1 они мало отличаются друг от друга вообще при всех $m = 1, 3, \dots$. График суммы S_{19} хорошо приближает сумму всего ряда (11), наилучшее приближение — в точке первого минимума — имеет относительную погрешность около 2%.



Р и с. 3

Отметим также, что первая вычисленная сумма S_1 в x -приближении равна

$$-\frac{\pi^4}{6} \left(\frac{c}{h}\right)^3 J_1(u) \approx -0,08 J_1(u).$$

Согласно этому приближению ордината первого минимума должна равняться примерно $-0,046$, а по вычислениям $-0,034$.

Параметр $\epsilon = \pi c/h$ здесь равен $0,534$. Как отмечалось, x -приближение работает лишь при малых ϵ . Таким образом, даже при "не очень малых" ϵ x -приближение дает достаточно разумный результат, не говоря уже о практически полном подобии графиков $S_1(u)$ и $J_1(u)$. Расчетные формулы были запрограммированы на Фортране Е.Р. Павлюковой.

5. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КАРТИНЫ ВОЗМУЩЕННОГО ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Эксперименты по исследованию поля внутренних волн, генерируемых обтекаемым препятствием, проводились в гидрлотке размером $1000 \times 280 \times 320$ мм со стеклянными боковыми стенками, который заполнялся соевым раствором переменной плотности для создания стратифицированной среды. Профиль стратификации измерялся датчиком электропроводности.

Суть метода голографической интерферометрии состоит в регистрации и восстановлении двух волновых фронтов, прошедших через исследуемый объем в различные моменты времени и несущих информацию о состоянии исследуемой среды. На стадии восстановления эти два фронта интерферируют между собой и при наличии возмущений плотности в среде, вызванных обтеканием препятствия, дают изображение изучаемой области, покрытое интерференционными полосами [12]. Эти интерференционные полосы характеризуют изменения, произошедшие в стратифицированной среде за время между двумя экспозициями, и соответствуют изменению фазы световых волн на величину $2\pi m$, где m — номер интерференционной полосы,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \int_V \Delta n(x, y, z) dV. \quad (12)$$

Здесь λ - длина волны излучения лазера, Δn - изменение показателя преломления в стратифицированной среде на пути светового луча между двумя экспозициями.

В работах [13-18] исследовалось поле возмущений плотности стратифицированной среды при обтекании цилиндрического препятствия в плоской задаче. Применение голографической интерферометрии для плоской задачи позволяет получить количественные данные по амплитудам внутренних гравитационных волн, возникающих при обтекании препятствия, поскольку величина изменения показателя преломления среды остается постоянной вдоль линии просвечивания, и на интерферограмме фиксируется величина $\Delta n \cdot L_1$, где L_1 - длина образующей цилиндра. Пересчет к полю возмущений плотности $\Delta \rho$ производится по формуле Лоренц-Лоренца [19,20].

В пространственном случае интегральная характеристика (12) волнового поля может быть также весьма полезной в изучении картины внутренних гравитационных волн. На рис.4,5,6 приведены картины поля возмущений плотности, изолинии равных отклонений плотности от значений в спокойной стратифицированной среде при просвечивании вдоль оси Oz , соответственно для случаев обтекания сферы (диаметр 3,8 см, скорость потока 1,28 см/с, частота Вайсяля 1,214 рад/с, $Fr_d = V/Nd = 0,277$, $Re = \nu d/\nu = 486$), обтекания цилиндра (диаметр 0,3 см, скорость потока 1,32 см/с, частота Вайсяля 1,18 рад/с, $Fr_d = 3,73$, $Re = 39,6$) и препятствия в виде полусферы, расположенной на дне (диаметр 3 см, скорость потока 0,83 см/с, частота Вайсяля 1,03 рад/с, $Fr_d = 0,27$, $Re = 250$), стационарным стратифицированным потоком. Во всех случаях поток набегает справа налево. Картина возмущенного поля антисимметрична относительно горизонтальной плоскости [15,17]. Поэтому для тела в потоке при вертикальном (вдоль оси Oz) просвечивании исследуемого объема гидролотка происходит практически полная компенсация возмущений плотности на пути светового луча, и интерференционная картина отсутствует.

Для визуализации волнового поля при просвечивании вдоль оси Ox был применен метод, в котором "полутело", лежащее на дне канала, обтекалось потоком стратифицированной жидкости. В этом случае волновое поле занимает только верхнее полупространство и просвечивание исследуемого объема вдоль вертикальной оси позволяет определить многие характеристики волнового поля. Нужно иметь в виду, что и в этом случае четные моды полностью компенсируются. Полученные картины возмущений показаны на рис.7 (диаметр полусферы 3 см, скорость

потока 1,3 см/с, частота Вейсяля 1,5 рад/с, число Фруда по глубине канала $Fr = 0,051$, длина внутренней волны 5,45 см) и рис.8 (диаметр полусферы 3 см, скорость потока 6,1 см/с, частота Вейсяля 1,18 рад/с, число Фруда по глубине канала 0,304, длина внутренней волны 32,5 см).

Просвечивание исследуемого объема вдоль оси Oz подтверждает предположение о том, что волновая картина при обтекании "полутела" (см. рис.6) соответствует картине возмущений плотности в верхнем полупространстве при обтекании препятствия потоком стратифицированной жидкости (см. рис.4).

Экспериментально установлено, что поле возмущений плотности стратифицированной среды, генерируемое обтекаемым препятствием на дне, состоит из возмущений двух типов: в области за телом наблюдается система внутренних гравитационных волн, а непосредственно вокруг тела видны возмущения плотности одного знака, монотонно спадающие при удалении от тела. По наблюдаемым на интерферограммах замкнутым линиям (см. рис.7) можно проследить направление гребней и впадин внутренних гравитационных волн, линии нулевых смещений. Экстремумы возмущений за телом, начиная со второго, раздвоены в поперечном направлении, а величина возмущений в этих точках уменьшается с 9 условных единиц для первого экстремума до 5,5 единиц для пятого экстремума. С увеличением значения внутреннего числа Фруда $Fr = V/Nh$ картина возмущений меняется следующим образом: расстояние между экстремумами возмущений плотности за препятствием вниз по потоку увеличивается пропорционально длине внутренней волны V/N , при этом поперечный масштаб области возмущений практически остается постоянным при изменении скорости потока и неизменной глубине канала.

В области вокруг тела наблюдаются интерференционные полосы, по форме приближающиеся к концентрическим окружностям при увеличении значения внутреннего числа Фруда (см. рис.8).

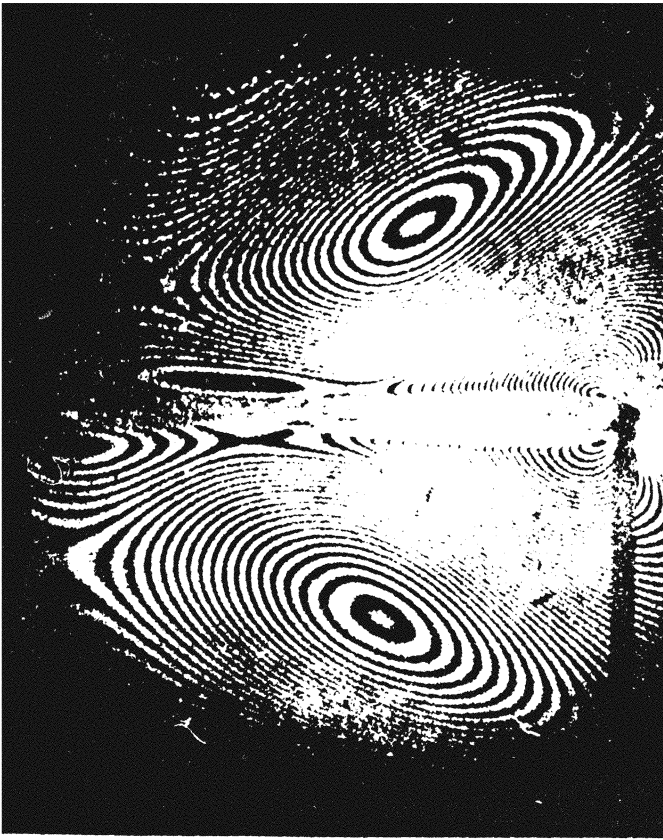
Эти экспериментальные результаты согласуются с выводами, сделанными в конце разд.3, согласно которым продольный масштаб поля возмущений связан с отношением V/N , а поперечный масштаб связан с глубиной канала. В области вокруг тела в теоретическом решении имеются кольцевые возмущения, монотонно спадающие при удалении от полусферы.

На рис.9 представлено сравнение интегральных по глубине канала возмущений, полученных экспериментально и рассчитанных для первой моды (точки - данные эксперимента). Видно, что закон спадания амплитуды кольцевых возмущений примерно



\bar{V}

Рис. 4



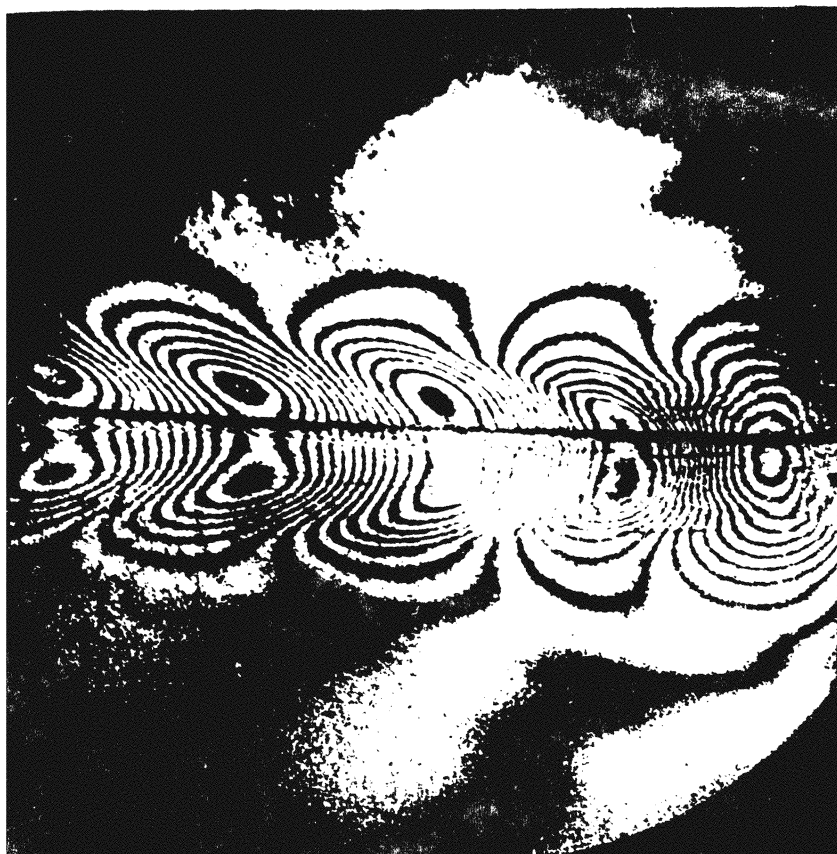
ṽ

Рис 5



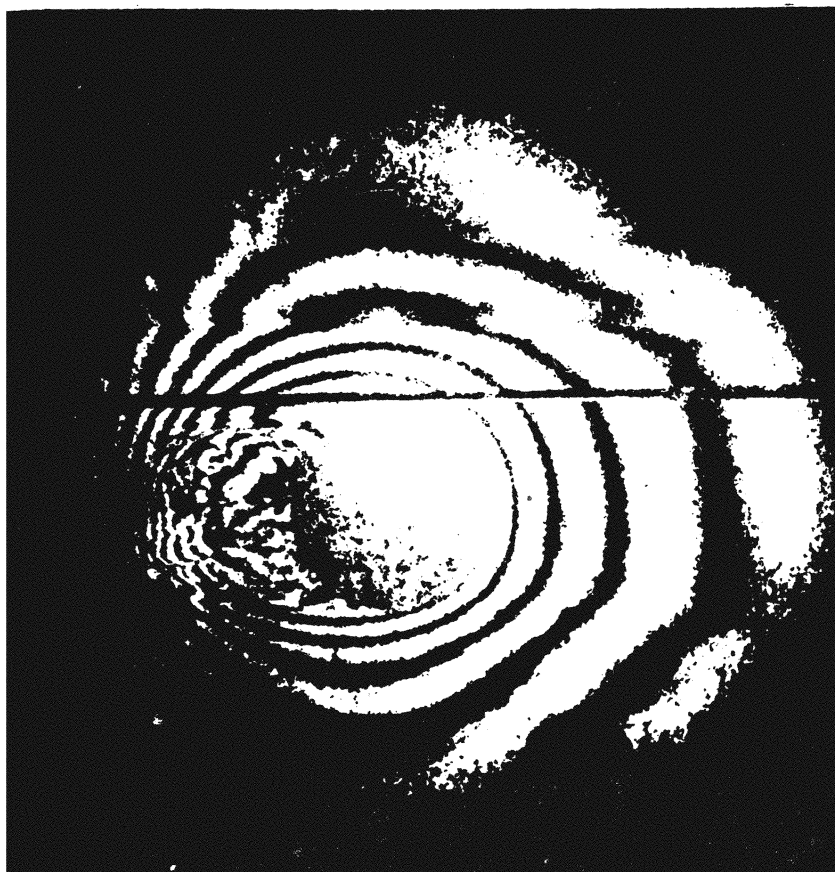
V

Рис 6



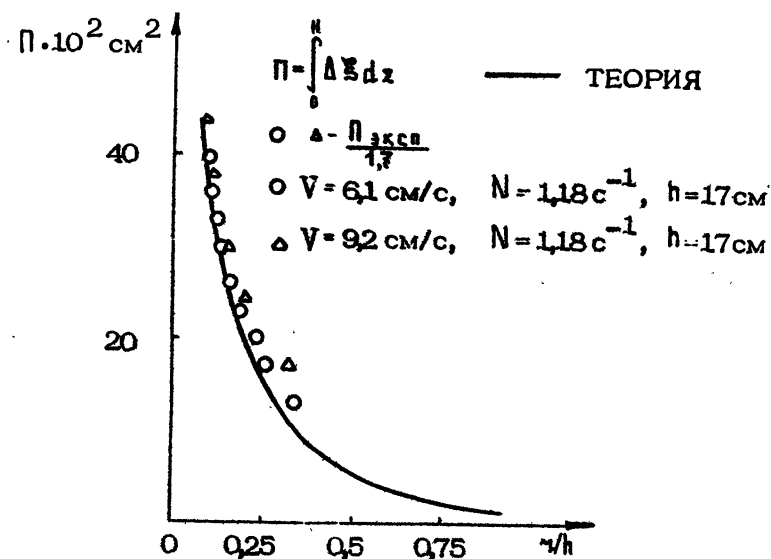
ṽ

Рис. 7



Ṽ

Рис. 8



Р и с. 9

одинаков, однако имеется расхождение для амплитуд приблизительно в 1,7 раза (экспериментальные интегральные амплитуды больше по величине).

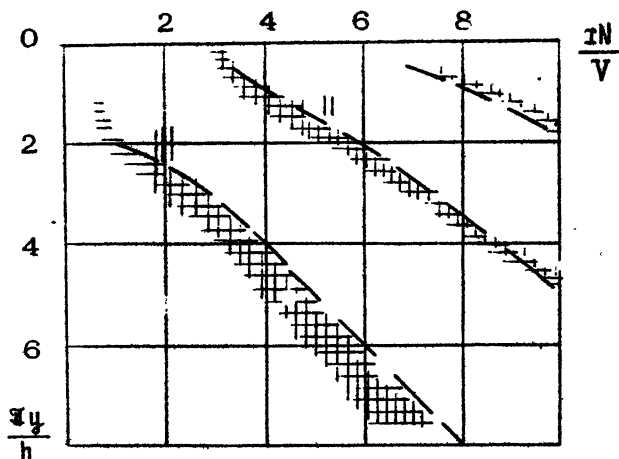
Необходимо заметить, что все проведенное сравнение носит довольно качественный характер, так как результаты теории получены для больших значений внутреннего числа Фруда, а опытные данные соответствуют числам Фруда, максимальное из которых достигает значения $Fr_i = 1,5$. Тем не менее, качественно картина поля возмущений плотности стратифицированной среды, даваемая теорией при обтекании препятствия, близка к экспериментально наблюдаемой картине поля возмущений.

6. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КАРТИНЫ ВОЗМУЩЕННОГО ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЕВОГО ПРИБОРА

Экспериментально исследовалась структура внутренних волн в канале, заполненном стратифицированной жидкостью с постоянным значением частоты Брента-Вяйсяля. Возмущения плотности генерировались при обтекании препятствия в виде полусферы, расположенной на дне канала. Эксперименты проводились в гидрлотке размером 1000 x 350 x 250 мм.

Для визуализации линий нулевых градиентов оптического пути просвечиваемого поля применялся метод теневого поля с использованием теневого прибора ИАБ-451. Просвечивание проводилось в вертикальном направлении через оптическое окно диаметром 200 мм в дне бассейна. С целью более детального вычленения структуры возмущений проводилась регистрация линий нулевых градиентов вдоль обеих горизонтальных осей. Как уже отмечено, при вертикальном просвечивании вклад в интегральную картину возмущений от мод четных номеров равен нулю, а от мод с нечетными номерами составляет $1/n$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) по отношению к первой моде при условии равенства амплитуд. Поэтому регистрируемое возмущение практически соответствует первой моде. Исследовался режим обтекания тела, при котором параметр $\epsilon_n = n \pi^2 \zeta > 1$. Максимальное значение этого параметра ограничивалось чувствительностью установки и составляло 3,5. Все экспериментальные результаты для значений параметра ϵ_n от 1,5 до 3,5 (высота канала от 5 до 10 см, частота Вяйсяля от 1 до 1,7 рад/с, скорость потока от 4 до 7 см/с) и для трех значений диаметров полусфер - 1,2, 3,4, и 4,6 см - построены в безразмерных координатах $\frac{Nz}{V}$, $\frac{\pi y}{h}$ (рис.10). На этом рисунке области, заштрихованные горизонтальными линиями, соответствуют разбросу экспериментально определенных положений линии нулевого градиента вдоль продольной горизонтальной оси, а области, заштрихованные вертикальными линиями, характеризуют разброс положений линий нулевого градиента вдоль поперечной горизонтальной оси. Области пересечения со взаимно перпендикулярными градиентами совпадают с положением линии первого горба, идущего от тела, с линией идущей за ним впадины радиального волнового возмущения, второго горба и т.д.

Вблизи тела (центр тела расположен в начале координат) и вблизи следа эти линии раздваиваются. Раздвоение линий пер-



Р и с. 10

вого горба вызвано влиянием кольцевого возмущения на τ телом. Пунктирными линиями на этом рисунке показаны аналогичные теоретически рассчитанные (разд.1-4 данной статьи) линии радиальных волновых возмущений. Наблюдается достаточно удовлетворительное согласие между экспериментальными (лабораторными) результатами и теоретическими зависимостями.

Полученные экспериментальные данные по фазовой картине возмущенного поля показывают, что ограничения, связанные с большой величиной параметра ϵ_n (большие числа Фруда) и малым значением параметра ϵ не являются столь жесткими. Картина подобия наблюдается практически вплоть до значений $\epsilon_n \ll 1,5$ и $\epsilon \ll 1$.

Л и т е р а т у р а

1. Дороницын А.А. Некоторые задачи обтекания неровности поверхности земли воздушным потоком //Труды Главн. геофиз. обсерватории. 1940. Вып.31. С.3.
2. Докучаев В.П., Долина И.С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости //Изв. АН СССР. ФАО. 1977. Т.13. №6. С.655.
3. Стурова И.В. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости //Нелинейные проблемы: теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С.200.

4. Срегенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
5. Бежанов К.А., Тер-Крикоров А.М. Исследование граничных задач обтекания препятствия потоком стратифицированной слоистой жидкости // ДАН СССР. 1984, Т.277, №5, С.1102.
6. Бежанов К.А., Тер-Крикоров А.М. Многослойные установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном // ПММ. 1984, Т.48, Вып.5, С.750.
7. Тер-Крикоров А.М. Пространственные установившиеся течения слоистой жидкости и внутренние волны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985, №3, С.127.
8. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников // Изв. АН СССР. ФАО. 1980, Т.16, №9, С.954.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
10. Черкасов Л.В. Гидродинамика волн. Киев: Наукова думка, 1980.
11. Санников В.Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане / МГИ АН УССР. Севастополь, 1983, С. 68.
12. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. М.: Мир, 1973.
13. Гураль Т.И., Ершов О.А., Сориц А.Г., Фоменко Б.А. Исследование полей температуры и концентрации методом голографической интерферометрии // Теплообмен. Т.10. Киев: Наукова думка, 1976, С.95.
14. Debler W.R., Vest C.M. Observation of stratified flow by means of holographic interferometry // Proc.Roy.Soc.London. 1977, V.358, P.1.
15. Богданов С.С., Морозов Е.Н., Онуфриев А.Т. и др. Изучение поля внутренних волн, возникающих при движении тела в неоднородной среде, методом голографической интерферометрии // Современные вопросы математики, механики и приложения / МФТИ. М., 1983, С.62.
16. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гушин В.А. и др. Численное и экспериментальное моделирование гравитационных внутренних волн при движении тела в стратифицированной жидкости // ДАН СССР. 1984, Т.279, №3, С.562.

17. Кириллов В.П., Можаяев В.В., Моисеенко Г.С. и др. Возмущения, создаваемые движущимся в стратифицированной жидкости телом //Современные вопросы механики сплошной среды /МФТИ. М., 1985. С.143.

18. Морозов Е.Н., Онуфриев А.Т., Ульянов С.А. Поле внутренних волн вокруг тела, движущегося в неоднородной среде (плоская задача) //Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.: Наука, 1986. С.151.

19. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М.: Мир, 1982.

20. Борн М., Волф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.

**ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ,
ВИХРИ И РЕГУЛЯРНЫЕ СТРУКТУРЫ
В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ
ЛАБОРАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

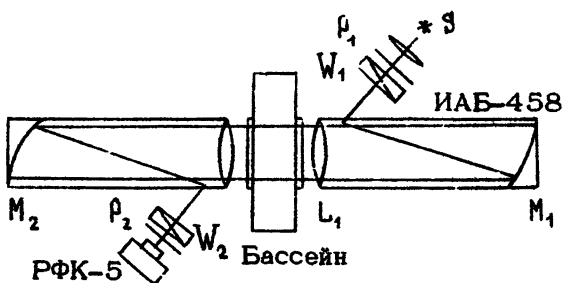
Ю.Д.Чашечкин, В.И.Неклюдов, Е.Я.Сысоева

Экспериментальные исследования стратифицированных течений как в натуральных, так и в лабораторных условиях в последние 20 лет непрерывно расширяются. Увеличение числа работ в этом направлении обусловлено, с одной стороны, необходимостью выяснения физической природы широкого круга явлений, играющих важную роль в динамике окружающей среды, в современных высокоэффективных технологических процессах, с другой – сложностью самих методов исследований. Наряду с изучением отдельных типов течений – поверхностных волн, внутренних волн, течений, струй, вихрей, турбулентности, процессов их образования, эволюции, распада или перехода в другие формы движений, большое внимание уделяется исследованию их взаимодействия и взаимовлияния. Переходные формы движений являются, как правило, нестационарными и пространственно неоднородными. При этом малые изменения основных параметров, например плотности, могут сопровождаться большими вариациями их градиентов. Условия наблюдения, измерения и регистрации таких течений предъявляют высокие требования к точности и разрешающей способности измерительных систем, их пространственно-временным динамическим характеристикам, диапазону регистрации. Как и в гидродинамике однородных сред, методика экспериментальных исследований стратифицированных течений должна выбираться с учетом основных свойств процесса, целей и задач работы. Весьма полезным, а в некоторых случаях и необходимым, является одновременно использование различных методов, как неконтактных –

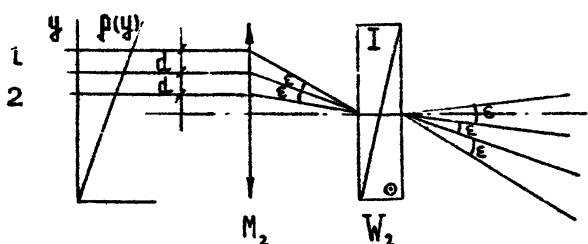
дистанционных (оптических, акустических), так и зондовых. В силу сложности пространственной структуры ечиотропных стратифицированных течений, большого диапазона масштабов и величин оптических неоднородностей даже изменение ориентации щели и ножа Фуко в традиционном теновом методе [1,2] существенно изменяет наблюдаемую картину процесса и позволяет получать дополнительную информацию. Еще более эффективным является использование различных методов визуализации как рефрактометрических (интерференционного, голографического, тенового, цветного тенового, прямого тенового), так и более простых – подкраски, водородных пузырьков, плотностных меток [1]. Рассмотрим в качестве примера два характерных типа стратифицированных течений – монохроматические внутренние волны и присоединенные волны и вихри, образующиеся при стационарном горизонтальном движении сферы в жидкости с экспоненциальным распределением плотности по глубине $\rho_0 = \rho_0(z) = \rho_0 \exp(-z/\Lambda)$, где Λ – масштаб плавучести. Во всех опытах использовался стратифицированный раствор поваренной соли, плотность которого связана линейным соотношением с коэффициентом преломления $n = 1,3322 + k(\rho - \rho_*)$, где $k = 0,248 \text{ см}^3/\text{г}$, $\rho_* = 0,9982 \text{ г/см}^3$ при 20°C [2].

Эксперименты проводились в прямоугольных бассейнах размерами $0,5 \times 0,15 \times 0,5 \text{ м}$; $0,7 \times 0,25 \times 0,7 \text{ м}$; $1,5 \times 0,4 \times 0,46 \text{ м}$, в боковые стенки которых были вставлены оптические стекла. Стратификация создавалась методом непрерывного вытеснения [3]. Период плавучести $T_k = 2\pi/N = 2\pi \sqrt{\Lambda/g}$, где $N = [(g/\rho_0) \cdot (\partial\rho/\partial z)]^{1/2}$ – частота Брента–Вяйсяля, измерялся контактным датчиком удельной электропроводности, с помощью которого регистрировался период внутренних колебаний, возбуждаемых плотностной меткой [4]. Наряду с традиционным черно-белым теновым методом “вертикальная щель – нож Фуко” [2], в котором визуализируется горизонтальная компонента градиента коэффициента преломления, использовался цветной теновый метод [5], с помощью которого регистрируется вертикальная компонента градиента плотности и поляризационный или шлирен-интерферометр [6], позволяющий регистрировать проекцию градиента плотности на выбранное направление.

Оптическая схема установки, реализующая метод шлирен-интерферометрии на базе интерференционно-тенового прибора ИАБ-458, приведена на рис.1. Здесь W_1, W_2 – призмы Волластона, M_1, M_2 – зеркала ИАБ-458. Для простоты изложения рассмотрим сначала упрощенную схему с одной приемной призмой Волластона W_2 , приведенную на рис.2. Два луча



Р и с. 1. Оптическая схема шлирен-интерферометра на базе ИАБ-458



Р и с. 2. Схема лучей в шлирен-интерферометре с одной призмой Волластона

1 и 2 проходят через среду с переменным по пространству коэффициентом преломления, какой является в общем случае стратифицированная жидкость, и, фокусируясь зеркалом M_2 , попадают на призму Волластона W_2 . После прохождения призмы луч 1 разделяется на обыкновенный 1а и необыкновенный 1б лучи, причем их плоскости поляризации взаимно перпендикулярны (в нашем случае плоскости поляризации лучей 1 и 1а совпадают и лежат в плоскости чертежа). Аналогично луч 2 разделится на лучи 2а и 2б, причем лучи 2а и 1б будут пространственно совпадать, если расстояние между лучами 1 и 2 составляет $d_0 = \epsilon f_2$ (здесь ϵ – угол призмы, f_2 – фокусное расстояние зеркала M_2) и соответствует поперечному сдвигу обыкновенного и необыкновенного лучей после выхода из призмы Волластона. Необходимое для их интерференции условие совпадения плоскостей поляризации достигается с помощью поляризатора P_2 , развернутого на 45° по отношению к осям поляризации призмы Волластона (см. рис.1).

Лучи 1 и 2 проходят через различные точки среды. Если показатели преломления среды в этих точках различны, то возникающая разность хода между лучами даст интерференционную картину. Повышению ее контраста служит условие равенства амплитуд интерферирующих лучей, достигаемое введением дополнительного поляризатора P_1 . Так как реально в эксперименте применяются источники света конечных размеров, то для улучшения оптической когерентности устанавливается дополнительно еще одна призма Волластона W_1 .

При установке центра призмы W_2 в фокусе зеркала M_2 и однородном распределении плотности получаются полосы бесконечной ширины. Смещение призмы в горизонтальном и вертикальном направлениях ведет к появлению дополнительной разности хода между лучами, обеспечивающей серию эквидистантных полос. Ширина последних при наличии только горизонтального сдвига призмы на расстояние ψ определяется выражением

$$S = \lambda f_2 / \epsilon \psi,$$

где λ — длина волны используемого источника света S (см рис.1). Наличие в исследуемом объеме стратифицированной жидкости двумерного распределения плотности $\rho = \rho(x, y)$ приводит к отклонению интерференционных полос ΔS , причем

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta \rho}{2\pi} = \frac{L}{\lambda} (n_1 - n_2) = \frac{L \kappa \Delta \rho}{\lambda},$$

где L — ширина бассейна, $\Delta \rho$ — разность плотностей. При малом d (в нашем случае $d = 0,35$ см) и вертикальном расположении полос $\Delta \rho \approx d \frac{d\rho(x, z)}{dz}$. В стратифицированных средах

обычно $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_0 — фоновое распределение плотности, а ρ_1 — возмущение стратифицированной жидкости; $d\rho_0/dx = 0$, поэтому $\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho_1}{dx} = \frac{\lambda}{L d_0 \kappa} \cdot \frac{\Delta S}{S}$. Если интерференционные полосы горизонтальны, то $d\rho/dz = d\rho_0/dz + d\rho_1/dz$ и в невозмущенном случае расстояние между полосами пропорционально изменению градиента плотности среды по вертикали, определяемого устойчивым фоновым распределением поля плотности. При наклоне интерференционных полос их смещение пропорционально изменению градиента плотности по соответствующему направлению.

В течениях непрерывно стратифицированной жидкости одновременно наблюдаются более гладкие крупномасштабные и мелкомасштабные обостренные вариации градиента коэффициента преломления, произвольно ориентированные в пространстве.

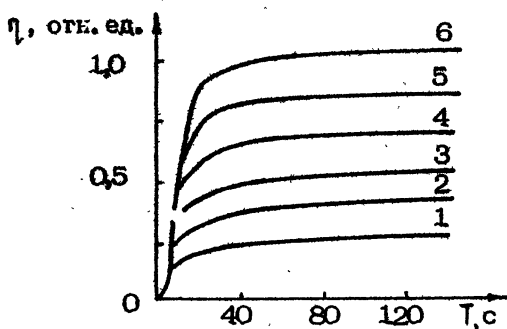
При выборе методики наблюдений необходимо учитывать ограниченность динамического диапазона и пространственную разрешающую способность реальных оптических систем, не допускающих одновременного наблюдения сильных и слабых оптических неоднородностей. Для измерения фазовых характеристик внутренних волн (слабые возмущения) предпочтительным является традиционный геновой метод "вертикальная щель - плоский нож Фуко в фокусе". Цветной геновой метод [5] позволяет одновременно наблюдать и волны и высокоградиентные структуры на периферии течений и вихрей. Шлирен-интерферометрия дает возможность достаточно просто (по смещению полос) измерять пространственное распределение проекции градиента плотности на нормаль к направлению полос, однако все оптические методы, работающие "на просвет", дают картины, осредненные по длине луча. Восстановление локальных характеристик достаточно просто осуществляется для двумерных течений и несколько более сложно для течений, обладающих свойствами симметрии относительно оси или плоскости. Но даже и в этих случаях, а тем более для анализа трехмерных течений, необходимо независимое определение амплитудных и энергетических характеристик, которое может быть выполнено с помощью контактных измерителей.

Для измерения внутренних волн в лабораторных условиях используется "одноэлектродный" микроконтактный датчик удельной электропроводности, в котором для снижения внутренних дестабилизирующих факторов использован метод импульсного зондирования [7]. Чувствительный элемент такого датчика состоит из коаксиальных электродов, разделенных диэлектриком. В проведенных опытах внутренний электрод диаметром 0,3 мм изготовлен из платины, внешний - никелевый капилляр диаметром 0,8 мм. Диаметр области осреднения вокруг кончика электролитической ячейки составляет 2,25 мм [8]. При измерениях нестационарных процессов необходимо учитывать динамические характеристики преобразователя - его нелокальность и инерционность.

В теории динамических измерений используются различные динамические характеристики: передаточная функция $H(\omega)$, амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, импульсная характеристика $q(t)$, переходная характеристика $h(t)$ [9]. Вид испытательного сигнала, который подается на вход измерительной системы с целью определения ее динамических свойств, должен определяться с учетом и условий эксплуатации, и характера исследуемого процесса.

Для динамической градуировки микроконтактных датчиков электропроводности используется ступенчатое воздействие, возникающее при пересечении датчиков сравнительно резкой границы раздела между двумя слоями жидкости разной солености [10]. При этом и в одном, и в другом слое жидкость однородна. Однако картины обтекания тела однородной и стратифицированной жидкостью существенно различаются. Поэтому представляется естественным, что определение динамических характеристик датчика должно производиться в условиях его эксплуатации, т.е. в средах с постоянным градиентом солености.

На практике используются следующие законы движения датчика — однократное смещение на высоту h с постоянной скоростью V и гармонические колебания с фиксированной амплитудой и переменной частотой [11]. На рис.3. приведено в ка-



Р и с. 3. Семейство переходных характеристик датчика УЭП

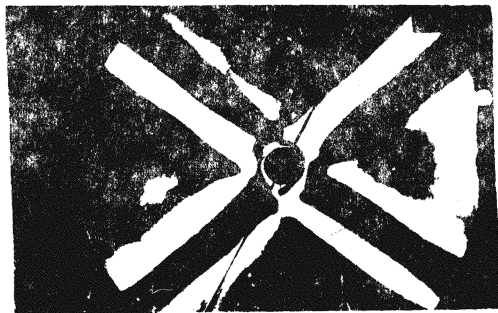
честве примера семейство переходных характеристик, возникающих при перемещении датчика на высоту 4,14; 6,49; 7,94; 11,28; 13,74 мм со скоростью 0,91 мм/с в жидкости с постоянным градиентом плотности, $T_k = 6,9$ с.

Отклик датчика на пилообразное воздействие, каким является перемещение в однородном градиенте солености, может быть разделен на три характерных участка. Первый из них соответствует началу движения, второй — стационарному перемещению, на котором отклик датчика изменяется пропорционально времени, третий — режиму установления. На последнем участке переходная характеристика аппроксимируется зависимостью $\eta = A \operatorname{erfc}(\alpha \sqrt{Nt})$. Коэффициенты A и α зависят от размеров и конструкции чувствительного элемента, скорости и

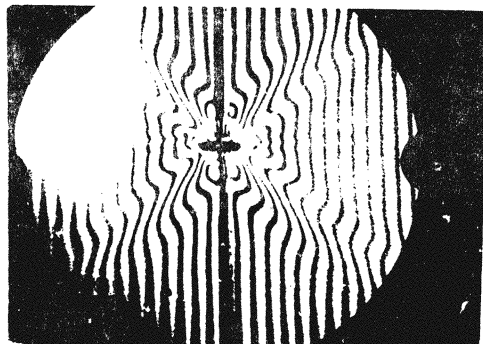
величины его перемещения. Рассчитанная передаточная функция показывает, что наибольшее ослабление наблюдается в окрестности частоты плаучести. Использование только статической градуировки занижает амплитуду регистрируемых с помощью данного датчика коротких внутренних волн в окрестности частоты плаучести в 4–5 раз.

Оптические картины монохроматических внутренних волн в жидкости с постоянным градиентом плотности, $T_k = 7,0$ с приведены на рис.4. Традиционная геновая фотограмма, полученная методом "вертикальная щель – нож Фуко" приведена на рис.4,а. Шлирен-интерферограммы даны при различной ориентации интерференционных полос – вертикальной (рис.4,б,е), горизонтальной (рис.4,в,г) и наклонной под углом 45° (рис.4,д). Внутренние волны возбуждались различными способами – горизонтальным цилиндром диаметром 2 см, совершающим гармонические колебания в плоскости, наклоненной под углом 60° к горизонту (см. рис.4,а) с амплитудой $A = 0,23$ см и частотой $\omega = 0,55$ с $^{-1}$; горизонтально расположенной пластиной толщиной 1,5 мм и шириной 2 см, совершающей колебания в вертикальной плоскости с амплитудой $A = 0,1$ см и частотой $\omega = 0,64$ с $^{-1}$ (рис.4,б,в) и пульсирующим горизонтальным цилиндром диаметром 3 см, схлопывающимся в треугольную приему и расправляющимся в полный цилиндр (рис.4,г,д,е). Во всех случаях, в согласии с существующей линейной теорией [12], двумерные внутренние волны распространяются вдоль волновых клиньев, плоскость симметрии которых наклонена под углом $\varphi = \arccos \omega/N$ к вертикали. Величина и характер распределения амплитуд волн поперек луча зависят от типа, формы, размеров источника и величины стратификации. Степень симметрии волновой картины зависит от угла наклона плоскости колебаний источника к горизонту – колебания в правом и левом луче волнового креста происходят в одинаковой фазе только если источник совершает колебания по вертикали.

Следует отметить, что симметрия оптического изображения не всегда соответствует симметрии процесса. Так, волновое поле, возбуждаемое вертикально колеблющейся пластиной, симметрично относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей, проходящих через центр источника. Симметрия оптического изображения этого процесса на шлирен-интерферограмме с вертикально и горизонтально ориентированными полосами соответствует симметрии процесса. Изображение на геновой фотограмме (см. рис.4,а) антисимметрично относительно горизонтальной плоскости, а само волновое поле симметрично. Особен-



а)



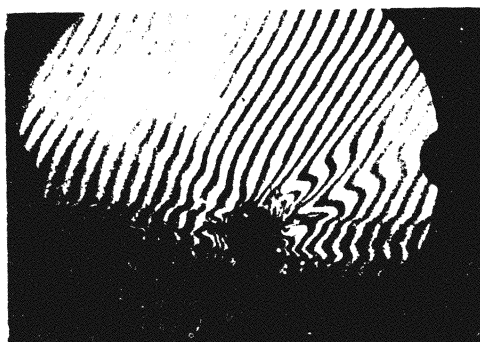
б)



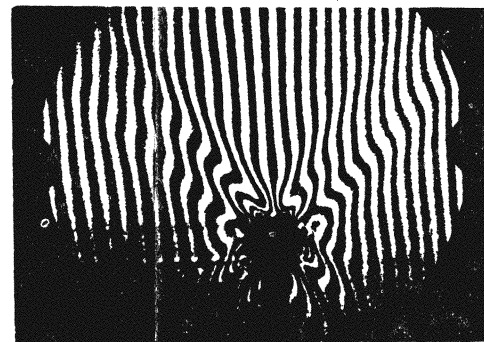
в)



г)



д)



е)

Р и с. 4. Оптические картины монохроматических внутренних волн в жидкости с постоянным градиентом плотности



a)



б)

но большие искажения наблюдаются в методе наклонных полос (рис.4,д), когда левый луч в верхнем полупространстве практически не виден, хотя волновое поле симметрично относительно вертикальной плоскости. Появление замкнутых линий на шпирен-интерферометрических картинах не всегда свидетельствует о замыкании линий тока и образовании вихрей (рис.4,б). Поэтому для получения адекватного описания процесса необходимо или проводить детальный количественный анализ оптического изображения, что является сложной и не всегда решаемой задачей, или пользоваться несколькими взаимно дополняющими друг друга оптическими и зондовыми методами.

Теневые картины вихрей показаны на рис.5. В качестве примера выбраны вихри в следе за горизонтально движущейся сферой диаметром $d = 1$ см в жидкости с однородным градиентом плотности. Скорость сферы $U = 7,2$ см/с, $T_k = 4,5$ с, $Re = 720$, $F_r = U^2/N^2 d^2 = 26$, $\zeta = 504$ (рис.5,а), $U = 5,7$ см/с, $T_k = 10,0$ с, $Re = 570$, $F_r = U^2/N^2 d^2 = 81$, $\zeta = 2490$ (рис.5,б). В монографии [13] отмечается, что в однородной жидкости никакого регулярного движения, подобного вихревой дорожке, в следе за сферой, по-видимому, не формируется, хотя создается впечатление, что от стационарного донного кольцевого вихря завихренность отходит непрерывным рядом искаженных вихревых петель, несимметричных относительно центральной оси. Стратификация стабилизирует спутное течение. Дискретные вихри в спутном течении, ось симметрии которых ориентирована в направлении движения тела, наблюдаются в определенном диапазоне безразмерных параметров – внутреннего числа Фруда и числа Рейнольдса [14]. Влияние стратификации на структуру спутных течений оказывается существенным в силу действия ряда факторов. При смещении жидких частиц с горизонта нейтральной плавучести возникают возвращающие силы плавучести. Их действие ограничивает высоту спутного течения и обуславливает существование внутренних волн. Второе важное обстоятельство связано с пространственной дисперсией стратифицированной среды – различием кинетических коэффициентов переноса импульса (кинематической вязкости ν) и вещества (коэффициента диффузии соли κ_s), отношение которых – число Шмидта – составляет $St = 700$. Следствием его является расщепление масштабов – резкое отличие толщин скоростного и плотностного пограничного слоя на теле (по аналогии с традиционным пограничным слоем под плотностным пограничным слоем понимается более тонкий слой жидкости вблизи поверхности тела, градиент плотности в котором существенно больше, чем в ис-

ходной невозмущенной среде). Высокоградиентные прослойки облегчают наблюдение картин течений. Но для их уверенной регистрации необходимо использовать высокоразрешающие оптические методы.

Стекающий плотностной погранслоем формирует высокоградиентную оболочку спутного течения, оказывающую существенное влияние на его устойчивость и формы возникающей неустойчивости. В дополнение к вихревой неустойчивости спутного течения в однородной жидкости в стратифицированной среде может развиваться гейлоровская и сдвиговая неустойчивости.

Приведенные фотограммы свидетельствуют о существенном влиянии центробежной стабилизации на структуру течения — вихревые кольца некоторое время устойчиво существуют, несмотря на действие сил плавучести, приводящее к их сплющиванию или мелкомасштабной потере устойчивости их внутреннего движения. На больших временах действие этих факторов является определяющим, и наиболее долгоживущими оказываются вытянутые по горизонтали слоистые структуры и внутренние волны, свойства которых обсуждались ранее [1].

Л и т е р а т у р а

1. Чашечкин Ю.Д. Лабораторное моделирование свободных стратифицированных течений // Методы гидрофизических исследований / ИПФ АН СССР, Горький, 1984. С.29.
2. Mowbray D.E. The use of schlieren and shadowgraph techniques in the study of flow patterns in density stratified liquids // J.Fluid Mech. 1967. V.27. Part 3. P.595.
3. Oster G. Density gradients // Scientific American. 1965. V.217. P.70.
4. Некрасов В.Н., Чашечкин Ю.Д. Измерение скорости в периодических колебаний жидкости методом плотности меток // Метрология. 1972. №11. С.36.
5. Чашечкин Ю.Д., Попов В.А. Цветной теневой метод // ДАН СССР. 1981. Т.261. №5. С.1130.
6. Merzkirch W. A simple schlieren interferometer system // AIAA. 1965. V.3. P.1174.
7. Левцов В.И., Чашечкин Ю.Д. Высокочувствительный контактный преобразователь удельной электропроводности жидкости // Метрология гидрофизических измерений: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. / ВНИИФТРИ. М., 1980. С.46.

8. Левцов В.И., Трохан А.М. Исследование пространственной разрешающей способности преобразователя удельной электрической проводимости жидкости // Метрология. 1980. №11. С. 42.

9. Широков К.П. и др. Основные понятия теории динамических измерений // Измерительная техника. 1975. №12. С. 9.

10. Gregg M.C., Meagher T.B., Aagaard E.F., Hess W.C. A salt stratified tank for measuring the dynamic response of conductivity probes // IEEE J.Ocean Engng. 1981. V.OF-6.N4.P.113.

11. Попов В.А., Чашечкин Ю.Д. Определение динамических характеристик преобразователей удельной электрической проводимости // Метрология. 1983. №1. С.38.

12. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.

13. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

14. Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д. Вихревая структура следа за сферой в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1986. №2. С.40.

АНАЛОГИЯ ЭФФЕКТОВ ПЛОТНОСТНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ И ВРАЩЕНИЯ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

В.А.Владимиров

Наличие сходства (аналогии) между свойствами вращающихся и стратифицированных по плотности течений жидкости впервые отмечено в 1916 г. Рэлеем [1]. С этого времени опубликован целый ряд работ, в которых такое сходство успешно использовалось при решении задач теории волн, теории устойчивости, описания вторичных режимов и турбулентности. Обзор некоторых относящихся сюда достижений даны в работах [2-7]. В настоящей статье приведен пример класса движений во вращающейся жидкости, для которого аналогия переходит в математическую эквивалентность. В качестве ее приложения рассмотрен вариационный принцип [8-10] для течений идеальной несжимаемой стратифицированной по плотности жидкости. Также упоминаются другие случаи аналогии и ее приложения к получению новых результатов.

1. ПРИМЕР ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЭФФЕКТОВ СТРАТИФИКАЦИИ И ВРАЩЕНИЯ

Рассматриваются движения идеальной несжимаемой однородной по плотности жидкости во вращающейся с постоянной скоростью $K/2$ системе координат. Уравнения движения записываются в виде [4]

$$\begin{aligned} D\vec{u} + \vec{k} \times \vec{u} &= -\vec{\nabla} p^*, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad D = \frac{d}{dt} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{u} - вектор скорости; ρ^* - модифицированное давление, включающее в себя "центробежную" добавку.

Пусть \vec{j} есть единичный вектор, задающий фиксированное (во вращающейся системе) направление и составляющий с вектором \vec{K} угол θ ($0 \leq \theta \leq \pi$). Изучается класс решений (1), поля \vec{u} и ρ^* в которых не изменяются вдоль направления \vec{j} . Вводится система декартовых координат x, y, z так, что ось z параллельна вектору \vec{j} . В результате имеем

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, t), \quad \rho^* = \rho^*(x, y, t). \quad (2)$$

После введения обозначений $\vec{u} = (u, v, w)$, $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$, $\rho = w + K_1 y - K_2 x$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) = \vec{j} \times \vec{K} = -(K_2, K_1, 0)$ система уравнений (1) может быть преобразована к форме

$$\begin{aligned} Du &= -\rho_x + \rho q_1, & Dv &= -\rho_y + \rho q_2, \\ D\rho &= 0, & u_x + v_y &= 0, & D &= \frac{d}{dt} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\rho = \rho^* - K_3 \psi + \frac{1}{2} (K_2 x - K_1 y)$, ψ - функция тока, для которой $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$. Индексы независимых переменных повсюду обозначают частные производные. Если движения (2) происходят в фиксированной области, то ее граница должна иметь форму цилиндрической поверхности $F(x, y) = 0$, граничные условия непротекания на которой имеют вид

$$u F_x + v F_y = 0. \quad (4)$$

Замечательный факт состоит в совпадении (3), (4) с уравнениями и соответствующими граничными условиями для плоских движений неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости в приближении Буссинеска [11]. Поэтому все результаты, справедливые для плоских движений стратифицированной жидкости, имеют место и для вращающихся течений с трансляционной симметрией. Некоторые результаты, касающиеся общих вопросов линейной и нелинейной устойчивости таких течений, а также указание других классов течений, для которых имеет место аналогия, даны в работах [7, 12] и [5], гл.8.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Замечательное свойство установившихся течений идеальной жидкости состоит в том, что интегралы движения достигают на них своих стационарных значений. Впервые на этот факт обратил внимание Фьортофт [8], получивший с его помощью достаточные условия линейной устойчивости плоских течений. Независимая и наиболее полная математическая формулировка вариационного принципа для плоских и трехмерных течений дана Арнольдом [9, 10]. В работах [5, 12-15] вариационный принцип использован для получения условий нелинейной устойчивости различных течений. В статье [16] предложено обобщение принципа на случай течения со свободными поверхностями. Излагаемая ниже форма вариационного принципа является развитием подхода описанного в гл.2 работы [8]. Достоинствами этого подхода является максимальная простота и наглядность.

Рассматриваются трехмерные движения идеальной несжимаемой жидкости в области τ с неподвижной (во вращающейся системе координат) границей $\partial\tau$. Уравнения движения берутся в форме (1). На поверхности $\partial\tau$ выполняются условия непротекания

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_i n_i = 0. \quad (5)$$

Используются обозначения: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - поле скорости, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ - нормаль к $\partial\tau$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - декартовы координаты. По повторяющимся векторным индексам всюду в статье производится суммирование. Для решений (1), (5) имеет место интеграл энергии

$$2E = \int_{\tau} u_i u_i d\tau = \text{const}, \quad d\tau = dx_1 dx_2 dx_3.$$

Для абсолютного вихря $\vec{\omega} = \vec{\omega} + \vec{K}$, $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ из (1) вытекает уравнение

$$D\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}. \quad (6)$$

Стационарные решения

$$\vec{u} = \vec{U}(\vec{x}), \quad \rho = \rho(\vec{x}), \quad \vec{\omega} = \vec{\Omega}(\vec{x}), \quad \vec{\omega} = \vec{\Sigma}(\vec{x}) \quad (7)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{U} = -\nabla \cdot (\rho + |\vec{U}|^2/2), \quad \text{div } \vec{U} = 0 \quad (8)$$

и граничным условиям (5).

Для формулировки вариационного принципа вводятся функции сравнения

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{T}, \epsilon), \quad \epsilon > 0, \quad (9)$$

гладко зависящие от параметра ϵ и дающие решение (7) при $t = 0$:

$$\vec{u}(\vec{T}, 0) = \vec{U}(\vec{T}). \quad (10)$$

Под вариациями функционала E понимаются производные

$$\delta E = \left. \frac{dE}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad \delta^2 E = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0}. \quad (11)$$

Рассматриваемое семейство функций сравнения (9) задается посредством гладких функций $\vec{f}(\vec{T}, \epsilon)$, таких, что

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0; \quad \vec{f} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\tau. \quad (12)$$

Определение функции сравнения \vec{u} по известной функции \vec{f} осуществляется посредством линейных дифференциальных уравнений

$$D_\epsilon \vec{e} = (\vec{e} \times \vec{\nabla}) \vec{f}, \quad D_\epsilon = \frac{\partial}{\partial \epsilon} + \vec{f} \times \vec{\nabla} \quad (13)$$

с начальными данными (10). Обращаем внимание на то, что при $\vec{f} = \vec{u}$ уравнение (13) совпадает с (6) так, что рассматриваемому множеству функций сравнения принадлежат и траектории $\vec{u} = (\vec{T}, t)$. Другой формой (13) является

$$\vec{e}_\epsilon = \operatorname{rot}(\vec{f} \times \vec{e}). \quad (14)$$

Индекс ϵ соответствует производной $\partial/\partial\epsilon$. Интегрирование уравнения (14) дает

$$\vec{u}_\epsilon = \vec{f} \times \vec{e} + \vec{\nabla} \alpha, \quad (15)$$

где $\alpha(\vec{T}, \epsilon)$ — возникающая при интегрировании функция, определяющаяся из условий

$$\operatorname{div} \vec{u}_\epsilon = 0; \quad \vec{u}_\epsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\tau. \quad (16)$$

Соотношение (15) можно было бы использовать в качестве "первичного" условия варьирования. Однако форма (13) представляется более наглядной для физического понимания.

Физическая интерпретация принятых условий варьирования состоит в том, что соотношениями (12)–(14) вводятся "виртуальные движения" жидкости, в которых \vec{f} играет роль

извне задаваемого поля скорости, а величина ϵ — роль времени. Соотношения (12) означают, что жидкость при таких движениях остается несжимаемой и не течет через границу. В то же время абсолютный вихрь $\vec{\omega}$ не связан с полем \vec{f} операцией $\nabla \times$, а играет роль векторной пассивной примеси. Точно так же, как $\vec{\omega}$ в уравнениях (13), (14), ведет себя при движении с полем скорости \vec{f} векторный жидкий элемент длины $\delta \vec{r}$ или "вмороженное" в жидкость магнитное поле см. с. 316 [17]. В статье [9] условия (12)–(14) сформулированы в терминах отображения области течения τ на себя и равенства циркуляций скорости по соответствующим контурам. Связанные этими условиями состояния жидкости получили название "равновихренных". Тут можно отметить, что для не-односвязных областей τ условие "равновихренности" [9] сильнее, чем (12), (13).

Первая вариация (11) функционала энергии в точке (7), вычисленная при условиях (12)–(15), равна нулю. Действительно, в силу (8), (12) получаем

$$\delta E = \int \vec{U} \vec{u}_\epsilon \Big|_{\epsilon=0} d\tau = \int \vec{f} (\vec{\Sigma} \times \vec{U} + \vec{V} \alpha) \Big|_{\epsilon=0} d\tau = 0.$$

Таким образом, на выбранном множестве функций сравнения любое установившееся решение (7) является стационарной точкой функционала E .

Для изучения поведения E вблизи этой точки вычисляется вторая вариация (11). В преобразованиях используются соотношения (8), (12), (15) и уравнение

$$\vec{u}_{\epsilon\epsilon} = \vec{f} \times \vec{\omega}_\epsilon + \vec{f}_\epsilon \times \vec{\omega} + \vec{V} \alpha_\epsilon,$$

полученное действием оператора $d/d\epsilon$ на выражение (15). Справедливо представление

$$\begin{aligned} 2\delta^2 E &= \int_{\tau} (\vec{u}_\epsilon \vec{u}_\epsilon + \vec{u} \vec{u}_{\epsilon\epsilon}) \Big|_{\epsilon=0} d\tau = \\ &= \int_{\tau} [\vec{u}_\epsilon \vec{u}_\epsilon + (\vec{U} \times \vec{f}) \vec{\omega}_\epsilon] \Big|_{\epsilon=0} d\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

где \vec{u}_ϵ и $\vec{\omega}_\epsilon$ взяты из уравнений (13)–(15). Из соотношений (15)–(16) следует, что при $\epsilon=0$ функция α выражается через \vec{f} линейно, поэтому под интегралом (17) выписана квадратичная форма от \vec{f} (или от \vec{u}_ϵ). Знакоопределенность этой формы означала бы наличие в точке $\vec{f}=0$

условного экстремума функционала E , что, в свою очередь, позволило бы сформулировать утверждение об условной устойчивости состояния (7). Однако эта форма никогда не является знакоопределенной, поскольку $E = \text{const}$ при движениях жидких частиц вдоль истинных траекторий решения (7). Величина $\delta^2 E = 0$ при $\bar{f} = \epsilon \bar{U}$ с любым значением постоянной ϵ . Самое лучшее, на что можно рассчитывать — это знакопостоянство (17) как квадратичной формы от \bar{f} .

3. ИНТЕГРАЛЫ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Вторая вариация (17) и связь (14) переписываются в новых обозначениях:

$$\bar{u}' = \epsilon \bar{u}_\epsilon, \quad \bar{\omega}' = \epsilon \bar{\omega}_\epsilon, \quad \bar{\xi}' = \epsilon \bar{f}, \quad E_2 = 2\epsilon^2 \delta^2 E,$$

$$E_2 = \int_V M d\tau, \quad M = \bar{u}' \bar{u}' + (\bar{U} \cdot \bar{\xi}') \bar{\omega}'; \quad (18)$$

$$\bar{\omega}' = \text{rot} (\bar{\xi}' \times \bar{\Sigma}) - \{ \bar{\xi}', \bar{\Sigma} \}. \quad (19)$$

Через $\{ \bar{A}, \bar{B} \}$ обозначается скобка Пуассона двух векторных полей $\{ \bar{A}, \bar{B} \}_i = B_{\alpha i} \partial A_i / \partial x_\alpha - A_{\alpha i} \partial B_i / \partial x_\alpha$.

Замечательным фактором является сохранение величины E_2 (18) в силу линеаризованных на (7) уравнений движения. При этом под \bar{u}' и $\bar{\omega}'$ понимаются бесконечно малые возмущения скорости, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям (1).

$$D_0 \bar{u} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{U} + \bar{K} \times \bar{u} = -\bar{\nabla} p, \quad (20)$$

$$\text{div} \bar{u} = 0, \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \cdot \bar{\nabla},$$

и возмущения вихря, уравнения для которых следует из (20)

$$\bar{\omega}'_t = \{ \bar{U}, \bar{\omega} \} + \{ \bar{u}, \bar{\Omega} \}. \quad (21)$$

Поле $\bar{u}'(\bar{r}, t)$ представляет собой бесконечно малые лагранжевы смещения жидких частиц и удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}'_t = \bar{u} + \{ \bar{U}, \bar{\xi} \}. \quad (22)$$

На границе $\partial\tau$ выполняются условия

$$\bar{u} \times \bar{n} = 0, \quad \bar{\xi}' \times \bar{n} = 0. \quad (23)$$

Штрихи у \bar{u} и $\bar{\omega}$ в выражениях (20)–(23) и ниже опущены. Определение и анализ свойств лагранжевых смещений даны, например, в работе [18], § 13.

Дифференциальным выражением сохранения величины E_2 (18), (19) в силу уравнений (20)–(23) является получаемая прямыми вычислениями дивергентная форма:

$$D_0 M + \partial N_k / \partial \tau_k = 0, \quad (24)$$

$$N_k \equiv 2\rho u_k + U_k u_\tau u_\tau - 2e_{k\ell m} u_\ell A_m +$$

$$+ \sum_k \xi_m A_m, \quad A_m \equiv e_{m\tau\eta} U_\tau u_\eta,$$

в которой $e_{m\tau\eta}$ — есть единичный антисимметричный тензор третьего ранга. В силу (5), (23) потоки величины M на $\partial\tau$ отсутствуют ($n_k N_k = 0$).

Как уже говорилось, получение достаточных условий устойчивости возможно в случаях знакоопределенности квадратичной формы M . При этом уже само равенство $E_2 = \text{const}$ (18) можно рассматривать как определение устойчивости по линейному приближению в среднеквадратическом (вопросы введения нормы возмущений для аккуратного определения устойчивости по Ляпунову здесь не рассматриваются). Для трехмерных течений (7) случаев знакоопределенности M найти не удастся. Все известные такие случаи получены для различных двумерных течений (плоских, осесимметричных, с винтовой симметрией) [8–10, 12]. Например, для плоских движений с $K = 0$ форма (24) принимает вид

$$M = u^2 + v^2 + (U\eta - V\xi)\omega, \quad N_1 = 2u\rho + 2vA + Vq^2, \quad (25)$$

$$N_2 = 2v\rho - 2uA + Vq^2, \quad A = V\eta - Uv, \quad q^2 \equiv u^2 + v^2.$$

Здесь $\vec{r} = (x, y)$; $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$, U, V , и u, v — компоненты скорости основного течения и возмущений, $\omega = v_x - u_y$.

Для выявления знакоопределенности удобно ввести функцию тока $\Psi(x, y)$ так, что $U = -\Psi_y$, $V = \Psi_x$. В силу (8) $Q = Q(\Psi)$; $Q \equiv V_x - U_y$. Вводятся обозначения $Q\vec{\tau} = (-V, U)$, $Q^2 \equiv U^2 + V^2$, $N \equiv \rho + \xi$, $Q' \equiv dQ/d\Psi$, где $\vec{\tau}$ — есть единичный нормальный к линии тока вектор. Тогда M (25) и ω (19) преобразуются к форме

$$M = u^2 + v^2 + Q' Q^2 N^2, \quad \omega = Q' Q N, \quad (26)$$

из которой видно, что при $Q' \geq 0$ имеется устойчивость в смысле сохранения интеграла

$$\int_{\tau} (u^2 + v^2 + \Omega' Q^2 N^2) d\tau = \text{const}; \quad d\tau = dx dy,$$

который в несколько других обозначениях впервые получен в работе [8]. Если вдобавок $\Omega' \neq 0$, то исключение величины $Q N$ дает

$$\int_{\tau} (u^2 + v^2 + \omega^2 / \Omega') d\tau = \text{const}. \quad (27)$$

Дивергентная форма (25) при этом также приводится к виду, не содержащему лагранжевых смещений ξ , и уравнения (22), (19) становятся ненужными. Это означает устойчивость при $\Omega' > 0$ относительно любых бесконечно малых возмущений (а не только "равнозавихренных" (19)!). Исключение лагранжевых характеристик течения свидетельствует о наличии более сильного вариационного принципа [10], состоящего в безусловном экстремуме сохраняющегося функционала.

4. ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Выписывая результаты разд. 2, 3 в частном случае трансляционно-инвариантных движений и используя эквивалентность стратификации и вращения в форме разд. 1, можно сразу получить соответствующие результаты для плоских течений стратифицированной жидкости. Основной интерес представляет выражение для второй вариации энергии, однако из методических соображений полезно привести и остальные формулы.

Уравнения плоских движений стратифицированной жидкости в декартовых координатах $\vec{r} = (r_1, r_2) = (x, y)$ имеют вид (3). Поле тяжести считается потенциальным $\vec{g} = -\nabla \Phi$ и не обязательно однородным. Интеграл энергии записывается в форме

$$E = \int_{\tau} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + \rho \Phi \right) d\tau.$$

Используются обозначения (25)–(27). Стационарные решения

$$U(\vec{r}), V(\vec{r}), \Omega(\vec{r}), \rho_0(\vec{r}), \rho(\vec{r}) \quad (28)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Omega V + \Phi \rho_{0x} = H_x, \quad -\Omega U + \Phi \rho_{0y} = H_y,$$

$$(\bar{U} \cdot \bar{V}) \rho_0 = 0; \quad H = \rho + \rho \Phi + Q^2/2. \quad (29)$$

Условия варьирования, заменяющие требования "равновзвихренности" (13), теперь вводятся с помощью двумерной соленоидальной функции $\bar{f} = (f_1, f_2)$ (12) и произвольной скалярной функции $\psi(\bar{x}, \epsilon)$:

$$\omega_\epsilon + f_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} - \psi_x \rho_y + \psi_y \rho_x = 0,$$

$$\rho_\epsilon + f_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (30)$$

с искомыми функциями сравнения $\omega(\bar{x}, \epsilon)$, $\rho(\bar{x}, \epsilon)$, удовлетворяющими начальным данным:

$$\omega(\bar{x}, 0) = \Omega_0(\bar{x}), \quad \rho(\bar{x}, 0) = \rho_0(\bar{x}). \quad (31)$$

Интегрированием первого уравнения (30) получаем

$$u_\epsilon = f_2 \omega + \psi \rho_x + \alpha_x, \quad v_\epsilon = -f_1 \omega + \psi \rho_y + \alpha_y \quad (32)$$

с функцией $\alpha(\bar{x}, \epsilon)$, определяемой аналогично (16). Первая вариация

$$\delta E = \int (U u_\epsilon + V v_\epsilon + \Phi \rho_\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} d\tau = 0$$

в силу уравнений (29)–(32) и условий непротекания на граничной кривой $d\tau$. Вычисление второй вариации приводит к выражению

$$E_{\epsilon\epsilon} = \int \left[u_\epsilon^2 + v_\epsilon^2 + (U f_2 - V f_1) \omega_\epsilon + (U_\alpha \psi - f_\alpha \Phi) \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_\alpha} \right] d\tau,$$

являющемуся квадратичной формой от \bar{f} и ψ . Интеграл, аналогичный (18), получается заменой

$$\bar{u} = \epsilon \bar{u}_\epsilon, \quad \bar{v} = \epsilon \bar{v}_\epsilon, \quad \alpha = \epsilon \psi, \quad \rho = \epsilon \rho_\epsilon,$$

$$E_2 = \int \left[u^2 + v^2 + (U \eta - V \xi) \omega - \rho \left(U_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x_\alpha} - \xi_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \right) \right] d\tau. \quad (33)$$

Связи (30) приобретают вид

$$\omega + \xi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} - \alpha_x \rho_{y_1} + \alpha_y \rho_{x_1} = 0, \quad \rho + \xi_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (34)$$

Сохранение E_2 с ω и ρ из (34) имеет место в силу линеаризованных на (28) уравнений движения (3):

$$\begin{aligned} D_0 u_i + u_\alpha \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} &= - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}; \\ D_0 \rho + u_\alpha \frac{\partial \rho_0}{\partial x_\alpha} &= 0, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0; \\ D_0 \omega + u_\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha} &= \rho_y \varphi_x - \rho_x \varphi_y; \end{aligned} \quad (35)$$

$$(U_1, U_2) = (U, V), \quad (u_1, u_2) = (u, v),$$

дополненных уравнениями

$$D_0 \xi_i = u_i + \xi_\alpha \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}, \quad D_0 \eta = \xi_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}.$$

Величина η представляет собой лагранжево возмущение некой вспомогательной функции, смысл которой здесь не обсуждается.

Для стационарных решений из выражений (29) следует $\rho_0 = \rho_0(\Psi)$, $H = H(\Psi)$. Функция тока Ψ определена как в (26). При $\rho'_0 = d\rho_0/d\Psi \neq 0$ дивергентная форма, соответствующая интегралу (33), преобразованиями приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_0 M - U_\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{\Phi \rho'_0}{\rho'_0} \epsilon \right) - u_\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(\rho + U_i u_i \right) + \\ + \epsilon_y \gamma_x - \epsilon_x \gamma_y, \end{aligned}$$

$$M = u^2 + v^2 + \frac{2}{\rho'_0} \rho \omega + \alpha \rho^2,$$

$$\alpha = (\Phi \rho'_0 - H'') / \rho'_0{}^2, \quad \gamma = \Phi / \rho'_0, \quad \epsilon = \rho^2 / 2. \quad (36)$$

Из интегральной формы закона сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} M d\tau = 2 \oint_{\partial \tau} \gamma d\epsilon = -2 \oint_{\partial \tau} \epsilon d\gamma \quad (37)$$

следует, что условиями, достаточными для сохранения интеграла (37), являются $\Phi = \text{const}$ или $\rho = 0$ на $\partial \tau$. Оба

этих условия выделяют интересные классы движений. Условие $\rho = 0$ динамически непротиворечиво, поскольку $\rho_0 = \text{const}$ на линии тока $\int \tau$. Так же, как и (27), интеграл (36), (37) не содержит лагранжевых смещений и сохраняется для любых возмущений течения (28) (а не только подчиненных условиям (30), (32)). К сожалению, отсутствие в M пропорционального ω^2 слагаемого в общем случае исключает возможность знакоопределенности. Поэтому, в отличие от (27), достаточных условий устойчивости при $\bar{U} \neq 0$ сформулировать не удастся. Так же, как и в (27), произведенное исключение величин ξ и α свидетельствует о наличии более сильного вариационного принципа.

Особым является случай гидростатического равновесия $\bar{U} = 0$. При этом в уравнениях (36)

$$M = u^2 + v^2 - \frac{\bar{V} \rho_0 \cdot \bar{V} \Phi}{(\bar{V} \rho_0)^2} \rho^2, \quad (38)$$

и положительной определенности отвечает нарастание плотности вдоль поля тяжести. Соответствующие нелинейные утверждения об устойчивости даны в работах [5, 12, 14].

Наиболее часто встречается частный случай (28)–(37)–плоскопараллельные течения стратифицированной жидкости, в которых

$$U = U(y), \quad V = 0, \quad \rho_0 = \rho_0(y), \quad \Phi = \Phi(y). \quad (39)$$

Область течения τ – полоса $0 < y < H$. Для записи интегралов удобно ввести обозначения:

$$M \equiv u^2 + v^2 + \frac{g}{\rho_{0y}} \rho^2 - U \mathcal{J}, \quad g \equiv -\Phi_y,$$

$$\mathcal{J} \equiv (U_{yy} / \rho_{0y}^2) \rho^2 + (2 / \rho_{0y}) \rho \omega,$$

$$A \equiv u^2 - v^2 + \frac{g}{\rho_{0y}} \rho^2, \quad B \equiv 2u v.$$

С учетом уравнений (35) с коэффициентами из (39) справедливы соотношения

$$D_0 M = -(2\rho u + UA)_x - (2\rho v + UB)_y,$$

$$D_0 \mathcal{J} = A_x + B_y, \quad (40)$$

первое из которых является частным случаем (36), второе следует из первого и галилеевой инвариантности задачи. Дивергентным формам (40) отвечает независимость от времени двух интегралов:

$$\int M dt = \text{const}, \quad \int J dt = \text{const}. \quad (41)$$

(При этом рассматриваются только такие классы движений, в которых либо существуют интегралы по всей полосе, либо имеется периодичность гидродинамических полей по t и интегралы берутся по длине периода. Случаев знакоопределенности интегралов (41) также выделить не удается (за исключением $\bar{U} = 0$ (38)).

В заключение приведем несколько дополняющих изложение замечаний.

1. Уравнение (13) может быть один раз проинтегрировано. Для этого вводятся лагранжевы координаты $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3)$, такие, что виртуальная траектория жидкой частицы

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, \epsilon); \quad \bar{X} = \bar{x}(\bar{X}, 0), \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \epsilon} = f(\bar{x}, \epsilon).$$

Искомый интеграл уравнения (13) полностью аналогичен найденному Коши для уравнений (1) (см. [19]) и имеет вид

$$\epsilon_i(\bar{x}, \epsilon) = \epsilon_i(\bar{X}, 0) \frac{\partial x_i}{\partial X_i}.$$

Эта связь может быть использована вместо (12) в качестве условия "равновихренности". При этом функция $\bar{x}(\bar{X}, \epsilon)$ играет роль использованного в работе [9] отображения области τ на себя, а равенство циркуляций абсолютной скорости по соответствующим контурам [9] сводится к очередному совпадению потоков вектора $\bar{\epsilon}$.

2. Условия варьирования (12), (13) интересны для выяснения смысла физической концепции "гидросклипической упругости" вращающихся течений жидкости (см., например, [20, 5]). Её суть состоит в проведении аналогии между движениями во вращающейся жидкости и в упругом теле со своеобразным законом упругости. Инерционные волны в жидкости трактуются при этом как проявления "гидросклипической упругости", являющиеся, по существу, коллективной "прецессией" жидких частиц. Центральным вопросом при употреблении понятия "упругость" применительно к жидкости является определение структуры, деформации которой обуславливают "упругую" реакцию жидкости. Сложность здесь в том, что внесение в жидкость возмущения произвольной

формы приводит не только к деформации как-либо определенной "упругой структуры", но и к изменению самих "упругих свойств". В соответствии с условиями (12), (13) и их физической интерпретацией требуемой структурой является система вихревых линий. Наиболее четко обсуждаемый вопрос просматривается в свете аналогии эффектов стратификации и вращения. Условия для ρ (30) означают, что виртуальные смещения жидких частиц стратифицированной жидкости происходят без изменения их плотности. Если не накладывать ограничивающего вариации плотности условия, то само понятие устойчивого или неустойчивого плотностного расслоения (убывания или нарастания плотности вверх) оказа.лось бы бессодержательным. В свете сказанного выписанные выражения для вторых вариаций (17), (33), (36) означают, что "упругость", как в трехмерных вихревых течениях, так и в плоских потоках стратифицированной жидкости, является сильно анизотропной. По-видимому, всегда существуют направления, по которым могут распространяться волны, и в то же время деформации по другим направлениям будут приводить к неустойчивостям. Единственными "чистыми" случаями являются состояния абсолютного или относительного покоя.

3. В работе [21] предложен вариационный принцип для течений стратифицированной жидкости, использующий энергию и лагранжев инвариант $(\vec{\omega} \times \vec{\nabla}) \rho$. Легко видеть, что этот подход не применим к плоским течениям стратифицированной жидкости, поскольку для них $(\vec{\omega} \times \vec{\nabla}) \rho = 0$. Поэтому результаты разд.4 таким способом [21] получены быть не могут.

4. Особо следует отметить, что в коэффициентах квадратичных форм M и J (40) число Ричардсона $Ri = g \rho_{\alpha\beta} / U_{\beta}^2$ не появляется. Этот факт удивителен, поскольку обычные физические способы вывода числа Ричардсона основываются на энергетических соображениях [22]. Для сравнения напомним, что условия Рэля устойчивости однородных течений, связанные с наличием точки перегиба в профиле скорости, следуют из (27).

5. Тем не менее в работе [23] предпринята попытка получения из результатов [21] числа Ричардсона как меры устойчивости плоскопараллельных течений. Для этого, во-первых, вводится "слабая" неоднородность профиля U (39) по третьей координате, после чего становится $(\vec{\omega} \times \vec{\nabla}) \rho \neq 0$. Во-вторых, из выражения для второй вариации на основе физических соображений выбрасываются некоторые члены. Автору настоящей статьи эти соображения представляются неверными.

6. С использованием терминологии [24,25] интегралы (37), (41) могут быть квалифицированы как псевдоэнергия и псевдоимпульс. Отличие состоит в том, что речь идет не об обычном обсуждаемом случае волн близких к гармоническим, а об интегралах для возмущений без более широкого класса.

Л и т е р а т у р а

1. Rayleigh J.W. On the dynamics of revolving fluids. Scientific Papers, v. 6. Cambridge University Press, 1916. P.447.
2. Yih C.S. Stratified Flows. N.Y.: Acad.Press, 1980.
3. Veronis G. The analogy between rotating and stratified fluids //Ann.Rev.Fluid Mech. 1970. V. 2. P.37.
4. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
5. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
6. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.
7. Владимиров В.А. О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения //ПМТФ. 1985. №3. С.58.
8. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ. 1950. V.17. N 6. P.4.
9. Арнольд В.И. Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости //ПММ. 1965. Т.29. Вып.5. С.846.
10. Арнольд В.И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости //ДАН СССР. 1965. Т.162. №5. С.975.
11. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
12. Владимиров В.А. Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости //ПМТФ. 1986. №3. С.70.
13. Арнольд В.И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости //Изв. вузов. Математика, 1966. №5. С.3.

14. Владимиров В.А. Вариационный принцип и априорная оценка устойчивости для состояний покоя непрерывно стратифицированной жидкости // Динамика неоднородных жидкостей Сер. Динамика сплошной среды, вып.72./Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск: 1985. С.12.

15. Holm D.D., Mardsen J.E., Ratiu T., Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys.Rep. 1985. V.123. N 1. P.1.

16. Седенко В.И., Юдович В.И. Устойчивость стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // ПММ, 1978. Т.42. Вып.6. С.1049.

17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука 1982.

18. Чандасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.

19. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: ИЛ, 1963.

20. Владимиров В.А., Тарасов В.Ф. Об упругости вращающихся потоков // ДАН СССР, 1980. Т.253. №3. С.565.

21. Дикий Л.А. К нелинейной теории гидродинамической устойчивости // ПММ, 1965. Т.29. Вып.5. С.852.

22. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.

23. Abarbanel H.D.I., Holm D.D., Mardsen J.E., Ratiu T. Richardson number criterion for the nonlinear stability of three-dimensional stratified flow // Phys.Rev.Lett. 1984. V.52. N 26. P.2352-2355.

24. Мак-Интайр М. Миф о "волновом импульсе" // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С.454.

25. Grimshaw R. Wave action and wave-mean flow interaction with application to stratified shear flows // Ann.Rev.Fluid Mech. 1984. V.16. P.11.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СЛОЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СРЕДНИМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В.А.Боровиков, Е.С.Левченко

ВВЕДЕНИЕ

В океане часто наблюдаются течения с вертикальным сдвигом скорости. Характерные значения вариации скорости по глубине имеют порядок десятков и более сантиметров в секунду, т.е. сравнимы со скоростями распространения внутренних волн. Поэтому такие течения существенно сказываются на распространении внутренних волн. Если пренебречь временной и горизонтальной изменчивостью течений, то приходим к задаче о распространении внутренних волн в слое стратифицированной жидкости со средними сдвиговыми горизонтальными течениями, зависящими от вертикальной координаты.

Эта задача рассматривалась многими авторами. В частности, большое внимание уделялось основной спектральной задаче — определению дисперсионных функций $\omega_n(\lambda, \mu)$ для собственных колебаний внутренних волн с зависимостью от времени и горизонтальных координат вида $\exp(i(\omega t - \lambda x - \mu y))$. Были выяснены условия устойчивости, т.е. отсутствия собственных колебаний с комплексными частотами ω [1]; описаны области на комплексной плоскости, где могут находиться частоты ω в случае неустойчивых колебаний [2, 3]; рассмотрено влияние сдвиговых течений на распространение коротко-

волновых пакетов внутренних волн [4]; проанализировано поведение внутренних волн в окрестности критического слоя - горизонта, на котором фазовая скорость внутренней волны совпадает со скоростью течения [5, 6]. На таком горизонте внутренняя волна может отдавать часть своей энергии потоку течений. Изложение современного состояния теории распространения внутренних волн в средах со сдвиговыми течениями можно найти в монографиях [7, 8].

В настоящей статье рассмотрим распространение внутренних волн, возбуждаемых локализованными источниками в средах со сдвиговыми течениями. В случае отсутствия средних течений эта задача рассматривалась в ряде работ (последние результаты и список литературы см. в [9]). Будет построена функция Грина уравнения внутренних волн, выяснены ее основные качественные свойства и асимптотика поля при больших t, x, y ; приведены результаты численных расчетов волновых фронтов.

Перейдем к точной постановке задачи. Систему линейных уравнений внутренних волн в стратифицированной среде со средними сдвиговыми течениями можно свести к одному уравнению, например для возмущения $u(t, x, y, z)$ [7]:

$$L\left(z, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u(t, x, y, z, z_0) = Q(t, x, y, z, z_0), \quad (1)$$

где

$$L = \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{D}{Dt} \left(U_{xz} \frac{\partial}{\partial x} + V_{xz} \frac{\partial}{\partial y} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

- оператор внутренних волн в приближении Буссинеска; $N = N(z)$ - частота Брента-Вяйсяля; $U = U(z)$, $V = V(z)$ - компоненты скорости течения $\vec{U} = \{U, V, 0\}$ на горизонте z ; $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y}$.

Уравнение (1) рассматривается в слое $-H < z < 0$; при $z = 0$, $-H$ берутся нулевые граничные условия. Предполагается, что источник Q включается при $t > 0$, при $t < 0$ жидкость находится в покое. Отсюда для $u(t, x, y, z, z_0)$ в уравнении (1) возникают начальное и граничные условия:

$$u = 0 (t < 0); \quad u = 0 (z = 0, -H). \quad (2)$$

Предполагается выполненным условие устойчивости Майлса

$$Ri(x) = \frac{N^2(x)}{(U'_x)^2 + (V'_x)^2} > \frac{1}{4} \quad (-H < x < 0), \quad (3)$$

гарантирующее отсутствие неустойчивых собственных колебаний.

Будем рассматривать два частных случая распределения источников Q . Во-первых, функция Грина, т.е. решение $\Gamma(t, x, y, z, z_0)$ уравнения (1) с правой частью $Q = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$. В силу линейности задачи решение уравнения (1) с произвольной правой частью получается посредством свертки функций Γ и Q . Далее будет показано, что функция Γ при $t \gg 1$ разлагается на сумму мод $\Gamma = \sum \Gamma_n$ и быстро убывающее при $t \rightarrow \infty$ слагаемое Γ_n (непрерывный спектр), и исследована асимптотика каждой из мод Γ_n . Как и в случае отсутствия течений [7, 10], пространство x, y, t разбивается на две области: волновую зону, где Γ_n осциллирует и убывает при $t \rightarrow \infty$ как t^{-1} , и запредельную, где Γ_n экспоненциально убывает. В отличие от [10, 9], где волновая зона ограничена фронтом $\eta = \sqrt{x^2 + y^2} = c_n t$ (c_n — максимальная групповая скорость n -й моды), здесь волновая зона каждой моды ограничивается двумя замкнутыми кривыми — передним фронтом и задним фронтом. Исследуется форма фронтов и асимптотики Γ_n в их окрестности.

Вторая рассматриваемая нами задача — традиционная для изучения динамики волн в жидкости задача о движущемся источнике [10, 11, 12, 7, 13], в данном случае — об источнике внутренних волн. Будет рассматриваться источник $Q = 0$ при $t < 0$ и $Q = \delta(x - \sqrt{t})\delta(y)\delta(z - z_0)$ при $t > 0$. Нас будет интересовать предел $\mathcal{F}(\xi, \eta, z, z_0)$ решения $\Phi(t, x, y, z, z_0)$ при фиксированных $\xi = x - \sqrt{t}, \eta, z$ и $t \rightarrow \infty$, когда все переходные процессы закончились. Решение для движущегося произвольно распределенного источника получается из $\mathcal{F}(\xi, \eta, z, z_0)$ посредством очевидных операций. Например, возвышение $W(\xi, \eta, z, z_0)$, обусловленное движущимся источником массы единичной интенсивности, будет иметь вид

$$W(\xi, \eta, z, z_0) = \sqrt{t} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\xi, \eta, z, z_0)}{\partial \xi \partial z_0},$$

при обтекании тела малых продольных размеров, например шара радиусом a , возвышение имеет вид

$$W(x, y, z, z_0) = a \bar{V} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}(x, y, z, z_0)}{\partial x^2 \partial z_0}.$$

Для функции $\mathcal{F}(x, y, z, z_0)$ будет выписано разложение по модам $\mathcal{F} = \sum_n \mathcal{F}_n$, и найдена асимптотика \mathcal{F}_n вблизи волновых фронтов. При этом будет предполагаться, что скорость \bar{V} источника достаточно велика \ll больше максимальной групповой скорости внутренних волн.

Часть излагающихся ниже результатов анонсирована в статье [14].

РАЗЛОЖЕНИЕ Γ ПО МОДАМ

Преобразование Фурье уравнения (1) по переменным t, x, y приводит к следующему выражению для $\Gamma(t, x, y, z, z_0)$:

$$\Gamma(t, x, y, z, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i(\lambda x + \mu y - \omega t)] \bar{G}(\omega, \lambda, \mu, z, z_0), \quad (4)$$

где \bar{G} — решение граничной задачи

$$L_0 \bar{G} = (\omega - f)^2 \delta(z - z_0); \quad \bar{G} = 0 \quad (z = 0, -H),$$

L_0 — оператор Тейлора-Гольдштейна,

$$L_0 u = (\omega - f)^2 u_{zz} + \left\{ \kappa^2 [N^2 - (\omega - f)^2] + f_{zz}'' (\omega - f) \right\} u,$$

$$f = f(z) = \lambda U + \mu V, \quad \kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2. \quad (5)$$

Обозначим через $\psi_1(z, \omega)$ и $\psi_2(z, \omega)$ решения уравнения $L_0 \psi = 0$, обращающиеся соответственно в ноль при $z = 0, -H$. Тогда

$$\bar{G}(\omega, \lambda, \mu, z, z_0) = \begin{cases} \frac{\psi_1(z, \omega) \psi_2(z_0, \omega)}{(\omega - f(z_0))^2 W^*} & z_0 < z, \\ \frac{\psi_1(z_0, \omega) \psi_2(z, \omega)}{(\omega - f(z_0))^2 W^*} & z_0 > z, \end{cases} \quad (6)$$

где $W^*(\omega) = \psi_1(-H, \omega) \frac{d\psi_2(-H, \omega)}{dz}$ — вронскиан функций ψ_1 и ψ_2 и оче-

видно, полюсы $\bar{\Gamma}$ совпадают с нулями $\varphi_1(-H, \omega)$. Функции $\varphi_1(z, \omega)$ и $\varphi_2(z, \omega)$ являются аналитическими функциями ω вне отрезка $I: (\min_x f, \max_x f)$; этот отрезок — разрез для $W^*(\omega)$ и тем самым для $\bar{\Gamma}$. Нули $\varphi_1(-H, \omega)$ совпадают с собственными числами $\omega = \omega_n$ спектральной задачи

$$L_n \varphi = 0; \quad \varphi = 0 \quad (z = 0, -H). \quad (7)$$

Из условия $\Gamma \equiv 0$ при $t < 0$ следует, что полюсы и разрез $\bar{\Gamma}$ при интегрировании по ω надо обходить в верхней полуплоскости.

Очевидно, что $\varphi_1(z, \omega_n) = \varphi_2(z, \omega_n) = \varphi_n(z)$, где $\varphi_n(z)$ — собственная функция задачи (7). Вычет $\bar{\Gamma}$ при $\omega = \omega_n$ выражается через $\frac{\partial W^*}{\partial \omega}(z = -H, \omega = \omega_n)$. Эта величина имеет вид

$$\operatorname{Res}_{\omega = \omega_n} \bar{\Gamma} = \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z_0)}{[\omega - f(z_0)]^2 d_n} ; \quad d_n = -2 \int_{-H}^0 (\omega_n - f) \left\{ \left[\frac{d}{dz} \frac{\varphi_n}{(\omega_n - f)} \right]^2 + \kappa^2 \frac{\varphi_n^2}{(\omega_n - f)^2} \right\} dz \quad (8)$$

Из условия Майлса (3) следует [1], что все ω_n вещественны. В работе [15] доказано, что имеются две серии чисел — в одной из них ω_n убывают и стремятся к $\max_x f$, во второй — ω_n растут и стремятся к $\min_x f$. Перенумеруем собственные числа второй серии отрицательными числами $-\omega_n$, тогда

$$\omega_{-n}(-\lambda, -\mu) = -\omega_n(\lambda, \mu); \quad \varphi_n(z, \lambda, \mu) = \varphi_{-n}(z, -\lambda, -\mu), \quad (9)$$

где $\varphi = \varphi_n$ — собственная функция, соответствующая собственному числу ω_n .

В работе [1] для случая монотонной функции $f(z)$ доказывается, что при выполнении условия Майлса все собственные числа исчерпываются этими двумя сериями, т.е. что на разрезе I нет собственных чисел. То же утверждение справедливо для произвольной $f(z)$. Доказательство производится методом от противного: доказывается, что если такое число есть, то вариацией $N(z)$ его можно вывести в комплексную область, а это запрещено условием Майлса. Детали выкладок опускаем из-за недостатка места.

Интеграл в выражении (4) сводится к интегралу по разрезу I и к сумме вычетов в полюсах G :

$$\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} e^{-i\omega t} G(\omega, \lambda, \mu, x, z_0) d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(z_0)}{d_n[\omega_n - f(z_0)]^2} + G_m, \quad (10)$$

$$G_m = 2i \int_{mi\epsilon}^{maxf} e^{-i\omega t} \Im G(\omega + i\theta, \lambda, \mu, x, z_0) d\omega.$$

Можно показать, что функция $G_m(t, x, y, z, z_0)$, получающаяся из G_m обратным преобразованием Фурье по переменным λ, μ , убывает при $t \rightarrow \infty$ быстрее любой степени t^{-p} . Поэтому в выражении (10) слагаемое G_m можно отбросить.

Проведем интегрирование по λ и μ . Учитывая (9), получим $\Gamma = \sum_n \Gamma_n$, где

$$\Gamma_n = -\frac{\Im m}{2\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[\lambda x + \mu y - \omega_n(\lambda, \mu)t]\} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(z_0) d\lambda d\mu}{d_n[\omega_n - f(z_0)]^2}. \quad (11)$$

Рассмотрим асимптотику Γ_n при $t, |x|, |y| \gg 1$. Для этого положим $x = \alpha t$, $y = \beta t$ и будем искать асимптотику Γ_n при фиксированных α, β и $t \rightarrow \infty$, т.е. будем рассматривать поле Γ_n при $t \gg 1$ в точке x, y , удаляющейся от начала координат со скоростью $\vec{U} = (\alpha, \beta)$. Фазовую функцию в формуле (11) можно записать в виде $S = t(\lambda\alpha + \mu\beta - \omega_n(\lambda, \mu))$, и ее стационарные точки λ, μ определяются из уравнений

$$\frac{x}{t} = \alpha = \frac{\partial \omega_n(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}; \quad \frac{y}{t} = \beta = \frac{\partial \omega_n(\lambda, \mu)}{\partial \mu}. \quad (12)$$

Множество точек на плоскости (λ, μ) , для которых уравнения (12) имеют решение, т.е. множество значений $\text{grad } \omega_n(\lambda, \mu)$, естественно назвать волновой зоной. При $t \gg 1$ и $\alpha = \frac{x}{t}$, $\beta = \frac{y}{t}$ находящийся в этой зоне интеграл (11) имеет стационарные точки и Γ_n осциллирует и убывает как t^{-1} ; вне волновой зоны стационарных точек нет и Γ_n экспоненциально убывает.

Положим $\lambda = k \cos \psi$, $\mu = k \sin \psi$. Результаты численных расчетов и аналитических оценок показывают, что, во всяком случае для приближающихся к реальным распределениям $N(x)$, $U(x)$, $V(x)$, волновая зона ограничена двумя замкнутыми кривыми — передним и задним фронтами. При этом оказывается, что передний фронт — кривая (12) при $k \rightarrow 0$ и $0 < \psi < 2\pi$, задний — предел (12) при $k \rightarrow \infty$ и $0 < \psi < 2\pi$. При отсутствии течения $U=V=0$ передний фронт — окружность радиуса ζ_n , где ζ_n — максимальная групповая скорость n -й моды (в среде без вращения эта скорость всегда достигается при $k=0$ — см. [10]), а задний фронт стягивается в начало координат (так как $d\omega_n/dk \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$). На рис.1 приведены кривые (12) при $0 < \psi < 2\pi$ и фиксированных k . Соответствующие распределения $N(x)$ и $U(x)$, $V(x)$ показаны на рис.2,3.

Форма заднего фронта определяется аналитически, определение формы переднего фронта требует численных расчетов. Численный метод расчета спектральной задачи (7) и определение положения волновых фронтов рассматриваются в работе [16].

АСИМПТОТИКА Γ_n ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕГО ФРОНТА

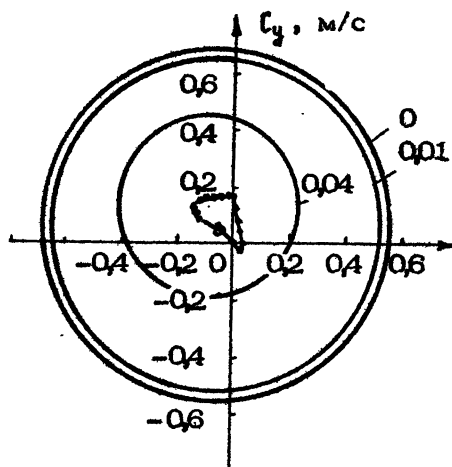
Положим $\lambda = k \cos \psi$, $\mu = k \sin \psi$, $\omega_n = k \xi(k, \psi)$. Тогда передний фронт, т.е. предел (12), при $k \rightarrow 0$ и $0 < \psi < 2\pi$ задается уравнениями

$$\frac{x}{t} = \alpha(\psi) = \xi(0, \psi) \cos \psi - \xi'_\psi(0, \psi) \sin \psi; \quad \frac{y}{t} = \beta(\psi) = \xi(0, \psi) \sin \psi + \xi'_\psi(0, \psi) \cos \psi. \quad (13)$$

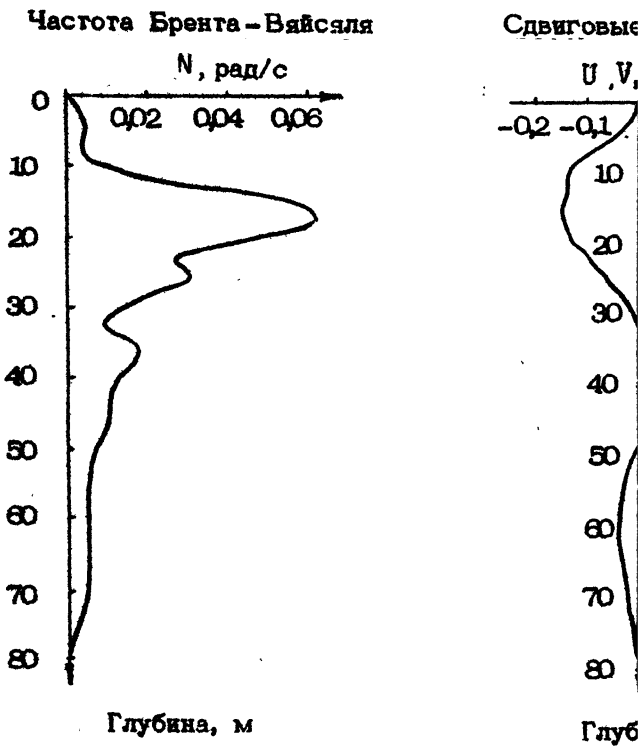
Рассмотрим какую-либо невырожденную точку P^* переднего фронта (т.е. точку, в которой $(\alpha'_\psi)^2 + (\beta'_\psi)^2 \neq 0$) и повернем оси координат x, y так, чтобы в ней $\psi = 0$. Тогда $\alpha'_\psi = 0$, $\beta'_\psi = -\xi + \xi''_{\psi\psi} \neq 0$, т.е. направление нормали в точке P^* совпадает с осью α . Положим

$$\frac{x}{t} = \alpha = \alpha(0) + \varepsilon = \xi(0, 0) + \varepsilon; \quad \frac{y}{t} = \beta = \beta(0) = \xi'_\psi(0, 0) \quad (14)$$

и будем искать асимптотику Γ_n при $t \gg 0$ и малых ε , т.е. асимптотику Γ_n вдоль нормали к фронту в точке P^* . При малых k



Р и с. 1



Р и с. 2

Р и

$$\Xi(k, \psi) = \Xi(0, \psi) + k^2 \eta(\psi) + O(k^4). \quad (15)$$

Переходя в интеграле (11) к независимым переменным k, ψ и вычисляя интеграл по ψ методом стационарной фазы, получим

$$\Gamma_n = -\frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \int_m^{\infty} \frac{\exp[ikt\varphi^*(k, \psi_0) - i\pi/4] \varphi_0(z) \varphi_0(z_0) k dk}{\sqrt{k^2 [\sigma + \varepsilon + O(k^2)]^{1/2}} d(k) [\omega_n - U(z_0)]^2}, \quad (16)$$

где

$$\varphi^*(k, \psi_0) = \Xi(0, 0) + \varepsilon - \Xi(0, \psi_0) - k^2 \left[\eta(0, \psi_0) + \frac{\Xi''_{\psi\psi}(0, 0) \eta'_{\psi}(0, 0)}{\sigma + \varepsilon} \right] + O(k^4); \quad (17)$$

$$\psi_0 = -\frac{k^2 \eta'_{\psi}(0, 0)}{\sigma + \varepsilon} + O(k^4); \quad \sigma = \Xi(0, 0) + \Xi''_{\psi\psi}(0, 0).$$

При малых k

$$d_n(k) = k^{-1} \left[-2 \int_{-H}^0 (\Xi_n - U) \left[\frac{d}{dz} \frac{\varphi_0}{(\omega_n - U)} \right]^2 dz \right] = d_n^0(k) k^{-1}. \quad (18)$$

Поскольку основной вклад в асимптотику (16) дает окрестность значения точки $k=0$, учтем в фазовой функции члены со степенями k не выше третьей. Тогда, используя [9], получим

$$\int_m \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} \int_{-\sigma + i0}^{\sigma + i0} k^{-1/2} \exp[i t (k\varepsilon - k^3 \eta(0, 0))] dk \right\} = -2^{2/3} \pi^{3/2} (-3\eta(0, 0)t)^{-1/6} \nu^2 (2^{-2/3} \zeta),$$

где ν — функция Эйри, а $\zeta = \frac{\varepsilon t}{(-3\eta t)^{1/3}}$. Учитывая, что $\varepsilon = -k - \Xi(0, 0) = \frac{z - t\Xi}{t} = \frac{\rho}{t}$, где ρ — расстояние от точки наблюдения до переднего фронта, и, переходя к исходным

координатам x, y , в которых точка P^* переднего фронта задавалась направлением нормали к фронту, получим

$$\Gamma_n = \frac{2^{1/6} t^{-1/6} \psi_n(x) \psi_n(x_0) [-3\eta(0,0)]^{-1/6} v^2 (2^{-2/3} \xi)}{d_n^0(0) [\xi - U(x_0)]^2 \left\{ [\xi(0,0) + \xi_{\psi\psi}''(0,0)] t + \rho \right\}^{1/2}}, \quad (19)$$

$$\xi = \frac{\rho}{[-3\eta(0,0)t]^{1/3}}.$$

Здесь $\psi_n(x)$ и $\xi = \xi_n$ — собственная функция и собственное число граничной задачи ($F^* = U \cos \psi + V \sin \psi$):

$$(\xi - F^*)^2 \psi_{xx}'' + [N^2 + F_{xx}^{*''} (\xi - F^*)] \psi = 0; \quad \psi(0) = \psi(-H) = 0; \quad (20)$$

d_n^0 задается формулой (18), в которой $\xi = \xi(\psi)$, а функция U заменяется на F^* , $\eta(\psi)$ определяется методом возмущений:

$$\eta = - \int_{-H}^0 u^2 (\xi - F^*)^2 dx \left[2 \int_{-H}^0 (\xi - F^*) (u_x')^2 dx \right]^{-1}; \quad \left(u = \frac{\psi(x)}{\omega - F^*} \right). \quad (21)$$

ЗАДНИЙ ФРОНТ

Положение заднего фронта определяется асимптотикой групповой скорости $C_x(k, \psi)$, $C_y(k, \psi)$ при $k \rightarrow \infty$, а асимптотика функции Грина (точнее, составляющих ее отдельных мод) — асимптотикой собственных функций ψ_n при $k \rightarrow \infty$. Найдем эту асимптотику. Для этого запишем уравнение (20) в форме

$$\psi_{xx}'' + \left[\frac{N^2(x) + F_{xx}^{*''} (\xi - F^*)}{(\xi - F^*)^2} - k^2 \right] \psi = 0, \quad (22)$$

где $\xi = \frac{\omega(k, \psi)}{k}$, $\xi > F^*$. Пусть вначале максимум F^* достигается в единственной точке $x = x^*$, причем $F_{xx}^{*''}(x^*) \neq 0$. Чтобы

существовало решение (22), обращающееся в нуль при $x = 0, -N$, необходимо, чтобы существовало значение $x = \hat{x}$, в окрестности которого коэффициент при ψ в уравнении (22) был положительным, т.е. $\xi - \mathcal{F}^*(\hat{x}) - O(k^{-1}) < 1$. Поскольку $\xi > \mathcal{F}^*$, откуда следует, что \hat{x} совпадает со значением x^* , в котором \mathcal{F}^* достигает максимума. А так как коэффициент при ψ положительный лишь при $x \approx x^*$, функция ψ быстро убывает при увеличении $|x - x^*|$, т.е. сосредоточивается вблизи горизонта $x = x^*$. В этих условиях можно, во-первых, отбросить мало при $x = x^*$ слагаемое $\mathcal{F}^*_{xx} (\xi - \mathcal{F}^*)$, во-вторых, заменить $N^2(x)$ его значением N_0^2 при $x = x^*$, в-третьих, заменить функцию \mathcal{F}^* квадратичным полиномом $\mathcal{F}^* \approx \frac{1}{2} \alpha (x - x^*)^2$, где $\mathcal{F}_0 = \max_x \mathcal{F}^*$, и в-четвертых, граничное условие при $x = 0, -N$ заменить на требование экспоненциального убывания ψ при $|x - x^*| \rightarrow \infty$. Будем искать $\xi = \xi_n$ в виде

$$\xi = \mathcal{F}_0 + \frac{N_0}{k} - Rk^{-\theta-1} + \dots \quad (23)$$

и введем "растянутую" переменную $\psi = k^{\frac{1}{2}} (x - x^*)$; чтобы после перехода к переменной ψ уравнение (22) в главном члене асимптотики не зависело от k , надо выбрать $\gamma = 3/4$, $\theta = 1/2$; после чего (22) примет вид

$$\psi'' + \left[\frac{2R}{N_0} - \frac{2\alpha\psi^2}{N_0} + O(k^{-1/2}) \right] \psi = 0. \quad (24)$$

Отбрасывая слагаемое $O(k^{-1/2})$ и полагая $\eta = \left(\frac{2N_0}{\alpha} \right)^{-1/4} \psi$, получим

$$\psi'' + 4 \left(\frac{R}{\sqrt{2N_0\alpha}} - \eta^2 \right) \psi = 0. \quad (25)$$

Как известно, решение этого уравнения, убывающее при $|\eta| \rightarrow \infty$, существует при $\frac{R}{\sqrt{2N_0\alpha}} = \eta + \frac{1}{2}$ и равно $\psi = \varphi_n(\eta) = H_n(\eta) e^{-\eta^2}$, где $H_n(\eta)$ — полиномы Эрмита. Поэтому при $k \gg 1$ получаем приближенное выражение для n -й собственной функции

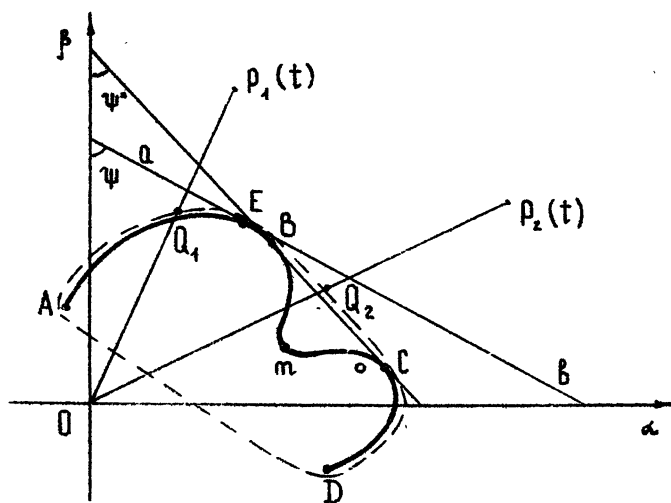
$$\varphi_n = H_n(\eta) e^{-\eta^2}; \quad \eta = \left(\frac{2N_0}{\alpha} \right)^{-1/4} k^{-3/4} (x - x^*) \quad (26)$$

и для соответствующей дисперсионной кривой

$$\Xi = \Xi_n(k, \psi) = \xi_0 + \frac{N_0}{k} - \sqrt{2N_0 z} \left(n + \frac{1}{2} \right) k^{-3/2} + O(k^{-1}). \quad (27)$$

Из выражения (27) для групповой скорости $c_x = \frac{\partial \omega(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}$, $c_y = \frac{\partial \omega(\lambda, \mu)}{\partial \mu}$, где $\lambda = k \cos \psi$, $\mu = k \sin \psi$ и $\omega = k \Xi_n(k, \psi)$, получаем $c_x = U(z^*) + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $c_y = V(z^*) + O\left(\frac{1}{k}\right)$. Таким образом, если ψ таково, что $\Xi^*(\psi)$ имеет максимум в единственной точке $z = z^*$, то групповая скорость (c_x, c_y) стремится к $U(z^*)$, $V(z^*)$, т.е. к скорости течения на горизонте $z = z^*$, в окрестности которого сосредоточивается собственная функция $\psi_n(z)$ при $k \rightarrow \infty$.

Функция $\Xi^*(z)$ имеет простой геометрический смысл. Построим (рис. 4) на плоскости $\frac{x}{\xi} = \alpha$, $\frac{y}{\xi} = \beta$ годограф скоро-



Р и с. 4

сти течения, т.е. параметрическую кривую $\alpha = U(z)$, $\beta = V(z)$, и проведем образующую угол ψ с осью β касательную $\alpha\beta$ к годографу. Значение $\Xi^*(z^*)$ — расстояние от точки начала координат до прямой $\alpha\beta$, $z = z^*$ — значение параметра z , определяющее точку касания E , а ее координаты $U(z^*)$, $V(z^*)$ — значение групповой скорости $c_x(k, \psi)$, $c_y(k, \psi)$ при $k \rightarrow \infty$.

Если же $\psi = \psi^*$ таково, что \mathcal{F}^* имеет два максимума, то касательная к годографу скорости, образующая угол ψ^* с осью β , касается годографа в двух точках B и C , которым соответствуют некоторые значения $x = x_1$ и $x = x_2$ (см. рис. 4). Можно показать, что при $k \rightarrow \infty$ и $\psi \rightarrow \psi^*$ ($\psi = \psi^* + \hat{C}_1 k^{-1} + \hat{C}_2 k^{-3/2} + \dots$) групповая скорость (c_x, c_y) стремится к точке, лежащей на отрезке BC , положение этой точки зависит от постоянных \hat{C}_1, \hat{C}_2 .

Поэтому задний фронт, т.е. предельное положение кривой L_n ($\alpha = c_x(k, \psi); \beta = c_y(k, \psi)(0 < \psi < 2\pi)$), при $k \rightarrow \infty$ представляет собой выпуклую оболочку годографа скорости течения. На рис. 4 сплошная кривая $AEBmCD$ — годограф скорости (точка A соответствует значению $x = 0$, D — значению $x = H$), а пунктирная кривая $ABCD$ — задний фронт.

Рассмотрим поведение Γ_n вблизи заднего фронта как функции t в фиксированной точке $P = (x, y)$. На плоскости α, β точка $P(t) = (\frac{x}{t}; \frac{y}{t})$ при росте t движется к началу координат и при некотором $t = t_0$ пересекает огибающую годографа скорости в некоторой точке Q^* ; в этот момент задний фронт проходит через P . Асимптотика (11) при $t \rightarrow t_0$ не сводится к каким-либо известным специальным функциям. Однако можно дать ее качественное описание, основанное на анализе поведения при $k \rightarrow \infty$ функций $\psi_n(x)$, $\varphi_n(x_0)$ и определителя $S'_{\lambda\lambda} S'_{\mu\mu} - (S'_{\lambda\mu})^2$ в стационарной точке интеграла (11). Приведем полученные на этом пути результаты, ограничиваясь для простоты первой модой Γ_1 .

Следует различать два случая: точка Q^* лежит на выпуклом участке годографа ($Q^* = Q_1$ на рис. 4) или на отрезке BC выпуклой оболочки ($Q^* = Q_2$). Во втором случае Γ_1 экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow t_0$. Рассмотрим первый случай. Точке Q_1 соответствует некоторое $x = x^0$, для которого $\alpha = U(x^0), \beta = V(x^0)$. Оказалось, что для точечного источника с координатой $x = x_0 + z^0$ функция Γ_1 также экспоненциально стремится к нулю. Если же источник распределен по вертикали в некотором интервале $x^- < x < x^+$ с некоторым весом $m(x_0)$ (тогда решение определяется интегрированием (11) по x_0 с весом $m(x_0)$), то решение Γ_1 стремится к нулю, если x^0 вне интервала (x^-, x^+) и сосредоточивается на горизонте x^0 , если x^0 в этом интервале. А поскольку групповая скорость оказывается равной $U(x^0), V(x^0)$, то Γ_1 оказывается неподвижной относи-

тельно среды. Иными словами, при больших t вблизи заднего фронта поле "растаскивается" по всем горизонтам x^0 ($x^- < x^0 < x^+$), которым соответствуют точки выпуклой оболочки годографа: на каждом горизонте поле концентрируется в той области, которая при $t=0$ находится в начале координат и затем при росте t уносится со скоростью течения на этом горизонте. Аналогично ведут себя амплитуды всех мод Γ_{2n+1} , имеющих по вертикали четное число перемен знака. Амплитуды мод Γ_{2n} в случае распределенного по вертикали источника при приближении к заднему фронту становятся малыми по сравнению с амплитудами Γ_{2n+1} (возникает дополнительный множитель $\kappa^{-3/4}$), так как Γ_{2n} при $\kappa \rightarrow \infty$ представляет собой быстро осциллирующую функцию (как функция x) с масштабом осцилляций $\Delta \sim \kappa^{-3/4}$ и средним значением равным нулю.

ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Решение $\Phi(t, x, y, z, z_0)$ уравнения (1), соответствующее правой части $Q=0$ ($t < 0$) и $Q=\delta(x-\sqrt{V}t, y, z-z_0)$ ($t > 0$) выражается через функцию Грина посредством следующей квадратуры:

$$\Phi(t, x, y, z, z_0) = \int_0^t \Gamma(t-\tau, x-\sqrt{V}\tau, y, z, z_0) d\tau.$$

Поскольку Γ разлагается на сумму мод Γ_n (непрерывным спектром Γ_n здесь можно пренебречь), функция Φ имеет аналогичное разложение: $\Phi = \sum_n \Phi_n$. В силу (11) имеем ($\xi = x-\sqrt{V}t$)

$$\Phi_n = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z_0)}{d_n[\omega_n - f(z_0)]^2} \left\{ \frac{\exp[i(\lambda \xi + \mu y)] - \exp[i(\lambda \xi + \mu y - \omega_n t)]}{\omega_n - \lambda \sqrt{V}} \right\} d\lambda d\mu. \quad (28)$$

Нас интересует предел $\Phi(\xi, y, z, z_0)$ функции Φ при фиксированном ξ и $t \rightarrow \infty$. Легко видно, что если сдвинуть контур интегрирования по λ в верхнюю полуплоскость, то интеграл от второго слагаемого в квадратных скобках в формуле (28) будет стремиться к нулю. Поэтому получаем

$$\mathcal{F} = \sum_n \mathcal{F}_n, \quad \mathcal{F}_n = \frac{\text{Re}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu z} \left[\frac{d\mu}{d\lambda} \right]_{\lambda = \lambda_n} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x_0) e^{i\lambda z}}{\varphi_n'[\omega_n - f(x_0)]^2 (\omega_n - \lambda \tilde{V})} d\lambda \quad (29)$$

Нетрудно показать, что если скорость источника \tilde{V} больше максимальной групповой скорости $\left[\left(\frac{d\omega}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{d\mu} \right)^2 \right]^{1/2}$, то уравнение $\lambda_n \tilde{V} = \omega_n(\lambda, \mu)$ имеет единственный корень $\lambda = \lambda_n(\mu)$, где $\lambda_n(\mu)$ — монотонно возрастающая функция μ , и что $\frac{d\lambda_n}{d\mu}$ достигает максимума при $\mu = 0$. Поэтому, переводя контур интегрирования по λ в формуле (29) в нижнюю полуплоскость, получаем, что с точностью до экспоненциально малого по z слагаемого внутренний интеграл в (29) совпадает с вкладом подынтегрального выражения в точке $\lambda_n(\mu)$, т.е.

$$\mathcal{F}_n = - \frac{\text{Im}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x_0) \exp[i(\mu y - \lambda |z|)] d\mu}{d_n [\omega_n - f(x_0)]^2 \left(\frac{d\omega_n}{d\lambda} - \tilde{V} \right)} \quad (30)$$

При $\left| \frac{z}{y} \right| < \left[\max \frac{d\lambda}{d\mu} \right]^{-1}$ фазовая функция в интеграле (30) не имеет стационарных точек и поле \mathcal{F}_n экспоненциально мало. При $\left| \frac{z}{y} \right| > \left[\max \frac{d\lambda}{d\mu} \right]^{-1}$ фазовая функция имеет стационарную точку $\mu = \pm \mu^*$, если $\lambda_n'(\mu) > 0$, то такая пара единственная, и, используя обычный метод стационарной фазы, получим

$$\mathcal{F}_n = - \frac{\sqrt{2} \varphi_n(x) \varphi_n(x_0) \sin(\mu y - \lambda |z| + \pi/4)}{d_n [\omega_n - f(x_0)]^2 \sqrt{\pi |z|} |\lambda_{\mu^*}^{\prime}| \left(\frac{d\omega_n}{d\lambda} - \tilde{V} \right)}, \quad (31)$$

где λ берется при значении μ , являющемся положительным корнем уравнения $\frac{|z|}{y} = \left[\frac{d\lambda}{d\mu} \right]^{-1}$; предполагается, что $y > 0$. Если имеется несколько корней этого уравнения (при невыпуклой $\lambda_n(\mu)$), то надо просуммировать (31) по всем корням.

При $\frac{\psi}{|\xi|} \rightarrow q_n$ ($q_n = \text{arctg} \frac{\partial \lambda_n}{\partial \mu} = \text{ctg} \psi_0$) в интеграле (30) имеется одна пара стационарных точек $\pm \mu^*$, стремящаяся к значению $\mu = 0$, и асимптотика интеграла (30) выражается через функцию Эйри:

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{-\rho \nu(\eta) \varphi_n(z) \varphi_n(z_0)}{\sqrt{x} d_n^0(0) (\xi - \xi_n) - \xi_n' \text{tg} \psi_0 - \tilde{V} / \cos \psi_0 (\xi_n - \mathcal{F}^*(z_0))^2 q_n}; \\ \eta &= \frac{\psi - q_n |\xi|}{(3|\xi| a_n)^{1/3}}; \quad a_n = \frac{\xi_n''}{\tilde{V}} \left(\frac{\cos^2 \psi_0 + \sin \psi_0}{\sin^4 \psi_0} \right); \\ \xi_n'' &= \frac{1}{2} \int_{-H}^0 (\xi - \mathcal{F}^*)^2 u^2 dx \left[\int_{-H}^0 (\xi - \mathcal{F}^*) (u_x')^2 dx \right]^{-1} \\ d_n^0(0) &= -2 \int_{-H}^0 (\xi - \mathcal{F}^*) (u_x')^2 dx. \end{aligned} \quad (32)$$

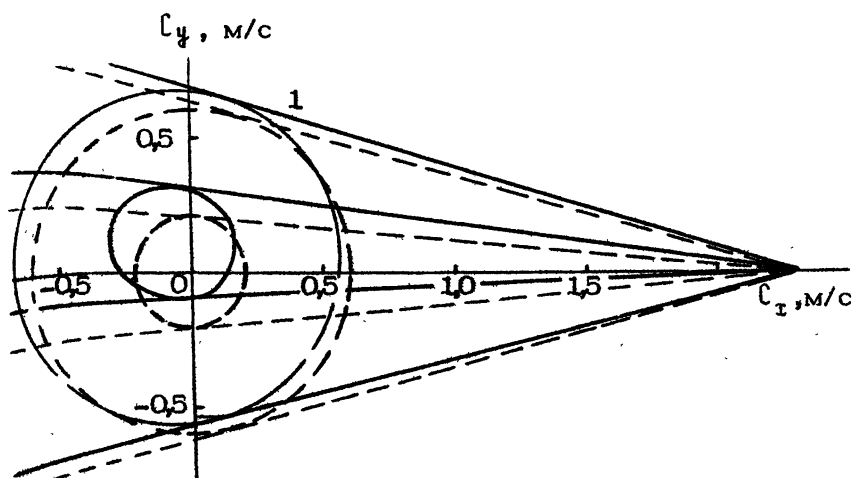
Здесь $\xi = \xi_n$ и $u = u_n$ — собственное число и собственная функция следующей спектральной задачи ($\mathcal{F}^* = U \cos \psi_0 + V \sin \psi_0$):

$$\frac{d}{dx} \left[(\xi - \mathcal{F}^*)^2 u_x' \right] + N^2(x) u = 0; \quad u(0) = u(-H) = 0; \quad (33)$$

ψ_0 удовлетворяет дисперсионному соотношению $\tilde{V} \cos \psi_0 = \xi_n$;

$$\xi_n' = - \int_{-H}^0 (\xi - \mathcal{F}^*) (U \sin \psi - V \cos \psi) (u_x')^2 dx \left[\int_{-H}^0 (\xi - \mathcal{F}^*) (u_x')^2 dx \right]^{-1};$$

$\rho \nu(\eta)$ — первообразная функции Эйри, стремящаяся к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. Формулы (31) и (32) дают асимптотику решения уравнения (1) при правой части $Q = \delta(x - \tilde{V}t) \delta(\psi) \delta(x - z_0)$. Выражение для возвышения в случае источника массы получается после дифференцирования формул (31) и (32) по x_0 и t . Для получения асимптотики возвышения в случае дипольного источника необходимо еще одно дифференцирование по t .

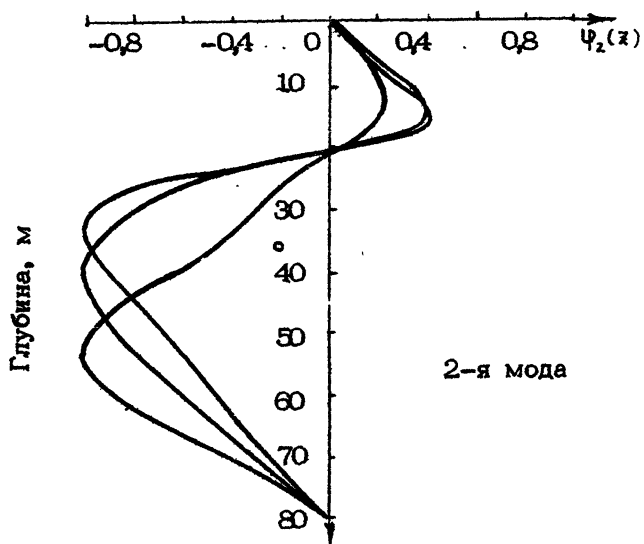
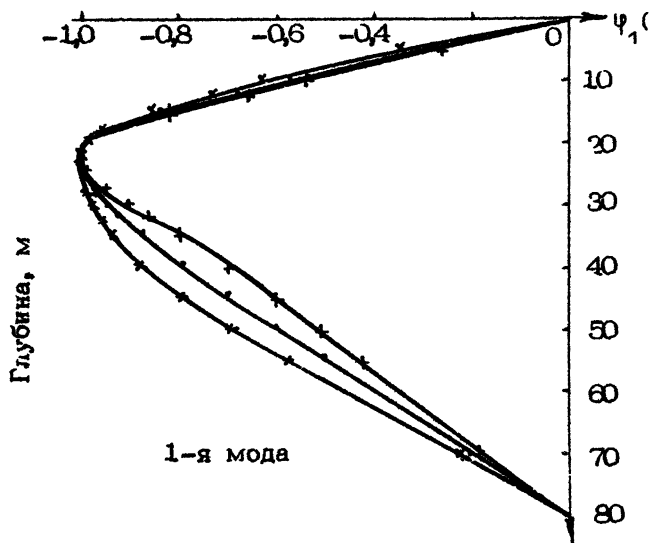


Р и с. 5

Из полученных выражений видно, что возвышение около фронта будет выражаться через функцию Эйри и ее производную соответственно для движущегося источника массы и дипольного источника.

Таким образом получается следующая качественная картина распространения волны n -й моды. При $|\xi| < q_n^{-1} |\eta|$ поле \mathcal{F}_n экспоненциально мало. На фронте $|\xi| = q_n^{-1} |\eta|$ поле \mathcal{F}_n выражается через функцию Эйри и за фронтом $|\xi| > q_n^{-1} |\eta|$ выражается формулой (31). Вблизи фронта поле от источника массы убывает при росте $|\xi|$ более медленно, как $|\xi|^{-1/3}$, поле от диполя как $|\xi|^{-2/3}$. Область применения асимптотики (32) ограничена окрестностью фронта, в которой $|\eta - q_n |\xi|| < \text{const} (3 q_n |\xi|)^{1/3}$. При увеличении $|\xi|$ за пределы этой окрестности начинает искажаться фазовая структура поля и целесообразно пользоваться формулой (31).

На рис.5 показаны в условных масштабах волновые фронты движущегося и неподвижного источника (сплошные линии). Собственные функции, соответствующие правому и левому фронту движущегося источника, показаны на рис.6. Для сравнения рассчитаны также волновые фронты (кресты на рис.5) и собственные функции в среде без сдвиговых течений. Результаты численных расчетов показывают, что амплитудно-фазовая структу-



- ++ - для левых фронтов
- xx - для правых фронтов
- .. - без течений

Р и с. 6

ра поля внутренних гравитационных волн, генерируемых источником, движущимся в стратифицированной среде со средними сдвиговыми течениями, в большой степени зависит от направления относительного движения источника.

* * *

Таким образом, наличие средних сдвиговых течений существенно меняет количественные характеристики полей внутренних волн, возбуждаемых локализованными источниками, — меняются скорости распространения волн форма и положение волновых фронтов, распределение поля по вертикали. Сдвиговые течения изменяют также и качественное поведение коротких внутренних волн. Если течений нет, то собственные моды при длине волны, стремящейся к нулю, и модуле волнового вектора $k = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \rightarrow \infty$ сосредоточиваются, как известно, на горизонте с максимальным $N(z)$; их групповая скорость стремится к нулю. При наличии течений псевдоеigenмод при $k \rightarrow \infty$ зависит и от направления ψ волнового вектора: $\lambda = k \cos \psi$, $\mu = k \sin \psi$. В этом случае собственная мода сосредоточивается на горизонте, для которого достигает максимума уже не $N(z)$, а компонента скорости течения в направлении распространения моды, т.е. достигает максимума $\lambda U(z) + \mu V(z)$; а групповая скорость стремится к скорости течения на этом горизонте. Именно этим обстоятельством и объясняется наличие у каждой моды не только переднего, но и заднего фронта.

Л и т е р а т у р а

1. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flow// J.Fluid Mech. 1961. V.10.Pt.4. P.490.
2. Howard L.N. Note on a paper of John W. Miles// J.Fluid Mech. 1961. V.10. Pt.4. P.509.
3. Маков Ю.Н., Степанянц Ю.А. О параметрах нарастающих волн в сдвиговых течениях //Океанология. 1983. Т.23. №3. С.390.
4. Bretherton F.P. The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow//Quart.J. Roy.Met.Soc. 1966. V.92. P.466

5. Booker J. B., Bretherton F. P. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 4. P. 513.

6. Боровиков В. А. Формирование критического уровня в стратифицированной среде со средними течениями // Волны и дифракция - 85: Тр. 9-го Всесоюз. симпозиума по дифракции и распространению волн. Тбилиси, 1985. Т. 1. С. 140.

7. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1981.

8. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981.

9. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. ФАО. 1984. Т. 20. № 6. С. 526.

10. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В., Кельберт М. Я. Асимптотики решений уравнения внутренних волн с финитными правыми частями: Препринт / ИПМ АН СССР, № 236. М., 1984

11. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.

12. Санников В. Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теоретические исследования волновых процессов в океане. / МГИ АН УССР, Севастополь, 1983. С. 68.

13. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн. Киев: Наукова думка, 1980.

14. Боровиков В. А. Дальние поля внутренних волн. // Методы гидрофизических исследований / ИПФ АН СССР. Горький, 1984. С. 101.

15. Bell T. H. Effect of shear on the properties of internal gravity wave modes // Deutsche Hydrographische Zeitschrift. Jahrgang 1974. V. 27. Heft 2. P. 57.

16. Боровиков В. А., Левченко Е. С. Функция Грина уравнения внутренних волн в слое стратифицированной жидкости со средними сдвиговыми течениями. // Морской гидрофизический журнал, 1987. № 1. С. 24.

МОДЕЛИРОВАНИЕ
КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В ТУРБУЛЕНТНОСТИ
(ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ)

О.М.Белоперковский

ВВЕДЕНИЕ

1. Методики вычислительного эксперимента с применением современных ЭВМ все более широко стали применяться за последние годы в практике исследования нелинейных (и многомерных) задач гидрофизики. Известно, что экспериментальные исследования в этой области требуют больших материальных затрат и очень трудоемки, почему кажется весьма перспективным разработка "конструктивных" подходов прямого численного моделирования указанного типа явлений, и конечно турбулентных движений.

В работе [1] рассказано о построении дискретной нелинейной диссипативной модели изучения свободной развитой сдвиговой турбулентности для предельных режимов течения при больших числах Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$, построенной на базе полных нестационарных уравнений идеальной среды (интегральных законов сохранения). В данной статье напомним основные положения этого подхода, расскажем о дальнейших разработках в этом направлении и приведем некоторые новые результаты расчета когерентных структур в области турбулентных следовых течений.

2. При изучении турбулентных движений жидкости и газа среди многих других проблем можно выделить ряд важных, на наш взгляд, направлений исследования этих явлений. Это проблемы прямого численного моделирования больших вихрей и когерентных структур в турбулентности (возникновение детерминированных образований в нелинейных диссипативных средах), исследование "собственно" турбулентного фона, а также явлений

перехода ламинарного течения в турбулентное (рождение стохастического поведения в динамических системах). Интересно также проследить за свойством "сохранения" при больших числах Рейнольдса когерентных вихревых структур, характерны х для предтурбулентного режима и др.

Как хорошо известно, многие эксперименты и теоретические исследования показали (например, [2 - 7] и др.), что широкому классу турбулентных потоков с поперечным сдвигом (как при свободных течениях, так и в пристеночной области) присуще наличие нестационарного организационного движения крупномасштабных образований ("больших вихрей") со слабой пульсацией - упорядоченное движение "стохастических структур", которые имеют весьма устойчивую и типичную (для данной задачи) пространственно-временную форму. Внутренняя зона указанных течений, например для струйных задач, имеет турбулентный (стохастический) характер и состоит из неупорядоченных мелкомасштабных пульсаций достаточно высокой интенсивности, но примерно однородной структуры ([4, 5]).

Так, в свободных сдвиговых течениях (спутные следы, струи) наблюдается (по Таунсенду [4]) двойная - "перемежающаяся" - структура турбулентности. Основная зона турбулентной жидкости имеет сравнительно малый масштаб, однородна и содержит основную часть энергии. На нее налагается внешняя система устойчивых "почти когерентных" медленных (нетурбулентных) больших вихрей, которая и переносит полностью турбулизованную жидкость от одной части течения к другой. Таким образом, упорядоченные структуры характерны и составляют собственный базис сдвигового турбулентного движения.

В свободных сдвиговых турбулентных движениях - струях, следах, слоях смешения - упорядоченные крупномасштабные образования наблюдаются при произвольно больших числах Рейнольдса. Структуры этого типа часто имеют двумерную (или квазидвумерную) форму [3]. Интенсивность, масштаб и форма такого низкочастотного упорядоченного движения квазидетерминированы (т.е. индивидуальны) для данного типа течений, почему для их описания целесообразно использовать уравнения гидродинамики (а не статистические подходы). Размеры больших вихрей сравнимы с характерным размером течения и значительно больше масштабов энергонесущих вихрей, составляющих собст-

^{*)} Каптуэлл [5] не исключает возможности того, что в ряде случаев (например, в плоских слоях смешения) "даже очень мелкомасштабные движения могут быть высоко упорядочены".

венно турбулентное движение. При этом турбулентность в ядре следа обладает вполне достаточной степенью локальной изотропности (по отношению к интенсивностям пульсаций скорости по разным направлениям, а следовательно и к энергетическим характеристикам).

При численных исследованиях важно правильно смоделировать процессы переноса. Существует три типа энергетических явлений, характерных для реальных турбулентных движений:

- 1) генерация крупномасштабных когерентных вихрей, зависящая от конкретных свойств рассматриваемого потока в целом;
- 2) дробление этих вихрей вследствие нелинейности на более мелкомасштабные и передача энергии без заметной убыли вне по спектру (колмогоровский "каскадный" процесс);
- 3) вязкая диссипация энергии на самых мелких масштабах.

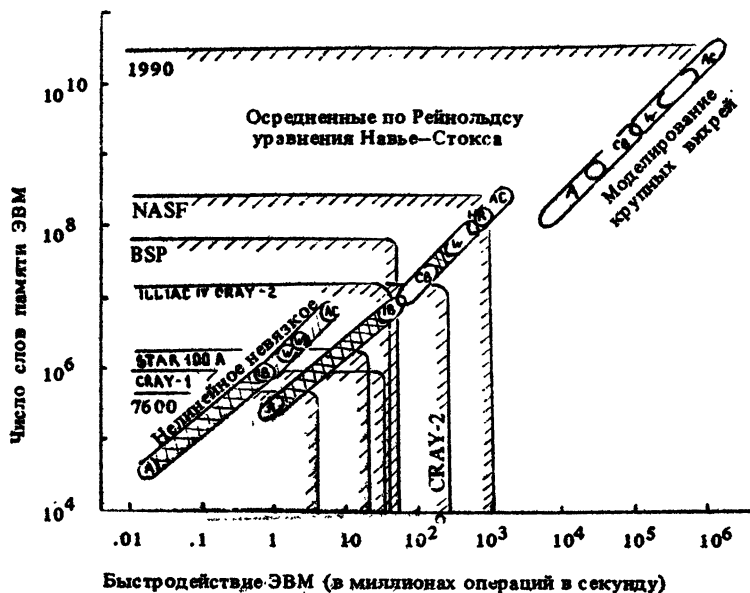
До недавнего времени анализу статистическими методами подвергались только типы 2 и 3 и теория строилась без учета механизма генерации (необходимая пульсационная энергия вносилась в поток извне путем введения случайной внешней силы). Между тем именно генерационный аспект проблемы крупномасштабной турбулентности (где преобладает детерминистическое начало) является основным, поскольку включает причины возникновения турбулентности и механизм ее поддержания.

Таким образом, несомненный интерес представляет разработка моделей с определением крупных вихрей, когерентных структур в турбулентности на основе прямых подходов вычислительного эксперимента [8,9]. Отметим, что основными характеристиками таких подходов должны быть нелинейность, нестационарность и диссипативность моделей, а также требование "глобальности" в описании системы (т.е. необходимо рассмотрение системы в целом).

При построении такого рода моделей встречаются две принципиальные трудности. Во-первых, это разработка конструктивной идеологии, адекватной исследуемому процессу, и, во-вторых, проблемы практической реализации этих моделей (предъявляющие, как правило, очень высокие требования к ресурсам ЭВМ).

3. Основные затруднения, возникающие при непосредственном исследовании развитых турбулентных течений в спутном следе, струях, связаны с тем, что такие течения характеризуются масштабами возбужденного движения в диапазоне нескольких порядков величины. Спектр изменения волновых чисел в реальных турбулентных срывных потоках достигает 4-5 порядков, так что в обозримом будущем для больших чисел

Рейнольдса построение общей модели турбулентности не представляется возможным. Согласно прогнозу [10], практическое рассмотрение задач, связанных, например, с численным моделированием крупных вихрей и полуэмпирическими моделями турбулентности для реальных компоновок летательных аппаратов, возможно лишь в конце нашего столетия, что потребует число слов памяти ЭВМ порядка 10^{10} - 10^{11} и быстродействия в несколько миллиардов операций в секунду. На рис. 1 представлены необходимые по этим оценкам ресурсы ЭВМ для трех групп задач (1 - нелинейные уравнения невязкого тече-



Р и с. 1. Сопоставление требований к быстродействию и ресурсам памяти ЭВМ с возможными с технической точки зрения значениями этих характеристик. АС - самолет, WB - крылофюзеляж, W - крыло, НР - винт вертолета, СВ - лопатки турбин или компрессоров, IV - фюзеляж под углом атаки, А - профиль

ния, 2 - осреднение по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса и 3 - численное моделирование крупных вихрей с учетом турбулентности с помощью полуэмпирических моделей) при расчете последовательно профиля, фюзеляжа под углом атаки и др.

Один из подходов, предложенных для смягчения остроты этой проблемы, состоит в том, чтобы ограничиться прямым исследованием трехмерного нестационарного турбулентного течения только в масштабах, превышающих некоторый заданный размер h^* (где, например, h - шаг расчетной сетки). Масштабы вихрей, для которых прямое разрешение невозможно, моделируются как "подсеточная" турбулентность с использованием вихревой вязкости или другой аппроксимации процессов переноса. Такой подход связан с надеждой, что мелкомасштабная структура турбулентности почти универсальна для разных задач (в частности, при больших волновых числах $k, k/k_c > 10^{-2}$, где k_c - волновое число, отвечающее масштабу Колмогорова), и поэтому точного разрешения здесь не требуется. Структура крупных вихрей, содержащая ту часть турбулентности, которая заметно изменяется при переходе от одного течения к другому или от одной группы условий к другой, исследуется при этом непосредственно (по существу, эта концепция и развивается ниже). Другим методом прямого изучения турбулентности служит подход на основе метода дискретных вихрей, в котором турбулентная зона моделируется совокупностью многих дискретных невязких вихрей, с эволюцией, прослеживаемой по времени (такая идеология развивается в работе [11]).

ДИСКРЕТНАЯ ДИССИПАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

1. Для широкого класса турбулентных явлений при больших числах Рейнольдса влияние молекулярной вязкости и малых элементов потока в большей части области возмущения на общие характеристики когерентных макроструктур развитого течения и на картину обтекания в целом практически несущественно (что позволяет не учитывать при их исследовании молекулярные эффекты). Сюда относятся струйные задачи, течения в спутном следе за телом, движения корпусов судов с кормовым срезом и др. Таким образом, представляется вполне оправданным и целесообразным проводить на инерционном интервале моделирование когерентных макроструктур отрывных течений для предельных режимов движения на основе нестационарных дискретных моделей идеальной среды с неким приближенным механизмом диссипации, отражающим энергетические потери для разных масштабов разрешения. При этом процесс организации вычислительного цикла должен приближенно отражать механизм турбулентного перемешивания.

В то же время свойства течений в пограничных слоях и узких слоях смешения, на вязком интервале турбулентности, а также в области перехода при умеренных числах Рейнольдса определяются в основном молекулярной диффузией, и здесь необходимо рассматривать модели Навье-Стокса. Пульсационные движения в турбулентности носят неустойчивый, нерегулярный характер и представляют собой стохастический процесс, поэтому можно говорить лишь о получении осредненных характеристик такого движения (моментах разного порядка) путем соответствующей статистической обработки результатов.

Все сказанное выше и определяет, по существу, идеологию организации вычислительного процесса при прямом численном моделировании свободной предельно-развитой сдвиговой турбулентности [1,8,9]. Общий цикл исследования распадается здесь, вообще говоря, на две взаимосвязанные задачи. 1) Непосредственный расчет нестационарного движения когерентных турбулентных структур на "крупных" сетках. Большой масштаб и организационный характер такого движения позволяют использовать при его описании численные схемы, основанные на нестационарных уравнениях гидродинамики (записанные в виде законов сохранения) для модели идеальной среды ("разностный Эйлер") и обладающие приближенным (эффективным) диссипативным механизмом, порождаемым осреднением параметров потока по объему элементарной ячейки и временному интервалу. Этот механизм, обеспечивая асимптотическую устойчивость (при $t \rightarrow \infty$) осредненного решения, должен приближенно отражать вклад мелкомасштабных подсеточных пульсаций и моделировать энергетические потери в турбулентности. Свойства крупномасштабных движений определяются в основном объемной конвекцией и зависят от решения в целом. Следовательно, расчет пространственно-временных характеристик течения должен проводиться непосредственно во всем поле течения на реальных ("крупных") разностных сетках с последующим определением необходимых осредненных характеристик турбулентного потока (например, моментов различного порядка) путем соответствующей статистической обработки полученных результатов.

2) Численное моделирование стохастической составляющей турбулентного сдвигового потока (мелкомасштабная турбулентность). Здесь моделируется локальное "разрешение" - процесс диссипации, характер распространения энергии по ядру турбулентности и др. Расчет этого типа течений целесообразно про-

водить статистическими методами на кинетическом уровне^{*)}. При этом важно отметить, что расчеты указанных течений на данном этапе целесообразно осуществлять лишь в ограниченных подобластях, "вырезая" в общей картине потока зоны больших градиентов (например, ядро следа и др.). Такой подход основан на предположении, что при масштабе турбулентности, малом по сравнению с масштабом среднего движения, локальная структура турбулентности универсальна для различных течений (см. рис.2) и определяется лишь локальными условиями (турбулентный перенос характеризуется здесь градиентной диффузией) [4].

Все это позволяет использовать при вычислениях вполне определенные модели и достаточно мелкие расчетные сетки, причем уровень требований к ресурсам ЭВМ резко снижается.

2. Рассмотрим процесс организации вычислительного цикла. Для построения численного алгоритма расчета крупномасштабных когерентных структур ("разностного Эйлера") в качестве исходной системы целесообразно использовать аппроксимацию законов сохранения, записанных в интегральной форме (методы крупных частиц, потоков [9, 14-17]).

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \oint_{S_Q} \vec{Q}_F \cdot \vec{n} dS, \quad F = \{M, \vec{P}, E\}, \quad (1)$$

где S_Q - боковая поверхность объема Q , \vec{Q}_F - вектор плотности потока величины F (M - масса, \vec{P} - импульс, E - полная энергия).

Уравнения (1) выписываются (как для вязкого сжимаемого газа, так и в случае идеальной среды) с учетом граничных условий и решаются численно для каждой расчетной ячейки вычислительной области. Проводя расщепление вектора плотности потока \vec{Q}_F на "конвективную" и "диффузионную" составляющие (и используя соответствующие аппроксимации), удается построить консервативные схемы расчета первого или второго порядка точности, правильно учитывающие области влияния и характер взаимодействия рассматриваемых величин.

При численном решении задачи интегралы в формуле (1) вычисляются (с помощью метода расщепления по физическим процессам) по квадратурным формулам

$$-(f^{n+1} - f^n) / \tau = -L_n \left(\oint_{S_Q} \vec{Q}_F \cdot \vec{n} dS \right), \quad (2)$$

^{*)} Пути реализации алгоритма задачи 2 были разработаны В.Е.Яницким [12, 13] и здесь не рассматриваются (см. по этому поводу также [8, 9]).

где оператор L_n осуществляет осреднение (сглаживание) характеристик среды и мелкомасштабной турбулентности для элементарного (но конечного) размера расчетной сетки.

Отметим некоторые важные свойства указанного подхода. Построенные таким образом однородные конечно-разностные схемы являются дивергентно-консервативными, и диссипативно-консервативными, и диссипативно-устойчивыми. Они позволяют проводить по единому алгоритму сквозной счет как в областях гладкости решения, так и в зонах разрывов. При этом устойчивость вычислений обеспечивается лишь внутренней диссипацией (эффективной вязкостью), которая "автоматически" - без дополнительных предположений - вырабатывается в процессе аппроксимации. При этом в формуле (2) аппроксимируются "комплексы" функций, которые достаточно консервативны и сохраняются при переносах в физических явлениях.

Для схем первого порядка точности структура диссипативного механизма в двумерном случае метода крупных частиц имеет вид тензора

$$\Delta = \frac{1}{2} \rho \begin{vmatrix} u \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} & v \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} & v \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

что является как бы аналогом рейнольдсовых напряжений при осреднении (2) по масштабам $\lambda \leq h$. Структура (3) напоминает механизм молекулярной диссипации в уравнениях Навье-Стокса, однако здесь вместо коэффициента молекулярной вязкости ν стоит коэффициент схемной (эффективной) вязкости $\varepsilon \sim |\nu| h$, зависящий от локальной скорости потока и размера разностной сетки (и не зависящий от ν). В схемах второго порядка точности схемная вязкость (в главных членах асимптотического разложения) имеет такой вид [17]:

$$\varepsilon \sim \frac{\partial v}{\partial x} h^2,$$

что также отвечает нашему приближенному представлению о турбулентной вязкости.

Отсюда, между прочим, видно, что для получения нужных значений эффективной вязкости (удовлетворяющий условиям устойчивости) при вычислениях должны использоваться достаточно крупные расчетные сетки ("комки" молекул). Следовательно, общим положением, определяющим структуру диссипативного ме

ханизма, может быть принцип - "устойчивость решения при необходимом разрешении".

Как следует из приведенных выражений, реализуемые в конкретных вычислениях сглаженные уравнения (2) являются диссипативными (хотя в качестве исходных использовалась модель идеальной среды). Вид диссипативного механизма зависит от характера используемых аппроксимаций, и его структурой можно, вообще говоря, управлять.

При организации вычислительного процесса для получения устойчивого решения, казалось, естественно было бы использовать молекулярный механизм диссипации. Для сравнения с "разностным Эйлером" (2), (3) приведем выражения "разностного Навье-Стокса". Уравнение импульса для сжимаемого газа, полученное в [14], в схемах расщепления метода крупных частиц для модели Навье-Стокса выглядит так:

$$\frac{d p u}{d t} + \frac{d (p + p u^2)}{d t} \cdot \left[\mu (\Lambda + 2) + p \lambda \right] \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 u}{d x^2} + O(\Delta t, \Delta x^2),$$

где $\Lambda = \lambda / \mu$, $\mu = p \nu$, λ - второй коэффициент вязкости, ν - молекулярная вязкость.

Отсюда следует, что на аппроксимацию вязкостных членов $\mu(\Lambda+2)$ также влияют схемные эффекты. При расчетах течений с большими числами Рейнольдса для устойчивости вычислительной процедуры эффективная вязкость должна быть значительной и "забывать" реальную вязкость. Численное решение крайних задач на основе уравнений Навье-Стокса при больших значениях Re наталкивается, как видим, не только на технические, но и на трудности принципиального характера (приемы, связанные со ступенем сеток, не могут полностью разрешить эти проблемы).

Таким образом, если в уравнения идеального газа введены диссипативные члены, то (как показали исследования и расчеты при достаточно широких предположениях относительно характера диссипации обобщенное решение большого класса задач для предельных режимов ($\nu \rightarrow 0$) можно получить с определенной точностью путем предельного перехода из уравнений с приближенным механизмом диссипации, а не из уравнений Навье-Стокса.

Как отмечается в работе [18], все величины, относящиеся к турбулентному движению в масштабах $\lambda \gg \lambda_0$, не могут зависеть от молекулярной вязкости ν , точнее: эти величины не должны меняться при изменении ν и неизменных остальных условиях, в которых происходит движение. Расстояние по-

рядка $\lambda_0 = \nu / Re^{3/4}$ является границей применимости уравнений Эйлера к турбулентному движению. Таким образом, турбулентные движения масштаба $\lambda \gg \lambda_0$ могут изучаться, вообще говоря, на основе уравнений Эйлера с приближенным механизмом диссипации, который должен отражать вклад мелких вихрей.

Точное моделирование нестационарности позволяет исследовать динамику развития явления. Приближенный механизм с быстрой диссипацией в разностных уравнениях Эйлера позволяет, по существу, определять из условий устойчивости осредненные характеристики течения и эффективные значения коэффициентов переноса. В принципе, можно так управлять указанным диссипативным механизмом, что он будет в определенной мере отражать (при соответствующих масштабах разрешения) вклад подсеточных мелкомасштабных вихрей для различных λ .

При исследовании различных структур в свободно развитой сдвиговой турбулентности представляется рациональным расщепление общего явления на области (интервалы) с разными масштабами взаимодействия, и соответственно с разными численными моделями. Так, для зон локальной турбулентности, определяемых местными градиентами, целесообразно использовать в разностных уравнениях Эйлера эффективную вязкость $\hat{\zeta}_{T,\lambda}$, удовлетворяющую известному закону Колмогорова-Обухова [18]

$$v_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{1/3} \quad \text{или} \quad \epsilon \sim \frac{v_\lambda^3}{\lambda} \sim \hat{\zeta}_{T,\lambda} \left(\frac{v_\lambda}{\lambda} \right)^2.$$

$$\text{откуда} \quad \hat{\zeta}_{T,\lambda} \sim \epsilon \lambda^2 / v_\lambda^2. \quad (4)$$

Здесь ϵ — скорость диссипации турбулентной энергии по каскаду вихрей (эту величину можно непосредственно получать из расчетов крупномасштабных образований); v_λ — изменение скорости (в основном пульсационной ее составляющей) на расстояниях $\lambda \sim h$.

Введение в расчетную схему (1), (2) соотношений (4) позволяет правильно смоделировать закон затухания турбулентности для разных масштабов λ . При этом в областях, где происходит полная диссипация энергии (на расстояниях h при $Re_h \sim 1$), влияние молекулярной вязкости становится существенным, и необходимо переходить уже к расчету уравнений Навье-Стокса с молекулярным механизмом диссипации. Так, последовательно вводятся новые коэффициенты турбулентной вязкости, соответствующие "своему" масштабу движения.

Чем мельче масштаб разрешения, тем меньше масштаб подсеточных вихрей и тем, вообще говоря, грубее могут быть

оценки подсеточных пульсаций (все большая часть спектра попадает под прямое разрешение). Смена типа коэффициента эффективной вязкости ("склейка" решения) производится при выполнении условия о сохранении потока энергии по каскаду вихрей в областях, где старое решение становится неустойчивым и требуется переход на более мелкие шаги (масштабы) расчетной сетки. Приведенная каскадная модель (1)-(4), по-видимому, достаточно адекватно отражает процесс турбулентного переноса. При все более мелком разрешении именно вопросы устойчивости диктуют переход к более сложному решению в условиях все возрастающей диссипации.

Здесь надо иметь в виду, что при определении пространственно-временного поля упорядоченных структур в организационном движении роль диссипативного механизма (3) сводится к регуляризации решения (детальная структура такого диссипативного механизма, вообще говоря, несущественна, и оптимальная его форма определяется из условий устойчивости расчетом на разных сетках аппроксимации). При исследованиях же нестационарных (пульсационных) свойств турбулентности можно претендовать на среднестатистические характеристики течения, так что и здесь требования к уровню моделей для подсеточной турбулентности вполне приемлемы.

Такой "детерминистический" подход, где осреднение ведется по масштабам $\lambda \leq h$ (в отличие от уравнений Рейнольдса, где осреднение проводится по всем масштабам), позволяет выделять характерные для структурной турбулентности упорядоченные и крупномасштабные образования (а не средние течения), причем здесь необходимо конкретизировать способ усреднения пульсационных полей лишь "внутри" ячейки. Оценки свойств стохастической составляющей собственно турбулентности проводятся при этом на кинетическом уровне статистическими методами. Данный подход позволяет реализовать алгоритм на машинах средней мощности.

КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

1. Если построение картины течения "медленных" больших вихрей не должно, по-видимому, вызывать принципиальных затруднений (что и подтверждается расчетами), то возможность определения осредненных характеристик нестационарного ("пульсационного") крупномасштабного турбулентного движения по сглаженным уравнениям (2)-(3) далеко не очевидна, и здесь

возникает вопрос о корректности постановки такой задачи. Вычисления по сглаженным уравнениям с приведенным диссипативным механизмом проводятся на интервалах времени до формирования осредненного течения, т.е. появления устойчивых характерных (в общем случае - нестационарных) структур, после чего для определения осредненных характеристик пульсационного турбулентного потока (моментов) необходима соответствующая статистическая обработка полученных результатов. Ее можно производить непосредственно по результатам вычислений или используя вероятностные подходы.

Остановимся на этом подробнее, следуя работам В.М.Иевлева ([19] и др.). Общую систему уравнений механики сплошных сред для задач гидродинамики можно записать в следующем виде:

$$\frac{dv_i}{dt} + v_k \frac{dv_i}{dx_k} = F_i, \quad i=1,2,3,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + v_k \frac{d\rho}{dx_k} = -\rho \frac{dv_e}{dx_e}, \quad (5)$$

$$\frac{d\xi_{(m)}}{dt} + v_k \frac{d\xi_{(m)}}{dx_k} = \gamma_{(m)}, \quad m=1,2,\dots,N.$$

Здесь символом $\xi_{(m)}$ обозначены все независимые параметры, определяющие состояние и движение среды, кроме скорости среды \vec{V} и плотности ρ ; v_k - компонента полной скорости \vec{V} вдоль оси x_k (по повторяющимся индексам предполагается суммирование по всем осям координат); F_i - правая часть уравнения количества движения. Так, для несжимаемой жидкости

$$F_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}.$$

В турбулентном потоке мгновенные значения v_i , ρ , $\xi_{(m)}$ пульсируют и являются случайными величинами. Выберем какую-либо группу из n точек в потоке и обозначим f_n плотность вероятностей различных значений случайных величин v_i , ρ , $\xi_{(m)}$ в этих точках в один и тот же момент времени t . Пусть A_n означает совокупность величин v_i , ρ и $\xi_{(m)}$ во всех выбранных точках; величинам, относящимся к какой-либо точке γ , приписываем индекс (γ) . Зная плотности вероятностей f_n , можно найти осредненные значения (математические ожидания) любых функций от A_n , в частности осредненные значения самих величин v_i , ρ и $\xi_{(m)}$ в каждой из рассматриваемых

ваемых точек, одно- и многоточечные моменты более высокого порядка и др.

Уравнение описывающее изменение f_n во времени, имеет следующий вид [19]:

$$\frac{df_n}{dt} = \sum_{j=1}^n \left\{ -v_k^{(j)} \frac{df_n}{dx_k^{(j)}} + f_n \left\langle \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^{(j)} \right\rangle_{A_n} - \frac{d}{dv_i^{(j)}} [f_n \langle F_i^{(j)} \rangle_{A_n}] + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\rho^{(j)}} [f_n \rho^{(j)} \left\langle \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^{(j)} \right\rangle_{A_n}] - \sum_{m=1}^n \frac{d}{d\xi_{(m)}^{(j)}} [f_n \langle \Pi_{(m)}^{(j)} \rangle_{A_n}] \right\}. \quad (6)$$

Здесь символ $\langle \rangle_{A_n}$ обозначает условные математические ожидания стоящих в угловых скобках величин при заданных значениях всех аргументов A_n , координат точек и времени.

Приведенное уравнение для f_n является точным, но незамкнутым, так как входящие в правые части условные математические ожидания различных величин не могут быть определены только по значениям f_n (для их определения надо знать еще f_{n+1} , а иногда и более многоточечные распределения вероятностей).

Наряду с истинными значениями величин v_i , ρ и $\xi_{(m)}$, можно ввести в рассмотрение их приближенные значения \tilde{v}_i , $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\xi}_{(m)}$, определяемые по уравнениям со сглаженными правыми частями:

$$\frac{d\tilde{v}_i^{(j)}}{dt} + \tilde{v}_k^{(j)} \frac{d\tilde{v}_i^{(j)}}{dx_k^{(j)}} = \langle F_i^{(j)} \rangle \tilde{\chi}_n, \quad i=1,2,3, \\ \frac{d\tilde{\rho}^{(j)}}{dt} + \tilde{v}_k^{(j)} \frac{d\tilde{\rho}^{(j)}}{dx_k^{(j)}} = -\tilde{\rho}^{(j)} \left\langle \left(\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right)^{(j)} \right\rangle \tilde{\chi}_n, \quad (7) \\ \frac{d\tilde{\xi}_{(m)}^{(j)}}{dt} + \tilde{v}_k^{(j)} \frac{d\tilde{\xi}_{(m)}^{(j)}}{dx_k^{(j)}} = \langle \pi_{(m)}^{(j)} \rangle \tilde{\Lambda}_n, \quad m=1,2,\dots,N,$$

где $\tilde{\Lambda}_n$ означает совокупность значений \tilde{v}_i , $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\xi}_{(m)}$ во всех точках n .

Пусть величины \tilde{v}_i , $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\xi}_{(m)}$ принимают случайные значения (в силу неустойчивости самих решений сглаженных уравнений или из-за случайности в начальных и граничных условиях). Тогда, как показал В.М.Иевлев, уравнения для плотности вероятностей f_n совокупности $\tilde{\Lambda}_n \{ \tilde{v}_i, \tilde{\rho}, \tilde{\xi}_{(m)} \}$ будут иметь вид, совпадающий с уравнением (6). Если при этом задать одинаковые на-

чальные и граничные условия для f_n и \tilde{f}_n , то функции f_n и \tilde{f}_n полностью совпадут т.е. совпадут все статистические характеристики потока, определяемые через Λ_n и $\tilde{\Lambda}_n$ соответственно (хотя зависимости $\tilde{v}_i^{(j)}$, $\tilde{\rho}^{(j)}$ и $\tilde{\xi}_{(m)}^{(j)}$ от времени совершенно не будут совпадать при одинаковых начальных условиях с истинными распределениями $v_i^{(j)}$, $\rho^{(j)}$ и $\xi_{(m)}^{(j)}$).

2. Таким образом, расчет по сглаженным уравнениям принципиально может обеспечить получение правильных статистических характеристик потока, зависящего от крупномасштабной турбулентности, хотя детальная пространственно-временная картина такого пульсационного движения не будет при этом воспроизводить какой-либо реальный процесс.

Назовем этот фундаментальный результат принципом И е в л е в а. Он, по существу, положительно отвечает на вопрос о возможности прямого численного моделирования нестационарного (пульсационного) крупномасштабного турбулентного движения с помощью сглаженных уравнений движения. При этом, естественно, требуется правильное задание условных математических ожиданий в правых частях сглаженных уравнений (7). Отметим также, что правые части в сглаженных уравнениях (7) однозначно определяются величинами \tilde{v}_i , $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\xi}_{(m)}$ в узлах расчетной сетки (в отличие от точных уравнений (5), где в правые части входят еще дополнительные случайные колебания). Таким образом, замыкание в уравнениях (7) проводится путем соответствующего моделирования (с г л а ж и в а н и я) эффектов подсеточной мелкомасштабной турбулентности. Такое представление должно аппроксимировать с определенной точностью правые части этих уравнений и отражать влияние мелкомасштабных вихрей.

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДЕЛЬНО-РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С учетом идеологии построения описанного выше вычислительного процесса и результатов расчетов когерентных структур в турбулентности была проведена совместно с Э.Г.Шифриным разработка некоей "а к с и о м а т и ч е с к о й" модели предельно развитой турбулентности в несжимаемой жидкости (что является, в определенном смысле, теоретическим обоснованием указанного выше подхода). Не останавливаясь на этой проблеме по существу, отметим здесь лишь некоторые положения развиваемой теории.

Излагается концепция, согласно которой движению жидкости при $Re \rightarrow Re_{кр}$ присуще наличие подобластей с непрерывным, но не дифференцируемым полем скорости^{*)}.

В основе концепции лежит представление, что определяющим физическим признаком развитой турбулентности является свойство перемешивания жидких частиц, проявляющееся в нарушении упорядоченности любой их системы за конечное время. Оно выражает факт несуществования лагранжевых координат в подобласти развитой турбулентности в четырехмерном физическом "пространстве - времени".

Образование этих подобластей - пятен развитой турбулентности - в области ламинарного течения (с дифференцируемым полем скорости) обусловлено гауссовским принципом "наименьшего действия" в ситуации, когда ламинарное течение теряет асимптотическую устойчивость и становится энергетически предпочтительным переход в более широкий класс течений.

Для описания течений в этом классе формулируется расширенная постановка задачи, основанная на следующих положениях:

1) В связи с тем, что дифференциальные уравнения Навье-Стокса неправомерны для описания недифференцируемых полей, используются интегральные законы сохранения массы, количества движения и полной энергии в наиболее общей форме. Они имеют эквивалентную интерпретацию как дифференциальные уравнения (макроуравнения) для осредненных величин по подвижной конечной подобласти - "ячейке". Понятие пульсационного тензора возникает при этом естественным путем, без дополнительного привлечения так называемых "гипотез замыкания".

2) Проводится расширение законов Навье-Стокса и Фурье для тензора вязких напряжений и теплового потока (обращающиеся в классические законы на дифференцируемых полях).

3) Макроуравнения вместе с законами равновесной термодинамики, расширенными законами Навье-Стокса и Фурье и оператором осреднения по ячейке образуют замкнутую систему для

*) В связи с этим приведем выдержку из работы [20]: "... может возникнуть сомнение: можно ли вообще представлять скорость в турбулентном движении как некоторую непрерывную функцию координат и времени? ... Может быть, следует стилизовать траекторию в турбулентном движении, для чего мы должны будем брать в качестве закона движения непрерывную функцию, ни в одной точке не имеющую производной по времени, вроде известной функции Вейерштрасса..."

описания осредненных и мгновенных (неосредненных) величин. Для нее формулируется начально-краевая задача с условиями на границах обтекаемых тел.

4) Упорядоченная структура турбулентного течения определяется как аттрактор асимптотически устойчивого решения для осредненных величин; при этом масштаб ячейки осреднения является параметром устойчивости.

5) Некорректность (неединственность и неустойчивость решения) задачи восстановления полей неосредненных величин по полям их осреднений при конечном масштабе ячейки (определяемом условием асимптотической устойчивости средних величин) интерпретируется как стохастичность их физических реализаций.

Изложенная концепция рассматривается как идеологическая основа и обоснование правомерности прямого численного моделирования упорядоченных структур развитой турбулентности с помощью алгоритмов, аппроксимирующих (или имитирующих) интегральные законы сохранения.

Наиболее важным частным случаем является "предельно развитая" турбулентность при $Re \rightarrow \infty$, моделирование которой (как главного члена асимптотического разложения догранслойного типа) может проводиться в рамках уравнений, описывающих законы сохранения (в форме Эйлера) с граничным условием непротекания.

РАСЧЕТ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР

Приведем некоторые результаты расчетов движений упорядоченных и крупномасштабных турбулентных структур.

В качестве примера расчета когерентности структур в реальном турбулентном следе за движущимся телом рассмотрим задачу об обтекании кругового цилиндра на закритических скоростях. Эксперименты показывают, что здесь возможны по крайней мере два режима обтекания: стационарный (метастабильный) с симметричными зонами отрыва и нестационарный периодический (абсолютно устойчивый) с развитой вихревой дорожкой^{*)}.

*) Отрыв потока от поверхности тела здесь возникает за замыкающим местную сверхзвуковую зону скачком уплотнения, что согласуется с экспериментом [7]. Наличие метастабильного

Численное моделирование такого рода задач имеет следующую специфику: в силу симметрии тела, начальных и граничных условий, а также алгебраической симметрии самих аппроксимирующих уравнений решение получается симметричным и стационарным. По-видимому, возмущение чисто схемного происхождения (например, ошибки округления) не в состоянии нарушить симметрию, которая в натуральных условиях легко разрушается естественными возмущениями, почему на практике и реализуется обычно именно несимметричный (автоколебательный) режим обтекания с развитой вихревой дорожкой (см. [7, 21-23] и др.).

В расчетах для достижения этого режима в начальный момент времени вводились мгновенные возмущения и изучалась эволюция картины течения по времени (возмущения осуществлялись в виде вдува потока в верхней части цилиндра, вводились вихри перед телом и т.д.). Независимо от типа возмущения наблюдалась одна и та же устойчивая нестационарная периодическая картина упорядоченного движения (автоколебательный режим), хорошо согласующаяся с наблюдаемой в эксперименте.

Разработка методики и расчеты проводились А.В.Бабаковым [17] с использованием консервативной схемы метода потоков (1) для волных нестационарных уравнений сжимаемой идеальной среды (влияние вязкости на движение макроструктур в таких явлениях несущественно, так как характер взаимодействия определяется в основном волновыми процессами).

Приведем некоторые результаты расчетов этого режима. Для кругового цилиндра он характеризуется сходством вихревой пелены с точки на поверхности, совершающей периодические движения от 120° до 240° .

На рис.2 показана в последовательные моменты времени ($\Delta t = 2,5$) картина течения мгновенные линии тока ($M_\infty = 0,7$), где видны развитые вихревые структуры. Указанный тип течения можно характеризовать, по-видимому, как движение равновесных упорядоченных макроструктур в турбулентном следе за телом. На это указывают, в частности, визуальное и количественное сравнения рассчитанных полей течений [17] (рис.3,а; $M_\infty = 0,64$) с экспериментом [7] (рис.3,б; $M_\infty = 0,64$, $Re = 1,35 \cdot 10^6$), значений аэродинамических коэффициентов, положения точек отрыва и характер поведения давления вдоль поверх-

стационарного режима обтекания подтверждается экспериментом (см., например, [21]), проведенным в маложумной аэродинамической трубе со степенью турбулизации потока менее 0,5%.

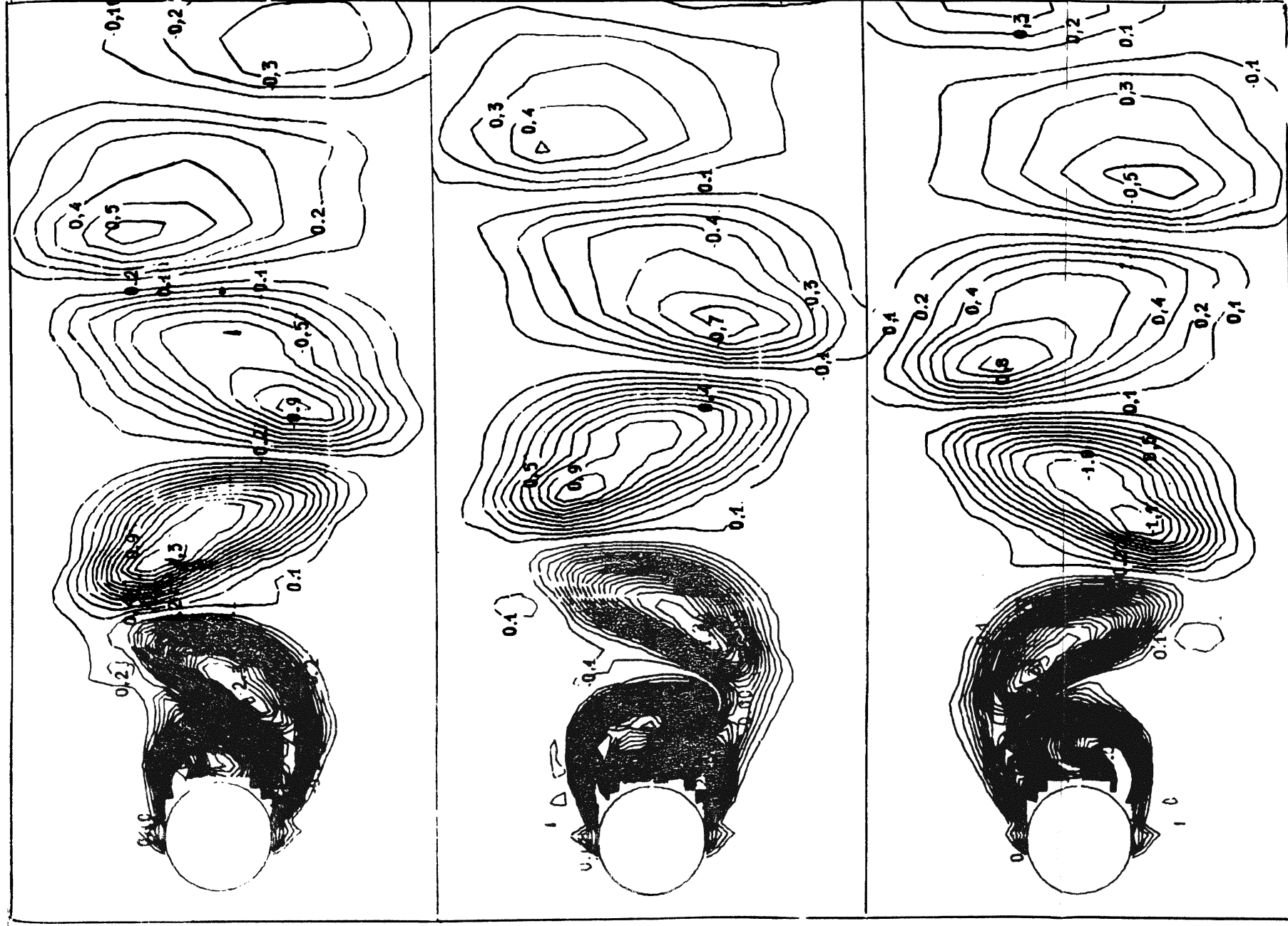
ности кругового цилиндра [9]. Так, при $M_\infty = 0,54$ эксперимент [22] дает $S_H \approx 0,18$, $C_x^H \approx 0,9$ ($C_x^L \approx 0,34$), а результаты расчета [17] дают $S_H \approx 0,178$, $C_x^H \approx 0,9$ ($C_x^L \approx 0,45$). Здесь $S_H = D/TV_\infty$ - число Струхала; C_x^H , C_x^L - коэффициенты сопротивления для нестационарного и стационарного случаев соответственно.

Интересно отметить, что расчетным путем удается смоделировать и околосзвуковые течения, где экспериментальные исследования и теоретические разработки особенно затруднительны. Так, на рис.4 приведены картины течения (линии тока) при $M_\infty = 0,9$ (рис.4,а) и $0,95$ (рис.4,б), полученные расчетным путем (для сравнения там же показаны данные эксперимента [7]). Течение около тела в этом случае практически стационарно, а вихревые структуры зарождаются примерно на расстояниях шести радиусов за цилиндром.

Приведем результаты еще одного интересного численного эксперимента [17] при движении цилиндра ("аппарата") с $M_\infty = 0,5$ в развитую вихревую дорожку помещался экран ("парашют") в форме дуги $150^\circ \leq \psi \leq 210^\circ$, расположенный на расстоянии семи радиусов за цилиндром. Примерно через 100 интервалов времени течение перестраивалось. Вблизи тела колебания в потоке затухали, и течение становилось практически стационарным, но за экраном возникали более интенсивные (чем до раскрытия парашюта) крупномасштабные вихревые структуры (рис.5).

Интересно заметить, что в окрестности таких "организованных" когерентных структур наблюдается пульсационный (стохастический) процесс, который может быть выделен следующим образом: $f' = f - \langle f \rangle$, где f и $\langle f \rangle$ - мгновенное и среднее значения соответственно. На рис.6 приведены полученные А.В.Бабаковым для разных значений M_∞ осредненные значения пульсационных эффектов - рейнольдсовы напряжения $\langle u'v' \rangle$ (рис.6,а) и турбулентная энергия $q_t = 2^{-1}(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle)$ (рис.6,б); рис.7 - картина мгновенных линий тока при $M_\infty = 0,54$ в системе координат, связанной с набегающим потоком. Таким образом, приведенную на рис.7 картину течения можно трактовать как прообраз странного аттрактора для неравновесной диссипативной структуры, описываемой уравнениями (1)-(3).

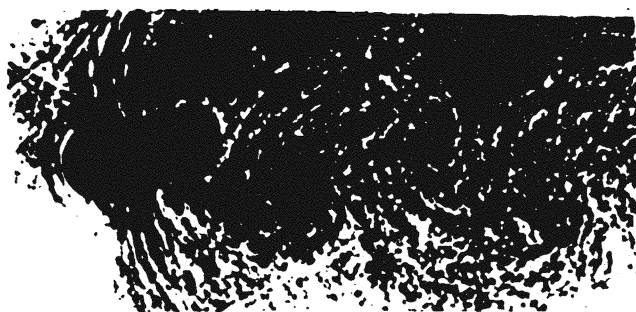
Безусловный интерес представляют исследования чисто гидродинамических задач. Так, прогнозирование поля скоростей за судном - весьма актуальная проблема, особенно при нестационарном режиме движения. В качестве модельной задачи здесь



Р и с. 2. Периодические автоколебания гурбулентного следа за цилиндром при $M_\infty = 0,7$



а)

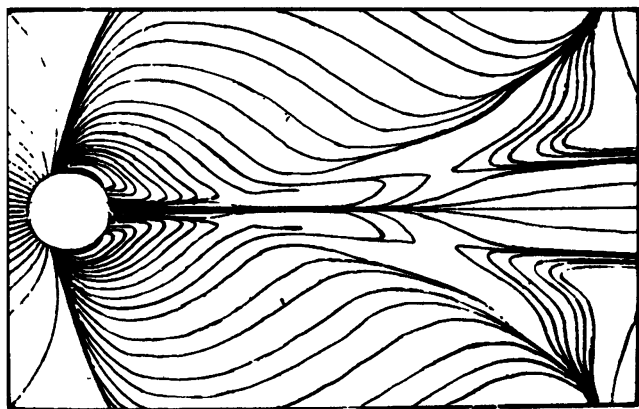


б)

Р и с. 3. Турбулентный след за цилиндром.
Сравнение рассчитанного поля течения (а)
с экспериментом [7] (б)



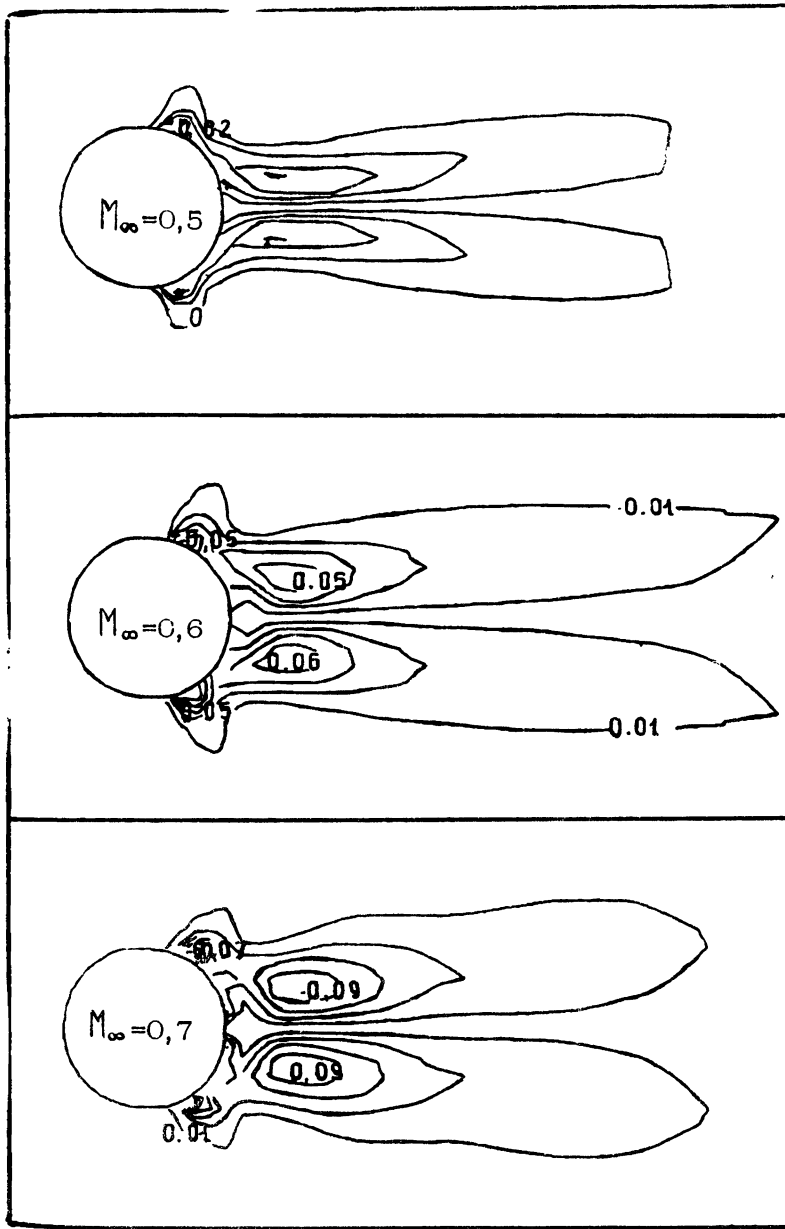
а)



б)

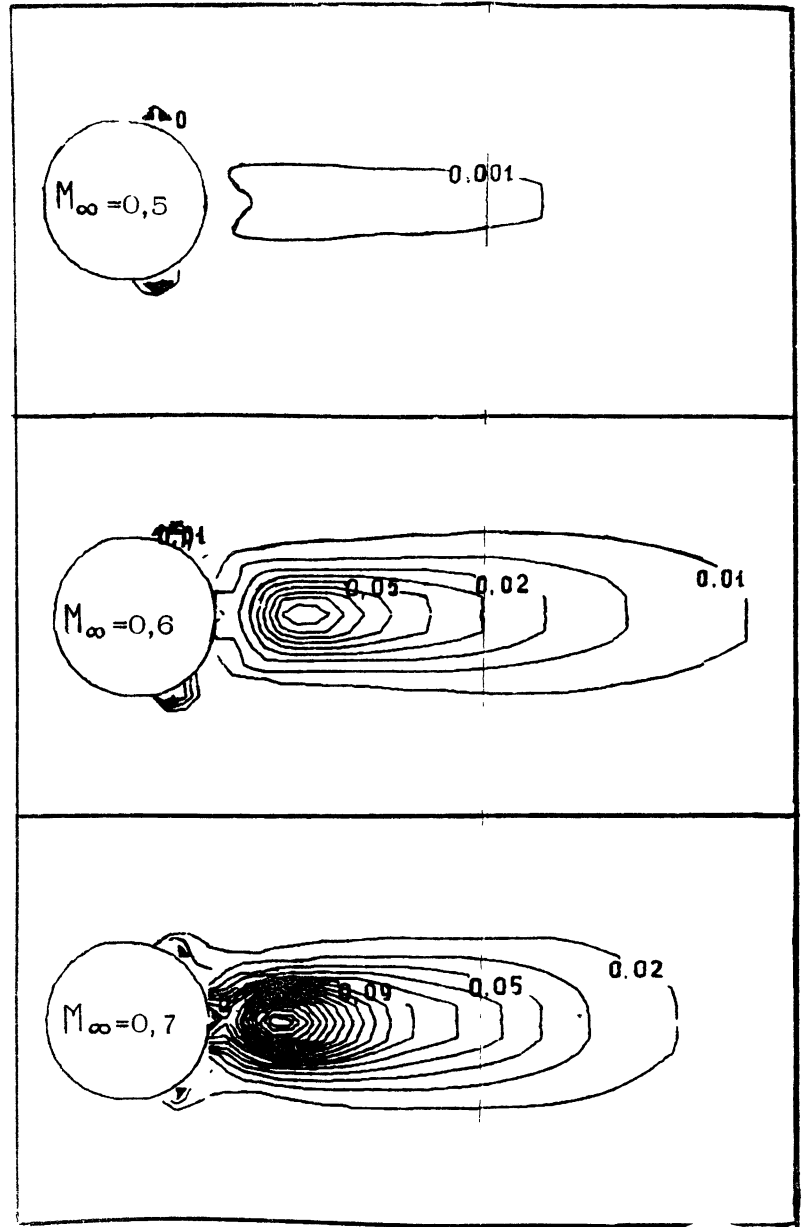


Р и с. 4. Околосвуковые течения газа при $M_\infty = 0,90$ (а) и $M_\infty = 0,95$ (б). Слева - расчет, справа - эксперимент



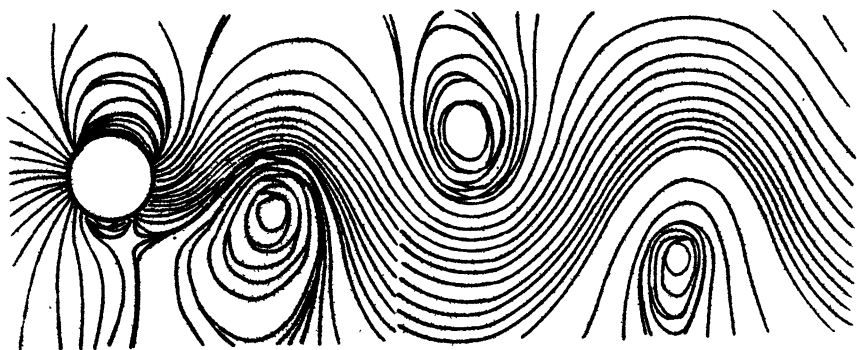
a)

Рис. 6. Расчет пульсационных эффектов:
 а - напряжение Рейнольдса $\langle u'v' \rangle$



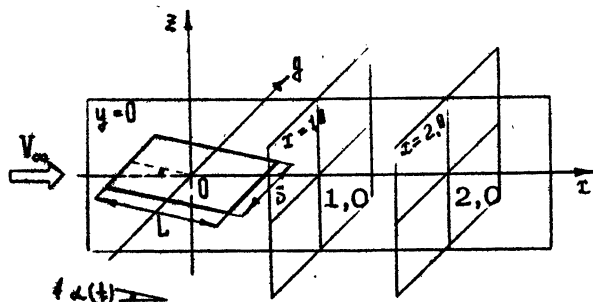
б)

б - турбулентная энергия $q = (1/2)(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle)$



Р и с. 7. Картина мгновенных линий тока при турбулентном обтекании цилиндра, $M_{\infty} = 0,54$

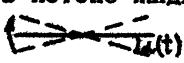
рассматривается пространственно-нестационарное обтекание (3D) несжимаемой жидкостью тонкой пластины, когда дополнительно осуществляется и равномерный поворот пластины на угол атаки $\theta = \alpha(t)$ (рис.8-10 - расчеты В.В.Рыкова [24]). В пространственном случае картина течения очень сложная. Вихри, сформирован-



Р и с. 8. Поворот пластины в потоке жидкости. Постановка задачи (3 D)

ные при поворотах пластины, взаимодействуют с вихревыми ягутами, образовавшимися в результате свертывания вихревой пелены, сходящей с острых боковых кромок пластины; видно образование спутного турбулентного следа за телом (в виде двух сворачиваемых вихрей), отчетливо прослеживается его динамика и т.п. На рис.9 представлены проекции векторов скорости на плоскости $x = \text{const}$, на рис.10 - на плоскости $y = \text{const}$. Рис.11 иллюстрирует результаты расчета обтекания колеблющейся пластины, помещенной в поле равномерного одно-

родного потока. Особый интерес здесь представляет режим течения, когда невозмущенная скорость набегающего потока (V_{∞}) порядка скорости, связанной с частотой колебания пластины $V_{0n} = L/T$ (L — длина пластины, T — период колебаний), т.е. при $V_{\infty} \sim V_{0n}$. Так, на рис. 11 ($V_{\infty} \sim 0,6 V_{0n}$) четко прослеживается образование вихревой дорожки при колебаниях пластины в потоке жидкости ($2D$):



где $\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0 \sin^2(2\pi t/T) & \text{при } 0 < t < T/4 \\ \alpha_0 \sin(2\pi t/T) & \text{при } t > T/4 \end{cases}$

($\alpha_0 = 5^\circ$; $V_{\infty} = 0,6 V_{0n}$, $V_{0n} = L/T$).

Расчеты на разных сетках аппроксимации и сравнение с экспериментом подтверждают надежность полученных данных.

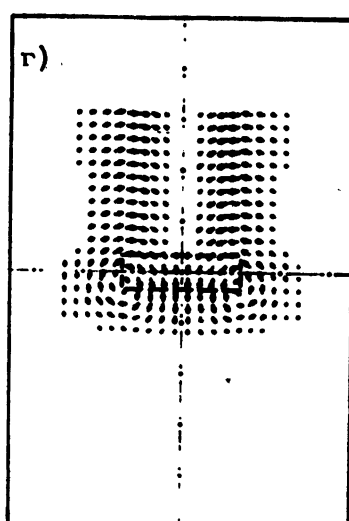
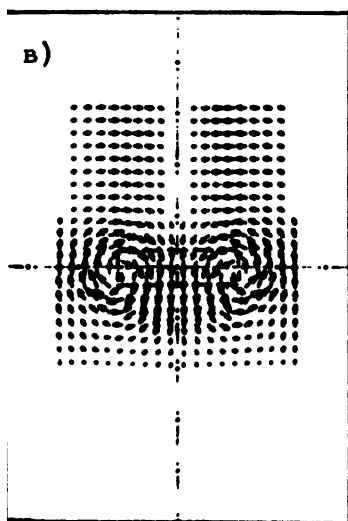
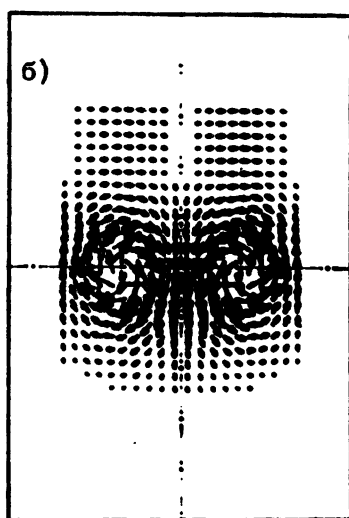
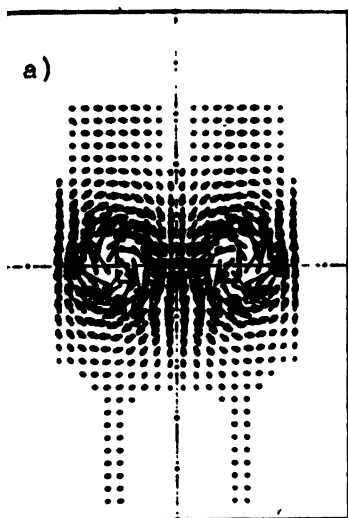
Таким образом, видно, что разработанная методология позволяет рассмотреть широкий круг сложных задач. Более подробная информация об исследованиях указанного класса задач содержится в работах [8, 9, 23, 24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

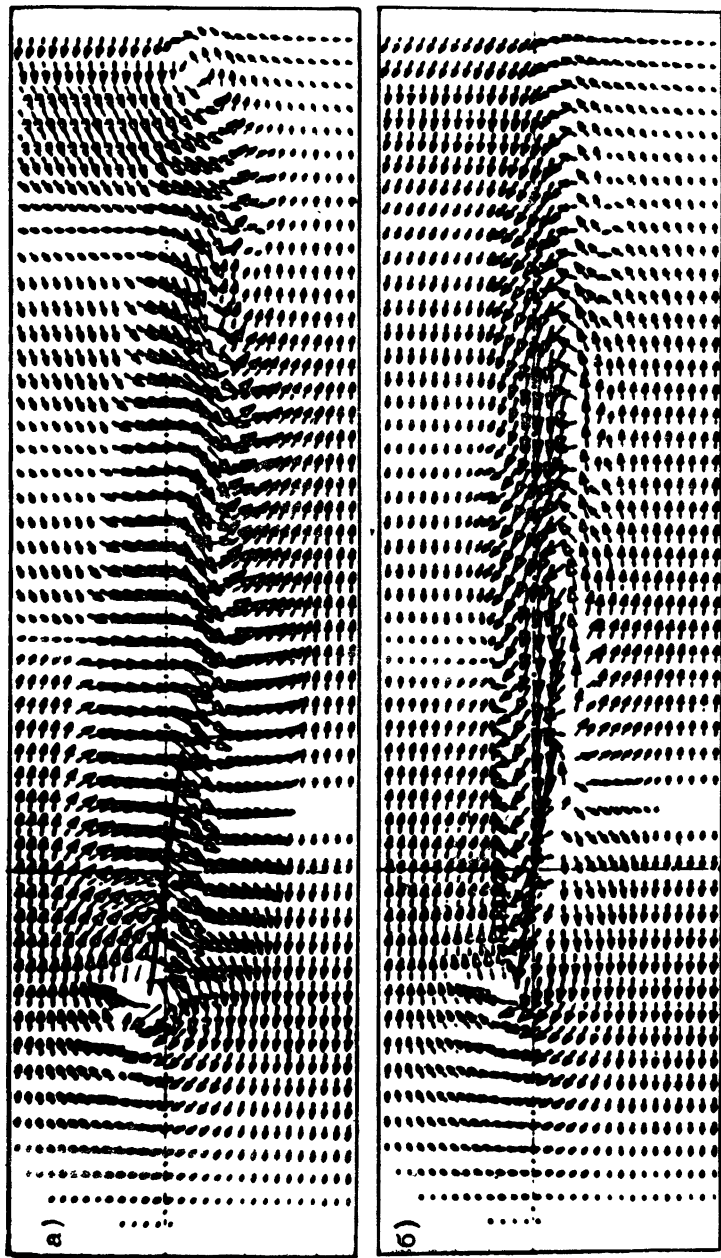
1. Отметим основные концепции разработанных моделей.

На основе экспериментальных данных о существовании в сдвиговой развитой турбулентности упорядоченных образований стохастической структуры проводится разделение процессов на случайные по своей природе движения вихрей и неслучайные (организованные) движения крупномасштабных когерентных вихрей. Большой масштаб и организованный характер такого движения позволяют использовать для его описания численные схемы, основанные на нестационарных уравнениях гидродинамики (а не статистические подходы). В силу индивидуального характера нестационарного упорядоченного движения и крупномасштабных макроструктур турбулентности их исследование на инерционном интервале проводится во всей области возмущения путем прямого численного моделирования, основанного на рассмотрении полных сглаженных динамических уравнений для идеальной среды, а именно нестационарных уравнений законов сохранения с приближенным механизмом диссипации, порождаемым осреднением параметров по объему ячейки и временному интервалу и отражающим вклад мелкомасштабных подсеточных пульсаций.

Показана корректность такой постановки задач: существует принципиальная возможность получения правильных статистических характеристик потока, зависящих от крупномасштабной турбулентности, с помощью сглаженных уравнений движения, где



Р и с. 9. Поворот пластины в потоке жидкости
 (3 D). Векторы скорости в линейном масштабе
 в сечениях $t = \text{const}$, $t = 0,5$ (а), 1 (б), 2 (в),
 3 (г), $\rightarrow \dots V = 0,2 V_{\infty}$



Р и с. 10. Поворот пластины в потоке жидкости ($3 D$). Векторы скорости в логарифмическом масштабе в сечениях $\gamma = \text{const}$: $\gamma = 0$ (а), 0,25 (б)

клад мелкомасштабных вихрей представлен приближенно (без требования правильного расчета истинных полей пульсирующих величин).

Изучение локальных эффектов (стохастической составляющей) турбулентности — характера распределения рейнольдсовых напряжений, плотности турбулентной энергии, скорости ее диссипации и др. — осуществляется в зонах больших градиентов статистическим путем с привлечением кинетических моделей турбулентности.

Реализация указанных численных моделей проведена на машинах средней мощности при исследовании турбулентных течений в следе за телом для двумерных и пространственных случаев.

Развиваемая нами методология математического моделирования макроструктур отрывных течений для сжимаемого газа вполне адекватна предложенной в работе [11], где на основе модели идеальной среды методом дискретных вихрей исследовался широкий класс отрывных течений в несжимаемой жидкости, возникающих при обтекании несущих поверхностей с вихревым турбулентным следом.

2. Изучение упорядоченных структур в турбулентности — это часть широко обсуждаемой в настоящее время проблемы самоорганизации, т.е. процесса возникновения порядка в сложных нелинейных системах и средах (см., например, [25], [26] и др.). Не касаясь этих вопросов по существу, заметим, что процесс упорядочения, очевидно, связан с коллективным (кооперативным) поведением образующих систему подсистем. Модели, образцы и механизмы теории самоорганизации в сложных нелинейных системах и средах исследованы пока весьма слабо, почему использование здесь эвристических подходов вычислительного эксперимента кажется особенно справедливым. Необходимо, однако, отметить, что для образования подобных структур принципиальны неравновесность нелинейность среды и ее диссипативность. Самоорганизация есть результат развития пространственно неоднородных неустойчивостей с их последующей стабилизацией за счет баланса между диссипативными расходами и поступлением энергии от источников неравновесности [27].

При численном подходе к исследованию турбулентности важно правильно смоделировать процесс зарождения и эволюции структур как по времени, так и по масштабам. Когерентные структуры могут существовать вдали от равновесия лишь за счет достаточно большого притока энергии и вещества. При корректном определении на макромасштабах скорости диссипации

энергии по иерархии вихрей (что сделать возможно) предлагаемая "каскадная" модель турбулентности [8], [9] достаточно адекватно описывает процессы турбулентного переноса. Эволюция процесса трактуется здесь как последовательность переходов к новому устойчивому решению в иерархии структур все возрастающей сложности, причем отбор идет в условиях все возрастающей диссипации. Это, по существу, и есть общий принцип Пригожина - самоорганизация в неравновесных системах [25].

Следует также заметить, что введенная расширенная постановка задачи (исходная система плюс оператор осреднения) напоминает "параметрическое расширение" по А.Н.Тихонову [28], а модель "следует рассматривать не как математическую модель объекта, а как математическую модель исследования объекта" (в данном случае - развитой турбулентности). Введенное понятие упорядоченной структуры, устойчиво реализуемой как некий аттрактор лишь при достаточно больших значениях параметра h (шага расчетной сетки) представляется близким понятию " ε -устойчивости" решения по А.Н.Тихонову. Иначе говоря, упорядоченная структура турбулентного течения представляет собой его регуляризованное описание.

Главная цель данной работы - проведение прямого численного моделирования пространственно-нестационарных упорядоченных структур и крупномасштабных вихрей для реальных развитых течений в спутном следе за движущимся телом.

Л и т е р а т у р а

1. Белоцерковский О.М. Численное моделирование течений жидкости и газа // Методы гидрофизических исследований / ИПФ АН СССР. Горький, 1984. С.46.
2. Structure and mechanism of turbulence. I, II // Lect. Notes Phys. V.75,76. Berlin etc: Springer, 1978
3. Структурная турбулентность: Сб. науч. тр. / Под ред. М.А. Гольдштик. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1982.
4. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959.
5. Кантуэлл Б.Дж. Организованные движения в турбулентных потоках. М.: Мир, 1984.
6. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века. Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С.219.

7. Van Dyke M. Album of fluid motion. Stanford, California (USA):Parabolic Press, 1982.

8. Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности //Журн. вычисл.математики и матем. физики. 1985. Т.25. №12. С.1856.

9. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.

10. Чэпмен Д.Г. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития. Драйденовская лекция // Ракетная техника и космонавтика. 1980. Т.18. №2. С.3.

11. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.

12. Яницкий В.Е. Статистический метод частиц для решения некоторых задач кинетической теории газов и турбулентности: Автореф.дис... докт.физ.-мат. наук/ ВЦ АН СССР.М.;1984.

13. Белоцерковский О.М., Ерофеев А.И., Яницкий В.Е. Прямое статистическое моделирование задач аэрогидродинамики // Успехи механики (Варшава). 1982. Т.5. Вып. 3/4. С.11.

14. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982.

15. Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Консервативный метод "поток" и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом//Журн.вычисл. математики и матем, физики. 1973. Т.13. №2. С.385.

16. Бабаков А.В., Северинов Л.И. Стационарный вариант метода потоков для решения задач механики сплошной среды// Журн.вычисл. математики и матем. физики. 1976. Т.16. №1. С.140.

17. Бабаков А.В. Численное моделирование некоторых задач аэрогидродинамики /ВЦ АН СССР. М., 1986.

18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.

19. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975.

20. Кочин Н.Н., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1963.

21. Баженов Д.В., Баженова Л.А., Римский-Корсаков А.В. Экспериментальное исследование влияния внешних возмущений на процессы вихреобразования и флуктуацию подъемной силы на круговом цилиндре, обтекаемом потоком// 5-й Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: аннотации докл. Алма-Ата: Жазуши, 1981. С.42.

22. Кузнецов О.М., Попов С.Г. Вихри в плоском газодинамическом следе за цилиндром//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. №2. С.112.

23. Баженов Д.В., Баженова Л.А. Влияние звукового возмущения на характеристики Эолова тона//Тр. 2-го Всесоюз. симпоз. по физике акусто-гидродинамических явлений и оптоакустике. М.: Наука, 1982. С.105.

24. Рыков В.В. Численное моделирование пространственных течений несжимаемой вязкой жидкости /ВЦ АН СССР. М.; 1983.

25. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

26. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.

27. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

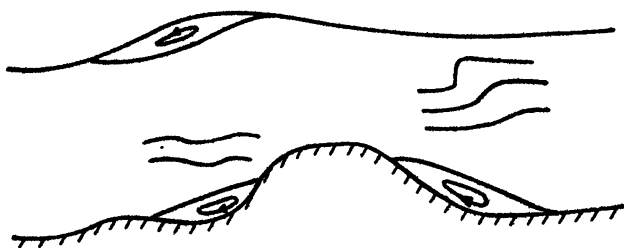
28. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В.А.Гушин, В.Н.Коньшин

Многие явления, наблюдаемые в атмосфере и океане, в силу умеренных скоростей перемещения можно изучать в рамках несжимаемой вязкой жидкости. Задачи, представляющие практический интерес, как правило, характеризуются многомерностью, нестационарностью, нелинейностью, наличием свободных границ и пограничных слоев.

На рис.1 схематично изображена картина течения около подводного хребта. Наличие препятствия на дне приводит к образо-



Р и с. 1

ванию пограничного слоя и к возникновению зон возвратно-циркуляционного течения как перед хребтом, так и за ним. Поскольку океан и атмосфера представляют собой неоднородные по плотности среды, при обтекании препятствия возникают наветренные и подветренные внутренние волны. Взаимодействие внутренних волн большой амплитуды со сдвиговым течением может привести к опрокидыванию внутренней волны и образо-

ванию пятен перемешанной жидкости, которые, в свою очередь, коллапсируют, генерируя внутренние волны. Внутренние волны взаимодействуют с поверхностными, и если глубина жидкости над хребтом не очень велика, может возникнуть опрокидывание фронта поверхностной волны. Приведенный пример показывает многообразие эффектов, имеющих место при изучении течений стратифицированной жидкости. Все это создает серьезные трудности не только при аналитическом исследовании, но и при численном интегрировании уравнений гидродинамики на ЭВМ.

В настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники и вычислительной математики значительно возросла роль вычислительного эксперимента для моделирования сложных задач гидродинамики. Основные принципы, положенные в основу вычислительного эксперимента, достаточно подробно изложены в работах О.М.Белоперковского [1], Г.И.Марчука [2], А.А.Самарского [3], А.Роуча [4] и других авторов.

Одним из важных этапов в технологическом цикле вычислительного эксперимента является конструирование вычислительного алгоритма, включающего в себя два основных момента: построение дискретной математической модели, т.е. аппроксимация исходной дифференциальной задачи разностной и разработка эффективного метода решения разностной задачи. Отметим, что большинство существующих методик не позволяют получать достоверные результаты при изучении свойств течений вязкой стратифицированной жидкости у тел сложной формы (особенно для больших чисел Рейнольдса) и вблизи свободной поверхности. При этом удачными являются лишь те методы решения, которые в определенном смысле адекватны рассматриваемому явлению.

Метод решения задач стратифицированной жидкости должен быть эффективен при расчетах нестационарных пространственных течений, а дискретная модель (разностная схема) должна обладать следующими свойствами: высокий порядок аппроксимации, минимальная схемная вязкость, устойчивость в широком диапазоне чисел Рейнольдса, монотонность. Последнее свойство особенно важно при исследовании течений с областями больших градиентов гидродинамических параметров (пограничные и внутренние слои), а также при моделировании поверхностных и внутренних волн. Примером метода, удовлетворяющего перечисленным выше требованиям, может служить МЕРАНЖ — метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи о двумерном нестационарном течении в океане над подводным хребтом (форма $\psi = -H(x)$), представляющим собой твердую непроницаемую поверхность. Невозмущенное положение свободной поверхности находится на уровне $\psi = 0$, а ее отклонение от этого уровня $\psi = \eta(x, t)$ получается в процессе решения задачи. Система уравнений, описывающая течение жидкости, имеет следующий вид:

$$\vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} + \vec{g}, \quad \rho_t + \nabla(\rho \vec{V}) = 0, \quad \nabla \vec{V} = 0,$$

где \vec{V} — вектор скорости с составляющими u, v вдоль осей x, y ; p — давление; ρ — плотность; μ — динамический коэффициент вязкости; $\vec{g} = (0, -g)$ — ускорение свободного падения.

На свободной поверхности ставятся кинематическое условие

$$\eta_t + u \eta_x - v = 0 \quad (1)$$

и динамические условия на компоненты тензора напряжений:

$p = p_a$, где p_a — атмосферное давление, и

$$-4\mu u_x \eta_x + \mu(u_y + v_x)(1 - \eta_x^2) = \epsilon_p(1 + \eta_x^2), \quad (2)$$

где ϵ_p — касательное напряжение со стороны воздуха.

На дне (твердой непроницаемой границе) $\psi = -H(x)$ для скорости ставятся условие непротекания $(\vec{V} \cdot \vec{n}) = 0$ и условие прилипания

$$(\vec{V} \cdot \vec{t}) = 0, \quad (3)$$

где \vec{n} и \vec{t} — векторы нормали и касательной к свободной поверхности.

Следует отметить, что в тех случаях, когда течение в пограничном слое около твердой поверхности не оказывает существенного влияния на исследуемую область течения, можно пренебречь вязкими членами в исходных уравнениях. В этом случае в постановке задачи отсутствуют также граничные условия (2) на свободной поверхности и (3) — на твердой поверхности. При этом конечно — разностная схема должна быть построена таким образом, чтобы при $\mu = 0$ не возникало дополнительного разностного условия типа (2) или (3).

В качестве начальных условий выбирается потенциальное течение жидкости при фиксированной свободной поверхности.

Так как при решении задач со свободной поверхностью приходится проводить расчет в областях сложной формы с изменяющейся во времени конфигурацией, целесообразно перейти от прямоугольной декартовой системы координат к системе координат

$$x = x, \quad \xi = \frac{y + H(x)}{\eta(x, t) + H(x)}.$$

Тогда в каждый момент времени t расчетная область будет представлять собой прямоугольник в плоскости (x, ξ) .

Переход к безразмерным переменным осуществляется выбором характерного линейного размера H_0 — глубины жидкости в момент времени $t = 0$, характерной скорости \bar{V}_0 — скорости невозмущенного потока и характерной плотности ρ_0 .

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Для решения начально-краевой задачи предлагается использовать следующую схему метода расщепления по физическим факторам [5-7]. Пусть в некоторый момент времени $t_n = n \cdot \tau$, где τ — величина шага по времени, n — число шагов, известны поля скорости \bar{V}^n , плотности ρ^n и избыточного давления $\Phi = p - (p_a - p_c) g y$. Тогда схему нахождения неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\tau$ можно представить в следующем виде:

1-й этап

$$\frac{\bar{V} - \bar{V}^n}{\tau} = -(\bar{V}^n \cdot \nabla) \bar{V}^n + \frac{1}{Re} \Delta \bar{V}^n + \frac{1}{Fr} \frac{\rho^n - \rho_c}{\rho^n} \frac{\bar{g}}{|\bar{g}|}, \quad (4)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} = -\nabla(\rho \bar{V})^n;$$

2-й этап

$$\tau \nabla \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \nabla \Phi \right) = \nabla \bar{V};$$

3-й этап

$$\bar{V}^{n+1} = \bar{V} - \frac{\tau}{\rho^{n+1}} \nabla \Phi, \quad (5)$$

где $Re = \frac{|\bar{V}_0| H_0 \rho_0}{\mu}$ — число Рейнольдса, $Fr = \frac{|\bar{V}_0|^2}{g H_0}$ — число

фруда, ρ_c - гидростатическое распределение плотности.

Отметим, что в отличие от [6,7] здесь используется безте-
рационная по плотности схема расщепления, что позволяет сок-
ратить машинное время, необходимое для расчета одного вре-
менного слоя, однако при этом возникают дополнительные тре-
бования к конечно-разностной аппроксимации конвективных
членов.

1-й этап. Построение конечно-разностной схемы высокого
порядка аппроксимации, обладающей запасом устойчивости в
широком диапазоне чисел Рейнольдса, монотонной и имеющей
минимальную схемную вязкость, рассмотрим на примере модель-
ного уравнения переноса:

$$f_t + u f_x = 0, \quad (6)$$

где $f(x,t)$ - искомая функция, $u = \text{const}$. Пусть

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} + u \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{h} = 0 \quad (7)$$

- конечно-разностная аппроксимация уравнения (6).

Известно, что для уравнения (6) нельзя построить монотон-
ную однородную разностную схему выше первого порядка аппро-
ксимации. Поэтому построение монотонной схемы высокого по-
рядка осуществляется либо на основе однородных схем второго
порядка с применением операторов сглаживания, либо на основе
гибридных схем с применением различных критериев переключе-
ния с одной схемы на другую (в зависимости от характера ре-
шения) - возможно с использованием сглаживания.

В данной работе рассматривается гибридная монотонная раз-
ностная схема, основанная на комбинации центрально-разност-
ной и ориентированной схем второго порядка [8]. Принцип по-
строения этой схемы можно сформулировать следующим обра-
зом. Расчет $f_{i+1/2}^n$ в уравнении (7) проводится по формулам

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(3-c)f_i^n - \frac{1}{2}(1-c)f_{i-1}^n, \quad c = \frac{|u|\tau}{h}$$

при $u \geq 0$ и $|f_{i+1}^n - f_i^n| \geq |f_i^n - f_{i-1}^n|$;

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(3-d)f_{i-1}^n - \frac{1}{2}(1-d)f_{i+2}^n$$

при $u < 0$ и $|f_{i+2}^n - f_{i+1}^n| \leq |f_{i+1}^n - f_i^n|$.

В остальных случаях используются центральные разности

$$f_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(1+c)f_i^n + \frac{1}{2}(1-c)f_{i+1}^n.$$

Величина $f_{i-1/2}^n$ вычисляется аналогично $f_{i+1/2}^n$.

Полученная таким образом схема на гладких решениях имеет второй порядок аппроксимации по временной и пространственной переменным, устойчива при выполнении критерия Куранта и является монотонной. Обобщение предложенной конечно-разностной схемы на случай двух и трех пространственных переменных осуществляется формально. Линейный анализ устойчивости для конечно-разностной аппроксимации (4) дает следующее достаточное условие устойчивости:

$$1 + c_1^2 + c_2^2 \geq 2(c_1 + c_2 + d_1 + d_2),$$

где c_1 и c_2 - локальные числа Куранта, $d_1 = \tau / (Re h_1^2)$, $d_2 = \tau / (Re h_2^2)$, h_1 и h_2 - пространственные шаги разностной сетки.

На втором этапе вычислительного процесса проводится расчет давления из решения уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами и перекрестными производными

$$-(R\Phi_x)_x - [R(\mathcal{E}B+C)\Phi_y]_y - [R(\mathcal{E}B+C)\Phi_z]_z - \left\{ [R(\mathcal{E}B+C)^2 + A]\Phi_y \right\}_y = F,$$

$$(R = \eta + H, A = R^{-1}, B = -AR_x, C = AH_x, F = \frac{1}{\tau} \left\{ (R\tilde{u})_x + [\mathcal{E}B+C]R\tilde{u} + \tilde{v} \right\}_y),$$

$$\vec{V} = (\tilde{u}, \tilde{v})$$

или в операторной форме $\Delta \Phi = F$.

С целью повышения эффективности метода на этом этапе целесообразно использовать прямое обращение эллиптического оператора. Это возможно, например, в тех случаях, когда оператор Δ допускает разделение переменных. В остальных случаях достаточно эффективным оказывается итерационный процесс

$$\mathcal{R} \frac{\Phi^{k+1} - \Phi^k}{\tau_{k+1}} = \Delta \Phi^k + F; \quad k = 0, 1, \dots,$$

на каждом шаге которого проводится обращение более простого чем исходный, оператора эллиптического типа. Скорость сходимости данного итерационного процесса определяется выбором оператора \mathcal{R} и итерационных параметров $\{\tau_{k+1}\}$. Параметры $\{\tau_{k+1}\}$ и оператор \mathcal{R} должны выбираться из ус

ловия минимума числа итераций, необходимых для достижения заданной точности. Кроме того, оператор \mathcal{R} должен быть экономично обратимым.

Для рассматриваемого нами класса задач эффективным оказался следующий выбор оператора: $\mathcal{R} = -(\mathcal{R}\Phi_x)_x - \Lambda\Phi_{xx}$. Операторы Λ и \mathcal{R} являются самосопряженными и положительными. Поэтому можно использовать чебышевский набор итерационных параметров $\{\tau_{k+1}\}$. Операторы Λ и \mathcal{R} энергетически эквивалентны с константами эквивалентности:

$$\gamma_1 = 1 - \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad \gamma_2 = (1 + m^2) \left(1 + \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right); \quad \gamma_1 \mathcal{R} \leq \Lambda \leq \gamma_2 \mathcal{R}$$

$$(m = \max_x \{ |\eta_x|, |H_x| \}),$$

где γ_1 — минимальное, γ_2 — максимальное собственные значения обобщенной задачи на собственные значения $\Lambda\Phi = \mathcal{R}\mathcal{R}\Phi$. При практических расчетах можно использовать неявную схему простой итерации, для которой $\tau_{k+1} = \tau_0 = 2 / (\gamma_1 + \gamma_2)$, $k = 0, 1, \dots$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия $\| -\Lambda\Phi^k + F \|_C < \varepsilon$, где ε — малое число. Последнее условие эквивалентно условию $\| \nabla \bar{V}^{k+1} \|_C < \varepsilon$.

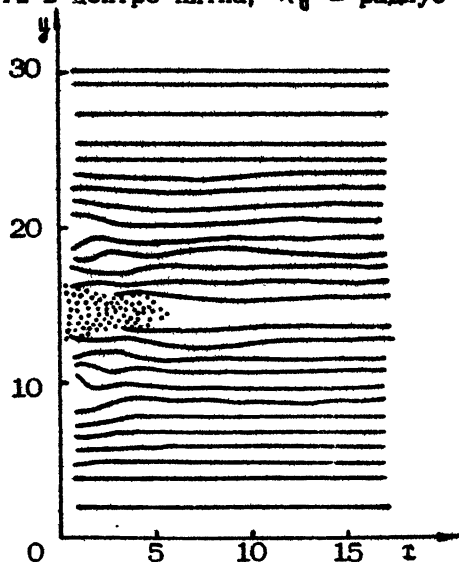
Отметим основные свойства приведенного алгоритма: скорость сходимости не зависит от типа граничных условий и от числа узлов сетки в каждом из направлений.

На заключительном этапе по явной схеме (уравнение (5)) определяется поле \bar{V}^{k+1} на очередном слое по времени. Отметим, что с помощью спектрального признака Неймана легко доказать абсолютную устойчивость второго и третьего этапов.

Далее вычисляется форма свободной поверхности на новом временном слое из уравнения (1). Рассчитываются коэффициенты R , A , B , C на новом временном слое. Реализуются граничные условия для составляющих вектора скорости на свободной поверхности из решения уравнения (2) с учетом условия непротекания. Реализуются граничные условия для плотности и составляющих вектора скорости на правой открытой границе (условие излучения). После этого вычислительный цикл повторяется либо до достижения стационарного состояния (если оно существует), либо до некоторого заданного момента времени.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Ранее [6] была рассмотрена задача о коллапсе пятен цилиндрической формы в линейно стратифицированной по плотности жидкости и проведено сравнение с некоторыми теоретическими и экспериментальными данными, а также с расчетами других авторов. Здесь в качестве примера приведем некоторые результаты расчетов задачи о коллапсе пятен сферической формы. На рис. 2 для варианта $Re = \rho_0 R_0^2 N / \mu = 301$, $Fr = R_0 \left. \frac{\partial \rho}{\partial y} \right|_0 = 0,156$ (ρ_0 - плотность в центре пятна, R_0 - радиус пятна в началь-



Р и с. 2.

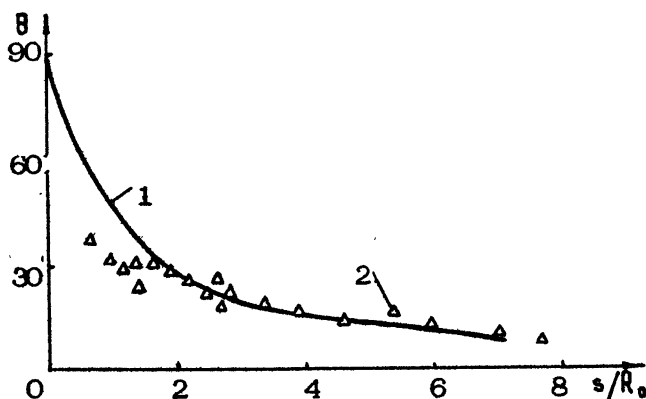
ный момент времени $t = 0$, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_0$ - градиент плотности

(стратификация) жидкости вне пятна при $t = 0$, $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_0}$ - частота Брента-Вейселя) показаны форма пятна, отмеченная маркерами, и изолинии (линии равной плотности) в момент времени $t = 5$. Полученная в работе [9] асимптотическая зависимость горизонтального размера сферического пятна от времени на заключительной вязкой стадии эволюции в обозначениях, используемых в данной работе, имеет следующий вид:

$$\frac{r}{R_0} = 0,983 [Re N (t - t_3)]^{0,1}, \quad (8)$$

где t_2 - время начала вязкой стадии. Вытекающее из (8) соотношение $t_2/t_1 = (Re_2/Re_1)^{0.4}$ согласно результатам, полученным в данной работе при различных числах Re , выполняется с точностью до 4%. Заметим, что вертикальный размер сферического пятна (как и цилиндрического) при $t=0$ изменяется не-монотонно со временем.

Зависимость угла наклона θ линий постоянной фазы от координаты s/R_0 при $y/R_0 = 1$ (s - расстояние от оси симметрии до соответствующей линии равной фазы при фиксированном y) показана на рис.3. Кривая 1 здесь соответствует формуле $s/y = ct_2 \theta$, полученной при решении линеаризованной за-



Р и с. 3

дачи о динамике внутренних волн, индуцируемых мгновенным точечным источником возмущений поля плотности, помещенным в начале координат [10], 2 - результаты данной работы.

На рис.4 представлено изменение координаты s/R_0 со временем для различных гребней и впадин внутренних волн. Пунктирные кривые описываются соотношением $s/y = \left\{ \left[\frac{t}{\pi(n-0.5)} \right]^2 - 1 \right\}^{0.5}$

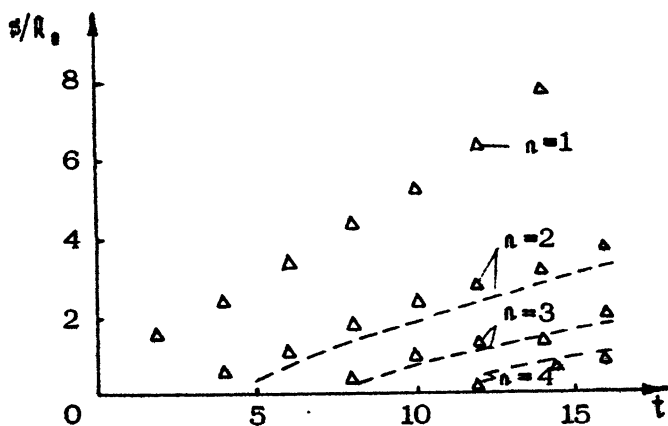
(n нечетное соответствует гребням, а n четное - впадинам внутренних волн), полученным в работе [10], треугольником обозначены результаты данной работы.

Рассмотрим задачу о подветренных внутренних волнах, генерируемых рельефом дна, и об их взаимодействии с пикноклином

и свободной поверхностью. Расчеты проведены для распределения плотности ρ близкого к реальному и различных чисел Фруда $F_{r_{на}} = \frac{U_0}{N d}$, где U_0 - скорость набегающего потока, N - характерная частота Брента-Вейсяля, d - высота препятствия на дне.

В результате расчетов получено, что в зависимости от числа $F_{r_{на}}$ существует, по крайней мере, три режима течения. Во-первых, при достаточно больших числах Фруда, например при $F_{r_{на}} = 12,6$, наблюдается стационарное потенциальное течение жидкости над преградой. При меньших числах Фруда ($F_{r_{на}} = 10,8$) в исследуемой области появляются внутренние волны конечной амплитуды, причем максимальное значение амплитуды достигается в области пикноклина. Картина течения (линии $\psi = \text{const}$, где ψ - функция тока), отвечающая данному режиму, показана на рис.5.

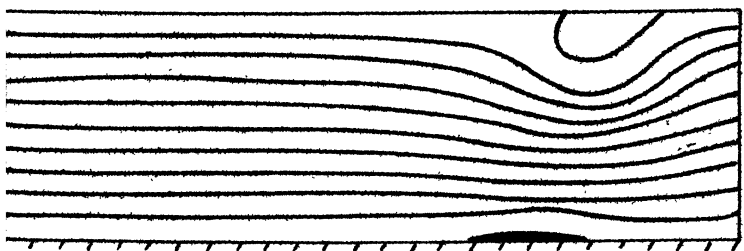
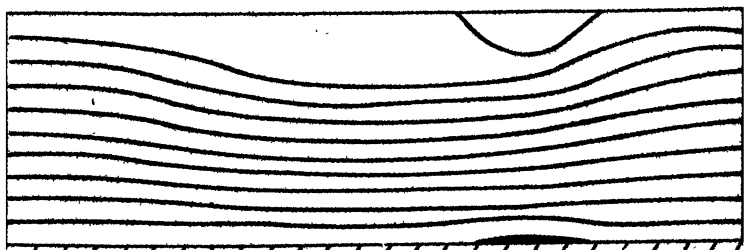
При уменьшении числа Фруда (например, при $F_{r_{на}} = 9,0$) амплитуда внутренних волн возрастает, и в области пикноклина могут образовываться зоны возвратно-циркуляционного движения. В этом случае течение нестационарное. Наблюдается периодическое движение зон возвратно-циркуляционного течения



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

навстречу набегающему потоку. На рис.6 представлены картины течения (линии $\psi = \text{const}$) приблизительно для одного периода ($T \approx 12$), верхняя картина соответствует $t=7$, нижняя $t=19$, Δt между картинками равно 4.

* * *

Рассмотренный вариант метода расщепления по физическим факторам учитывает специфику течений стратифицированной жидкости и позволяет существенно сократить машинное время, необходимое для расчета одного временного слоя, за счет использования безитерационной схемы по плотности и эффективного алгоритма решения краевой задачи для уравнения эллиптического типа. Переход к такой схеме, в свою очередь, оказался возможным благодаря использованию для конвективных членов в уравнениях движения гибридной конечно-разностной схемы, обладающей минимальной схемной диссипацией, монотонной и работоспособной в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Предложенная монотонная разностная схема применима и для расчета течений несжимаемого газа.

В заключение отметим, что данный метод позволяет изучать существенно нелинейные нестационарные явления в широком диапазоне параметров течения (Re , F_r , $F_{r, \text{пл}}$) при наличии свободной поверхности и для произвольного гидростатического распределения плотности.

Л и т е р а т у р а

1. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
3. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. // Вест. АН СССР, 1979, №5, С.38.
4. Роуч А. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
5. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики несжимаемой вязкой жидкости // Журн. вычисл. математики и математической физики. 1975, Т.15, №1. С.197.

6. Гушин В.А. Метод расщепления для решения задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и математической физики. 1981. Т.21. №4. С.1003.

7. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гушин В.А. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром // Журн. вычисл. математики и математической физики. 1984. Т.24. №8. С.1207.

8. Гушин В.А., Коньшин В.Н. Численное моделирование волновых движений жидкости / ВЦ АН СССР, М., 1985.

9. Баренблатт Г.И. Динамика турбулентных пятен и интрузия в устойчиво стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1978. Т.14. №2. С.195.

10. Koh R.C.Y. Transient motions induced by local disturbances in a linearly density stratified fluids // J. Hydraulic Res. 1971. V.9. N 3. P.335.

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

А.И.Толстых

1. Численное моделирование является одним из эффективных инструментов исследования гидродинамических процессов, происходящих в стратифицированной среде. Сильные стороны численного эксперимента в гидрофизике определяются, с одной стороны, огромным объемом получаемой информации об исследуемом явлении, а с другой — относительной дешевизной его проведения по сравнению с лабораторным и натурным экспериментом. Само собой разумеется, что наибольший эффект достигается при совместном использовании численных, аналитических и экспериментальных методов исследования гидрофизических полей.

К сожалению, численные методы в гидрофизике в настоящее время, на наш взгляд, развиты значительно слабее, чем в других областях вычислительной механики (например, в аэродинамике). Поэтому разработка и применение эффективных алгоритмов для численного моделирования гидрофизических полей представляется весьма важной задачей. Полную систему уравнений таких полей можно рассматривать как обобщение и усложнение уравнений Навье—Стокса несжимаемой однородной жидкости (вследствие учета сил плавучести, появления "дополнительных" уравнений для плотности, температуры, турбулентных пульсаций и т.д.). Поэтому основную стратегию численного решения уравнений Навье—Стокса можно использовать и при численном моделировании гидрофизических полей. Вместе с тем специфика решаемых при этом задач может представлять повышенные требования к качествам применяемых алгоритмов. Эти требования, в частности, могут диктоваться следующими соображениями.

Во-первых, при решении нестационарных задач возникает потребность использовать шаги по времени не меньше шагов, диктуемых точностью "временного" разрешения эволюционного процесса. Это связано с тем, что при счете на большие времена погрешности аппроксимации схемы (а иногда и погрешности округления) в результате значительного числа циклов вычислений могут накапливаться и заметно искажать решение. Как правило, вынужденные малые шаги по времени возникают из-за жестких критериев устойчивости явных схем или малой точности дискретизации в исходных уравнениях. В связи с этим часто оказывается желательным использовать более устойчивые неявные схемы, обеспечивающие порядок аппроксимации не ниже второго.

Во-вторых, при описании волновых процессов в стратифицированной среде очень важно не искажать получаемые решения теми колебаниями сеточных функций, которые привносятся самой схемой. Наличие схемных осцилляций является типичным при использовании симметричных аппроксимаций типа центральных разностей.

Ниже будут рассмотрены некоторые подходы к построению алгоритмов для решения исходных уравнений, которые в значительной мере удовлетворяют сформулированным выше требованиям.

2. При решении нелинейных уравнений гидродинамики особую роль играет дискретизация конвективных членов, существенно влияющих на качество получаемых решений. Опыт расчетов показал, что весьма эффективным здесь является использование так называемых "компактных" (т.е. трехточечных) аппроксимаций третьего порядка, предложенных и изученных в работах [1-2].

Поясним смысл этих аппроксимаций на примере дискретизации производной в уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}. \quad (1)$$

Введя разностную сетку $\omega_h: x_j = jh$, $h = \text{const}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, построим операторы

$$A_x = A_{0x} - 0,25 S_x \Delta_{0x}, \quad \Delta_x = 0,5(\Delta_0 - S_x \Delta_2), \quad (2)$$

где $A_{0x} f_i = (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})/6$; $\Delta_{0x} f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$,
 $\Delta_2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$, а S_x - параметр, принимающий значения ± 1 (т.е. $S_x = 1$ при $a > 0$ и $S_x = -1$ при $a < 0$).

Оператор $\delta_x = A_x^{-1} \Delta_x / h$ независимо от значения S_x аппроксимирует производную $\partial/\partial x$ с третьим порядком точности.

В самом деле, легко убедиться, что разложения в ряды Тэйлора относительно $t = t_j$ функции $f(t)$, подставленные вместо f_{j-1} и f_{j+1} , приводят к следующим символическим представлениям:

$$A_{\tau} f_j = \left(E - \frac{S_{\tau} h}{2} D_{\tau} + \frac{h^2}{6} D_{\tau}^2 \right) f_j + O(h^3), \quad (3)$$

$$h^{-1} A_{\tau}^{-1} f_j = \left(E - \frac{S_{\tau} h}{2} D_{\tau} + \frac{h^2}{6} D_{\tau}^2 \right) D_{\tau} f_j + O(h^3),$$

где D_{τ} — оператор дифференцирования по t . Из выражений (3) немедленно следует равенство

$$A_{\tau}^{-1} A_{\tau} f_j / h = D_{\tau} f_j + O(h^3),$$

означающее третий порядок аппроксимации оператором δ_{τ} производной d/dt .

Используя оператор δ_{τ} , разностную схему третьего порядка относительно шага h для уравнения (1) можно записать в виде

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + a A_{\tau}^{-1} A_{\tau} \frac{u^{m+1}}{h} = 0.$$

Для нелинейного уравнения

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = f \quad (4)$$

аналогичная схема после умножения на A_{τ} имеет вид

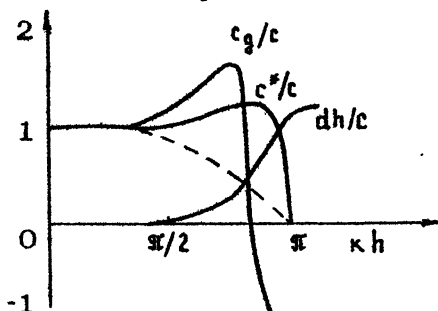
$$A_{\tau} \frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + \frac{A_{\tau}}{h} \varphi(u^{m+1}) = A_{\tau} f, \quad (5)$$

где положено $S_{\tau} = \text{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u^m)$ в каждом узле $t = t_j$. Схемы (4), (5) — "трехточечные", т.е. связывают значения функций в трех узлах и позволяют использовать экономичный метод прогонки для решения разностных уравнений. Они являются абсолютно устойчивыми в приближении "замороженных" коэффициентов и практически позволяют вести счет при больших значениях числа Куранта $\tau \varphi'(u)/h$. Не останавливаясь на подробном исследовании этих схем (см., например, [1,2]), проиллюстрируем благоприятные дисперсионные и диссипативные свойства оператора δ_{τ} на примере уравнения (1).

Чтобы исключить влияние способа дискретизации производной u_t , рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$u_t + a A_x^{-1} \Delta_x / h = 0.$$

Сравнивая волновые решения этих уравнений, можно получить зависимости от волнового числа отношения a_s/a "схемной" и "точной" фазовых скоростей, а также коэффициента λ затухания гармоник ($\lambda \approx 1$ в случае (1)). Функции a_s/a и $d=1-\lambda$ приведены на рис.1 вместе с относительной групповой скоростью c_g/a и дискретной кривой $(a_s/a)_0$ в случае центрально-разностных аппроксимаций. Легко установить



Р и с. 1

оценки $a_s/a = 1 - O(\alpha^4)$, $d = O(\alpha^4)$, $\alpha = kh$. Как видно на рис.1, фазовые ошибки малы для длинных и средних волн (относительно шага h). В случае самых коротких волн, разрешаемых сеткой ($kh \approx \pi$), эти ошибки велики, и групповая скорость становится отрицательной. Однако при этом резко возрастает диссипация d , пренебрежимо малая для более длинных волн. Таким образом, "схемные" колебания, "нефизичные" в силу малости числа узлов, приходящихся на длину волны, фиксируются схемой.

3. Если моделируемое течение двумерно, то для его описания целесообразно использовать уравнение для переменных вихрь-функция тока, дополненное уравнениями для тех или иных скалярных параметров среды (плотности, температуры, солености). При этом любое из конвективных дифференциальных уравнений, входящее в общую систему, можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u f}{\partial x} + \frac{\partial v f}{\partial y} = \nu \Delta f + F, \quad (6)$$

где u и v - компоненты скорости вдоль декартовых осей x и y ,

f — некоторая скалярная функция (например, завихренность, плотность и т.д.), а F — "источниковый" член. Коэффициент вязкости ν перед оператором Лапласа Δ может рассматриваться так же, как коэффициент "эффективной" турбулентной вязкости, определяемый некоторой полумпирической моделью турбулентности. Более того, член $\nu \Delta f$ в уравнении (6) может быть заменен производными от пульсационных величин в случае использования модели турбулентности второго порядка.

Вводя сетку $\omega_y: y_k = k h_y$, $h_x = \text{const}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, можно построить операторы A_y, Δ_y и δ_y , аналогичные операторам A_x, Δ_x и δ_x . Используя эти операторы, можно построить следующую разностную схему, аппроксимирующую уравнение (6):

$$\begin{aligned} & \left[E + 0,5\tau(\delta_x \bar{u} - \nu \delta_{2x}) \right] \left[E + 0,5\tau(\delta_y \bar{v} - \nu \delta_{2y}) \right] \frac{f^{m+1} - f^m}{\tau} + \\ & + \delta_x \bar{u} f^m + \delta_y \bar{v} f^m = \nu (\delta_{2x} + \delta_{2y}) f^m + F. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь черта означает, что сеточные функции рассматриваются при $t = t_{m+1/2}$; они могут быть вычислены либо в результате экстраполяции с предыдущих слоев, либо в результате осреднения типа $\bar{u} = 0,5(u^{m+1} + u^m)$, где функция u^{m+1} предполагается определенной. Операторы δ_{2x} и δ_{2y} являются некоторыми аппроксимациями вторых производных по x и y соответственно. Схема (7) имеет второй порядок относительно шага τ и абсолютно устойчива в случае постоянных коэффициентов. Практически она позволяет производить расчеты с большими шагами τ .

При практической реализации (7) сначала следует определить сеточные функции $\delta_x \bar{u} f^m$ и $\delta_y \bar{v} f^m$ по известным значениям f^m . После умножения (7) на A_x они приобретут соответственно вид $\Delta_x f^m$ и $A_x Y$, где $Y = A_y^{-1} \Delta_y \bar{v} f^m$; для вычисления Y достаточно решить трехточечное уравнение $A_y Y = \Delta_y \bar{v} f^m$.

Во многих практических задачах коэффициент ν мал. Если при этом не рассматривается обтекание твердых поверхностей, то членами с операторами δ_{2x} и δ_{2y} можно пренебречь. В этом случае схема (7) является схемой третьего порядка относительно h_x и h_y , а определение f^{m+1} сводится к обращению трехточечных операторов $A_x + 0,5\tau \Delta_x \bar{u}$ и $A_y + 0,5\tau \Delta_y \bar{v}$.

Если же необходимо учесть диффузионные члены, то порядок схемы определяется выбором операторов δ_{2x} и δ_{2y} ; это можно сделать различными способами, сообразуясь со спецификой

решаемой задачи и простотой обращения операторов при вычислении f^{m+1} .

Во всех случаях применение "компактных" операторов третьего порядка имеет две цели: во-первых, в классе неявных трехточечных схем получить аппроксимации, обладающие достаточно благоприятными свойствами монотонности и не требующими "сглаживания" схемных осцилляций; во-вторых, получить алгоритм повышенной точности, который при надлежащем распределении узлов сетки в рамках допустимой погрешности позволяет использовать более крупные шаги h_x и h_y .

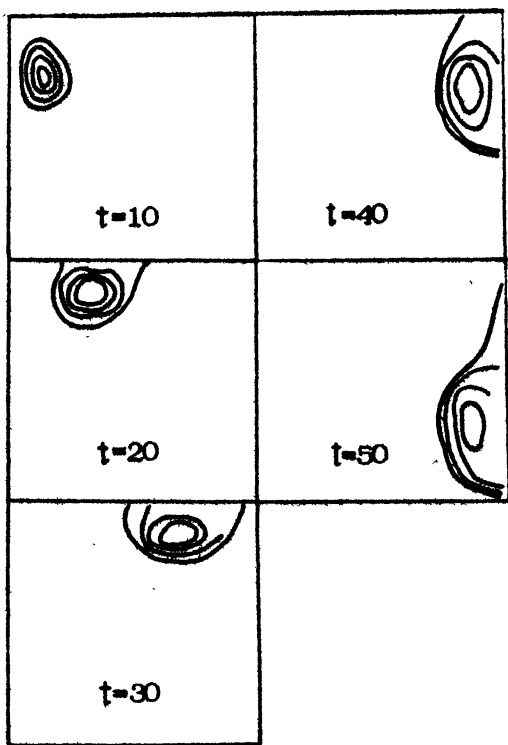
Если ограничиться только первой целью, то при выборе операторов δ_{2x} , δ_{2y} способа вычисления \bar{u} и \bar{v} , аппроксимации уравнения Пуассона для функции тока и т.д. необязательно стремиться к третьему порядку соответствующих погрешностей. Если же иметь в виду и вторую цель, то нужно позаботиться о более высоком порядке аппроксимации уравнений и функций, входящих вместе со схемой (7) в общую систему.

Заметим, что приведенный здесь подход может показаться более сложным, чем традиционные. Однако более сложным является лишь процесс программирования и сама программа для ЭВМ. Расчеты выявили надежность алгоритма и благоприятные свойства решений, получаемых при умеренном числе узлов сетки.

На рис.2 приведен пример расчета вихревых течений при помощи схемы (7), показана эволюция пары плоских прандтлевских вихрей одинаковой интенсивности, но разных знаков в прямоугольной области с твердыми границами ($v = 0$). В начальный момент центры вихрей располагались в точках $(-x_0, a)$, (x_0, a) плоскости x, y и имели интенсивности $\pm \omega$ при $(x \pm x_0)^2 + y^2 \leq R_0^2$ и 0 при остальных значениях x, y . Видно, что вихри сначала поднимаются, а затем начинают двигаться вдоль стенки в противоположных направлениях (на рис.2 вследствие симметрии представлена лишь правая полуплоскость $x > 0$ в различные моменты безразмерного времени t). Другим примером применения схемы (7) является решение задачи о развитии и установлении ветрового течения в баротропном океане постоянной глубины под действием внезапно возникшего и в дальнейшем неизменного во времени крупномасштабного поля ветра. Исходными уравнениями являются уравнения для потенциального вихря, выписанные в приближении β -плоскости [3].

В безразмерном виде уравнение для вихря ω представляется следующим образом:

$$\frac{\partial \omega_t}{\partial t} + \epsilon \left(\frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} \right) = \gamma^2 \Delta \omega - \delta \omega - g(x, y);$$

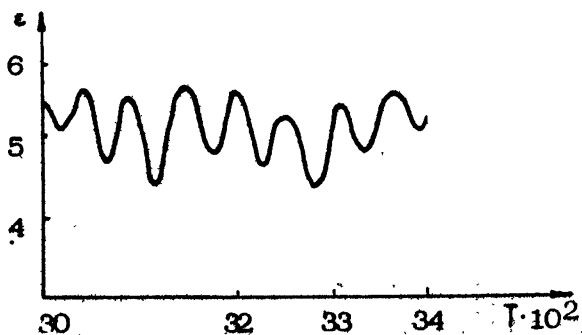


Р и с. 2.

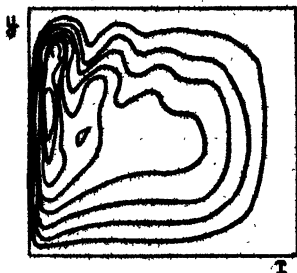
здесь оси x и y направлены соответственно на восток и север, член $q(x, y)$ характеризует касательное напряжение ветра, а коэффициенты γ и δ отражают влияние горизонтального турбулентного трения и стока вихря, обусловленного придонным трением. Задача решалась в прямоугольной области, в которой границы $x=0$ и $x=1$ играли роль соответственно западного и восточного берегов с условиями прилипания на них.

Численное решение этой задачи таково, что при малых значениях $\epsilon < \epsilon_c$, с течением времени параметры океана устанавливаются; если же величины ϵ превосходят критическое значение ϵ_c , то они "выходят" на некоторый квазипериодический режим.

На рис. 3 приведены зависимости энергии $E = (u^2 + v^2)/2$ от времени (вверху) и изолинии функции тока в фиксированный момент времени для некоторого нестационарного режима (внизу),



Изолинии функции тока



$T = 3345$

Р и с. 3

рассмотренного в работе [4]. Картины линий тока свидетельствуют об образовании пограничного слоя около западного берега.

В отличие от схем с аппроксимациями центрально-разностного типа (в частности, от схемы Аракавы, использованной в работе [4]), данный метод не требовал введения каких-либо фильтров высокочастотных "схемных" колебаний.

4. Использование уравнений Эйлера или Навье-Стокса для переменных завихренности — функция тока возможно лишь в случае двух пространственных координат. В общем трехмерном случае необходимо обратиться к исходной системе уравнений гидродинамики, которую запишем для простоты в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) в следующем виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + L\vec{u} = -\nabla p + f. \quad (8)$$

Здесь через L обозначены конвективные члены и члены с вязкостью, а через f — члены, разностные аппроксимации которых в процессе счета используются явным образом, т.е. на предыдущем шаге по времени ($t = t_m$). Те же члены, которые используются неявным образом, т.е. на "текущем" шаге по времени ($t = t_{m+1}$), будем предполагать включенными в оператор L . При численном моделировании, вообще говоря, пространственных нестационарных задач возможен следующий неявный алгоритм [8], основанный, как и методы MAC [5] и расщепления по физическим факторам [6], на идее определения давления из условия равенства нулю дивергенции скорости при $t = t_{m+1}$.

На первом этапе вычислений определяются предварительные значения вектора скорости \vec{u} из уравнений

$$(\vec{u} - \vec{u}^m) / (\tau/2) + L_h \vec{u} = -(\text{grad}_h p^m) / \rho, \quad (9)$$

где L_h и grad_h — разностные аппроксимации соответственно операторов L и grad . Записав наряду с (9) равенство

$$(\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m) / \tau + L_h \vec{u} = \frac{1}{2\rho} \text{grad}_h (\rho^{m+1} + \rho^m), \quad (10)$$

а затем вычтя это равенство из уравнения (9) и применив к результату разностный аналог оператора дивергенции div_h , получим в силу $\text{div}_h \vec{u}^{m+1} = \text{div}_h \vec{u}^m = 0$ уравнение для ρ^{m+1} :

$$\text{div}_h \text{grad}_h (\rho^{m+1} - \rho^m) = \frac{4\rho}{\tau} \text{div}_h \vec{u}. \quad (11)$$

Сам же результат вычитания имеет вид

$$(\vec{u}^{m+1} + \vec{u}^m - 2\vec{u})(\tau/2) = \text{grad}_h (\rho^{m+1} - \rho^m) \quad (12)$$

и позволяет, после определения ρ^{m+1} из (11), найти \vec{u}^{m+1} .

Итак, алгоритм сводится к вычислению \vec{u} из (9), ρ^{m+1} из (11) и \vec{u}^{m+1} — из (12). Можно установить следующие его свойства:

- 1) В отличие от схем (4), (5) он имеет второй порядок аппроксимации относительно шага τ .
- 2) В приближении "замороженных" коэффициентов он абсолютно устойчив, если абсолютно устойчива схема

$$(\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m) / \tau + L_h \vec{u}^{m+1} = 0.$$

Последнее условие заведомо выполняется, если при аппроксимации конвективных членов, входящих в L_h , использовать операторы типа $A_x^{-1} \Delta_x$ и $A_y^{-1} \Delta_y$. При практической реализации алгоритма в многомерном случае схему (9) целесообразно

но заменить факторизованной схемой, аналогичной схеме (7). При $\epsilon = 0,5$ такая замена вносит погрешность порядка $O(\tau^2)$, что находится в соответствии с общей погрешностью алгоритма относительно шага τ . К сожалению, в случае трех пространственных координат факторизованная схема с несамосопряженными операторами не является абсолютно устойчивой; однако ограничения на числа Куранта у нее могут быть существенно менее жесткими, чем в случае явных схем.

Алгоритм (9), (10), (11) выписан для постоянной плотности ρ , однако он легко обобщается на случай, когда плотность переменна; частным случаем таковой ситуации являются течения стратифицированной среды.

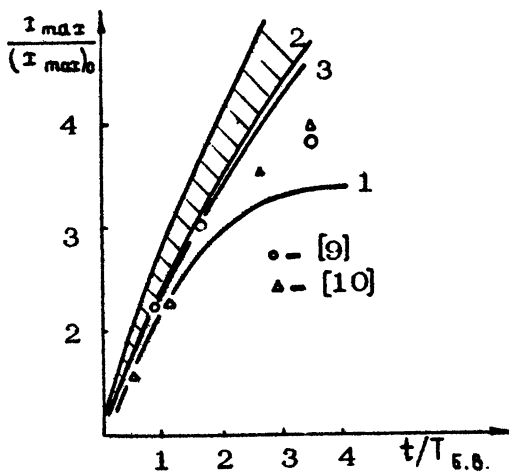
Большой "практический" запас устойчивости алгоритма позволяет его использовать для расчета течений, описываемых теми или иными "усложненными" моделями. Таковой является, например, система уравнений Рейнольдса, дополненная уравнениями для вторых моментов турбулентных пульсаций. Последние схематически могут быть представлены в виде

$$\frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} = F_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

где $\overline{u'_i u'_j}$ — пульсации скорости, черта означает осреднение, D/Dt — конвективы для производных, а правые части F_{ij} , полученные в результате предположений относительно третьих моментов, содержат средние величины, моменты $\overline{u'_i u'_j}$ и их пространственные производные [7]. Сами же уравнения Рейнольдса можно представить в виде (8), где в оператор L входят как члены с вязкостью, так и аналоги диффузионных членов, "извлеченных" из производных от напряжений Рейнольдса, а в правую часть f внесены все остальные члены, входящие в эти производные.

Расчеты проводились как для ламинарных, так и для турбулентных течений. Полученные результаты показали, что, как и в случае уравнений для вихря и функции тока, алгоритм не приводил при любых числах Рейнольдса к "схемным" осцилляциям и не требовал "сглаживания" решений, как это необходимо было делать при применении центрально-разностных аппроксимаций.

В качестве примера использования одного из вариантов описанного метода на рис. 4 приведены результаты расчетов эволюции участка перемещений жидкости ("пятна") [8]. Кривые для изменения со временем ширины "пятна", отмеченные цифрами, соответствуют различным числам Рейнольдса $Re: 1 - Re = 3 \cdot 10^3$, $2 - Re = 3 \cdot 10^4$, $3 - Re = 3 \cdot 10^5$.



Р и с. 4

На том же рисунке приведены экспериментальные [9] ($Re = 6 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^4$) и расчетные [10] ($Re = 300$) данные.

5. Во многих задачах о стационарных вязких течениях, имеющих некоторое преимущественное направление (особенно в случае пространственных течений), может оказаться нерациональным применение метода установления для полных уравнений Навье-Стокса. В таких ситуациях целесообразными являются так называемые "маршевые" алгоритмы, в которых роль времени играет координата вдоль "преимущественного" направления (назовем ее координатой τ). Возможность использования таких алгоритмов возникает в двух случаях: а) при "параболизации" исходных уравнений, когда расчет можно вести, переходя от одного сечения $\tau = \text{const}$ к другому; б) при организации итерационного процесса, в котором на каждой итерации решаются как бы "параболизированные" уравнения.

Существует несколько модификаций "параболизированных" уравнений; их общим свойством является возможность рассматривать уравнения в плоскости y, z (для простоты имеется в виду декартова система координат) как "двумерные" уравнения. Это позволяет использовать либо алгоритм для переменных вихрь-функция тока, либо алгоритм для переменных скорость-давление в случае двух пространственных координат. Уравнение для продольного импульса при этом аппроксимируется как скалярное уравнение переноса с диффузионными членами. Особенность решения уравнений в плоскости y, z , которая может появиться при некоторых способах параболизации и которая от

дичает алгоритм от случая двумерных нестационарных уравнений, состоит в следующем. Дивергенция "поперечного" вектора скорости $\vec{v} = (v, \omega)^T$ в рассматриваемом случае отлична от нуля и определяется из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = -u_x. \quad (14)$$

Это вносит некоторое изменение в алгоритм, описанный в п.4, при выводе которого полагается $\operatorname{div}_h u^m = -\langle u_x \rangle^m$, где через $\langle \rangle$ обозначен разностный аналог производной u_x , вычисленный после определения u^m из уравнения для продольного импульса. Полагая $\langle u_x \rangle^m = (u^m - u^{m-1})/h_x$, получим вместо (11) уравнение

$$\operatorname{div}_h \operatorname{grad}_h (p^{m+1} - p^m) = \frac{4\rho}{\tau} \operatorname{div}_h \bar{u} - \frac{2(u^{m+1} - u^{m-1})}{\tau},$$

в котором операторы div_h и grad_h относятся к плоскости x, y .

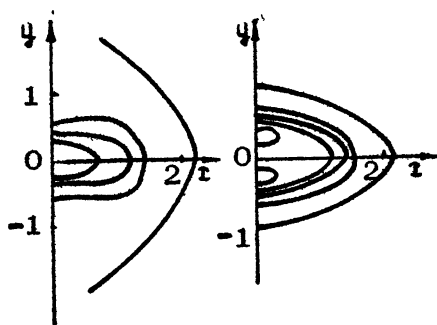
В качестве примера использования описанной выше методики на рис.4 и 5 приведены расчетные данные для турбулентной импульсной струи, вытекающей в спутный поток [8]. В качестве модели турбулентности использовалась модель, описанная в п.4.

На рис.5 изображены изолинии продольной скорости (слева) и энергии турбулентности $q^2 = (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)/2$ в некоторой плоскости x, y , перпендикулярной оси струи z (u', v' и w' - компоненты пульсационных скоростей соответственно вдоль осей x, y и z). Изолинии моментов второго порядка $\overline{v'w'}$ и $\overline{u'w'}$ в том же сечении $z = \text{const}$ представлены на рис.6.

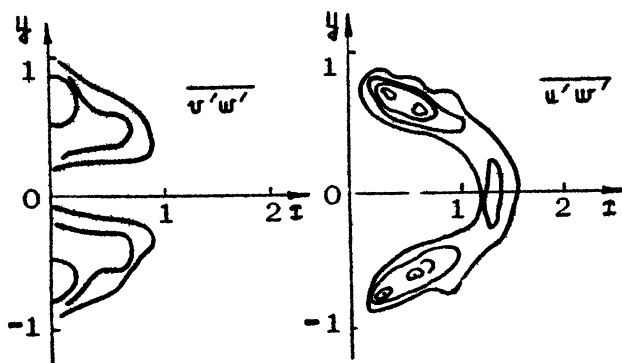
6. Разностные методы, используемые для аппроксимации уравнений гидродинамики, с успехом могут быть применены при решении кинетического уравнения для спектра поверхностного волнения. Пусть в какой-то области поверхности океана имеются отличные от нуля компоненты горизонтального вектора скорости $\vec{u} = \{u(x, y, t) \text{ и } v(x, y, t)\}$. Тогда возникают возмущения волнового вектора $\vec{k} = \{k_x, k_y\}$, описываемые хорошо известным уравнением

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \nabla (\epsilon(\vec{k}) + \vec{k} \cdot \vec{u}) = 0,$$

где для поверхностных волн $\epsilon = \sqrt{g|k|}$. Аппроксимировав его тем или иным способом (например, при помощи операторов повышенной точности $A_x^{-1} \Delta_x$ и $A_y^{-1} \Delta_y$), можно определить



Р и с. 5



Р и с. 6.

функции $k_x(x, y, t)$ и $k_y(x, y, t)$. Затем можно использовать модельное уравнение для спектральной плотности волнового действия $A(\vec{k}, \vec{r}, t)$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (c_{gx} + u) \frac{\partial A}{\partial x} + (c_{gy} + v) \frac{\partial A}{\partial y} = \Phi, \quad (15)$$

где групповые скорости $c_{gx} = \partial \epsilon / \partial k_x$, $c_{gy} = \partial \epsilon / \partial k_y$ являются известными функциями k , и следовательно x, y и t , а Φ — некоторый источник член, зависящий от выбранной модели. Если, как и в [11, 12], положить $\Phi = \omega(k_x, k_y) (A - A^2/A_0)$, где $A_0(k_x, k_y)$ — заданный "невозмущенный" спектр, то уравнение (15) становится уравнением переноса с нелинейной правой частью. При этом дифференцирование по x, y и t по существу в нем означает полное дифференцирование, т.е. дифференцирование с учетом того, что $A(k_x, k_y, x, y, t) = A(k_x(x, y, t), k_y(x, y, t), x, y, t) = A(x, y, t)$. Если бы в Φ учитывались диффузионные члены вида $\partial^2 A / \partial k_x^2$,

$\partial^2 A / \partial k_y^2$, то в левой части (15) следовало бы поставить вместо производных $\partial A / \partial t$, $\partial A / \partial \tau$ и $\partial A / \partial y$ их выражения, включающие частные производные $\partial A / \partial k_x$ и $\partial A / \partial \tau_y$. В этом случае размерность пространства независимых переменных увеличилась бы, что усложнило бы (но только с технической точки зрения!) процесс вычислений.

Расчеты, проведенные для конкретных функций $u(x, y, t)$ и $\pi(x, y, t)$ с использованием как операторов $A_x^{-1} \Delta_x$, $A_y^{-1} \Delta_y$, так и других способов дискретизации, выявили высокую эффективность таких алгоритмов.

7. В заключение отметим, что конечно-разностные методы могут быть успешно применены не только в нелинейном случае, но и для хорошо известного линейного уравнения распространения внутренних волн. Наибольший эффект удалось достигнуть, сочетая эти методы с преобразованием Фурье по одной из пространственных координат.

Разработанная методика отличается тем, что позволяет без существенного усложнения вести расчеты для произвольных зависимостей от времени и пространственных координат гидрологии среды, а также учитывать фоновые сдвиговые течения.

Л и т е р а т у р а

1. Толстых А.И. О методе численного решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса // ДАН СССР. 1973. Т.210. №1. С.48.
2. Толстых А.И. О неявных схемах повышенной точности для систем уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т.21. №2. С.339.
3. Каменкович В.М. К теории инерционно-вязкого пограничного слоя в двумерной модели океанических течений // Изв. АН СССР. ФАО. 1966. Т.2. №12. С.1274.
4. Каменкович В.М., Белоцерковский С.О., Пантелеев Н.С. К вопросу о численном моделировании баротропных течений, порожденных крупномасштабным полем ветра // Изв. ПОЛИМОДЕ / Институт океанологии АН СССР. М., 1985. С.61.
5. Harlow F., Welch J. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. of Fluids. 1965. V.8. N 12. P.2182.
6. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой

несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1975, Т.15, №1, С.197.

7. Дональдсон С.П. Расчет течений в атмосфере и изолированном вихре // Ракетная техника и космонавтика, 1972, Т.10, №1, С.4.

8. Даниленко А.Ю., Костин В.И., Толстых А.И. О неявном алгоритме расчета течений одnorodной и неодnorodной жидкости // Сообщ. по прикладной математике / ВЦ АН СССР, 1985.

9. Young J. Hirt C. Numerical calculation of internal wave motions // J. of Fluid Mech. 1972. V.56, N 2. P.256.

10. Гущин В.А. Метод расщепления для задач динамики неодnorodной вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1981, Т.21, №4, С.1003.

11. Hughes B.A. The effect of internal waves on surface wind waves. 2. Theoretical analysis // J. Geophys. Res. 1978. V.83. N C1. P.455.

12. Басович А.Я., Баханов В.В., Таланов В.И. Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность / ИПФ АН СССР, Горький, 1982, С.8.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Э.В.Теодорович

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания такого статистического явления, как гидродинамическая турбулентность, весьма удобным представляется метод характеристического функционала [1]. Знание характеристического функционала дает возможность с помощью операции функционального дифференцирования вычислять статистические моменты произвольных порядков, что эквивалентно заданию функции распределения в бесконечномерном функциональном пространстве амплитуд гидродинамических полей. Характеристический функционал в теории турбулентности впервые был введен Хопфом в 1952 г. [2], а более полно определяющий статистические характеристики случайного гидродинамического поля так называемый пространственно-временной характеристический функционал был введен Льюисом и Крейчнаном в 1962 г. [3]. Характеристический функционал является решением некоторого линейного уравнения в функциональных производных (уравнения Хопфа или уравнения Льюиса-Крейчнана).

Аналогом характеристического функционала в статистической физике и теории поля является производящий функционал [4-6].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Примем, что жидкость является несжимаемой и описывается системой уравнений Навье-Стокса. Характеристики гидродинамического поля — давление p и скорость U_i — будем задавать четырехкомпонентным вектором

$$\psi_{\alpha} = \{ \psi_0, \psi_i \} = \{ \rho, v_i \}$$

(греческие индексы изменяются от 0 до 3, а латинские — от 1 до 3). Координаты точек в пространстве-времени (а иногда и номер компоненты 4-вектора) будем обозначать цифрами согласно определению

$$\{ t_1, x_1^i, \alpha_1 \} = \{ 1, \alpha_1 \} = 1.$$

Как обычно, по повторяющимся индексам производится суммирование, а по повторяющимся координатам — интегрирование, т.е.

$$\sum_{\alpha_1=0}^3 \int dt_1 dx_1^i \eta_{\alpha_1}(t_1, x_1) \psi_{\alpha_1}(t_1, x_1) = \eta(1) \psi(1) = \eta \psi.$$

Систему уравнений Навье-Стокса запишем в виде

$$-L[\psi] + X + \hat{\eta} = -L^{(0)}(12)\psi(2) - \frac{1}{2} V(123)\psi(2)\psi(3) + X(1) + \hat{\eta}(1) = 0; \quad (1)$$

или более подробно:

$$-L_{\alpha\beta}^{(0)}(12)\psi_{\beta}(2) - \frac{1}{2} V_{\alpha\beta\gamma}(123)\psi_{\beta}(2)\psi_{\gamma}(3) + X_{\alpha}(1) + \hat{\eta}_{\alpha}(1) = 0, \quad (1a)$$

где линейная часть оператора Навье-Стокса имеет вид

$$L_{\alpha\beta}^{(0)}(12) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_i^{(1)} \\ \partial_i^{(1)} & (\partial_t^{(1)} - \nu_0 \Delta^{(1)}) \delta_{ij} \end{bmatrix} \delta(1-2), \quad (2)$$

а отличные от нуля матричные элементы ядра $V_{\alpha\beta\gamma}(123)$ задаются соотношением

$$V_{ijk}(123) = -[\delta_{ik}\partial_j^{(2)} + \delta_{ij}\partial_k^{(3)}] \delta(1-2)\delta(1-3) = V_{ijk}(132). \quad (3)$$

Здесь $X_{\alpha} = \{ X_0, X_i \}$ — плотности статистически задаваемых массовых и силовых источников, описываемых, например, Гауссовым распределением (модель Уайлда [7]); $\hat{\eta}_{\alpha} = \{ \hat{\eta}_0, \hat{\eta}_i \}$ — плотности регулярных (детерминированных) массовых и силовых источников.

Характеристическим функционалом случайного поля ψ называется величина

$$W[\eta] = \langle e^{i\eta\psi} \rangle,$$

где угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций индивидуальных состояний поля ψ . Статистические моменты определяются через характеристический функционал с помощью соотношений

$$\langle \psi(t) \dots \psi(N) \rangle = \frac{1}{W[\eta]} \frac{\delta}{i\delta\eta(t)} \dots \frac{\delta}{i\delta\eta(N)} W[\eta] \Big|_{\eta=0}$$

Для определения кумулянтов (называемых также семинвариантами или неприводимыми моментами) случайного поля ψ операции вариационного дифференцирования необходимо применять к логарифму характеристического функционала

$$\langle \psi(t) \dots \psi(N) \rangle_c = \frac{\delta}{i\delta\eta(t)} \dots \frac{\delta}{i\delta\eta(N)} \ln W[\eta] \Big|_{\eta=0}$$

Характеристический функционал системы, зависящий также от внешнего поля $\hat{\eta}$, можно определить соотношением

$$W[\eta, \hat{\eta}] = \langle e^{i\eta\psi} \rangle \int d[\psi] \mathcal{P}[\psi, \hat{\eta}] e^{i\eta\psi}, \quad (4)$$

где $\mathcal{P}[\psi, \hat{\eta}]$ — плотность вероятности состояния ψ при наличии внешнего поля $\hat{\eta}$, $d[\psi]$ — элементарный объем в бесконечномерном функциональном пространстве (мера Винера).

Характеристический функционал можно найти как решение уравнения в вариационных производных, однако его можно также непосредственно построить на основе динамических уравнений [8, 9].

Плотность вероятности $\mathcal{P}[\psi, \hat{\eta}]$ может быть выражена через среднее от δ -функционала:

$$\mathcal{P}[\psi, \hat{\eta}] = \langle \delta \{ \psi - \tilde{\psi}[\hat{\eta}] \} \rangle, \quad (5)$$

где $\tilde{\psi}[\hat{\eta}]$ — решение системы уравнений (1) (индивидуальная реализация состояния). Воспользуемся соотношением для δ -функционала

$$\delta \{ \psi - \tilde{\psi}[\eta] \} = \left| \frac{\delta L[\psi]}{\delta \psi} \right| \delta \{ -L[\psi] + X + \hat{\eta} \}, \quad (6)$$

обобщающим известное свойство δ -функции

$$\delta[f(x)] = \sum_i \delta(x-x_i) \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^{-1},$$

где x_i — корни уравнения $f(x) = 0$, и представлением δ -функционала в виде функционального разложения Фурье

$$\delta \{ -L[\psi] + X + \hat{\eta} \} = \int d[\hat{\psi}] \exp \left(i\hat{\psi} \{ -L[\psi] + X + \hat{\eta} \} \right). \quad (7)$$

С помсью (6), (7) функциональная плотность вероятности может быть записана в виде

$$\mathcal{F}[\psi, \hat{\eta}] = \int d[\hat{\psi}] \exp(i\hat{\psi}\{-L[\psi] + \hat{\eta}\}) \left| \frac{\delta L[\psi]}{\delta \psi} \right| \langle \exp(i\hat{\psi}X) \rangle. \quad (8)$$

Среднее от экспоненты в формуле (8) представляет собой характеристический функционал поля случайных сил X . Для Гауссова случайного поля характеристический функционал имеет вид

$$\langle \exp(i\hat{\psi}X) \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} \hat{\psi}(1) B(12) \hat{\psi}(2)\right], \quad (9)$$

где $B(12)$ — парная корреляционная функция случайных сил

$$B(12) = \frac{\delta}{i\delta\hat{\psi}(1)} \cdot \frac{\delta}{i\delta\hat{\psi}(2)} \ln \langle e^{i\hat{\psi}X} \rangle \Big|_{\hat{\psi}=0} = \langle X(1)X(2) \rangle - \langle X(1) \rangle \langle X(2) \rangle.$$

Таким образом, характеристический функционал представим в виде двукратного континуального интеграла по полям

$$W[\eta, \hat{\eta}] = \int d[\psi] d[\hat{\psi}] \exp\left\{iS[\psi, \hat{\psi}] + i\eta\psi + i\hat{\eta}\hat{\psi}\right\} \left| \frac{\delta L}{\delta \psi} \right|, \quad (10)$$

где

$$S[\psi, \hat{\psi}] = -\hat{\psi}L[\psi] + \frac{i}{2} \hat{\psi}(1)B(12)\hat{\psi}(2). \quad (11)$$

Можно показать, что якобиан функционального преобразования (6) соответствует учету несвязных диаграмм (см. ниже), дающих вклад только в величину нормировочного множителя. Таким образом, в формуле (10) можно формально положить $|\delta L/\delta \psi| = 1$ [8,9]. Несколько иным способом обоснование этого дано в работе [10].

Записанный в виде двукратного континуального интеграла характеристический функционал (10) совпадает с производящим функционалом некоторой квантовой теории полей $\psi, \hat{\psi}$, задаваемых действием $S[\psi, \hat{\psi}]$ согласно (11), и тем самым статистическая задача для системы уравнений Навье–Стокса при наличии Гауссовой случайной силы оказывается эквивалентной задаче теории поля. Этот результат является частным случаем широко применяемого в настоящее время формализма Мартина–Сиджиа–Роуза [11]. Данные авторы в 1973 г. предложили новый способ формулировки статистической динамики для удовлетворяющей нелинейному уравнению классической случайной переменной ψ с помощью введения второго вспомогательного поля (в наших обозначениях $\hat{\psi}$), не коммутирующего с полем ψ . Это дает возможность применять технику, развитую для изучения квантованных полей с широким

использованием метода диаграмм и теории перенормировок.

На основе формализма квантовой теории поля можно легко вывести уравнения для характеристического функционала, получаемые обычно более сложным путем [1-3]. Используя инвариантность континуального интеграла относительно замены переменных типа функционального сдвига $\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi} + \hat{\eta}$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[\eta, \hat{\eta}]}{\delta \hat{\eta}(1)} &= i \int d[\psi] d[\hat{\psi}] \left\{ \frac{\delta S[\psi, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}(1)} + \hat{\eta}(1) \right\} \exp(iS + i\eta\psi + i\hat{\eta}\hat{\psi}) = \\ &= i \left\{ \frac{\delta S[\psi, \hat{\psi}]}{\delta \hat{\psi}(1)} \right\}_{\substack{\psi = \delta/i\delta\eta \\ \hat{\psi} = \delta/i\delta\hat{\eta}}} + \hat{\eta}(1) \Big\} W[\eta, \hat{\eta}] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) представляет собой обобщение уравнения в функциональных производных Льюиса-Крейчага [3] при наличии Гауссовой случайной силы. Подобное уравнение было получено в работе [12] с помощью формулы Фуруцу-Новикова (см. также [13]). Беря последовательно вариационные производные по η от уравнения (12) и затем положив $\eta = 0$, получим цепочку уравнений Келлера-Фридмана.

Аналогичным образом может быть выведено уравнение для поля $\hat{\psi}$ из условия инвариантности интеграла относительно функционального сдвига $\psi \rightarrow \psi + \eta$:

$$\left\{ \frac{\delta S[\psi, \hat{\psi}]}{\delta \psi(1)} \right\}_{\substack{\psi = \delta/i\delta\eta \\ \hat{\psi} = \delta/i\delta\hat{\eta}}} + \eta(1) \Big\} W[\eta, \hat{\eta}] = 0. \quad (12a)$$

Отметим, что входящие в уравнения (12), (12a) функции η , $\hat{\eta}$ играют роль внешних силовых источников соответственно для полей $\hat{\psi}$ и ψ . При этом физическим является поле ψ и его источник $\hat{\eta}$, а поле $\hat{\psi}$ и его источник η являются вспомогательными. Всегда подразумевается, что после выполнения вариационных дифференцирований берется $\eta = 0$, тогда как $\hat{\eta}$ следует положить равным нулю только при отсутствии детерминированного внешнего поля.

Необходимо подчеркнуть, что континуальный интеграл (называемый также функциональным интегралом, или фейнмановским интегралом по траекториям), определяющий характеристический функционал согласно формуле (10), не является строго обоснованным понятием, к тому же, не существует регулярной процедуры вычисления континуальных интегралов. Строгое математическое определение и обоснование понятия континуального интеграла заключается в доказательстве существования

интегральной меры в функциональном пространстве. Хотя подобного доказательства в общем случае не получено, тем не менее в практических приложениях метод континуального интеграла оказывается очень удобным. Это связано с тем, что при проведении расчетов часто вообще не требуется вычислять континуальный интеграл, а достаточно знать лишь некоторые правила обращения с ним, подобно тому, как мы поступаем при использовании аппарата обобщенных функций (см., например, приведенный вывод уравнения Льюиса-Крейчана). Эти правила оказываются довольно простыми и часто схожими с соответствующими правилами для обычного интеграла, например: существование функционального преобразования Фурье, интегрирование по частям, определение δ -функционала, замена переменных, повторное интегрирование и др. Все эти свойства и могут быть наложены в основу определения понятия континуального интеграла [14]. Операции с континуальными интегралами дают возможность существенно упростить выкладки; например, переход от одного функционального базиса к другому представляет собой просто замену переменных интегрирования, осуществляемую по правилам для обычных интегралов.

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА

Представление характеристического функционала в виде континуального интеграла дает возможным образом получить некоторые общие соотношения между корреляционными функциями и функциями Грина (типа уравнений Дайсона). Это представление также является основой построения ряда теории возмущений для интересующих нас физических величин [4, 6, 15, 16].

Обычно в гидродинамической теории возмущений представление для поля скорости в виде функционального ряда по внешней силе строится с помощью многократного итерирования уравнения Навье-Стокса. Статистические моменты получаются в результате перемножения полученных рядов с последующим почленным усреднением по внешней случайной силе [7, 13, 17]. При таком подходе уравнения для корреляционных функций и функций Грина получаются в результате частичного суммирования некоторых бесконечных подпоследовательностей ряда теории возмущений [1, 7, 13].

Для вычисления характеристического функционала по теории возмущений выделим в интеграле действия (11) квадратичную

по полям $\psi, \hat{\psi}$ часть, т.е. представим действие в виде двух слагаемых $S = S^{(0)} + \lambda S^{(1)}$, где

$$S^{(0)}[\psi, \hat{\psi}] = -\hat{\psi}(1) L^{(0)}(12) \psi(2) + \frac{i}{2} \hat{\psi}(1) B(12) \hat{\psi}(2), \quad (13)$$

$$S^{(1)}[\psi, \hat{\psi}] = -\frac{1}{2} \hat{\psi}(1) V(123) \psi(2) \psi(3),$$

λ — формальный параметр разложения (в конечном результате следует положить $\lambda = 1$). Тогда характеристический функционал может быть записан в виде

$$W[\eta, \hat{\eta}] = \text{etr} \left\{ i \lambda S^{(1)}[\delta/i\delta\eta, \delta/i\delta\hat{\eta}] \right\} \int d[\psi] d[\hat{\psi}] \text{etr} \left\{ i S^{(0)}[\psi, \hat{\psi}] + i\eta\psi + i\hat{\eta}\hat{\psi} \right\} = \text{etr} \left\{ i \lambda S^{(1)}[\delta/i\delta\eta, \delta/i\delta\hat{\eta}] \right\} W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}]. \quad (14)$$

Характеристический функционал Гауссова типа $W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}]$ вычисляется с помощью функциональных сдвигов $\psi \rightarrow \psi + \varphi$, $\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi} + \hat{\varphi}$ и выбора $\varphi, \hat{\varphi}$ из условия обращения в нуль линейных по $\psi, \hat{\psi}$ членов в показателе экспоненты. В результате найдем

$$W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}] = W^{(0)}[0, 0] \text{etr} \left[i\eta G^{(0)} \hat{\eta} - \frac{1}{2} \eta C^{(0)} \eta \right], \quad (15)$$

где $C^{(0)} = G^{(0)} \hat{G}^{(0)}$; $G^{(0)}$ — функция Грина для линейной части оператора Навье—Стокса $L^{(0)}$, определенного формулой (2);

$$G^{(0)}(12) = \begin{bmatrix} -(\partial_t - \nu_0 \Delta) \Delta^{-1} & \partial_j \Delta^{-1} \\ \partial_i \Delta^{-1} & \rho_{ij} (\partial_t - \nu_0 \Delta)^{-1} \end{bmatrix} \delta(1-2), \quad (16)$$

$\rho_{ij} = \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \Delta^{-1}$ — оператор поперечного проектирования. Отметим, что функция $G^{(0)}$ (12) отлична от нуля только при $t_1 > t_2$, т.е. удовлетворяет принципу причинности (является запаздывающей).

Следует указать, что используемый нами способ рассмотрения давления отличается от традиционно применяемого. Обычно давление исключается с помощью условия несжимаемости и предположения, что внешние силовые поля являются непотенциальными, т.е. $X_0 = \hat{\eta}_0 = 0$, $\partial_i X_i = \partial_i \hat{\eta}_i = 0$. Тогда исключение давления сводится к вставке оператора поперечного проектирования перед нелинейным членом в уравнение Навье—Стокса. Однако в случае несоленоидальных внешних воздействий (например, при наличии источников массы, моделирующих граничные

условия в задаче обтекания тел) подобная процедура неприменима.

Из формулы (15) следует, что характеристический функционал $W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}]$ соответствует Гауссову распределению, задаваемому двумя функциями:

парным коррелятором

$$G^{(0)}(12) = \frac{\delta}{i\delta\eta(2)} \frac{\delta}{i\delta\eta(1)} \ln W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0} = \langle \psi(1)\psi(2) \rangle_0 = \langle \psi(1) \rangle_0 \langle \psi(2) \rangle_0 \quad (17)$$

и функцией Грина (пропагатором)

$$-iG^{(0)}(12) = \frac{\delta}{i\delta\hat{\eta}(2)} \frac{\delta}{i\delta\hat{\eta}(1)} \ln W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0} = \langle \psi(1)\hat{\psi}(2) \rangle_0, \quad (18)$$

где $\langle \dots \rangle_0$ — среднее по Гауссову распределению.

Вычисление средних $\langle F\{\psi, \hat{\psi}\} \rangle$ может быть сведено к вычислению средних по Гауссову распределению согласно формуле

$$\begin{aligned} \langle F\{\psi, \hat{\psi}\} \rangle &= \frac{F\{\delta/i\delta\eta, \delta/i\delta\hat{\eta}\} W[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0}}{W[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0}} = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} F\{\delta/i\delta\eta, \delta/i\delta\hat{\eta}\} \{S^{(n)}[\delta/i\delta\eta, \delta/i\delta\hat{\eta}]\}^n W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \{S^{(n)}[\delta/i\delta\eta, \delta/i\delta\hat{\eta}]\}^n W^{(0)}[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \langle F\{\psi, \hat{\psi}\} \{S^{(n)}[\psi, \hat{\psi}]\}^n \rangle_0 / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \langle \{S^{(n)}[\psi, \hat{\psi}]\}^n \rangle_0. \quad (19) \end{aligned}$$





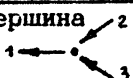

Для Гауссова распределения среднее от произведения нечетного числа функций $\psi, \hat{\psi}$ равно нулю, а для четного числа функций равно сумме произведений всевозможных попарных средних. Это утверждение, известное в теории поля под названием теоремы Вика, можно доказать с помощью дифференцирования характеристического функционала Гауссова случайного процесса. Отметим, что не любые попарные средние являются допустимыми, так, например, $\langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle_0 = 0$. При наличии внешнего поля ($\hat{\eta} \neq 0$) также отличным от нуля будет среднее:

$$\langle \psi(1) \rangle_0 = \delta/i\delta\eta(1) \ln W^{(0)} \Big|_{\eta=0} = G^{(0)}(12)\hat{\eta}(2).$$

Нахождение отдельных членов ряда теории возмущений в формуле (19) значительно облегчается с помощью сопоставления каждому члену ряда определенных графических символов — диаграмм Фейнмана. Диаграммы Фейнмана дают возможность

интерпретировать на языке квантовой теории поля различные множители и слагаемые как процессы распространения и превращения квантов поля.

Правила сопоставления множителей и диаграмм представлены в таблице.

Множитель	Графический символ	Полевая интерпретация
$\psi(1)$		Уничтожение кванта в точке 1.
$\hat{\psi}(1)$		Рождение кванта в точке 1.
$G^{(0)}(12)$	пропагатор 	Распространение кванта из точки 2 в точку 1.
$C^{(0)}(12)$	коррелятор 	Порождение пары квантов внешним случайным полем.
$V(123)$	вершина 	Превращение пары квантов в один.
$\hat{\eta}(1)$		Порождение кванта внешним регулярным полем.

Каждое слагаемое ряда, пропорциональное $(i\lambda)^n$, сопоставляется с диаграммой, состоящей из n вершин, соединенных между собой линиями корреляторов и пропагаторов таким образом, что в каждую вершину входят две стрелки и выходит одна. С усредненными полями $\psi, \hat{\psi}$ сопоставляются выходящие из диаграммы или входящие в нее внешние линии. Часть линий может выходить из кружков, соответствующих источникам внешнего регулярного поля. По всем координатам вершин производится интегрирование, а по индексам — суммирование. Слагаемые ряда, отличающиеся перестановкой вершин (таких членов $n!$) или индексами входящих линий (таких членов два на каждую вершину), дают одинаковый вклад. Поэтому учет только топологически различных диаграмм сводится к отбрасыванию

множителя $n!$ от разложения экспоненты в формуле (19) и, если перестановка концов входящих линий не меняет структуры диаграммы, к отбрасыванию множителя $1/2$ при вершине.

Не останавливаясь на различных свойствах и примерах диаграммной техники (см. [1,4,6,9,13,16]), отметим только некоторые специфические свойства полученных диаграмм.

Свойство 1. При рассмотрении различных диаграмм следует ограничиться только связными диаграммами, т.е. такими, все вершины которых можно обойти при движении по линиям пропагаторов или корреляторов. Вклад всех несвязных диаграмм выделяется в виде множителя перед вкладом связных диаграмм, который сокращается с соответствующим множителем в знаменателе формулы (19).

Свойство 2. Функция Грина не определена при совпадении времен, где она терпит разрыв. Поэтому при рассмотрении цикла вида



имеется неопределенность, так как в вершине $V(123)$ все времена совпадают. Можно доопределить подобный цикл, введя бесконечно малое время запаздывания при превращении двух квантов в один, т.е. в $V(123)$ положить $t_1 = t_2 + 0 = t_3 + 0$. Тогда рассматриваемый цикл дает нулевой вклад и подобные диаграммы следует исключить из рассмотрения [9].

Свойство 3. Диаграмма, содержащая замкнутый цикл из одних пропагаторных линий (запаздывающих функций), тождественна нулю.

Свойство 4. Любая диаграмма, или часть диаграммы, содержащая только входящие линии, равна нулю [9]. Следствием этого является равенство нулю среднего, содержащего только поля $\hat{\psi}$ (это вытекает также из формализма Мартина-Сиджиа-Роуза [11]).

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ШВИНГЕРА И ДАЙСОНА

В предыдущем разделе было показано, как с помощью теории возмущений вычислить характеристический функционал, по которому можно найти средние значения и корреляционные функции различных порядков. При этом средние значения, функции отклика и корреляции записываются в виде бесконечных рядов по степеням формального параметра разложения λ . Однако

представляет интерес получить систему уравнений, непосредственно связывающих между собой средние значения, корреляции и функции отклика, не опираясь при этом на теорию возмущений. Попытки получить такие уравнения на основе теории возмущений путем частичного суммирования диаграммных рядов [7,18] дали правильные результаты только в низших порядках теории возмущений [11].

Согласно определению средних

$$\Phi(1) = \langle \psi(1) \rangle = \frac{1}{W[\eta, \hat{\eta}]} \frac{\delta W}{i\delta\eta(1)} = \frac{\delta}{i\delta\eta(1)} \ln W[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0},$$

и аналогично

$$\hat{\Phi}(1) = \langle \hat{\psi}(1) \rangle = \frac{\delta}{i\delta\hat{\eta}(1)} \ln W[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0}.$$

На языке фейнмановских диаграмм $\Phi(1)$ и $\hat{\Phi}(1)$ описываются суммой всевозможных диаграмм, содержащих соответственно одну внешнюю выходящую или одну внешнюю входящую линии, при этом согласно свойству 4 имеем $\hat{\Phi}(1) = 0$. Графическое изображение этих величин следующее:

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \bullet \\ \hat{\Phi}(1) &= \bullet \longrightarrow \overset{1}{\bullet} \end{aligned}$$

Для корреляционных функций и функций Грина (корреляторов и пропагаторов) имеем

$$\zeta(12) = \frac{\delta}{i\delta\eta(1)} \frac{\delta}{i\delta\eta(2)} \ln W[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{W} \frac{\delta}{i\delta\eta(1)} \frac{\delta}{i\delta\eta(2)} W - \quad (20)$$

$$- \frac{1}{W^2} \frac{\delta W}{i\delta\eta(1)} \frac{\delta W}{i\delta\eta(2)} = \langle \psi(1)\psi(2) \rangle - \Phi(1)\Phi(2),$$

$$\frac{1}{i} \hat{\zeta}(12) = \frac{\delta}{i\delta\hat{\eta}(2)} \frac{\delta}{i\delta\eta(1)} \ln W[\eta, \hat{\eta}] \Big|_{\eta=0} = \langle \psi(1)\hat{\psi}(2) \rangle. \quad (21)$$

Функции $\zeta(12)$ соответствует сумма всевозможных диаграмм заканчивающихся двумя входящими в точки 1 и 2 линиями, а функции $\hat{\zeta}(12)$ - сумма диаграмм с выходящей из точки 2 и входящей в точку 1 линиями. В отличие от введенных ранее коррелятора $\zeta^{(0)}$ и пропагатора $\hat{\zeta}^{(0)}$, описывающих парные корреляции и отклик при отсутствии нелинейных взаимодействий между модами, функции ζ и $\hat{\zeta}$ описывают корреляции и отклик при учете нелинейных межмодовых связей; в соответ-

вин с принятой в теории поля терминологией их следует называть полным коррелятором и полным пропагатором. На графиках будем изображать эти величины толстыми линиями:

$$\begin{aligned} C(12) &= \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} \\ G(12) &= \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} \end{aligned}$$

Уравнение Льюиса-Крейчмана для характеристического функционала (12) при использовании для $S[\psi, \hat{\psi}]$ явного выражения (11) имеет вид

$$\left\{ -L^{(0)}(12) \frac{\delta}{i\delta\eta(2)} + iB(12) \frac{\delta}{i\delta\hat{\eta}(2)} - \frac{1}{2} V(123) \frac{\delta}{i\delta\eta(2)} \frac{\delta}{i\delta\eta(3)} + \hat{\eta}(1) \right\} W[\eta, \hat{\eta}] = 0. \quad (22)$$

После деления (22) на $W[\eta, \hat{\eta}]$ и перехода к пределу $\eta \rightarrow 0$ с учетом равенства $\hat{\psi} = 0$ получим

$$L^{(0)}(12)\Phi(2) + \frac{1}{2} V(123) [\Phi(2)\Phi(3) + C(23)] = \hat{\eta}(1), \quad (23)$$

или

$$\Phi(1) + \frac{1}{2} G^{(0)}(11') V(1'23) [\Phi(2)\Phi(3) + C(23)] = G^{(0)}(11') \hat{\eta}(1'). \quad (23a)$$

Формула (23) представляет собой уравнение для среднего течения с учетом Рейнольдсовых напряжений.

Разделив (22) на W и выполнив вариационное дифференцирование по $\hat{\eta}$ и переход к пределу $\eta \rightarrow 0$, найдем

$$L^{(0)}(11') G(1'2) + V(1'34) \left[\Phi(3) + \frac{1}{2} \frac{\delta}{i\delta\eta(3)} \right] G(42) = \delta(1-2) \quad (24)$$

(при получении уравнения (24) было использовано соотношение $\langle \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle = 0$, вытекающее из диаграммного свойства 4).

Аналогичным образом из уравнения (22) после деления на W и дифференцирования по η получим

$$L^{(0)}(11') C(1'2) + V(1'34) \left[\Phi(3) + \frac{1}{2} \frac{\delta}{i\delta\eta(3)} \right] C(42) = \delta(11') G(21'). \quad (25)$$

Систему уравнений (23)–(25), содержащую вариационные производные по вспомогательному полю η , будем называть уравнениями Швингера, так как они аналогичны соответствующим уравнениям теории квантованных полей [5] (см. также [19]).

Для того чтобы исключить производные по "нефизическому" вспомогательному внешнему полю η и получить соотношения между реально наблюдаемыми величинами, перейдем к новым функциональным аргументам Φ и $\hat{\Phi}$, имеющим смысл средних

значений гидродинамических полей. С этой целью выполним функциональное преобразование Лежандра посредством введения нового характеристического функционала

$$\Psi[\varphi, \hat{\varphi}] = \ln W[\eta, \hat{\eta}] - i\eta\varphi - i\hat{\eta}\hat{\varphi}. \quad (26)$$

Введенный таким образом характеристический функционал $\Psi[\varphi, \hat{\varphi}]$ имеет смысл действия для средних полей $\varphi, \hat{\varphi}$. Вариационные производные функционала $\Psi[\varphi, \hat{\varphi}]$ по полям φ и $\hat{\varphi}$ дают сильно связанные (одночастично неприводимые) диаграммы, т.е. такие диаграммы, которые нельзя разбить на две несвязанные части разрывом одной линии. Внешние источники $\eta, \hat{\eta}$ выражаются через новые переменные с помощью соотношений

$$\frac{\delta\Psi}{i\delta\varphi(t)} = -\eta(t), \quad \frac{\delta\Psi}{i\delta\hat{\varphi}(t)} = -\hat{\eta}(t). \quad (27)$$

Вычисляя смешанную производную от функционала Ψ с учетом (27) и условия $\delta\hat{\varphi}(t)/\delta\hat{\eta}(t) = i\langle\hat{\psi}(t)\hat{\psi}(t)\rangle = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2\Psi}{\delta\hat{\eta}(t)\delta\hat{\varphi}(2)} &= \left[\frac{\delta\varphi(t)}{\delta\hat{\eta}(t)} \frac{\delta}{\delta\varphi(t')} + \frac{\delta\hat{\varphi}(t')}{\delta\hat{\eta}(t)} \frac{\delta}{\delta\hat{\varphi}(t')} \right] \frac{\delta\Psi}{i\delta\hat{\varphi}(2)} = \\ &= \frac{\delta^2\Psi}{\delta\varphi(t')\delta\hat{\varphi}(2)} G(t') = -\frac{\delta\hat{\eta}(2)}{\delta\hat{\eta}(t)} = -\delta(1-2). \end{aligned} \quad (28)$$

Из формулы (28) следует

$$\frac{\delta^2\Psi}{\delta\varphi(t)\delta\hat{\varphi}(2)} = -G^{-1}(2t), \quad (29)$$

где $G^{-1}(2t)$ — обратная функция Грина, определяемая соотношением

$$G^{-1}(2t')G(t') = \delta(1-2).$$

Аналогичным образом с помощью вычисления

$$\delta^2\Psi/\delta\eta(t)\delta\hat{\varphi}(2) = -\delta\hat{\eta}(2)/\delta\eta(t) = 0$$

можно получить

$$\frac{\delta^2\Psi}{i\delta\hat{\varphi}(1)\delta\hat{\varphi}(2)} = G^{-1}(11')G^{-1}(22')G(1'2'). \quad (30)$$

Введем еще вершины Γ , $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\tilde{\Gamma}}$, описываемые соответственно диаграммами с двумя входящими и одной выходящей, одной входящей и двумя выходящими и тремя выходящими линиями (диаграмма с тремя входящими линиями тождественно равна нулю согласно свойству 4):

$$\begin{aligned} \Gamma(1,2,3) &= -\frac{\delta^3 \Psi}{i \delta \hat{\Phi}(1) \delta \hat{\Phi}(2) \delta \hat{\Phi}(3)} = \frac{\delta G^{-1}(12)}{\delta \hat{\Phi}(3)} = \frac{\delta G^{-1}(13)}{\delta \hat{\Phi}(2)} = \text{diagram} \\ \tilde{\Gamma}(1,2,3) &= -\frac{\delta^2 \Psi}{i \delta \hat{\Phi}(1) i \delta \hat{\Phi}(2) \delta \hat{\Phi}(3)} = \frac{\delta G^{-1}(23)}{i \delta \hat{\Phi}(1)} = \frac{\delta G^{-1}(13)}{i \delta \hat{\Phi}(2)} = \text{diagram} \\ &= -\frac{\delta}{i \delta \hat{\Phi}(3)} [G^{-1}(11') G^{-1}(22') C(1'2')] = \text{diagram} \\ \tilde{\tilde{\Gamma}}(1,2,3) &= -\frac{\delta^3 \Psi}{i \delta \hat{\Phi}(1) i \delta \hat{\Phi}(2) i \delta \hat{\Phi}(3)} = \text{diagram} \end{aligned} \quad (31)$$

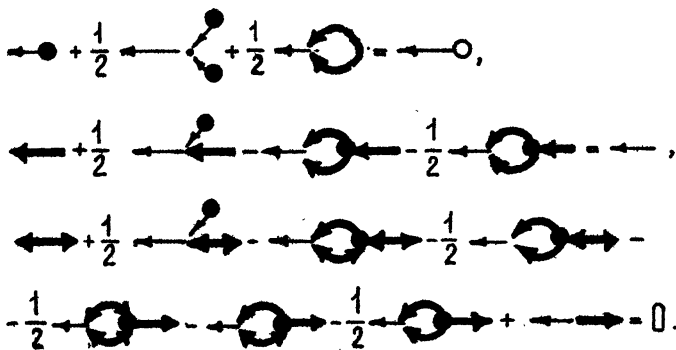
В низшем приближении теории возмущений $\Gamma(1,2,3) = V(12,3)$, $\tilde{\Gamma} = \tilde{\tilde{\Gamma}} = 0$. На необходимость учета всех трех вершин при построении диаграммных уравнений было указано в работе [11], однако раньше вершина $\tilde{\Gamma}$ уже рассматривалась в работе [20].

Выражая входящие в уравнения Швингера (24), (25) вариационные производные $\frac{\delta}{i \delta \eta(3)} G(4,2)$ и $\frac{\delta}{i \delta \eta(3)} C(4,2)$ через вариационные производные Ψ по Φ , $\hat{\Phi}$, приходим к системе уравнений Дайсона для полных корреляторов и пропагаторов:

$$\begin{aligned} G(12) + G^{(0)}(11') V(1'34) [\Phi(3) \delta(4-2') - G(44') C(33') \Gamma(4', 3'2') - \\ - \frac{1}{2} G(44') G(33') \tilde{\Gamma}(3'4', 2')] G(2'2) = G^{(0)}(12); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} C(12) + G^{(0)}(11') V(1'34) [\Phi(3) \delta(4-2') - G(44') C(33') \Gamma(4', 3'2') - \\ - \frac{1}{2} G(44') G(33') \tilde{\Gamma}(3'4', 2')] C(2'2) - G^{(0)}(11') V(1'34) \times \\ \times \left[\frac{1}{2} C(44') C(33') \Gamma(2', 3'4') + G(44') C(33') \tilde{\Gamma}(2'4', 3') + \frac{1}{2} G(44') G(33') \tilde{\tilde{\Gamma}}(2'3'4') \right] \times \\ \times G(22') - G^{(0)}(11') V(1'2') G(22') = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

На языке диаграмм Фейнмана уравнения (23а), (32), (33) для средних значений поля, а также полных пропагаторов и корреляторов представляются следующим образом:



Отметим, что диаграммные уравнения для \bar{G} и \bar{C} имеют конечный вид и только уравнения для вершин имеют вид бесконечных рядов. Этот результат не согласуется с рассматриваемым как некоторое принципиальное обстоятельство утверждением об отсутствии уравнений конечного вида для \bar{G} и \bar{C} ([13], с. 147).

Для выявления смысла полученных уравнений введем новую величину $\Sigma^{(1)}$ (12), которая в теории поля называется массовым оператором или оператором собственной энергии:

$$\Sigma^{(1)}(12) = V(134) [G(44)C(33)G(4'3'2) + \frac{1}{2}G(44')G(33')G(3'4'2) - \Phi(3)\delta(4-2)]. \quad (34)$$

Тогда уравнение Дайсона (32) запишется в виде

$$G(12) - G^{(0)}(11)\Sigma^{(1)}(1'2')G(2'2) = G^{(0)}(12). \quad (35)$$

Умножив это уравнение слева на $G^{(0)-1}$ и справа на G^{-1} , получим

$$G^{-1}(12) = G^{(0)-1}(12) - \Sigma^{(1)}(12).$$

Величина $G^{(0)-1}$ является линейной частью оператора Навье-Стокса $L^{(0)}$, которая согласно (2) для компонент $L_{ij}^{(0)}$ имеет вид

$$L_{ij}^{(0)}(12) = \delta_{ij} \partial_{t_1} \delta(1-2) - \Sigma_{ij}^{(0)}(12), \quad \Sigma_{ij}^{(0)}(12) = \delta_{ij} v_0 \Delta^{(1)} \delta(1-2).$$

В результате обратный полный пропагатор представляется в виде

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij}^{-1}(12) &= \delta_{ij} \partial_{t_1} \delta(1-2) - \Sigma_{ij}^{(0)}(12) - \Sigma_{ij}^{(1)}(12) = \\ &= \delta_{ij} \partial_{t_1} \delta(1-2) - \tilde{\Sigma}_{ij}(12). \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, согласно (36) учет нелинейного межмодового взаимодействия ведет к замене молекулярной вязкости $\Sigma_{ij}^{(0)}(12)$ на эффективную вязкость $\tilde{\Sigma}_{ij}(12)$, которая описывает переход от более упорядоченного крупномасштабного

движения к менее упорядоченному мелкомасштабному движению за счет переноса импульса как молекулярным движением, так и турбулентными пульсациями, а также перенос импульса средним течением. Обоснование члена $\Sigma^{(1)}$ как турбулентной вязкости приведено в работе [20]. При определенных предположениях величина $\tilde{\Sigma}$ переходит в так называемую "полную вязкость", введившуюся Эдвардсом [21].

Аналогичным образом введем величину $B^{(1)}$ (12) с помощью соотношения

$$B^{(1)}(12) = V(134) \left[\frac{1}{2} [C(44')C(33')\Gamma(2,3'4') + G(44')C(33')\tilde{\Gamma}(24',3') + \frac{1}{2} G(44')G(33')\tilde{\Gamma}(23'4')] \right]. \quad (37)$$

Тогда уравнение Дайсона (33) запишется в виде

$$G(12) - G^{(0)}(11')\Sigma^{(1)}(1'2') - G^{(0)}(11')B^{(1)}(1'2')G(22') - G^{(0)}(11')B(1'2')G(22') = 0. \quad (38)$$

Умножив это уравнение слева на $G^{(0)-1}$, справа на G^{-1} и воспользовавшись соотношением (36), получим

$$G^{-1}(11')G^{-1}(22') [G(1'2')] = B^{(1)}(12) + B(12) = \tilde{B}(12). \quad (39)$$

Отсюда следует, что вторым следствием учета нелинейности является замена корреляционной функции внешних случайных сил $B(12)$ на эффективную корреляционную функцию, описывающую подкачку энергии к данной моде как внешним случайным полем, так и нелинейными взаимодействиями с остальными модами [20]. Аналогом этой величины в теории Эдвардса [21] является так называемая "диффузионная константа", задающая турбулентный приток энергии к данной моде.

На языке теории поля замена $\Sigma^{(0)} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ и $B \rightarrow \tilde{B}$ соответствует перенормировке "затравочной" (молекулярной) вязкости и величины внешних случайных сил.

Система уравнений (23), (31)–(33) является точной. Получение этих уравнений не связано с теорией возмущений и не предполагает пространственной и временной однородности. В приближении $\Gamma = V$, $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = 0$ эти уравнения переходят в уравнения приближения прямых взаимодействий [22], при определенных предположениях об уравнении для Γ можно получить теории Уайлда [7] и Эдвардса [21]. К сожалению, данная система уравнений не является замкнутой, так как входящая в систему вершина $\tilde{\Gamma}$ выражается через вариационную производную по "нефизическому" среднему полю Φ . Система уравнений может быть приближенно замкнута с помощью представления $\Gamma, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}$ в виде рядов теории возмущений.

Отметим, что уравнения Дайсона обладают инвариантностью относительно мультипликативных преобразований вида

$$\begin{aligned}
 G &\rightarrow Z^{-1}G, & \Gamma &\rightarrow Z_b^{-1/2} Z^2 \Gamma, \\
 \tilde{G} &\rightarrow Z_b \tilde{G}, & \tilde{\Gamma} &\rightarrow Z_b^{1/2} Z \tilde{\Gamma}, \\
 C &\rightarrow Z_b Z^{-2} C, & \tilde{C} &\rightarrow Z_b^{3/2} \tilde{C}, \\
 \Phi &\rightarrow Z_b^{1/2} Z^{-1} \Phi.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Величины $G^{(0)}$ и V при этом преобразуются как G и Γ . Обычно система уравнений Дайсона в теории поля инвариантна относительно трехпараметрической группы мультипликативных преобразований; однако, в связи с наличием некоторого тождества Уорда, вытекающего из галилеевской инвариантности, число независимых параметров сокращается до двух аналогично тому, как это имеет место в квантовой электродинамике при учете требования калибровочной инвариантности.

5. УЛУЧШЕННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Простейшим методом решения полученной системы уравнений является использование теории возмущений, основывающейся на разложении по величине нелинейного взаимодействия между модами согласно формуле (14). Параметром разложения при этом является отношение величины нелинейных инерционных сил к величине вязких сил, т.е. число Рейнольдса, которое в случае развитой турбулентности является очень большим. В соответствии с этим следует искать иной параметр разложения, не связанный с внешними параметрами системы, а являющийся внутренним параметром, определяемым из решения некоторой самосогласованной задачи (такой подход известен в теории поля и в теории критических явлений под названием "бутстрапа").

Улучшенная теория возмущений заключается в отыскании разложения в ряды не самих искомым величин G и C , а связанных с ними соотношениями (33), (39) величин $\tilde{\Sigma}$ и \tilde{V} , что подразумевает фактическое суммирование некоторой бесконечной подпоследовательности рядов теории возмущений для G и C .

Второй особенностью улучшенной теории возмущений является использование разложений для $\tilde{\Sigma}$ и \tilde{V} не в терминах первоначальных (затравочных) величин $\Sigma^{(0)}$ и V , а в терминах перенормированных величин. Как было показано выше, учет нелинейных взаимодействий ведет к перенормировке вязкости,

т.е. к замене молекулярной вязкости $\Sigma^{(0)}$ на турбулентную вязкость $\Sigma^{(1)} \gg \Sigma^{(0)}$. Другим проявлением нелинейного междоимового взаимодействия является перенормировка описывающих приток энергии к данной моде случайных сил, т.е. замена корреляционной функции внешних случайных сил δ на корреляционную функцию эффективных случайных сил δ^* . Именно из указанных перенормированных величин и строится фактический параметр разложения, называемый также эффективным числом Рейнольдса или числом Рейнольдса, определенным по турбулентной вязкости [20,23]. Эффективное число Рейнольдса для развитой турбулентности, когда приток энергии к данной моде за счет эффективных случайных сил компенсируется работой эффективных сил вязкости, оказывается в инерционном интервале величиной порядка единицы [23].

Отметим, что предпринимавшиеся ранее реторические попытки решения задачи турбулентности (Крейчман [22], Уайлд [7], Эдвардс [21], Ли [18]), основанные на учете только одной вершины $\Gamma(1,2,3) = -\delta \tilde{\Sigma}(12)/\delta \Phi(3)$ и пренебрежении вер-

шинами $\tilde{\Gamma}(1,2,3) = \frac{\delta \delta(12)}{\delta \Phi(3)}$ и $\tilde{\Gamma}(1,2,3)$, представляются неудовлетворительными, так как вклады вершин $\tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}$ в величины $\tilde{\Sigma}, \delta$ оказываются сравнимыми с вкладом вершины Γ , т.е. при эффективном числе Рейнольдса порядка единицы имеет место соотношение $\Gamma \sim \tilde{\Gamma}$ и $\tilde{\Gamma} \sim \tilde{\Gamma}$.

Дальнейшее улучшение результатов теории возмущений может быть достигнуто с помощью применения методов ренормализационной группы (ренормгруппы), дающих возможность по поведению некоторых величин в ограниченной области спектра (где, например, применима теория возмущений), определить их поведение в более широкой области спектра, где формальное применение теории возмущений ведет к сингулярностям [5].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель данного обзора привлечь внимание специалистов в области гидрофизики к возможности применения развитых в теории поля методов для исследования возникающих в гидрофизике задач. К таким задачам можно отнести проблему турбулентной диффузии примесей, распространение возмущений на фоне турбулизованной жидкости, коллективные возбуждения в жид-

кости и др. Следует отметить, что часто под термином "полевые методы" подразумевается только техника фейнмановских диаграмм. В действительности диаграммные методы являются лишь небольшой и вовсе не обязательной частью методов теории поля, а основным является использование уравнений Дайсона и отыскание их решений в терминах перенормированных величин с использованием разложений по перенормированному числу Рейнольдса.

Как было указано в обзоре [24], одним из наиболее перспективных в изучении турбулентных течений представляется развитый в теории поля метод ренормгруппы, продемонстрировавший свои большие возможности в теории критических явлений [4]. Метод ренормгруппы является весьма эффективным способом рассмотрения многомодовых задач с сильным нелинейным взаимодействием между модами, когда теория возмущений оказывается неэффективной [25]. Именно к такому классу проблем относится теория физических систем вблизи критической температуры при фазовом переходе второго рода. Подобными же свойствами обладает развитая турбулентность, когда в формировании каскадного процесса переноса энергии вдоль спектра волновых чисел участвует очень большое число мод. На аналогию между критическими явлениями и развитой турбулентностью в 1972 г. впервые обратили внимание Кузьмин и Паташинский [20]. Применение к турбулентности метода ренормгруппы дает возможность определить спектр турбулентных пульсаций скорости [26, 9], найти эффективную вязкость турбулизованной жидкости в области неполной автомодельности [27], вычислить константу Колмогорова, турбулентное число Прандтля и другие универсальные константы развитой турбулентности [28]. При численном моделировании турбулентных течений с помощью метода ренормгруппы можно учесть влияние на крупномасштабные течения мелкомасштабных движений, которые невозможно разрешить в силу конечности масштаба сетки в методе конечных разностей [29].

Важной частью полевых методов является использование описанного выше формализма Мартина-Сиджиа-Роуза [11], задающего способ приведения нелинейных уравнений к Гамильтоновой форме, при этом гамильтониан (оператор сдвига по времени) не совпадает с энергией системы и не обязан быть самосопряженным. Как видно из изложенного формализм Мартина-Сиджиа-Роуза, естественным образом возникает при формулировке теории на языке характеристического функционала. Характеристический функционал является удобным способом

получения основных уравнений без использования теории возмущений, тогда как основанные только на теории возмущений методы часто приводят к не совсем корректным результатам.

Л и т е р а т у р а

1. Монин А.С.; Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965 (ч.1.), 1967 (ч.2.).

2. Hopf E. Statistical hydrodynamics and functional calculus// J.Rat.Mech.Anal. 1952. N1. P.87.

3. Lewis R.M., Kraichnan R.H. A space-time functional formalism for turbulence// Comm. Pure Appl.Math. 1962. V.15. N4. P.397.

4. Amit D.J. Field theory, the renormalization group and critical phenomena. World Sci., 1984.

5. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. 4-е изд. М.: Наука, 1984.

6. Рамон П. Теория поля (современный вводный курс). М.: Мир, 1984.

7. Wyld H.W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid// Ann. of Phys. 1961. V.14. N2. P.143.

8. DeDominicis C., Peliti L. Field-theory renormalization and critical dynamics above T_c : helium, antiferromagnets and liquid systems// Phys.Rev. 1978. V.18B N1. P.353.

9. Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М. Ренормализационный подход в теории турбулентности: размерности составных операторов//ТМФ. 1983. Т.57. №2. С.268.

10. Дмитриев В.Ф. Производящий функционал для корреляционных функций гидродинамических течений, порождаемых случайной силой: Препринт №81-114/ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1981.

11. Martin P.C., Siggia E.D., Rose H.A. Statistical dynamics of classical systems// Phys.Rev. 1973. V.8A. N1. P.423.

12. Hosokawa I. A functional treatise of statistical hydromechanics with random force action//J.Phys.Soc.of Japan. 1968. V.25. N1.P.271.

13. Гледзер Е.Б., Монин А.С. Метод диаграмм в теории возмущений//УМН. 1974. Т.29. Вып.3. С.111.

14. Славнов А.А. Континуальный интеграл в теории возмущений//ТМФ. 1975. Т.22. №2. С.177.
15. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
16. Попов В.Н. Континуальный интеграл в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
17. Кузьмин Г.А. Спектр турбулентности в области больших волновых чисел//ПМТФ. 1971. №4. С.63.
18. Lee L.L. A formulation of the theory of isotropic hydromagnetic turbulence in an incompressible fluid// Ann.of Phys. 1965. V.32. 292 p.
19. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
20. Кузьмин Г.А., Паташинский А.З. Гипотеза подобия и гидродинамическое описание турбулентности//ЖЭТФ, 1972. Т.62. №3. С.1175.
21. Edwards S.F. The theoretical dynamics of homogeneous turbulence// J.Fl.Mech. 1964. V.18. N2. P.239.
22. Kraichnan R.N. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers //J.Fl. Mech. 1959. V.5. N4. P.497.
23. Кузьмин Г.А., Паташинский А.З. Представление взаимодействия в теории турбулентности//ПМТФ. 1978. №1. С.62.
24. Moffat H.K. Some development in the theory of turbulence// J.Fl.Mech. 1981. V.106. P.27.
(Русский пер. в кн: Современная гидродинамика; успехи и проблемы)М.: Мир, 1984. С.49.
25. Wilson K.G. Renormalization group methods// Adv.Math. 1975. V.16. P.170.
26. De Dominicis C., Martin P.C. Energy spectra of certain randomly stirred fluids// Phys.Rev. 1979. V.19A. N1. P.419.
27. Теодорович Э.В. Вычисление турбулентной вязкости на основе метода ренормгруппы//ДАН СССР, 1987. (в печати).
28. Yakhot V., Orszag S.A. Renormalization-group analysis of turbulence// Phys.Rev.Lett. 1986. V.57. N14. P.1722.
29. McComb W.D. Renormalization group methods applied to the numerical simulation of fluid turbulence//Appl.Math.Sci. 1985. V.58. P.187.

ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ РАССЕЙНИЯ МОРСКИХ ВОЛН ПРЕПЯТСТВИЯМИ

И.С.Долина, Е.Н.Пелиновский

Изучение распространения морских волн в присутствии различных подводных препятствий имеет большое значение при решении задач гидротехнического строительства в шельфовой зоне с целью определения дифракционного воздействия ветровых волн на конструкции мачт, платформ и подводные аппараты. Исследование волновых течений, возникающих при рассеянии ветровых волн на неровностях дна, важно также для проблемы заносимости морских каналов и в связи с интерпретацией данных дистанционных наблюдений за поверхностью океана вблизи подводных гор и хребтов.

Задача о рассеянии поверхностной волны на препятствии даже в линейном случае трудна, и в первую очередь из-за неоднородности поверхностной волны и необходимости удовлетворения граничным условиям на поверхности препятствия. Поэтому большое распространение получили численные методы, применяемые для решения дифференциальных или интегральных уравнений [1-5]. Наряду с прямым численным счетом используются и различные приближенные методы [3,6,7]. Часто встречающейся на практике является ситуация, когда характерный размер элементов конструкций мал по сравнению с длиной энергонесущей ветровой волны. Задача рассеяния поверхностной гравитационной волны на малых телах рассматривалась, например, в работе [3], главным образом с целью расчета силового воздействия на препятствие, которое в длинноволновом приближении опре-

делается инерционными эффектами. В данной статье основное внимание уделяется исследованию волнового поля рассеянных волн. При этом рассмотрим препятствия различной формы. Результаты сопоставлены с численными расчетами в рамках точных уравнений [4,5]. Показано, что для погруженных препятствий длинноволновое приближение с хорошей точностью справедливо при любых l/λ . Кратко эти результаты изложены в статье [8].

В основе длинноволнового приближения лежит предположение о том, что мгновенное поле скоростей в окрестности малого препятствия совпадает с полем скоростей, которое формируется при его стационарном обтекании.

Как известно [9], обтекание препятствия безграничным стационарным потоком жидкости эквивалентно обтеканию диполя, интенсивность которого определяется скоростью потока и размерами препятствия. Следует оговориться, что при наличии свободной поверхности такая замена является приближенной и ее точность определяется числом Фруда $F_r = U/\sqrt{gh}$ (U - скорость потока, h - глубина погружения препятствия, g - ускорение свободного падения), причем наиболее неблагоприятной ситуацией является $F_r = 1$. В реальных условиях (высота волны меньше глубины погружения и длины волны) всегда $F_r < 1$. Таким образом, в случае рассеяния поверхностной волны на препятствии малых размеров возмущения, вносимые им, можно описать с помощью горизонтальных и вертикального диполей, изменяющихся гармонически, интенсивность которых определяется соответствующей проекцией скорости частиц жидкости в волне и размерами препятствия:

$$d_x = -D_x u, \quad d_y = -D_y v, \quad d_z = -D_z w, \quad (1)$$

где u, v, w - соответственно x, y - и z -компоненты скорости частиц в волне, d_x, d_y, d_z - дипольные моменты. Например, для шара радиуса R $D_x =$

$= D_y = D_z = 2\pi R^3$; для горизонтальной цилиндрической опоры, направленной вдоль OT $D_x = V, D_y = D_z = 2V$

(V - объем опоры); для вертикальной опоры $D_x = D_y = 2V, D_z = V$.

Таким образом, в рамках указанных приближений от задачи о дифракции волны на препятствии можно перейти к задаче об излучении волн гармонически изменяющимися вер-

тикальными и горизонтальными дипольными источниками массы.

Для потенциального движения жидкости эта задача описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= Q(\vec{r}, t), \\ \varphi_{tt} + g \varphi_z &= 0, & x=0, \\ \varphi &\rightarrow 0 & x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где φ - потенциал движения жидкости, $Q = -(\vec{d} \nabla) \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ - распределение источников массы. Решение этой задачи хорошо известно (см., например, [9]).

Пусть препятствие расположено на глубине h под поверхностью жидкости. Под углом ψ к положительному направлению оси x по поверхности жидкости распространяется волна с амплитудой a и частотой ω . Ось x направлена вертикально вверх. Плоскость xy совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости. Распределение скоростей частиц жидкости в волне описывается формулами

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} u \\ v \end{aligned} \right\} &= a \omega e^{kx} \cos(\omega t - k_x x - k_y y) \begin{cases} \cos \psi, \\ \sin \psi, \end{cases} & (2) \\ w &= -a \omega e^{kx} \sin(\omega t - k_x x - k_y y). \end{aligned}$$

Здесь k - волновое число, $k_x = k \cos \psi$, $k_y = k \sin \psi$, $\omega^2 = gk$ - дисперсионное уравнение поверхностных волн на глубокой воде. Подстановка формул (2) при $x = -h$ в условия (1) позволяет определить дипольные источники и рассчитать волновое поле от них. В частности, в дальней зоне волновое поле является суперпозицией элементарных волн, отвечающих колебаниям тела по осям x, y, z :

$$\xi = \frac{a k^3}{2\pi} e^{-2kh} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} (D_x + D_x \cos \alpha \cos \psi + D_y \sin \alpha \sin \psi) \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \frac{3\pi}{4}), \quad (3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\lambda = 2\pi g / \omega^2$ - длина волны, α - угол наблюдения. В случае рассеяния волны на сфере формула (3) значительно упрощается и результат зависит лишь от угла $\beta = \psi - \alpha$, отсчитанного от направления вектора \vec{k} в падающей волне:

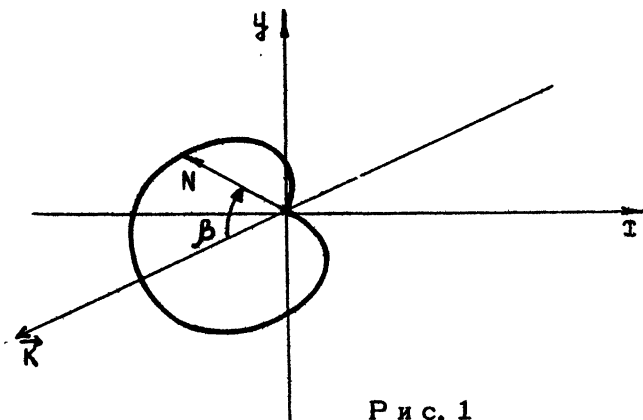
$$\xi(\tau = \lambda) = 2a(kR)^3 e^{-2kh} \cos^2 \frac{\beta}{2}. \quad (4)$$

Максимум излучения соответствует $\alpha = \psi + \pi$, $kh = 1,5$ и составляет $\xi_{max} = 0,34 a (R/h)^3$. Смещение свободной поверхности представляется в виде произведения амплитудного

фактора на диаграмму направленности. Типичный вид диаграммы направленности для сферы

$$N = \frac{1}{\pi} \cos^2 \frac{\beta}{2} \quad (5)$$

приведен на рис.1. Видно, что преобладающее рассеяние



Р и с. 1

происходит в направлении, совпадающим с направлением распространения падающей волны. Для сопоставления с результатами численных расчетов вычислим сечение рассеяния волн препятствием [4]:

$$\sigma = \frac{P_s}{I_i}, \quad (6)$$

где P_s - мощность поля рассеянных волн, I_i - интенсивность падающей волны. Рассеянная мощность определяется формулой

$$P_s = \rho \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^0 \langle \rho_s u_s \rangle dz, \quad (7)$$

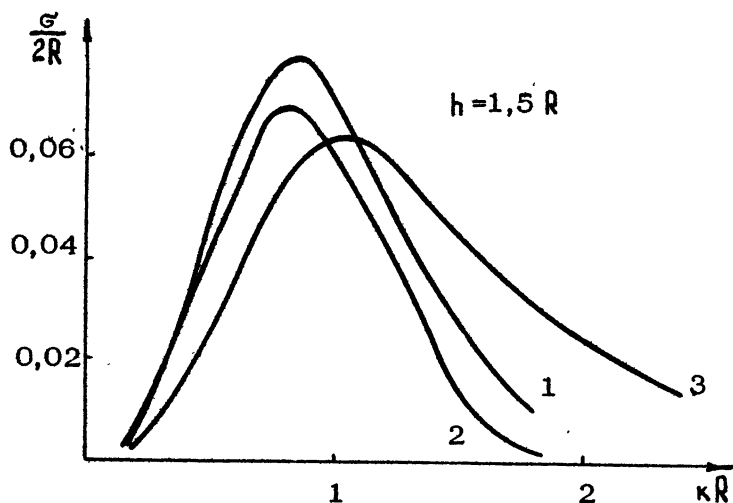
где ρ_s - давление, u_s - горизонтальная компонента скорости частиц жидкости в поле рассеянных волн. Скобки $\langle \rangle$ означают среднее по времени. Интенсивность падающей волны вычисляется по формуле

$$I_i = \rho \int_{-\infty}^0 \langle \rho_i u_i \rangle dz, \quad (8)$$

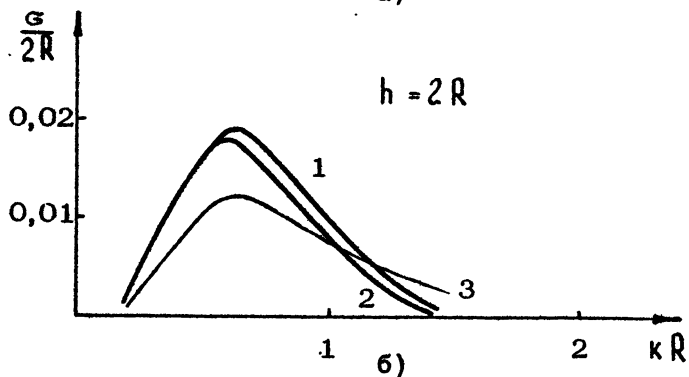
где p_i и v_i - давление и горизонтальная скорость в падающей волне. Вычисляя по формулам (6)-(8), получим сечение рассеяния для сферы

$$\frac{\sigma}{2R} = 3\pi^2 (kR)^5 e^{-4kh} \quad (9)$$

Зависимость (9) приведена на рис.2 для $h/R = 1,5$ (а)



а)



б)

Р и с. 2.

и $h/R = 2$ (б) (кривые 1). Там же для сравнения приведена зависимость σ от kR , взятая из работы [4]

(кривые 2), полученная численным интегрированием. Видно, что эти зависимости практически совпадают при малых κR . Более того, расчет в длинноволновом приближении хорошо описывает зависимость σ от κR , и при $\kappa R \gg 1$ он позволяет достаточно точно определить положение максимума σ (при $\kappa/h = 5/4$) и его величину $\sigma_{\max} = 6\pi^2 R (5R/4eh)^5$. Положение максимума кривой в области длинных волн и обеспечивает хорошую точность длинноволнового приближения. На рис.2 приведена также зависимость сечения рассеяния от κR , полученная в работе [4] в предположении, что потенциал поля на поверхности сферы равен потенциалу падающей волны (так называемое борновское приближение) - кривые 3. Из сравнения кривых 1-3 на рис.2 видно, что это приближение обеспечивает меньшую точность при расчете сечения рассеяния. Заметим, что в длинноволновом пределе $\kappa R \ll 1$ борновское приближение при расчете амплитуды рассеянной волны соответствует пренебрежению присоединенной массой сферы, которая составляет половину массы всей сферы.

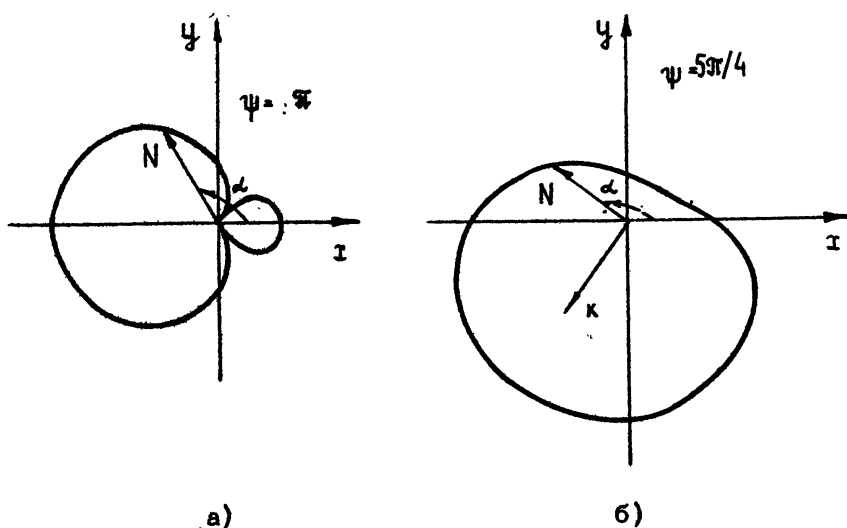
Итак, в случае сферы длинноволновое приближение для расчета характеристик рассеянного поля эффективно при любом соотношении между длиной волны и размером препятствия. Это обстоятельство можно положить в основу приближенного метода расчета рассеяния волны на препятствиях произвольного размера: сначала найти распределение диполей, квадруполей и особенностей более высокой степени, соответствующее стационарному обтеканию, а затем рассчитать волновое поле, генерируемое этими особенностями. Применим этот метод к расчету рассеяния волны на цилиндрической опоре. Сначала приведем соответствующие формулы в случае малого размера опор, когда достаточно источники аппроксимировать диполями.

Для вертикальной цилиндрической опоры

$$\sigma_a = \frac{\alpha \kappa^3}{2} R^2 L \sqrt{\frac{\lambda}{r}} (1 + 2 \cos \alpha \cos \psi + 2 \sin \alpha \sin \psi) e^{-2\kappa h}. \quad (10)$$

Для горизонтальной цилиндрической опоры

$$\sigma_r = \frac{\alpha \kappa^3}{2} R^2 L \sqrt{\frac{\lambda}{r}} (2 + \cos \alpha \cos \psi + 2 \sin \alpha \sin \psi) e^{-2\kappa h}. \quad (11)$$



Р и с. 3.

Здесь R — радиус поперечного сечения, L — длина цилиндра. Эти формулы отличаются только диаграммами направленности. На рис.3 приведены диаграммы направленности для вертикального цилиндра (а) (рассеяние отсутствует в направлениях $\alpha = \psi \pm 2\pi/3$) и для горизонтального цилиндра (б) при $\psi = 5\pi/4$.

Обсудим теперь случай протяженной опоры. В качестве примера рассмотрим вертикальную опору конечной длины L . Обтекание такого препятствия горизонтальными потоками можно определить распределением двумерных диполей по оси x по длине цилиндра, а вертикальным потоком — введением двух разнесенных на расстояние L монополей. В результате получим

$$\xi = \frac{\alpha k^2 R^2}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} (1 - e^{-kL}) (1 + 2\cos\alpha \cos\psi + 2\sin\alpha \sin\psi) e^{-2kx}. \quad (12)$$

Эта формула справедлива при $h > R$, т.е. когда можно считать, что верхний конец цилиндра обтекается однородным потоком. В случае вертикальной цилиндрической преграды длиной $kL \gg 1$, простирающейся до свободной поверхности жидкости (т.е. когда вертикальным обтеканием препятствия возмущения не создаются), формула (12) совпадает с выражением, получающимся в длинноволновом пределе ($kR \ll 1$) из формулы (6.13) в работе [3]. Таким образом, в случае препятствий, пересекающих поверхность жидкости, а это типичная ситуация для специалистов в области теории корабля, используемое приближение справедливо действительно только в области длинных волн. Для погруженных препятствий при $h \geq R$ предлагаемый метод, как

видно из примера со сферой, является при вычислении рассеянного поля достаточно точным во всей области длин волн.

После того как решена задача о движении жидкости при наличии препятствия в поле падающей волны, может быть решена и вторичная задача об определении силового воздействия на препятствие. Как известно [3,7], сила, действующая на препятствие, разделяется на инерционную часть, пропорциональную ускорению жидкости, и демпфирующую часть, связанную с затратами энергии на излучение волн. Для симметричного тела имеем

$$F_m = (\rho V + a_{m.m}) \dot{u}_m + b_{m.m} u_m, \quad (13)$$

где $(\rho V + a_{m.m}) u_m$ — дипольный момент сферы, $a_{m.m}$ и $b_{m.m}$ коэффициенты присоединенной массы и демпфирования, а u_m — компонента вектора скорости в падающей волне, $m=1, 2$. Имеется большое число работ, посвященных вычислению коэффициентов присоединенной массы и демпфирования; в основном это численные расчеты [3,7,10], аналитические выражения получены лишь для препятствий самой простой формы [3]. Для погруженной сферы численные расчеты коэффициентов $a_{m.m}$ и $b_{m.m}$ приведены в работе [5]. В длинноволновом приближении эти коэффициенты могут быть найдены аналитически. Коэффициент присоединенной массы определяется фактически своим значением в безграничной жидкости [9]:

$$a_{m.m} = \rho V / 2. \quad (14)$$

Демпфирующую часть силы можно определять с помощью закона сохранения энергии: работа силы демпфирования равна энергии рассеянных волн на бесконечности

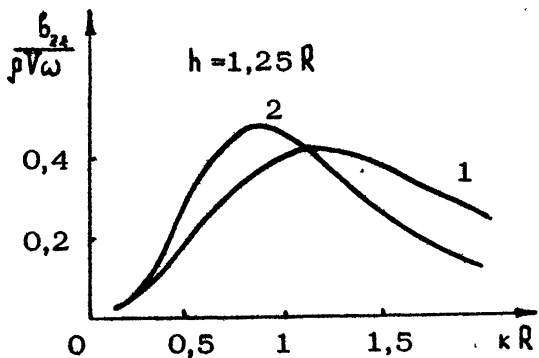
$$\langle \overline{F_g \vec{u}} \rangle = P_s, \quad (15)$$

Отсюда получим для сферы

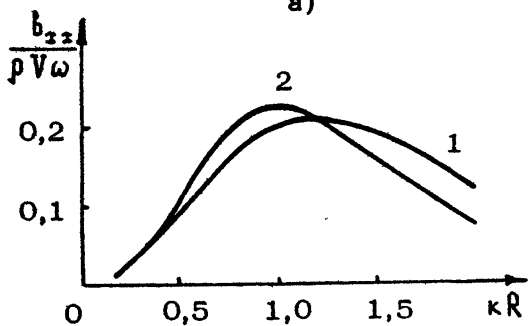
$$\begin{aligned} b_{zz} = b_{yy} &= \rho \omega \pi^2 \kappa^3 R^6 e^{-2\kappa h}, \\ b_{zz} &= 2b_{zz}. \end{aligned} \quad (16)$$

Определим отношение демпфирующей части силы к инерционной:

$$\frac{b_{zz}}{2\pi R^3 \omega} = \pi (\kappa R)^3 e^{-2\kappa h} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\Sigma_{m.a.T}}{a} \approx 0,5 \left(\frac{R}{h} \right)^3. \quad (17)$$

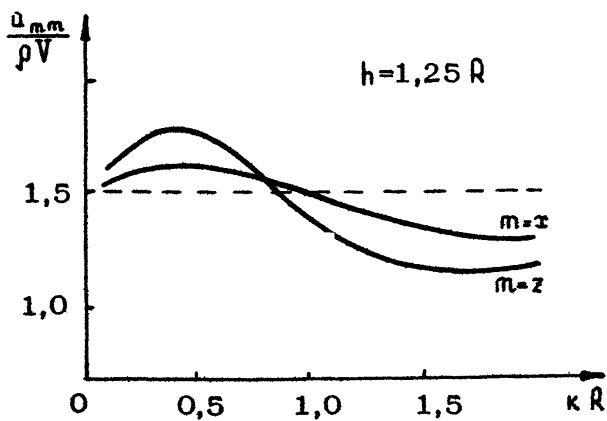


а)



б)

Р и с. 4



Р и с. 5

Таким образом, в максимуме излучения при $kh=1,5$ и $R=h$ демпфирование составляет до 50% от инерционной части силы. Сопоставим полученные выражения для коэффициентов с результатами численных расчетов [5]. На рис.4 представлена зависимость коэффициентов демпфирования от kR ; кривые 1 построены по формулам (16), кривые 2 получены численным интегрированием в рамках точных уравнений [5]. На рис.5 приведены аналогичные кривые для дипольных моментов. Видно, что точность определения силового воздействия на препятствие в длинноволновом приближении при $kR \approx 1$ несколько хуже, чем при вычислении рассеянного поля. Она достигает 20% при определении дипольного момента и 25% при определении коэффициента демпфирования. При этом, правда, следует учесть сделанное выше замечание о том, что максимум демпфирования не превышает 50% от инерционной силы; при $kR \ll 1$ и $kR \gg 1$ оно еще слабее.

Итак, в случае потенциального обтекания длинноволновое приближение является эффективным при расчете рассеянного поля и может быть использовано для грубой оценки силового воздействия на препятствие. В то же время ввиду своей относительной простоты оно может быть применено к решению задач рассеяния волн на объектах с учетом вихревой компоненты, а также перенесено на задачи рассеяния внутренних волн.

Л и т е р а т у р а

1. Hauguel A., Lepetit J.P., Sabaton M. An inventory of hydrodynamic elements for cylinders under wave conditions // XX IAHR Congress. Moscow. 1983.
2. Селезов И.Т., Яковлев В.В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наукова думка, 1978.
3. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973.
4. Gray E.P. Scattering of a surface wave by a submerged sphere // J.Eng.Math.. 1978. V.12. P.15

5. Srokosz M.A. The submerged sphere as an absorber of wave power // J.Fluid Mech., 1979, V.95, Pt.4, P.717.

6. Демченко Р.И. Дифракция длинных поверхностных гравитационных волн на подводном валу. // Гидромеханика. 1985, Вып.51, С.18.

7. Ньюмен Дж. Морская гидродинамика. Л.: Судостроение, 1985,

8. Долина И.С., Пелиновский Е.Н. Рассеяние поверхностных гравитационных волн малыми подводными препятствиями // ДАН СССР, 1987, Т.295, №5, С.1058.

9. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1974,

10. Kim W.D. On a free floating ship in waves // J.Ship Res., 1966, V.10, P.182.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

М.И.Железняк, В.С.Мадерич

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах гидродинамики океана поля течений турбулентны. Наиболее распространенный подход к их описанию заключается в использовании уравнений для осредненных величин, замыкаемых на уровне корреляционных моментов второго порядка с помощью тех или иных полуэмпирических моделей турбулентности. Этот подход, берущий начало в работах Рейнольдса, Прандтля, Колмогорова, Ротта, Давыдова, интенсивно развивался в последние десятилетия в связи с прогрессом вычислительной техники [1-6]. Модели турбулентности в различных вариантах включают в себя уравнения переноса напряжений Рейнольдса, энергии турбулентности, скорости диссипации энергии турбулентности, масштаба турбулентности, завихренности и других характеристик.

Включение уравнений для большего числа турбулентных характеристик приводит к усложнению модели и увеличению числа эмпирических постоянных. Однако при этом появляется возможность получить большее количество информации относительно характеристик турбулентности и описать более широкий круг явлений без корректировки структуры модели. Задачей исследователя является выбор разумного соответствия между целью расчета и методом моделирования турбулентности.

В настоящей работе анализируются модели с использованием уравнений переноса турбулентных напряжений. Представлен ряд аналитических и численных решений задач динамики океана, полученных при различной степени упрощения исходных уравнений.

На конкретных примерах обсуждаются условия применимости градиентных формул для турбулентных напряжений. Полученные решения также могут быть полезны для оценок соотношения сложности моделей с точностью описания структуры течений, для калибровки вычислительных алгоритмов и повышения достоверности определения эмпирических постоянных моделей.

2. УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

Уравнения переноса составляющих тензора турбулентных напряжений $\langle u'_i u'_j \rangle$ следуют из уравнений Навье–Стокса при осреднении последних и использовании затем ряда тождественных преобразований (см., например, [1–3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial t} + u_k \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} = & - \left[\langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] - \\ - 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle - & \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\langle u'_i u'_j u'_k \rangle - \right. \quad (1) \\ \left. - \nu \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} + \left\langle \frac{p'}{\rho} (\delta_{jk} u'_i + \delta_{ik} u'_j) \right\rangle \right] = & \mathcal{P}_{ij} - \mathcal{D}_{ij} + F_{ij} - J_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь использованы стандартные обозначения физических переменных. Первый член в правой части \mathcal{P}_{ij} описывает порождение турбулентных напряжений за счет взаимодействия пульсаций со сдвигом средней скорости, \mathcal{D}_{ij} – диссипацию за счет вязких сил, F_{ij} – перераспределение энергии пульсаций между составляющими тензора турбулентных напряжений, J_{ij} – диффузионный перенос за счет пульсаций скорости, давления и вязких напряжений.

Для членов \mathcal{D}_{ij} , F_{ij} , J_{ij} необходимы модельные аппроксимации. Не ставя перед собой задачу подробного анализа многочисленных аппроксимаций этих членов [1–14], приведем использованные нами варианты для больших чисел Рейнольдса. Для диссипативного члена применяется соотношение, отражающее изотропию малых масштабов:

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \nu \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon. \quad (2)$$

Анализ структуры члена F_{ij} с использованием представления пульсаций давления p' через пульсации скорости с помощью

уравнения Пуассона приводит к трехчленной формуле:

$$\Gamma_{ij} = \varphi_{ij}^{(1)} + \varphi_{ij}^{(2)} + \varphi_{ij}^{(3)}. \quad (3)$$

Здесь $\varphi_{ij}^{(1)}$ описывает перераспределение энергии за счет пульсаций давления. Для моделирования члена $\varphi_{ij}^{(1)}$, выражающего тенденцию к изотропии, общепринята формула Ротта [9]:

$$\varphi_{ij}^{(1)} = -c_p \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} \kappa \right), \quad (4)$$

где $\kappa = \langle u'_i u'_i \rangle / 2$ — энергия турбулентности.

Член $\varphi_{ij}^{(2)}$ в формуле (3) описывает перераспределение составляющих напряжений, связанное с взаимодействием пульсаций со сдвигами средней скорости. Для него используем сравнительно простое соотношение [1]:

$$\varphi_{ij}^{(2)} = -c_{2p} \left(\overline{\mathcal{P}}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\mathcal{P}} \right), \quad (5)$$

где $\overline{\mathcal{P}} = \langle u'_i u'_j \rangle \partial u_i / \partial x_j$. Оно является следствием предположения, что перераспределение также пропорционально анизотропии порождения турбулентности.

Влияние твердых границ потока на Γ_{ij} рассматривалось в работах [7, 10, 12, 13]. Ниже будет использоваться соотношение [13], которое при расположении границы по нормали к оси x_3 имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{(3)} = & \left[c_p \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(\langle u_3'^2 \rangle \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_3' u'_i \rangle \delta_{j3} - \frac{3}{2} \langle u_3' u'_j \rangle \delta_{i3} \right) - \right. \\ & \left. - c'_{2p} \left(\varphi_{33}^{(2)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \varphi_{3i}^{(2)} \delta_{j3} - \frac{3}{2} \varphi_{3j}^{(2)} \delta_{i3} \right) \right] f(x_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\varphi_{ij}^{(2)}$ определяется соотношением (5), $f(x_3)$ — функция, характеризующая влияние расстояния от стенки на интенсивность пристенных эффектов, для которой в работе [10] из соображений размерности предложено выражение

$$f = c_w \kappa^{3/2} / \varepsilon x_3. \quad (7)$$

На основании анализа лабораторных экспериментов, аналитических и численных решений для пяти эмпирических постоянных в формулах (3)–(7) рекомендован набор значений [4, 10, 13]:

$$c_p = 1,8, \quad c_{2p} = 0,6, \quad c'_{2p} = 0,6, \quad c'_{2p} = 0,2, \quad c_w = 0,28.$$

При моделировании диффузионных членов J_{ij} вклад пульсаций давления, как правило, либо не учитывается, либо считается пропорциональным вкладу $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$. В работах [7, 14] построены уравнения для $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$ с последующим обрезанием цепочки моментных уравнений за счет приближенной связи четвертых моментов со вторыми на основе гипотезы Миллионшикова. Полученная [14] аппроксимация имеет вид

$$\begin{aligned}
 -\langle u'_i u'_j u'_k \rangle = & \tau_s \frac{\kappa}{\epsilon} \left[\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u'_j u'_k \rangle}{\partial x_\ell} + \langle u'_j u'_\ell \rangle \frac{\partial \langle u'_k u'_i \rangle}{\partial x_\ell} + \right. \\
 & \left. + \langle u'_k u'_\ell \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_\ell} \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Используется и более простое соотношение [15]:

$$-\langle u'_i u'_j u'_k \rangle = \tau'_s \frac{\kappa}{\epsilon} \langle u'_k u'_\ell \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_\ell}, \quad (9)$$

имеющее, однако, по сравнению с выражением (8) тот недостаток, что не выполняются условия тензорной инвариантности. Здесь τ_s, τ'_s — постоянные.

Для определения скорости диссипации ϵ наиболее естественным представляется построение уравнения переноса из уравнений Навье—Стокса, предложенное Б.И. Давыдовым [8]. Для больших чисел Рейнольдса оно записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_m \frac{\partial \epsilon}{\partial x_m} = & - \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\nu \langle u'_m \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell} \right)^2 \rangle + \frac{\nu}{\rho} \langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \rangle \right] - \\
 & - 2\nu \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial u'_m}{\partial x_\ell} \rangle - 2 \left\langle \left(\nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_m \partial x_\ell} \right)^2 \right\rangle. \quad (10)
 \end{aligned}$$

В правой части уравнения первый член характеризует диффузию завихренности, второй — порождение за счет растяжения вихревых трубок, третий — диссипацию завихренности. Аппроксимации этих членов приводят уравнение (10) к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_m \frac{\partial \epsilon}{\partial x_m} = & \tau_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\kappa}{\epsilon} \langle u'_m u'_\ell \rangle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\ell} \right) - \\
 & - \tau_\nu \frac{\epsilon}{\kappa} \langle u'_i u'_m \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_m} - \tau_H \frac{\epsilon^2}{\kappa}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

где c_ϵ , c_L , c_N — постоянные. Постоянная c_N по данным лабораторных экспериментов о вырождении однородной турбулентности за решетками обычно равна 1,92 [4]; Заметим, однако, что предельным значением c_N при больших числах Рейнольдса является $c_N = 2$, соответствующее предположению о полной автомодельности потока по этому параметру [17]. Путем численной оптимизации подобраны значения $c_L = 1,55$, $c_\epsilon = 0,13$ [10].

Выпишем, с использованием представленных выше аппроксимаций, систему уравнений модели для вторых моментов пульсаций скорости и диссипацию в плоском пристенном пограничном слое. При введении обозначений $\bar{x} = x_1$, $\bar{z} = x_3$, $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$, $d\bar{t}/dt = d(\bar{t} + u\bar{x})/d\bar{x} + w d(\bar{t})/d\bar{z}$ из выражений (1)–(8); (11) получим

$$\frac{d\langle u'w' \rangle}{d\bar{t}} = c_\epsilon \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{\kappa}{\epsilon} \left[2\langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial \bar{z}} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial \bar{z}} \right] \right\} - \lambda_1 \frac{\epsilon}{\kappa} \langle u'w' \rangle - \lambda_2 \langle w'^2 \rangle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad (12)$$

$$\frac{d\langle w'^2 \rangle}{d\bar{t}} = 3c_\epsilon \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\kappa \langle w'^2 \rangle}{\epsilon} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial \bar{z}} \right) - c_p \frac{\epsilon}{\kappa} \left(\lambda \langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} \kappa \right) - \lambda_4 \langle u'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{3} \epsilon, \quad (13)$$

$$\frac{d\langle v'^2 \rangle}{d\bar{t}} = c_p \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\kappa \langle v'^2 \rangle}{\epsilon} \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial \bar{z}} \right) - c_p \frac{\epsilon}{\kappa} \left(\langle v'^2 \rangle - \lambda_3 \langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} \kappa \right) - \lambda_4 \langle u'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{2}{3} \epsilon, \quad (14)$$

$$\frac{d\kappa}{d\bar{t}} = c_\epsilon \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{\kappa}{\epsilon} \left[\langle w'^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\kappa + \langle w'^2 \rangle) + \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial \bar{z}} \right] \right\} - \langle u'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \epsilon, \quad (15)$$

$$\frac{d\epsilon}{d\bar{t}} = c_\epsilon \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\kappa \langle w'^2 \rangle}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{z}} \right) - c_L \frac{\epsilon}{\kappa} \langle u'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - c_N \frac{\epsilon^2}{\kappa}. \quad (16)$$

Уравнение для энергии турбулентности κ (15) является сверткой (1). Соответственно $\langle u'^2 \rangle$ определяется уравнениями для κ , $\langle w'^2 \rangle$ и $\langle v'^2 \rangle$. Через λ_i обозначены комбинации постоянных модели и пристенных функций f (7):

$$\lambda_1 = c_p + \frac{3}{2} c_p' f, \quad \lambda_2 = 1 - c_{2p} \left(1 - \frac{3}{2} c_{2p}' f \right), \quad \lambda_3 = 1 + 2 \frac{c_{2p}' f}{c_p},$$

$$\lambda_4 = \frac{2}{3} c_{2p} (1 - c'_{2p} f), \quad \lambda_5 = \frac{c'_{pf}}{c_p}, \quad \lambda_6 = \frac{2}{3} c_{2p} (1 + c'_{2p} f). \quad (17)$$

В рамках моделей такого типа описана структура ряда сложных турбулентных течений (обзор см. [1-6]), однако наибольшее распространение получили более простые двухпараметрические модели (к-ε-модели). Для связи турбулентных напряжений со сдвигами скорости используется вместо (1) его упрощенное следствие — классическая гипотеза Буссинеска. Так, если в уравнении (12) пренебречь конвекцией и диффузией, то отсюда следует формула градиентного типа

$$-\langle u'w' \rangle = \frac{\lambda_5}{\lambda_6} \frac{\kappa \langle w'^2 \rangle}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial z} = \nu_* \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (18)$$

связывающая сдвиг скорости с $\langle u'w' \rangle$ через коэффициент турбулентной вязкости ν_* . Считая анизотропию нормальных напряжений слабой, в выражении для ν_* получаем $\nu_* = c_M \kappa^2 / \epsilon$ и приходим к следующей к-ε-модели турбулентности [1-3, 16]:

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_* \frac{d\kappa}{dz} + \nu_* \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \epsilon, \quad (19)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \sigma \frac{\partial}{\partial z} \nu_* \frac{d\epsilon}{dz} + c_{L1} \nu_* \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - c_N \frac{\epsilon^2}{\kappa}. \quad (20)$$

Для постоянных c_M, σ, c_{L1}, c_N обычно используются следующие значения:

$$c_M = 0,09, \quad \sigma = 0,77, \quad c_{L1} = 1,44, \quad c_N = 1,92 [4].$$

Перейдем теперь к рассмотрению аналитических и численных решений приведенных выше уравнений, описывающих конкретные типы течений.

3. БЕССДВИГОВАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Турбулентные течения без градиентов средней скорости являются довольно распространенным в природе классом течений. Дополнительный интерес к их моделированию обусловлен возможностью описывать для таких течений в "чистом" виде процессы диффузии, перераспределения и затухания энергии не только численными методами, но и более наглядным образом, с помощью промежуточных асимптотик — автомодельных решений,

а в некоторых случаях и на основе точных аналитических решений [17-25].

3.1. Постановка задачи

При отсутствии сдвигов скорости и конвективного переноса уравнения для κ , ϵ , $\langle u_i^2 \rangle$ симметричных течений записываются в виде

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{c_n}{z^j} \frac{d}{dz} z^j \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\kappa}{dz} - \epsilon, \quad (21)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{c_m}{z^j} \frac{d}{dz} z^j \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} - c_n \frac{\epsilon^2}{\kappa}, \quad (22)$$

$$\frac{d\langle u_i^2 \rangle}{dt} = \frac{c_p}{z^j} \frac{d}{dz} z^j \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\langle u_i^2 \rangle}{dz} - c_p \frac{\epsilon}{\kappa} \left(\langle u_i^2 \rangle - \frac{2}{3} \kappa \right) - \frac{2}{3} \epsilon, \quad (23)$$

где $j=0,1,2$ для случаев плоской, осевой и центральной симметрии соответственно. Считаем, что в этих течениях анизотропия $a_i = \langle u_i^2 \rangle - 2\kappa/3$ мала сравнительно с κ , это дает основание использовать "изотропную" формулу для ν_n . Справедливость этого предположения обсуждается ниже в разд. 3.2. Выделяя a_i , уравнение (23) можно переписать в виде

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{c_n}{z^j} \frac{d}{dz} z^j \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{da_i}{dz} - c_p \frac{\epsilon}{\kappa} a_i. \quad (24)$$

Решение его может быть построено после отыскания решения нелинейной системы (21)-(22).

Рассмотрим бессдвиговые течения, источник турбулентности в которых расположен при $x=0$ и при условиях затухания турбулентности на бесконечности. Задавая при $x=0$ потоки или κ , ϵ , $\langle u_i^2 \rangle$, приходим к следующим формулировкам граничных условий:

при $x=0$

$$c_n \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\kappa}{dz} = -q(t), \quad c_m \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} = -q_\epsilon(t), \quad c_p \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\langle u_i^2 \rangle}{dz} = -q_i(t), \quad (25)$$

или

$$\kappa(0,t) = \kappa_0(t), \quad \epsilon(0,t) = \epsilon_0(t), \quad \langle u_i^2 \rangle(0,t) = s_{0i}(t); \quad (26)$$

при

$$z \rightarrow \infty$$

$$\kappa \rightarrow 0, \quad \kappa^2/\epsilon \rightarrow 0, \quad \langle u_i^2 \rangle \rightarrow 0. \quad (27)$$

Граничное условие $\kappa^2/\epsilon \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ обеспечивает отсутствие потока турбулентной энергии и завихренности при конечном градиенте κ и ϵ на границе турбулентной области.

Решение системы уравнений (21), (22), (24) с граничными условиями (25)–(27) будем искать в автомодельном виде:

$$\begin{aligned} \kappa(x,t) &= t^p B(\eta), & \epsilon(x,t) &= t^q E(\eta), \\ a_i(x,t) &= t^{2i} A_i(\eta), & \eta &= Mx/t^m. \end{aligned} \quad (28)$$

Подстановка этих соотношений уравнения (21), (22) показывает, что автомодельные решения существуют при

$$\gamma = p-1, \quad \rho = 2m-2 \quad (29)$$

и описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(2m-2)B - m\eta \frac{dB}{d\eta} - c_m \frac{M^2}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \eta^2 \frac{B^2}{E} \frac{dB}{d\eta} + E = 0, \quad (30)$$

$$(2m-3)B - m\eta \frac{dE}{d\eta} - \epsilon c_m \frac{M^2}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \eta^2 \frac{B^2}{E} \frac{dE}{d\eta} + c_m \frac{E^2}{B} = 0, \quad (31)$$

$$\left(a_i + c_p \frac{E}{B} \right) A_i - m\eta \frac{dA_i}{d\eta} - c_m \frac{M^2}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \eta^2 \frac{B^2}{E} \frac{dA_i}{d\eta} = 0. \quad (32)$$

Решение системы уравнений (30)–(31) с граничными условиями (25)–(27) сводится к нелинейной задаче на собственные значения, где параметр m играет роль собственного значения. В отсутствие диссипации (последние члены в левой части (30), (31)) решение этой задачи единственно и легко находится при наличии законов сохранения κ и ϵ [19], а $B \sim E^\varphi$, где $\varphi = \varphi(c_m, \epsilon)$. Исходя из этого, решение задачи и при наличии диссипации будем искать в таком же виде. Тогда находим, что система (30)–(31) совместна при

$$B = (c_m - 1)E \quad \text{и} \quad \alpha = 1. \quad (33)$$

Зависимость B от автомодельной переменной η определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\eta} \eta^2 B \frac{dB}{d\eta} + b_1 \eta^{1+i} \frac{dB}{d\eta} - b_2 \eta^2 B = 0 \quad (34)$$

и соответствующих граничных условий. Здесь b_1 и b_2 – постоянные:

$$b_1 = \frac{m}{c_N (c_N - 1) M^2}, \quad b_2 = \frac{1 + (2m - 2)(c_N - 1)}{c_N (c_N - 1)^2 M^2}. \quad (35)$$

Подстановка автомодельных решений (28) и соотношений (29), (33) в граничные условия (25), (26) показывает, что такие решения существуют при реализации условий вида

$$q = q_0 t^{3m-3}, \quad q_\varepsilon = \frac{q_0}{c_N - 1} t^{3m-4}, \quad (36)$$

или

$$k_0 = K_0 t^{2m-2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{K_0}{c_N - 1} t^{2m-3}. \quad (37)$$

Рассмотрим некоторые типы турбулентных течений, соответствующих этим граничным условиям и некоторым начальным.

3.2. Эволюция симметричной турбулентной области в безграничном пространстве

Начнем с простейшего варианта условий (36) ($q = q_\varepsilon = 0$), соответствующего задаче об эволюции симметричной турбулентной области в безграничном пространстве, возникшей в начальный момент времени. В рамках этой задачи может быть описано развитие локализованных турбулентных областей в океане в виде плоского горизонтального слоя, цилиндрического "валика" или сферического "клуба" турбулентности. Соответственно граничные условия к уравнению (34) запишутся

$$\frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Проинтегрировав уравнение (34) по η от 0 до ∞ с учетом граничных условий (38) и используя $\int_0^\infty \eta^j \theta d\eta \neq 0$, найдем

$$b_2 = -b_1(j+1). \quad (39)$$

Тогда решение уравнения (34) имеет следующий вид [19, 20]:

$$\text{при} \quad \eta < \eta_0 \\ k = \theta_0 \left[1 - (\eta/\eta_0)^2 \right] t^p, \quad \varepsilon = \frac{\theta_0}{c_N - 1} \left[1 - (\eta/\eta_0)^2 \right] t^{p-1}, \quad (40)$$

при $\eta \geq \eta_0$

$$k = \varepsilon = 0.$$

Здесь B_0 - постоянная,

$$\eta_0 = (2B_0/b_1)^{1/2}, \quad \eta = M z t^{-\beta/2 - 1},$$

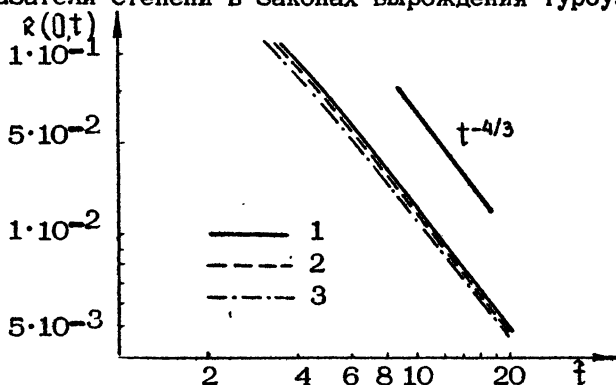
$$\rho = 2 [c_N + j(c_N - 1)] / (3 + j)(c_N - 1). \quad (41)$$

Радиус турбулентной области (толщина слоя) определяется соотношением

$$L = \left(\frac{2B_0(j+3)c_N}{2c_N - 3} \right)^{1/2} (c_N - 1) t^{\beta/2 + 1}. \quad (42)$$

Построенное решение по терминологии [17] принадлежит к автомодельным решениям второго рода (неполная автомодельность). В отличие от автомодельных решений первого рода размер области и характер затухания κ и ϵ со временем зависит от постоянной модели турбулентности c_N . Постоянные интегрирования M и B_0 из-за отсутствия законов сохранения определить в рамках автомодельной задачи уже нельзя. Для этого необходимо численно решить задачу в исходной постановке (31), (32) с граничными условиями (35)–(37) и некоторыми начальными условиями.

Такие расчеты, проведенные в работах [19,20] при $\sigma = 1$, показали, что после некоторого неавтомодельного периода решение выходило на автомодельный режим, описываемый соотношениями (40)–(42), как показано на рис.1. Оказалось также, что показатели степени в законах вырождения турбулентности



Р и с. 1. Автомодельное поведение $\kappa(0,t)$ при $\sigma = 1$ (кривая 1), $\sigma = 1,5$ (2), $\sigma = 2$ (3). Здесь $\hat{\kappa} = \kappa/\kappa(0,0)$, $\hat{t} = t / [\kappa(0,0)/\epsilon(0,0)]$

слабо зависят от ϵ , но форма профилей k и ϵ определяется ϵ .

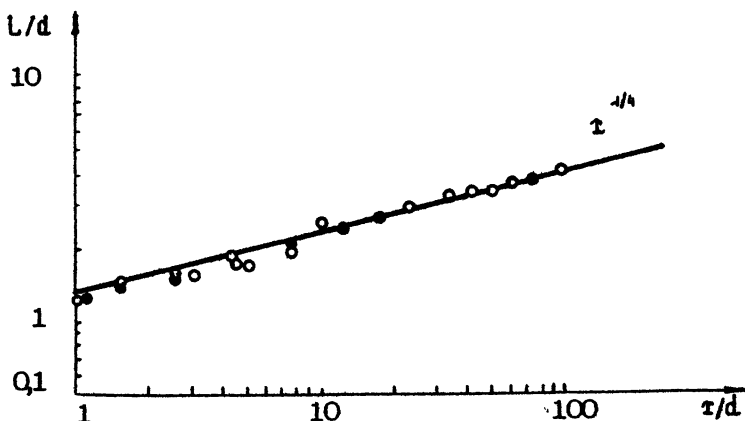
Заметим, что вывод об определяющей роли диссипации энергии турбулентности в развитии этих течений не зависит от конкретной модели турбулентности. Так, близкие результаты были получены [17] в рамках более простой модели, состоящей из одного дифференциального уравнения для k , в котором скорость диссипации связывалась с размером области ($\epsilon \sim k^{3/2}/L$). Но более детальные модели открывают возможность исследования более сложных случаев, например когда масштабы энергосодержащих вихрей в начальный момент времени существенно отличаются от размеров области и их отношение в процессе эволюции нельзя считать постоянным.

Автомодельные зависимости характеристик развития областей турбулентности от времени

Параметры	j					
	0	1	2	0	1	2
	$\epsilon = 2$			$\epsilon = 1,92$		
k	$t^{-4/3}$	$t^{-3/2}$	$t^{-8/5}$	$t^{-4,2/3}$	$t^{-3,4/2}$	$t^{-8,4/5}$
ϵ	$t^{-7/3}$	$t^{-5/2}$	$t^{-13/5}$	$t^{-7,2/3}$	$t^{-5,4/2}$	$t^{-13,2/5}$
L	$t^{1/3}$	$t^{1/4}$	$t^{1/5}$	$t^{0,9/3}$	$t^{0,9/4}$	$t^{0,9/5}$

В таблице приведены численные значения показателей степенных зависимостей для типичного диапазона $\epsilon_N = 1,92 \pm 2$. Эти зависимости можно сопоставить с данными ряда лабораторных экспериментов, в том числе [25,26], где поток с скоростью u обтекал колеблющуюся решетку [25] или диск диаметром d с центральной струей, подобранной так, чтобы полный избыточный импульс равнялся нулю, что обеспечивало быстрое исчезновение сдвиговых течений с увеличением расстояния вниз по потоку. На рис.2-3 приведены данные [25,26], демонстрирующие согласие с оценками таблицы при $j=1$ и $t = \tau/u$.

После подстановки решения (40)-(42) в линейное уравнение (32) с соответствующими граничными условиями задача



Р и с. 2. Автомодельное поведение диаметра турбулизированной области в зависимости от $\tau = \Omega t$ по данным [26] (oo) и [27] (●●)

сводится к задаче на собственные значения, имеющей дискретный спектр автомодельных решений $a_i^{(s)}$ [21]. В области автомодельности

$$a_i = \sum_{s=1}^{\infty} a_i^{(s)} = \sum_{s=1}^{\infty} t^{\lambda_s} A_{is}, \quad (43)$$

где

$$\lambda_s = -[(2c_N - 3)\lambda_s + (3+j)c_p] / (3+j)(c_N - 1),$$

$$A_{is} = \alpha_{is} (1 - \eta^2) d \rho_{2s-1} / d \eta, \quad \lambda_s = s(2s-1), \quad s=1, 2, 3, \dots,$$

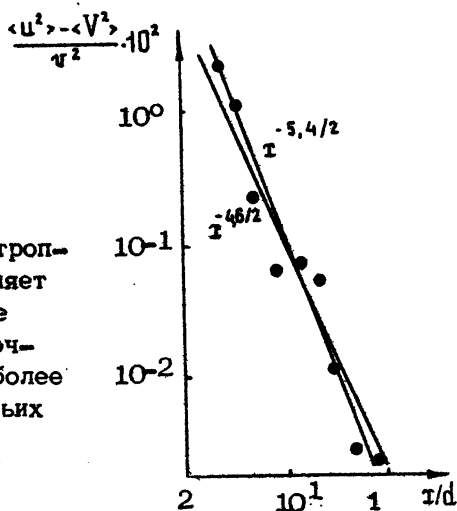
для турбулентного слоя и

$$A_{is} = \alpha_{is} F(-s, s, 1, \eta^2), \quad \lambda_s = 2s^2, \quad s=1, 2, 3, \dots$$

при $\eta < \eta_0$ и $A_{is} = 0$ при $\eta > \eta_0$. Здесь $P_{2s-1}(\eta)$ — полиномы Лежандра, $F(-s, s, 1, \eta^2)$ — полиномы Якоби, α_{is} — постоянные.

Решение (43) состоит из суммы не взаимодействующих "мод" $a_i^{(s)}$, каждая из которых имеет свой степенной закон. С увеличением s они быстро затухают, и с течением времени, как показали численные эксперименты [21], остается только первая мода $a_i^{(1)}$. Аналитическое решение для a можно также сопоставить с результатами [27]. При $c_p = 2, 2; 1, 8; 1, 5$ и $c_N = 2$ значения $\lambda_1 = -2, 7; -2, 3; -2$ соответственно. Согласно с данными [27] на рис.3 можно считать удовлетворительным, если учесть разброс в измерениях и оценках c_p . Заметим, что полученное более быстрое затухание анизотропии, чем k , подтверждает возможность использования в

Р и с. 3. Изменение разности $\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle$ с расстоянием z по данным [27]



уравнениях (31)–(33) "изотропных" коэффициентов и позволяет считать, что найденные выше решения являются промежуточными асимптотиками и для более сложных аппроксимаций третьих моментов (8), (9).

3.3. Эволюция турбулентного слоя у поглощающей границы

Смена автомодельных режимов развития турбулентности может наблюдаться при касании турбулентным слоем поглощающей границы. Эту задачу можно интерпретировать как модель развития турбулентного слоя у скачка плотности. В условиях сильной стратификации вовлечение жидкости на скачке практически отсутствует, но за счет турбулентных флуктуаций давления в нем генерируются внутренние волны. Поэтому, хотя энергия турбулентности и скорость диссипации вырождаются на границе раздела, диффузия энергии турбулентности и завихренности будет конечной. Соответствующими граничными условиями задачи будут $\kappa = \varepsilon = 0$ при $z = 0$ и (27) при $z \rightarrow \infty$.

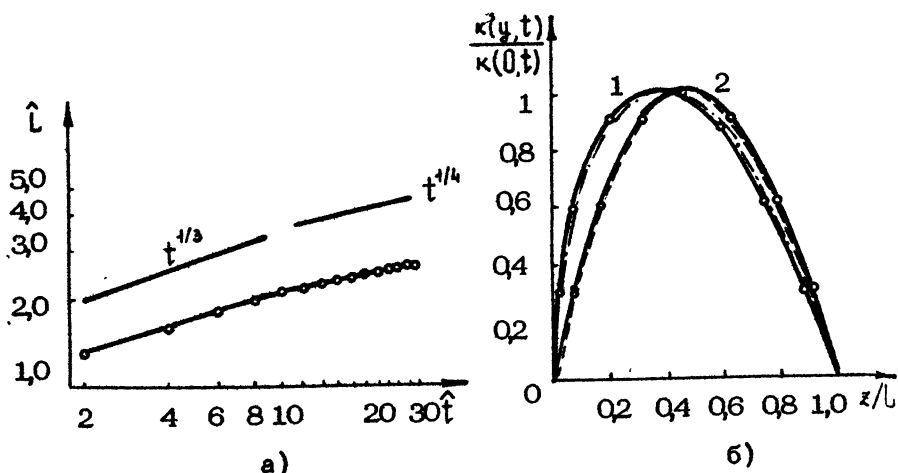
Автомодельное решение при $j = 0$ следует из уравнения (34) при $b_1 = b_2$ [20]:

$$\kappa(z, t) = b_0 [\xi^{1/2} - \xi^2] t^p,$$

$$\eta < \eta_0: \varepsilon(z, t) = \frac{b_0}{c_n^{-1}} [\xi^{1/2} - \xi^2] t^{p-1},$$

$$\eta > \eta_0: \kappa(z, t) = \varepsilon(z, t) = 0,$$

где $\xi = \eta/\eta_0$, $\eta = M z t^{-\frac{p}{2}-1}$, $\eta_0 = 2M \left(\frac{2b_0 c_n}{3c_n - 3} \right)^{1/2} (c_n - 1)$,



Р и с. 4. Распространение турбулентного слоя до и после касания поглощающей поверхности [20]: а - изменение во времени толщины турбулентного слоя; б - автомодельные профили энергии турбулентности до касания поверхности (1) и после этого (2). Сплошные линии - аналитические решения, штрихпунктирные - численные расчеты

$$p = -\frac{2c_M - 1}{2(c_M - 1)}, \quad L = \left(\frac{8B_0 c_M}{2c_M - 3} \right)^{1/2} M(c_M - 1) t^{\frac{p}{2} + 1}.$$

Оно также относится к автомодельным решениям второго рода.

Наличие границы раздела приводит к асимметрии слоя. Толщина его растет медленнее, чем в случае безграничной области, а энергия турбулентности убывает быстрее. Это обусловлено наличием потока энергии турбулентности через поверхность $z=0$:

$$-q = c_M \frac{\kappa^2}{\epsilon} \frac{d\kappa}{dz} = \left(\frac{c_M B_0}{8} \right)^{1/2} (2c_M - 3) t^{-(2c_M - 1)/(c_M - 1)}.$$

Результаты численных расчетов [20], приведенные на рис.4, в которых турбулентный слой сначала располагался на некотором расстоянии от границы раздела, свидетельствуют о смене автомодельных режимов при касании этой границы в соответствии с построенными аналитическими решениями.

3.4. Эволюция турбулентного слоя под воздействием потока энергии на границе

Известно, что одним из эффективных механизмов турбулизации приповерхностного слоя океана является разрушение поверхностных ветровых волн [28]. Процессы диффузии турбулентности активно исследовались также в лабораторных условиях с помощью решеток, колеблющихся в резервуарах с водой [29-32]. Поэтому построение решений таких задач позволяет при сравнении с обширным экспериментальным материалом оценить достоверность описания диффузии турбулентности в используемых моделях и уточнить значения постоянных.

Сначала рассмотрим задачу о развитии турбулентного слоя под воздействием постоянного потока энергии турбулентности на поверхности слоя. Согласно (36) автомодельный режим в этом случае реализуется при $m=1$, т.е. при следующих граничных условиях на уровне $z=0$:

$$q(t) = q_0, \quad q_\varepsilon = \frac{q_0}{c_N - 1} t^{-1}, \quad (44)$$

или

$$\kappa(0, t) = K_0, \quad \varepsilon(0, t) = \frac{K_0}{c_N - 1} t^{-1}.$$

Подстановка $m=1$ в выражения (35) приводит при $j=0$ к соотношению $b_1 = b_2(c_N - 1)$. Как отмечалось выше, при больших числах Рейнольдса $c_N = 2$. При $b_1 = b_2$ и граничных условиях (44) уравнение (34) имеет точное решение, так что

$$\left. \begin{aligned} \kappa(z, t) &= K_0 \left[1 - \frac{z}{(c_N K_0)^{1/2} t} \right] \\ \varepsilon(z, t) &= \kappa / t \end{aligned} \right\} 0 \leq \frac{z}{t} \leq (c_N K_0)^{1/2}, \quad (45)$$

$$\kappa = \varepsilon = 0 \quad z/t > (c_N K_0)^{1/2}.$$

В соответствии с решением (45) связь граничных значений энергии турбулентности и потока Q_0 определяется соотношением

$\frac{K_0}{\rho} = c_N^{1/3} Q_0^{2/3}$. Тогда толщина слоя L и масштаб турбулентности $l = \kappa^{3/2} / \varepsilon$ имеют вид

$$L = c_N^{2/3} Q_0^{1/3} t, \quad l = c_N Q_0^{1/3} t \left[1 - z / (c_N^2 Q_0)^{1/3} t \right]^{1/2}. \quad (46)$$

Отметим, что еще одно аналитическое автомодельное решение может быть получено, если не фиксировать значение π , а определять его из условия $b_1 = b_2$ [22].

Выражение для толщины турбулентного слоя (46) с точностью до постоянной совпало с соотношением, полученным в рамках однопараметрической модели турбулентности [17,18]. В ней используется уравнение переноса для κ , а $\epsilon = \kappa^{3/2}/\ell$, где масштаб турбулентности принят постоянным по глубине турбулентного слоя. Согласно (46) масштаб турбулентности уменьшается с глубиной. Рассматриваемая задача может служить ярким примером ситуации, когда модели разного уровня сложности, совпадая при описании внешних параметров турбулентных течений, дают качественно отличные результаты относительно их внутренней структуры.

Если потоки q и q_e постоянны во времени, то турбулентный слой со временем стационарирует. Результаты численных расчетов для системы уравнений (21)-(22) с граничными условиями и ее точное решение [22]

$$\begin{aligned} \kappa(z) &= \frac{\kappa_0}{(1+z/\ell_0)^n}, & \epsilon(z) &= \frac{\epsilon_0}{(1+z/\ell_0)^{3n/2-1}}, \\ n &= \frac{7}{12(\rho-1)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{48}{49}(\rho-1)} \right], \\ \ell_0 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \zeta_M \frac{\kappa_0^{3/2}}{\epsilon_0} n = \ell_1 n \end{aligned} \quad (47)$$

показали, что структура стационарного слоя определяется комбинацией эмпирических постоянных модели $\rho = \epsilon \zeta_M^2 / 2\zeta_M$. Слой имеет конечную толщину ℓ_0 при $\rho < 1$ и турбулентность асимптотически затухает при $\rho > 1$. При $\rho = 1$ (47) сводится к виду

$$\kappa = \kappa_0 \exp(-z/\ell_1), \quad \epsilon = \epsilon_0 \exp(-3z/2\ell_1).$$

Решение (47) позднее было также дано в работе [24].

Масштаб турбулентности ℓ убывает по глубине слоя при $\rho < 1$, возрастает при $\rho > 1$ и остается постоянным при $\rho = 1$. Рекомендованные в литературе значения $\zeta_M, \epsilon, \zeta_M$, хотя, и изменяются в относительно узком диапазоне, но приводят к значениям ρ как большим, так и меньшим единицы. Подбор значений этих постоянных, как правило, проводился для течений, в которых для диффузии существенную роль играли и другие ме-

механизмы турбулентного обмена. В экспериментах [29-31] для различных типов решеток показано возрастание интегрального масштаба турбулентности с глубиной, что свидетельствует о физической реализуемости режима с $\rho > 1$. Данные [29-31] позволили на основе решения (47) оценить ϵ_M и ϵ . Разброс их значений уменьшается с увеличением внешнего числа Рейнольдса $Re_D = Ds\omega/\nu$. Здесь D - характерный размер ячеек решетки, s , ω - амплитуда и частота колебаний решетки. В результате обработки опытов с $Re_D = 10^4$ [29,31] при $\epsilon_M = 2$ получены значения диффузионных постоянных $\epsilon_M = 0,095 \pm 0,45$, $\epsilon_{\epsilon_M} = 0,062 \pm 0,03$, что согласуется с приведенными выше значениями для k - ϵ -модели $\epsilon_M = 0,09$, $\epsilon = 0,77$.

Интенсивность турбулентных пульсаций на фиксированном уровне под решеткой связана с внешними параметрами соотношением

$$k = \omega^2 s^2 \varphi \left(Re_D, \frac{s}{D}, \frac{s}{H} \right), \quad (48)$$

где H - глубина резервуара. Если в первом приближении пренебречь зависимостью от формы решетки и резервуара, а также от Re_D , то можно считать, что

$$k \sim \omega^2 s^2, \quad \epsilon \sim \omega^3 s^2. \quad (49)$$

Сравнение этих соотношений с граничными условиями (44) показывает, что автомодельный режим с постоянным потоком энергии на границе может быть реализован только при одновременном линейном возрастании частоты и амплитуды колебаний решетки. Поэтому эксперименты [32], проводимые при переменной частоте колебаний, но фиксированной их амплитуде, не позволили строго выйти на режим с линейно растущей глубиной турбулизованного слоя.

3.5. Метастабильная локализация турбулентности

Как показано в работе [23], задание специальных законов изменения частоты и амплитуды колебаний решетки теоретически позволяет выйти на режимы с остановкой фронта турбулизованного слоя и последующей метастабильной локализацией турбулентности в приповерхностном слое. Такие режимы реализуются аналогично решениям задач нелинейной теплопроводности [33] при задании на границе накачки тепла "с обострением" относи-

тельно некоторого момента времени T_0 . Условия (26) при $x=0$ записываются в виде

$$\kappa = A_\kappa (T_0 - t)^\rho, \quad \epsilon = A_\epsilon (T_0 - t)^\nu, \quad (50)$$

где A_κ, A_ϵ — постоянные, $t < T_0$, $\rho < 0$, $\nu < 0$.

Автомодельный режим с остановившимся фронтом ($d\eta/dt=0$) в соответствии с (28)–(29) реализуется для значений ρ и ν , являющихся решением системы линейных уравнений

$$\rho - \nu - 1 = 0, \quad (51)$$

$$m = \rho - \nu/2 + 1/2 = 0, \quad (52)$$

т.е. для $\rho = -2$, $\nu = -3$. Система уравнений (21)–(22) в этом случае имеет аналитическое решение, которое при $T_0=0$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= A_\kappa (-t)^2 (1 - z/z_0)^2 \\ \epsilon &= A_\epsilon (-t)^3 (1 - z/z_0)^2 \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 \leq z \leq z_0, \quad (53)$$

$$\kappa = \epsilon = 0 \quad \text{при } z \geq z_0,$$

$$z_0^2 = 2c_m \epsilon^2 (1 - c_n/c_m \epsilon^2) A_\kappa / 3 \left(1 - \frac{2c_n}{3}\right) \left(1 - \frac{2c_m}{3}\right).$$

Режим реализуется при определенном соотношении между A_κ и A_ϵ [23].

При $m > 0$ и $m < 0$ на прямой (51) в отрицательном квадранте плоскости $\{\rho, \nu\}$ расположены автомодельные режимы соответственно с возрастающей и сокращающейся эффективной глубиной проникновения слоя η_s , определяемой как $\beta(\eta_s)/\beta(0) = 0,5$. При $m < 0$ вне прямой (51) строгой автомодельности нет, но, как показали численные расчеты [23], при таком соотношении ρ и ν метастабильная локализация имеет место при изменении $c_m, c_n, \epsilon, A_\kappa, A_\epsilon$ в широком интервале значений. Тем самым результаты расчетов позволяют надеяться на экспериментальное подтверждение выявленного эффекта. Задавшись степенной зависимостью частоты и амплитуды колебаний решетки от времени $\omega \sim (-t)^\psi$, $s \sim (-t)^\psi$, для реализации условия $m < 0$ в соответствии с (52), (49) получим следующую зависимость:

$$-1 - 2\psi \leq \psi < \begin{cases} -\psi & \text{при } \psi \geq 0 \\ -\frac{2}{3}\psi & \text{при } 0 > \psi > -\frac{3}{4} \end{cases}. \quad (54)$$

Знак равенства в левой части этого выражения отвечает режимам с постоянной эффективной глубиной проникновения слоя.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОТИВОГРАДИЕНТНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

Для рассмотренных в предыдущем разделе бессдвиговых течений использование моделей переноса напряжений расширяет возможности моделирования только за счет описания анизотропии пульсаций. Для сдвиговых течений эти модели позволяют описать также нелокальность формирования во времени и пространстве $\langle u' u' \rangle$ и связанный с этим неградиентный характер турбулентного переноса для ряда сложных течений.

Как указывалось в разд.2, модель (12)–(16) сводится к модели (19)–(20) в предположении, что в уравнении переноса $\langle u' w' \rangle$ (12) можно пренебречь нестационарным, конвективным и диффузионным членами. Поэтому следует ожидать, что градиентное соотношение (18) исказит реальную структуру потока в тех зонах, где преобладающими становятся указанные факторы. Нелокальность турбулентного обмена проявляется через отрицательные значения порождения турбулентности $\mathcal{P} = -\langle u' w' \rangle \partial u / \partial z$, и соответственно коэффициент турбулентной вязкости ν_t . В рамках моделей для напряжений Рейнольдса неоднократно описывалась структура течений с $\mathcal{P} < 0$, формирующихся под влиянием преобладающего диффузионного потока $\langle u' w' \rangle$. Это в основном течения, находящиеся под влиянием удаленных зон генерации турбулентности сдвигом, такие как течения вблизи оси каналов с различной шероховатостью, пристенные струи, слои смещения и др. [10, 14, 34, 35].

В волновых потоках нелокальность формирования $\langle u' w' \rangle$ определяется главным образом временной изменчивостью касательного напряжения. Рассмотрим структуру таких течений на примере волнового пограничного слоя над гидродинамически шероховатым дном [36]. Ограничимся случаем длинных волн малой амплитуды, для которых можно не учитывать конвективный перенос. Уравнение движения в этом случае запишется

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \langle u' w' \rangle, \quad (55)$$

где $U = -U_0 \cos \omega t$ – скорость на внешней границе. Это же уравнение точно описывает осциллирующие течения в лотках, изученные [37]. Решение задачи (45), (12)–(17) с граничными условиями на уровне шероховатости z_0

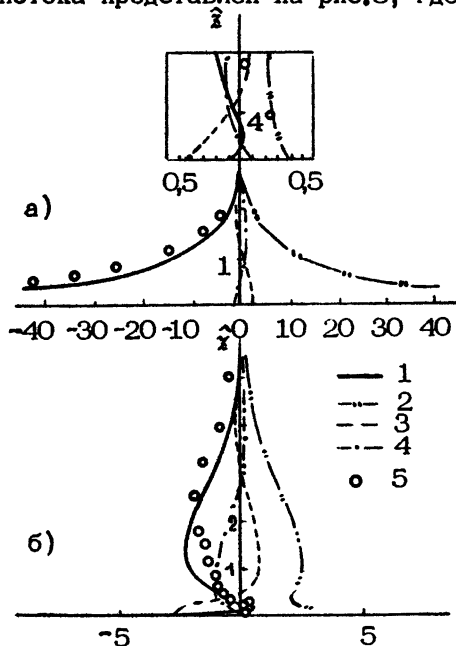
$$\frac{\partial \langle u' v'^2 \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \kappa}{\partial z} = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle u' w' \rangle = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (56)$$

и на внешней границе слоя

$$\frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \kappa}{\partial z} = \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \quad u = U, \quad (57)$$

зависит от одного безразмерного параметра - поверхностного числа Россби $Ro = U_0 / \omega z_0$ [38].

Как показали результаты расчетов [36], использование (12)-(17), (55)-(57) и (18)-(20) приводит к близким профилям скорости и касательного напряжения, кроме окрестностей точек смены знака $\langle u'w' \rangle$ и $\partial u / \partial z$, где лучшее соответствие экспериментальным данным дают уравнения для напряжений Рейнольдса. Пример расчета баланса турбулентной энергии осциллирующего потока представлен на рис.5, где влево от оси



Р и с. 5. Баланс турбулентной энергии осциллирующего потока при $\hat{t} = t/T = 0$ (а) и $\hat{t} = 5/12$ (б): 1 - порождение турбулентности ρ , 2 - диссипация ε , 3 - диффузия, 4 - $-\partial \kappa / \partial t$, 5 - порождение, вычисленное по экспериментальным данным [33]. Составляющие нормированы на $\omega U_0^2 / 100$, $Ro = 3720$

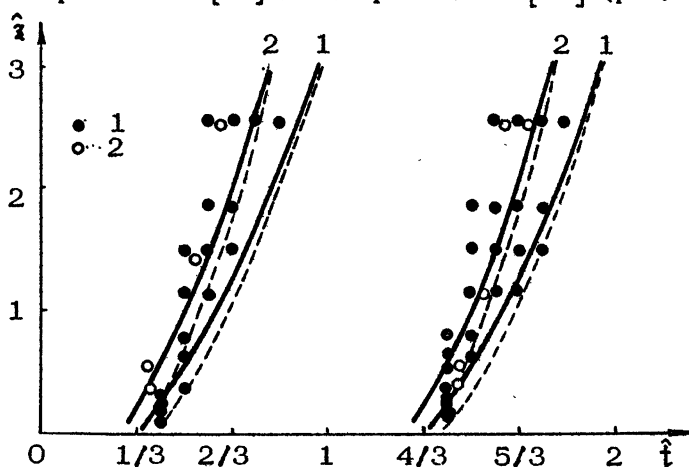
$\hat{x} = 100 \omega z / U_0$ отложены приходные, а вправо расходные составляющие баланса. Для анализа структуры потока в придонной области пренебрежем диффузией в выражении (12), записав его в виде

$$\frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial t} = -\lambda_1 \frac{\varepsilon}{R} \langle u'w' \rangle - \lambda_2 \langle w'^2 \rangle \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (58)$$

Умножая это уравнение на $\langle u'w' \rangle$, находим выражение для порождения турбулентности

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\varepsilon}{\langle w'^2 \rangle_K} \langle u'w' \rangle^2 + \frac{\langle u'w' \rangle}{\lambda_2 \langle w'^2 \rangle} \frac{\partial}{\partial t} \langle u'w' \rangle, \quad (59)$$

свидетельствующее о неизбежности появления отрицательных значений в моменты времени, предшествующие смене знака касательного напряжения. При этом $\langle u'w' \rangle$ принимает сколь угодно малые значения, а $\partial \langle u'w' \rangle / \partial t$ конечные значения, противоположные $\langle u'w' \rangle$ по знаку. Этот результат подтверждается численными расчетами [36] и экспериментами [37] (рис.6).



Р и с. 6. Линии нулевого градиента скорости (сплошные) и нулевого касательного напряжения (штриховые) в $\hat{z}-\hat{t}$ -плоскости и экспериментальные точки [33] отрицательных значений порождения турбулентности:
1 - $Re = 3720$, 2 - $Re = 855$

В плоскости $\hat{z}-\hat{t}$ зоны отрицательных ρ представляют собой полосы, ограниченные линиями нулевых значений $\partial u / \partial z$ и $\langle u'w' \rangle$.

Рассмотрим возможность модификации градиентной формулы (18) для учета нелокальных эффектов, основываясь на аналогии (58) с уравнением Максвелла для вязкоупругих жидкостей [39]. В длинных волнах отношение времени релаксации турбулентности к периоду колебаний меньше единицы: $\mu = \kappa / (\lambda_1 \varepsilon T) \ll 1$.

Введя "медленное" время $\tau = \mu t$ и разлагая $\langle u'w' \rangle$ по μ , из соотношения (48) с учетом (18) получим

$$-\langle u'w' \rangle = \nu_* \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\kappa}{\lambda_1 \varepsilon} \frac{d}{dt} \left(\nu_* \frac{\partial u}{\partial z} \right) + O(\mu^2).$$

Представляя коэффициент турбулентной вязкости в виде $\nu_* = \nu_*^{(1)} + \mu \nu_*^{(2)}(z, t) + O(\mu)^2$, с той же точностью придем к соотношению

$$-\langle u'w' \rangle = \nu_* \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu_* \kappa}{\lambda_1 \varepsilon} \frac{d^2 u}{dz dt}. \quad (60)$$

Обработка данных натуральных измерений [40] показала, что использование модифицированной формулы (60) расширяет возможности $\kappa - \varepsilon$ -моделей для описания осциллирующих потоков,

5. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В заключение кратко остановимся на некоторых трудностях построения уравнений переноса для стратифицированных течений, в которых силы плавучести играют определяющую роль. В большинстве моделей турбулентного переноса скалярных величин (температура, соленость) уравнения для них замыкаются на уровне вторых моментов по аналогии с уравнениями для напряжений Рейнольдса [1-6]. После упрощений того же типа, как и в разд.2, соотношения для потоков скалярных величин часто сводятся к градиентным формулам [2-4]. Такой подход к замыканию позволяет достаточно корректно описать процессы переноса при слабой стратификации.

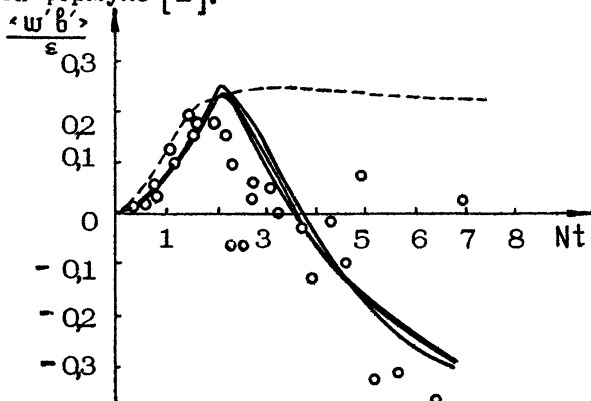
Однако типичной для океана является устойчивая стратификация, и вне тонких пограничных слоев у дна и поверхности турбулентность сосредоточена в отдельных пятнах. Применение моделей турбулентности к описанию этого перемежающегося во времени и пространстве процесса затрудняет также появление двух новых механизмов, связанных с силами плавучести. Они начинают эффективно действовать, когда характерные масштабы вихрей ℓ превышают масштаб Озмидова $L_o = \varepsilon^{1/2} N^{-3/2}$, где N - частота Вайсяля. Это, во-первых, излучение вихрями случайного поля внутренних волн и, во-вторых, растекание по горизонтали (коллапс) вихрей под действием сил плавучести. Потенциальная энергия перемешивания в вихрях преобразуется в кинетическую

кую энергию растекания вихрей и внутренних волн, которая в конечном итоге диссипирует, но уже не в результате каскадного турбулентного переноса. В качестве примера отметим результаты лабораторных экспериментов [41], в которых показано наличие противогradientного переноса скалярного поля при вырождении однородной турбулентности в устойчиво стратифицированной жидкости. Перенос обусловлен коллапсом вихрей и приводит к "рестратификации" - частичному восстановлению исходного поля плотности.

Попытка улучшить согласие расчетов с экспериментами была предпринята [42], где в переносе явно учитывалась составляющая, обусловленная коллапсом вихрей. Вертикальный поток плавучести аппроксимировался из соображений размерности следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle w' b' \rangle / \epsilon &= c_1 Ri_* && \text{при } Ri_* < Ri_{*c}, \\ \langle w' b' \rangle / \epsilon &= c_2 [1 - (Ri_* / Ri_1)^{1/2}] && \text{при } Ri_* > Ri_{*c}, \end{aligned}$$

где $b' = g\rho'/\rho_0$ - пульсации плавучести, ρ' , w' - пульсации плотности и вертикальной составляющей скорости, g - ускорение силы тяжести, $Ri_* = (\langle w'^2 \rangle \cdot b'^2)^{1/2} / \epsilon$ - турбулентное число Ричардсона, c_1 , c_2 , Ri_{*c} , Ri_1 - постоянные. Результаты расчетов эволюции $\langle w' b' \rangle / \epsilon$ при вырождении однородной турбулентности в жидкости с линейной стратификацией на рис.7 сопоставлены с экспериментами [41] и расчетами по традиционной градиентной формуле [2].



Р и с. 7. Эволюция во времени $\langle w' b' \rangle / \epsilon$ по данным [41]; сплошные линии - расчет [42] для различных начальных условий, штриховая - по формуле из работы [2]

Соотношения такого же типа более строго были получены из асимптотической процедуры решения уравнения для одноточечной функции распределения скоростей и плотности методом Чепмена-Энскога [43]:

$$\langle u_i' p' \rangle = -\alpha \ell_K^{1/2} \left[\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{3}{2} \frac{\langle p'^2 \rangle}{\rho_0 \kappa} (q_i - \lambda_i q) \right],$$

где α — постоянная, $q_i = (0, 0 - q)$, λ_i выражается через корреляционную функцию случайного поля турбулентных пульсаций плотности и зависит от соотношения между вертикальными и горизонтальными масштабами корреляции плотности.

* * *

Модели с использованием уравнений переноса турбулентных напряжений в последнее десятилетие стали достаточно распространенным инструментом анализа структуры сложных турбулентных течений в однородной жидкости. Относительная громоздкость таких моделей компенсируется в тех случаях, когда необходимо получить детальную информацию о поведении компонент тензора напряжений, исследовать зоны противогradientного переноса, связанные с неравновесностью формирования турбулентных напряжений.

Более простая двухпараметрическая κ - ϵ -модель во многих случаях с приемлемой точностью описывает профили скорости и напряжений. Как показано здесь, система нелинейных дифференциальных уравнений модели позволяет получить набор аналитических точных и автомодельных решений, описывающий, с одной стороны, важные в гидрофизических приложениях типы течений, а с другой стороны, служащий для апробации численных методов решения уравнений и оценки постоянных моделей.

Наибольшие трудности в настоящее время вызывает построение моделей турбулентного переноса в стратифицированной жидкости, учитывающих взаимодействие турбулентности с внутренними волнами и эффекты коллапса вихрей. Перспективы продвижения в этом направлении во многом связаны с постановкой специальных лабораторных экспериментов.

Л и т е р а т у р а

1. Турбулентность. Принципы и применения. М.: Мир, 1980.
2. Турбулентность. М.: Машиностроение, 1980.
3. Математические модели циркуляции в океане. Новосибирск: Наука, 1980.
4. Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984.
5. Турбулентные сдвиговые течения. 1, М.: Машиностроение, 1982.
6. Турбулентные сдвиговые течения. 2, М.: Машиностроение, 1983.
7. Давыдов Б.И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости // ДАН СССР. 1959, Т.127, №4, С.768
8. Давыдов Б.И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости // ДАН СССР. 1961, Т.136, №1, С.47.
9. Rotta J. Statistische theorie nicht-homogener turbulenz // Z.Phys. 1951. V.129. P.547.
10. Launder B., Reece G., Rodi W. Progress in the development of Reynolds-stress turbulence closure // J.Fluid Mech. 1975. V.68, P.537.
11. Naot D., Shavit A., Wolfshtein N. Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stress // Phys.Fluids. 1973. V.16. P.738.
12. Моин А.С. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. ФАО. 1965, Т.1, С.45.
13. Gibson M.M., Launder B.E. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J.Fluid Mech. 1978. V.86, P.49.
14. Hanjalic K., Launder B.A. Reynolds-stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J.Fluid Mech. 1972. V.52, P.609.
15. Daly B.J., Harlow F.H. Transport equations in turbulence // Phys.Fluids. 1970. V.13, P.2634.
16. Jones W.P., Launder B. E. The prediction laminarization with a two-equation model of turbulence // Int.J. Heat Mass Transfer. 1972. V.15, P.301.
17. Беренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеониздат, 1982.

18. Баренблатт Г.И., Сильное взаимодействие гравитационных волн и турбулентности //Изв. АН СССР, ФАО, 1977, Т.13, №8, С.845.
19. Мадерич В.С., Железняк М.И., Автомодельное развитие турбулентного слоя в однородной жидкости//Океанология, 1977, Т.17, Вып.5, С.784.
20. Железняк М.И., Мадерич В.С. Автомодельность неоднородных турбулентных течений без градиентов средней скорости// Турбулентные и стратифицированные течения. Киев: Наукова думка, 1979, С.73.
21. Мадерич В.С. О поведении компонент энергии турбулентности при автомодельном развитии турбулентного слоя//Прикладные задачи гидромеханики. Киев: Наукова думка, 1981, С.155.
22. Железняк М.И. К описанию поверхностного слоя океана в рамках двухпараметрических моделей турбулентности//Гидромеханика. 1980, Вып.41, С.72.
23. Мадерич В.С. О метастабильной локализации турбулентности//Гидромеханика. 1982, Вып.46, С.80.
24. Sonin A. Calibration of the turbulence model for the diffusion of turbulence //Phys.Fluids. 1983. V.26, N 10, P.2769.
25. Lele S.K. A consistency condition for Reynolds stress closures //Phys.Fluids. 1985. N 1, P.64.
26. Merritt G.E. Wake growth and collapse in stratified fluid //AIAA J. 1974. V.12, N 7, P.940.
27. Naudasher E. Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence// J.Fluid Mech. 1965. V.22, P.625.
28. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометиздат, 1981.
29. Bouvard M., Dumas H. Application de la methode du fil chaud a la mesure de la turbulence dans l'eau //La Hoiulle Blanche. 1967. V.22, N 3, P.131.
30. Thompson S.M., Turner J.S. Mixing across an interface due to turbulence generated by an oscillating grid //J.Fluid Mech. 1975. V.67, P.349.
31. Hopfinger E.J., Toly J.A. Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces //J.Fluid Mech. 1976. V.78, P.85.

32. Воропаев С.И., Гаврилин Б.Л., Зацепин А.Г., Федоров К.Н. Лабораторное исследование углубления перемешиваемого слоя в однородной жидкости//Изв. АН СССР, ФАО, 1980. Т.16. №2. С.197.

33. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью//ДАН СССР, 1975. Т.223. №6. С.1344.

34. Курбацкий А.Ф., Яненко Н.Н. О моделировании эффектов отрицательного порождения интенсивности пульсаций температуры в турбулентном слое смешения//ДАН СССР, 1982. Т.262. №2. С.301.

35. Eskinazi S., Erian F.F. Energy reversal in turbulent flows //Phys.Fluids. 1969. V.12. P.1988.

36. Железняк М.И. О структуре придонного волнового турбулентного пограничного слоя//Гидромеханика, 1987. Вып.56. С.47.

37. Johnson J.G., Carlsen N.A. Experimental and theoretical investigation in an oscillatory turbulent boundary layer //J.Hydraul.Res. 1976. V.14. N.1.P.45

38. Каган Б.А. Динамика придонного пограничного слоя океана//Итоги науки и техники. Океанология/ ВИНТИ. М.: 1981.Т.6. С.81.

39. Лойцянский Л.Г. Наследственные явления в турбулентных движениях//Изв. АН СССР, МЖГ, 1982. №2. С.5.

40. Wolf J. Estimation of shearing stresses in a tidal current with application to the Irish sea // Marine Turbulence Proc. 11th Intern. Liege Colloq. Ocean Hydrodyn. Amsterdam. 1980. P.319.

41. Stillinger D.C., Helland K.N., Van Atta C.W. Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid //J. Fluid.Mech. 1983. V.131. P.91.

42. Авдеева И.Ю., Мадерич В.С. Особенности вырождения турбулентности в устойчиво стратифицированной жидкости// Морской гидрофизический журнал. 1985. №6. С.8.

43. Островский Л.А., Троицкая Ю.И. К теории турбулентного массопереноса в стратифицированной жидкости//Механизмы генерации мелкомасштабной турбулентности в океане: Тез. докл. 2-го Всесоюз. симпоз. Калининград, 1985. С.68.

ПРОБЛЕМЫ
И ВОЗМОЖНОСТИ СПУТНИКОВОЙ ГИДРОФИЗИКИ

Г.К.Коротаев

ВВЕДЕНИЕ

Источником развития океанологии, как и любой другой естественной науки, является непосредственная информация об изучаемом объекте — океане. В отличие от традиционного физического подхода, где требуемая информация об объекте получается в результате проведения специальным образом спланированного эксперимента, в океанологии, как и в других природо-ведческих науках, такой подход не применим. В связи с этим уровень понимания процессов, протекающих в океане, в конечном итоге определяется возможностями наблюдательной системы. Бурный прогресс в развитии океанографических исследований, наблюдавшийся в послевоенные годы, во многом был обусловлен созданием новой аппаратуры и методик проведения океанографических исследований. Созданные аппаратурные комплексы позволили реализовать целый ряд наблюдательных программ, проводя измерения с судов, либо осуществляя заякоренные постановки автономных аппаратурных комплексов. Результатом исследований явилось формирование представлений об изменчивости полей Мирового океана, систематизированное впервые в работе [1]. Актуальной задачей настоящего времени становится исследование взаимодействия процессов с различными пространственно-временными масштабами и создание моделей динамики, воспроизводящих не только качественно, но и количественно изменчивость полей океана. Решение этой новой задачи традиционными методами на основе судовых экспериментов и различного рода автономных измерений в океане оказывается практически невозможным. Эти обстоятельства стимули-

ровали поиски новых принципов организации наблюдательной океанографической системы, которая дала бы возможность обеспечить дальнейший прогресс в изучении океана, возможность получать информацию об изменчивости полей океана на акваториях, сопоставимых с пространственным масштабом описываемого явления в течение промежутка времени, отвечающего периоду процесса с соответствующей дискретностью измерений в пространстве и во времени. Одним из перспективных направлений развития наблюдательной океанографической системы нового уровня является подход, основанный на измерениях характеристик океана с искусственных спутников Земли (ИСЗ).

Использование ИСЗ в качестве носителей аппаратуры дистанционного зондирования океана дает возможность проводить синхронные измерения на значительных акваториях океана и обеспечить высокую периодичность обновления информации. Вместе с тем создание спутниковой океанографической системы сопряжено с рядом проблем, поскольку с ИСЗ измеряются косвенные характеристики океанической динамики. В формировании сигнала, принимаемого аппаратурой, установленной на ИСЗ, участвуют процессы разных пространственно-временных масштабов. Дополнительные сложности создает трансформация сигнала в атмосфере. Если учесть, наконец, поступление сверхбольших в сравнении с получаемыми традиционными средствами объемов информации, то становится ясным, что создание наблюдательной океанографической системы на основе измерений с ИСЗ требует объединения усилий широкого круга специалистов разных дисциплин — космической техники, научного приборостроения, радиофизики, оптики, методов автоматизированной обработки больших объемов информации, а также собственно океанологии. Комплексный характер исследований, необходимый для реализации наблюдательной океанографической системы с использованием ИСЗ в качестве носителя аппаратуры, делает целесообразным объединение этих исследований общим названием "космическая океанография" или "спутниковая гидрофизика".

ПРИНЦИПЫ НАБЛЮДЕНИЙ ОКЕАНА С ИСЗ

В области наблюдений океана из космоса к настоящему времени сложилось несколько подходов, использующих различные принципы. Первый подход основан на измерениях естественного излучения океана в широком диапазоне спектра электромагнитных волн и на анализе его зависимости от характеристик приповерхностного слоя океана [2,3,4]. Второй подход

связан с установкой на ИСЗ аппаратуры, излучающей сигнал и принимающей рассеянное или отраженное поверхностью океана излучение [5,6]. Наконец, третий подход связан с использованием ИСЗ как ретранслятора измерений, производящихся с различного рода носителей традиционными способами [7].

Пассивное дистанционное зондирование океана

Пассивное дистанционное зондирование океана основано на измерении собственного теплового излучения океана и рассеянного или отраженного солнечного света. При прохождении излучения через атмосферу оно трансформируется за счет процессов поглощения и рассеяния. Эти процессы описываются уравнением переноса излучения:

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial I_{\lambda}(z, \theta, \psi)}{\rho(z) dz} = & \alpha_{\lambda}(z) [B_{\lambda}(z) - I_{\lambda}(z, \theta, \psi)] + \\ + \epsilon_{\lambda}(z) & \left[\int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi} \mathcal{J}_{\lambda}(z, \theta, \psi, \theta', \psi') I_{\lambda}(z, \theta', \psi') \sin \theta' d\theta' d\psi' - \right. \\ & \left. - I_{\lambda}(z, \theta, \psi) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где z - высота, θ и ψ - зенитный угол и азимут, α_{λ} и ϵ_{λ} - спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния на единице массы среды, λ - длина волны излучения, \mathcal{J}_{λ} - спектральная индикатриса рассеяния, B_{λ} - отношение спектральных коэффициентов излучения и поглощения. Спектральная интенсивность излучения I_{λ} при приближенном рассмотрении атмосферы как локально плоскопараллельной среды зависит от горизонтальных координат и времени параметрически. Коэффициенты α_{λ} , ϵ_{λ} и индикатриса \mathcal{J}_{λ} определяются формулами

$$\alpha_{\lambda} = \sum c_k \alpha_{\lambda k}; \quad \epsilon_{\lambda} = \sum c_k \epsilon_{\lambda k}; \quad \epsilon_{\lambda} \mathcal{J}_{\lambda} = \sum c_k \epsilon_{\lambda k} \mathcal{J}_{\lambda k}, \quad (2)$$

где c_k - концентрации поглощающих веществ, $\alpha_{\lambda k}$, $\epsilon_{\lambda k}$ и $\mathcal{J}_{\lambda k}$ их спектральные коэффициенты поглощения, рассеяния и индикатрисы рассеяния. Функция B_{λ} задается законом Кирхгофа и находится по формуле Планка:

$$B_{\lambda} = \frac{2c^2 h}{\lambda^5} \left[\exp \left(\frac{ch}{\lambda kT} - 1 \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

где c - скорость света, h - постоянная Планка, k - постоянная Больцмана.

Граничные условия для уравнения (1) должны быть сформулированы на верхней границе атмосферы и на границе раздела океан - атмосфера. Через граничное условие на границе раздела океан - атмосфера интенсивность излучения I_1 , принимаемая на ИСЗ, зависит от характеристик океана. Зависимость коэффициентов поглощения и рассеяния и индикатрисы рассеяния от состояния атмосферы обуславливает многократное искажение сигнала, принимаемого на ИСЗ. При исследованиях океана, как правило, используются измерения в таких участках спектра, где влияние атмосферы относительно мало. Поскольку вклад атмосферного поглощения и рассеяния в формирование принимаемого сигнала меняется в зависимости от длины волны излучения, проведение измерений на нескольких длинах волн позволяет учитывать влияние атмосферы при совместной обработке сигналов.

Для исследований океана дистанционными методами используются измерения в видимой и инфракрасной частях оптического диапазона спектра, а также в микроволновом диапазоне. Измерения в видимой и ближней инфракрасной частях спектра (0,4 - 1,5 мкм) дают возможность характеризовать цвет моря зависимостью коэффициента диффузного отражения от концентрации хлорофилла и других веществ в морской воде, а также шероховатостью поверхности моря при наблюдениях отраженного света. Атмосферное влияние в этой части спектра связано главным образом с рассеянием на молекулах воздуха и частицах аэрозоля (последние слагаемые в формуле (1)). Облачность непроницаема для световых лучей, поэтому при плотной облачности наблюдения в видимой части спектра невозможны. В случае разрывной облачности попадание облака в поле зрения прибора существенно искажает принимаемый сигнал.

В инфракрасной части спектра проводятся измерения собственного теплового излучения системы океан - атмосфера в области длин волн от 3,5 до 20 мкм. Для дистанционного зондирования океана наибольший интерес представляют так называемые окна прозрачности атмосферы в интервалах длин волн 3,5 - 4 мкм, 8 - 9 мкм и 11 - 12 мкм. Однако и в окнах прозрачности мешающее влияние атмосферы, даже безоблачной, достаточно существенно. Влияние безоблачной атмосферы в инфракрасном участке спектра определяется эффектами поглощения молекулами газовых компонент (H_2O , CO_2 , O_3 и др.), рассеянием и поглощением частицами аэрозоля, а также тепловым излучением всех ее составляющих. Как правило, считается, что эффектами рассеяния можно пренебречь. Тогда уравнение

переноса (1) может быть проинтегрировано и записано в виде

$$I_{\lambda}(H) = \epsilon_{\lambda} t_{\text{атл}} B_{\lambda}(T_0) + I_{\text{атл}}^1 + (1 - \epsilon_{\lambda}) t_{\text{атл}} I_{\text{атл}}^2, \quad (4)$$

где $\epsilon_{\lambda} B_{\text{атл}}(T_0)$ – собственное излучение океана (T_0 – температура, ϵ_{λ} – излучательная способность поверхности океана); $I_{\text{атл}}^1$ и $I_{\text{атл}}^2$ – собственное излучение атмосферы вверх и вниз соответственно; $t_{\text{атл}}$ – функция пропускания атмосферы; $I_{\lambda}(H)$ – интенсивность излучения, принимаемого на спутнике. Излучательная способность поверхности океана мало отличается от единицы, поэтому влияние атмосферы сказывается главным образом через функцию пропускания и вклад в формирование сигнала собственного излучения атмосферы вверх. При проведении измерений в окнах прозрачности основным поглощающим компонентом атмосферы является водяной пар.

Достоинством микроволнового диапазона (длины волн от 1 мм до 1 м), с точки зрения дистанционных исследований океана, является слабое влияние атмосферы на принимаемое излучение даже в условиях облачности. Для микроволнового диапазона формула (3) может быть линеаризована, поэтому интенсивность излучения удобно характеризовать радиояркостной температурой $T_{\text{я}}$. Уравнение переноса (4) при этом записывается следующим образом:

$$T_{\text{я}\lambda} = \epsilon_{\lambda} t_{\text{атл}} T_0 + T_{\text{я}\lambda}^1 + (1 - \epsilon_{\lambda}) t_{\text{атл}} T_{\text{я}\lambda}^2, \quad (5)$$

где $T_{\text{я}}^1$ и $T_{\text{я}}^2$ – радиояркостная температура, отвечающая излучению атмосферы вверх и вниз соответственно. К настоящему времени для измерений характеристик океана наиболее употребителен участок спектра с длинами волн от 0,8 до 8,5 см. При умеренной облачности и отсутствии осадков для длин волн больших 5 см атмосфера оказывает пренебрежимо малое влияние на радиотепловое излучение. В области длин волн около 1,35 см расположена резонансная линия поглощения водяным паром. Для длин волн меньше 2 см на радиояркостную температуру оказывает заметное влияние облачность, в силу чего основная информация об океане содержится в измерениях на длинах волн более 2 см. Вместе с тем радиояркостная температура и на этих длинах волн зависит не только от температуры, но и от состояния поверхности океана. Изменения состояния поверхности, вызываемые ветровым воздействием, оказываются весьма существенной помехой при определении температуры: становится невозможным не только применение простых одноканальных способов измерений, но и внесение

правок по данным дополнительных измерений в области спектра, где не проявляется мешающее влияние атмосферы. В итоге оказывается необходимым проведение комплексных измерений излучения различных поляризацй на нескольких длинах волн, что позволяет одновременно определить температуру поверхности, скорость приводного ветра, влагосодержание атмосферы и водность облаков.

Активные методы дистанционного зондирования океана

Помимо пассивных методов дистанционного зондирования океана, к настоящему времени исследованы возможности активной радиолокации с борта ИСЗ, одно из направлений которой основано на приеме рассеянного поверхностью океана сигнала с учетом избирательности рассеяния. Эти измерения применяются для определения скорости и направления приводного ветра (скаттерометрический режим) и пространственной структуры поверхностного волнения (локатор бокового обзора). Основой скаттерометрического метода является брэгговское рассеяние микроволн на капиллярных волнах. Величина рассеянного сигнала пропорциональна амплитуде капиллярных волн, которая определяется интенсивностью ветра. Анизотропия обратного рассеяния радиоволн позволяет определять направление ветра. Локатор бокового обзора дает детальную картину поверхностного волнения при работе в режиме синтезирования апертуры. В последнем случае используется доплеровский сдвиг частоты, возникающий в силу движения спутника, для выделения в принимаемом сигнале вкладов различных точек подстилающей поверхности. В результате разрешение вдоль трассы полета спутника может быть доведено до нескольких метров.

Второе направление связано с применением радиолокаторов для измерений высоты полета спутника. При условии точного знания орбиты спутника эти измерения позволяют определить топографию морской поверхности. Выделяя часть измерений уровня поверхности, связанную с океанической динамикой, можно рассчитать скорость поверхностных геострофических течений. По трансформации формы принимаемого импульса, кроме того, определяется высота волн и скорость приповерхностного ветра.

Система сбора океанографических данных на базе ИСЗ

Одно из направлений развития наблюдательской океанографической системы с использованием ИСЗ связано с оснащением торговых, рыбопромысловых и других судов относительно простой измерительной аппаратурой для определения профилей температуры в верхнем слое океана, метеопараметров в приводном слое и ретрансляцией измерений через ИСЗ в центры данных. Другое направление является современным вариантом "бутылочной почты". В океан выпускаются свободно дрейфующие буи (дрифтеры), координаты которых фиксируются с ИСЗ. Таким образом определяется скорость поверхностных течений. Кроме того, датчиковая система дрейфтера, как правило, позволяет определять температуру в поверхностном слое океана и приводном слое атмосферы и, возможно, другие параметры.

ГЛОБАЛЬНЫЙ ОБЗОР ОКЕАНА С ИСЗ

Возможность контроля процессов в океане в глобальных масштабах на основе измерений с ИСЗ в первую очередь имеет значение для описания крупномасштабной структуры и изменчивости океанических полей (пространственные масштабы свыше десятков километров и временные масштабы более недели). Специфика задач этого класса заключается в необходимости проведения одновременных количественных измерений комплекса параметров, характеризующих состояние океана. Высокие требования к точности расчета параметров по данным дистанционных измерений вызывают необходимость создания аппаратуры с высокой чувствительностью, стабильностью, низким уровнем шумов и т.п. Кроме того, измерения проводятся непрерывно в течение года – нескольких лет.

Высокоточные количественные расчеты характеристик полей океана невозможны без надежных методик обработки дистанционных измерений. Реализация таких методик требует создания моделей формирования излучения поверхностью океана и его трансформации в атмосфере и развитой системы сбора данных измерений и технических средств, позволяющих их апробацию на больших массивах информации.

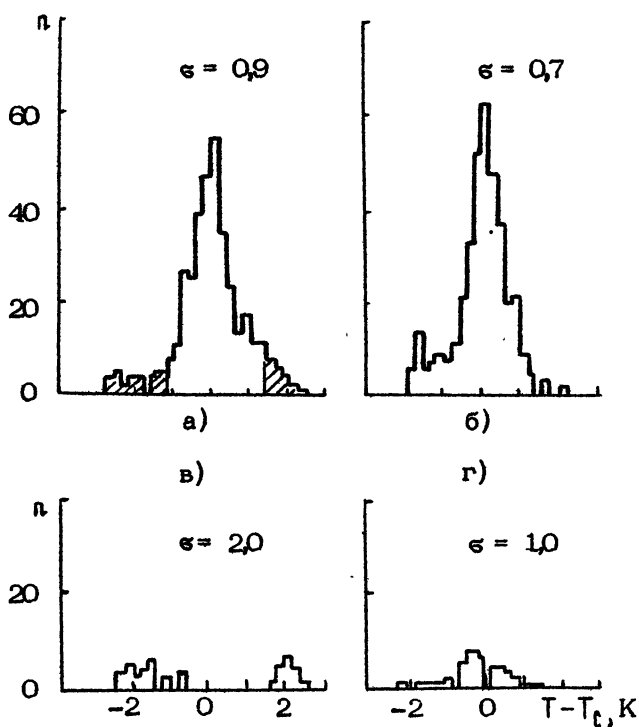
Трансформация излучения в атмосфере, описываемая уравнением (1), определяется профилями температуры, влажности, концентраций газовых компонент и аэрозоля, существенно зависит от попадания в поле зрения прибора облачности, т.е.,

вообще говоря, должна характеризоваться бесконечным числом параметров. При требуемых точностях расчета характеристик полей океана ни в одном из диапазонов влияние атмосферы не является пренебрежимо малым, поэтому среди бесконечного числа атмосферных параметров выделяются те, которые создают основные помехи. Часть помех — таких, как облачность для оптического диапазона или зоны осадков для микроволнового диапазона, — отфильтровывается путем отбраковки соответствующих измерений. Здесь проблему создает частичное попадание сильных помех в поле зрения прибора. Примером помех другого типа являются вариации влагосодержания атмосферы, учет которых при проведении измерений температуры поверхности океана в инфракрасном или микроволновом участках спектра осуществляется путем проведения измерений на нескольких длинах волн и последующей коррекцией измерений в основном канале. Подобный подход к устранению влияния атмосферы реализуется в двухканальных методиках расчета температуры поверхности океана по данным дистанционных измерений в тепловом инфракрасном участке спектра [8]. Обработка измерений состоит из двух этапов: на первом осуществляется выделение безоблачных участков по измерениям в видимой части спектра, а затем в безоблачных участках температура поверхности океана T_0 рассчитывается по формуле

$$T_0 = 1,035 T_{11} + 3,046 (T_{11} - T_{12}) - 283,93, \quad (6)$$

где T_{11} и T_{12} — радиационные температуры на длинах волн 11 и 12 мкм. Среднеквадратичная погрешность расчета T_0 по формуле (6) оценивается в $0,6^\circ\text{C}$.

Особенности применения двухканальной методики расчета температуры поверхности океана могут быть проиллюстрированы следующим примером. На рис.1,а,б приведены гистограммы ошибки оценки T_0 регрессионным методом по данным ИК-измерений с ИСЗ "Космос-1151" на длине волны 11 мкм (рис.1,а) и на длинах волн 11 и 12,7 мкм (рис.1,б). Среднеквадратичная погрешность ϵ расчета T_0 в первом случае равна $0,9\text{K}$, а во втором — $0,7\text{K}$. Различие в точности оценки T_0 по одноканальной и двухканальной методикам не столь значительно. Если же в обработке использовать те точки, для которых применение одноканальной методики давало погрешность более $1,5\text{K}$, то регрессионная одноканальная оценка дает погрешность 2K , тогда как двухканальная — 1K . Таким образом, преимущества двухканальной методики выявляются именно на крыльях гистограмм, там где одноканальные методы максимально неточны.



Р и с. 1. Гистограммы ошибок оценки температуры поверхности океана по измерениям на длине волны 11 мкм (а,в) и 11 и 12,9 мкм (б,г); в,г – гистограммы ошибок оценки для точек, отмеченных на рис.1,а штриховкой

Успешность применения к расчетам температуры поверхности океана двухканальных методик указывает на то, что параметры, характеризующие состояния атмосферы, могут быть классифицированы по степени их вклада в излучение и последовательно учтены в зависимости от требований к точности расчета основных величин. Наиболее подходящим для этих целей является аппарат естественных ортогональных функций [9], который в неявном виде использовался при выводе регрессионных зависимостей типа (6) на основе модельных расчетов по уравнению переноса (2) [10]. При этом, что отмечалось уже и ранее [11], состояние атмосферы может характеризоваться некими "обобщенными" параметрами, не имеющими прямого физического смысла. Трактовка методик расчета характеристик океана по измерениям в малом числе каналов с по-

мощью аппарата естественных ортогональных функций дает возможность понять и принципиальную ограниченность такого подхода. Он, фактически, основан на коррелированности отдельных факторов, характеризующих состояние атмосферы, и может давать плохие результаты в аномальных ситуациях, когда типичные корреляционные связи нарушены.

Окончательный вывод о возможностях малоканальных методик может быть сделан после их оценок на достаточно представительных выборках. Составление представительных выборок, когда речь идет о расчете T_0 с точностью в несколько десятых градуса, само по себе составляет проблему, так как прецизионные измерения в океане довольно редки. Модельные расчеты на основе уравнения (2) будут давать достоверные результаты только при высококачественном описании поглощения и наличии надежной статистики изменчивости газовых компонент в атмосфере. Послойное описание атмосферы на основе синхронных многоканальных измерений в различных диапазонах спектра [12] также требует создания моделей трансформации излучения высокого уровня. Другим возможным перспективным подходом является совместное рассмотрение моделирования состояния атмосферы и обработка дистанционных измерений с точки зрения внесения результатов расчетов профилей температуры и влажности атмосферы по моделям атмосферной циркуляции в качестве априорной информации в методики обработки дистанционных измерений.

Проблемы, кратко проиллюстрированные на примере задачи определения температуры поверхности океана, типичны и для всех других направлений дистанционного зондирования. Всюду требуется тщательный анализ разнообразных методических погрешностей (например, учет геоида, влияния ионосферы на распространение сигнала, воздействия солнечного ветра на спутнике при проведении альтиметрических измерений) и создание методов устранения вклада мешающих факторов. Тем не менее выполненные экспериментальные программы в области дистанционного зондирования океана позволяют положительно оценить возможность глобального контроля состояния океана на основе дистанционных измерений с ИСЗ (см. таблицу).

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ С ИСЗ

Второе направление использования дистанционных измерений с ИСЗ в океанологии связано с получением качественно

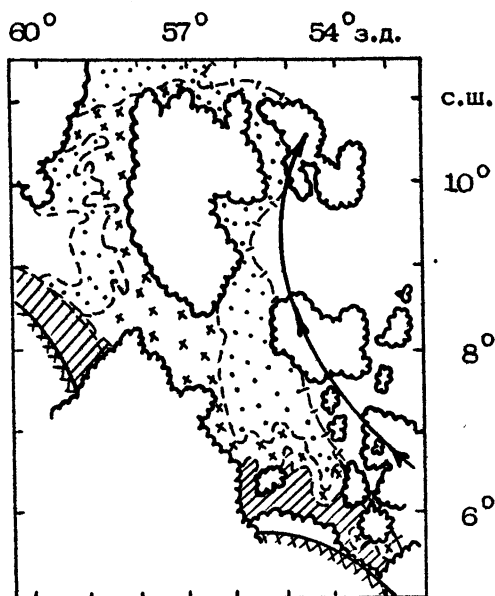
Объект исследования	Температура поверхности, °C	Скорость ветра, %	Направление ветра, °	Тепловой баланс, %	Радиационный баланс, %	Уровень, см
Западные пограничные течения	1 0,6	-	-	-	-	10 8
Экваториальные области океанов	0,5 0,6	20 10-20	20 16	10 20*	10 5**	5 8
Синоптическая изменчивость океана	0,2 0,6	10 10-20	10 16	-	-	5 8
Деятельный слой океана	0,5 0,6	20 10-20	20 16	20 20	20 5	3 8

новых представлений об океанических процессах на основе синхронной площадной съемки поверхности океана в полосе от сотни до нескольких тысяч километров с разрешением от десятка метров до километра. Информация об океанических процессах, содержащаяся в снимках поверхности океана, проявляется в виде пространственных контрастов в структуре принимаемого сигнала. Наблюдаемое отображение океанических процессов в поверхностных контрастах (температурных, цветовых, в шероховатости поверхности), как правило, является косвенной характеристикой самого процесса и требуются специальные методы интерпретации изображений, получаемых с ИСЗ. Разработка таких методов является одним из направлений спутниковой гидрофизики.

Температурные контрасты на свободной поверхности океана, проявляющиеся на изображениях, принимаемых с ИСЗ, позволяют идентифицировать фронтальные разделы интенсивных океанических течений типа Гольфстрима и Куроиси, развивающиеся на течениях колебания и меандры, отрыв меандров и формирование синоптических вихрей [13,14]. Температурные контрасты позволяют также описывать планетарные волновые процессы [15] и динамику апвеллингов [16].

Цветовые контрасты водных масс, наблюдаемые с ИСЗ, отражают, как правило, лагранжеву динамику океанических процессов. Многочисленные примеры наблюдений океана с ДОС "Салют" приведены в работе [17]. Интерпретация цвета моря как трассера позволяет описывать тонкую структуру вихревых образований в океане [18], динамику прибрежных течений (рис.2), планетарные волновые процессы вблизи шельфа. Анализ цветовых контрастов по измерениям с ИСЗ позволил выделить "грибовидные структуры", часто наблюдаемые в различных районах морей и океанов [19]. В качестве трассера при поверхностной динамике океана успешно используется также битый лед, довольно легко наблюдаемый с ИСЗ.

Оптические наблюдения вблизи солнечной дорожки и радиолокационные измерения дают характеристику шероховатости морской поверхности. Поскольку в формирование структуры взволнованной поверхности океана вносят вклад процессы разнообразных пространственных и временных масштабов, то и образы, наблюдаемые, например, в локационных изображениях, отражают различную динамику. Прежде всего неоднородности основного рассеивающего элемента — капиллярной ряби — вызваны неоднородностями ветрового воздействия. В результате в структуре принимаемого сигнала возникают неоднородности,



Р и с. 2. Положение фронта мутных вод вблизи устья Амазонки. Сплошная линия – дрейф поверхностного буя

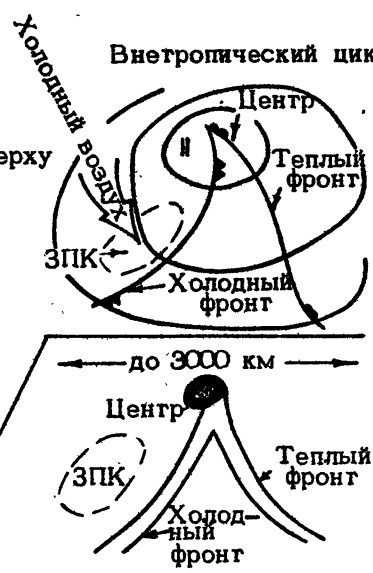
позволяющие идентифицировать атмосферные циклоны (рис.3) или характерные мезомасштабные ячейки атмосферной циркуляции (рис.4).

Модуляция рассеяния капиллярных волн, создаваемая крупными гравитационными волнами, дает возможность не только идентифицировать последние, но и следить за их трансформацией на течениях. Несмотря на огромную разницу в масштабах явлений (течения изменяются на расстояниях в сотни километров, а волны имеют длину в сотни метров), искривления траекторий волновых пакетов крупномасштабными течениями отчетливо наблюдаются в изображениях, получаемых с ИСЗ (рис.5), что дает возможность ставить задачи идентификации океанических течений по кинематике волновых пакетов. Оценки показывают [20], что синоптические вихри являются своеобразными линзами для поверхностных волн – в фокусе этой линзы волны становятся круче и обрушиваются с появлением пены, что проявляется в соответствующих контрастах в локационных изображениях (рис.6).

Тропический циклон

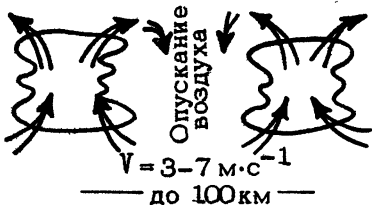


Внегропический циклон

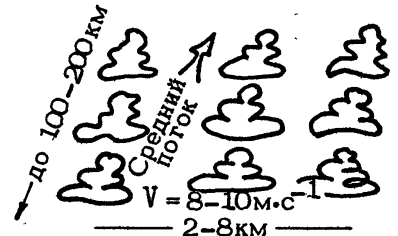


Р и с. 3. Структура циклонов (вверху) и их образов локационном изображении, вызываемых неравномерностями ветра

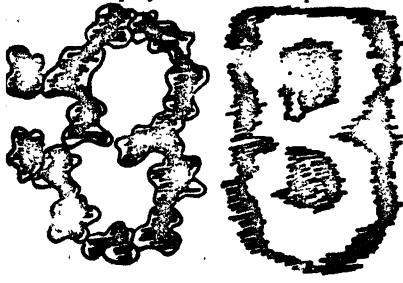
Конвективные ячейки



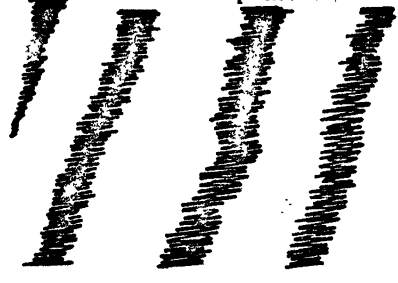
Гряды конвективной облачности



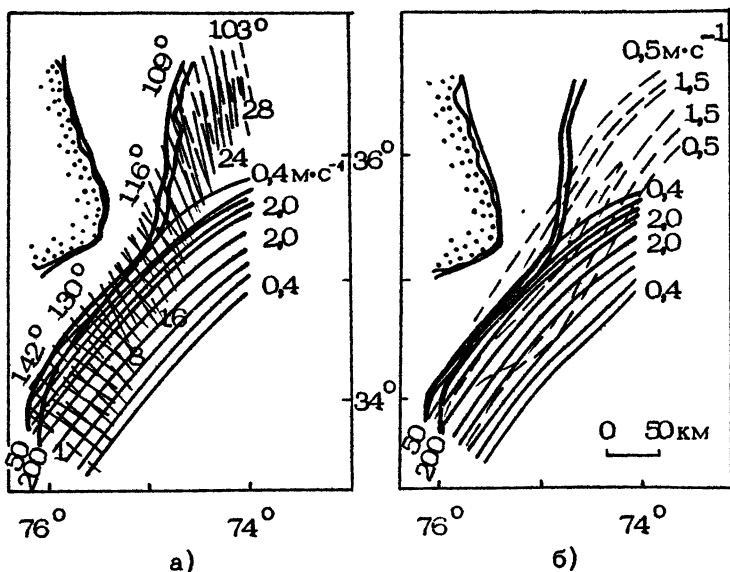
Вид сверху РЛ-изображение



РЛ-изображение



Р и с. 4. Структура локационного изображения в районах образования кучевых облаков

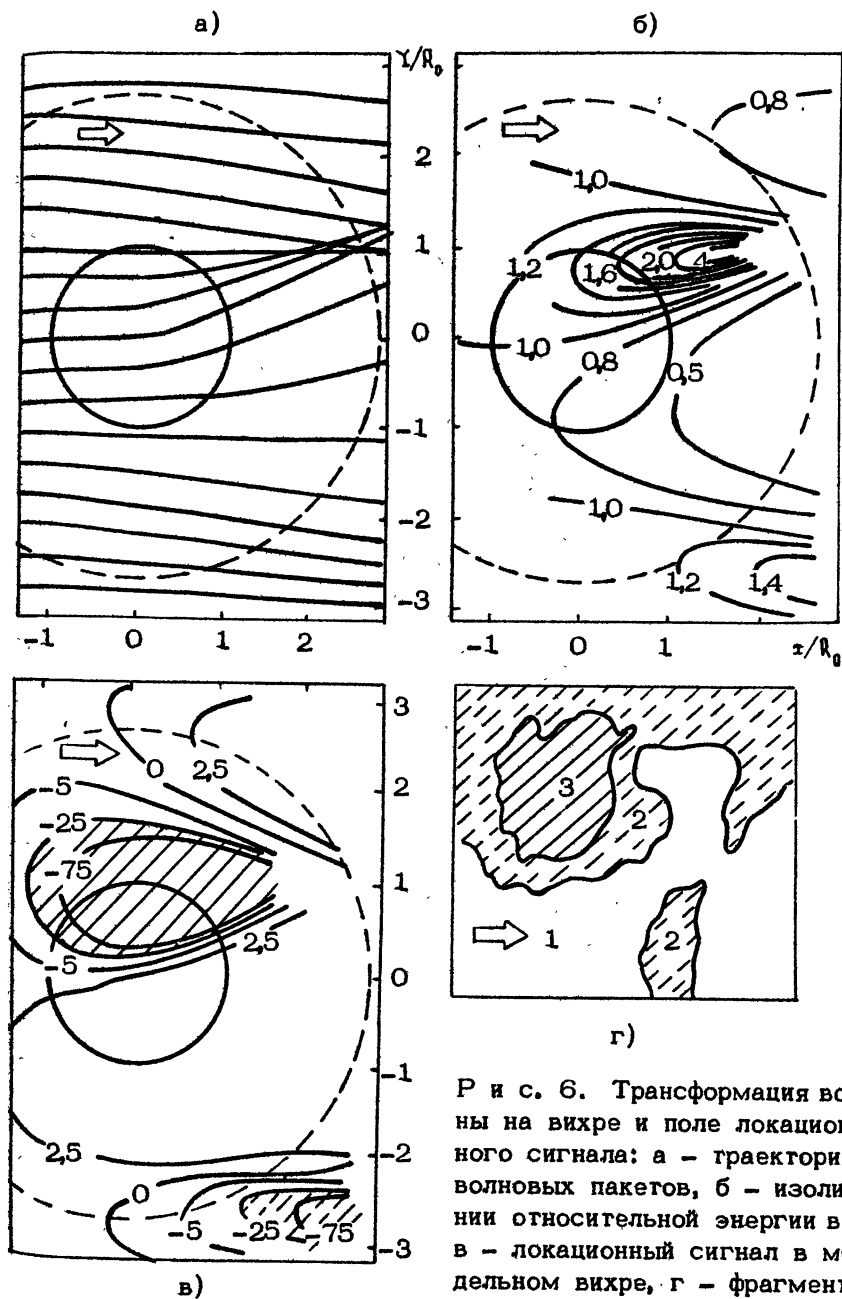


Р и с. 5. Лучевые траектории волн, наблюдаемые локатором с синтезированной апертурой (сплошная линия) и рассчитанные по положению урагана (пунктир) (а). Восстановленные по рефракции волн скорости Гольфстрима (пунктир) и океанографический прогноз (сплошная линия) (б) согласно [21]

Широко известными являются наблюдения с ИСЗ внутренних волн по их проявлениям на поверхности за счет модуляции поверхностного волнения [22]. Дальнейшее развитие анализ изображений с ИСЗ получит, по-видимому, после того, как появится возможность планировать последовательную съемку одного и того же участка поверхности океана для описания временной динамики процесса.

НАБЛЮДЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА И ЕГО ГЛУБИННАЯ ДИНАМИКА

Наблюдения океана с ИСЗ позволяют непосредственно характеризовать только процессы, протекающие у его поверхности. Вместе с тем трансформация состояния поверхности океана происходит и под воздействием глубинных процессов. В этой связи существует потенциальная возможность количест-



Р и с. 6. Трансформация волны на вихре и поле локационного сигнала: а - траектория волновых пакетов, б - изолинии относительной энергии волны в - локационный сигнал в модельном вихре, г - фрагмент локационного изображения, полученного с ИСЗ (1 - фон, 2 - отрицательный контраст, 3 - сильный отрицательный контраст). Стрелка на рисунках - направление ветра

венной оценки вертикальных профилей полей океана по измерениям с ИСЗ. Одним из подходов является учет корреляции между изменениями уровня свободной поверхности океана и изменениями профилей плотности морской воды в главном термоклине [4]. Другой подход связан с оценкой параметров деятельного слоя океана по кинематике внутренних волн. Суть подхода заключается в том, что дисперсионное отношение внутренних волн определяется профилем частоты Вьёсяля-Брента, квадрат которой пропорционален вертикальному градиенту плотности морской воды. Внутренние волны через модуляцию поверхностного волнения достаточно часто проявляются на морской поверхности. Таким образом, если по последовательности снимков одной и той же части поверхности океана удавалось бы восстанавливать дисперсионное соотношение внутренних волн, то можно было бы затем рассчитывать по крайней мере отдельные параметры стратификации океана. Анализ, выполненный в работе [23], указывает на принципиальную возможность определения таким образом глубины залегания сезонного термоклина и среднего значения частоты Вьёсяля-Брента в сезонном термоклине. Дополнительные возможности связаны с анализом траекторий распространения пакетов внутренних волн. Вместе с тем реализация такого подхода предъявляет высокие требования к наблюдательной системе, в частности к точности пространственной привязки изображений.

* * *

Выполненные к настоящему времени эксперименты по наблюдениям океана из космоса продемонстрировали возможность количественного определения ряда его характеристик и формирования качественно новых представлений об океанических процессах на основании измерений с ИСЗ. За последнее время не появилось кардинально новых подходов, принципов, приборов для дистанционного зондирования океана. Представляется, что основным направлением деятельности в области наблюдений океана из космоса будет переход от экспериментов с отдельными приборами к созданию спутниковых систем и разработке технологии обработки и интерпретации результатов измерений. Даже краткий обзор дистанционных исследований океана с ИСЗ, выполненный в настоящей статье, позволяет предполагать, что существенным блоком в системах обработки должны быть модели динамики атмосферы и океана.

Л и т е р а т у р а

1. Монин А.С., Каменкович В.М., Корг В.Г. Изменчивость Мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. Башаринов А.Е., Гурвич А.С., Егоров С.Т. Радиоизлучение Земли как планеты. М.: Наука, 1974.
3. Малкевич М.С. Учет атмосферы в задачах изучения природных ресурсов Земли из космоса //Космические исследования земных ресурсов. М.: Наука, 1976. С.11.
4. Нелепо Б.А., Корогаев Г.К., Суетин В.С., Терехин Ю.В. Исследование океана из космоса. Киев: Наукова думка, 1985.
5. Нелепо Б.А., Терехин Ю.В., Коснырев В.К., Хмыров Б.Е. Спутниковая гидрофизика. М.: Наука, 1983.
6. Apel J.R. Satellite sensing of ocean surface dynamics //Rev.Earth Planet.Sci. 1980. V.8. P.303.
7. Taillade M. Actual performance and capabilities of the Argos system //Adv.Space Rev. 19 V.1. P.95.
8. Robinson I.S. Satellite oceanography. Ellis Horwood Limited. England. 1985.
9. Обухов А.М. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций //Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1960. №3. С.432.
10. Deschamps P.Y., Phulpin T. Atmospheric correction of infrared measurements of sea surface temperature using channels at 3,7,11 and 12 m //Bound. Layer Met. 1980, V.2. N 2. P.131.
11. Нелепо Б.А., Суетин В.С. Исследование функции радиояростной температуры и общей обратной задачи зондирования с ИСЗ над океаном //Морск. гидрофиз. исследования /МГИ АН УССР. Севастополь, 1976. №2. С.140.
12. Малкевич М.С. Комплексный метод гермического зондирования системы "океан - атмосфера" из космоса. Матер. семинара "Атмосфера-океан-космос". Препринт №17.М.,1981.
13. Halliwell G.R., Mooers C.N.K. The space-time structure and variability of the shelf water slope water and Gulf-Stream surface temperature fronts and associated warm-correeddies //J,Geoph. Res. 1979. V.84. N C12. P.7707.
14. Richardson P.L., Strong A.E., Krauss J.A. Gulf-Stream eddies recent observations in the western Saragossa sea //J.Phys.Oceanogr. 1973. V.3. P.297.

15. Казьмин А.С., Легекис Р., Федоров К.Н. Экваториальные волны в поле температуры поверхности океана по данным судовых и спутниковых измерений // Исслед. Земли из космоса. 1984. №5. С.3.

16. Legeckis R.A. Survey of world wide sea surface temperature fronts detected by environmental satellites // J.Geophys.Res. 1978. V.83. N. C9. P.4501.

17. Нелепо Б.А., Гришин Г.А., Киенко Ю.П., Коваль А.Д. Оптические методы спутниковой гидрофизики. Киев: Наукова думка, 1987.

18. Федоров К.Н. Физическая природа и структура океанических фронтов. Л.: Гидрометеониздат, 1983. С.147.

19. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. Грибовидные течения в океане (по данным сигнала спутниковых изображений) // Исслед. Земли из космоса. 1984. №3. С.18.

20. Дулов В.А., Коротаяев Г.К., Кудрявцев В.Н. и др. Об идентификации вихревых образований в радиолокационном изображении поверхности океана // Исслед. Земли из космоса. 1985. №3. С.32.

21. Meadoros G.A., Shuchmen R.A., Tseng Y.C., Kasischke E.S. SEASAT synthetic aperture radar observations of wave current and wave-topographic interaction // J.Geophys.Res. 1983. V.88. N C7. P.4393.

22. Apel J.R., Byrne H.M., Proni J.R. e.a. Observation of oceanic internal and surface waves from the Earth resources technology satellite // J.Geophys. Res. V.80. N 6. P.865.

23. Гродский С.А., Кудрявцев В.Н. Описание гидрологической структуры океана по дисперсионному соотношению внутренних волн // Дистанционное зондирование океана / МГИ АН УССР. Севастополь, 1982. С.97.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ
В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ОКЕАНА
(ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ)
И ИХ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ В ЛАБОРАТОРИИ

К.Н.Федоров

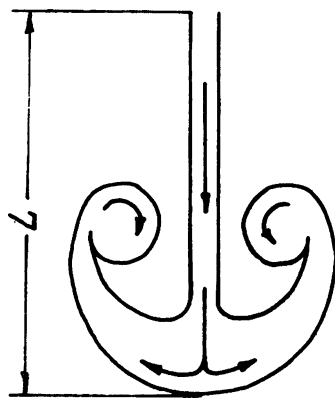
ВВЕДЕНИЕ

В океане на вращающейся Земле имеются два мощных фактора, приводящих к упорядочению разномасштабных турбулентных движений, возникающих в нем под воздействием самых разнообразных неупорядоченных возмущений, — это само вращение Земли и плотностная стратификация вод океана. Поскольку стратификация в большинстве случаев наиболее резко выражена в приповерхностном слое океана, и поскольку к нему приложены разнообразные и разномасштабные перемежающиеся атмосферные воздействия, именно в приповерхностном слое логично ожидать частого возникновения из турбулентного хаоса начальных возмущений различных когерентных (упорядоченных), длительное время существующих и закономерным образом развивающихся нестационарных форм движения. В настоящее время их существование в океане можно считать твердо установленным на основе многочисленных спутниковых наблюдений и измерений. К движениям такого рода относятся грибовидные течения (вихревые диполи), поперечные струи в зонах прибрежного апвеллинга, одиночные вихри и т.д.

Несомненно, что рассматриваемые формы движения можно было бы отнести к проявлениям плоской двумерной турбулентности и описывать их на основе математического аппарата статистической гидромеханики как некие случайные поля скорости на фоне среднего крупномасштабного упорядоченного движения (общей циркуляции вод океана). Однако специфические

физические причины и условия их генерации, а также их весьма закономерная эволюция дают основание рассматривать эти движения не как случайные, а как упорядоченные, или когерентные. Такой подход дает возможность гораздо больше узнать о физике подобных явлений и о самом приповерхностном слое океана, нежели автоматическое зачисление всех нестационарных и не вполне понятных процессов в турбулентность. Нетурбулентная природа лабораторных аналогов некоторых из указанных форм движений (например, вихревых диполей) очевидна, поскольку даже в самых крайних случаях их типичное конечное число Рейнольдса не превышает 100 [1,2], какими бы высокими ни были числа Рейнольдса начальных возмущений.

Грибовидные течения, являющиеся наиболее широко распространенным в океане типом нестационарных движений, возникают время от времени в различных районах и имеют пространственные масштабы от 10 до 150 км. Они представляют собой комбинацию узкой струи с парой вихрей противоположного знака на конце, так что структура в целом напоминает молодой шампиньон в разрезе (рис.1). Это сходство и побудило авторов [3-6] дать им название "грибовидные течения". "Видимость" этих течений из космоса обусловлена наличием на поверхности или в приповерхностном слое океана того или иного естественного трассера (плавающего льда, планктона, взвеси), температурного контраста или контрастов шероховатости. Вывод о нестационарности грибовидных течений был сделан на основании анализа нескольких серий последовательных спутниковых изображений одной и той же структуры в поле концентраций трассера [3-6]. Оказалось, что время их жизни в большинстве случаев ограничено 3-7 днями. Скорость течения, определенная по приращению размеров структур в начальной стадии их развития, достигала 1 узла и более. Судя по энергии, необходимой для возбуждения столь быстрых движений, было логично считать, что такие течения охватывают лишь сравнительно тонкий приповерхностный слой океана и что их проникновение вглубь ограничено плотностной стратификацией за счет температуры и/или солёности. Сезонных условий, благоприятных для образования такой стратификации, можно было ожидать практически во всех случаях наблюдения грибовидных течений. Поэтому был сделан логический вывод, что грибовидные течения возникают при локальном кратковременном приложении импульса к поверхности или приповерхностному слою воды, где локальные источники кинетической энергии всегда имеются. В этом случае характерная комбинация струйного и вихревого



Р и с. 1. Грибовидные течения в океане: а .
б - структура, образовавшаяся при интенсификации припая в Татарском проливе (увеличенный
изображения ИСЗ "Метеор-30", сканер МС
0,7-1,0 мкм, 30.03.83 [4])

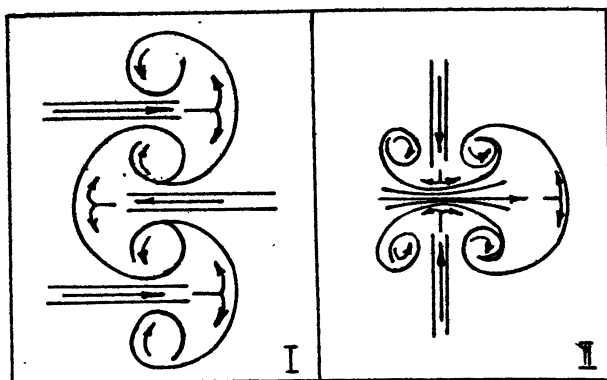
ловых моментов обоих знаков, сохранившихся в начальном возмущении. При этом совместный эффект инерции, вязкости и соблюдения неразрывности должен приводить к концентрации завихренности в форме пары вихрей.

К настоящему времени наиболее значительная сумма знаний накоплена именно в отношении грибовидных течений в океане. Поэтому сейчас уже можно сделать определенные заключения и указать на ряд закономерностей их формирования и эволюции. Большая часть накопленных знаний основана на спутниковой информации, в то время как традиционные судовые измерения или наблюдения практически отсутствуют. Чтобы как-то восполнить этот пробел, нами были предприняты попытки [1,6] воспроизвести грибовидные течения в лаборатории. Опыты оказались успешными, и полученные результаты вместе с результатами более ранних экспериментальных работ [2,7] позволили сделать некоторые полезные сравнения и провести параллели с природным явлением. Стало очевидным, что грибовидные течения являются близкими "родственниками" вихревых диполей, причем поведение и тех, и других имеет много общего. Вихревые диполи легко получают в лабораторных бассейнах как без вращения (при выполнении определенных условий) [2], так и в твердотельно вращающейся жидкости [1,6,7]. Но прежде, чем переходить к изложению результатов лабораторных экспериментов, рассмотрим детально факты, имеющие отношение непосредственно к океану.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ГРИБОВИДНОЙ ФОРМЫ ПЛОСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

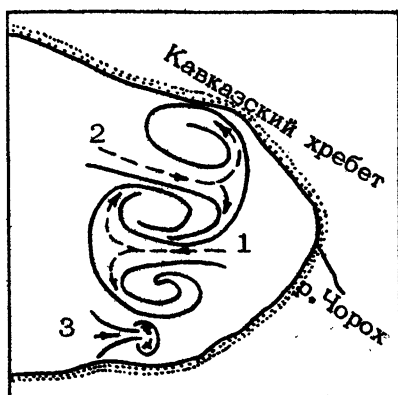
Грибовидные течения (вихревые диполи) можно рассматривать как плоский вариант вихревых колец, которые в случае ядерных взрывов или интенсивных лесных пожаров имеют характерную форму гриба. Вихревое кольцо в этих случаях распространяется вверх на конце сильно локализованной вертикальной струи газов. В этих примерах грибовидные структуры являются следствием чрезвычайно высокой локальной концентрации энергии. Поскольку для океана резкие пространственные и временные неоднородности воздействий (например, атмосферных) весьма типичны, грибовидные течения могут быть универсальной формой нестационарного горизонтального движения припо-

верхностных вод океана [8]. Хотя эти движения не являются строго двумерными ни в океане, ни в лабораторном бассейне, они совершенно определенно не обладают симметрией в третьем (вертикальном) измерении, а поэтому уравнение неразрывности должно выполняться в относительно тонком слое воды. С учетом этого можно предполагать, что для сложных ситуаций с множественными источниками импульса могут быть характерны компактные "упаковки" вихревых диполей, в которых соседние грибовидные структуры имеют по одному общему вихрю (рис.2).



Р и с. 2. Схема двух типов (I и II) компактных "упаковок" грибовидных течений в океане

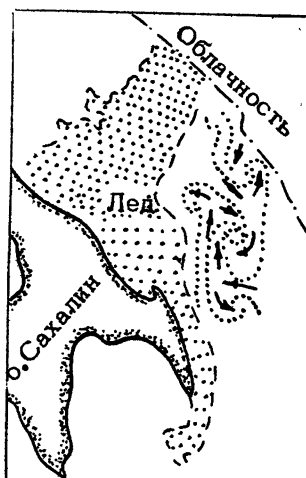
Аналогичная ситуация может наблюдаться, когда компенсирующие движения вторичной природы возникают за счет локальных градиентов давления, создаваемых сильным начальным возмущением. Наиболее вероятна такая ситуация в замкнутых или полужамкнутых областях океана вблизи побережий или фронтов [9]. Одним из лучших примеров компактной упаковки типа I (рис.2) является фрагмент изображения грибовидных течений в восточной части Чёрного моря, полученного с ИСЗ "Метеор". В данном случае струи вторичных грибовидных течений (2 и 3 на рис.3) направлены в сторону, противоположную главному течению I, которое распространяется на запад. Один из вихрей этого течения является общим со вторичным течением 2, так что на два грибовидных течения приходится только три вихря - см. рис.3 (соответствующий увеличенный фрагмент изображения ИСЗ "Метеор-30", сканер МСУ-М, канал 0,5-0,6 мкм от 08.06.81г. см. на рис.3 в [6]; полное изображение - см. [10]). Видимость грибовидных структур в данном случае обус-



Р и с. 3. Схема образования компактной "упаковки" грибовидных структур типа I в восточной части Черного моря

ловлена наличием взвеси, которая в изобилии выносится в море многочисленными реками в период таяния снегов в горах Кавказа.

На рис. 4 показана схема распределения плавучих льдов вблизи о.Сахалин (соответствующий фрагмент изображения ИСЗ



Р и с. 4. Схема образования компактной "упаковки" типа II

"Метеор-30", сканер МСУ-С, канал 0,5-0,7 мкм от 15.04.84 представлен на рис. 1а в [5] и на рис. 4б в [6]. Эти примеры демонстрируют компактную "упаковку" типа II (см. рис.2) со взаимно перпендикулярными струйными частями гри-

бовидных течений, когда каждая пара структур имеет один общий вихрь. Интересно отметить, что "перпендикулярная упаковка" типа II часто наблюдается при распаде вихревых дорожек Кармана на грибовидные структуры в облаках над островами (например, над Канарскими островами; см. рис.1, в, г в работе [5]).

Из сказанного выше следует, что грибовидные течения должны встречаться в океане довольно часто. Однако их проявление на спутниковых изображениях некоторых районов океана примерно за 5 лет наблюдения сводится по количеству всего лишь к нескольким десяткам. Это связано, по-видимому, с наличием или отсутствием естественного трассера в приповерхностных водах океана. Кроме того, и трассеры, и приповерхностная стратификация вод в значительной мере зависят от сезона. Поэтому в определенные сезоны грибовидные течения либо не образуются вовсе, либо не наблюдаются ввиду отсутствия трассера.

ИСТОЧНИКИ ЛОКАЛЬНО ПРИЛОЖЕННОГО ИМПУЛЬСА В ОКЕАНЕ

Локальные возмущения могут создаваться разнообразными источниками кинетической энергии, имеющимися в системе океан-атмосфера [3]. В открытом океане это струйные воздушные потоки, разность уровня моря или атмосферного давления, локальная динамическая неустойчивость фронтов и течений. В прибрежных районах - сток рек^{*}, таяние льда, местные ветры (фокусируемые геометрией и топографией берега), водообмен через проливы, а также те же самые локальные проявления динамической неустойчивости движения, что и в открытом океане. Примеры формирования грибовидных течений в проливах можно найти на ИК-изображениях Балтийских [11] и Курильских проливов [5].

Пожалуй, еще больший интерес представляют быстро накапливающиеся примеры возникновения грибовидных течений в процессе развития локальной гидродинамической неустойчивости движений синоптического масштаба: вихрей, фронтальных струйных течений, фронтальных систем прибрежного апвеллин-

^{*}) Грибовидная форма стоковой линзы может быть только у небольших рек и лагун, когда устья защищены молами или дамба:

га. Холодные поперечные струйные потоки, которые развиваются в приповерхностном слое зон прибрежного апвеллинга на стадиях релаксации [12]; часто имеют грибовидные или молоткообразные структуры на концах, удаленных от берега. Возможно, что образование таких структур было бы более частым, если бы эти струйные потоки переносили воду более высокой положительной плавучести. Реально ее плавучесть на фоне подстилающих вод близка к нейтральной, и вода струи смешивается с нижележащими водами, одновременно теряя импульс, по мере распространения от побережья. В противоположность этому встречные или компенсирующие потоки теплых вод, направленные в сторону холодных апвеллинговых, более часто имеют в плане форму больших "грибов". Единственное известное нам инструментальное измерение, которое можно, по-видимому, трактовать как измерение в области грибовидного течения, было сделано в холодной поперечной струе в зоне Калифорнийского апвеллинга [13]. Термодатчик, буксировавшийся на горизонте 2,5 м, пересек струю и один из вихрей пары. Зарегистрированные перепад и градиент температуры достигали соответственно 2°C и 0,25°C/км на третий день после образования течения. Эти данные хорошо согласуются со спутниковой информацией о типичных температурных контрастах и времени жизни многих аналогичных структур в различных районах апвеллинга. Подробный анализ условий возникновения систем поперечных струй в прибрежных апвеллингах и гипотезы, касающиеся механизма их формирования, могут быть найдены в работе [12].

Резкие температурные контрасты, которые во фронтальных зонах определяют границы грибовидных течений, видны на ИК-изображениях прибрежного Норвежского (см., например, [14]), Лиувинского (см. [3]) и Восточно-Австралийского течений. Хорошо различимый на рис. 7,15 в работе [15] антициклонический ринг Гольфстрима сопровождается грибовидным выбросом, направленным радиально от внешней границы ринга в сторону открытого океана. Такая картина напоминает проявления неустойчивости плотностных фронтов во вращающейся жидкости в лабораторных экспериментах Гриффитса и Линдена [16]. Многочисленные грибовидные структуры наблюдались нами в 1980-1985 гг. на изображениях видимого диапазона (трассёр - плавучий лед) в районе квазистационарного антициклонического круговорота, существующего в юго-западной части Охотского моря - см. [5,6] и рис. 5. На рис. 5 двойной пунктирной линией показано положение антициклонического вихря 29.03.84 г., который сам, возможно, являлся частью грибовидной структу-

ры у кромки ледяного покрова (см. рис.6 в [5]), а штрих-пунктирной линией даны границы антициклонического круговорота [5]. Аналогичная ситуация часто наблюдается на фоне об-



Р и с. 5. Схема расположения грибовидных структур 1-8, обнаруженных на изображениях в видимых диапазонах спектра ИСЗ "Метеор-29,-30, и -31" более полную информацию об изображениях см. в [5]

шей антициклонической циркуляции в Альборанском море [17]. Создается впечатление, что грибовидные течения вообще особенно часты в районах с общим антициклоническим вихревым движением. Кроме того, они сопровождают, по-видимому, любую нестационарную или нестабильную ситуацию, связанную с основными океанскими течениями. Например, изображение, полученное спутником ERTS-1 4 июля 1973 г., опубликованное в работе [18], показывает серию "грибов" с продольным размером 20-30 км, направленных поперек Гольфстрима в районе $35^{\circ}30'$ с.ш. и $72^{\circ}30'$ з.д. в сторону циклонического возмущения вблизи его северной границы. В данном случае видимость структур была обусловлена контрастами шероховатости поверхности океана.

Не подлежит сомнению, что грибовидные течения являются очень сильным локальным фронтогенетическим механизмом там, где есть достаточные контрасты температуры или солёности. Множественные фронты очень резкой и кратковременной природы могут генерироваться таким путем внутри фронтальных зон квазистационарного характера [9]. Очевидно также, что грибовидные течения являются очень эффективными механизмами го-

ризонального (в частности, трансфронтального) обмена в при-
поверхностном слое океана.

ДВЕ СТАДИИ ЭВОЛЮЦИИ ГРИБОВИДНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Серии изображений, демонстрирующие эволюцию грибовидных течений, позволяют оценить скорость ($\partial L / \partial t$) увеличения их продольного размера (L). В случае, рассмотренном в работе [4], она резко уменьшалась от 15 до 8 см·с⁻¹ между тремя последовательными изображениями, разделенными интервалами примерно в 24 ч. Отождествление этой скорости со скоростью перемещения воды в струйной части течения примерно, по-видимому, только для очень ранней стадии эволюции, когда вихревая пара еще относительно мала и большая часть воды, переносимой в струе, расходуется на приращение продольного размера структуры. Однако по мере того как вихревая пара начинает расти, все большая часть воды дивергирует в два увеличивающихся вихря. Это приводит к уменьшению скорости роста продольного размера. Следовательно, логично полагать, что скорость течения вдоль оси струйной части должна быть при этом существенно больше, чем $\partial L / \partial t$. По оценкам [5], истинная скорость в струе для структуры 3 на рис.5 должна была быть не менее одного узла и, возможно, оставалась такой в течение первых 24 ч жизни структуры, или даже дольше.

Анализ эволюции этой и других грибовидных структур показал, что все они увеличиваются до 70-80% их окончательного размера примерно в течение 24 ч и позже растут весьма незначительно и медленно. Это заставляет предположить, что в развитии грибовидных течений, генерируемых воздействием импульсного типа, существует, по крайней мере, две фазы: первая (быстрая), которая длится примерно 24 ч или менее, и вторая (медленная), продолжающаяся несколько суток, в течение которой структура практически не растет, за исключением продолжающегося медленного увеличения вихревой пары. Эта стадия заканчивается полным распадом структуры. Вся картина в целом напоминает эволюцию перемешанного пятна в процессе коллапса в стратифицированной жидкости, во время которого пятно проходит несколько стадий с различной зависимостью скорости увеличения радиуса от времени. Вероятно, зависимость такого рода для грибовидных течений будет найдена либо из лабораторных экспериментов, либо теоретически, поскольку едва ли возможно обеспечить достаточную частоту наблюдений одной и той же структуры с судна или спутника.

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Из того, что было продемонстрировано выше, видно, что грибовидные течения в океане в какой-то степени напоминают вихревые пары в идеальной жидкости, рассмотренные Ламбом [19]. Эти вихревые пары, однако, соответствуют идеализированному случаю строго двумерного стационарного движения, при котором замкнутые линии тока совпадают с линиями равной завихренности или равной относительной завихренности, в то время как внешнее поле характеризуется соответственно нулевой или однородной завихренностью. Такие вихревые пары возможны в однородном вращающемся или невращающемся слое вязкой жидкости бесконечной или конечной глубины в отсутствие трения о дно или поверхность. В реальном океане большая часть этих условий не соблюдается, а наличие непрерывной стратификации не допускает строгой двумерности явления. Как уже отмечалось выше, его начальная стадия явно нестационарна. Пространственные масштабы и скорости наблюдаемых грибовидных течений (числа Россби порядка 10^{-1}) предполагают значительную степень геострофического приспособления, что подтверждается некоторыми наблюдениями (см. [12]). Процесс геострофического приспособления, в свою очередь, невозможен без слабых (по крайней мере) вертикальных движений. Кроме того, на вращающейся Земле мы имеем дело с β -эффектом, который должен влиять на вихревые движения рассматриваемого здесь типа, тогда как этот эффект не учитывается в классическом описании Ламба. Тем не менее, как следует из представленной здесь спутниковой информации, упорядоченные (когерентные) вихревые движения типа диполей существуют в океане, несмотря на все отмеченные различия между реальным океаном и идеальной жидкостью Ламба.

Что же дает теория относительно возможности существования вихревых диполей на вращающейся Земле? Как было показано Ларичевым и Резником [20], стационарное решение типа солитона в форме вихревого диполя возможно на β -плоскости. Эти идеализированные динамические структуры должны иметь, однако, жесткую ориентацию относительно оси вращения Земли, т.е. должны распространяться исключительно в зональном направлении, которое является для них единственно возможным в присутствии β -эффекта. Описанные выше океанские грибовидные течения не проявляют такого избирательного поведения, и к тому же явно нестационарны. Как легко заметить (см. рис.5), они произвольно ориентированы и могут распространяться в любом направлении.

Теоретические предсказания [20] стимулировали постановку ряда лабораторных экспериментов [21,22], направленных на получение вихревых пар солитонного типа в присутствии β -эффекта. Хотя примерно в то же время вихревые диполи были гораздо большей легкостью воспроизведены в лабораторном эксперименте без β -эффекта [7], а также и без вращения [2], теоретические рассуждения возможности существования в океане различных изолированных вихревых структур (диполей и монополей) всегда проводились с учетом β -эффекта. Цитируем из [7]: "монополи на β -плоскости невозможны", тогда как "дипольные решения (модоны) и приближительные решения, обсуждаемые Ларичевым и Резником [20], четко удовлетворяют интегральному требованию" (нулевого суммарного углового момента. - К.Ф.) и, следовательно, допустимы. Однако мы наблюдаем в океане изолированные вихри и водовороты всех типов (и монополи, и диполи), и можно лишь задаться вопросом, вполне ли соответствуют друг другу действительная степень изолированности вихрей в реальном океане и теоретическая концепция изолированности [7].

Лабораторные эксперименты группы Петвиашвили [21] и группы Незлина [22], в которых β -эффект создавался специально за счет использования вращающегося бассейна параболической формы, не показали какого-либо явного преобладания вихревых диполей типа рассмотренных Ларичевым и Резником, хотя они и получались в экспериментах группы Петвиашвили наряду с одиночными антициклоническими и циклоническими вихрями. Эксперименты группы Незлина с очень тонким слоем жидкости (0,5 см) и весьма сильным β -эффектом ($\beta \approx 5 \cdot 10^{-1} \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$) продемонстрировали преобладание устойчивых одиночных антициклонов типа солитонов, распространяющихся в зональном направлении. В отдельных случаях получался асимметричный вихревой диполь со слабым вторичным циклоном. Такой результат мог быть, как нам кажется, следствием геометрии этого эксперимента. Изолированные циклонические вихри, по-видимому, не могли быть устойчивыми в тонком слое воды из-за неизбежного трения о дно в случае, когда величина циклонического прогиба поверхности соизмерима с толщиной слоя.

Можно ожидать, что в определении шанса любого вихревого образования на выживание или устойчивое существование в течение длительного времени, помимо наличия или отсутствия β -эффекта, важным является характерный размер вихря L_0 относительно радиуса деформации Россби R_D (или эквивален-

тного параметра). Вихревые диполи, полученные в эксперименте [21], хорошо согласуются с геострофическим решением Ларичева и Резника [20], которое справедливо при $L_0/R_D \leq 1$. На другом пределе, т.е. при $L_0^2/R_D^2 \gg 1$, в соответствии с [21] возможны только одиночные антициклонические вихри. Однако те вихревые диполи (грибовидные течения), которые наблюдались на спутниковых изображениях океана, также принадлежат к последнему типу, т.е. $\frac{L_0^2}{R_{DD}^2} \gg \frac{L_0}{R_{DD}} > 1$ (здесь R_{DD} - бароклин-

ный радиус деформации). Следовательно, ситуация в целом не представляется логически зависящей ни от наличия или отсутствия β -эффекта, ни от характерного относительного размера вихревой структуры.

Полезно взглянуть на эту проблему под другим углом, попытавшись количественно оценить роль β -эффекта в разнообразных природных и лабораторных ситуациях в сравнении с привычными условиями океанического синоптического масштаба на вращающейся Земле. Удобным для такого сравнения параметром может быть безразмерное число $\beta L_0^2/u_0$. Оно представляет собой отношение члена, отражающего β -эффект, к нелинейным членам в уравнении завихренности, поскольку L_0 - характерный размер вихря, а u_0 - орбитальная или азимутальная скорость частиц воды в нем. Это число имеет порядок единицы для вихревого поля синоптического масштаба в океане. Оценка $\beta L_0^2/u_0$ для условий конкретного эксперимента использовалась в работе [7]. Вероятно, этому параметру следовало бы придавать большее значение при выяснении, например, почему на вращающейся Земле в присутствии β -эффекта последний, тем не менее, может не быть важным в ряде случаев, например для быстро развивающихся грибовидных течений. Именно с этой точки зрения упомянутые выше лабораторные и натурные наблюдения проанализированы в таблице, из которой следует, что нелинейные эффекты, по-видимому, наиболее важны в определении тех специфических условий, при которых формируются вихревые диполи. Обычные вихревые диполи (грибовидные течения) типичны для $\beta L_0^2/u_0 < 1$, тогда как вихревые пары солитонного типа [20] наблюдались экспериментально при $\beta L_0^2/u_0^2$

Грибовидные течения в океане:
в Татарском проливе [4]
в Охотском море [5]

150	$35 \cdot 10^4$	10	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^6$	15	0,01	Вихревые диполи
3000	$156 \cdot 10^4$	10	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^6$	40	0,09	Вихревые диполи

Лабораторный эксперимент
Флирла, Стерна и Уайтхерда [7]

0,2	1,75	—	0,8	$7,8 \cdot 10^{-4}$	10	2	0,04	Вихревые диполи (возмущение приотплен- ной струей в однородной жидкости)
-----	------	---	-----	---------------------	----	---	------	---

Лабораторный эксперимент
группы Федорова [1]

0,08 или $N_1 = N_2 = 0,04$	0,44	$(3-4) \cdot 10^5$	2,1	$5 \cdot 10^{-3}$	4	1	0,08	Вихревые диполи (любой тип возмущения в однородной и страти- фицированной жидко- стях); возможны изоли- рованные циклоны
-----------------------------------	------	--------------------	-----	-------------------	---	---	------	---

Земля. Вихри синоптического
масштаба

5000	$2 \cdot 10^6$	100	10^{-4}	10^{-13}	10^7	10	1,00	Вихри синоптического масштаба (колца и вих- ри открытого океана. ПОЛИМОДЕ)
------	----------------	-----	-----------	------------	--------	----	------	---

Лабораторный эксперимент
группы Незлина [22]

0,005	0,021	—	13	$(5+7) \times 10^{-17}$	5	5	2,5± 3,5	Преимущественно одиночные антициклоны
-------	-------	---	----	-------------------------	---	---	-------------	--

Лабораторный эксперимент
группы Петвишвили [21]

0,025	0,09	—	4	$\sim 2,5 \cdot 10^{-27}$	15	8	6,7	Циклоны и антицикло- ны; возможны вихревые диполи
-------	------	---	---	---------------------------	----	---	-----	---

Результаты экспериментов [7] в конфигурации f -плоскости также продемонстрировали довольно своеобразный тип поведения вихревых диполей, а именно неизбежную антициклоническую асимметрию всех получавшихся вихревых пар, что не соответствует многообразию поведения грибовидных течений в океане. Создается впечатление, что, по-видимому, характер возмущения твердотельного вращения жидкости предопределяет форму вихря или вихревой структуры, образующейся в каждом конкретном случае. Фактически принцип сохранения относительного углового момента, вносимого во вращающуюся жидкость локальным воздействием, должен играть определяющую роль в формировании характера результирующего возмущения. Это соображение побудило авторов [1,6] провести серию лабораторных экспериментов с разными способами задания возмущения твердотельно вращающейся жидкости, имеющими либо нулевой, либо ненулевой (+ или -) суммарный относительный угловой момент. Соответствующие общие характеристики эксперимента, необходимые для сравнения с обсуждавшимися выше результатами, даны в таблице. Можно заметить, что типичные значения параметра $\beta L_0^2/\omega_0$ в этих экспериментах столь же близки к типичным для грибовидных течений в океане значениям, как и соответствующие значения в работе [7], хотя диаметр вращающегося по часовой стрелке бассейна (40 см) и типичные размеры полученных в нем вихревых пар (≈ 5 см) были существенно меньше, чем в [7]. Угловая скорость вращения бассейна соответствовала одному полному обороту за 6 с ($f = 2\Omega \approx 2,1 \text{ с}^{-1}$). Эксперименты проводились как в однородной жидкости (пресная вода с толщиной слоя $H = 2,5 - 8$ см), так и в двухслойной - с верхним слоем $H_1 = 4$ см пресной воды и нижним слоем соленой воды соленостью 5 или 10‰ и толщиной 4 см.

Локальные импульсные возмущения создавались: а) струей воздуха, направленной по касательной к поверхности из стеклянной трубки, вращавшейся в большей части экспериментов вместе с бассейном; б) притопленной струей подкрашенной воды аналогично [7]; в) короткими направленными толчками концом стеклянной палочки; г) падающими каплями воды; д) локальным закручиванием жидкости вблизи поверхности в течение коротких отрезков времени (3-12 с) с помощью миниатюрной лопасти (1 см), слегка погруженной в жидкость и вращавшейся в циклоническом или антициклоническом направлении с помощью электрического мотора, жестко прикрепленного к вра-



а)



б)

Р и с. 6. Примеры вихревых диполей с антициклонической (а) и циклонической (б) асимметрией в лабораторном эксперименте

шающей платформе. Во всех случаях для визуализации процесса использовался краситель, вносившийся в воду в месте генерации возмущения.

Основной результат выполненных экспериментов таков: вихревые диполи представляют собой универсальную реакцию твердоотельно вращающейся жидкости на любое локальное импульсное воздействие, вносящее в систему конечные количества положительного и/или отрицательного относительного углового момента. Образующиеся при этом вихревые пары могут иметь асимметрию обоих знаков (антициклоническую и/или циклоническую), т.е. один из вихрей может быть сильнее другого (рис.6). Диполь с антициклонической асимметрией, образовавшийся при воздействии на поверхность воды симметричной струей воздуха (двухслойная система, $\Delta S = 10^\circ/\infty$, $H_1 = H_2 = 3,5$ см, время после внесения возмущения - 56 с, показан на рис.6,а, а на рис.6,б - диполь с циклонической асимметрией, образовавшийся через 18 с после воздействия на поверхность осесимметричной воздушной струей (двухслойная жидкость, $\Delta S = 5^\circ/\infty$, $H_1 = H_2 = 4$ см). Циклоническая асимметрия возникла как результат воздействия с остаточным движением антициклонического характера от вихревого диполя, который эволюционировал в течение 200 с в предыдущем эксперименте. Поведение асимметричных вихревых диполей во многом аналогично поведению вихревых пар Ламба, т.е. они перемешаются вдоль круговых траекторий, вращаясь вокруг более сильного вихря пары. Центр вращения можно найти из классической формулы, данной в работе [19], при условии, что поле скорости в вихревой паре известно. Асимметрия экспериментальных диполей делает их весьма сходными с трибовидными течениями, наблюдаемыми на спутниковых изображениях океана. Весьма важным выводом из проведенных экспериментов является вывод о быстром гашении вращением мелкомасштабной турбулентности, генерируемой при локальном возмущении любого типа. В каждом случае вихревой диполь (или диполи) возникает из хаоса мелких турбулентных вихрей вследствие этого гашения и последующего упорядочения движения. Когерентное движение в форме вихревого диполя быстро распространяется на весь слой воды (в двухслойной системе - на верхний слой) в полном соответствии с принципом Праудмана-Тэйлора. При достаточной силе и продолжительности возбуждающего воздействия вихревое движение передается и в нижний слой двухслойной системы через механизмы геострофического приспособления.

ВЫВОДЫ

Не подлежит сомнению, что на основе качественно нового вида информации об океане — спутниковой информации — обнаружены новые упорядоченные элементы нестационарных движений вод: вихревые диполи, системы поперечных струй в прибрежных апвеллингах и др. Из-за традиционной привычки иметь дело в геофизической гидродинамике главным образом со стационарными и линейными проблемами теория до сих пор не рассматривала подобных явлений. Очевидно, что можно подойти к изучению описанных выше когерентных форм движения со многих сторон. Один путь — отнести вихревые диполи, поперечные струи, одиночные вихри и другое к той спектральной полосе геострофической турбулентности, в которой осуществляется непосредственная подпитка океана энергией из атмосферы, с учетом возможных последствий для низкочастотной части спектра движений синоптического масштаба. Другой путь — рассматривать возникновение когерентных форм нестационарного движения как закономерную эволюцию локальных возмущений твердотельного вращения вод океана. В таком случае эволюцию вихревых диполей, например, можно рассматривать как медленный процесс восстановления большим объемом жидкости (океаном) его квазистационарного состояния твердотельного вращения. Под каким бы углом зрения мы ни смотрели на обнаруженные явления, мы неизбежно получим новые знания.

Л и т е р а т у р а

1. Гинзбург А.И., Костяной А.Г., Павлов А.М., Федоров К.Н. Лабораторное воспроизведение грибовидных течений (вихревых диполей) в условиях вращения и стратификации //Изв. АН СССР, ФАО, 1987, Т.23, №2, С.170.
2. Воропаев С.И., Филиппов И.А. Развитие горизонтальной струи в однородной по плотности и стратифицированной жидкостях. Лабораторный эксперимент //Изв. АН СССР, ФАО, 1985, Т.21, №9, С.964.
3. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. Грибовидные течения в океане (по данным анализа спутниковых изображений) //Исслед. Земли из космоса. 1984, №3, С.18.
4. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. Эволюция грибовидных течений в океане //ДАН СССР, 1984, Т.276, №2, С.481.
5. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. Некоторые закономерности развития грибовидных течений в океане, выявленные путем ана-

6. Fedorov K.N., Ginzburg A.I. "Mushroom-like" currents (vortex dipoles) in the ocean and in a laboratory tank// *Annales Geophysicae*. 1986.V.4. N5. P.507.

7. Flierl G.R., Stern M.E., Whitehead J.A. The physical significance of modons: laboratory experiments and general integral constraints // *Dynamics of Atmosphere and Oceans*. 1983. V.7. N4.P.233.

8. Федоров К.Н. Спутниковые методы и развитие современных представлений о динамике океана//Исслед. Земли из космоса. 1984. №4, С.3.

9. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. О приповерхностной циркуляции вод в субарктической фронтальной зоне (по данным ИСЗ) //Исслед. Земли из космоса. 1986. №1. С.8.

10. Казьмин А.С., Скляров В.Е. Некоторые особенности циркуляции вод Черного моря по данным ИСЗ "Метеор"//Исслед. Земли из космоса. 1982. №6. С.43.

11. Horstmann U. Distribution patterns of temperature and water colour in the Baltic Sea as recorded in satellite images: indicators for phytoplankton growth//*Berich.Inst. Meereskunde,Kiel*.1983.V1.N106.P.147

12. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. Системы поперечных струй в прибрежных апвеллингах: спутниковая информация и физические гипотезы//Исслед. Земли из космоса. 1985. №5. С.3.

13. Traganza E.D., Nestor D.A., McDonald A.K. Satellite observations of a nutrient upwelling off the Coast of California // *J.Geophys.Res.* 1980.V.85. N C7. P.4101.

14. Pingree R.D. Cyclonic eddies and cross-frontal mixing // *J.Mar.Biol.Assoc.UK*. 1978. V.58.N4. P.955.

15. Beardsley R.C., Boicourt W.C. On estuarine and continental-shelf circulation in the Middle-Atlantic Bight // *Evolution of Physical Oceanography*/ Ed. B.A.Warren, C.Wunsch. MIT Press. Cambridge. 1981. P.198.

16. Griffiths R.W., Linden P.F. The stability of vortices in a rotating stratified fluid // *J.Fluid Mech.* 1981. V.105. P.283.

17. La Violett P.E. The advection of submeso-scale thermal features in the Alboran Sea Gyre // J.Phys.Oceanogr. 1984. V.14. N3.P.550.

18. Sawyer C., Apel J.R. Satellite images of ocean internal wave signatures //US Dept.of Commerce. NOAA enviromental Research Laboratory. 1976.

19. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ГТИ, 1947. (Разд. 155)

20. Ларичев В.Л., Резник Г.М. О двумерных уединенных волнах Россби//ДАН СССР. 1976. Т.231. №5. С.1077.

21. Антонова Р.А., Жвания Б.П., Ломинадзе Дж.Г. и др. О дрейфовых солитонах в мелкой вращающейся жидкости//Письма в ЖЭТФ. 1983. Т.37. Вып.11. С.545.

22. Антипов С.В., Незлин М.В., Снежкин Е.Н., Трубинов А.С. Солитон Россби в лаборатории//ЖЭТФ. 1982. Т.82. Вып.1. С.145.

ПЛЕНОЧНЫЕ СЛИКИ НА МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С.А.Ермаков

В настоящее время, в связи с развитием средств дистанционного зондирования океана, весьма актуально исследование природы неоднородностей на морской поверхности с целью выявления и количественного изучения обуславливающих их факторов. На оптических и радиолокационных изображениях наблюдаемые неоднородности — области с пониженной (слики) или повышенной (сулоя) интенсивностью ветрового волнения — существенно различаются по своим масштабам и геометрии. Это системы параллельных полос с масштабами сотни метров и километры для цугов интенсивных внутренних волн, менее регулярные и значительно меньшего масштаба ветровые полосы, слики от движущихся судов, одиночные полосы сулоя от внутренних солитонов и конвергентных течений и т.д. (подробное описание различных неоднородностей дано в работе [1]). Важную роль в изменчивости ветрового волнения играют пленки поверхностно-активных веществ (п.а.-пленки), которые являются как сопутствующим фактором формирования сликов, так образуют и чисто пленочные аномалии. Ниже ограничимся рассмотрением лишь последних, так как сколько-нибудь систематические количественные данные по пленочным сликам, например в поле течений или внутренних волн, пока, к сожалению, отсутствуют (см. обзор [2]).

Слики, образуемые п.а.-пленками, часто имеют форму пятен, иногда весьма причудливой конфигурации, либо длинных полос (последние, видимо, формируются за достаточное время под действием сильного и устойчивого по направлению ветра). Так, в работе [3], например, приведены радио-

изображения поверхностных аномалий, полученные с помощью установленного на спутнике SEASAT радиолокатора с синтетизированной апертурой, которые имеют вид сложных "нитевидных перемежающихся структур" и отдельных пятен и предположительно являются снимками пленочной природы. Такое разнообразие формы не позволяет идентифицировать пленочные снимки по геометрическому признаку. Существенную информацию, в том числе и о количественных характеристиках п.а.-пленок, может здесь дать анализ трансформации спектра ветрового волнения в различных диапазонах длин волн.

Ниже рассмотрены полученные к настоящему времени данные наблюдений пленочных снимков, анализируются механизмы трансформации спектра ветровых волн в снимках и, наконец, обсуждается возможность использования особенностей изменчивости спектра для изучения пленочных аномалий на основе данных дистанционного зондирования морской поверхности.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ПЛЕНОЧНЫЕ СЛИКИ

Выполненные к настоящему времени наблюдения пленочных снимков весьма немногочисленны, что, видимо, связано с трудностями натурных измерений характеристик морских пленок. Так, согласно [4], в полосах выглаживания от внутренних волн наблюдалось понижение коэффициента поверхностного натяжения ϵ по сравнению с ϵ_0 для чистой воды (давление пленки) на величины от 1-2 до 10-15 дин/см. Напротив, в пятне ряби зафиксировано увеличение поверхностного натяжения по сравнению с окружающим фоном [5]. Эти данные, указывая на наличие п.а.-пленок, еще не позволяют, однако, судить о влиянии последних на ветровую рябь, поскольку определяющим здесь является не собственно поверхностное натяжение, а упругость пленки. Параметр упругости β , от которого зависит декремент затухания поверхностных волн (см. ниже), определяется по изотерме пленки зависимости давления $\pi = \epsilon_0 - \epsilon$ от концентрации п.а.-вещества Γ (или от обратной Γ величины площади пленки A) соотношением $\beta = \Gamma \frac{d\pi}{d\Gamma} = -A \frac{d\pi}{dA}$.

Упругости морских пленок исследовались в работе [6], откуда, в частности, следует, что значения β , меняясь в довольно широких пределах, не превышают, однако, величин

порядка 30 дин/см. Примерно такой же диапазон изменения ρ получен в работе [7] на основе обработки данных [8] по изотермам морских пленок, причем слики наблюдались лишь в тех случаях, когда по расчетам [7] параметр упругости превышал 3-5 дин/см. Отметим, что в [8] давалась лишь общая характеристика состояния морской поверхности (доля площади поверхности, занятой сликами) в районах взятия пленочных проб без привязки последних к сликовым областям, так что вывод [7] о минимально необходимой для образования слика упругости мог рассматриваться лишь как предварительный. Этот вывод был подтвержден результатами прямых измерений упругости в сликах [9] (рис.1), из которых следует, что параметр упругости в фоне ρ_0 действительно не превышал 3-5 дин/см, значения же упругости в сликах ρ_s были в несколько раз больше.

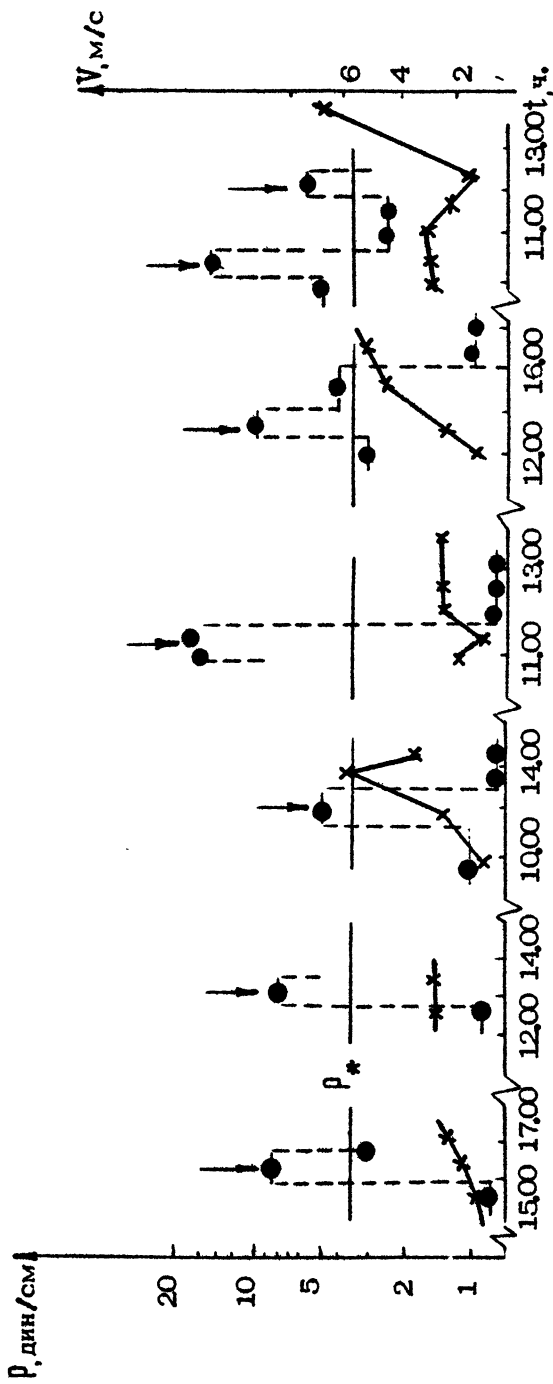
Интерпретация этого результата основана на следующих простых соображениях. Степень изменчивости коротких волн, а значит и "контрастность" слика, определяется вариациями декремента затухания, которые, в свою очередь, зависят от вариаций упругости пленок в фоне и слике. Как следует из [10], декремент с ростом ρ быстро растет от $\gamma(0) = 2\sqrt{k^2}$

для чистой воды до максимума $\gamma_{\max} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2\omega}\right)^{1/2}$ при $\rho^* = \frac{\rho}{\sigma k^2} \sqrt{2\omega^2}$, а затем при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к $\gamma(\infty) = \frac{1}{2}\gamma_{\max}$, которое отвечает упругости $\rho^* = \frac{1}{2}\rho^m$. Для волн сантиметрового диапазона $\gamma_{\max} \gg \gamma(0)$ и достаточная "контрастность" слика может быть достигнута при

$$\rho_0 < \rho^* \leq \rho_s \quad (1)$$

Если фоновая упругость превышает ρ^* , приближаясь к ρ^m , то образование сликов невозможно. Минимальное значение ρ_{\min}^* , соответствующее длинам волн $\lambda \approx 1,5-2$ см составляет примерно 3,5 дин/см. Как следует из рис.1, упругости в сликах превышают это значение, фоновые же значения действительно меньше или порядка ρ_{\min}^* . Таким образом, соотношение (1) можно использовать в качестве простого необходимого (но не достаточного) критерия образования пленочных сликов.

Для анализа изменчивости спектров ветровых волн в сликах обратимся к результатам натуральных экспериментов с ис-



кусственными п.а.-пленками, так как за исключением единичных измерений [9] такие данные для естественных пленочных аномалий отсутствуют.

ИСКУССТВЕННЫЕ ПЛЕНОЧНЫЕ СЛИКИ

Количественные исследования влияния п.а.-пленок на спектры ветрового волнения начали проводиться с 70-х годов в ходе экспериментов с искусственными сликками. Уже в первых работах были получены интересные данные по гашению волн в энергонесущей части спектра, а также по трансформации поля ветра (уменьшения параметра шероховатости и возрастания средней скорости) над сликками больших (порядка 1 км) размеров [11]. В более поздних исследованиях [12,13] основное внимание уделялось высокочастотному диапазону спектра, рассматривались также вопросы выбора п.а.-вещества и методика создания самих сликков (см. обзор [14]).

Сликки больших размеров (10^2 - 10^3 м) формировались распылением п.а.-вещества с катера, движущегося по спирали или зигзагообразными галсами [9,11,15], или, как в экспериментах JONSWAP-75 и MARSEN-79 [12,13], рассеиванием кубиков замороженного вещества с вертолета.

В качестве п.а.-веществ обычно использовались олеиловый спирт и метил олеат [11-13], а также олеиновая кислота и растительное масло [9,15,16]. Эти вещества относятся к классу органических соединений с длинной углеводородной цепью, входящих в состав естественных п.а.-пленок [14,17]. Такие вещества хорошо растекаются по поверхности воды, образуя тонкие (для химически чистых веществ - мономолекулярные) пленки толщиной десятки - сотни ангстрем. Отметим, что нефть и нефтепродукты образуют обычно более толстые пленки (как правило, тысячи ангстрем), обладающие меньшей упругостью и менее эффективно воздействующие на ветровое волнение.

Упругие свойства искусственных пленок олеина и растительного масла исследовались в ходе экспериментов [9, 16] с помощью весов Ленгмюра, сконструированных специально для натуральных измерений. Изотермы $\pi(A)$ близки к прямым, что типично для класса конденсированных пленок, характеризующихся упорядоченной упаковкой молекул и, как

следствие, значительной упругостью. Изотермы каждой из пленок, снятые как при слабых, так и при умеренных ветрах, близки друг к другу, что указывает на хорошую воспроизводимость и устойчивость искусственных пленок. В то же время, поскольку использовавшиеся в экспериментах указанные вещества не являются химически чистыми, характеристики пленок могут существенно зависеть от количества и химического состава примесей. В экспериментах [9,16] упругость пленок олеина составляла примерно 30 дин/см, масляных пленок — 10 дин/см, упругость же использовавшихся в другой серии экспериментов [15] масляных пленок составила 18–20 дин/см². Указанные значения параметра упругости соответствуют тем пределам, в которых лежат значения параметра ρ для естественных силикообразующих пленок (см. выше), и отвечают условиям моделирования природных slickов.

Перейдем далее собственно к анализу трансформации спектров волнения под влиянием п.а.-пленок.

РАСТЕКАНИЕ ВОЛН САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В СЛИКАХ

В качестве количественной характеристики изменчивости спектра примем величину контраста — отношения спектральных интенсивностей F при данном волновом числе k или частоте ω соответственно в слике (s) и фоне (0) $K = F_s/F_0$ (в децибелах $K = 10 \lg F_s/F_0$).

Для решения задачи об изменчивости ветровых волн в присутствии п.а.-пленок требуется определить, как в уравнении для энергетического спектра

$$\frac{d}{dt} \frac{F(k)}{\omega} = Q_s - Q_D + Q_{NL}; \quad \omega = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right)^{1/2} \quad (2)$$

пленка видоизменяет слагаемые Q_s, Q_D, Q_{NL} , описывающие соответственно возбуждение, диссипацию и нелинейные взаимодействия спектральных компонент. В настоящее время общий вид Q не может считаться надежно установленным, и

*)

Характер растекания п.а.-веществ и упругие свойства образующихся при этом пленок зависят, кроме того, от химического состава морской воды, а также от характеристик присутствующих на ее поверхности п.а.-веществ.

при описании ветровых волн используются, как правило, полуэмпирические модельные представления различных механизмов возбуждения и ограничения волн.

Анализ ветровых волн сантиметрового (см-) диапазона может быть упрощен с учетом того, что масштабы возбуждения и затухания ряби в среднем на один-два порядка меньше масштабов нелинейного взаимодействия и стационарный спектр см-волн в первом приближении можно рассматривать как результат локального баланса источников и стоков энергии [18] и определять из уравнения

$$Q_s \{F(k)\} = Q_D \{F(k)\}. \quad (3)$$

Полагая в качестве источников генерацию ряби резонансными пульсациями атмосферного давления (механизм Филлипса) и майлсовскую неустойчивость, а в качестве стоков — линейное вязкое затухание и нелинейное ограничение спектра, запишем Q_s и Q_D в виде

$$Q_s = \Pi + \beta(k, V) F(k), \quad (4)$$

$$Q_D = \gamma(k, \beta) + f_{NL} [F(k)]. \quad (5)$$

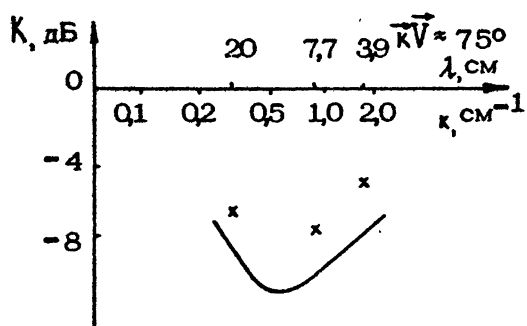
В силу недостаточной изученности механизмов нелинейного ограничения спектра, в частности генерации гармоник, возбуждения "паразитной" капиллярной ряби и т.д., причем далее квадратичный закон для f_{NL} ($f_{NL} = \delta F^2$, где $\delta = \delta(k)$ — феноменологический коэффициент), ограничиваясь фактически первым членом разложения по степеням $F(k)$. Тогда из выражений (3)–(5) следуют весьма простые формулы для контраста в предельных случаях очень малой скорости ветра V ($\gamma > \beta$), когда из-за малого уровня спектра можно пренебречь f_{NL} в выражении (5), а также при умеренном ветре ($\beta > \gamma$), когда при значительной величине F_k не учитывается слагаемое Π в формуле (4). В этих случаях контрасты имеют следующий вид [2]:

$$K = (\gamma - \beta)_0 / (\gamma - \beta)_s \quad (\gamma > \beta), \quad (6)$$

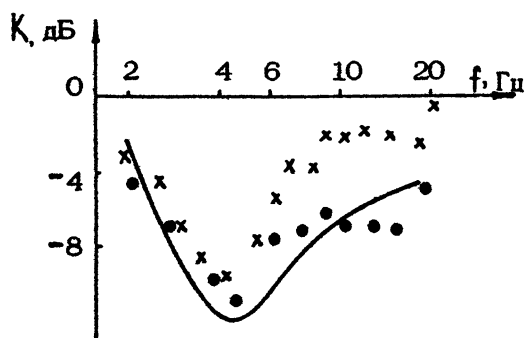
$$K = (\beta - \gamma)_s / (\beta - \gamma)_0 \quad (\gamma < \beta). \quad (7)$$

Выражения (6), (7) при своей простоте имеют довольно ограниченную область применимости. Так, при $\beta \approx \gamma$, а также если в слике $\gamma_s > \beta_s$, а в фоне $\gamma_0 < \beta_0$ необхо-

димо знание спектра пульсаций атмосферного давления и коэффициента $\delta(\kappa)$, т.е. более подробная информация о функциях Q_e и Q_p . Тем не менее формулы (6), (7) весьма полезны для получения, по крайней мере, качественного представления о характере контраста в пленочных слайках. Сопоставление же расчетных контрастов с экспериментом обнаруживает и неплохое количественное согласие. В качестве примера такого расчета на рис.2,3 представлены контрасты при слабом и умеренном ветрах и заданных упругостях пленок. При расчетах использована теоретическая формула Левича [10] для $\mathcal{J}(\kappa\rho)$ и известная эмпирическая зависимость

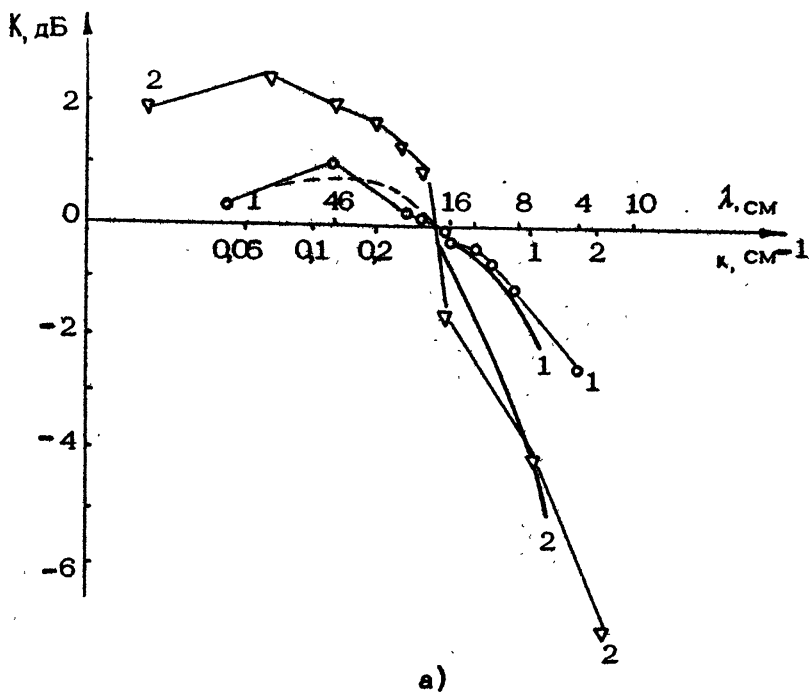


а)

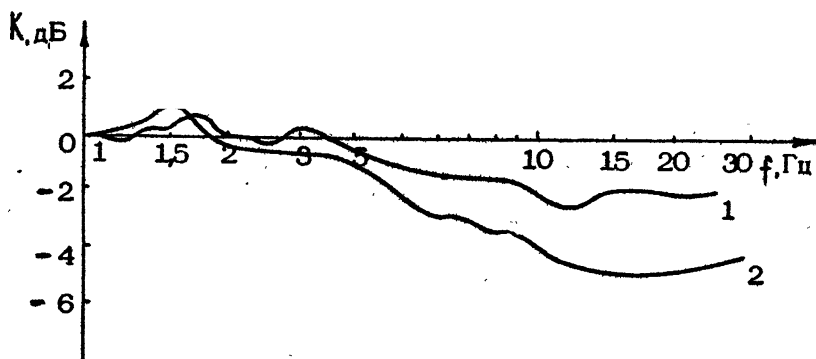


б)

Р и с. 2. Контраст в спектре волновых чисел (а) и частот (б) для пленочных слайков при слабом ветре ($V \approx 1$ м/с, $\rho = 30$ дин/см)



а)



б)

Р и с. 3. Контраст для пленочных сливок при умеренных ветрах ($\rho \approx 20$ дин/см; 1 - $V = 8,5$ м/с, 2 - $V = 6,5$ м/с)

Хьюза для $\mu(k, V)$ (см., например, [1]). Отметим, что расчеты с использованием других известных эмпирических формул для β , а также теоретической модели Майлса дают близкие результаты [9].

Сравним результаты модельных расчетов с данными, полученными в экспериментах с искусственными сликами [9, 15, 16]. Регистрация волнения проводилась оптическим анализатором спектра, работающим в диапазоне длин волн $4 \text{ см} \leq \lambda \leq 1,5 \text{ м}$, а также струнным волнографом с частотным разрешением до 20–25 Гц. Проводились эксперименты как со сликами малых (порядка 10 м) [9, 16], так и больших (10^2 – 10^3 м) [9, 15] размеров; при этом контрасты в диапазоне сантиметровых волн в условиях одинаковой упругости пленки и скорости ветра практически совпадают друг с другом. Это обстоятельство указывает на сравнительно слабое влияние на рябь со стороны более длинных (дециметровых и метровых) волн, характер изменчивости которых существенно зависит от размера слика (при сопоставимости этого размера с масштабами релаксации длинных волн). Как видно из рис. 2, 3, теоретические зависимости контраста от волнового числа неплохо согласуются с результатами измерений. Отметим, что данные радиолокационных измерений на длинах 12 и 2 см в экспериментах с искусственными сликами [19] количественно соответствуют данным [9, 15]. К сожалению, из-за ограниченных возможностей аппаратуры в экспериментах [9, 15] не удалось зафиксировать при умеренном ветре ожидаемый из теории максимум $|K(k)|$, дБ, который представляет интерес как возможный информативный параметр слика (см. ниже). Отметим, что в частотных контрастах при слабом ветре ($V \sim 1 \text{ м/с}$) этот максимум ярко выражен (см. рис. 2, 6). Теоретическая зависимость $K(f)$ на рис. 2, 6, определяемая при такой скорости ветра фактически просто отношением декрементов затухания в слике и на чистой воде и рассчитанная с использованием линейного дисперсионного уравнения для ряби при $\epsilon \approx 70 \text{ дин/см}$, хорошо согласуется с экспериментальными значениями $K(f)$, а также с соответствующими контрастами в спектре волновых чисел. Что касается частотных контрастов при умеренных ветрах, то сколь-нибудь отчетливый максимум $|K(f)|$ здесь не наблюдается (см. рис. 3, 6). Это связано с доплеровским уширением частоты ряби в поле орбитальных скоростей

длинных волн; учет этого эффекта принципиален для количественной интерпретации частотных спектров.

В заключение данного раздела отметим, что проведенные эксперименты со сликками [9,15,16] подтверждают возможность использования модели локального баланса для описания изменчивости спектра ветровой см-ряби и показывают, что основным физическим механизмом изменчивости последней является прямое затухание волн, связанное с упругими свойствами п.а.-пленок. Эффекты же, связанные с трансформацией поля ветра и влиянием на рябь более длинных волн, в первом приближении можно не учитывать.

ТРАНСФОРМАЦИЯ ДЕЦИМЕТРОВЫХ ВОЛН В СЛИКАХ

Из рассмотренной модели следует, что для волн с длиной $\lambda \approx 20-30$ см затухание в интересующем нас диапазоне упругостей ($\rho \approx 30-40$ див/см) практически не отличается от затухания на чистой воде и мало по сравнению с инкрементами роста дециметровых (дм-) волн. Поэтому для сликков малых масштабов, где не успевают проявиться эффекты межволнового взаимодействия и трансформации поля ветра, контрасты в дм- и м-диапазонах близки к нулю [9]. На больших же масштабах (10^2-10^3 м) указанные эффекты определяют изменчивость спектра в этих диапазонах. Весьма нетривиальным оказался эффект усиления дм-волн в пленочном сликке, обнаруженный в ходе 3-го рейса НИС "Витязь" [20]: наряду с гашением см-волн в сликке с размерами ~ 1 км оптическим анализатором спектра зафиксировано усиление волнения в диапазоне 20 см - 1 м на 2-3 дБ. Наблюдения проводились при $V \approx 5-5,5$ м/с, причем было зафиксировано усиление ветра над сликком примерно на 10% (параметры пленки, к сожалению, не измерялись). Следует сказать, что положительные дм-контрасты для сликков предположительно пленочной природы наблюдались неоднократно, при этом отмечена тенденция к уменьшению контраста при слабом ветре [9]. Факт усиления ветра над сликками отмечался еще в работе [11], где для искусственных сликков такого же масштаба и скоростей ветра 7,5 и 4,5 м/с зафиксировано уменьшение параметра шероховатости λ в 2 и 7 раз и увеличение средней скорости ветра V на высоте 10 м на 15 и 30% соответственно.

Подтверждение и более детальное исследование эффекта усиления было предпринято в специальных экспериментах с большими слайдами [15], выполненных при нескольких скоростях ветра. При слабом ветре ($V \approx 2,3$ м/с) усиления дм-волн не наблюдалось, отсутствовало и усиление ветра над слайком. При сравнительно сильном ($V \approx 8,5$ м/с) ветре эффект усиления был невелик, наиболее же отчетливо он проявился при умеренных ветрах $V \sim 5-6$ м/с (см.рис.1); увеличение скорости ветра при этом составляло примерно 10%.

Предложенное [20] объяснение эффекта усиления в общих чертах сводится к следующему: генерация дм-волн, согласно майлсовской модели, существенно зависит от профиля средней скорости ветра, который, в свою очередь, определяется шероховатостью морской поверхности; при подавлении ряби пленкой поверхность становится более гладкой, скорость ветра возрастает и генерация дм-волн происходит эффективнее, чем вне слайка. Зная приращение ΔV скорости ветра, дм-контраст можно оценить на основе (7), учитывая,

что $f(k, \rho) \sim f(k, 0) \ll \beta$. При этом $K \sim \beta_s(k, V + \Delta V) / \beta_0(k, V)$. Для оценки же ΔV используем следующие соображения (см. [9]). При описании профиля скорости ветра над морем логарифмическим законом $V(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z^*}$ (u_* - динамическая скорость, $\kappa = 0,4$ - постоянная Кармана) параметр шероховатости z^* определяется режимом обтекания взволнованной поверхности и в общем случае выражается через эффективную высоту h шероховатостей и ее отношение к толщине вязкого подслоя ν / u_* как $z^* = h \mathcal{F}(h u_* / \nu)$ (см. [21]).

В режиме гладкого обтекания ($Re = h u_* / \nu \ll 1$), т.е. высота неровностей h меньше толщины вязкого подслоя, $\mathcal{F} \sim Re^{-1}$ и $z^* \sim \nu / u_*$, т.е. не зависит от h . В режиме полностью шероховатого обтекания ($Re \gg 1$) $z^* \sim h$. Эффективная высота неровностей согласно [21]

$$h \sim \left\{ \int F(k) \exp \left[-\alpha \frac{\omega \cos(\vec{k} \cdot \vec{V})}{\kappa u_*} \right] d\vec{k} \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

т.е. определяется фактически среднеквадратичной высотой мелкокомасштабной ряби, оказывающей наибольшее сопротивление воздушному потоку. Из условия (9) следует, что вариации коротковолновой части спектра должны в общем слу-

чае приводить к изменениям эффективной высоты h и, следовательно, к вариациям z_* и средней скорости ветра. При слабом ветре, а также на начальных стадиях развития волн, когда режим обтекания можно считать гладким, гашение ряби в слике не должно приводить к изменению скорости ветра и, следовательно, изменять инкремент дециметровых волн. При достаточно сильном ветре и развитом волнении отношение параметров шероховатости в фоне и слике приблизительно определяется корнем из среднего контраста в сантиметровом диапазоне: $z_0^*/z_*^* \sim \sqrt{|K_{CM}|}$. Соответствующее изменение скорости в пренебрежении изменением

$$\Delta V \sim u_* \ln \sqrt{|K_{CM}|} \quad (9)$$

при характерных значениях $|K_{CM}| \sim 5 \div 10$ дБ оказывается порядка $(1,5 \div 2,5) u_*$, что согласуется с данными экспериментов. При этом, однако, величина контраста в дециметровой части спектра $K_{дм}$, полученная из (7), меньше экспериментально наблюдаемой (см. рис. 3), что заставляет предположить существование другой, кроме трансформации поля ветра, причины эффекта усиления. Это подтверждают результаты наблюдений [15] текущей изменчивости волнения и ветра над сликом. Как видно из рис. 4, в ближней к наветренной границе части слика наблюдается усиление дм-волн, не сопровождающееся увеличением скорости ветра. Усиление ветра проявляется ближе к подветренному краю слика, ему отвечает дополнительный рост положительного контраста.

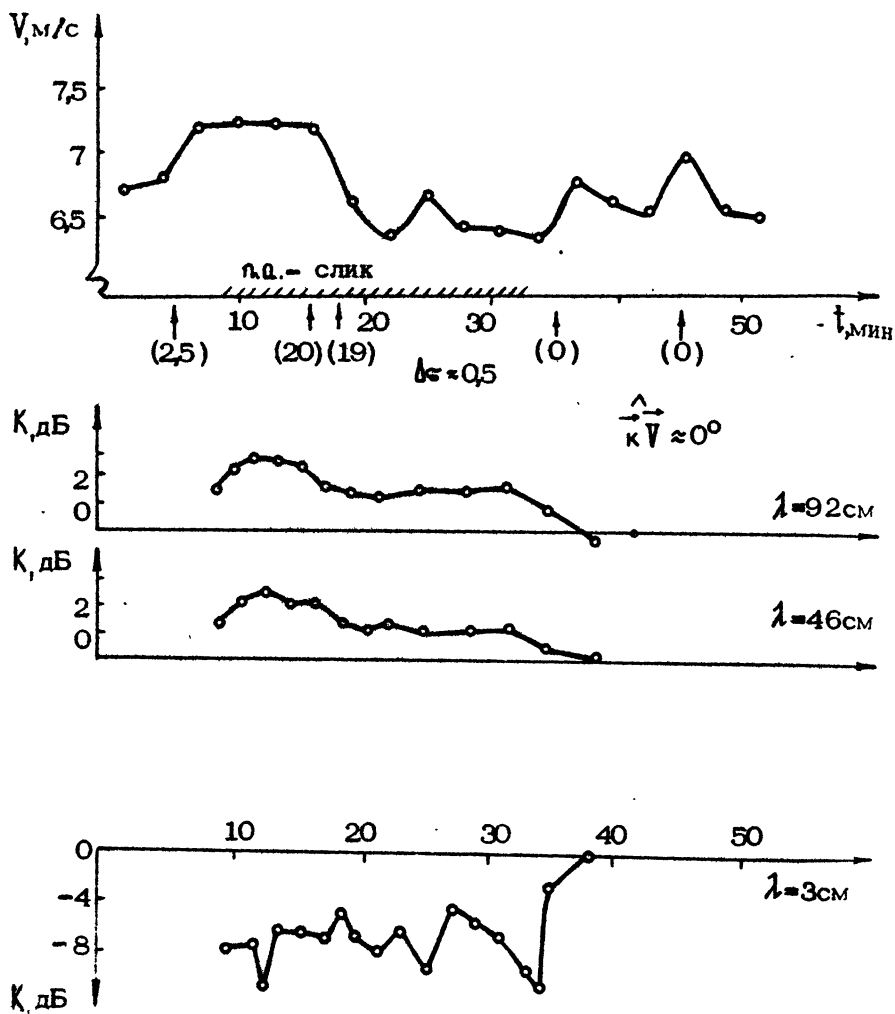
Вторым механизмом усиления дм-волн является их дополнительное затухание, связанное с модуляцией релаксирующей ветровой ряби в поле дм-волны. Учет соответствующего декремента затухания γ_{NL} в (7) приводит к следующему выражению для контраста в дм-диапазоне ($\gamma_{NL} \ll \beta$):

$$K_{дм} \approx 1 + \frac{\beta_s - \beta_0}{\beta_0} + \frac{\gamma_{NL_0} - \gamma_{NL_s}}{\beta^0} \quad (10)$$

Из выражения для γ_{NL} [22]

$$\gamma_{NL} = \alpha^2 \int |Q'_F| \omega^2 [\Delta^2 \Omega^2 + (Q'_F)^2]^{-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{k}{\omega} F - k \frac{\partial F}{\partial k} \right) dk,$$

где Q'_F - скорость релаксации ряби, Ω и α - частота и волновое число дм-волны, $\Delta = 1 - \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\alpha}{\Omega}$, F - спектр ряби, следует, что разность $\gamma_{NL}^0 - \gamma_{NL_s}$ в (10) определяется



Р и с. 4. Изменчивость ветра и спектрального контраста для пленочного слика большого масштаба (слик 2 на рис.3)

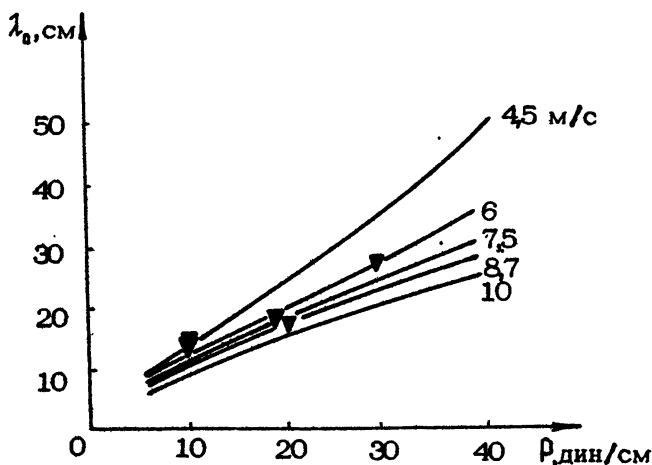
вариацией спектра $F_0 - F_s$, последняя же сколь-нибудь значительна, как следует из предыдущего раздела, для волны короче 10-15 см. По оценке [22], последнее слагаемое в выражении (10) имеет порядок величины вариации среднего квадрата уклона см-волн ($\sim 4 \Delta (\overline{\xi_{cm}'}^2)$) и дает значения контраста (~ 1 дБ), согласующиеся по порядку с наблюдаемыми.

В данной статье не обсуждается вопрос о трансформации спектра в метровом диапазоне: из-за недостатка данных пока трудно выявить характер зависимостей контраста от упругости пленок, скорости ветра и т.д. Отметим лишь, что наблюдается гашение метровых волн в сликах большой протяженности [11-13], величины контраста при умеренном ветре порядка 1,5-2 дБ и близки к нулю для волн с $\lambda \geq 10$ м. Сопоставляя контрасты в м- и дм-диапазонах при близких скоростях ветра, можно предположить, что переход от гашения м-волн к усилению в дм-диапазоне имеет место при $\lambda \sim 1,5-2$ м [20]. Сказанное, однако, требует прямой экспериментальной проверки.

О СПЕКТРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ ПЛЕНОЧНЫХ СЛИКОВ

Как уже отмечалось во введении, ввиду отсутствия характерной геометрической структуры пленочных сликов, для задач дистанционной диагностики весьма важно выявление характерных особенностей трансформации спектра ветрового волнения в сликах, т.е. выработка их спектрального признака. См- и частично дм-диапазоны спектра при этом представляют основной интерес, поскольку большинство радиолокаторов, использующихся сейчас для дистанционного зондирования океана, работает в этих диапазонах.

К характерным особенностям трансформации спектра мелкомасштабного волнения в пленочных сликах можно отнести близкий к нулю или слабоположительный контраст для дм-волн и отрицательный и растущий по абсолютной величине с уменьшением длины волны (до длин $\lambda \approx 4-6$ см) контраст в см-диапазоне. Длина волны λ_0 , соответствующая переходу контраста через нуль, меняется сравнительно слабо в довольно широких пределах изменений скорости ветра и упругости пленок (4-10 м/с и 5-30 дин/см) и лежит в области 15-25 см. Последнее хорошо видно из рис.5, где



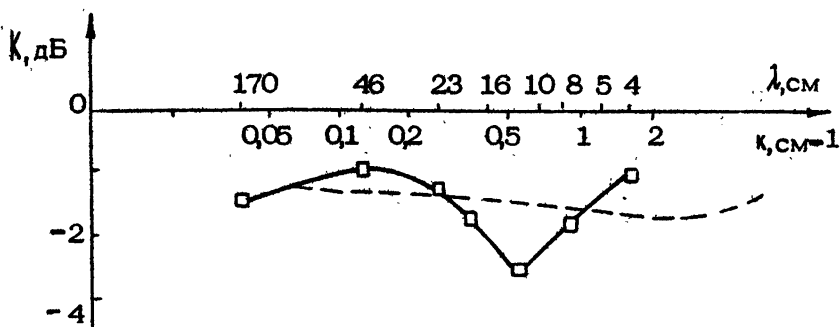
Р и с. 5. Граничная длина волны λ_0 как функция упругости пленки и скорости ветра

приведены результаты модельных расчетов и экспериментально полученные значения λ_0 (см. [15]). Обращение в нуль контраста в указанной области длин волн можно использовать как одну из отличительных черт пленочных снимков. По данным же измерений контраста в см-диапазоне на основе приведенной модели изменчивости спектра можно определить величину упругости пленки ^{*)}.

В заключение кратко охарактеризуем спектральный контраст для снимков ветровой природы и аномалий от внутренних волн, которые по своим масштабам могут быть близки

^{*)} Отметим, что в работе [23] обсуждалась возможность использования в качестве информативного параметра п.а.-пленок величины и положения на оси частот максимума контраста $|K(f)|$ ($f > 3$ Гц). Не исключая такой возможности, укажем, что в [23] она выглядит недостаточно обоснованной, поскольку сопоставление химического состава пленок и параметров $\max |K(f)|$ проводилось для данных лабораторных экспериментов; в натуральных же условиях, как отмечено выше, этот максимум наблюдается лишь при очень слабом ветре.

к пленочным. К сожалению, в настоящее время число данных подобного рода весьма ограничено. На рис.6 приведен



Р и с. 6. Контраст для ветрового слика

контраст для ветрового слика, связанного с флуктуацией скорости ветра (см. [15]). Уменьшение скорости ветра (в рассматриваемом примере с 8,5 до 7 м/с) приводит к уменьшению интенсивности, как в см-, так и в дм-диапазонах спектра. Это представляется вполне естественным для достаточно протяженной ветровой аномалии ($\sim 10^2$ м), на масштабах которой волны этих длин выходят на стационарный при данной скорости ветра уровень. Контраст для ветрового слика в отличие от пленочных слабо меняется с изменением длины волны и может считаться практически постоянным (результат расчета по формуле (7) при измеренных в сликке фоне значениях скорости ветра и нулевой упругости пленки указан пунктиром на рис.6). Для сликков от периодических внутренних волн контрасты в дм-диапазоне достигают значительных величин, порядка или больших по абсолютной величине контрастов в сантиметровой области, в поле же единенных внутренних волн, являющихся обычно солитоном, понижение пикноклина, поверхностные аномалии имеют характер сулоя (более подробно см. [1] и цитированную там литературу).

Подчеркнем еще раз, что рассмотренные в предыдущих разделах особенности спектральных контрастов относятся к сликкам чисто пленочной природы. Для решения же задачи дистанционной диагностики пленочных аномалий при наличии внутренних волн, течений и т.д. необходимы дальнейшие исследования.

1. Монин А.С., Красицкий В.П. Явления на поверхности океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 375с.
2. Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. Пленочный механизм воздействия внутренних волн на ветровую рябь //Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность/ Горький, 1982. ИПФ АН СССР. С.31.
3. Veseky J.E., Stewart R.H. The observation of ocean surface phenomena using imagery from the SEASAT synthetic aperture radar: An assesment // J.Geophys.Res. 1982. V.C87. N 5. P.3397.
4. Barger W.R., Daniel W.H., Garrett W.D. Surface chemical properties of banded sea slicks // Deep Sea Res. 1974. V.21. P.83.
5. Huhnerfuss H., Walter W., Kruspe G. On the variability of surface tension with mean speed //J.Phys.Oceanogr. 1977. V. 8. P.142.
6. Демин Б.Т., Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Шереметьева А.И. Исследование упругих свойств морских поверхностно-активных пленок //Изв. АН СССР.ФАО. 1985 Т.21. №4.С.410.
7. Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. О влиянии пленок поверхностно-активных веществ на изменение спектров ветрового волнения под действием внутренних волн //Изв. АН СССР. ФАО. 1980. Т.16. №11. С.1068.
8. Jarvis N.L., Garrett W.D., Scheiman M.A., Timmons C.O. Surface chemical characterization of surface-active material in seawater //Limnol. Oceanogr. 1967. V.12. P.88.
9. Ermakov S.A., Zuikova E.M., Panchenko A.R., Salashin S.G., Talipova T.G., Titov V.I. Surface film effect on short wind waves //Dyn.Atmos.Oceans. 1986. V.10. P.31.
10. Левич В.Г. Физико-химическая гидроакустика. М.: Физматгиз, 1959, 699с.
11. Barger W.R., Garrett W.D., Mollo-Christensen E.L., Ruggles K.W. Effects of an artificial sea slick upon the atmosphere and the ocean //J.Appl.Meteorol. 1970. V.9. N 3. P.396.
12. Huhnerfuss H., Alpers W., Jones W.L., Lange P.A., Richter K. The damping of ocean surface waves by a monomolecular film measured by

- staffs and microwave radars //J.Geophys.Res. 1981, V.86. N C1. P.429.
13. Hühnerfuss H., Alpers W., Garrett W.D., Lange P.A., Stolte S. Attenuation of capillary gravity waves at sea by monomolecular organic surface films //J.Geophys.Res. 1983, V.88. N C14. P.9809.
14. Hühnerfuss H., Garrett W.D. Experimental sea slicks: their practical applications and utilization for basic studies of air-sea interactions //J. Geophys.Res. 1981, V.86. N C1. P.439.
15. Ермаков С.А., Зуйкова Э.М., Салашин С.Г. Трансформация спектров коротких ветровых волн в пленочных сликах //Изв. АН СССР, ФАО. 1987. Т.23. №7. С.707.
16. Ермаков С.А., Панченко А.Р., Талинова Т.Г. Гашение высокочастотных ветровых волн искусственными поверхностно-активными пленками //Изв. АН СССР, ФАО. 1985. Т.21. №1. С.76
17. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979, 537с.
18. Phillips O.M. On the response of short ocean wave components at a fixed wavenumber to ocean current variations //J.Phys.Oceanogr. 1984. V.14. N 9. P.1425.
19. Hühnerfuss H., Alpers W., Cross A., Garrett W.D., Keller W.C., Lange P.A., Plant W.J., Schlude F., Schuler D.L. The modification of X and L band radar signals by monomolecular sea slicks //J.Geophys.Res. 1983. V.88. N C14. P.9817.
20. Браво-Живоговский Д.М., Долин Л.С., Ермаков С.А., Зуйкова Э.М., Лучинин А.Г., Титов В.И. Эффект усиления дециметровых ветровых волн в зоне нефтяного слика //ДАН СССР. 1984. Т.276, №5. С.1243.
21. Китайгородский С.А. К вопросу о расчете параметра шероховатости морской поверхности //Изв. АН СССР, ФАО. 1968. Т.4. №8. С.870.
22. Ермаков С.А. О затухании длинных волн на коротких поверхностных волнах //Тезисы III Всес. съезда океанологов. М., 1987.
23. Cini R., Lombardini P.P., Hühnerfuss H. Remote sensing of marine slicks utilizing their influence on wave spectra // Int.J.Remote Sensing. 1983. V.4. N 1. P.101.

ЛАЗЕРНАЯ РЕГИСТРАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.Б.Есипов, К.А.Наугольных, В.Н.Носов, С.Ю.Пашии

Оптические методы контроля за морским волнением традиционно развивались от визуального наблюдения и фотографирования участков поверхности моря при последующей статистической обработке изображений. В.В.Шулейкин в 20-х гг., наблюдая за структурой солнечных и лунных дорожек на поверхности моря, предложил, по-видимому впервые, количественный метод дистанционного измерения поверхностных волн [1,2]. Интенсивное развитие средств дистанционного контроля с начала 50-х гг. потребовало более обстоятельного анализа возможности измерения характеристик поверхностного волнения с помощью электромагнитного излучения, в том числе и оптического диапазона. В работах [3,4,5] была рассмотрена связь между параметрами случайного волнения и характеристиками рассеянного зондирующего излучения. Вообще говоря, эта связь оказывается довольно сложной. Однако, как показывает практика [6,7], по оптическим изображениям поверхности моря можно получить представление об энергетическом спектре морского волнения, определить характерные углы наклона поверхностных волн.

В последнее время получили развитие активные лазерные методы зондирования морской поверхности [8-10]. С развитием

лазерной техники возможности дистанционных оптических методов регистрации морского волнения неизмеримо возросли благодаря высокой спектральной интенсивности лазерного излучения. Стало возможным проводить оптические наблюдения в любое время суток, высокая степень когерентности позволяет существенно повысить избирательность наблюдения. По сути, стало возможным вести наблюдения за отдельными бликами, обусловленными самыми короткими капиллярными поверхностными волнами. С другой стороны, с помощью модулированного по интенсивности лазерного излучения проводится детальное профилирование длинных энергонесущих гравитационных волн. Монохроматические свойства лазерного излучения открывают возможность измерения скорости колебаний морской поверхности. Такие универсальные возможности оптического излучения применительно к исследованию поверхностных волн самого широкого диапазона обусловлены нерезонансным характером рассеяния света поверхностью.

В приближении геометрической оптики, соответствующем условию малости длины волны света по отношению к линейным параметрам поверхностных волн, взволнованная поверхность представляется набором зеркальных точек-бликов, отражающих лазерное излучение в направлении приема. Зеркальные точки расположены случайно относительно друг друга как в нормальном, так и в тангенциальном направлениях. Имея данные о статистике зеркальных точек и их расположении, можно в принципе составить полное представление о пространственных характеристиках поверхностного волнения. В самом деле распределение по вертикали характеризует собой распределение возвышений взволнованной поверхности, средняя интенсивность рассеянного света определяется в основном дисперсией уклонов поверхностных волн, яркость зеркальной точки зависит от кривизны поверхности, а расстояние между зеркальными точками в плоскости подстилающей поверхности отражает пространственную структуру волнения. Доплеровское смещение частоты в рассеянном свете несет информацию о колебательных скоростях движения зеркальных точек.

Некоторые из перечисленных возможностей анализа статистических характеристик взволнованной водной поверхности с помощью лазерного излучения исследуются в настоящей работе. Здесь приводятся результаты экспериментального исследования статистических распределений радиуса кривизны и пространственных периодов зеркальных точек, исследуется характер модуляции пространственного и частотного спектров оптического излучения, рассеянного на колеблющейся по гармоническому закону взволнованной поверхности.

1. ЛАЗЕРНАЯ РЕГИСТРАЦИЯ КРИВИЗНЫ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Среднеквадратичное значение кривизны K является следующим после возвышений и наклонов статистическим моментом в описании неровностей взволнованной поверхности:

$$\langle K^2 \rangle = \int S(\vec{x}) x^4 d\vec{x}. \quad (1)$$

Здесь $S(\vec{x})$, \vec{x} соответственно пространственный спектр и волновой вектор поверхностных волн. Спектр поверхностных волн убывает в области высоких частот $\sim x^{-4}$ (спектр Филиппса [11, 12]).

Кривизна поверхности зависит от вида коротковолновой части спектра поверхностных волн, наиболее сложной для измерения.

Анализ выражения (1) для спектра вида x^{-4} показывает, что для получения конечного значения величины $\langle K^2 \rangle$ необходимо ограничить интегрирование по спектру, т.е. установить максимальную величину x_r , определяющую верхнюю границу спектра. В качестве предельной оценки для x_r можно воспользоваться условием $\nu x_r^2 / Q \ll 1$, определяющим возможность распространения волны на поверхности вязкой жидкости. Здесь ν — кинематическая вязкость жидкости, Q — круговая частота поверхностной волны. С учетом дисперсионного соотношения для поверхностных волн

$$Q^2 = g x + \frac{\sigma}{\rho} x^3, \quad (2)$$

где g — ускорение свободного падения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, получим оценку предельного значения волнового числа для капиллярной волны на свободной поверхности воды $x_r \approx 10^4 \text{ см}^{-1}$.

Следует заметить, что условия возбуждения и распределения капиллярной ряби в естественных условиях на морской поверхности оказываются достаточно сложными, зависящими от множества причин, таких как ветер, пленка поверхностно-активных веществ, локальные гидродинамические возмущения, например внутренние волны. Имея это в виду, представляется целесообразным для дальнейшего анализа воспользоваться эмпирическими соотношениями для спектра поверхностных волн в области высоких частот, в частности приведенными в работе [13]:

$$S(x) = \begin{array}{ll} b x^{-4} & x < x_1 \\ b x^{-7/2} x_1 & x_1 < x < x_2 \\ b D(U_*) x_1^{p-4} x_2^{-p} & x_2 < x < x_3 \\ b D(U_*) x_1^{-4} & x_3 < x < x_r \\ E x^{-10} & x > x_r \end{array} \quad (3)$$

$$b = 4,05 \cdot 10^{-3}; \quad p = 2,39 \lg(12 D(U_*) U_*^{-1});$$

$$x_1 = 51,7 U_*^2; \quad x_2 = 0,359; \quad x_3 = 0,942;$$

$$D(U_*) = (1,274 + 0,0268 U_* + 6,03 \cdot 10^{-5} U_*^2)^2;$$

$$x_r = 2,09 U_*^{1/2} D^{-1/6}; \quad E = 0,33 U_*^3.$$

Скорость поверхностного трения U_* связана со скоростью ветра U соотношением

$$U = 25 U_* [1 - 0,2 \lg(U_*/U_0)], \quad U_0 = 50 \text{ см/с}. \quad (4)$$

В этом случае граничная частота спектра поверхностных волн определяется скоростью ветра, следовательно, и кривизна водной поверхности будет зависеть от скорости ветра. Учитывая сложный характер эмпирических соотношений в выражениях для спектра (3), важно получить независимые экспериментальные данные прямого измерения зависимости кривизны водной поверхности от ветра.

В основу методики настоящих экспериментов по регистрации радиусов кривизны поверхностного волнения была положена методика оптических измерений, описанная в работе [14]. Возмущенная поверхность освещалась узким световым пучком. В моменты прохождения зеркальной точки области засветки фотоприемником регистрировался отраженный световой импульс. По амплитуде этого сигнала и предварительно снятой калиброванной кривой определялся радиус кривизны.

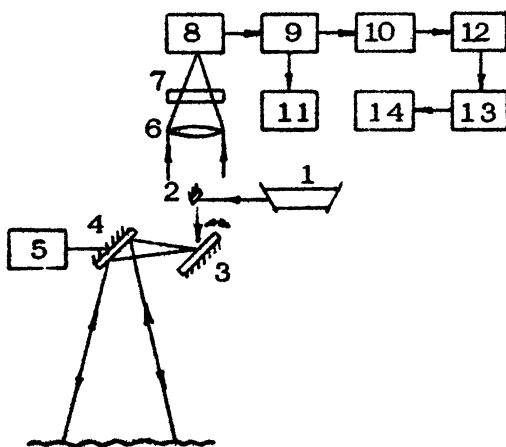
Однако нетрудно заметить, что интенсивность отдельного импульса света, регистрируемого фотоприемником при отражении светового пучка от зеркальной точки, связана с кривизной поверхности в точке отражения, что позволяет непосредственно определить значение модуля радиуса кривизны. Наиболее просто эта связь описывается для случая изотропного волнения. В приближении геометрической оптики можно записать

$$I = \frac{I_0 V D^2}{A^2} \left(1 + \frac{2R}{\rho}\right)^{-2}, \quad (5)$$

где: I_0 - интенсивность падающего луча света; V - коэффициент отражения света от водной поверхности; D - апертура фотоприемника; A - диаметр луча; R - дистанция регистрации; ρ - радиус кривизны поверхности.

Отсюда следует, что при $R \gg \rho$ $I \sim \rho^2$.

В силу случайного характера волнения интенсивность импульсов света также случайна. Статистический анализ амплитуд последовательности электрических импульсов с выхода фотоприемника дает функцию распределения вероятностей и дисперсию радиусов кривизны волн. Для увеличения объема обрабатываемых статистических данных, т.е. для увеличения количества импульсов в единицу времени, и повышения тем самым надежности измерений было применено сканирование лучом света больших площадей водной поверхности. Для проведения морских экспериментов оптическая локационная система устанавливалась на палубе научно-исследовательского судна на расстоянии 5 м от поверхности воды, а сканирование осуществлялось поперек направления движения судна. Схема экспериментальной установки показана на рис.1.

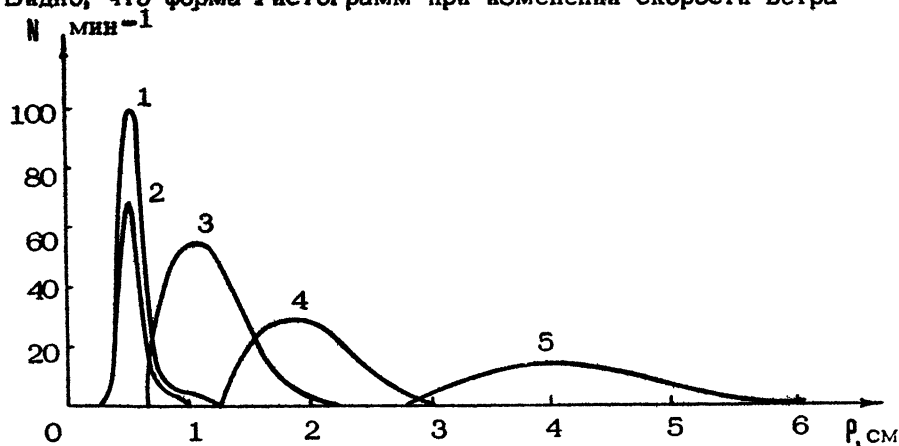


Р и с . 1 . Схема экспериментальной установки: 1 - лазер, 2,4 - зеркала, 3 - сканирующее зеркало, 5 - карданный подвес, 6 - приемная оптическая система, 7 - интерференционный фильтр, 8 - фотоэлектронный умножитель, 9,12 - усилители, 10 - магнитофон, 11 - осциллограф, 13 - анализатор импульсов, 14 - цифropечающее устройство

Луч He-Ne лазера 1 мощностью примерно 4 мВт направлялся на зеркало 2, размер которого совпадал с поперечным размером лазерного луча. Далее луч попадал на сканирующее зеркало 3. Привод этого зеркала осуществлялся от электродвигателя, вращающегося со скоростью 500 об/мин, через кривошипно-шатунный механизм. После сканирующего зеркала луч через зеркало 4 падал на поверхность моря. Диаметр луча на поверхности моря составлял примерно 1 см. Угол сканирования был выбран равным $\pm 0,15$ рад от нормали. Предполагалось, что при всех условиях проведения экспериментов среднеквадратический угол наклона морской поверхности не будет превышать этой величины и, таким образом, при регистрации можно будет обеспечить наибольший статистический массив принимаемой информации. Угловая скорость сканирования составляла 6 рад/с, что соответствовало скорости движения лазерного луча по поверхности моря 30 м/с. Для стабилизации направления падающего на морскую поверхность светового пучка при качке судна зеркало 4 устанавливалось в карданном подвесе, стабилизированном противовесом. Отраженный в зеркальных точках свет в обратном направлении проходил зеркала 4, 3 и мимо зеркала 2 попадал на собирающую линзу 6. Далее оптическое излучение через интерференционный светофильтр 7 попадало на фотоэлектронный умножитель 8 типа ФЭУ-68 (см.рис.1). Реализованная таким образом оптическая схема приема обеспечивала высокую степень пространственной селекции принимаемого оптического сигнала. Мгновенное поле зрения установки составляло $5 \cdot 10^{-3}$ рад. Использование светофильтра и пространственная селекция позволили существенно повысить соотношение сигнал/шум при регистрации. Электрические импульсы с ФЭУ регистрировались амплитудным анализатором типа АИ-256-6.

Оценим нижний и верхний пределы регистрируемого значения модуля радиуса кривизны. Нижний предел находится из энергетических соотношений. Если при расчете ограничиться учетом только дробных шумов фотоприемника, то оценка дает величину порядка $R_{min} = 0,15$ мм. Верхний предел можно найти из геометрических условий, когда размер зеркальной области засветки и размер зеркальной точки совпадут. В нашем случае $R_{max} = 5$ м. Таким образом, диапазон регистрируемых значений радиуса кривизны составлял более 90 дБ. В реальных условиях он ограничен динамическим диапазоном анализатора и составлял 40 дБ.

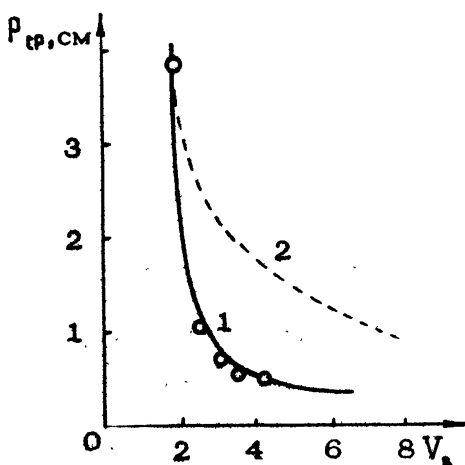
Перед установкой на судно описанное выше устройство испытывалось в лабораторных условиях. Регистрировались гистограммы распределения модуля радиуса кривизны взволнованной водной поверхности при возбуждении волнения направленным воздушным потоком с различными скоростями. Эксперименты проводились в ванне размером 700x350x300 мм при изменении скорости ветра от 2 до 4,3 м/с. Сканирование осуществлялось поперек направления воздушного потока. Результаты измерений при времени усреднения 1 мин представлены на рис.2. Видно, что форма гистограмм при изменении скорости ветра



Р и с. 2. Распределение радиуса кривизны водной поверхности в зависимости от скорости ветра. Кривые 1,2,3,4,5 соответствуют скоростям ветра 4,3; 3,6; 3,1; 2,6; 2 м/с (N - число бликов)

меняется. Среднеквадратичное значение радиуса кривизны с увеличением скорости ветра от 2 до 4,3 м/с уменьшалось в 8 раз, а число элементов в водной поверхности с таким радиусом кривизны за единицу времени увеличивалось в 7 раз. Существенно менялась и дисперсия радиуса кривизны. При том же изменении скорости ветра она падала в 7 раз. На рис.3 показана зависимость среднего радиуса кривизны от скорости ветра. Здесь же представлена такая характеристика, приведенная по данным работы [14] (кривая 1). Эти зависимости практически совпали. Кривая 2 на этом рисунке соответствует численному счёту выражений (1), (3), дополненных условием перехода спектра поверхностных волн в спектр вида Неймана-Пирсона [12] для энергонесущих гравитационных волн.

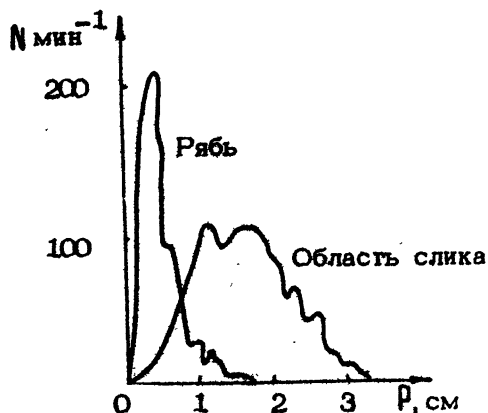
Р и с. 3. Зависимость среднеквадратичного значения радиуса кривизны от скорости ветра: 0 - эксперимент, 1 - эксперимент [14], 2 - численный счет



Ниже представлены результаты экспериментов, выполненных в море. Измерения вероятностного распределения модуля радиусов кривизны морской поверхности проводились в области слика и вне его, а также в районах, отличающихся скоростью поверхностных течений. Кроме того, были исследованы изменения в статистике кривизны, связанные с вертикальными смещениями гермоклина.

Гистограммы распределения модуля радиуса кривизны в слике и в области развитого волнения представлены на рис.4. Скорость ветра в момент съемки составляла 3 м/с, балльность

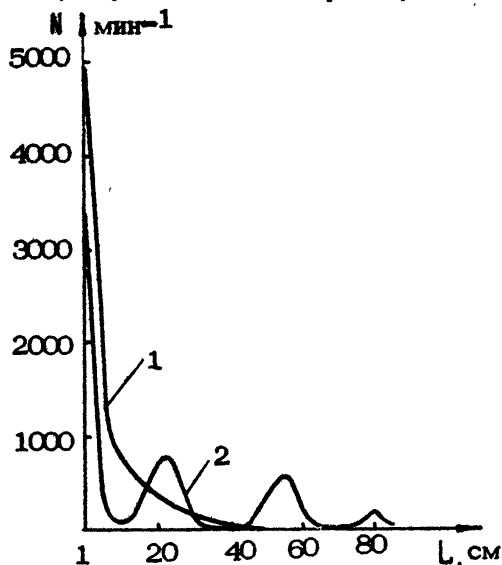
Р и с. 4. Распределение радиуса кривизны поверхности. Условия регистрации: скорость ветра 3 м/с, волнение моря 1 балл, скорость хода судна 9 узлов



моря 1 балл. Судно шло со скоростью 9 узлов. Время накопления данных равнялось 1,5 мин. Анализ представленных гистограмм позволяет выделить следующие моменты. По сравнению с областью развитого волнения среднеквадратичное зна-

чение радиуса кривизны в области слика увеличилось с 0,4 до 1,6 см, т.е. в 4 раза. Примерно во столько же раз возрос разброс возможных значений радиусов кривизны волн, а число участков морской поверхности с радиусом кривизны, равным среднестатистическому значению, уменьшилось в 2 раза.

Что касается пространственных периодов в распределении зеркальных точек, то, как видно из рис.5, гистограмма распре-

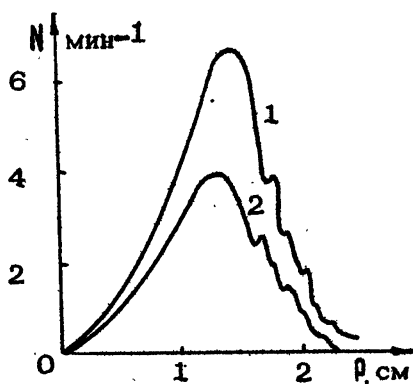


Р и с. 5. Распределения пространственного периода зеркальных точек; 1 — рябь, 2 — слик

деления этого параметра в зоне слика отличается от зоны развитого волнения. В гистограмме, полученной в области слика, наряду с уменьшением числа бликов, следующих с периодом 15 см, выделяются максимумы, соответствующие периодам, кратным 27 см.

На рис.6 показаны гистограммы распределения модуля радиуса кривизны поверхности в участках моря, различающихся скоростями приповерхностного течения. При регистрации судно находилось в дрейфе, скорость ветра составляла 6 м/с, балльность 3 балла, наблюдались слабые проявления пенообразования. Время усреднения при обработке равнялось 45 мин. Как видно из гистограмм, при изменении скорости течения среднееквадратичное значение радиуса кривизны практически не менялось, однако число элементов поверхности с радиусом кривизны, равным среднееквадратичному значению, с ростом скоро-

Р и с. 6. Распределения радиуса кривизны морской поверхности при скорости приповерхностного течения 2 км/ч (кривая 1), 1 км/ч (кривая 2). Скорость ветра 6 м/с, судно находится в дрейфе



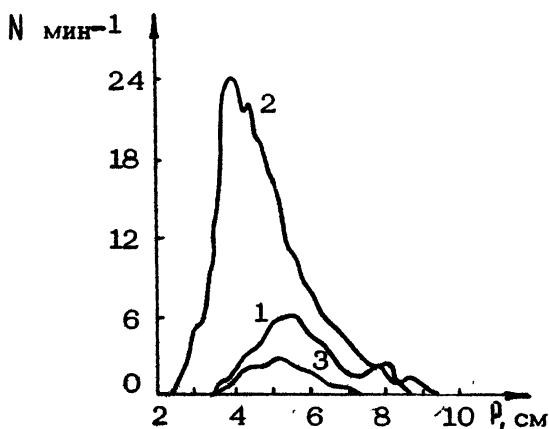
сти течения увеличилось более чем в 1,5 раза.

Далее приводятся результаты экспериментов, выполненных при одновременной регистрации струнным датчиком колебаний термоклина. Профиль распределения температуры по глубине, измеренный во время проведения экспериментов, показан на рис.7. Судно здесь, так же как и в предыдущем случае, находилось в дрейфе, скорость ветра составляла 4 м/с, балльность

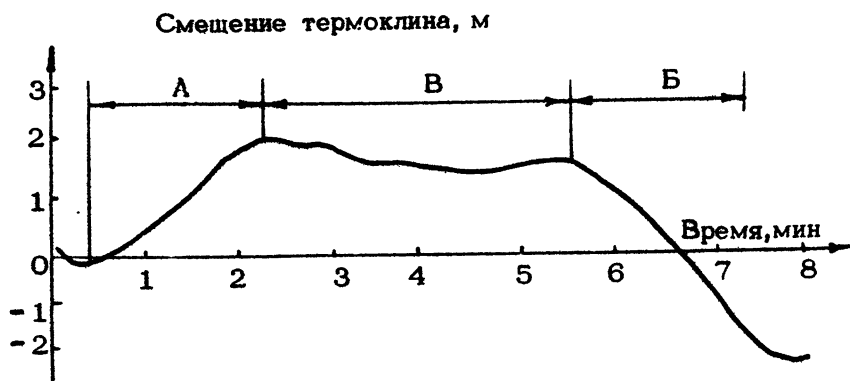


Р и с. 7. Профиль распределения температуры

моря 2 балла. На рис.8 представлены гистограммы распределения модуля радиуса кривизны, зарегистрированные в разных фазах движения термоклина при времени усреднения 1,5 мин. Кривые 1,2,3 соответствуют зонам А,Б,В на записи со струнного датчика, показанной на рис.9. Отличия в представленных гистограммах, как видно, существенные. Среднеквадратичное значение радиуса кривизны поверхности при переходе из зоны подъема термоклина А в зону спуска Б уменьшилось в 2 раза, дисперсия изменилась незначительно, а число элементов поверхности с радиусом кривизны, равным среднеквадратичному значению, увеличилось в 4 раза. Гистограмма, полученная в зоне В, где нет выраженных фаз спуска и подъема термоклина,



Р и с. 8. Распределения радиуса кривизны морской поверхности при разных фазах движения термоклина. Скорость ветра 3 м/с, волнение моря 2 балла, судно находится в дрейфе



Р и с. 9. Колебания термоклина

мало отличается от зоны подъема по среднеквадратичному значению радиуса кривизны. Однако число элементов поверхности с таким радиусом кривизны здесь вдвое меньше.

Анализ результатов экспериментов, выполненных как в лаборатории, так и в условиях моря, показал, что, кроме возможности дистанционного измерения радиуса кривизны взволнованной водной поверхности, метод сканирования позволяет с высокой чувствительностью регистрировать изменчивость радиуса кривизны поверхностных волн и пространственных ин-

тервалов между бликами при различной скорости ветра, воздействии течения, смещения термоклина, т.е. изменения в капиллярной ряби взволнованной поверхности воды приводят к заметной модуляции интенсивности и частоты следования зеркальных бликов.

Следует, однако, обратить внимание на известный разброс экспериментальных результатов измерения радиусов кривизны взволнованной поверхности, полученных разными методами [15, 16].

2. МОДУЛЯЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, РАССЕЯННОГО ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Наряду с изменениями в статистике зеркальных бликов обратим внимание на возможную модуляцию осредненных энергетических характеристик рассеянного света на взволнованной поверхности воды, испытывающей гидродинамические возмущения.

В работе [5] получены выражения для индикатрисы рассеяния (пространственного спектра) и частотного спектра оптического излучения (волнение на освещенном участке поверхности считается стационарным). При большом значении параметра Рэлея ($k\zeta \gg 1$, где ζ - случайные возвышения поверхности, k - волновое число света), энергетические спектры рассеянного излучения определяются только характерными значениями углов наклона и колебательных скоростей поверхностных волн.

Практически, однако, трудно выделить участок поверхности моря, на котором волнение можно было бы считать не меняющимся во времени. Длинные гравитационные волны и проходящие волны зыби меняют условия рассеяния света, приводят к модуляции как индикатрисы рассеяния, так и частотного спектра рассеянного оптического излучения. Рассмотрим характер такой модуляции. Будем считать волну зыби гармонической, а возвышения волн в присутствии зыби определяющимися простым соотношением

$$\zeta(\vec{r}, t) = \zeta_0(\vec{r}, t) + a \cos(\omega_0 t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (6)$$

где $\zeta_0(\vec{r}, t)$ - случайные возвышения волн в отсутствие зыби, a - амплитуда колебаний волн зыби.

Следуя работе [5], запишем выражение для индикатрисы рассеяния в скалярном виде

$$I(\vec{q}, t) = q_r^2 \iint_S \exp \left\{ i \left[(\vec{q}, \vec{r} - \vec{r}') + q_r (\zeta(\vec{r}, t) - \zeta(\vec{r}', t)) \right] \right\} d\vec{r} d\vec{r}'. \quad (7)$$

Здесь $\vec{q} = \vec{k}_s - \vec{k}$ – волновой вектор рассеяния, \vec{k}_s – волновой вектор рассеянного оптического излучения, S – площадь области рассеяния.

Интегрирование выражения (4) легко выполняется для изотропной рассеивающей свет поверхности в случае, когда волновые векторы света и зыби лежат в одной плоскости. Подставляя соотношение (6) в выражение (7), считая углы наклона $K\alpha$ зыби малыми в сравнении с характерными углами наклона случайных волн $\langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$, после усреднения по реализациям получим

$$I(\vec{q}, t) \approx I_0(\vec{q}) \left[1 - \frac{q_r K\alpha}{q_z \langle \gamma^2 \rangle} \cdot \frac{\gamma_1(K\alpha)}{K\alpha} \sin \omega_0 t \right], \quad (8)$$

где $I_0(\vec{q}) \approx \frac{1}{2\pi \langle \gamma^2 \rangle} \exp\left(-\frac{q_r^2}{2q_z^2 \langle \gamma^2 \rangle}\right)$ – индикатриса рассея-

ния света на зволнованной поверхности в отсутствие зыби, $A = S^{1/2}$ – линейный размер области рассеяния в направлении \vec{K} .

Из выражения (8) видно, что пространственный спектр рассеянного оптического излучения оказывается промодулирован колебаниями волны зыби. Величина модуляции при этом растет при увеличении угла наблюдения θ , отсчитываемого от зеркального направления в вертикальной плоскости. Если область рассеяния мала ($K\alpha \ll 1$), при $\tan \theta = q_r/q_z = \langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$ значение для коэффициента модуляции пространственного спектра определяется отношением характерных углов наклона поверхности раздела сред $M = K\alpha / \langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$, где $K\alpha$ – угол наклона поверхности из-за зыби.

При отражении от изменяющейся во времени случайной поверхности частотный спектр рассеянного излучения в силу эффекта Доплера существенно расширяется, время корреляции рассеянного излучения при этом может быть достаточно малым $\tau = T / q_z \langle \gamma^2 \rangle^{1/2}$, где T – характерное время корреляции для неровностей поверхности раздела. При $q_z \langle S_0^2 \rangle^{1/2} \gg 1$ величина τ может быть существенно меньше периода колебаний поверхности, вызванных зыбью $\omega_0 \tau \ll 1$.

В таком случае выражение для функции автокорреляции рассеянного оптического излучения на поверхности со случайными неровностями, меняющимися во времени, на интервале времени $\tau \ll \omega_0$ можно приближенно записать, следуя работе [5], с учетом соотношения (6), в виде

$$\Gamma(\tau, t) = \langle |E(R, t) E^*(R, t + \tau)| \rangle = \text{Re} \exp(iq_z \alpha \omega_0 \tau \sin \omega_0 t - \tau^2 q_z^2 \Sigma_0^2 T^{-2}). \quad (9)$$

При этом, так же как и при анализе выражения (8), считалось, что параметр $K_r A \ll 1$.

Поскольку функция автокорреляции рассеянного оптического излучения оказывается модулированной во времени, то и соответствующий частотный спектр будет также меняться с частотой колебаний волн зыби:

$$S(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma(\tau, t) \exp(i\omega\tau) d\tau. \quad (10)$$

Корреляционная функция $\Gamma(\tau, t)$ очень быстро уменьшается с ростом τ при $\tau > T/q_z \langle \Sigma_0^2 \rangle^{1/2}$. Это позволяет без существенной ошибки считать функцию $\Gamma(\tau, t)$ определенной в виде (9) на всем интервале времени, что допускает интегрирование выражения (10) в бесконечных пределах. С учетом этого замечания для частот $\omega \gg \omega_0$ получим

$$S(\omega, t) = S_0(\omega) \left(1 - \frac{q_z \alpha \omega \omega_0 T^2}{q_z^2 \langle \Sigma_0^2 \rangle} \sin \omega_0 t \right), \quad (11)$$

где $S_0 = \left\{ T / [(2\pi)^{1/2} q_z \langle \Sigma_0^2 \rangle^{1/2}] \right\} \exp(-\omega^2 T^2 / 2q_z^2 \langle \Sigma_0^2 \rangle)$ — частотный спектр оптического излучения, рассеянного возмущенной поверхностью в отсутствие зыби.

Характер модуляции частотного спектра оптического излучения оказывается во многом аналогичным модуляции во времени пространственного спектра. Здесь также глубина модуляции возрастает с увеличением расстройки по частоте относительно частоты максимума спектральной плотности. При $\omega = \frac{q_z \langle \Sigma_0^2 \rangle^{1/2}}{T}$ значение коэффициента модуляции определяется простым отношением $M_2 = \alpha \omega_0 / \langle \Sigma_0^2 T^2 \rangle^{1/2} = v_a / \langle v^2 \rangle^{1/2}$, где

$\langle v^2 \rangle^{1/2}$ — характерная колебательная скорость поверхности раздела сред, v_a — скорость волны зыби.

Таким образом, при рассеянии света на границе со случайными неровностями, меняющимися во времени, например из-за зыби, возникает модуляция пространственных и частотных спектров рассеянного оптического излучения. В среднем величина такой модуляции определяется характерными значениями параметров неровностей и колебаний поверхности, вызванных зыбью (углы наклона и скорости движения).

Выполненные эксперименты указывают на высокую эффективность метода оптического сканирования при измерении осредненных распределений кривизны морской поверхности и пространственных периодов зеркальных бликов. Эти данные несут в себе информацию о высокочастотной части спектра поверхностного волнения. Эксперименты указывают на заметную зависимость измеренных параметров от меняющихся гидрофизических условий, таких как ветер, течение или внутренние волны. Результаты этих экспериментов могут быть положены в основу уточнений характера поведения спектра поверхностных волн в области высоких частот. Измерение модуляции интенсивности и доплеровского уширения спектра рассеянного света позволяет определить частоту, угол наклона и колебательную скорость длинноволновых возмущений поверхности моря волнами зыби на фоне стационарного волнения. По этим данным можно полностью установить дисперсионное соотношение для волны зыби.

Таким образом, рассмотренные лазерные методы активного зондирования поверхности моря открывают возможность прямого неконтактного, а следовательно, и не возмущающего, метода регистрации статистических характеристик как самых коротких волн на фоне энергонесущих колебаний морской поверхности, так и приходящих длинных волн зыби на фоне установившегося волнения.

Л и т е р а т у р а

1. Шулейкин В.В. Оптический метод исследования профиля волн //Тр. плавучего морского института. Т.1, вып.5. М., 1923.
2. Shuleikin W.W. A new method of investigation of sea waves. //Nature. 1924. V.114. P.2866.
3. Бреховских Л.М. Дифракция электромагнитных волн на неровной поверхности //ДАН СССР. 1951. Т.81. №6. С.1023.
4. Исакович М.А. Рассеяние волн на статистически шероховатой поверхности //ЖЭТФ. 1952. Т.23. №3. С.305.
5. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
6. Cox C.S., Munk W.H. The measurements of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter //JOSA. 1954. V.44.

N 11. P.838.

7. Kasevich R.S., Chien-Hui Tang, Henrik-
sen S.W. Analysis and Optical Processing of Sea
Photographs for Energy Spectra //IEEE Trans.
1972. GE-10. N1. P.51.

8. Пелевин В.Н. Оптические неконтактные методы измерения
морского волнения //Оптика океана. Ч.2. М.: Наука, 1983.
С.101.

9. Bufton J.L., Hoge F.E., Swift R.N. Airborn
measurements of laser backscatter from the ocean
surface //Appl.Opt. 1983. V.22. N17. P.2603.

10. Бункин Ф.В., Воляк К.И., Маляровский А.И. и др. Само-
летные измерения морского волнения по зеркальным отраже-
ниям луча непрерывного лазера //ДАН СССР,1985. Т.281.
№6. С.1441.

11. Филипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидро-
метеониздат, 1980.

12. Китайгородский С.А. Физика взаимодействия атмосферы
и океана. Л.: Гидрометеониздат, 1980.

13. Huges B. Estimates of underwater sound (and
infrasound) produced by nonlinearly interaction
waves //JASA. 1976. V.60. N6. P.1032.

14. Wu J. Slope and Curvature Distribution of
Wind-Disturbed Water-Surface //JASA. 1970. V.61.
N7. P.852.

15. Бурцев Ю.А., Пелевин В.Н. Распределение отражающих
элементов волнующейся поверхности моря по кривизне //Свето-
вые поля в океане/ ИО АН СССР. М., 1979. С.231.

16. Scooly A.H. Curvature distribution of wind-
created water waves //Trans.Amer.Geophys.Union.
1955. V.36. N2.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗОНДИРУЮЩИХ ПОЛЕЙ
ПРИ СОВМЕСТНОМ ОБЛУЧЕНИИ
ВЗВОЛНОВАННОЙ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
АКУСТИЧЕСКИМИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ

Ю.П.Дьяков, К.К.Ляпин, Н.И.Поздняков, В.И.Соколов

Перспективным направлением в исследовании океана нам представляется дистанционное зондирование с использованием двух или более полей, существенно различающихся по своим физическим свойствам [1]. Это различие может быть обусловлено различием частотных диапазонов или даже различием физической природы зондирующих полей (например, электромагнитное поле и акустическое поле). Особо следует обратить внимание при этом на возможность увеличения полезного эффекта за счет дополнительного использования взаимодействия разнородных зондирующих полей в толще океана и на его поверхности.

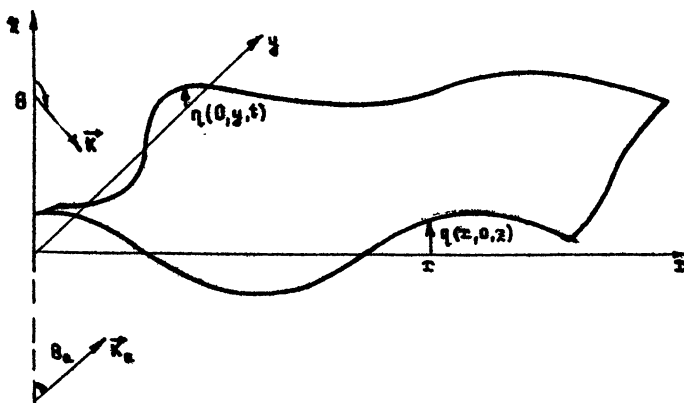
Одним из таких взаимодействий является акустооптический эффект [2]. Оценка предельного звукового давления, при котором может быть еще зафиксировано акустооптическое взаимодействие, сделанная в работе [3], дала обнадеживающие результаты. Однако исходное предположение, на которое опирается эта оценка (основная помеха при оптической регистрации звука создается спектральной составляющей поверхностного волнения, совпадающей по частоте с акустическим воздействием), не оправдано в условиях реального океана. Дело в том, что из-за глубокой пространственно-временной фазовой модуляции отраженного поля, обусловленной волнением моря, при указанном в работе [3]

сеянного электромагнитного поля, которая, как показывают оценки, и по частотному и по пространственному спектру, полностью перекрывает слабый сигнал, обусловленный акустооптическим взаимодействием.

Поэтому нам представляется интересным рассмотреть особенности взаимодействия зондирующих полей той же физической природы — акустического и электромагнитного, но при использовании другого частотного диапазона электромагнитных волн, в котором длина волны λ была бы сравнима с длиной волны используемых для зондирования морской поверхности акустических волн λ_a . При таком соотношении частот зондирующих полей, как показывают количественные оценки, уже не будет перекрытия полезных комбинационных частот спектром, образованным за счет модуляции электромагнитного поля взволнованной поверхностью моря. Более того, у верхней комбинационной компоненты наблюдается своеобразная компенсация пространственно-временной фазовой модуляции отраженного электромагнитного поля, благодаря чему путем подбора соотношения частот и направлений распространения акустических и электромагнитных волн можно обеспечить оптимальные условия для получения информации о различных параметрах морской среды.

Ниже приведены постановка задачи, краткие пояснения по поводу ее приближенного решения и анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований этого интересного частного случая комбинированного зондирования морской поверхности акустическими и электромагнитными волнами.

Пусть на взволнованную поверхность моря S , (рис.1), удовлетворяющую известным условиям гладкости, при выполнении которых применим метод касательной плоскости [4], сверху, из воздуха, падает плоская электромагнитная волна частотой ω с волновым вектором \vec{k} , амплитудой E_m и начальной фазой φ , а снизу, из воды, — плоская акустическая волна частотой ω_a с волновым вектором \vec{k}_a , амплитудой давления p_m и начальной фазой φ_a . Оба волновых вектора пусть лежат в одной плоскости падения IOx (координата x отсчитывается вверх от среднего уровня жидкости). Ориентация векторов \vec{k} и \vec{k}_a в этой плоскости определяется соответственно углами θ и θ_a ,



Р и с. 1.

отсчитываемыми от оси z . Найдем поле отраженной электромагнитной волны с учетом возмущений, обусловленных наличием акустического поля.

Поскольку скорости перемещения точек поверхности на много порядков меньше скорости света, искомое решение должно удовлетворять обычным уравнениям Максвелла и граничным условиям на границе раздела сред [5].

Вначале рассмотрим вспомогательную задачу об отражении плоской электромагнитной волны от плоской границы раздела, возмущенной акустической волной. Несмотря на векторный характер электромагнитного поля, эту задачу можно свести к отысканию скалярных коэффициентов отражения (трансформации) для двух ортогональных поляризаций. В интересующем нас диапазоне частот электромагнитного поля модуль относительной комплексной проницаемости морской воды $|\epsilon_k| \gg 1$, и для расчета коэффициента отражения V при отсутствии акустического воздействия можно воспользоваться известными формулами Френеля в импедансном приближении [6]:

в случае горизонтальной поляризации

$$V = V_1 = \frac{z_2 \cos \theta_n + 1}{z_2 \cos \theta_n - 1}; \quad (1)$$

в случае вертикальной поляризации

$$V = V_n = \frac{\cos \theta_n + z_s}{\cos \theta_n - z_s}, \quad (2)$$

где $z_s = 1/\sqrt{\epsilon_k}$ - относительное волновое сопротивление воды, θ_n - угол падения волны на границу раздела сред.

Ввиду малости акустического смещения поверхности воды импедансные граничные условия остаются справедливыми и на поверхности воды, облучаемой акустическими волнами.

Воспользовавшись этим и применив метод малых возмущений, нетрудно найти для случаев вертикальной и горизонтальной поляризации виртуальное распределение поля отраженной волны на невозмущенной плоской границе раздела S_1 , при котором на возмущенной звуком поверхности S будут выполняться импедансные граничные условия. В системе координат x', y', z' , в которой плоскость $x'O'y'$ совпадает с границей раздела, а плоскость $x'O'z'$ - с плоскостью падения, выражения для этого распределения можно привести к следующему виду:

$$E_{\text{от}}^{S_1} = \sum_{i=-1}^{+1} [E_m V_i \exp [j(\omega_i t + \kappa_{ix'} x' + \psi_i^{S_1})]], \quad (3)$$

где $V_0 = |V|$ - модуль коэффициента отражения Френеля для соответствующего вида поляризации;

$$V_{\pm 1} = V_{-1} = 2|V| \frac{\kappa_{pm} |\cos \theta| \cos \theta_a}{\omega_a \rho c_a};$$

ρ, c_a - соответственно плотность воды и скорость звука в ней;

$$\omega_i = \omega + i\omega_a;$$

$$\kappa_{ix'} = \kappa \sin \theta + i\kappa_a \sin \theta_a;$$

$\psi_0^{S_1} = \arctg(V) + \psi_0$; $\psi_{\pm 1}^{S_1} = \psi_0^{S_1} + \psi_a$; $\psi_{-1}^{S_1} = \psi_0^{S_1} - \psi_a + \pi$, ψ_0, ψ_a - начальные фазы падающих волн.

Трем компонентам отраженного поля на поверхности S_1 ($i = 0, \pm 1$) соответствуют три волны в пространстве, имеющие те же частоты $\omega_i = \omega + i\omega_a$ и распространяющиеся в разных направлениях, определяемых соотношением

$$\theta_i = \arcsin \frac{c(k \sin \theta + i k_a \sin \theta_a)}{\omega + i \omega_a} \quad (4)$$

Основная компонента поля, соответствующая индексу $i = 0$, совпадает при этом с обычной плоской волной, зеркально отраженной от невозмущенной плоской границы раздела сред. Легко убедиться в том, что направления распространения комбинационных компонент (см. формулу (4) для $i = \pm 1$) практически совпадают (с учетом того, что $\omega_a \ll \omega$) с направлением дифракционных максимумов ± 1 -го порядка по классической теории дифракции волн на неподвижной волнистой поверхности [7], а отличие частот этих компонент от частоты падающего поля может быть объяснено эффектом Доплера, обусловленным движением неровностей поверхности. Новым по сравнению с этой классической теорией и принципиально важным для решения основной задачи является представление отраженной волны на границе раздела (при возмущении акустической волной) в виде суммы трех волновых компонент с разными частотами.

Вернемся теперь к решению нашей основной задачи об акустоэлектромагнитном взаимодействии на в з в о л н о - в а н н о й морской поверхности.

Будем считать, что первичная электромагнитная волна освещает лишь ограниченную часть водной поверхности, расположенную внутри интервалов $-\frac{L_x}{2} \leq x \leq \frac{L_x}{2}$ и $-\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2}$.

Пусть L_x и L_y много больше обеих длин волн λ и λ_a . Вначале будем считать, что S_1 определяется детерминированной функцией $z = \eta(x, y)$ ("замороженная" поверхность). Тогда, в соответствии с методом касательной плоскости [4], можно ввести в каждой точке поверхности S_1 локальную систему координат x', y', z' и найти эквивалентное распределение поля в ее окрестности по формуле (3).

Если перейти затем снова к исходной системе координат, то для случая пренебрежимо малых углов наклона морских волн это выражение легко привести к следующему виду:

$$E_{0i}(\vec{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} E_m V_i \exp \left\{ j \left[\omega_i t - k_{ix} x - (k_x + i k_{ax}) \eta(x, y) \right] \right\} \quad (5)$$

По известному теперь распределению поля на поверхности можно найти поле каждой частотной компоненты в произвольной точке наблюдения с помощью векторной формулы Стрэттона и Чу [8]. Но если ввести такие ограничения, при которых деполяризация волн в точках отражения спектральных компонент будет пренебрежимо малой (в дополнение к уже принятым ограничениям придется в дальнейшем ограничиться малыми угловыми отклонениями точки наблюдения от плоскости падения), то вместо векторной формулы можно воспользоваться скалярными формулами Кирхгофа (раздельно для вертикальной и горизонтальной поляризации):

$$U_0(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ U_1(\vec{r}) \frac{d}{dz} \frac{\exp(-jz|\vec{R}-\vec{r}|)}{|\vec{R}-\vec{r}|} - \frac{\exp(-jz|\vec{R}-\vec{r}|)}{|\vec{R}-\vec{r}|} \frac{dU_0}{dz} \right\} dS_0, \quad (6)$$

где S_0 - проекция S_1 на плоскость xy (средний уровень границы раздела сред, но в подынтегральное выражение для каждой точки интегрирования $(x, y, 0)$ представляются величины, соответствующие точке на поверхности S_1 $(x, y, \eta(x, y))$; \vec{x} - волновой вектор, распространяющийся из точки \vec{r} на S_1 , в точку наблюдения \vec{R} ; U_0 - скалярная функция, представляющая данный волновой процесс (отраженную волну).

Подставив в формуле (6) вместо U_0 выражение для i -й составляющей виртуального распределения отраженного поля данной поляризации на S_1 и учтя, что $\frac{dU_0}{dz} = -jk_{iz} U_0$, где $k_{iz} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{ix}^2}$, для поля в зоне Фраунгофера легко получить выражение

$$E_{oi}(\vec{R}) = j \frac{E_m V_i}{4\pi R_0} \frac{\exp[j(\omega t - z_i R_0)]}{R_0} (k_{iz} + z_{iz})^2 \times \int_{S_0} \exp \left\{ j \left[(q_{ix} - ik_{ix})x + (q_{iy} - ik_{iy})y + \varphi_i \right] \right\} dS_0, \quad (7)$$

$i = 0, \pm 1,$

где R_0 - расстояние от центра рассеивающей площадки до точки наблюдения, $\vec{q}_i = \vec{x}_i - \vec{K}$ - вектор рассеяния i -й компоненты поля.

Примем теперь, что введенная выше функция η , описывающая форму поверхности, является случайной функцией времени и пространственных координат т.е. $\eta = \eta(x, y, t)$.

Применив усреднение поля по ансамблю и используя свойство эргодичности $\eta(x, y, \Gamma)$, находим выражение для комплексной амплитуды когерентной составляющей i -й компоненты:

$$\langle E_{\text{на}i}(\vec{R}) \rangle = \frac{j E_m V_L V_L^* e^{j(\psi + i\varphi_0)}}{4\pi} \frac{e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}_0}}{R_0} (\mathbf{x}_{i_x} + \mathbf{k}_{i_x}) \times \int_{S_i} \exp[j(\varphi_{i_x} - i\kappa_{\Omega x})x] dx dy, \quad (8)$$

где множитель

$$V_L^* (\varphi_{i_x} - i\kappa_{\Omega x}) = \langle \text{Tr} [j(\varphi_{i_x} - i\kappa_{\Omega x}) \eta(x, y, t - \frac{R_0}{c})] \rangle, \quad (9)$$

являющийся характеристической функцией случайной величины η , может быть назван коэффициентом влияния неровности поверхности на когерентную составляющую поля.

В случае нормального закона распределения η этот множитель выражается следующим образом [4]:

$$V_L^* = \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} (\varphi_{i_x} - i\kappa_{\Omega x})^2 \langle \eta^2 \rangle \right]. \quad (10)$$

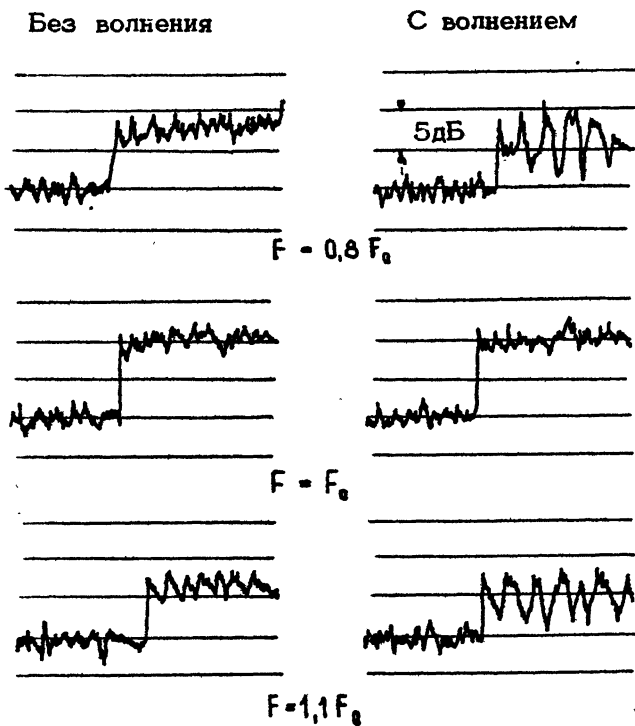
Заметим, что при $i = +1$ может быть выполнено условие

$$\varphi_{+i_x} = \kappa_{\Omega x}. \quad (11)$$

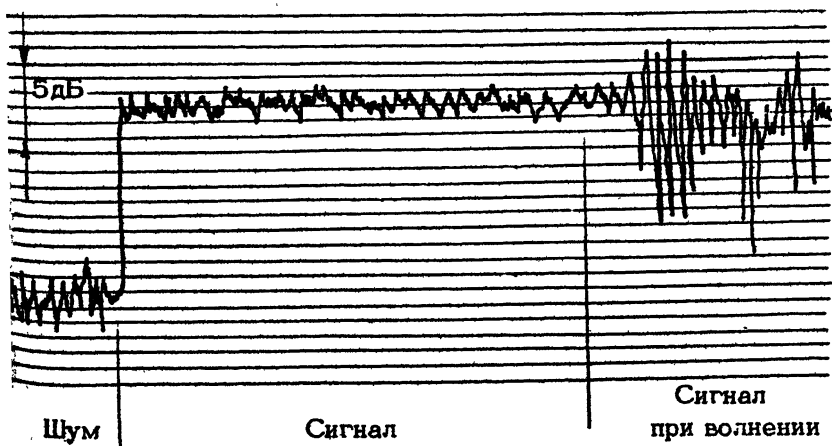
Тогда $V_{+1}^* = 1$ при любом конечном значении дисперсии $\langle \eta^2 \rangle$, что свидетельствует об отсутствии влияния волнения моря на верхнюю комбинационную компоненту (ВКК) отраженного электромагнитного поля в точках наблюдения, расположенных в направлении, определяемом волновым вектором $\vec{\mathbf{x}}_{+1}$.

Это своеобразное явление объясняется тем, что при смещении отражающей поверхности изменение фазы ВКК за счет запаздывания акустического поля $\Delta\varphi_{\Omega}$ компенсирует изменение фазы $\Delta\varphi_{\text{ЭМ}}$ за счет уменьшения "волнового пути" электромагнитной волны.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда условие (11) выполняется как раз в направлении максимума переизлучения верхней комбинационной компоненты, что будет наблюдаться при



Р и с. 2



Р и с. 3

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_{+1} - \vec{k}. \quad (12)$$

Тогда поле ВКК представляет собою волну, фаза которой полностью определяется фазами падающих волн и не зависит от неровностей поверхности моря и их перемещений во времени. Это означает, что ВКК при наличии волнения и при выполнении условия (12) сохраняет свою когерентность и переизлучается направленно. Поэтому описанное явление в дальнейшем будем называть когерентным комбинационным отражением (ККО) электромагнитных волн от взволнованной поверхности, возмущенной акустическим полем.

Так как $\tau_0 \ll \tau$, то ККО наблюдается при $\omega_0 \ll \omega$. При этом $|\vec{k}_{+1}| = \frac{\omega + \omega_0}{c} \approx \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$ и условию ККО в обратном направлении можно придать следующий вид:

$$\vec{k}_0 = -2\vec{k}. \quad (13)$$

Энергетический спектр i -й компоненты электромагнитного поля определяется формулой

$$S_i(\omega') = \frac{E_m^2 V^2}{32\pi^3} \frac{(\mathbf{x}_i \mathbf{x} + \mathbf{k}_i \mathbf{z})^2}{R_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{etr} [j(\omega_i - \omega')\tau] \left\{ \iiint_{S_0} \text{etr} \left\{ j[(q_{iz} - i k_{0z}} - i k_{0z})(\tau - \tau')] \right\} f_{2i} d\tau' d\mathbf{y}' d\mathbf{y} \right\} d\tau, \quad (14)$$

где

$$f_{2i} = \langle \text{etr} \left\{ j(q_{iz} - i k_{0z}) [\eta(\tau, \mathbf{y}, t - \tau) - \eta(\tau', \mathbf{y}', t)] \right\} \rangle \quad (15)$$

- многомерная характеристическая функция случайной поверхности [4]. При нормальном распределении высот неровностей эта функция принимает вид

$$f_{2i} = \text{etr} \left\{ -(q_{iz} - i k_{0z})^2 \langle y^2 \rangle [1 - W(\vec{\xi}, \tau)] \right\}, \quad (16)$$

где $W(\vec{\xi}, \tau)$ - пространственно-временная функция корреляции неровностей, $\vec{\rho} = (\tau - \tau')\vec{T}_0 + (\mathbf{y} - \mathbf{y}')\vec{Y}_0$.

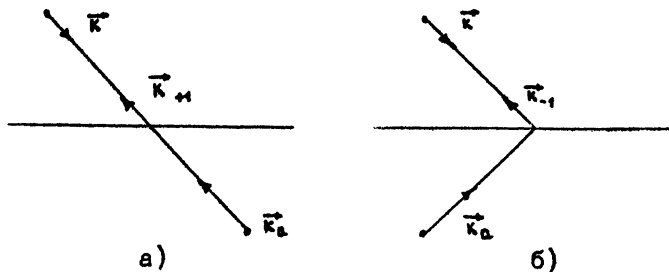
Для верхней комбинационной компоненты, когда выполняется условие (11) или (12),

$$S_{+1}(\omega') \sim \delta(\omega_{+1} - \omega'), \quad (17)$$

что также указывает на наличие в пространственно-временном спектре поля, рассеянного взволнованной поверхностью S_1 , монохроматической волны с частотой $\omega_{\pm 1}$, распространяющейся в направлении на соответствующую точку наблюдения.

Поскольку в условии ККО (12) не входит ориентация фигурирующих в нем векторов относительно границы раздела сред S_1 , простые рассуждения позволяют распространить вывод о существовании эффекта ККО и на случай конечных углов наклона S_1 .

В качестве примера экспериментальных результатов, подтверждающих существование эффекта ККО [9], на рис.2 и 3 приведены фрагменты записей уровня выходного сигнала приемного устройства, настроенного на верхнюю (рис.2) и нижнюю (рис.3) комбинационные частоты $\omega \pm \omega_a$, при встречном (рис.4,а) и симметричном (рис.4,б) облучении участка водной поверхности в бассейне и приеме обратно-отраженного сигнала.



Р и с. 4.

На рис.2 использованы обозначения: $F = \frac{\omega_a}{2\pi}$ - частота акустического поля; F_0 - значение этой частоты, соответствующее выполнению условия $\lambda_a = \lambda/2$. При включенном волнопродукторе высота поверхностных волн примерно в три раза превышала длину электромагнитной волны. Рис.2 и 3 показывают, что при приеме верхней комбинационной компоненты и выполненном условии ККО сигнал практически не изменяется при включении волнопродуктора, в то время

как при нарушении условия ККО и при приеме нижней комбинационной компоненты волнение приводит к резкому возрастанию флуктуаций уровня выходного сигнала.

Аналогичные результаты были получены и в полунатурных условиях на естественном морском волнении силою до двух баллов.

Принципиальное значение рассмотренного явления состоит в том, что отмеченное выше отсутствие перекрытия спектров компонент для $i=0, \pm 1$, сохранение когерентности и, как следствие этого, сохранение высокой направленности вторичного излучения СВЧ при наличии морского волнения позволяют эффективно использовать методы частотной и пространственной фильтрации и открывают возможность практического использования акустоэлектромагнитного взаимодействия на границе раздела вода-воздух при комбинированном акустоэлектромагнитном зондировании океана с использованием ультразвука и радиоволн СВЧ-диапазона, несмотря на чрезвычайно малую энергетическую эффективность такого взаимодействия (см. формулы (7) и (3)).

При дальнейшем усовершенствовании аппаратуры и детальной разработке методов комбинированного дистанционного зондирования океана с использованием разнородных зондирующих полей рассмотренный здесь эффект компенсации пространственно-временной фазовой модуляции ВКК можно будет, вероятно, использовать для получения информации о рассеивающих свойствах приповерхностных слоев, для исследования глубинных течений, более детального исследования структуры и параметров морского волнения.

Л и т е р а т у р а

1. Методы гидрофизических исследований: Материалы 1-й всесоюзной школы /ИПФ АН СССР. Горький, 1984.
2. Есипов И.Б., Наугольных К.А. Оптикоакустические и акустооптические взаимодействия на границе раздела сред // Методы гидрофизических исследований /ИПФ АН СССР. Горький, 1984. С.229.
3. Курьянов Б.Ф. Доплеровское рассеяние электромагнитных волн на ряби, вызванной звуковыми и капиллярными волнами // Акустический журн. 1977. Т.23. Вып.1. С.167.

4. Басс Ф.Р., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.

5. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.

6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957.

7. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теории звука, т.2. М.: Техтеоретиздат, 1955.

8. Стрэтгон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.-Л. Техтеоретиздат, 1948.

9. Дьяков Ю.П., Есипов И.Б., Ляпин К.К. и др. Когерентное комбинационное отражение электромагнитных волн от возбужденной границы раздела двух сред при воздействии на нее акустического излучения // Акустический журн. 1986. Т.32. Вып.3. С.334.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ОКЕАНА

В.М.Бухштабер, В.К.Маслов

Проблема диагностики океанских бассейнов для мезомасштабных флуктуаций (мезомасштабная томография океана) приводит к трехмерным обратным задачам восстановления характеристик этих флуктуаций по результатам измерения времен прихода зондирующих сигналов вдоль разрешаемых криволинейных лучей.

В качестве исходного часто выбирают предположение о том, что пространственно-временную изменчивость поля скорости звука $c(r, t)$, $r = (x, y, z)$, где $z \geq 0$ — координата по глубине, можно с достаточной точностью описать соотношением [1,2]

$$c(r, t) = c_0(r, t) + \Delta c_1(r, t) + \Delta c_2(r, t). \quad (1)$$

Здесь $c_0(r, t)$ описывает поле скорости, обусловленное глобальными климатическими изменениями, член Δc_1 описывает мезомасштабную изменчивость с характерным пространственным размером от десятков до нескольких сотен километров по горизонтали на интервалах времени до нескольких месяцев, член Δc_2 описывает изменчивость микроструктуры с характерными размерами по горизонтали до километра и по вертикали до десяти метров на интервалах времени до нескольких часов. Применимость разложения (1) обусловлена соотношениями

$\frac{c_0}{\hat{c}} \approx 1$, $\frac{\Delta c_1}{\hat{c}} \approx 10^{-2}$, $\frac{\Delta c_2}{\hat{c}} \approx 10^{-4}$, где \hat{c} — среднее значение скорости. Обычно считается $\hat{c} = 1500$ м/с.

Для построения математической модели получения экспериментальных данных используется приближение лучевой акустики. Этот подход предполагает, что относительное изменение скорости звука на длине волны λ зондирующего сигнала относительно мало, т.е. $\lambda |\nabla c / c| \ll 1$.

В условиях лучевой акустики траектория луча рассчитывается с помощью уравнения эйконала, которое, как известно, сводится к уравнению

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2, \quad (2)$$

где $r = (x, y, z)$ – радиус-вектор точки на луче; $d\tau = \frac{1}{n(r)} d\theta$, θ – натуральный параметр на луче – длина пути, отсчитываемая вдоль луча, $n = n(r) = \hat{c}/c$. Используя то, что “вертикальный градиент скорости звука в большинстве районов Мирового океана приблизительно в 10^3 раз больше горизонтального” [2], можно из уравнения (2) вывести, что при расстояниях по горизонтали до нескольких мегаметров радиус-вектор r , удовлетворяющий (2) с достаточной точностью, лежит в вертикальной плоскости пары источник – приемник даже тогда, когда вертикальный профиль скорости звука в связи с большими расстояниями по горизонтали нельзя считать неизменным. Далее, отклонение времени прихода $\Delta T_i(q, \rho)$ i -го разрешаемого луча ($i = 1, \dots, J_{q, \rho}$) в вертикальной плоскости $\Pi(q, \rho)$ пары источник – приемник (q, ρ) может быть с достаточной точностью аппроксимировано выражением [3]

$$\Delta T_i(q, \rho) \approx - \int_{\ell_i} \Delta t_1(r) c_0^{-2}(r) d\ell_i = - \iint \Delta t_1(s, z) h(s, z) ds dz, \\ h(s, z) = - [1 + \psi'(s)]^{1/2} c_0(s, z)^{-2} \delta [z - \varphi(s)], \quad (3)$$

где $\ell_i = \ell_i(q, \rho)$ – траектория i -го физического криволинейного луча, рассчитываемая, например, с помощью уравнения (2) по усредненному профилю $c_0(s, z)$. В плоскости $\Pi(q, \rho)$ эта траектория записывается уравнением $z - \varphi_i(s; q, \rho) = 0$, где $s = s(x, y)$ – горизонтальная координата этой плоскости. Такая запись отражает, в частности, тот факт в акустике океана, что лучи бегут только “вперед”.

В формуле (3) $\Delta t_1(r)$ – функция трехмерного аргумента $r = (x, y, z)$, а $\Delta t_1(s, z)$ – ограничение этой функции на плоскость $\Pi(q, \rho)$, т.е. функция двумерного аргумента. Здесь и далее это делается для того, чтобы не вводить новых символов тогда, когда из контекста ясно, о чем идет речь.

Отличительными особенностями задач акустической томографии океана и других обратных задач геофизики являются: неполнота экспериментальных данных, обусловленная относительно небольшим числом источников и приемников; принципиальная трехмерность задачи, обусловленная сложным характером

ром распространения звука в среде; возможность получения прямых измерений непосредственно в отдельных точках диагностируемого региона.

Указанные особенности, в отличие от многих задач медицинской и промышленной томографии, выдвигают на первый план принципиально новый класс задач планирования самого томографического эксперимента [4,5,6]: как оценить качество любой заданной конфигурации источников и приемников с точки зрения пространственного разрешения и других точностных характеристик восстанавливаемого акустического изображения неоднородностей; как построить оптимальный алгоритм реконструкции при заданной томографической конфигурации, рационально учитывающий имеющуюся априорную информацию; как найти оптимальную конфигурацию при фиксированном числе источников и приемников.

Прямое "лобовое" решение трехмерной задачи акустической томографии океана представляет огромные вычислительные трудности [1]. Однако, учитывая, что криволинейные траектории Γ_i невозмущенных лучей (для "климатического профиля" скорости звука $c_0(s, z)$) можно рассчитывать в вертикальных слоях для каждой пары источник - приемник (q, p) , $q=1, \dots, Q$, $p=1, \dots, P$, независимо, удается факторизовать трехмерную задачу на семейство плоских задач следующим образом.

1. Для каждой плоскости $\Pi(q, p)$ на фиксированной глубине $z = z_k$ ($k=1, \dots, K$) решается задача: по вектору $\Delta T(q, p) = \{\Delta T_i(q, p)\}$ найти оценку $\Delta \tilde{\tau}$ значения функционала $\Delta T(q, p; z_k)$, имеющего смысл отклонения времени прихода вдоль виртуального прямолинейного луча, задаваемого в $\Pi(q, p)$ уравнением $z = z_k$.

Алгоритм: $\Delta \tilde{\tau}(q, p; z_k) = \langle \alpha(q, p; z_k), \Delta T(q, p) \rangle$, где $\alpha(q, p; z_k)$ - вектор коэффициентов разложения δ -функции $\delta(z - z_k)$ по δ -функциям $\delta(z - \varphi_i(s, q, p))$ с весом $c_0(z)^{-2} w(s, z)$, где $w(s, z)$ - функция, описывающая априорную информацию о предполагаемом пространственном распределении в $\Pi(q, p)$ носителя неоднородности $\Delta c_1(s, z)$. Таким образом, на первом шаге параллельно решается $Q \times P \times K$ линейных задач размерности J_{qp} . Полученные в результате решения этих задач величины $\Delta \tilde{\tau}(q, p; z_k)$ могут быть теперь использованы для восстановления горизонтальных срезов неоднородности $\Delta c_1(x, y, z_k)$ с помощью соотношения

$$\Delta T(q, p; z_k) \approx - \int_{\Gamma(q, p; z_k)} \frac{\Delta c_1(x, y, z_k)}{c_0^2(s, z_k)} dl = \Delta \tau_j(z_k) =$$

$$= - \iint \frac{\Delta c_1(x, y, z_k)}{c_0^2(s, z_k)} \delta(\lambda_j - \langle \bar{\xi}_j, \bar{p} \rangle) dx dy, \quad (4)$$

где $\bar{p} = (x, y)$, $(\bar{\xi}_j, \lambda_j)$ — параметры виртуального луча $l(q, \rho; z_k)$ в горизонтальной плоскости на глубине z_k , $j = j(q, \rho) = 1, \dots, Q \times P$.

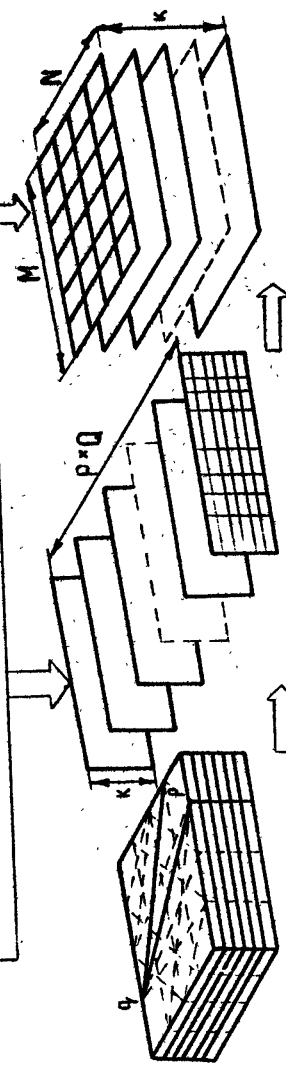
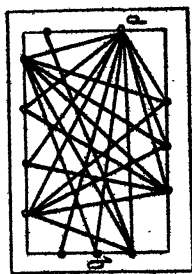
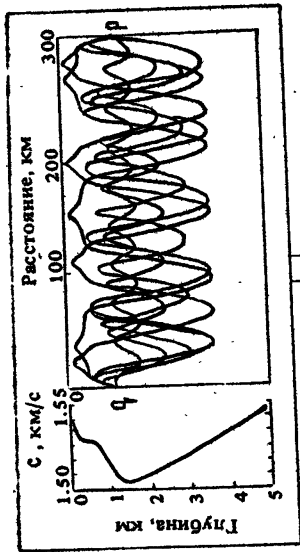
2. Для горизонтальной плоскости $\Pi(z_k)$ на глубине z_k решается задача: найти оценку $\hat{f}(A_k)$ линейного функционала $f(A_k) = \iint \Delta c_1(x, y, z_k) A_k(x, y) dx dy$ по вектору $\Delta \tilde{c}(z_k) = \{\Delta \tilde{c}_j(z_k)\}$, $j = j(q, \rho) = 1, \dots, Q \times P$, рассчитанному на предыдущем шаге, где $A_k(x, y)$ — целевое ядро для k -го горизонтального слоя.

Например, функция $A_k(x, y)$, равная единице в некоторой области $D \subset \Pi(z_k)$ и нулю вне этой области, отвечает цели: найти среднее значение поля скорости Δc_1 в области D . Отметим, что переход от задачи оценки Δc_1 к задаче 2 обусловлен неполнотой экспериментальных данных и предназначен разрешить компромисс между точностью оценки значения функционала $f(A_k)$ и содержательной необходимостью получить это значение.

Алгоритм: $\hat{f}(A_k) = \langle \beta(A_k), \Delta \tilde{c}_k \rangle$, где $\beta(A_k)$ — вектор коэффициентов разложения ядра $A_k(x, y)$ по радоновским δ -функциям вида $\delta(\lambda_j - \langle \bar{\xi}_j, \bar{p} \rangle)$, $\bar{p} = (x, y)$, $(\bar{\xi}_j, \lambda_j)$ — параметры луча, соединяющего проекцию на $\Pi(z_k)$ координат j -й пары (q, ρ) . Следовательно, на втором шаге параллельно решается k линейных задач размерности $Q \times P$.

Таким образом, с помощью описанных двух шагов трехмерная задача (3) факторизуется на семейство плоских задач. Схематически описанный способ факторизации изображен на рис. 1.

На этапе планирования эксперимента для расчета оптимальных параметров-векторов $\alpha(z_k) = \alpha(q, \rho; z_k)$ и $\beta(A_k)$ алгоритмов реконструкции и оценки разрешающей способности томографических конфигураций используется метод экстремальных функций [7], частным случаем которого является известный метод Бакуса-Гильберта [8]. Краткая схема метода. Для погрешности d восстановления значения целевой характеристики $f(A_k)$ имеет место оценка: $d = |f(A_k) - \langle \beta(A_k), \Delta \tilde{c}_k \rangle| = |f(A_k) - \hat{f}(A_k) + \langle \beta(A_k), \Delta \tau_k - \Delta \tilde{c}_k \rangle| \leq d_2(A_k) + |\beta(A_k)|, d_1(k) >$, где $|\beta(A_k)| = \{|\beta_j(A_k)|\}$, $d_1(k) = \{d_1(j, k)\}$. Функционалы погрешностей $d_1(j, k) = d_1(q, \rho; z_k) = |\Delta \tau(z_k) - \Delta \tilde{c}(z_k)|$ и $d_2(A_k) = |f(A_k) - \hat{f}(A_k)|$ можно единообразно записать в виде $dF = \int F(\tau) D(\tau) d\tau$, где $F(\tau) = \Delta c_1(\tau)$, $D(\tau) = \Psi_0(\tau) - \sum \gamma_n \Psi_n(\tau)$.



Планирование томографического эксперимента.
 Выбор конфигураций, оценка ожидаемого качества реконструкции.

Расчет лучевых картинок.
 Параллельное решение задач для $(Q \times P)$ вертикальных слоев.
 Размерность каждой задачи $(J \times k)$

Параллельное решение одноотливных задач для k горизонтальных слоев.
 Размерность каждой задачи $(Q \times P) \times (M \times N)$.

Здесь $\Psi_0(\tau) = c_0(s, x)^{-2} \delta(x - x_k)$, $\Psi_n(\tau) = -[1 + \psi'(s)^2]^{1/2} c_0(s, x)^{-2} \cdot \delta[x - \varphi_n(s; \tau, \rho)]$, $\gamma_n = d_n$ для d_1 и $\Psi_n(\tau) = A_k(x, y)$, $\Psi_n(\tau) = -c_0(s, x_k)^{-2} \delta|x - \varphi_n(s; \tau) - \lambda_n|$, $\gamma_n = \beta_n$ для d_2 . Исходя из априорной информации о характере искомого неоднородности, строится такое ядро $B(\tau_1, \tau_2)$, что $F(\tau) = \int F_1(\tau_1) B(\tau_1, \tau) d\tau_1$, где $F_1(\tau_1) \in L_2$ и $\int \Psi_n(\tau_1) B(\tau_1, \tau) d\tau_1 = \Psi_n^b(\tau) \in L_2$, L_2 - стандартное гильбергово пространство функций, в котором $\|f\|^2 = \int f(\tau)^2 d\tau$. Введение модели искомого поля $\Delta c_1(\tau) = F(\tau)$ в виде результата прохождения некоторого поля $F_1(\tau)$ через линейный фильтр с заданным ядром позволяет в терминах этого ядра выразить такие качественные предположения об $\Delta c_1(\tau)$, как степень его гладкости, характер спектра, предполагаемое расположение зоны основной флуктуации и т.п. Полагая $F_{*1}(\tau) = \int D(\tau) B(\tau_1, \tau) d\tau$ и $F_*(\tau) = \int F_{*1}(\tau_1) B(\tau_1, \tau) d\tau$, получаем $d(F_*) = \|F_*\|_0^2$, $d(F) \|F\|_0^{-1} < d(F_*) \|F_*\|_0^{-1}$, где $\|F\|_0 = \|F_1\|$ и $\|\cdot\|$ - норма в L_2 . Функция $F_*(\tau)$ называется экстремальной неоднородностью, так как на ней функционал относительной погрешности $dF \cdot \|F\|_0^{-1}$ принимает максимальное значение. Имеем $F_{*1}(\tau) = \Psi_0^b(\tau) - \sum \gamma_n \Psi_n^b(\tau)$, поэтому

$$d(F_*) = \|F_{*1}\|^2 = \|\Psi_0^b\|^2 - 2 \langle \gamma, e \rangle + \langle \gamma, E \gamma \rangle, \quad (5)$$

где $\gamma = \{\gamma_n\}$, $e = \{\langle \Psi_0^b, \Psi_n^b \rangle_2\}$, $E = \{\langle \Psi_{n_1}^b, \Psi_{n_2}^b \rangle_2\}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ - скалярное умножение в L_2 . Таким образом, метод экстремальных функций дает априорную оценку на разрешающую способность алгоритма, зависящую от выбора ядра B , т.е. фактически от полноты наших представлений об искомом поле Δc_1 , и улучшить оценку на том же массиве экспериментальных данных можно только за счет уточнения ядра B .

Вычислительные процедуры для анализа погрешностей с помощью функционала (5) в ряде случаев лучше строить исходя из следующих выражений для вектора e и матрицы E :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n_1}^b, \Psi_{n_2}^b \rangle_2 &= \int \left[\int \Psi_{n_1}(\tau_1) B(\tau_1, \tau) d\tau_1 \right] \left[\int \Psi_{n_2}(\tau_2) B(\tau_2, \tau) d\tau_2 \right] d\tau = \\ &= \iint \Psi_{n_1}(\tau_1) B(\tau_1, \tau_2) \Psi_{n_2}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \langle \Psi_{n_1}, \Psi_{n_2} \rangle_B, \end{aligned}$$

где $B(\tau_1, \tau_2) = \int B(\tau_1, \tau_2) B(\tau_2, \tau_1) d\tau$, т.е. $e = \{\langle \Psi_0, \Psi_n \rangle_B\}$, $E = \{\langle \Psi_{n_1}, \Psi_{n_2} \rangle_B\}$

Покажем, что в аналогичном виде можно представить функционал погрешностей и в более общей ситуации, когда $F(\tau) = \int \sum_{m=1}^M F_m(\tau_1) B_{(m)}(\tau_1, \tau) d\tau_1$, где $F_m(\tau_1) \in L_2$ и $\int \Psi_n(\tau) B_{(m)}(\tau_1, \tau) d\tau \in L_2$

для всех $n \gg 0$ и $1 \leq m \leq M$. Имеем

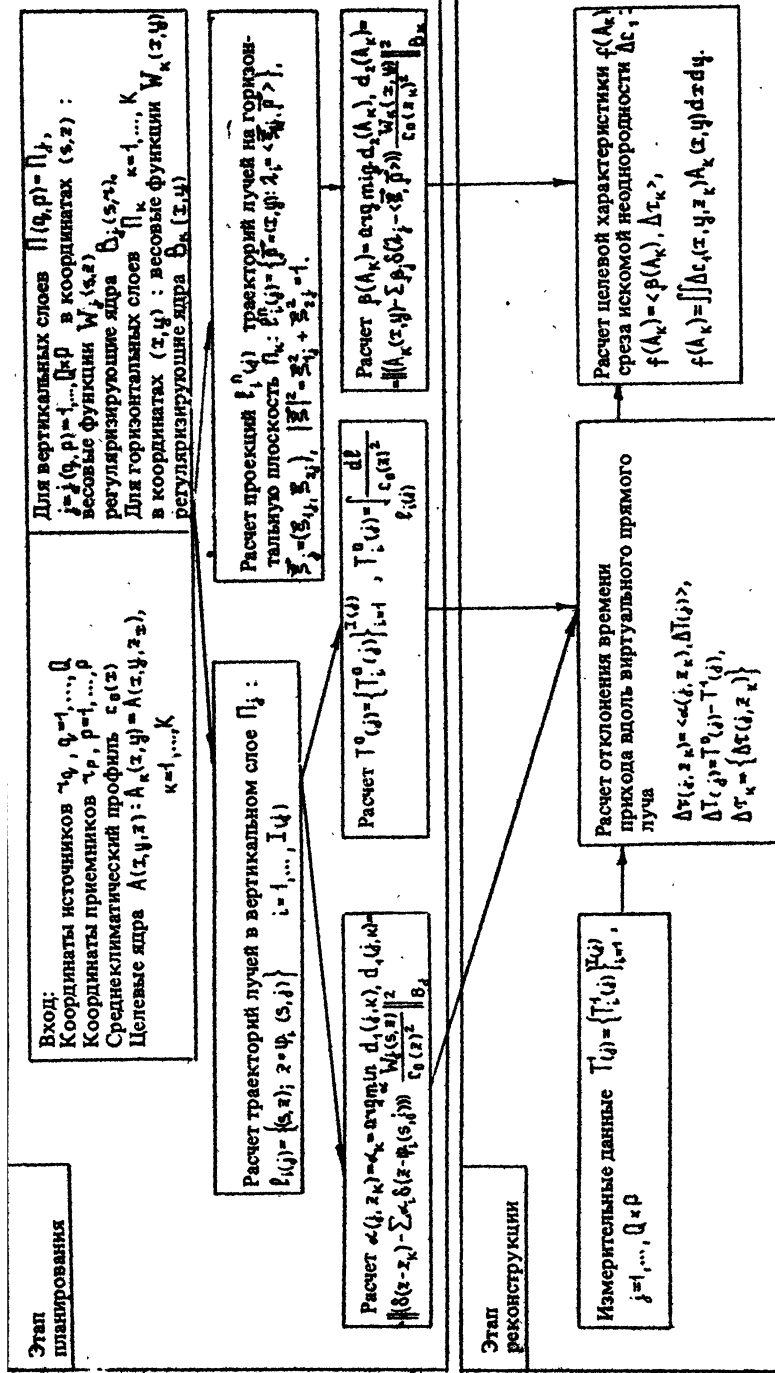
$$d(F) = \int F(\tau) D(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^M \int F_m(\tau_m) D_{(m)}(\tau_m) d\tau_m \|\bar{F}\| \|\bar{D}\|,$$

где $\bar{F}(\tau_m) = \{F_m(\tau_m)\}_{m=1}^M$, $\bar{D}(\tau_m) = \{D_{(m)}(\tau_m)\}_{m=1}^M$ и $D_{(m)}(\tau_m) = \int D(\tau) \delta_{(m)}(\tau_1, \tau) d\tau$.

Взяв в качестве экстремальной функцию $F_*(\tau)$, для которой $\bar{F}_*(\tau_m) = \bar{D}(\tau_m)$, получаем $d(F_*) = \|F_*(\tau)\|_{2,N}^{-1}$, где $\|F_*(\tau)\|_{2,N} = \|\bar{F}_*(\tau)\|$ и, следовательно, $d(F) \|F\|_{2,N}^{-1} \leq d(F_*) \|F_*(\tau)\|_{2,N}^{-1}$. Функционал $d(F_*)$ имеет вид (5), где $e_n = \{ \langle \Psi_0, \Psi_n \rangle \}_{\mathfrak{B}_{(m)}}$ и $E = \{ \langle \Psi_{n_1}, \Psi_{n_2} \rangle_{\mathfrak{B}_{(m)}} \}$ и $\mathfrak{B}_{(m)}(\tau_1, \tau_2) = \int \sum_{m=1}^M \delta_{(m)}(\tau_1, \tau) \delta_{(m)}(\tau_2, \tau) d\tau$.

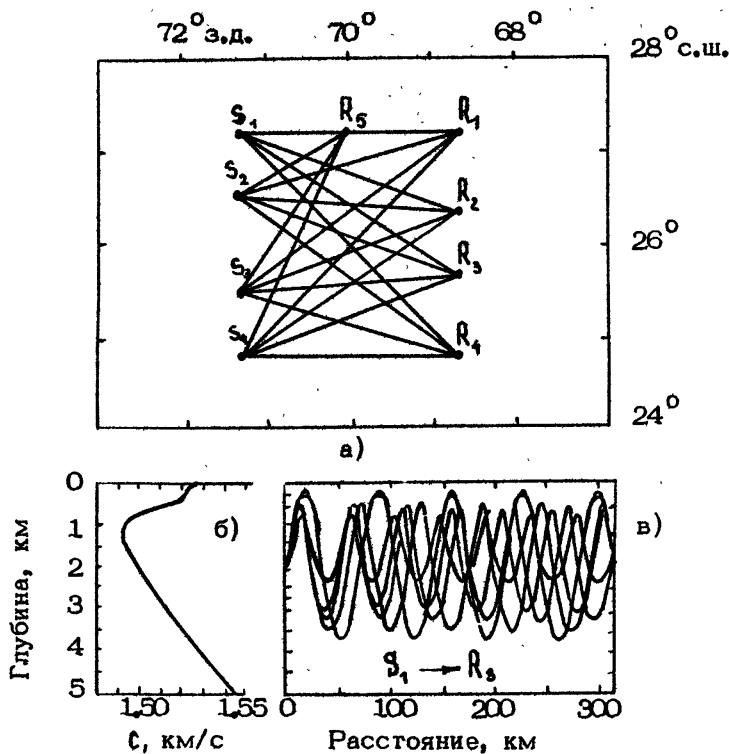
Алгоритмы планирования эксперимента строятся на основе минимизации функционала $d(F_*)$. При фиксированной конфигурации источников и приемников, минимизируя $d(F_*)$ как квадратичный функционал относительно γ , находим параметры оптимального алгоритма реконструкции, а именно: вектор α из $d_1(F_*)$ и вектор β из $d_2(F_*)$. При выбранном алгоритме реконструкции, минимизируя $d = |f(A_k) - \langle \beta(A_k), \Delta \tilde{\tau}_k \rangle|$ как функции от координат источников и приемников, получаем возможность среди множества допустимых по условиям эксперимента топографических конфигураций выбирать оптимальную. В этом случае приходится решать задачи нелинейного программирования, но так как на этапе планирования время счета не играет существенной роли, то для решения их привлекается развитое математическое обеспечение. Обобщенная схема решения трехмерной задачи с выделением этапов планирования и реконструкции приведена на схеме.

В.Г.Маркиным разработан пакет программ, направленный на решение указанных выше задач и реализующий описанный алгоритм трехмерной реконструкции [9,10]. Пакет построен по модульному принципу. Его отдельные блоки можно рассматривать как независимые комплексы программ, настраиваемые на решение самостоятельных подзадач реконструкции. Это позволяет достаточно гибко использовать качественные априорные предположения и варьировать параметрами планируемой топографической конфигурации. Данная структура позволяет методами имитационного моделирования более эффективно проводить независимую оценку ошибок реконструкции, обусловленных различными погрешностями: в задании координат источников и приемников, климатического профиля скорости звука в исследуемом регионе, расчете хода лучей в вертикальных слоях, экспериментальных данных. Пакет программ реализован средствами



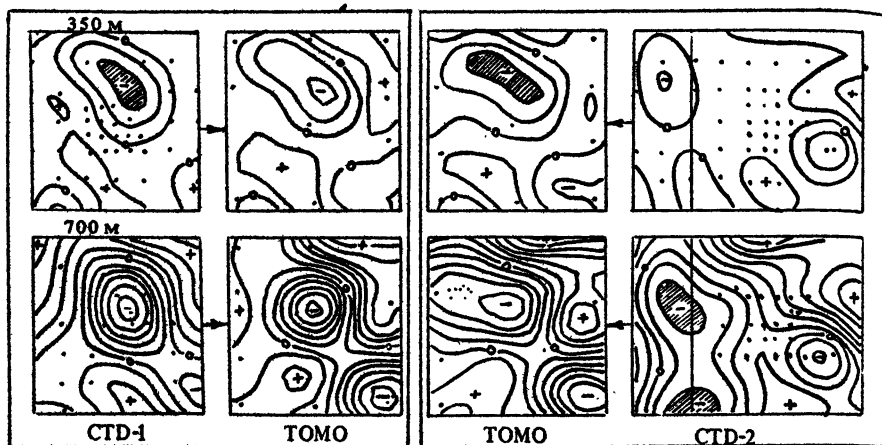
алгоритмического языка ПЛ/1 ОС ЕС ЭВМ. С помощью этого пакета проведено имитационное моделирование для оценки разрешающей способности различных томографических конфигураций, описанных в работах [1,6,8,11].

Пример 1. Анализ конфигурации, использованной в реальном томографическом эксперименте [12]. Рассматриваемая конфигурация, состоящая из четырех источников излучения $S_1 + S_4$ и пяти приемников $R_1 + R_5$, показана на рис.2,а, там же -



Р и с. 2. Геометрия измерений (а) и невозмущенная лучевая картина (б,в) [12]

типовой профиль скорости звука (б) и соответствующая ему лучевая картина в вертикальном слое между точками S_1 и R_3 (в). Результаты сопоставления прямых замеров и томографической реконструкции структуры холодного вихря, который присутствовал в период измерений в диагностируемом регионе, содержатся в работе [12] (рис.3). Анализ потенциальной точности томографической реконструкции для этой конфигурации



Р и с. 3. Сравнение прямых измерений и результатов гомосинтеза [12]

источников и приемников методом Бакуса-Гильберта приведен в работах [8,13], там же дано объяснение причин расхождения восстановленной пространственной структуры вихря с результатами прямых замеров. Проведена оценка качества рассматриваемой конфигурации методом экстремальных функций, который при существенном упрощении вычислений дал хорошее совпадение с результатами работы [3]. В таблице приведены значения дефектов (дифференциальных характеристик проекционной матрицы) [5] на сетке 5×5 с размером ячеек $60 \times 60 \text{ км}^2$ (число лучей 20, ранг 19). Стоящее в клетке число есть погрешность (в процентах) при восстановлении единичного возмущения в этой клетке. Сумма дефектов по всем клеткам, деленная на 100, есть дефект ранга проекционной матрицы. Параметр γ - относительный вклад сумм квадратов используемых при расчете собственных чисел проекционной матрицы [6,10]. Малые собственные числа, сравнимые с дисперсией шума, отбрасываются. Для сравнения приведены таблицы дефектов при $\gamma = 99,3\%$ и $\gamma = 100\%$.

На рис.4 приведены результаты реконструкции тестовых неоднородностей, расположенных в различных участках диагностируемой области (в тех же точках, что и в работе [3]). На каждом рисунке слева - исходное изображение, в центре - результат восстановления при значении параметра $\gamma = 99,3\%$ в отсутствие шумов ($\alpha = 0$), справа - результат реконструкции для зашумленных данных. Значение параметра α , имеющего смысл отношения дисперсии нормального шума к квадрату

Дефекты проекционной матрицы (в процентах)

$\gamma = 99,3\%$

35,7	32,6	46,0	45,9	46,9
25,3	25,9	36,0	43,0	46,9
72,9	18,8	36,5	32,7	84,4
43,7	41,3	32,7	41,3	57,9
9,4	39,5	63,5	40,4	48,6

$\gamma = 100\%$

15,3	8,5	22,3	13,6	13,6
15,6	18,3	18,7	22,6	18,6
28,2	2,7	25,6	32,0	84,0
30,2	36,8	27,3	26,0	22,1
0,0	18,3	63,0	36,8	0,0

нормы тестовой неоднородности, было выбрано равным 0,01. Нижняя строка этих рисунков показывает линии уровня соответствующих изображений. Результаты расчетов показывают, что пространственное разрешение и точность восстановления весьма неравномерно распределены по ячейкам региона.

Пример 2. Анализ томографической конфигурации крупномасштабной диагностики океана, предложенной в работе [11]. На рис.5 приведена проекция Постеля рассматриваемой конфигурации, состоящей из 15 стационарных приемно-излучающих устройств. Было проведено сравнение качества реконструкции рассматриваемой стационарной томографической конфигурации (СТ) с динамической конфигурацией (ДТ), отличающейся от СТ введением дополнительных 15 источников, расположенных на трех траекториях внутри диагностируемого региона (по 5 источников на каждой траектории). Рассмотрены 3 подобласти А, В, С, состоящие из 11x11 ячеек. Размер ячеек в области А - 590x560 км², В - 295x280 км², С - 147 x 140 км². Численное моделирование показало, что в области А при крупном разбиении СТ дает значения дефектов в пределах от 0 до 5% для ячеек, расположенных в правой верхней части

Рис. 4а

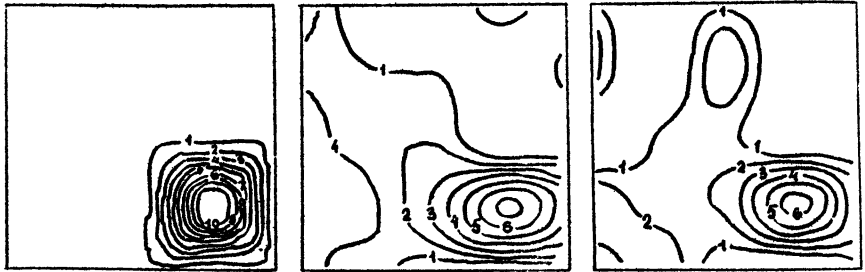
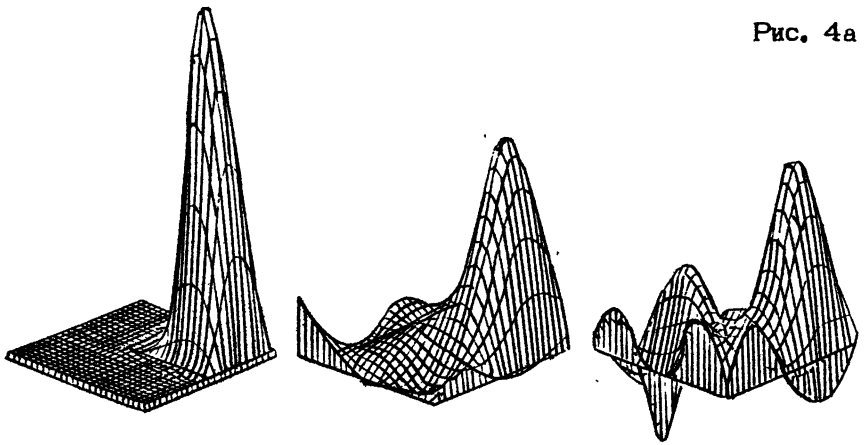
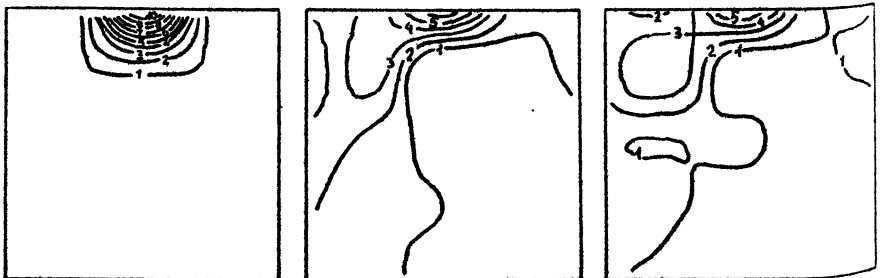
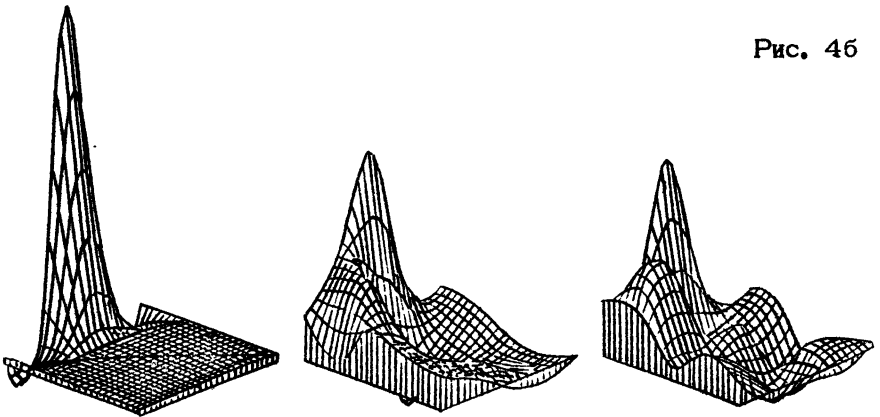
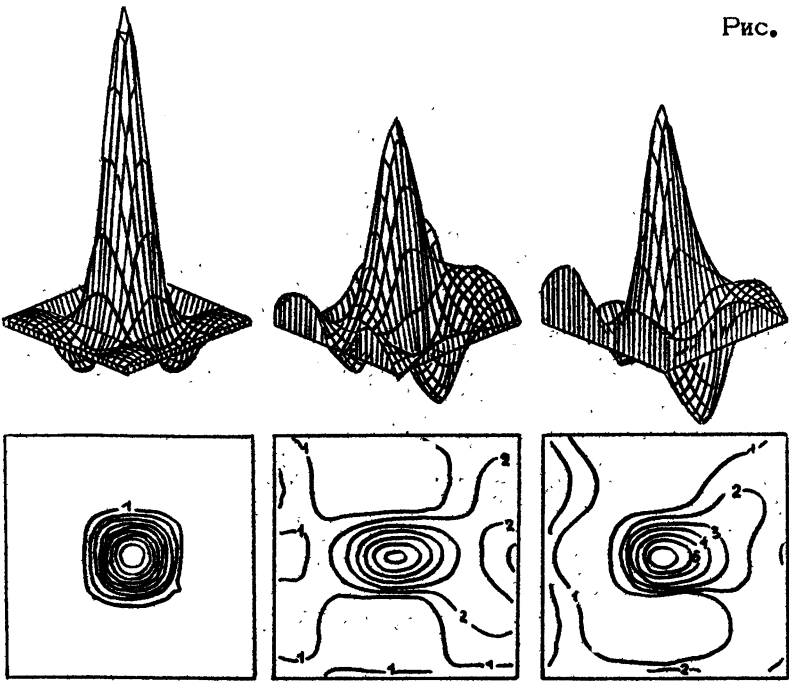
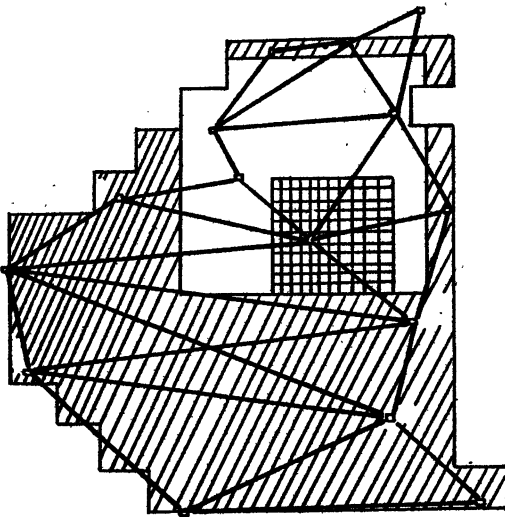


Рис. 4б



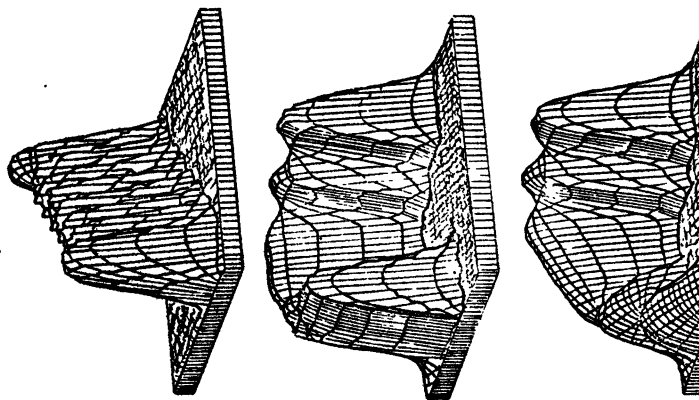


Р и с. 4 (а-в). Результаты реконструкции жестовых неоднородностей

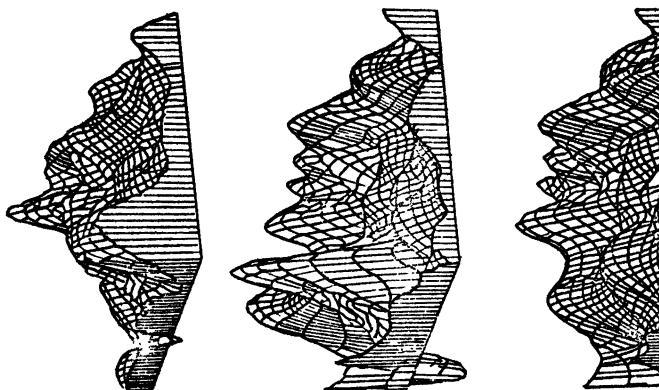


Р и с. 5. Проекция Постеля томографической конфигурации крупномасштабной диагностики океана [11]

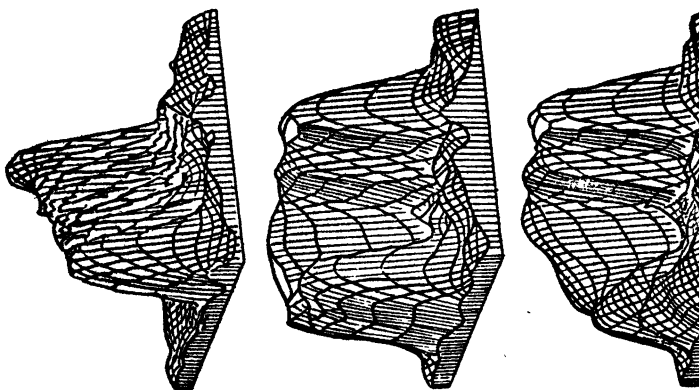
Исходное изображение



15 источников



30 источников



региона, тогда как ДТ практически для всех. Для разбиения В значения дефектов в указанных пределах для СТ имеют всего 3 ячейки, а для ДТ более 97%. В области Д минимальное значение дефекта для СТ равно 19,8%, тогда как для ДТ более 73% всех ячеек имеют значения дефекта менее 5%.

На рис.6 приведен результат реконструкции тестовых неоднородностей, заданных в области С. Слева – исходное изображение, в центре – результат реконструкции для СТ, справа – результат реконструкции для ДТ. Таким образом, планирование томографического эксперимента и выбор рациональной конфигурации представляет собой актуальную задачу, когда число источников и приемников ограничено.

Л и т е р а т у р а

1. Munk W.H., Wunsch C. Ocean acoustic tomography scheme for large scale monitoring // Deep Sea Res. 1979. V.26A. P.123.
2. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
3. Spofford C.W., Stokes A.P. An iterative perturbation approach for ocean acoustic tomography // JASA. 1984. V.75. N 5. P.1443.
4. Бухштабер В.М., Маслов В.К., Трохан А.М. О методе реконструкции пространственной структуры неоднородных сред // ДАН СССР. 1983. Т.272. №2. С.331.
5. Бухштабер В.М., Маслов В.К., Трохан А.М. О методе акустической томографии океана // Изв. АН СССР. ФАО. 1984. Т.20. №7. С.630.
6. Бухштабер В.М., Маслов В.К., Трохан А.М. и др. Акустический гомосинтез неоднородных сред // Измерения в гидроаэродинамике и геофизической акустике: Сб. науч. тр. /ВНИИФТРИ. М., 1984. С.5.
7. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
8. Eisler T.J., New R., Calderon D. Resolution and variance in acoustical tomography // JASA. 1982. V.72. N 6. P.1965.
9. Маркин В.Г. Особенности математического обеспечения томографических методов при ограниченном числе проекций // Проблемы метрологического обеспечения систем измерительной информации: Тез. докл. 5-й Всесоюз. конф. М., 1984. С.22.

10. Бухштабер В.М., Маслов В.К., Трохан А.М. Акустический томосинтез гидрофизических неоднородностей в океане и алгебраические методы реконструкции изображений // Методы гидрофизических исследований: Сб. науч. тр. /ИПФ АН СССР, Горький, 1984. С.204.

11. Munk W.H., Wunsch C. Observing the ocean in the 1990s // Phil.Trans.R.Soc.Lond. 1982. A307 P.439.

12. A demonstration of ocean acoustic tomography Collaboration: The Ocean Tomography Group // Nature. 1982. V.299. N 5879. P.121.

13. Eisler T.J., Porter D.L., New R. Resolution Bias and Variance in Tomographic Estimates of Sound and Currents // J.Geophysical Research. 1984. V.89. N C6. Nov.20. P.10469.

ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДОЛОГИЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ГИДРОФИЗИКЕ

А.Н.Гинзбург, Ю.К.Постоеенко

Наука ищет истину,
а техника — компромисс.
Е. Валлах

Автоматизация научных исследований (АНИ) — мощнейшее средство повышения эффективности научных исследований вообще, и в частности в гидрофизике, — предполагает широкое использование ЭВМ и процессорной техники на всех этапах научных исследований. Термин "автоматизированные системы для научных исследований" (АСНИ) подразумевает также активную роль человека в человеко-машинном комплексе (в отличие от автоматических систем, где роль человека минимальна). Это отличие принципиально не только с точки зрения классификации систем, но и по существу задач и возможностей АСНИ.

Роль ЭВМ в научных исследованиях следует обсуждать в контексте организации конкретных исследований, от постановки задач и проведения исследований до получения окончательных результатов, теоретических и экспериментальных. На рис.1 приведена "каноническая структура" исследования, включающая в себя теоретические, экспериментальные этапы и завершающаяся интерпретацией и оформлением результатов.

ЭВМ и процессорная техника разных классов могут применяться на разных этапах реализации этой структуры:

4 — большие, средние (традиционные) ЭВМ, мини- и супермини;

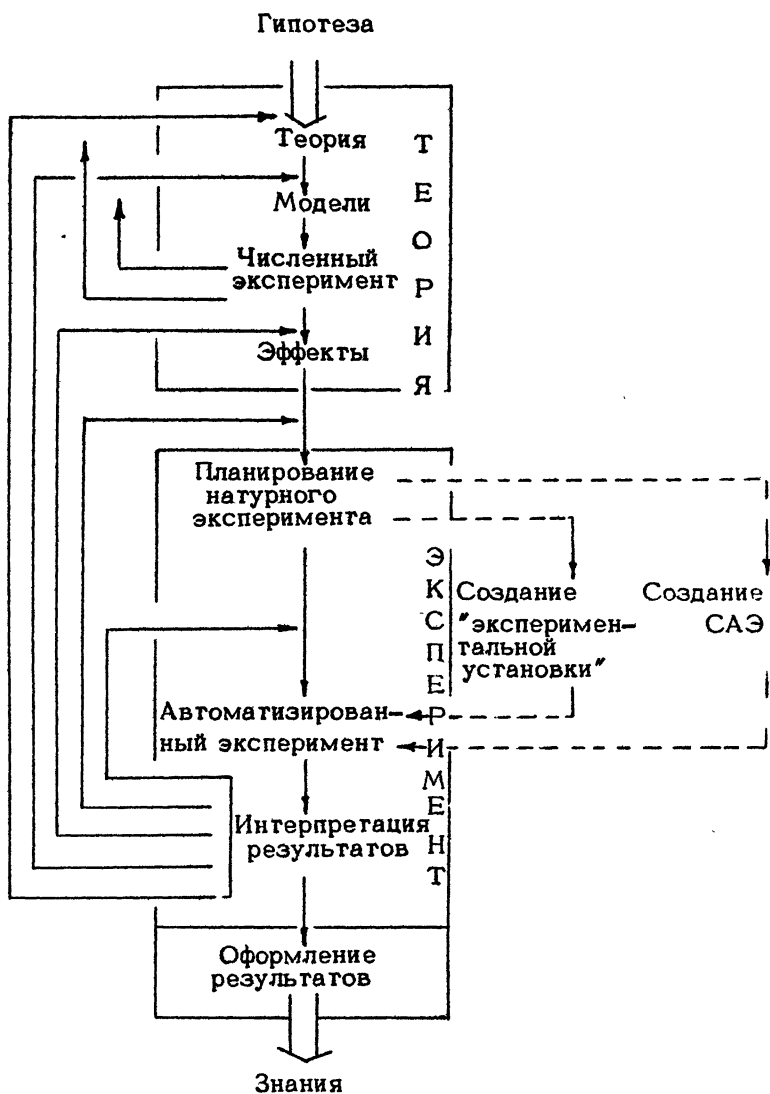
6, 8 - мини-, микро-, профессиональные и персональные ЭВМ с унифицированным интерфейсом (системы автоматизации экспериментов);

7, 8, 10 - мини- и супер-мини-ЭВМ с развитой машинной графикой (графические и редакторские комплексы);

11 - ЭВМ с развитой памятью и системами доступа к ней (банки и базы данных, "базы знаний"). Однако проблемно-ориентированные АСНИ создаются в основном для автоматизации экспериментов, как наиболее дорогостоящих и трудоемких этапов НИР, на остальных этапах, как правило, используются универсальные средства. Именно об этом классе АСНИ пойдет речь в дальнейшем, их называют также САЭ - системы автоматизации экспериментов.

Итеративный вид структуры, изображенный на рис.1, отражает циклический характер научных исследований и предопределяет такое требование к САЭ, как г и б к о с т ь, понимаемая как простота изменений параметров, режимов, характеристик или функций системы. Для обеспечения гибкости САЭ должны быть о т к р ы т ы м и системами как для пользователя, так и для разработчика, допускающими вмешательство в структуру и функционирование на любом этапе исследований (включая разработку самой САЭ). Это отличает САЭ от "черных ящиков" - приборов, предполагающих фиксированный (хотя может быть широкий) набор функций и закрытых для пользователя. Требования гибкости и открытой структуры налагают определенные ограничения при выборе базовых технических и программных средств, а также требуют специальных решений при разработке архитектуры и структуры АСНИ.

Рис.1 отражает также связи этапа "Создание САЭ" с другими этапами научных исследований. В частности, созданию САЭ должны предшествовать этапы 3, 5, 6, результаты которых дают основу для так называемого алгоритмического обеспечения САЭ. Отсутствие моделей и априорных сведений об эффектах делают невозможными планирование экспериментов. Здесь планирование экспериментов не только научно-организационное мероприятие, но, главным образом, раздел прикладной математической статистики, связанный с проверкой адекватности моделей, оценкой параметров модели, выбором альтернатив. При отсутствии планирования эксперимент неизбежно превращается из целенаправленного в феноменологический, т.е. наблюдение за "природой" в надежде обнаружить явления или эффекты. Однако автоматизация таких экспериментов часто приводит к бессмысленной трате ресурсов из-за недостатка формализо-



Р и с. 1. Структура научного исследования с использованием АСНИ:

- ⊙ - машинные операции,
- - человеко-машинные операции

ванных априорных представлений об объекте. К сожалению, многие эксперименты в гидрофизике (и не только в гидрофизике) носят феноменологический характер, что свидетельствует о недостатке науки в конкретных приложениях. Первым признаком неблагополучия в постановке задач автоматизации являются залежи первичных экспериментальных данных (часто говорят "информации", но это неверно), не обработанных не столько по причине отсутствия вычислительных ресурсов, сколько из-за недостатка конструктивных идей по обработке, соразмеряющих потребности в данных и фактические возможности извлечения знаний (т.е. информации) из них.

Разумеется, структура рис.1 идеализирована, и в конкретных случаях исследование редко идет по "полной программе", но в заключение этого обсуждения подчеркнем, что научные исследования, как и другие виды деятельности, широко внедряющие ЭВМ, должны, по-видимому, пережить ломку традиционных организационных форм и методологии работ, навязываемую алгоритмизацией и формализацией представлений, необходимых для действительно эффективного применения ЭВМ и АСНИ. Взамен должна повышаться эффективность научных исследований.

Э ф ф е к т и в н о с т ь С А Э не может определяться сама по себе, а следует из эффекта внедрения САЭ в конкретное исследование. При этом единственным узаконенным [1] показателем эффективности является экономический эффект, определяемый как

$$\mathfrak{E} = \Pi_1 S_0 / \Pi_0 - S_1, \quad (1)$$

$$\Pi_1 \geq \Pi_{\text{ТРЕБ}}; \quad \Pi_0 \geq \Pi_{\text{ТРЕБ}}, \quad (1a)$$

где $\Pi_{\text{ТРЕБ}}$ - требуемая производительность; Π_1 - производительность эксперимента; S_1 - стоимость эксперимента.

Формула (1) требует определения показателя производительности или работы, выполняемой в ходе экспериментов, автоматизированного - Π_1 и неавтоматизированного (либо недостаточно автоматизированного) - Π_0 , и умения считать текущие (или полные) затраты, и дает соответственно годовой (или полный) экономический эффект по сравнению с нулевым вариантом.

S_0 и S_1 должны учитывать все основные и вспомогательные затраты, капитальные и текущие, на проведение эксперимента, включая стоимость разработки и эксплуатации САЭ и "экспериментальной установки" (в том числе часть стоимости

проведения судовой экспедиции, если речь идет об исследовании океана).

Производительность эксперимента можно определить в терминах работы над данными, если считать работу с данными основной задачей эксперимента и САЭ:

$$\Pi = \frac{Q}{T} = \frac{Wz}{T} = \Lambda, \quad (2)$$

$$z = \frac{Q}{W}; \quad \Lambda = \frac{W}{T},$$

где Q - работа над данными (операций); T - полное время на реализацию эксперимента (до получения конечного результата); W - объем данных (слов); z - сложность работы над элементом данных (операций/слово); Λ - средний (за время T) поток данных в САЭ (слов/с).

Производительность имеет размерность - число операций в секунду. Все величины, входящие в формулу (2), имеют характер средних как по времени, так и по множеству данных; W, z, Λ могут быть векторами. В соотношении (1) эквивалент операций и тип слова могут быть выбраны произвольно, но, разумеется, одинаково для Π_0 и Π_1 . Тогда в качестве Π_1/Π_0 могут быть взяты произвольные отношения из формулы (2):

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_0} = \frac{Q_1}{Q_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{W_1}{W_0} \cdot \frac{z_1}{z_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \cdot \frac{z_1}{z_0}. \quad (3)$$

Здесь и выше z - объективная (минимальная) алгоритмическая сложность, отнесенная к элементу данных. Доказательство существования минимальной сложности - серьезнейшая математическая задача, но для типовых задач обработки данных оценки алгоритмической сложности хорошо изучены [2,3]. Подчеркнем, что для сравнения производительности недопустимо использовать одиночные показатели времени эксперимента, объемов данных или средних потоков

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_0} \neq \frac{T_0}{T_1} \neq \frac{W_1}{W_0} \neq \frac{z_1}{z_0} \neq \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0},$$

если прочие показатели в соотношении (3) не константы. Отметим, что если удовлетворяются неравенства (1а), то производительность не должна обязательно расти, а для выполнения условия $\exists > 0$ достаточно, чтобы удовлетворялось неравенство

$$S_1/\Pi_1 < S_0/\Pi_0, \quad (4)$$

т.е. "цена производительности" автоматизированного эксперимента должна падать, чтобы автоматизация была эффективной. Однако, как правило:

$$S_1 = S_0 + \Delta S; \quad \Delta S > 0.$$

Тогда достаточно

$$\frac{\Delta S}{\Delta \Pi} < \frac{S_0}{\Pi} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta S}{S_0} < \frac{\Delta \Pi}{\Pi_0}. \quad (5)$$

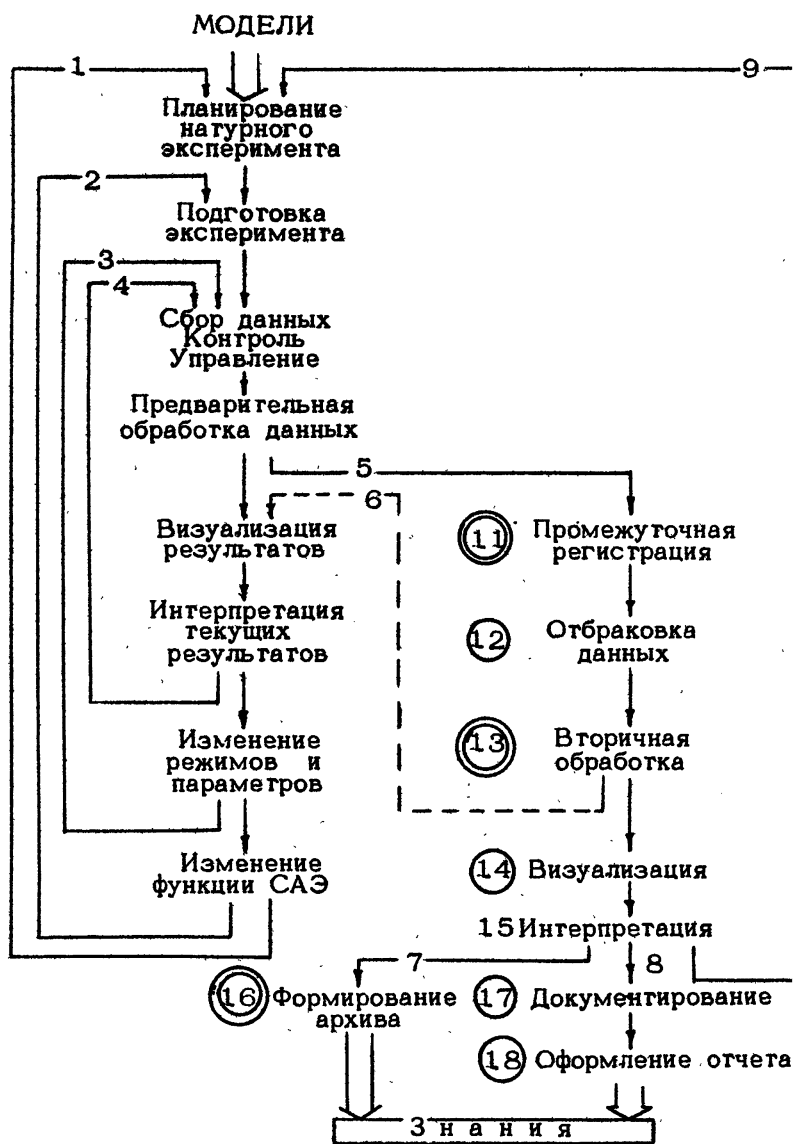
Цена производительности, таким образом, наряду с экономическим эффектом может использоваться как основной показатель при выборе технических средств САЭ, в том числе вычислительной техники, а также служить основой для оценки эффективности мероприятий, связанных с модернизацией систем. Правило (4) – относительный рост стоимости должен быть ниже относительного роста производительности – толкает нас к использованию в САЭ микро- и мини-ЭВМ, имеющих наиболее низкие показатели цены производительности, а для выполнения неравенства (1а), т.е. достижения требуемой производительности, – к комплексированию этих ЭВМ.

Тактика автоматизации должна ответить на вопросы: что автоматизировать? в какой последовательности? насколько глубоко? Для обсуждения этих вопросов обратимся к структуре эксперимента (рис.2), несколько более детальной, но также "канонизированной". Процессы, указанные на рис.2, выполняются явно или неявно в любом эксперименте, неавтоматизированном или автоматизированном, но с точки зрения тактики автоматизации принципиально их разделение на автоматизируемые полностью (машинные), частично (человеко-машинные) и неавтоматизируемые ("человеческие"). Идеальная автоматизация может уменьшить времена выполнения процедур первых двух типов, но не в состоянии устранить человеческий фактор. Кроме того, некоторые временные интервалы не могут быть ниже минимального предела, определяемого физикой исследуемых явлений или достоверностью и репрезентативностью (представительностью) данных, носящих часто стохастический характер. Например:

$$T_{сб} > 2 q^2 \tau_0,$$

где $T_{сб} = T_3$ – время сбора данных, q^2 – требуемое улучшение отношения сигнал/шум, τ_0 – радиус корреляции шумов.

Условиями качества и устойчивости управления ограничен интервал $T_5 = T_{уп}$ на рис.2:



и с. 2. Структура автоматизированного эксперимента:

- ⊙ - машинные операции,
- - человеко-машинные операции

$$T_{упр} \geq c \tau_{об},$$

где $\tau_{об}$ – постоянная времени объекта. Возможны и другие объективные, человеческие и физические ограничения снизу на время выполнения соответствующих процессов.

Тогда

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_0} \leq \frac{T_{min} + T_{авт}(0)}{T_{min}}, \quad (6)$$

где T_{min} – ограничение снизу на время одного экспериментального цикла, если все машинные и человеко-машинные интервалы равны нулю; $T_{авт}(0)$ – сумма всех интервалов времени, которые могут быть уменьшены путем автоматизации.

Итак, условие (6) – верхняя граница выигрыша в производительности при идеальной автоматизации. Однако необходимо выполнение неравенства $\exists > 0$, чтобы автоматизация не была убыточной, т.е. выполнение условий (4) или (5), а кроме того, $S \leq S_{max}$, так как финансовые вложения в автоматизацию ограничены. Тогда вместо (6) должна быть записана система неравенств, определяющих как максимальные вложения в автоматизацию, так и предельный выигрыш:

$$\frac{\Pi_1(\Delta S)}{\Pi_0} = \frac{T_{min} + T_{авт}(\Delta S)}{T_{min} + T_{авт}(0)} \geq 1 + \frac{\Delta S}{S_0}, \quad (7)$$

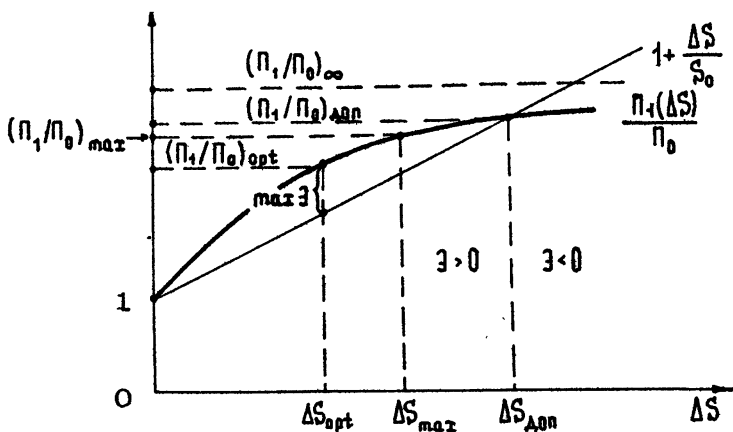
$$S \leq S_{max}; \quad \Pi \geq 0; \quad S \geq 0.$$

Решение системы (7) определяет допустимый (с точки зрения экономического эффекта) уровень автоматизации. На рис.3 изображены типичные решения системы для случая, когда $T_{авт}(\Delta S)$ – монотонно убывающая функция. Из решений видно, что $(\Pi_1/\Pi_0)_{\infty}$ достигается лишь при $S_0 \gg \Delta S$. Однако видно также, что существует ΔS_{opt} и $(\Pi_1/\Pi_0)_{opt}$, обеспечивающие максимальный эффект и не совпадающие ни с допустимым решением, ни с идеальным. Кроме того, существует нулевое решение, которое будет единственным, если

$$\frac{\Delta \Pi(\Delta S)}{\Pi_0} \leq \frac{\Delta S}{S_0}.$$

Практические выводы, связанные с рис.3:

– автоматизировать следует в первую очередь те эксперименты, где вложения в “экспериментальную установку” велики и превышают вложения в автоматизацию (экспедиционные суда, например, относятся к дорогостоящим “экспериментальным установкам”);



Р и с. 3. Решение неравенств $\frac{\Pi_i(S)}{\Pi_0} \geq \frac{S}{S_0}$; $S \leq S_{max}$

- дешевые эксперименты ($S_0 \sim 0$) следует автоматизировать столь же дешевыми средствами ($\Delta S \sim S_0$) или не автоматизировать вовсе ($\Delta S > S_0$; $\Delta \Pi < \Pi_0$);
- существует оптимум вложений в автоматизацию, далекий, как правило, от идеальной автоматизации и существенно зависящий от соотношения машинных и человеческих затрат времени, а также от исходных затрат;
- при автоматизации отдельных процедур в первую очередь нужно рассматривать те, к которым наиболее чувствительна производительность экспериментальных работ, но в то же время не требующие слишком больших вложений ($\Delta S/\Delta \Pi \ll S_0/\Pi_0$);
- на любой стадии автоматизации следует оценивать

$$\frac{\Delta \Pi_{i+1}}{\Pi_i} \geq \frac{\Delta S_{i+1}}{S_i}$$

и прекращать улучшение системы, если неравенство переходит в равенство.

Часть этих выводов интуитивно ясна, но при планировании автоматизации позволяет избежать серьезных просчетов, кроме того, дает достаточно простые экономические критерии оценки принимаемых решений.

Из этих выводов следует, например, что ветви 6 и 9 (см. рис.2) должны выпадать из автоматизации, так как время их выполнения не может влиять на производительность экспериментальных работ. Кроме того, часто решающий эффект заключен не в автоматизации сбора и обработки данных, а во вспо-

могательных, но грудеомких операциях типа калибровки, графического мониторинга, совмещения и датирования данных. Эта ситуация типична, когда небольшой объем данных добывается кропотливым трудом.

Проблема выбора технических и программных средств САЭ – технико-экономическая, однако ее экономический аспект часто игнорируется. В то же время стоимость средств автоматизации пока высока (30 – 50 тыс. руб. – “стартовая” цена любой системы автоматизации) и должна увязываться с конечным эффектом автоматизации. Существенная часть стоимости – вычислительные средства, входящие в САЭ, поэтому практически важны два вопроса: как выбрать тип и конфигурацию ЭВМ и как будет использоваться процессорная техника в период эксплуатации САЭ?

Определяющей характеристикой процессора является его производительность. На практике приходится иметь дело с тремя показателями: $\Phi_{\text{треб}}$, $\Phi_{\text{факт}}$, $\Phi_{\text{ном}}$ – требуемой, фактической и номинальной (рекламной) производительностью.

Номинальная производительность процессоров вводится как характеристика быстродействия процессорных средств, которая не должна зависеть от задачи. Однако такого инварианта в общем случае дать нельзя, поэтому используется множество различных характеристик: тактовая частота микроинструкций – МГц; Мипс (миллион инструкций в секунду) – частота выборки команд из основной памяти; Мопс (миллион операций в секунду) – средняя производительность на стандартных смесях команд; Мфлопс (миллион операций с плавающей запятой в секунду) – средняя производительность на вычислительных задачах и пр.

Порядок отношений различных единиц производительности для широко распространенных микропроцессоров:

$$1 \text{ Мипс} = 3-10 \text{ МГц}$$

$$1 \text{ Мопс} = 1-30 \text{ Мипс} = 3-300 \text{ МГц}$$

$$1 \text{ Мфлопс} = 3-30 \text{ Мопс} = 3-10^3 \text{ Мипс} = 10-10^4 \text{ МГц.}$$

Например, один из наиболее популярных и самый дешевый западный компьютер IBM PC XT имеет такт 4 МГц, а производительность на Фортране порядка 1 Кфлопс. Нижние границы интервалов достигаются для новейших 32-разрядных микропроцессоров, а также традиционных больших ЭВМ, но и там вариации производительности могут достигать порядка в зависимости от типа используемых команд.

На стадии выбора типа процессора для САЭ эта неопределенность должна быть устранена путем декомпозиции конкретной задачи автоматизации по типам и форматам данных, типам операций, структурам данных и программ и т.д.

Основой для выбора процессора в САЭ реального времени являются соотношения

$$\rho \leq 1, \quad (8)$$

$$\rho = \lambda \tau^*, \quad (9)$$

где ρ - коэффициент загрузки процессора; λ - средний поток на входе/выходе САЭ (слов/с); τ^* - средние задержки процессорного времени на один элемент потока (так называемое время обслуживания).

Равенство допустимо лишь для регулярных потоков и детерминированного времени обслуживания. Если характер потоков и времени работы программ случаен, то максимальное значение ρ должно выбираться с запасом, необходимым для разрешения конкуренции между элементами потока. Хорошо известно, например, соотношение для простейшего потока и экспоненциального распределения времени обслуживания:

$$\bar{W} = \rho / (1 - \rho), \quad (10)$$

где \bar{W} - средняя длина очереди в системе.

В большинстве САЭ очереди не желательны, так как разрушают временные диаграммы процессов сбора данных и приводят к задержкам ответа системы в диалоговом режиме, поэтому характерные значения $\rho_{\max} = 0,5-0,8$, или существенно ниже, если производительность планировать "на вырост".

В выражении (9), в общем случае, λ и τ^* - векторы, и загрузка имеет вид

$$\rho = \sum_d \lambda_d \tau_d^*, \quad (11)$$

$$\tau_d^* = \sum_i n_{id} \tau_{id} = \sum_i n_{id} / \pi_{id}, \quad (12)$$

где d - типы данных; i - типы команд (зависящие от данных); n_{id} - число команд данного типа; τ_{id} - время выполнения команды; $\pi_{id} = 1/\tau_{id}$ - производительность на командах данного типа.

Здесь λ_d определяется физикой исследуемого явления и результатами, которые выдает САЭ; n_{id} - характеристики программного обеспечения; τ_{id} - параметры конкретного процессора.

Множество (i, d) в общем случае обширно; например, для моделей PDP/LSI : 8 типов данных, 82 короткие команды,

46 длинных и 12 способов адресации данных комбинируются произвольным образом, часть команд, кроме того, - двухадресная. Пример фрагмента матрицы τ_{id} , нормированной к самой короткой команде для PDP/LSI, - в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Команды	I	L, F	D
ADD (SUB)	1-7	30-39	42-54
MUL	22-26	55-65	160-175
DIV	48-56	78-85	215-240
TRSF	3-7	5-9	9-13

В таблице по строкам: сложение (вычитание), умножение, деление, передача данных в основной памяти (обмен); столбцы: целые - 16 бит, длинные целые или плавающая запятая - 32 бита, двойная точность на плавающей запятой - 64 бита. Разбросы даны для разных способов адресации в основной памяти.

Значения табл. 1, заключенные в рамку, зависят от способа реализации арифметики в конкретном процессоре. Приведены цифры для микропрограммной реализации; в случае программной организации их следует умножить на 4-5; при наличии плавающего процессора - разделить на 5-6.

Цифры табл. 1 - безразмерные и имеют смысл грузоемкости каждой отдельной команды. Тогда

$$\tau_d^* = \frac{1}{\pi_{ном}} \sum_i n_{id} \varepsilon_{id} = \frac{\varepsilon_d^*}{\pi_{ном}}, \quad (13)$$

где ε_{id} - грузоемкость команды; $\pi_{ном}$ - номинальная производительность (инструкций/с).

С использованием этого соотношения выражения (8), (9) и (11) преобразуются к виду

$$p\pi_{ном} > \lambda \varepsilon^*, \quad (14)$$

$$\lambda \varepsilon^* = \sum_d \lambda_d \varepsilon_d^*, \quad (15)$$

$$\varepsilon_d^* = \sum_i n_{id} \varepsilon_{id}. \quad (16)$$

Заметим, что детализация n_{id} до уровня отдельных команд в соотношении (16) возможна только для готовой программы

и имеет смысл только для процессоров, совместимых на уровне машинных команд и отличающихся T_{id} или $T_{ном}$. Если процессоры несовместимы, то возможны оценки (16) на уровне примитивов языка, общего для разных процессоров. Для вычислительных задач [2,3] в качестве таких примитивов используют операторы, аналогичные табл. 1 для тех же типов данных. Дополнительно к указанным (в САЭ) необходимы операторы цикла, синхронизации (прерывания) и вызова процедур, иногда стандартные функции, кроме того, логические и символьные типы данных и операторы над ними. Далее для каждого из операторов необходимы оценки трудоемкости применительно к альтернативным процессорам и возможен выбор типа процессора с использованием неравенства (14).

Практическое решение задачи требует определенных усилий по спецификации алгоритмов, их представления на языке, анализа внутренней устойчивости и чувствительности к ошибкам вычислений, связанных с используемыми типами и форматами данных, исследования трудоемкости, поиска компромиссов между быстродействием и точностью. Здесь важны аналогии между действующими САЭ и проектируемой.

Основой для таких аналогий может быть связь между сложностью Z в соотношении (2) и трудоемкостью:

$$Z^* = \chi Z + Z_{накл}^* \quad (17)$$

где $\chi \gg 1$ – коэффициент реализации; $Z_{накл}^*$ – накладные расходы на реализацию, определяемые внутрисистемными издержками.

Коэффициент χ здесь имеет смысл среднего числа исполняемых команд конкретного процессора на один оператор некоего универсального языка, на базе которого может быть записан минимальный алгоритм, представляющий работу САЭ. Однако от описания алгоритма до программы, исполняемой процессором, достаточно длинный путь по цепочке: алгоритм – язык программирования – операционная среда – транслятор – исполняющая система – коды. Как коэффициент χ , так и накладные расходы, связанные с реализацией алгоритма, могут меняться в очень широких пределах. Коэффициент χ зависит в первую очередь от особенностей используемого языка программирования и качества транслятора. Например, для

PDP/LSI – 11:

Ассемблеры	1
PL-11	1-1,3
C	1-2
PASCAL	1,5-3
FORTRAN	2-5
BASIC-транслятор	3-10
BASIC-интерпретатор	30-100

Существенное изменение трудоемкости (времени исполнения программ) связано с тем, что трансляторы частично или полностью, как, например, в BASIC-интерпретаторе, моделируют конструкции языка на машинном уровне. Ассемблеры используют машинное представление непосредственно, поэтому с точки зрения времени исполнения программ наиболее эффективны. Однако множество других критериев эффективности влияют на выбор языка и тип транслятора: эффективность написания и отладки программ, определяющая долю времени разработки в общем времени "жизни" САЭ; эффективность трансляции, связанная с затратами времени на модификацию программ; соотношение объемов исходного и оттранслированного текстов и размеров памяти, занимаемой транслятором и его поддерживающей библиотекой, и т.д. Немалую роль играют выразительные средства языка и комфорт, обеспечиваемый операционной системой. Здесь приходится искать компромиссы между стоимостью и эффективностью работы процессора, комфортом, квалификацией разработчиков и пользователей и конечной эффективностью автоматизации.

Накладные расходы в формуле (17) связаны главным образом с поддержанием необходимых режимов функционирования САЭ. Их доля пропорциональна числу разнородных потоков на входе-выходе системы, работающих квазипараллельно, и связана с имитацией параллельной работы процессора. Обычная доля накладных расходов в системах разделения времени - 0,3-0,6 г*. Уменьшить эту долю можно, отказавшись от исполняющих средств операционной системы в пользу специализированных управляющих программ, называемых обычно мониторами реального времени. Здесь опять необходим компромисс между увеличением полезной производительности системы и затратами времени на разработку управляющих программ.

Помимо сложности основного алгоритма, на сложность и трудоемкость основных программ существенное влияние оказывает стиль программирования. Понятие стиля не формализуемо, но включает в себя такие свойства программ, как устойчивость

к ошибкам в данных, структуризация, возможность верификации, повторная входимость, а также такие требования, как универсальность и простота модификаций. Кроме того, программисты часто руководствуются разными критериями эффективности программ, зачастую гипертрофируя некоторые их свойства, например компактность. Полный диапазон изменения трудоемкости программ в зависимости от стиля программирования составляет 1-30. Противоречия между универсальностью и трудоемкостью программ или их компактностью и трудоемкостью могут быть преодолены разумным сочетанием средств макрогенерации и организации подпрограмм. Макросредства, имеющиеся в некоторых языках, позволяют генерировать необходимые версии исполняемых программ на базе универсального текста, модифицируемого на стадии трансляции путем указания условий трансляции, например типов или значений переменных. Подпрограммы реализуют свою универсальность в процессе исполнения, разумеется, за счет увеличения трудоемкости.

Таким образом, исходная (объективная или минимальная) сложность алгоритма обростаёт затратами реализации:

$$\kappa = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma, \quad (18)$$

где α, β, γ - затраты на стиль, язык-транслятор, машинную систему команд соответственно.

Полный диапазон коэффициента реализации чрезвычайно широк (1-10⁶), так как учитывает полную априорную неопределенность при создании системы. Реальные цифры трудоемкости программ для десяти гидрофизических систем, описанных в работе [4]: $\kappa^* = 100-1600$ инструкций/слово. При этом все программы, к которым относятся эти цифры, написаны на Ассемблерах, используют только фиксированную запятую и не используют стандартную операционную поддержку режимов реального времени, т.е. работают под управлением специализированных мониторов.

На основании анализа трудоемкости и выбранного типа процессора могут быть уточнены коэффициенты загрузки и (или) предельные потоки, перерабатываемые системой:

$$(\rho - \rho_{\text{накл}} = \lambda \kappa \alpha / \pi_{\text{ном}}) \leq 1. \quad (19)$$

Заметим, что загрузку полезно анализировать в действующей системе по типам операций и тракту прохождения данных. При этом расчеты по формуле (19), отнесенные к некоторым точкам системы, дают основу для анализа "узких мест" и принятия компромиссных решений, связанных с улучшением пока-

зателей системы. В заключение раздела, связанного с производительностью процессора, заметим, что универсальность и комфорт стоят весьма дорого и что за гибкость и выразительность программных средств надо платить производительностью процессора.

Объем и производительность памяти, оперативной и внешней, является вторым важнейшим показателем ЭВМ в САЭ. Производительность оперативной памяти (допустимая частота обращений к ней) почти всегда однозначно связана с производительностью процессора (в Мипсах). Объем оперативной памяти должен быть достаточным для размещения программ, используемых в реальном времени, и текущей порции данных, необходимых для контроля, управления и предварительной обработки. Объемы данных, требуемые для контроля и управления, обычно невелики, в частности потому, что при управлении недопустимо большое запаздывание. Объемы данных, используемых для предварительной обработки, зависят от режимов и конкретных алгоритмов обработки. При этом "скользящий" режим поступления данных и рекурсивные алгоритмы обработки требуют минимума памяти, определяемого глубиной рекурсии; блочные алгоритмы требуют существенно больше памяти. Например, три алгоритма фильтрации

$$Y_i = \sum_{k=1}^m a_k Y_{i-k} + b_i x \quad - \text{рекурсивный,} \quad (20a)$$

$m \ll N,$

$$Y_i = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x_{i-j} \quad - \text{скользящий,} \quad (20б)$$

$$Y_{in} = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x_{in-j} \quad - \text{блочный} \quad (20в)$$

могут конкурировать как по объему занимаемой памяти и сложности, так и по качеству обработки.

На стадии проектирования САЭ необходимые объемы памяти приходится вычислять, обеспечивая неравенство

$$\left(\sum_d W_d L_d + M_{np} + M_{сист} \right) \leq M, \quad (21)$$

где M - объем оперативной памяти (байт) процессора; M_{np} , $M_{сист}$ - объемы (байт), занимаемые основными и системными программами соответственно; W_d - объемы данных (слов) по типам; L_d - длина (байт) данных по типам.

Здесь опять необходимы компромиссы между длиной (точностью) представления данных, компактностью и трудоемкостью рабочих программ, системным сервисом и рутинной частью задачи. Однако попытка экономии памяти на компактности программ приводит к резкому возрастанию их трудоемкости, потому самый короткий путь — сокращение длины слова и переход, по крайней мере на первых стадиях обработки, к фиксированной запятой с одновременным увеличением быстродействия. Заметим, что молодая школа программистов-пользователей не любит, а зачастую не умеет, работать с фиксированной запятой, хотя радикальная разница между фиксированной и плавающей запятыми по быстродействию и затратам памяти сохранится еще долгие годы.

Попытка размещения оперативных данных реального времени во внешней памяти, например на диске, с использованием режима их подкачки в оперативную память (так называемый свопинг) приводит к катастрофическому падению общего быстродействия (в 30–100 раз) или возрастанию накладных расходов на организацию этого режима. Поэтому свопинг данных применим лишь в качестве экзотики в задачах, где быстродействие является критическим параметром. Свопинг программ, особенно сервисных, используется широко, но существенно усложняет проблему синхронизации, навязывая разделение времени между потоками с диска и внешними физическими данными. Стандартная системная поддержка малоповоротлива, а специализированные мониторные программы, обеспечивающие эффективную реализацию режима, требуют работы программиста-системщика высокой квалификации, поэтому неравенство (21) играет роль порога, за пределами которого происходит резкое снижение эффективности всей системы.

В заключение заметим, что объемы доступной оперативной памяти во всех типах процессоров растут с темпом 4 раза за 5 лет, поэтому для широкого класса САЭ выполнение неравенства (21) вскоре перестанет быть проблемой.

Внешняя память в основном используется для создания промежуточных и долговременных архивов экспериментальных данных, регистрируемых как для конкретной дальнейшей обработки, так и "на всякий случай". При выборе типов объемов внешних запоминающих устройств (ЗУ) решающую роль играют темпы накопления данных, темпы их уничтожения или сжатия (прореживания), а также возможности будущего доступа к ним. При использовании внешних ЗУ ограниченного объема, например фиксированных дисков, должен выполняться ди-

намический баланс, обеспечивающий стационарность объема данных:

$$\left(\lambda_{\text{рег}} \cdot T_{\text{рег}} - \frac{Q_{\text{рег}} T_{\text{обр}}}{2^8} \right) \leq M_{\text{внешн}}, \quad (22)$$

где $\lambda_{\text{рег}}$ – поток данных на регистрацию, $T_{\text{рег}}, T_{\text{обр}}$ – интенси- вности регистрации и обработки данных соответственно.

Для ЗУ со сменными носителями, объем которых кажется неограниченным, должен все же соблюдаться "предел дефицита"

$$\lambda_{\text{рег}} \cdot T_{\text{год}} \leq M_1 \cdot \nu, \quad (23)$$

где $\lambda_{\text{рег}} T_{\text{год}}$ – объем данных, регистрируемый за год; M_1 – объем кассеты или пакета; ν – "интенсивность снабжения" (шт./год).

Скажем, гидрофизическое судно, оснащенное несколькими САЭ, на месяц интенсивной работы способно собрать совершенно немыслимый объем данных:

$$W_{\text{рег}} = \lambda_{\text{рег}} T_{\text{рег}} = 10^2 \cdot 10^5 \text{ байт/с} \cdot 2,5 \cdot 10^6 \text{ с} = 250 \text{ Мбайт} - 250 \text{ Гбайт}.$$

Абсурдность верхней цифры очевидна, так как емкость кассеты стандартной МЛ обычной плотности равна 5–20 Мбайт, повышенной плотности записи – 40–160 Мбайт, хотя поток (10^5 байт/с) для ультразвуковой локации или контактных измерений пространственно-временных параметров мелкомасштабной турбулентности, например, не так велик.

Кроме ограничений на объемы регистрируемых данных, действуют ограничения на потоки, допускаемые разными типами внешних ЗУ:

$$\lambda_{\text{рег}} \leq \Lambda_{\text{доп}} \leq \lambda_{\text{доп}}, \quad (24)$$

где $\Lambda_{\text{доп}}$ – допустимый средний поток с учетом работы механизмов управления и системных программ, $\lambda_{\text{доп}}$ – допустимый пиковый поток во время записи.

В табл. 2 приведены данные для наиболее распространенных типов лент и дисков.

Для $\Lambda_{\text{доп}}$ даны две цифры: с использованием стандартной поддержки и вне ОС (часто говорят на физическом уровне). Для сменных носителей необходимо учитывать также нарушение временного режима при смене носителей.

Таким образом, при эффективном использовании внешних ЗУ необходима определенная дисциплина записи, учитывающая как ограничения объема данных, так и физический режим работы

Т а б л и ц а 2

Устройства	$\lambda_{\text{Доп}}$, Кбайт/с	$\Lambda_{\text{Доп}}$, Кбайт/с		M , Мбайт
		ОС	вне ОС	
МЛ	10	1-3	3-8	5-20
ГМД	10	1-3	3-8	0,5-2
МД	100-300	1-5	10-40	5-29

носителя. Последнее, в свою очередь, требует усилий по системному программированию. Радикальное решение проблемы управления носителями на физическом уровне возможно с использованием так называемых файловых процессоров, однако в номенклатуру отечественных мини-ЭВМ эти процессоры пока не входят.

Использование автономных регистраторов, аналоговых или цифровых, может решить вопросы скорости и плотности, а также объемов записи, за счет, разумеется, специализации, но порождает другие проблемы. В частности, данные оказываются вне основного экспериментального цикла (см. рис.2) и, как отмечалось, не могут влиять на локальные события во время проведения эксперимента; данные вне САЭ лишены соответствующей системной поддержки и усложняется их датирование, отбраковка и сортировка; кроме того, из-за специализации часто игнорируется вопрос аппаратно-программного интерфейса, что усложняет проблему дальнейшей обработки.

Не только интерфейс, структура, системное описание данных, но и их объемы должны планироваться с учетом предстоящей обработки. Здесь снова возвращаемся к проблеме производительности процессора. Можно дать несколько эквивалентных выражений для соотношения времени обработки и эксперимента:

$$\frac{T_{\text{обр}}}{T_{\text{экс}}} = \frac{\alpha_{\text{счит}}^* + \alpha_{\text{обр}}^*}{\alpha_{\text{обр}}} \cdot \lambda_{\text{рег}} \cdot \frac{\rho_{\text{рег}}}{\rho_{\text{обр}}} \cdot \sigma, \quad (25)$$

$$T_{\text{обр}} \gg W \alpha_{\text{обр}}^* / \alpha_{\text{ном}} + T_{\text{счит}},$$

$$\frac{T_{\text{обр}}}{T_{\text{экс}}} = \left(\frac{\alpha_{\text{обр}}^*}{\alpha_{\text{рег}}^*} + 1 \right) \frac{\alpha_{\text{рег}}}{\alpha_{\text{обр}}} \cdot \frac{\rho_{\text{рег}}}{\rho_{\text{обр}}} \cdot \sigma, \quad (26)$$

где $\alpha_{\text{обр}}^*$, $\alpha_{\text{рег}}^*$, $\alpha_{\text{счит}}^*$ - трудоемкости обработки, регистрации, считывания соответственно; $\alpha_{\text{обр}}$, $\alpha_{\text{рег}}$ - номинальная

производительность процессоров обработки и регистрации; $\lambda_{\text{рег}}$, $\lambda_{\text{счит}}$ - потоки на регистрацию и считывание; $\eta_{\text{рег}}$, $\eta_{\text{обр}}$ - КПД системы на регистрации и обработке; ν - число вариантов обработки.

Соотношение (25) - для случая автономной регистрации, (26) - программной регистрации и обработки. Всегда $\alpha_{\text{обр}}^* \gg \alpha_{\text{рег}}^*$; $\nu > 1$; $\eta_{\text{рег}} > \eta_{\text{обр}}$, но $\eta_{\text{обр}} \approx \eta_{\text{рег}}$, поэтому $T_{\text{обр}} \gg T_{\text{эксп}}$. То же, если $\lambda_{\text{рег}} > \eta_{\text{обр}} / (\alpha_{\text{счит}}^* + \alpha_{\text{обр}}^*)$.

Отдельно остановимся на проблеме КПД САЭ. Так же как экономическую эффективность, КПД САЭ нельзя считать в отрыве от эксперимента и общего технико-экономического окружения. КПД (правильнее коэффициент использования системы) должен учитывать полезную долю работы в общем "жизненном цикле" системы и может быть сведен к производству множества коэффициентов, меньших единицы:

$$\eta \ll \rho_{\text{мат}} \cdot q \cdot \xi \cdot \theta \cdot (\dots) < 1. \quad (27)$$

Здесь только главные из них: $\rho_{\text{мат}}$ - загрузка процессора (для других устройств аналогично); q - вероятность загрузки; ξ - коэффициент готовности; θ - коэффициент сменности.

Коэффициент q связан с поведением загрузки во времени (так называемого графика), когда система находится в рабочем состоянии. Пример графика для основного цикла рис.2 приведен на рис.4. В этом примере процессор САЭ используется в однозадачном монопольном режиме, причем задачи не совмещаются.

Вероятность загрузки может быть определена как

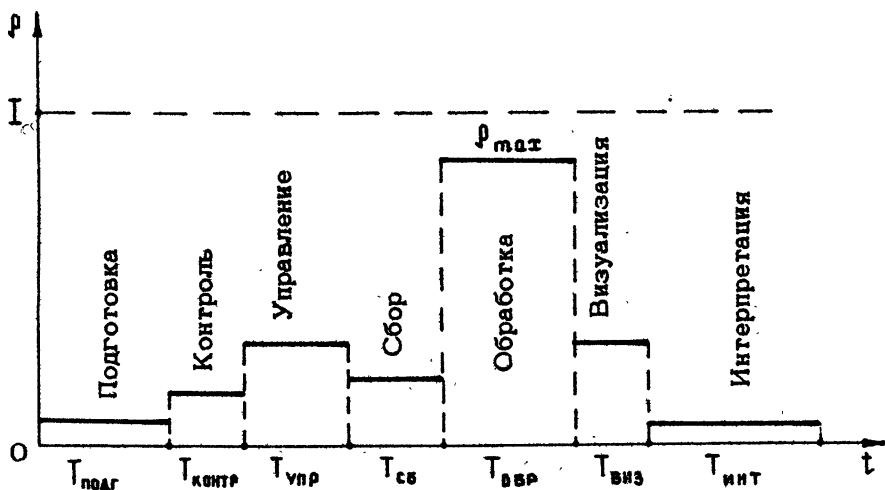
$$q = \bar{\rho} / \rho_{\text{мат}} = \sum_i q_i T_i / \rho_{\text{мат}} \sum_i T_i,$$

где $\bar{\rho}$ - средняя загрузка в рабочем состоянии; ρ_i, T_i - загрузка на одном из интервалов рис.4 и длина интервала соответственно.

Вероятность загрузки зависит как от режима работы установки, так и от процессора в САЭ. Можно дать следующие грубые границы для q :

$$\frac{T_{\text{авт}}}{T_{\text{авт}} + T_{\text{паузы}} + T_{\text{диал}}} \leq q \leq \frac{T_{\text{авт}}}{T_{\text{авт}} + T_{\text{паузы}}}, \quad (28)$$

где $T_{\text{авт}}$ - время работы системы в автоматическом режиме; $T_{\text{паузы}}$ - время ожидания (холостого); $T_{\text{диал}}$ - время на диалог оператора с САЭ.



Р и с. 4. Пример характерного графика процессора в САЭ, использующей монопольный однозадачный режим

Левая граница соответствует использованию процессора, когда действия оператора и работы САЭ не совмещаются, правая – полному совмещению операторских действий с автоматической работой системы. Характерные значения $\rho = 0,1-0,9$. Желание увеличить ρ требует существенных усилий по обеспечению режима совмещения или замены пакетного режима работы САЭ и экспериментальной установки на режим разделения времени.

Коэффициент готовности – основной показатель, связанный с надежностью, ремонтпригодностью технических средств и восстанавливаемостью программ:

$$g_{\text{гб}} = \frac{T_{\text{нар}}}{T_{\text{нар}} + T_{\text{рем}} + T_{\text{восст}}}, \quad (29)$$

где $T_{\text{нар}}$ – среднее время наработки на отказ; $T_{\text{рем}}$ – время ремонта; $T_{\text{восст}}$ – время восстановления рабочего режима в системе (загрузка программ, установка начальных или текущих условий, может быть тестирование и пр.).

Отметим, что $T_{\text{нар}}$ – возрастающая функция затрат на оборудование (запасное имущество и приборы или резервирование), $T_{\text{рем}}$ – убывающая функция затрат на содержание персонала, $T_{\text{восст}}$ – убывающая функция затрат на разработку легко восстанавливаемых программ. Заметим также, что с показате-

лем (29) однозначно связана вероятность потери наблюдательного времени или достоверности данных. С проблемой восстановления программ тесно связана также задача сохранения когерентности данных, если $T_{\text{экс}} \gg T_{\text{ндр}}$. Характерные значения ξ для наиболее широко используемых мини- и микро-ЭВМ 0,7-0,9, первое - для обычных условий применения, второе - при наличии полного ЗИПа и квалифицированного персонала.

Коэффициент сменности ψ зависит от режима работы установки (пользователей САЭ), имеет значения 0,33-1 и является возрастающей функцией затрат на эксплуатацию.

Результирующий коэффициент использования процессора $\eta = 0,01-0,65$, как видим, может меняться в очень широких пределах, но нет оснований считать, что в среднем этот коэффициент существенно больше 0,1, если не принимаются специальных мер по его увеличению. Экспедиционные САЭ находятся в особых условиях: круглосуточная работа, квалифицированный персонал, большой ЗИП, режим совмещения процессов сочетаются, поэтому в экспедиции КПД может быть на порядок выше, чем "в домашних условиях". Но это "пиковый КПД", а средний - с учетом перевозок, переходов, монтажа и наладки САЭ - все равно будет низким. Основная причина этой ситуации в том, что производительность процессоров, как правило, выбирается из условия пиковой загрузки на одном из отрезков экспериментального цикла, но сама эта пиковая нагрузка в большинстве случаев кратковременна в сравнении с накладными расходами на обеспечение экспериментов. Вторая причина - монопольное использование процессорных средств (как и САЭ в целом), не позволяющее даже во время экспериментального цикла обеспечить высокий средний коэффициент загрузки.

Возвращаясь к вопросу влияния САЭ на производительность экспериментальных работ, дадим два соотношения; первое

$$\Pi = \frac{\eta}{1/\lambda\xi + \chi/\rho\pi} \quad (30)$$

определяет связь производительности эксперимента, введенной соотношением (2), с параметрами задачи и процессора, второе - эффективность финансовых вложений в автоматизацию:

$$\frac{d\Pi}{dS} = \Pi \frac{d \ln \eta}{dS} + \frac{\chi}{\rho\pi} \frac{d \ln \frac{\rho\pi}{\chi}}{dS} + \left(\frac{d\eta}{d\pi} + \frac{d\rho}{d\pi} \right) \frac{d\pi}{dS} \quad (31)$$

Здесь η - КПД системы с "окружающей средой"; π - производительность процессора; ρ - средняя загрузка процессора на интервале экспериментального цикла; χ - коэффициент реализации программ.

Обе формулы выведены в предположении, что сбор и обработка данных разделены во времени, но регистрация данных не производится.

Заметим, что в соотношении (31) производные по \int расположены в порядке убывания их веса. Наибольшую эффективность имеют мероприятия по повышению внешнего КПД, так как в среднем он достаточно низок, далее – снижение программной грузоемкости, затем – повышение средней загрузки системы и, наконец, на последнем месте – повышение производительности технических средств. Производительность процессора, в частности, останется на последнем месте до тех пор, пока нет уверенности в том, что η, ρ доведены до насыщения, а программные реализации адекватны структуре процессора и его возможностям, в противном случае рост производительности процессора только снизит КПД, но не приведет к росту конечного эффекта, так как $d\eta/dx < 0$ и $d\rho/dx < 0$. Исключение составляют системы массовой рутинной обработки данных, программное обеспечение которых написано на Ассемблере или микрокоде и исполняется специализированными мониторами, они работают круглосуточно, без участия человека. Однако такие системы относятся к классу автоматических, и для их создания об исходных данных и конечном результате нужно знать все (!), а это гораздо больше, чем известно ученому, экспериментатору и создателю САЭ вместе взятым.

Технические средства САЭ, процессоры, периферия, интерфейс и устройства связи с объектом, выбираемые в качестве базовых, должны удовлетворять множеству противоречивых требований и ограничений. Основные из них: доступность (дефицит), совместимость на аппаратном и (или) программном уровне, расширяемость, производительность, сроки разработки, включая стандартные и нестандартные аппаратные и программные компоненты, преемственность и долгосрочная перспектива линий ЭВМ и интерфейсов, надежность и пр. Приоритеты между этими пунктами могут меняться в конкретных обстоятельствах, но преемственность, долгосрочная перспектива и совместимость – решающие, так как только они обеспечивают долгосрочную базу САЭ и ее производственную поддержку.

В конце 70-х гг. Совет по автоматизации научных исследований при Президиуме АН СССР при участии представителей ведущих организаций, разработчиков и потребителей, других ведомств сформулировал стратегическое направление развития автоматизации: базовые вычислительные средства – СМ "Электроника"; базовые интерфейсы – КАМАК и приборный [5].

Линия ЭВМ СМ "Электроника" включает в се 50 типов программно-совместимых устройств, в Минприбором и Минэлектронпромом СССР, а так перации в странах - членах СЭВ: ПНР, ГДР, ЧС ВНР и НРБ. Наиболее известные типы (каждый лен множеством моделей [6]), приведены в табл.

Т а

Класс, тип	Страна-производитель	Производительность процессора, Мипс
Супер-мини-ЭВМ: Э-79 СМ-52/ХХ	СССР СРР, ЧССР, ВНР	1-3 0,8-2,8
Мини-ЭВМ: МЕРА-125 СМ-1420	ПНР СССР	0,8 0,8
Микро-ЭВМ: Э-60 МЕРА-60 СМ-1300	СССР ПНР СССР	0,25-0,4
Персональные ЭВМ: ДВК-1...4 Э-85	СССР СССР	0,2-0,5
Одноплатные ЭВМ: Э-80, Э-81	СССР	0,5-0,8

К этой же линии относятся однокристалльные i серий К1801 и К1811. Линия СМ - "Электроника" много-совместима с американскими моделями РДФ фирмы DEC, что отличает ее от других ЭВМ, СМ ЭВМ (в СМ ЭВМ входят три несовместимых гом линии).

Структура ЭВМ СМ-"Электроника" магистрал открытого типа, обеспечивающая большое разноо

гураций и параметров ЭВМ даже в рамках одной модели. Помимо конкретного набора модулей модели отличаются: типом основной магистрали, разрядностью адресных шин и способом реализации плавающей запятой.

Тип магистрали разделяет упомянутые модели на две группы, электрически не совместимые друг с другом. В супер-мини и мини используется магистраль по прототипу UNIBUS, в микро-, профессиональных и одноплатных ЭВМ — Q-bus. Магистрали содержат адресные шины, шины данных, управления, запрос — ответ и синхронизации. В Q-bus шины адреса и данных объединены, в UNIBUS — разделены, что определяет основные отличия в построении модулей и разницу в быстродействии: UNIBUS обеспечивает производительность до 3 Мслов/с, Q-bus в 1,3–2 раза медленнее. Эти цифры определяют ближайшую перспективу наращивания производительности процессоров в рамках указанных серий. Как явствует из табл. 3, по быстродействию почти все модели далеки от насыщения, и на ближайшие 5–10 лет эта линия имеет запас. Каждый из двух типов шин имеет варианты по длине адресной сетки: используются 16-, 18- и 22-разрядные модификации. Разрядность адреса определяет предел устанавливаемой памяти в модели конкретного типа: 64К, 256К, 1М и 4Мбайт соответственно. Все новейшие модели имеют длину адресной сетки 22 разряда, и можно надеяться, что через некоторое время объем доступной памяти мини- и микро-ЭВМ достигнет 4Мбайт (как в наиболее распространенных моделях ЕС ЭВМ на 1985–1986 гг.). Основные варианты поддержки плавающей запятой обсуждались выше, здесь заметим лишь, что предел производительности этой линии на 32- и 64-разрядных словах может быть доведен до 0,8 и 0,4 Мфлопс соответственно, что далеко от реализованных на сегодняшний день показателей.

Периферия СМ-“Электроника”, подключаемая только к UNIBUS или только к Q-bus, в целом достаточно разнообразна. На шины могут быть подключены сменные диски емкостью 5–10, 29 или 100 Мбайт, мини-ленты — 5–20 Мбайт, флоппи-диски, кассетные ленты, польские или отечественные винчестер-диски емкостью 5, 10, 20 Мбайт, дисплеи, включая цветные нескольких типов, и т.д. Однако это разнообразие почти полностью обесценено конструктивной несовместимостью контроллеров, управляющих внешними устройствами, выпускаемых в Минприборе и Минэлектронпроме, а также странах СЭВ. Имеется по 3–4 конструктива в каждом министерстве, несовместимых даже внутри министерства, несмотря на общность

прототипов и единство электрических сопряжений и программной поддержки. Эта ситуация – наглядный пример того, как здравая идея открытого интерфейса полностью погублена недальновидной (если не сказать больше) политикой министерств и координирующих организаций. Следствием этой политики является проблема искусственного дефицита в области периферии, привязывающего пользователя к конкретному типу процессора или даже к конкретной конфигурации, навязанной изготовителем. Нужно отметить, что наши коллеги из СЭВ более дальновидны, ПНР, например, выпускает переходники Q-bus – UNIBUS, позволяющие перекомплектовывать периферию и тем самым реализовать коллективный задел по номенклатуре внешних устройств. Правда, некоторые типы внешних устройств – дисплеи и устройства печати – имеют унифицированный внешний интерфейс (на уровне подключения к контроллеру) RS-232, но и тот выпускается в двух вариантах – последовательный и параллельный – с очень широким диапазоном изменения скоростей передачи: от 1200 бод до 38 Кбод. В заключение этого раздела отметим, что при создании конкретной конфигурации ЭВМ решающую роль играет так называемый машинно-зависимый интерфейс, ситуация с которым, как следует из сказанного выше, достаточно безнадежна, даже в рамках одной линии. В ближайшие годы положение может усугубиться в связи с намечаемым массовым производством персональных и профессиональных компьютеров.

КАМАК представляет собой один из примеров машинно-независимого, магистрально-модульного программно-управляемого интерфейса. В Западной Европе КАМАК появился как международный стандарт в 1968 г., США приняли его как национальный стандарт в 1975 г., СССР – в 1980 г. (хотя серии модулей пошли с 1973 г.); к тому времени это был стандарт де-факто как в США, так и в СССР. Ныне КАМАК поддерживается производством в 10 ведомствах СССР и поставками из ПНР, ЧССР, НРБ и ВНР. Основная сила КАМАК в машинной независимости, глубине унификации, широте и разнообразии номенклатуры модулей и сопутствующих изделий. По совокупности этих качеств ни один из существующих стандартов не способен заменить КАМАК в ближайшие 5–10 лет.

КАМАК включает в себя более 10 взаимосвязанных стандартов и руководящих указаний, распространяющихся на следующие элементы аппаратно-программного интерфейса:

- конструктивы и механические сопряжения, включая шасси модулей, крейты (блоки), печатные платы, разъемы всех типов;
- электрические связи, в том числе внешние аналоговые, внутренние - крейта, модуля и внешних магистралей, номиналы и требования к источникам питания;
- форматы операций, адресов и данных;
- системные связи для управления, контроля и синхронизации;
- режимы обмена данными;
- протоколы взаимодействия на разных уровнях иерархии;
- форматы макрокоманд или вызовов в языках высокого уровня.

Заметим, что по полноте унификации КАМАК едва ли не единственный в мире стандарт, где проблема интерфейса решена на всех уровнях. В крейте производства, например, Минэлектронпрома могут работать модули, изготовленные в Академии наук СССР, ПНР и западные, или, наоборот, в ЦЕРНе работают советские модули и т.д. Такая возможность сама по себе уникальна и обеспечивает широчайшую преемственность разработок.

Номенклатура серийных и доступных модулей в СССР около 150 типов, более 500 типов обеспечены конструкторской документацией и выпускаются партиями в опытных производствах. В номенклатуру входят:

- модули связи с объектом (УСО), в том числе АЦП, включая уникальные, например с быстродействием 100 МГц; ЦАПы и модули управления исполнительными устройствами, например шаговыми двигателями или силовыми тиристорами;
 - модули таймирования и синхронизации;
 - согласователи и переходники, включая усилители, фильтры, опторазвязки и пр.;
 - драйверы (контроллеры) управления периферийными устройствами, в том числе дисплеями, как обычными, так и графическими и цветными, МЛ, МД, ГМД;
 - модули приема-передачи данных, включая, например, выход на физические арендуемые линии или междугородные каналы;
 - контроллеры связи КАМАК с процессорами (имеются для всех типов популярных процессоров как в СССР, так и на Западе);
 - "интеллектуальные" контроллеры на базе однокристалльных и одноплатных процессоров почти всех известных серий и т.д.
- Кроме того, разработано значительное число специализированных модулей для самых разных применений, где КАМАК используется как хорошо унифицированный конструктив и (или) удобный интерфейс, обеспечивающий простую компоновку сис-

тем практически любой сложности и множество конфигураций. Многие владельцы ЭВМ предпочитают использовать КАМАК взамен машинных интерфейсов для наращивания обычной или уникальной периферии, обеспечивая независимость от капризов промышленности или поставщиков. Эта политика поддерживается тем, что в состав серийных ЭВМ MERA-60, MERA-125, а также в ИБК на базе СМ-1420, СМ-1300 включены один или два крейта КАМАК с универсальным набором модулей.

В заключение отметим, что некоторые из гидрофизиков, разработчиков и пользователей, находятся в оппозиции по отношению к КАМАКу и линии СМ-"Электроника". Это связано, на наш взгляд, с тем, что, с одной стороны, усилия разработчиков поглощаются подводной, либо другими специализированными частями системы, с другой - некоторая часть специалистов ощущает независимость от внутреннего рынка, благодаря возможности оснащения импортной техникой. Но относительная свобода приобретения западной техники в сочетании с пренебрежением проблемой совместимости интерфейсов, процессоров и программного обеспечения приводит к полной зависимости от фирм-поставщиков, изоляции от коллег, работающих в смежных областях и верящих в научно-техническую кооперацию, а также не дает "сухого остатка" в виде квалификации, опыта и преемственности разработок.

Л и т е р а т у р а

1. Методика (основные положения) определения экономической эффективности использования в народном хозяйстве новой техники, изобретений и рационализаторских предложений /ВНИИПИ. М., 1986.
2. Валях Е. Последовательно-параллельные вычисления. М.: Мир, 1985.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
4. Гинзбург А.Н., Постоев Ю.К. Автоматизация гидрофизических исследований на основе мини-ЭВМ и КАМАК //Автоматизация научных исследований: Матер. 16-й Всесоюз. шк. /ИПФ АН СССР. Горький, 1982. С.5.
5. Выставкин А.Н. Процесс исследования как объект автоматизации //Автоматизация экспериментальных исследований: Сб. науч. гр. /ИПФ АН СССР. Горький, 1985. С.4.
6. Белый В.В., Жасяров З.Ж., Кочеткова М.А. и др. Технические и программные средства СМ ЭВМ. Номенклатурный каталог /МПСА и СУ. М., 1985.

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Б.С. Ринкевичюс

Развитие любой науки, в том числе и гидрофизики, неразрывно связано с совершенствованием старых и созданием новых методов измерений — основных средств получения объективной информации о закономерностях материального мира. Особенно это стало актуальным в последнее время, когда наметился качественно новый этап в развитии гидрофизики, связанный с более глубоким количественным изучением гидрофизических явлений. Одним из направлений развития новых методов измерений являются переход к новым принципам организации измерений (проведение комплексных измерений многих параметров) и использование новых физических эффектов. В данной статье рассмотрены вопросы использования хорошо известного эффекта Доплера в гидрофизических исследованиях в акустическом и оптическом диапазонах волн.

Историческое введение

В 1842 г. в трудах Богемского научного общества вышла небольшая работа пражского профессора К.Доплера "О цвете двойных звезд и некоторых других небесных светил" [1], в которой впервые был поставлен вопрос о влиянии движения источника волн или приемника (наблюдателя) на воспринимаемую наблюдателем частоту, т.е. на высоту тона звука или цветовое ощущение световых волн. Существенно отметить, что в первой работе К.Доплера не делалось принципиального различия между световыми и звуковыми волнами: эффект изменения частоты рассматривался для любого волнового движения. Заложенные в этой

работе идеи вызвали оживленную дискуссию во второй половине XIX в. и понадобилось около трех десятилетий, чтобы эти идеи стали общепризнанными; это произошло только после экспериментальной проверки эффекта в акустическом и оптическом диапазонах длин волн. Эффект изменения частоты звука при движении источника был экспериментально установлен в 1845г. английским ученым Х.Бейс-Баллотом на голландской железной дороге [2].

Существенно сложнее обстояло дело с экспериментальной проверкой эффекта Доплера в оптическом диапазоне длин волн. Впервые это удалось осуществить английскому ученому В.Хеггинсу в 1867г. путем измерения смещения водородной F - линии в спектре Сириуса по сравнению с положением этой же линии в спектре излучения гейслеровской трубки [3]. В лабораторных условиях эффект Доплера впервые был проверен русским ученым А.А.Белопольским только в 1900г. путем измерения смещения спектральных линий солнечного излучения, отраженного от вращающихся зеркал [4], и позднее Б.Голицыным, И.Филлипом в 1907г. [5].

Важным этапом в развитии идей Доплера было обобщение формулы на случай изменения оптических свойств среды, выполненное русским физиком В.Михельсоном в 1899г. [6] и экспериментально проверенное только в 1924г. французским ученым А.Перо [7].

Дальнейшее развитие идеи Доплера нашли в трудах великого немецкого ученого А.Эйнштейна, который в 1905г. получил поперечный эффект Доплера, связанный с релятивистскими эффектами [8]. Релятивистская формула Доплера была экспериментально проверена американскими учеными Г.Айвсом и Д.Стилуэллом в 1938г. [9].

И наконец, советским физиком И.М.Франком в 1942г. было дано обобщение формулы Доплера на случай диспергирующих сред [10]. Здесь впервые указано на наличие сложного эффекта Доплера, однако экспериментальная проверка этой формулы Доплера не осуществлена и по сей день.

Более подробно об исторических аспектах исследования эффекта Доплера можно прочитать в работе [11].

ЭФФЕКТ ДОПЛера В АКУСТИКЕ

Вывод формул для эффекта Доплера приводится во многих книгах, например [12], поэтому повторять его не будем.

При движении источника звука с постоянной скоростью u в стационарной, однородной, изотропной среде частота воспринимаемых приемником звука колебаний ν' определяется соотношением

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c_0} \cos \theta \right)^{-1}, \quad (1)$$

где ν_0 — частота испускаемых источником звука колебаний, c_0 — скорость звука в среде, θ — угол между направлением вектора скорости и направлением распространения волны. При малой скорости движения ($u/c_0 \ll 1$) выражение (1) приобретает вид

$$\nu' \approx \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c_0} \cos \theta \right).$$

Если источник неподвижен, а движется приемник звука, то частота воспринимаемых приемником звука колебаний ν'' будет

$$\nu'' = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c_0} \cos \theta' \right), \quad (2)$$

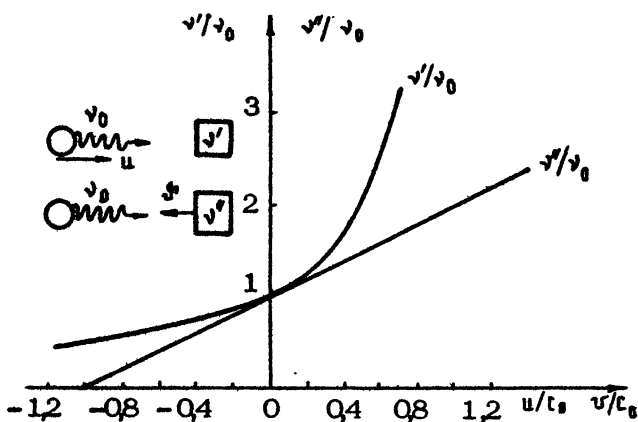
где v — скорость приемника, θ' — угол между направлением движения приемника и направлением движения волны.

При одновременном движении приемника и источника звука формула для частоты регистрируемых колебаний будет следующей:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c_0} \cos \theta' \right) / \left(1 - \frac{u}{c_0} \cos \theta \right). \quad (3)$$

Сравнение выражений (1) и (2) показывает, что при больших скоростях движения приемника или источника звука имеется существенное отличие — движется ли источник или приемник звука. Особенно существенным это отличие становится при скоростях, близких к скорости звука. Частота удаляющегося приемника звука уменьшается с увеличением скорости движения, пока не обращается в нуль при $u = -c_0$. В то же время для удаляющегося источника при $u = -c_0$ приемник будет регистрировать частоту $\nu' = \nu_0/2$, т.е. в два раза меньшую, чем частота звука источника (рис.1). С приближением источника к приемнику звука частота его резко возрастает, особенно при $u \rightarrow c_0$.

Особенностью акустического диапазона является возможность прямой проверки формул (1) — (3), так как частоты ν и ν_0 можно измерить непосредственно, в отличие от оптического диапазона, где измеряется только разность частот. При скоро-



Р и с. 1.

сти источника звука $u = 1\text{ м/с}$ в воздухе относительное изменение частоты будет $(v' - v_0) / v_0 = 1/339$. Если частота $v_0 = 10\text{ кГц}$, то разность частот будет $v - v_0 = 30\text{ Гц}$; что легко регистрируется экспериментально. Для воды $c_0 = 1554\text{ м/с}$, поэтому при $v_0 = 10\text{ кГц}$ изменение частоты будет $6,4\text{ Гц}$, что также можно зарегистрировать.

Однако необходимо иметь в виду, что скорость звука зависит от многих внешних факторов, неучет которых может привести к существенной погрешности в измерении скорости по доплеровскому сдвигу частоты.

Приведенные выше формулы для эффекта Доплера являются частными случаями общего выражения, полученного Д.Блохинцевым в 1942 г. [13], которое имеет вид

$$v = v_0 \left\{ 1 - \left[\frac{(\vec{V}, \vec{u})}{c_0^2} \left(1 + \frac{(\vec{u}, \vec{n})}{c_0} \right) + \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2} \right) \frac{(\vec{n}, \vec{V})}{c_0} \right] \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2} \right)^{-1} \right\}, \quad (4)$$

где вектор \vec{n} равен

$$\vec{n} = \vec{r} \left[v^2 \left(1 - u^2/c_0^2 \right) + (\vec{r}, \vec{u})^2 / c_0^2 \right]^{-1/2}.$$

Здесь $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$ — вектор относительной скорости, \vec{v} — вектор скорости приемника, \vec{u} — вектор скорости источника (рис.2)

Из выражения (4) можно получить рассмотренные ранее частные случаи. Например, для неподвижного наблюдателя ($\vec{v} = 0$) имеем

$$v' = v_0 \left[1 + \frac{(\vec{n}, \vec{u})}{c_0} \right] \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2} \right)^{-1} \quad (5)$$



и для неподвижного источника ($\vec{u} = 0$)

$$\nu' = \nu_0 \left[1 - \frac{(\vec{n}_0, \vec{v})}{c_0} \right], \quad (6)$$

где $\vec{n}_0 = \vec{r} / r$. Из выражения (4) получаем, что если $\vec{V} = 0$, то $\nu = \nu_0$, т.е. если приемник и источник относительно неподвижны, то частота воспринимаемых приемником колебаний равна частоте излучаемых источником колебаний.

Из выражения (5) следует, что при $\vec{n} \perp \vec{u}$

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{u^2}{c_0^2} \right)^{-1/2} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{u^2}{c_0^2} \right),$$

что, по-видимому, обусловлено учетом сжимаемости среды при выводе соотношения (4).

Вызывают сомнение соотношения для эффекта Доплера, полученные в работе [14], так как из них следует, что при движении по окружности источника будет регистрироваться изменение частоты приемником, находящимся в центре.

При рассеянии звуковой волны на движущейся со скоростью w неоднородности частота рассеянной волны будет

$$\nu_{\text{расс}} = \nu_0 \left(1 - \frac{w}{c_0} \cos \theta \right) \left(1 - \frac{w}{c_0} \cos \theta' \right)^{-1}, \quad (7)$$

где θ — угол между направлением распространения волны и направлением движения частицы, а θ' — угол между направлением распространения рассеянной волны и направлением скорости частицы.

На практике часто встречается случай движения источника звука вблизи приемника или наоборот. Существенно, что приемник в этом случае регистрирует изменяющуюся во времени частоту звуковой волны, т.е. некохроматическую волну.

Соответствующие формулы имеют вид

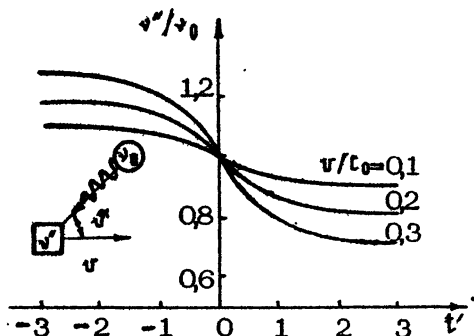
$$\nu'(t) = \nu_0 \left[1 - \frac{u}{c_0} \cos \theta(t) \right]^{-1}, \quad (8)$$

$$\nu''(t) = \nu_0 \left[1 + \frac{u}{c_0} \cos \theta'(t) \right]. \quad (9)$$

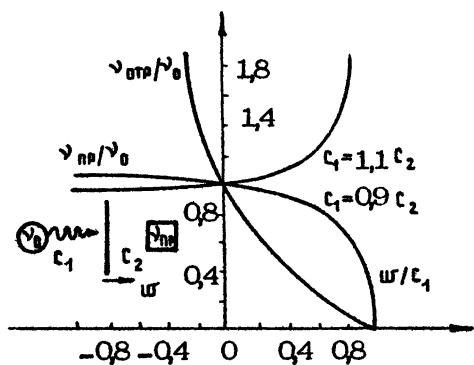
Для эксперимента, схема которого показана на рис.3, формула (8) примет вид

$$\nu''(t') = \nu_0 \left[1 - \frac{\nu}{c_0} \frac{t'}{\sqrt{1+(t')^2}} \right], \quad (10)$$

где $t' = t\nu/h$, h - минимальное расстояние между источником и приемником, соответствующее времени $t=0$. График изменения частоты показан на рис.3 при различных значениях ν/c_0 .



Р и с. 3.



Р и с. 4.

Рассмотрим прохождение звуковой волны через движущуюся границу раздела двух сред с разными акустическими свойствами. В этом случае возникают две волны: одна - отраженная и вторая - прошедшая во вторую среду. Частота отраженной волны равна

$$\nu_{отр} = \nu_0 \left(1 - \frac{\nu}{c_1} \right) \left(1 + \frac{\nu}{c_1} \right)^{-1}, \quad (11)$$

где c_1 — скорость звука в первой среде, w — скорость движения границы раздела этих сред. Частота прошедшей во вторую среду волны будет

$$\nu_{п2} = \nu_0 \left(1 - \frac{w}{c_1}\right) \left(1 - \frac{w}{c_2}\right)^{-1}, \quad (12)$$

где c_2 — скорость распространения звуковой волны во второй среде. График изменения частоты звука от скорости движения границы раздела двух сред показан на рис. 4.

Движение границы раздела со скоростью, приближающейся к скорости звука в первой среде, приводит к уменьшению частоты прошедшей волны при $w/c_2 > w/c_1$ и к увеличению частоты, если $w/c_2 < w/c_1$.

Приведенные соотношения (1)–(12) являются решением прямой задачи: как изменяется частота регистрируемых колебаний при наличии движения источника, приемника, рассеивателя или границы раздела двух сред. На практике большой интерес представляет обратная задача определения параметров движения по измеренному доплеровскому сдвигу частоты. В общем случае эта задача является неоднозначной, что особенно видно из формулы (4). При одновременном движении приемника и источника волн частота регистрируемых колебаний определяется векторами \vec{n} , \vec{u} и \vec{v} , поэтому установить характер движения по измеренной частоте ν невозможно. Однако в некоторых простых случаях измерение $\nu - \nu_0$ позволяет определить относительную скорость сближения (удаления) приемника и источника волн.

Кроме того, необходимо учесть, что среда в общем случае является нестационарной и неоднородной, поэтому соотношения (1)–(12) — только первое приближение в реальной ситуации [15].

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В ОПТИКЕ

Как уже указывалось во введении, К.Доплер свои идеи относительно изменения частоты воспринимаемых колебаний первоначально высказал применительно к оптическому диапазону. Однако только в 1900 г. А.А.Белополюскому впервые удалось наблюдать эффект Доплера в лабораторных условиях. Это связано с целым рядом особенностей оптического диапазона волн по сравнению с акустическим. Во-первых, скорость света значительно превосходит скорость звука, например для воздуха отношение c/c_0 составляет 10^8 . Так как эффект изменения частоты пропорционален $(\nu - \nu_0) / \nu_0 \sim u/c$, то при одинаковой

скорости движения, например, источника колебаний, относительное изменение частоты для оптических волн будет в 10^8 раз меньше, чем для звуковых.

Во-вторых, чрезвычайно высока частота оптических колебаний ($\nu_0 = 5 \cdot 10^{14}$ Гц), так что до настоящего времени нет простых способов непосредственного ее измерения. Поэтому здесь измеряют только разность частот оптических волн, например прямой и рассеянной, либо разность их длин волн.

В-третьих, особенностью оптического диапазона является отсутствие эфира, т.е. в оптике важно только относительное движение. Учет влияния среды между источником оптических колебаний и приемником существенно меняет ситуацию. Например, если среда является резонансной, то становится существенным, движется ли источник или приемник. Из-за движения источника света частота волны может попасть в область резонанса, и тогда будет наблюдаться сильное поглощение света. В то же время в случае движения приемника ни при какой скорости волна не будет поглощаться средой, если ее частота не соответствует полосе поглощения.

В оптическом диапазоне наблюдается релятивистский эффект Доплера. Для движущегося со скоростью v наблюдателя относительно бесконечно удаленного источника света, излучающего колебания с частотой ν_0 , воспринимаемая наблюдателем частота ν дается следующей формулой:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right) / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} \quad (13)$$

где φ — угол между линией, соединяющей источник света с наблюдателем, и скоростью наблюдателя.

Отсюда при $\varphi = 90^\circ$ получаем

$$\nu \approx \nu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right).$$

При скорости наблюдателя $v = 100 \text{ м/с}$, частоте излучаемых колебаний $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14}$ Гц изменение частоты будет

$$\nu - \nu_0 = 27,7 \text{ Гц},$$

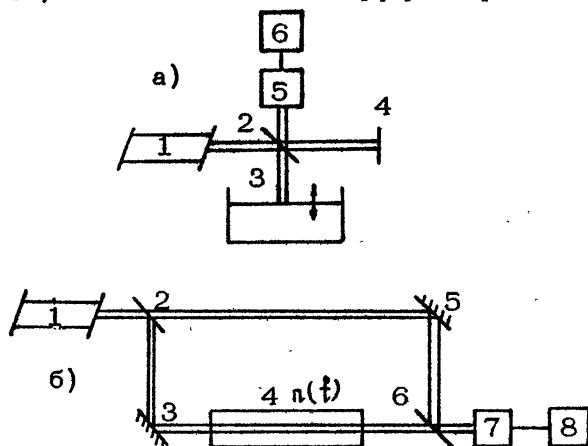
что легко регистрируется современными методами.

Рассмотрим основные принципы измерений гидрофизических параметров по эффекту Доплера в оптическом диапазоне.

Интерференционный метод измерения скорости колебаний границы раздела двух сред под действием акустического поля основан на модуляционном методе измерения малой разности фаз,

разработанного Г.С.Гореликом и И.Л.Берштейном еще в начале шестидесятых годов [16]. Этот метод получил в дальнейшем широкое развитие, особенно после создания лазеров [17-19].

На рис.5,а показана схема интерферометра Майкельсона,



Р и с. 5

предназначенного для измерения колебаний поверхности раздела двух сред под действием акустического поля. Излучение лазера 1, попадает на полупрозрачное зеркало 2 и делится на два пучка: один пучок отражается от зеркала 4 и попадает на фотоприемник 5, куда попадает и второй пучок после отражения от колеблющейся границы раздела двух сред 3. Если скорость колебания поверхности имеет вид

$$v = v_0 \cos \Omega t,$$

где v_0 - амплитуда скорости, Ω - круговая частота колебаний, то частота излучения лазера, отраженного от поверхности из-за эффекта Доплера, будет

$$\nu_{отр} = \nu_0 - \nu_0 \frac{2v_0}{c} \cos \Omega t. \quad (14)$$

Это приводит к изменению фазы отраженной волны по закону

$$\varphi(t) = 2\pi \nu_0 t + 2\pi \nu_0 \frac{2v_0}{c \Omega} \sin \Omega t + \varphi_0,$$

где φ_0 - начальная фаза.

Таким образом, отраженное от поверхности излучение можно записать в виде

$$E_{отр}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi_0),$$

где E_0 - амплитуда напряженности поля, отраженного от поверхности, $\omega_0 = 2\pi \nu_0$ - круговая частота, $m = 2\omega_0 v_0 / c\Omega$ - индекс девиации частоты.

В результате регистрации интерференции отраженного пучка от колеблющейся поверхности с отраженным пучком от зеркала 4 на выходе фотоприемника имеем переменный электрический сигнал $U(t)$ сложной формы:

$$U(t) = U_0 \cos(\varphi_0 + m \sin \Omega t) = U_0 \left\{ \cos \varphi_0 \left[J_0(m) + J_2(m) \cos 2\Omega t + \dots \right] + \sin \varphi_0 \left[2J_1(m) \sin \Omega t + 2J_3(m) \sin 3\Omega t + \dots \right] \right\}, \quad (15)$$

где U_0 - амплитуда переменной составляющей сигнала, $J_n(m)$ - функция Бесселя n -го порядка аргумента m .

В настоящее время разработаны различные методы анализа электрического сигнала вида (15), позволяющие извлечь информацию о параметрах колеблющейся поверхности: амплитуде скорости перемещения поверхности, амплитуде смещения, ускорении [17].

Разработанные методы позволяют измерять амплитуду смещения до 10^{-5} мкм при частоте модуляции до 10 кГц.

Как было показано В.А. Михельсоном, изменение частоты оптической волны может быть вызвано не только движением источника или приемника колебаний, но и изменением оптических свойств среды, через которую распространяется свет. Если световой пучок проходит ряд сред с разными длинами l_i и показателями преломления n_i , то частота прошедшего пучка будет [5]

$$\nu = \nu_0 \left[1 - \frac{1}{c} \sum_{i=1}^k \left(l_i \frac{dn_i}{dt} + n_i \frac{dl_i}{dt} \right) \right]. \quad (16)$$

Здесь третий член определяет изменение частоты за счет изменения длины среды, а второй член - за счет изменения оптических свойств. Для $k=1$, $dl/dt=0$ выражение (16) принимает вид

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{l}{c} \frac{dn}{dt} \right). \quad (17)$$

Безусловно такое же изменение частоты происходит и в акустическом диапазоне, за счет изменения скорости звука, вызванного изменением упругих свойств среды.

Изменение частоты волны за счет изменения параметров среды

называется параметрическим эффектом Доплера, Обзор работ по параметрическим явлениям в средах дан в работе [20].

На рис.5,6 показана схема лазерного интерферометра для измерения динамических изменений показателя преломления во времени. В этой схеме излучение лазера 1 при помощи полупрозрачной пластины 2 делится на два пучка. Один пучок - опорный - отражается от зеркала 5 и полупрозрачной пластины 6 и попадает на фотоприемник 7. Второй пучок - рабочий - отражается от зеркала 3, проходит исследуемую среду 4 и тоже направляется на фотоприемник 7, сигнал с которого поступает на электрическую систему измерений. 8.

Фаза лазерного пучка, прошедшего через среду, с учетом (17) будет

$$\varphi(t) = 2\pi\nu_0 t - 2\pi\nu_0 \frac{l}{c} n(t) + \varphi_0,$$

где l - длина пути пучка в среде; φ_0 - начальная фаза пучка. Электронная схема измерения лазерного интерферометра позволяет определить доплеровский сдвиг частоты, обусловленный изменением показателя преломления:

$$\nu - \nu_0 = -\frac{\nu_0 l}{c} \frac{dn}{dt}. \quad (18)$$

Например, нагрев водяного слоя на трассе длиной 100м со скоростью $dT/dt = 1^\circ\text{C}/\text{ч}$ приводит к доплеровскому сдвигу частоты

$$\nu - \nu_0 = -\nu_0 \frac{l}{c} \frac{dn}{dT} \frac{dT}{dt},$$

где при $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{Гц}$, $dn/dT = -10^{-4} 1^\circ\text{C}$ дает $\nu - \nu_0 = -4,6 \text{Гц}$. Такое изменение частоты лазерного пучка легко наблюдается с помощью современных лазерных интерферометров.

Другими причинами изменения показателя преломления среды является распространение акустических волн в воде или воздухе, возникновение внутренних волн в стратифицированной среде.

Заметим, что современная измерительная техника позволяет регистрировать разность частот $\nu - \nu_0 = 10^{-3} \text{Гц}$. Тогда из условия (18) получаем минимальное изменение показателя преломления

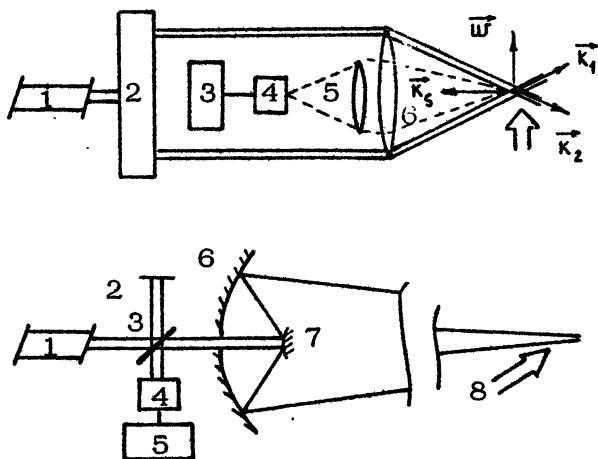
$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\min} = -\frac{c}{\nu_0 l} (\nu - \nu_0)_{\min},$$

что при $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, $l = 1 \text{ м}$ дает

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{м.а.}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ 1/с.}$$

Наиболее широкое распространение в гидрофизических исследованиях получили лазерные доплеровские анемометры (ЛДА), позволяющие бесконтактным способом измерять скорость потока жидкости или газа по доплеровскому сдвигу частоты рассеянного потоком лазерного излучения [21]. Поскольку этот метод измерений был изложен в статье [22], то здесь рассмотрим для общности только две оптические схемы ЛДА, которые дают представление о возможностях ЛДА. Разработанные к настоящему времени ЛДА позволяют исследовать как сверхмедленные процессы, начиная с 0,01 мкм/с [23], так и потоки со сверхзвуковыми скоростями в атмосфере. Круг явлений, который исследуется методами ЛДА, включает конвекцию в жидкости и газе, внутренние волны в стратифицированной жидкости, кавитацию, колебания жидкости под действием акустического поля, возникновение и развитие поверхностных и внутренних волн, взаимодействие потоков воздуха с морским волнением и целый ряд других задач.

На рис. 6, а показана дифференциальная схема ЛДА, предназ-



Р и с. 6.

наченная для измерения скорости жидкости или газа по обратному рассеянию лазерных пучков. Здесь излучение лазера 1 проходит устройство расщепления пучков и сдвига частоты 2

и объективом 6 фокусируется в исследуемую точку потока 7. Рассеянное назад излучение собирается объективами 5 и 6 и направляется на фотоприемник 4, сигнал с которого подается на электронный блок 3.

В обратном направлении распространяются две рассеянные волны, частоты которых в силу эффекта Доплера равны

$$\omega_{1 \text{ рас}} = \omega_1 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_{1 \text{ рас}}) \vec{W},$$

$$\omega_{2 \text{ рас}} = \omega_2 - (\vec{k}_2 - \vec{k}_{2 \text{ рас}}) \vec{W},$$

где ω_1, ω_2 ; \vec{k}_1, \vec{k}_2 ; $\vec{k}_{1 \text{ рас}}, \vec{k}_{2 \text{ рас}}$ - круговые частоты; волновые векторы падающих пучков; волновые векторы рассеянных пучков для первого и второго пучка соответственно. Так как $|\vec{k}_{1 \text{ рас}}| \approx |\vec{k}_2 \text{ рас}|$, то на фотоприемнике выделяется сигнал, частота которого равна разности частот рассеянных волн, т.е.

$$\omega_{1 \text{ рас}} - \omega_{2 \text{ рас}} = \omega_1 - \omega_2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{W}.$$

Для проведения исследований методом ЛДА в стратифицированных потоках из-за случайной дифракции лазерных пучков возникает необходимость использовать адаптивные схемы ЛДА [24].

Другой разновидностью ЛДА являются лазерные доплеровские лидары (ЛДЛ) - измерительные системы, предназначенные для дистанционного определения скорости ветра на расстояниях от единиц метров до десятка километров [25]. ЛДЛ позволяют решать многие проблемы взаимодействия атмосферы и океана. В них используются мощные CO_2 -лазеры, работающие на длине волны 10,6 мкм.

На рис. 6,6 показана оптическая схема одного из вариантов ЛДЛ. Излучение лазера 1 телескопической системой 6-7 направляется в исследуемую область 8. Рассеянное назад на трассе излучение собирается той же телескопической системой 6-7 и при помощи полупрозрачного зеркала 3 направляется на фотоприемник 4, куда поступает и опорный пучок, отраженный от зеркала 2. Электронная система 5 позволяет выделять спектр доплеровского сигнала, обусловленного движением частиц через зондирующий пучок.

Вектор чувствительности такой схемы направлен по оптической оси

$$\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_{\text{рас}} \approx 2 \vec{k}_0,$$

где \vec{k}_0 - волновой вектор зондирующего пучка, $\vec{k}_{\text{расс}}$ - волновой вектор рассеянного пучка. Такая моностатическая схема ЛДЛ позволяет измерить осевую составляющую скорости ветра по трассе. В созданном ЛДЛ [27] при мощности CO_2 -лазера $P = 1 \text{ Вт}$ измерялся модуль скорости ветра в направлении зондирования на расстояниях до 1 км. На расстоянии 100 м от ЛДЛ пространственное разрешение составляло 20 м.

* * *

Хотя эффект Доплера известен уже почти 150 лет, однако широкое его использование при проведении гидрофизических явлений началось в акустическом диапазоне только в послевоенные годы, когда были разработаны эффективные источники и приемники звука, а в оптическом диапазоне - после создания когерентных источников оптического излучения (лазеров). На основе эффекта Доплера проводятся и радиолокационные исследования поверхностных явлений океана [26,27], так как радиоволны в глубь океана не проникают.

Таким образом, акустические, оптические и радиолокационные методы исследования гидрофизических явлений на основе эффекта Доплера имеют много общего и существенно дополняют друг друга. Измерительная аппаратура на основе эффекта Доплера позволяет постичь многие закономерности гидрофизических явлений.

И наконец, хотелось бы отметить, что эффект Доплера является основой мессбауэровской спектроскопии [28], возможности которой в гидрофизических исследованиях пока не изучены.

Л и т е р а т у р а

1. Doppler Ch. Abhandlungen. Herausgegeben von H.A. Lorentz. Leipzig, 1907. 194 S.
2. Buys-Ballot Ch. Akustische Versuche auf der Niederländischen Eisenbahn, nebst gelegentlicher Bemerkungen zur Theorie Hrn. Prof. Doppler // Pogg. Ann. 1845. Bd.66. S.321.

3. Huggins W. Further observations on the Spectra of some of the Stars and Nebulae with an attempt to determine therefrom whether these bodies are moving towards or from the Earth //Phil. Trans. 1869. V.158. P.529.

4. Белопольский А.А. Опыт исследования принципа Доплера-Физо, не прибегая к космическим скоростям //Изв. АН. 1900. Т.13. №5. С.461.

5. Gölizyn B., Wilip. J. Experimentelle Prüfung des Dopplersehen Prinzip für Lichtstrahlen //Astrophys. J. 1907. V.26. P.49.

6. Михельсон В.А. К вопросу о правильном применении принципа Доплера //ЖРФХО. 4, физ. 1899. Т.31. С.119.

7. Perot A. Verification experimentale du principe de Vladimir Michelson et du principe de Doppler Fizeau. C.R. 1924. V.178. F.4. P.380.

8. Эйнштейн А. Собрание научных трудов, Т.1. М.: Наука, 1965.

9. Ives H., Stilwell G. An experimental study of the rate of a moving atomic clock //JOSA. 1941. V.31. P.369.

10. Франк И.М. Эффект Доплера в преломляющей среде //Изв. АН СССР. 1942. Т.6. №1. С.31.

11. Франкфурт У.И., Френк А.М. К истории эффекта Доплера. История физ.-мат. наук //Труды/ИИЕиТ. М., 1961. Т.43. С.21.

12. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.

13. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. 2-е изд. М.: Наука, 1981.

14. Сухоруков В.И., Сухоруков Г.И. Эффект Доплера при движении источника и приемника волн в произвольном направлении //Акуст. журнал. 1986. Т.32. Вып.1. С.134.

15. Красненко Н.П. Акустическое зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1986.

16. Горелик Г.С. О применении модуляционного метода в оптической интерферометрии //ДАН СССР. 1952. Т.83. №4. С.549; Берштейн И.Л. Об измерении весьма малых изменений разности хода двух световых колебаний // ДАН СССР. 1954. Т.94. №4. С.655.

17. Карташев А.И., Эшин И.Ш. Методы измерения малых изменений разности фаз в интерференционных устройствах

УФН, 1972, Т.106, Вып.4, С.687.

18. Захаров В.П., Евтихийев Н.Н., Снежко Ю.А., Тычинский В.П. Применение лазерной интерферометрии для изучения колебательных явлений //Акуст.журнал. 1976, Т.22, Вып.1, С.32.

19. Шмальгаузен В.И. Интерферометры для изучения малых колебаний //УФН, 1980, Т.132, Вып.4, С.679.

20. Островский Л.А., Степанов П.С. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах // Изв.вузов. Радиофизика, 1971, Т.14, №4, С.489.

21. Дубнищев Ю.П., Ринкевичюс Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982.

22. Ринкевичюс Б.С. Лазерная доплеровская анемометрия //Методы гидрофизических исследований: Сб.науч.тр./ ИПФ АН СССР, Горький, 1984, С.246.

23. Ринкевичюс Б.С., Толкачев А.В., Суторшин В.Н., Чебунин В.Г. Лазерный доплеровский анемометр для измерения сверхмалых скоростей //Измер.техника, 1986, №5, С.18.

24. Амбарцумян Е.Н., Клепиков К.Е., Кулыбин В.М. и др. Использование адаптивного лазерного доплеровского анемометра для диагностики стратифицированных потоков. //Конференция по вычислительной технике и научном приборостроении в гидродинамике судна, Т.2. Варна: БИГС, 1984, С.58-1.

25. Ахманов С.А., Берсенев В.И., Гордиенко В.И. и др. Доплеровский гетеродинный лидар для измерения скорости ветра: Препринт №27/ МГУ. М., 1985.

26. Каневский М.Б. Радиолокационные исследования. //Методы гидрофизических исследований: Сб.науч.тр./ ИПФ АН СССР, 1984, С.161.

27. Басс Ф.Г., Калмыков А.И., Шестопалов В.П. Радиолокационные исследования Мирового океана //Природа, 1986, №5, С.78.

28. Мессбауэр К. Эффект РК и его значение для точных измерений //Наука и человечество. М.: Наука, 1962, С.331.

УДК 551.46.07

О з м и д о в Р. В. Методы исследования тонкой структуры гидрофизических полей и мелкомасштабной турбулентности в океане //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.9.

Кратко излагаются теоретические представления, лежащие в основе существующих методов изучения тонкой структуры гидрофизических полей и мелкомасштабной турбулентности в океане, и требования, предъявляемые к аппаратуре, используемой в этих исследованиях. Описаны методики гидрофизических измерений на полигоне и некоторые типы действующих морских турбулиметров.

Список лит. 2 назв.

УДК 534.2+551.46

О с т р о в с к и й Л. А., С т е п а н я н ц Ю. А. Уединенные внутренние волны в океане: теория и натурные наблюдения //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.18.

Изложены краткие сведения о теоретических моделях, описывающих распространение нелинейных внутренних волн в океане, приведены точные решения соответствующих уравнений в виде стационарных уединенных волн (солитонов). Проанализированы данные экспериментов по наблюдению уединенных волн в мелководных морях и глубоководных районах океана, полученные различными исследователями за последние 20 лет. Выполнено сопоставление параметров наблюдавшихся уединенных образований с параметрами солитонов. Более подробно обсуждаются работы, в которых имеются полные гидрологические данные, позволяющие построить адекватную теоретическую модель. Отмечено, что в этих случаях свойства экспериментально зарегистрированных уединенных волн хорошо согласуются со свойствами солитонов.

Ил. 8, список лит. 52 назв.

УДК 551.465

Б е ж а н о в К. А., М о ж а е в В. В., М о р о з о в Е. Н., О н у ф р и е в А. Т., П е т р о в и ч А. Ю., С к о р о в а р о в В. Е., Т е р - К р и к о р о в А. М., У л ь я н о в С. А., Ш е р о н о в А. А. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком стратифицированной жидкости. Теория и лабораторный эксперимент //Методы гидрофизических исслед-

дований, Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.48.

Рассматривается пространственная задача обтекания неровности дна потоком стратифицированной жидкости конечной глубины. Исследование ближнего и дальнего поля проводилось для неровности дна, имеющего форму полусферы. Получено, что характерным размером для кольцевых возмущений и для ширины зоны волновых возмущений является глубина канала, а характерным продольным размером для волновых возмущений является длина волны.

Приводятся результаты лабораторного исследования поля возмущений плотности стратифицированной среды. Для регистрации возмущений применялся метод голографической интерферометрии и теневой метод. Теоретические результаты правильно описывают экспериментально наблюдаемое поле возмущений плотности стратифицированной среды, но амплитуды количественно различаются.

Ил. 10, список лит. 20 назв.

УДК 532.59

Ч а ш е ч к и н Ю. Д., Н е к л ю д о в В. И., С ы с о е в а Е. Я. Внутренние волны, вихри и регулярные структуры в стратифицированных средах. Лабораторное моделирование //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 66.

В статье описаны методики и приведены результаты лабораторных гидрофизических экспериментов по моделированию процессов генерации монохроматических волн и срыва вихрей с движущейся сферы в стратифицированной жидкости. Совместное использование контактных датчиков и интерференционно-теневого прибора позволило измерять амплитуду возмущений, а также визуализировать структуры, возникающие в жидкости.

Ил. 5, список лит. 14 назв.

УДК 532.5

В л а д и м и р о в В. А. Аналогия эффектов плотностной стратификации и вращения и ее использование в теории устойчивости //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 76.

Излагается пример класса движений, для которых аналогия эффектов стратификации и вращения переходит в математическую эквивалентность исходных уравнений. В качестве приложения рассматривается вариационный принцип для функционала энергии идеальной несжимаемой жидкости, который

строится для трехмерных вихревых течений, а затем переносится на плоские движения стратифицированной жидкости. Одним из следствий принципа являются интегралы линеаризованных уравнений движения, являющиеся квадратичными формами возмущений. Обсуждается значение результатов и дается обзор других случаев аналогии и ее приложений.

Список лит. 25 назв.

УДК 551.466

Б о р о в и к с в В. А., Л е в ч е н к о Е. С. Распространение внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной жидкости со средними сдвиговыми течениями //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 91.

Рассматривается вопрос о возбуждении внутренних волн движущимися и неподвижными источниками в стратифицированных сдвиговых потоках. Найдены асимптотические разложения волновых решений вблизи фронтов, рассчитано искажение картины фронтов в поле сдвиговых течений. В отличие от случая неподвижной жидкости поле δ -источника (функция Грина) имеет не только передний, но и задний фронт, причем форма последнего найдена аналитически.

Ил. 6, список лит. 16 назв.

УДК 532.5

Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Моделирование когерентных структур в турбулентности (вычислительный эксперимент) //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.111.

Обсуждаются основные принципы прямого численного моделирования турбулентных гидродинамических течений. Предлагается новый подход, основанный на поэтапном моделировании движений различных масштабов. Приводится ряд конкретных расчетов сдвиговых течений и слоев смешения.

Ил. 11, список лит. 11 назв.

УДК 517.9+532.5

Г у щ и н В. А., К о н ь ш и н В. Н. Особенности построения численных методов расчета течений стратифицированной жидкости //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.135.

Рассматриваются основные принципы, которым должен удовлетворять численный метод расчета течений стратифици-

рованной жидкости. Приведенный вариант метода расщепления по физическим факторам основан на использовании монотонной конечно-разностной схемы второго порядка аппроксимации, имеющей минимальную схемную вязкость и работоспособной в широком диапазоне чисел Рейнольдса. С целью повышения эффективности метода в целом для решения уравнения эллиптического типа применяется экономичный итерационный процесс. В качестве примера приведены результаты решения задач о генерации внутренних волн и об их взаимодействии с пикноклином.

Ил. 6, список лит. 10 назв.

УДК 532.529.2

Т о л с т ы х А. И. О численных методах исследования гидрофизических полей //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.148.

Рассмотрены некоторые новые подходы к построению алгоритмов для решения исходных уравнений гидродинамики, в том числе использование "параболизованных" уравнений. Развит метод численного решения кинетического уравнения для спектра поверхностного волнения. Приведены примеры численных расчетов на основе указанных методов.

Ил. 6, список лит. 12 назв.

УДК 532.517.4.

Т е о д о р о в и ч Э. В. Методы теории поля в статистической гидродинамике //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.163.

Методы современной квантовой теории поля, основанные на понятии характеристического функционала и его представлении в виде континуального интеграла, используются для формулировки теории турбулентности. Дано изложение способа построения теории возмущений и фейнмановской диаграммной техники. Исходя из уравнения в вариационных производных для пространственно-временного характеристического функционала, получены уравнения Швингера и Дайсона для функции парной корреляции и функции отклика. Кратко обсуждаются возможности применения теории возмущений для решения системы уравнений Дайсона.

Табл. 1, список лит. 23 назв.

УДК 532.5

Д о л и н а И. С., П е л и н о в с к и й Е. Н. Длинноволновое приближение в задачах рассеяния морских волн препятствиями //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С.184.

В длинноволновом приближении рассмотрено рассеяние поверхностной гравитационной волны подводными препятствиями различной формы: сферой, горизонтальным и вертикальным цилиндром конечной длины. Результаты сопоставлены с известными ранее результатами численных расчетов. Показано, что для погруженных препятствий длинноволновое приближение при расчете характеристик рассеянного поля эффективно при любом соотношении между длиной волны и размерами препятствия.

Ил. 5, список лит. 10 назв.

УДК 532.517.4

Ж е л е з ' н я к М. И., М а д е р и ч В. С. Аналитические и численные решения уравнений турбулентного переноса //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР, Горький, 1987, С.195.

Дан обзор теоретических исследований эволюции турбулентности в рамках моментной модели второго порядка, замкнутой в соответствии с полуэмпирическими аппроксимациями неизвестных слагаемых. Приведены решения задач динамики некоторых конкретных турбулентных течений. Найдены автомодельные решения, показывающие эволюцию энергии турбулентности, скорости диссипации турбулентной энергии, а также размера турбулизованной области. Проведено численное решение начальной задачи, показывающее установление найденных автомодельных режимов.

Ил. 7, табл. 1, список лит. 43 назв.

УДК 551.465

К о р о г а е в Г. К. Проблемы и возможности спутниковой гидрофизики //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 222.

В статье обсуждается роль и место наблюдений океана с ИСЗ в развитии океанологических исследований. Дается классификация принципов наблюдений океана дистанционными методами. Выделяются направления, связанные с количественными измерениями характеристик океана с ИСЗ и получением новых качественных сведений об океанической динамике.

Анализируются возможности количественных измерений с ИСЗ для наблюдений крупномасштабной структуры и изменчи-

восты полей океана. Обсуждаются особенности интерполяции получаемых с ИСЗ изображений поверхности океана.

Ил. 6, табл. 1, список лит. 23 назв.

УДК 551.465.4

Ф е д о р о в К. Н. Некоторые формы упорядоченных движений в приповерхностном слое океана (по спутниковым данным) и их воспроизведение в лаборатории //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 241.

Приведены многочисленные спутниковые данные, свидетельствующие о наличии упорядоченных элементов нестационарных движений вод в океане: вихревых диполей, систем поперечных струй в прибрежных апвеллингах и др. Подробно описана структура и динамика грибовидных течений в океане. Изложены результаты лабораторного моделирования вихревых диполей во вращающейся жидкости.

Ил. 6, список лит. 22 назв.

УДК 551.466.38.

Е р м а к о в С. А. Пленочные слики на морской поверхности //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 259.

Дан обзор результатов наблюдений сликов на морской поверхности, связанных с поверхностно-активными пленками. Анализируются механизмы трансформации спектра коротких ветровых волн в сликах, обсуждается возможность использования особенностей изменчивости спектра для дистанционного изучения пленочных аномалий.

Ил. 6, список лит. 23 назв.

УДК 551.46.07

Е с и п о в И. Б., Н а у г о л ь н ы х К. А., Н о с о в В. Н., П а ш и н С. Ю. Лазерная регистрация статистических характеристик взволнованной поверхности //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 278.

Взволнованная поверхность воды в поле лазерного излучения представляется набором зеркальных точек, статистические характеристики которых определяются характеристиками волнения. Приводятся результаты экспериментов по регистрации статистических распределений кривизны морской поверхности и пространственных периодов зеркальных точек в зависимости от гидрофизических условий.

Исследуется характер модуляции пространственного и частотного спектров оптического излучения, рассеянного на колеблющейся по гармоническому закону взволнованной поверхности.

Ил. 9, список лит. 16 назв.

УДК 534.29:537.874.6:551.466

Дьяков Ю. П., Ляпин К. К., Поздняков Н. И., Соколов В. И. Некоторые особенности взаимодействия зондирующих полей при совместном облучении взволнованной водной поверхности акустическими и электромагнитными волнами // Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 294.

В импедансном приближении рассмотрена дифракция плоской электромагнитной волны на взволнованной водной поверхности, возмущенной плоской акустической волной. Показано, что при определенном соотношении между волновыми векторами падающих волн и достаточно гладком волнении верха комбинационная компонента электромагнитного поля переизлучается направленно и сохраняет свою когерентность. Эффект подтверждается экспериментально.

Ил. 4, список лит. 9 назв.

УДК 517:518.948+530.145

Бухштабер В. М., Маслов В. К. Методы решения трехмерных обратных задач дистанционного зондирования океана // Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР. Горький, 1987. С. 305.

Излагается математическая модель времяпролетной томографии океана. Описаны алгоритмы реконструкции флуктуации поля скорости звука на основе факторизации трехмерной обратной задачи в семейство двумерных задач. Развита методика оценки разрешающей способности томографических конфигураций и предложены соответствующие алгоритмы планирования эксперимента. Результаты иллюстрированы примерами численного анализа томографических конфигураций.

Ил. 6, список лит. 13 назв.

УДК 681.3

Гинзбург А. Н., Постоев Ю. К. Проблемы и методология автоматизации экспериментальных исследований в гидрофизике // Методы гидрофизических иссле-

дований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР, Горький, 1987. С.321

Рассматриваются технико-экономические аспекты создания и применения АСНИ в гидрофизических исследованиях. Обсуждается роль ЭВМ на разных стадиях автоматизации экспериментальных исследований, а также их типы, ресурсы и эффективность применения.

Ил. 4, табл. 3, список лит. 6 назв.

УДК 551.46.07

Р и н к е в и ч ю с Б. С. Эффект Доплера в гидрофизических исследованиях //Методы гидрофизических исследований. Волны и вихри /ИПФ АН СССР, Горький, 1987. С.349

Приведены основные соотношения эффекта Доплера для различных случаев движения источника и приемника излучения. Рассмотрены основные принципы измерений гидрофизических параметров по эффекту Доплера в оптическом диапазоне. Обсуждаются некоторые конкретные схемы лазерных интерферометров и измерителей скорости течения.

Ил. 6, список лит. 28 назв.

METHODS OF HYDROPHYSICAL RESEARCH,
WAVES AND VORTICES
(eds. A.V.Gaponov-Grekhov, S.A.Khristianovich)

A B S T R A C T S

METHODS OF STUDY OF A FINE STRUCTURE
OF HYDROPHYSICAL FIELDS AND
SMALL-SCALE TURBULENCE IN THE OCEAN

R.V.Ozmidov

Theoretical concepts are briefly stated which are the basis of the existing methods of the investigations of the fine structure of hydrophysical fields and small-scale turbulence in the ocean. The demands to the apparatus used in these studies are given. The procedure of hydrophysical measurements in polygon and some types of operating sea turbulence meters are described.

INTERNAL SOLITARY WAVES IN THE
OCEAN; THEORY AND OBSERVATIONS

L.A.Ostrovsky and Yu.A. Stepanyants

Theoretical models of nonlinear internal wave propagation including the model evolution equations and their soliton solutions are briefly discussed. Experimental data on solitary waves and finite-length wave trains in shallow seas and deep ocean regions obtained over the last two decades are analysed. Papers containing the hydrologic data allowing to construct adequate theoretical models and compare the theory with the experimental results are considered in more detail. The parameters of the observed waves are in good agreement with those of soliton groups.

THREE-DIMENSIONAL PROBLEM ON THE FLOW AROUND OF A BOTTOM INHOMOGENEITY BY THE STREAM OF A STRATIFIED FLUID

K.A.Bezhanov, V.V.Mozhaev, E.N.Morozov,
A.T.Anufriev, A.Yu.Petrovich, V.E.Skorovarov,
A.M.Ter-Krikorov, S.A.Uljanov, A.A.Sheronov

A three-dimensional problem on the flow around of a bottom inhomogeneity by the stream of a stratified fluid with a finite depth is considered. The study of a near and far fields is performed for a hemispherical bottom inhomogeneity. It is found that the channel depth is a characteristic dimension of ring perturbations and of the width of the zone of wave perturbations; and the wave length is a characteristic longitudinal dimension for wave perturbations. The results of the laboratory study of the field of the perturbation density of the stratified medium are given. The methods of holographic interferometry and the shadow method are applied to perturbation recording. Theoretical results describe adequately the field of the density perturbation of the stratified medium observed experimentally, but the amplitudes differ quantitatively.

INTERNAL WAVES , VORTICES AND REGULAR STRUCTURES IN STRATIFIED MEDIA (LABORATORY MODELING)

Yu.D.Chashechkin, V.I.Neklyudov, E.Ya.Sysoeva

The methods and the results of the laboratory hydrophysical experiments on the modeling of the processes of emergence of monochromatic waves and generation of vortices by a moving sphere in a stratified fluid are given. A combined application of sondes and interference-shadow technique permits to measure the perturbation amplitude, as well as to visualize the structures arising in the fluid.

ANALOGY BETWEEN DENSITY STRATIFICATION AND ROTATION EFFECTS AND ITS APPLICATION TO THE STABILITY THEORY

V.A.Vladimirov

The present paper gives an example of a class of motions for which an analogy between stratification and rotation effects transforms to the mathematical equivalency of the initial equations. A variational principle for the functional of the energy of an ideal incompressible fluid used as an application is considered. This functional is constructed for three-dimensional vortex flows and then transferred to plane motions of a stratified fluid. The linearized motion equation integrals are obtained which are quadratic forms of perturbations. The results are discussed and other cases of the analogy and its applications are reviewed.

THE PROPAGATION OF INTERNAL GRAVITY WAVES IN A LAYER OF A STRATIFIED FLUID WITH MEAN SHEAR FLOWS

V.A.Borovikov, E.S. Levchenko

A problem on the excitation of internal waves by moving and stationary sources in stratified shear flows is considered. Asymptotic expansion of wave solutions near the fronts are found, the distortion of the pattern of the fronts in the field of shear flows is calculated. Unlike the case of the stationary fluid, the field of δ -source (Green's function) has not only the forward but also the back front and the form of the latter is found analytically.

MODELING OF COHERENT STRUCTURES IN TURBULENCE (COMPUTER EXPERIMENT)

O.M.Belotserkovsky

The basic principles of direct numerical modeling of turbulent hydrodynamical flows are discussed. A new approach based on a staged modeling of motions of various scales is proposed. A series of concrete calculations of shear flows and mixed layers are presented.

SPECIFIC ASPECTS OF NUMERICAL METHODS FOR COMPUTATION OF STRATIFIED FLOWS

V.A.Gushchin and V.N.Kon'shin

The basic principles of numerical methods for calculation of stratified fluid flows are considered. The described method of physical-factor splitting is based on a monotonic second-order finite-differential scheme with minimum viscosity applicable in a wide range of Reynolds numbers. An iteration process is used for solving an elliptic equation in order to raise the efficiency of the method. The results of problems on internal wave generation and their interaction with pycnocline are presented.

ON NUMERICAL METHODS OF INVESTIGATION OF HYDROPHYSICAL FIELDS

A.I.Tolstykh

Some new approaches to the construction of algorithms used for the solution of basic hydrophysical equations including the application of "parabolic" equations are considered. The method of the numerical solution of the kinatic equation for the spectrum of surface waves is developed. The examples of numerical calculations on the basis of the given methods are given.

FIELD THEORY METHODS IN STATISTICAL HYDRODYNAMICS

E.V.Teodorovich

Modern field theory methods based on a characteristic functional and its representation in the form of a functional integral are used for formulation of the theory of turbulence. The way for construction of perturbation expansion and Feynmann graph technique is presented. The systems of Schwinger and Dyson equations are obtained from the functional differential equation for the pair correlation function and the response function. Possible application of the perturbation approach to solution of Dyson equations is briefly discussed.

LONG-WAVE APPROXIMATION IN PROBLEMS ON SEA WAVE SCATTERING BY OBSTACLES

I.S.Dolina and E.N.Pelinovsky

Surface gravity wave scattering by underwater obstacles in forms of a sphere or horizontal and vertical finite-length cylinders is considered in the long-wave approximation. The results are compared with earlier numerical calculations. It is shown that for submerged obstacles the long-wave approximation is efficient to compute the scattered field characteristics for any ratio between wavelength and obstacle dimensions.

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS OF THE TURBULENT TRANSPORT EQUATION

M.I.Zheleznyak, V.S.Maderich

Theoretical investigations of the turbulence evolution are reviewed in the frames of a moment model of the second order closed in accordance with semiempirical approximations of unknown terms. The solutions of the problems on dynamics of some

concrete turbulent flows are given. Self-similar solutions are found which show the evolution of the turbulent energy, the rate of its dissipation and the size of the turbulent region. A numerical solution of the initial problem which shows the onset of the found self-similar regimes is performed.

PROBLEMS AND POTENTIALITIES OF SATELLITE HYDROPHYSICS

G.K.Korotaev

The role and place of the ocean observation by artificial satellites in the development of the ocean study is discussed. The principles of remote ocean observation are classified. The methods based on quantitative measurements of the ocean characteristics by artificial satellites and the extraction of new qualitative information on the ocean dynamics are singled out. The possibilities of quantitative measurements by artificial satellites for the observation of a large-scale structure and the variability of the ocean fields are analyzed. The peculiarities of interpolation of the ocean surface images obtained by artificial satellites are discussed.

SOME TYPES OF REGULAR MOTIONS IN THE OCEAN

K.N.Fedorov

Numerous data obtained by a satellite are presented. They indicate the presence of regular elements of nonstationary motions of waters in the ocean: vortex dipoles, systems of transverse jets in coastal anvellings, etc. The structure and dynamics of mushroom-shaped flows in the ocean are thoroughly described. The results of the laboratory modeling of vortex dipoles in the rotating fluid are given.

FILM SLICKS ON SEA SURFACE

S.A.Ermakov

Observations of slicks produced on the sea surface by surface-active films are reviewed. Transformation mechanisms for short wind waves in slicks are analysed. The use of the spectrum variability for remote sensing of film anomalies is discussed.

LASER RECORDING THE STATISTICAL CHARACTERISTICS OF WAVY SURFACE

I.B.Esipov, K.A.Naugol'nykh, V.N.Nosov
and S.Yu.Pashin

Wavy sea surface in a laser radiation field can be represented as a number of mirror points with statistical characteristics defined by characteristics of waves. The experimental results of recording both the statistical distributions of the sea surface curvature and the spatial periods of the mirror points are presented as functions of hydro-physical conditions.

The modulation of the space and frequency spectra of optical radiation scattered by harmonically oscillating wavy surface are considered.

SOME PECULIARITIES OF THE PROBING FIELD INTERACTION AT SIMULTANEOUS IRRADIATION OF ROUGH SEA SURFACE BY ACOUSTIC AND ELECTROMAGNETIC WAVES

Yu.P.Djakov, K.K.Lyapin, N.I.Pozdnyakov and
V.I.Sokolov

The paper deals with diffraction of a plane electromagnetic wave on rough sea surface perturbed by a plane wave in an impedance approximation. It is shown that for certain correlation between wave vectors of incident waves and flat ripples the upper combination component of the electro-

magnetic field is reradiated directionally and keeps its coherence. The effect is proved experimentally.

SOLUTION METHODS FOR THREE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEMS OF REMOTE SENSING OF THE OCEAN

V.M.Bukhshtaber, V.K.Maslov

A mathematical model of travel-time ocean tomography is considered. The algorithms of reconstruction of fluctuations of the sound velocity field based on factoring of a three-dimensional inverse problem into the family of two-dimensional problems are described. The methods of estimating the tomographic configuration resolutions are developed and corresponding algorithms for planning the experiment are proposed. The results are illustrated by the examples of numerical analysis of tomographic configurations.

PROBLEMS AND METHODS OF AUTOMATIC EXPERIMENTAL RESEARCH IN HYDROPHYSICS

A.N.Ginzburg and Yu.K.Postoenko

Technical and economical aspects of creation and application of automatic research systems (ARS) in hydrophysics are considered. The role of computer at different stages of automatic experimental research, types of computers, their resources and efficiency of application are discussed.

DOPPLER EFFECT IN HYDROPHYSICAL STUDIES

B.S.Rinkevichus

The main relations of Doppler effect for various cases of a source and receiver movements are given. The basic principles of measuring hydrophysical parameters using Doppler effect in the optical range are considered. Some concrete schemes of laser interferometers and anemometers are discussed.