



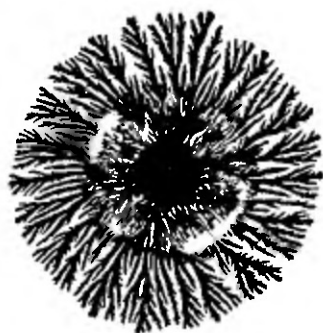
М.И.Рабинович
А.Б.Езерский

ДИНАМИЧЕСКАЯ

ТЕОРИЯ



ФОРМООБРАЗОВАНИЯ



М.И.Рабинович
А.Б.Езерский

ДИНАМИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
ФОРМООБРАЗОВАНИЯ



Москва
«Янус-К»
1998



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
согласно проекту № 97-02-30044

ББК В63
Р 38
УДК 523.03

М.И.Рабинович, А.Б.Езерский. Динамическая теория формообразования.—М.: «Янус-К», 1998.—192 с., илл.

ISBN 5-8037-0005-3

Каким образом на однородной вначале поверхности горизонтального жидкого слоя, находящегося в осциллирующем гравитационном поле, рождаются кристаллические и квазикристаллические пространственные структуры? Почему в двумерном химическом реакторе, где происходит автокаталитическая реакция, наиболее типичные концентрационные образования—это спирали? Что такое самоорганизация дефектов? На эти и другие вопросы, связанные с рождением различных пространственных форм, авторы дают ответ в настоящей книге. Изложение опирается на наглядные эксперименты с гидродинамическими, химическими и биологическими системами.

Книга рассчитана на широкую научную аудиторию и будет полезна студентам и преподавателям вузов.

1605040000-01
Р—22Н(03)–98 Без объявл.

© М.И.Рабинович, А.Б.Езерский, 1998

ISBN 5-8037-0005-3

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 5 |
| Глава 1. Совершенные формы и пространственный беспорядок в эксперименте. Идеи динамического описания | 6 |
| Глава 2. Линейная стадия рождения упорядоченных и неупорядоченных паттернов. Механизмы неустойчивостей | 23 |
| Глава 3. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ | 33 |
| §1. Уравнение Свифта–Хоенберга | 35 |
| §2. Уравнение Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля | 41 |
| §3. Связанные уравнения Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля | 44 |
| §4. Фазовые уравнения | 46 |
| Глава 4. Уравнение Гинзбурга–Ландау | 49 |
| §1. Диссипативный предел уравнения Гинзбурга–Ландау . | 50 |
| §2. Комплексное уравнение ГЛ и возбуждения нервной мембраны | 52 |
| §3. Уравнение Гинзбурга–Ландау в нелинейной оптике . . | 54 |
| §4. Уравнение Курамото–Сивашинского | 56 |
| §5. Галерея феноменов | 57 |
| Глава 5. Динамическая теория «кристаллов» | 64 |
| Глава 6. Квазикристаллы и беспорядок | 74 |
| §1. Октагоны, декагоны и додекагоны | 77 |
| §2. «Турбулентный» кристалл | 81 |

| | |
|--|------------|
| Глава 7. Рождение и нелинейная жизнь спиралей | 87 |
| §1. Спиральные формы | 87 |
| §2. Неравновесные среды с реакцией и диффузией | 87 |
| §3. Спиральные волны синхронизации | 92 |
| §4. Параметрически возбуждаемые спирали | 100 |
| §5. Синхронизация спирального беспорядка в осциллирующих средах | 104 |
| Глава 8. Локальное нарушение порядка | 109 |
| §1. Простая модель доменной стенки | 109 |
| §2. Топологические дефекты | 114 |
| §3. Рождение пенто-гепто-дефектов | 117 |
| §4. Дислокации и доменные стенки в ряби Фарадея | 125 |
| Глава 9. Локализованные образования и их ансамбли | 128 |
| §1. Среда с жестким возбуждением | 128 |
| §2. Пространственный беспорядок структур | 134 |
| §3. Взаимодействие частиц | 136 |
| Глава 10. Диагностика детерминированного пространственного беспорядка | 142 |
| §1. Характеристики наблюдаемых | 143 |
| §2. Алгоритм Грассбергера-Прокачиа | 148 |
| §3. Количественное описание процесса разупорядочивания | 149 |
| §4. Обработка двумерных паттернов | 153 |
| Глава 11. Формообразование в колониях микроорганизмов | 160 |
| §1. Хемотаксис | 160 |
| §2. <i>Dictyostelium discoideum</i> | 161 |
| §3. <i>Esherichia coli</i> | 167 |
| §4. <i>Bacillus subtilis</i> | 174 |
| Эпилог: Живая материя и динамические формы | 180 |
| Список литературы | 186 |

Предисловие

Процесс создания этой книги заключался не столько «в некоем взаимодействии и той таинственной связи, которые возникают между головой, рукой, пером и бумагой», как говорил Бунин, сколько в общении и взаимодействии между имеющими определенный опыт и представления авторами и любознательными новичками. Именно стремление за разумное время и при разумном объеме внятно и последовательно изложить слушателям и читателям основные явления, идеи и методы науки о формообразовании с позиций нелинейной динамики, определили логику изложения и структуру книги. Используемый нами принцип: «одна глава—одна тема» при тщательном отборе примеров, как мы несколько самонадеянно считаем, позволили сделать книгу доступной одновременно и студентам, и аспирантам, и профессиональным исследователям, лишь впервые обратившим внимание на данную чрезвычайно увлекательную область науки. Как известно, эlegantность простоты вселяет соблазн упростить реальные явления, подгоняя их под привычные и универсальные модели. Тем не менее, поскольку во всех случаях изложение опирается на конкретные эксперименты, мы надеемся, что, за некоторыми исключениями, нам этого соблазна удалось избежать.

В основу книги положены лекции, прочитанные одним из авторов студентам Нижегородского, Чикагского и Калифорнийского (Сан-Диего) университетов. Материалы, вошедшие в книгу, неоднократно обсуждались с Г. Абарбанелем, В. Афраймовичем, А.В. Гапоновым-Греховым, Л. Кадановым, Дж. Лейбовицем, А. Либшабером, Я.Г. Синаем и Л.Ш. Цимрингом, который, кроме того, написал по просьбе авторов главу 11. Всем им авторы выражают глубокую признательность.

Авторы также благодарны Российскому Фонду Фундаментальных исследований, финансовая поддержка которого (грант №97-02-30044) позволила издать эту книгу.

М. Рабинович
А. Езерский
сентябрь 1997 г.
Н. Новгород

Глава 1

Совершенные формы и пространственный беспорядок в эксперименте.

Идеи динамического описания

Попробуйте организовать порядок,
Беспорядок получится сам.

Из расхожих советов

Не только в художественной, но и в научной литературе принято удивляться разнообразию форм окружающего нас мира. Но может быть еще более достойно удивления то, что эти разнообразные формы в некотором роде универсальны! Шестигранники на шкуре жирафа и шестигранные структуры, возникающие при конвекции в слое жидкости; уединенные формы в колониях бактерий и солитоноподобные структуры в нелинейных оптических системах; спиральный хаос при фибрилляции сердечной мышцы и химическая спиральная турбулентность. И многое, многое другое.

Какова природа этой универсальности? Почему в столь разных (химических, физических, биологических и т.д.) системах возникают аналогичные пространственные формы? Ответить на эти вопросы нам поможет опыт классической теории колебаний. Достаточно вспомнить, что тип колебаний—периодические колебания, квазипериодические, хаотические; гармонические или релаксационные—определяется динамическими свойствами системы (числом степеней свободы, видом нелинейности, наличием быстрых и медленных движений и др.), а не тем, является ли система акустической, оптической или химической. Подобная же ситуация и с рождением и установлением пространственных форм.

Процесс формирования пространственных структур (совершенных или неупорядоченных) естественно рассматривать как «жизнь»

некоторой динамической системы, т.е. движение вдоль одной из ее траекторий, стремящейся при $t \rightarrow \infty$ к аттрактору. Свойства этого аттрактора и определяют особенности установившихся пространственных форм. Поскольку речь идет о бесконечномерных динамических системах, даже статическим аттракторам (состояние равновесия по времени) могут соответствовать исключительно сложные и даже хаотические формы. Поясним эту мысль подробнее, обращаясь, прежде всего, к экспериментам.

Когда мы говорим беспорядок, то даже у физиков возникают совершенно разные ассоциации. Те кто занимается гидро- и газодинамикой вспоминают о беспорядочном положении молекул газа или жидкости в каждый момент времени, специалисты по физике твердого тела могут думать о беспорядке магнитных доменов, ориентации спинов и т.д. Вообще беспорядок—это сложное, нерегулярное в пространстве распределение каких-либо элементов или полей. Традиционные характеристики беспорядка связаны, в первую очередь, с определением длины корреляций. Например, если речь идет о «дальнем порядке», то имеется в виду ситуация, когда между значением некоторой физической величины (параметра порядка) в произвольной точке пространства и ее значением в бесконечно удаленной точке существует корреляция. Наиболее известен дальний порядок в кристаллических телах. В этом случае имеется корреляция плотности. Здесь мы будем говорить о кристаллическом порядке также и в нетрадиционных для этого областях физики, например, применительно к течениям жидкости. Параметром порядка при этом может служить, в частности, имеющаяся в пространстве амплитуда поля скорости или поля температуры. Наиболее знакомый пример, где возможен лишь ближний порядок—это жидкость. Здесь движение атомов приводит к флуктуациям плотности, которые разрушают дальний порядок.

Если заглянуть в очень привлекательную, с точки зрения авторов, книгу Дж. Займана «Модели беспорядка» [1], то уже из оглавления можно узнать, что существует множество разных видов беспорядка—беспорядок замещения, «ледовый» беспорядок, спектральный беспорядок, ячеистый беспорядок, дислокационный беспорядок и много еще разных беспорядков. Поскольку наша книга посвящена нелинейной динамике структур, здесь мы обсуждаем Динамический беспорядок.

Динамическая теория беспорядка призвана описать неупорядоченные пространственные распределения полей, будь то распределение электронной плотности в кристаллах или распределение плотности вещества в галактике, с помощью методов нелинейной динамики. Мы

пытаемся понять, возможно ли вообще существование пространственно неупорядоченных распределений физически осмысленных полей, которые имели бы динамическую природу и их можно было бы описывать с помощью динамических моделей, например дифференциальных уравнений в частных производных или несколько более своеобразных уравнений для динамических систем с несколькими «временами» (здесь роль «времен» играют пространственные координаты).

Уже простейшая пространственно-временная аналогия убеждает нас в том, что «конечномерный беспорядок», как мы его будем называть, т.е. нерегулярное пространственное распределение поля, описываемое динамической системой с конечным числом степеней свободы, должен существовать в природе (причем должен быть столь же типичен, как и конечномерный временной хаос). Примеров можно привести много, в частности стационарные хаотические волны, которые наблюдаются в разных ситуациях [2, 3]. Естественно, возникает желание перенести результаты теории динамического (временного) хаоса на пространственный динамический беспорядок. Если пространственная координата одна, и речь идет о статическом (или стационарном) режиме, то это в некотором смысле тривиально. Однако даже для одномерного беспорядка мы сталкиваемся с очень трудными вопросами. Главный из них: является ли такой конечномерный беспорядок эволюционным, т.е. развивается ли беспорядок (во времени) из порядка, оставаясь детерминированным. Когда же мы задумываемся о двумерном, тем более трехмерном, пространственном беспорядке динамической природы, возникают качественно новые проблемы.

Наглядным примером многократного возрастания трудностей в неоднородной геометрии может служить переход к хаосу (или беспорядку) через квазипериодичность. В рамках одномерных дифференциальных уравнений хорошо известен переход «соизмеримость—несоизмеримость (квазипериодичность)—хаос». Возможна ли подобная последовательность при изменении управляющего параметра для двух- или трехмерного поля? Какой должна быть динамическая система, в рамках которой такой беспорядок может быть описан? Четкого ответа на эти вопросы пока нет. Однако сам факт подобного перехода весьма вероятен. Тем более, что его первый этап—переход «кристалл—квазикристалл»—сейчас подробно обсуждается. Предельные случаи беспорядка—это совершенные структуры и абсолютный беспорядок, который ассоциируется, например, со спекл шумом (рис. 1.1 [4]). Такой пространственный беспорядок характеризуется сплошным пространственным Фурье-спектром со случайным

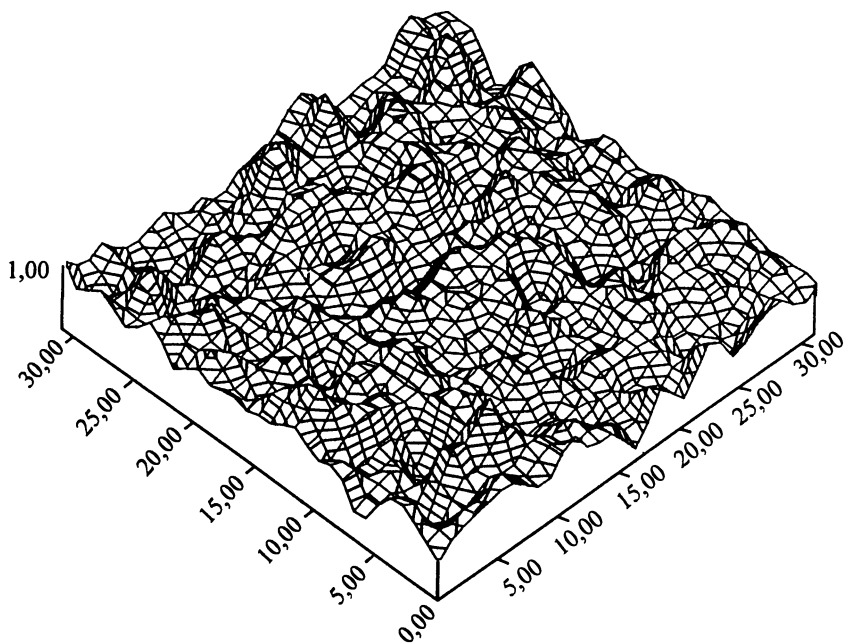


Рис. 1.1. Двумерное поле, представляющее спекл-шум [4]

(Гауссовским) распределением амплитуд гармонических мод, величин их волновых векторов и направлений.

Обратимся сейчас к двум экспериментальным результатам по исследованию паттернов на поверхности жидкости. Они представлены на фотографиях 1.2 и 1.3. На первой показана картина капиллярных волн на поверхности слоя жидкости, находящегося в осциллирующем гравитационном поле [5], на второй—шестигранная конвективная решетка в тонком слое небуссиновской жидкости [6]. Когда смотришь на такие паттерны, возникает множество вопросов: почему они устойчивы, как устанавливаются из произвольных начальных условий, как изменяется картина при изменении параметров эксперимента и, наконец, как подобные структуры описывать? Кажется, что проще других последний вопрос: как описывать уже имеющиеся структуры. Давайте с него и начнем построение динамической теории пространственных структур.

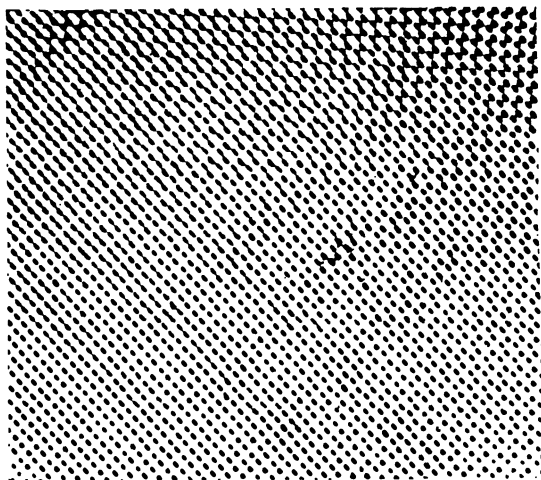


Рис. 1.2. Изображение капиллярных волн, параметрически возбуждаемых на поверхности силиконового масла [5]

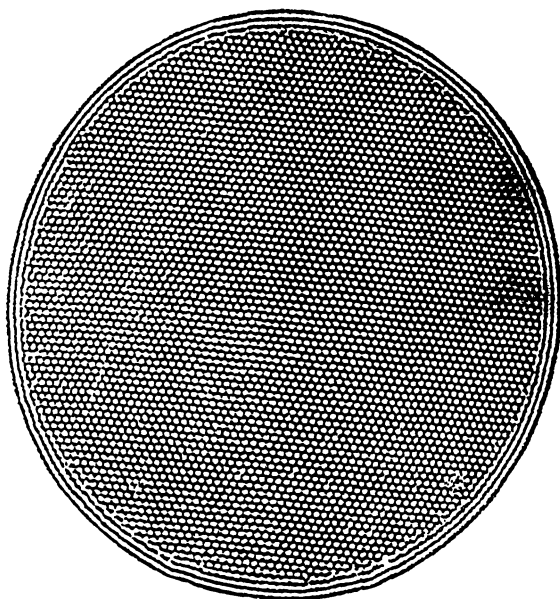


Рис. 1.3. Теневая картина конвекции Рэля—Бенара в углекислом газе при высоком давлении [6]

Что прежде всего бросается в глаза? Существование определенного пространственного масштаба. В случае квадратной регулярной решетки (рис. 1.2) это длина взаимоортогональных стоячих волн, параметрически возбуждаемых на поверхности слоя жидкости (мы еще не раз вернемся к этой задаче, в том числе и с точки зрения формального описания). Таким образом, первое, что приходит в голову, это—представить наблюдаемое поле в виде суперпозиции плоских волн с одинаковыми по модулю волновыми векторами:

$$u(\mathbf{r}, t_0) = \sum_n a_n e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{r}} + \text{к.с.}, \quad (1.1)$$

где a_n —числа, а все волновые вектора \mathbf{k}_n удовлетворяют условию $|\mathbf{k}_n| = k_0$. Тогда решетке с квадратными ячейками отвечают четыре моды с волновыми векторами, развернутыми под углом 90° (см. рис. 1.5а), решетке с шестигранными ячейками—моды, волновые вектора которых повернуты на угол 60° относительно друг друга (рис. 1.5б). Неупорядоченная картина капиллярной ряби, подобная той, что показана на рис. 1.4 [7], может быть образована также из плоских волн с одинаковыми по модулю \mathbf{k}_n , если их достаточно много и если их волновые вектора \mathbf{k}_n равномерно распределены по углу (см. рис. 1.5в).

На рис. 1.6 представлены результаты компьютерного моделирования, подтверждающие правильность подобного описания [7].

Откровенно говоря, результат о том, что случайную картину поля, подобную представленной на рис. 1.4, можно описать с помощью достаточно большого числа гармонических волн (мод) даже и с одинаковой длиной волны, не столь уж удивителен. Если амплитуды мод случайны, их фазы произвольны (не синхронизованы), ориентация волновых векторов также случайна (см. рис. 1.5в), то чего же еще ожидать? Заметим, что пространственные корреляции при гауссовом распределении амплитуд, действительно, спадают достаточно быстро в соответствии с формулой, найденной в [8]:

$$K(\delta) = \int u^{\text{rand}}(\mathbf{x}) u^{\text{rand}}(\mathbf{x} + \vec{\chi}) d^2x = \text{const} J_0(k_0 |\vec{\chi}|), \quad (1.2)$$

где J_0 —функция Бесселя нулевого порядка, k_0 —модуль волновых векторов, а $\vec{\chi}$ —аргумент корреляционной функции. Удивительно в данном эксперименте другое—почему амплитуды волн в установившемся режиме, т.е. при $t \rightarrow \infty$ оказываются распределены по Гауссу, и

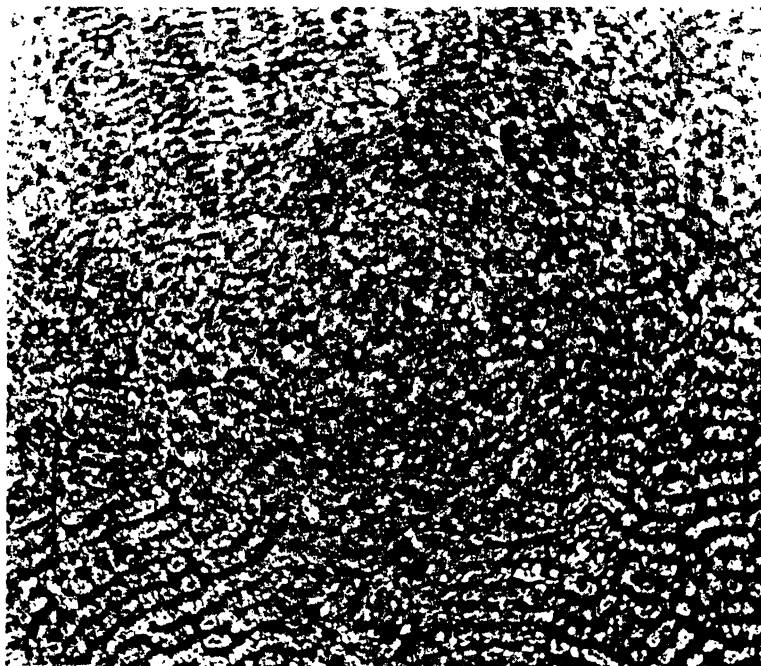


Рис. 1.4. Мгновенный снимок неупорядоченного поля капиллярных волн

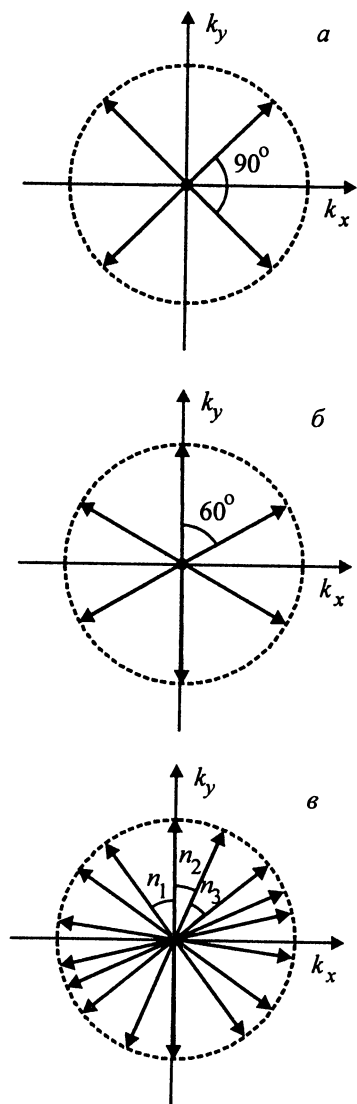


Рис. 1.5. Волновые вектора мод, образующих а) квадратную решетку; б) шестигранную решетку; в) неупорядоченное поле

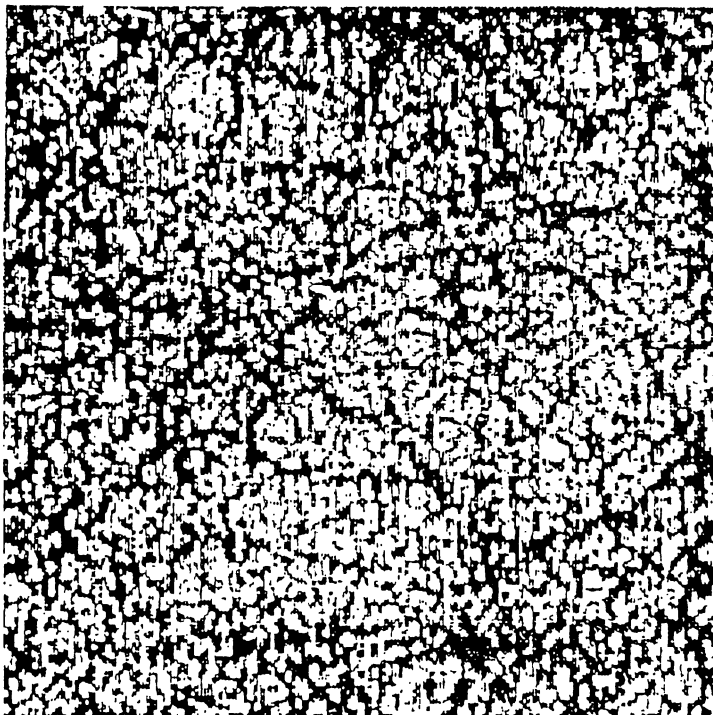


Рис. 1.6. Результат численного моделирования изображения поля капиллярной ряби, образованного суперпозицией мод, показанных на рис. 1.5б

почему фазы отдельных волн произвольны, а не синхронизируются по времени? Это уже вопросы к динамической теории.

Между чисто периодическим («кристаллическим») распределением поля в пространстве и предельно неупорядоченным могут существовать самые различные промежуточные паттерны или формы с различной степенью неупорядоченности (или упорядоченности). Одним из замечательных экспериментальных достижений последних лет является наблюдение квазикристаллического порядка в гидродинамических течениях. Речь идет о той же капиллярной ряби, параметрически возбуждаемой осциллирующим гравитационным полем (подробнее см. гл. 6). Эти «квазикристаллы» представлены на рис. 1.7 [9] и 1.8 [10].

Можно убедиться путем построения картины поля на компьютере, что эти неперiodические формы, для которых характерен дальний порядок, образованы соответственно двенадцатью (см. рис. 1.9а) или восемью (рис. 1.9б) плоскими волнами с одинаковыми по модулю волновыми векторами, углы между которыми соответственно 30° и 45° .

И опять тот факт, что «квазикристалл» можно построить всего из 8 (или 12) мод, не объясняет существования наблюдаемых паттернов. Действительно, почему устойчиво наблюдаются 8 (или 12) мод совместно? Отчего, вообще, зависит их число? Можно ли, меняя параметры (например, частоту осциллирующего гравитационного поля),

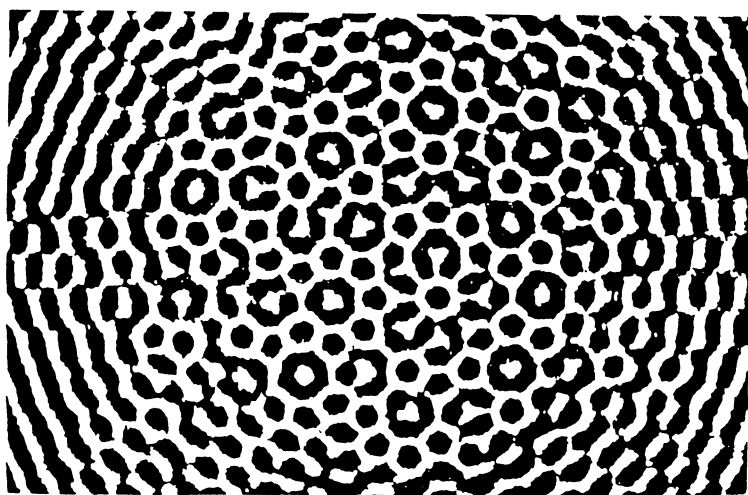


Рис. 1.7. Квазикристалл 8 порядка, возникающий при возбуждении капиллярных волн монохроматической накачкой

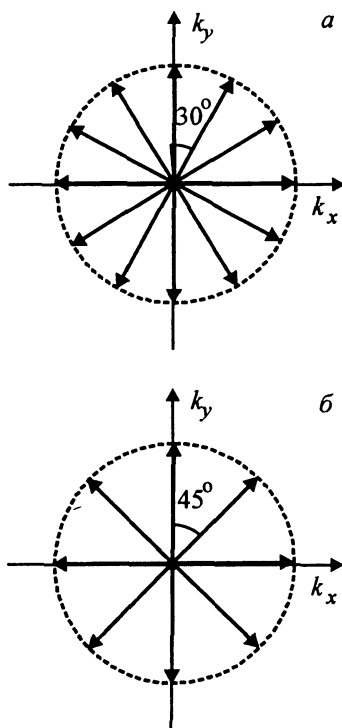


Рис. 1.9. Волновые вектора мод, образующих квазикристалл 12 порядка (а); 8 порядка (б)

например, ОДУ для амплитуд мод a_n , см. (1.1), которые предполагаются зависящими от времени). Многие результаты традиционной теории динамических систем здесь могут быть использованы напрямую, если вложить в них соответствующий физический смысл.

Другая сторона обсуждаемой теории связана с введением понятия пространственной динамической системы, где роль времени играет одна или несколько пространственных координат. Приведем простой пример. В релей-бенааровской конвекции можно устойчиво наблюдать упорядоченные формы, содержащие домены по-разному ориентированных роликов (см. рис. 1.11). Мы будем заниматься подобными задачами в главе 8, но уже сейчас, не вдаваясь в подробности, можно заметить, что области однородных роликов при $x \rightarrow +\infty$ и при

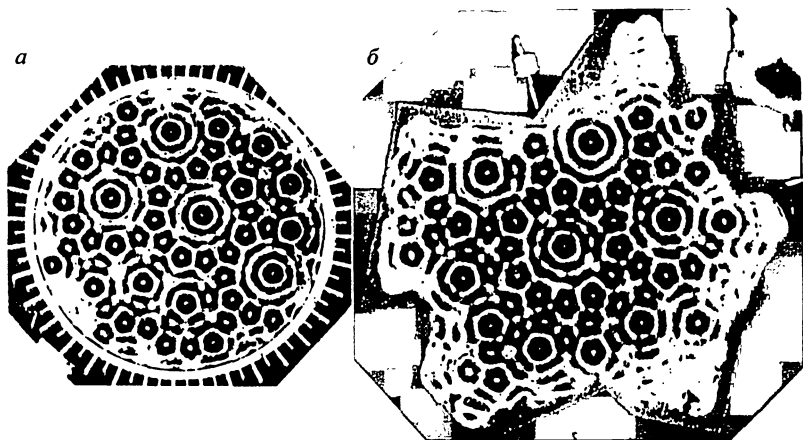


Рис. 1.8. Квазикристалл 12 порядка, возникающий при параметрическом возбуждении капиллярной ряби а) в круглой кювете; б) в кювете, боковые границы которой повторяют границы Франции

менять тип симметрии квазикристалла? Здесь вновь возникает потребность в динамической теории.

На рис. 1.10 показана эволюция неупорядоченного (перемешанного начального состояния при развитии конвекции Бенара–Марангони в слое жидкости, подогреваемого снизу. Как видно со временем картина поля становится более упорядоченной. Один из основных вопросов к динамической теории такой: какая структура установится при $t \rightarrow \infty$? Будет ли это регулярная шестигранная решетка или на ней сохранятся дефекты? Как эти дефекты будут вести себя во времени?

Так из чего же должна состоять динамическая теория беспорядка? Перечислим здесь лишь ее основные блоки. Анализ иерархии неустойчивостей и рождение различных паттернов в процессе эволюционного развития начального состояния. Исследование взаимных трансформаций структур при изменении контролирующих параметров (этот раздел можно назвать теорией пространственных бифуркаций). Много в этом направлении возможно сделать, используя традиционное модовое описание нелинейных полей, т.е. заменяя уравнения в частных производных (УЧП) на их конечномерные модели—обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Здесь динамические системы появляются совершенно естественным образом (это могут быть,

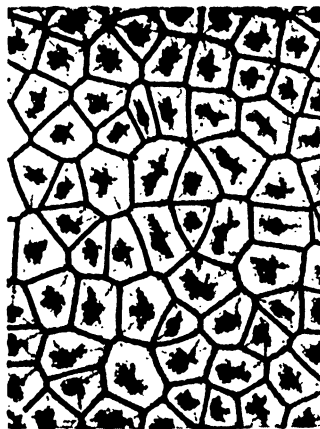


Рис. 1.10. Возникновение ячеек при конвекции Марангони-Бенара

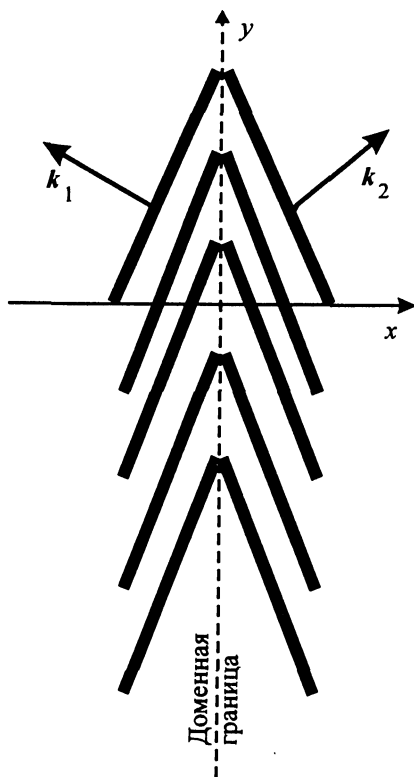


Рис. 1.11. Поле параметра порядка, отвечающее решениям уравнения (1.3)



Рис. 1.12. Теневая картина конвекции Рэлея–Бенара в круглой кювете

$x \rightarrow -\infty$ ассоциируются с различными состояниями равновесия некоторой пространственной динамической системы. А границе между доменами отвечает изолированная траектория, соединяющая эти состояния равновесия. Легко написать пространственную динамическую систему, описывающую амплитуду мод. Для случая когда оси роликов составляют одинаковый угол с границей имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_1}{dx^2} &= A_1 - [A_1^2 + \rho A_2^2] A_1 \\ \frac{d^2 A_2}{dx^2} &= A_2 - [A_2^2 + \rho A_1^2] A_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $A_1(x)$ и $A_2(x)$ амплитуды мод, формирующих наблюдаемый паттерн теперь уже не числа, как при алгебраическом описании, а функции координат (в данном случае координаты x). Изменению амплитуд при переходе через границу между доменами отвечают специальные траектории динамической системы (3), сепаратрисы, удовлетворяющие условию $A_1(+\infty) = 1, A_2(+\infty) = 0$ и $A_1(-\infty) = 0, A_2(-\infty) = 1$ (паттерн с доменной границей будет иметь вид, представленный на рис. 1.12). Когда оси роликов ориентированы не под одинаковым углом к границе доменов, то наблюдается паттерн, представленный на рис. 1.13 [13]. Кружочками отмечены дислокации, которые встраиваются в цепочку. Если имеем несколько разных мод, то

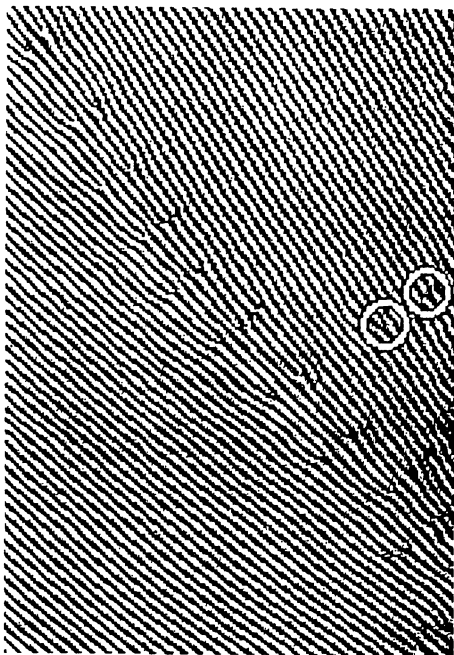


Рис. 1.13. Доменная стенка, представляющая из себя цепочку дислокаций



Рис. 1.14. Теневая картина конвекции Рэлея–Бенара при низких числах Прандтля. В двумерном поле контраста изображения присутствуют топологические особенности типа спиралей, дислокаций и дисклинаций

результатом их нелинейного взаимодействия в пространстве может быть нерегулярное, хаотическое вдоль x решение пространственной динамической системы. Это и есть простейший пример детерминированного беспорядка. В фазовом пространстве ему отвечает инвариантное хаотическое множество. Построение адекватной пространственной динамической системы позволяет описать и разного рода особенности в распределении полей (параметры порядка) такие, как показаны на рис. 1.14 [14, 12].

Возвращаясь к беспорядку, можно заметить, что в очень многих физических ситуациях наблюдаемый беспорядок—это именно беспорядок особенностей на фоне однородного распределения поля или на фоне регулярных паттернов. Именно поэтому в динамической теории формообразования особое место занимает раздел, посвященный динамике локализованных состояний и разного рода особенностей.

Естественно, что и временная динамика беспорядка может оказаться сложной или хаотической. В этом смысле динамическая теория беспорядка очень тесно связана и даже частично перекрывается с теорией пространственно-временного хаоса и теорией турбулентности. Если после этого краткого обсуждения читатель вновь просмотрит оглавление книги, ее логическая структура, как мы надеемся, не вызовет у него возражений.

Глава 2

Линейная стадия рождения упорядоченных и неупорядоченных паттернов. Механизмы неустойчивостей

Предсказание—очень трудная вещь,
но особенно трудно предсказывать будущее.

Нильс Бор

Каким образом начальное полностью симметричное «однородное» состояние среды или поля становится неоднородным? Как правило, в результате спонтанного нарушения симметрии—смены устойчивости стационарного состояния. Подобное нарушение симметрии мы наблюдали не раз, возможно, неосознанно. Попробуем сварить кофе не в высоком сужающемся кверху сосуде «джезве», а в широкой кастрюле. Что мы обнаружим? Слой кофе, поднимающийся со дна сосуда «способствующий экстракции кофе» разбивается на отдельные пузыри и превращает кофейную поверхность в замысловатую систему холмов и долин. Если дело не доводить до кипения и снять сосуд с плиты, то сползшие в долины частички кофе «запомнят» это неоднородное состояние, которое и отвечает спонтанному нарушению пространственной симметрии. Подобный переход осуществляется монотонно во времени и часто называется бифуркацией Тьюринга [15] в отличие от колебательной бифуркации Андронова–Хопфа. Тьюринг обнаружил такую смену устойчивости в химических реакциях с диффузией более сорока лет назад и впервые связал спонтанное рождение неоднородных структур с возможным механизмом морфогенеза в биологии.

Бифуркацию смены устойчивости удобно исследовать на примере уравнений, описывающих реакцию с диффузией

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \beta) + D \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{u} —вектор концентрации, а $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \beta)$ определяет кинетику реакции, β —контролирующий параметр и D —диффузионная матрица. Стандартный анализ линейной устойчивости однородного распределения концентраций $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ по отношению к пространственным возмущениям вида $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ ведет к комплексному дисперсионному соотношению, из которого определяется ляпуновский показатель $\lambda(\mathbf{k}, \beta)$ и частота $\omega(\mathbf{k}, \beta)$ как функции волнового вектора возмущения \mathbf{k} и величины контролирующего параметра. Из этого дисперсионного уравнения находится критическое волновое число \mathbf{k}_c , соответствующее наименьшему значению β_{cr} , при котором λ впервые становится положительным. Неустойчивость Тьюринга, отвечающая классу неустойчивостей с пространственным нарушением симметрии, характеризуется тем, что при реальных значениях λ , мнимая часть $\omega = \text{Im}\lambda = 0$, равна нулю. Это означает отсутствие колебаний во времени в момент смены устойчивости.

Благодаря свойствам симметрии уравнений (2.1), являющейся отражением свойств однородности и изохронности раствора, в котором осуществляется реакция, можно заметить, что инкремент неустойчивости $\sigma = \text{Re}\lambda$ должен зависеть лишь от абсолютной величины k_0 и не должен зависеть от направления вектора \mathbf{k} . Другими словами, на линейной стадии спонтанное нарушение симметрии приведет к возрастанию поля, которое в общем случае представляется в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^{2\pi} (A_\varphi e^{i\mathbf{k}_\varphi \mathbf{r}} + A_\varphi^* e^{-i\mathbf{k}_\varphi \mathbf{r}}) d\varphi, \quad (2.2)$$

$$|\mathbf{k}_\varphi| = k_0.$$

Какая пространственная структура реализуется при $t \rightarrow \infty$ —это, конечно, вопрос уже к нелинейной теории.

Приведем простой модельный пример, иллюстрирующий возникновение неоднородного распределения концентраций при отсутствии временных пульсаций. Это модель Брюсселятора (впервые подобные уравнения были исследованы группой Пригожина, работавшего в столице Бельгии [16])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha + u^2 v - (1 + \beta)u + D_u \nabla^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta u - u^2 v + D_v \nabla^2 v \quad (2.3)$$

Интересуясь лишь абсолютной величиной k_0 , рассмотрим неустойчивость однородного состояния $u_0 = \alpha$, $v_0 = \beta/\alpha$ по отношению к одномерным возмущениям $\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} \sim e^{\lambda t} e^{ikx}$. Тогда для λ будем иметь дисперсионное уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (2.4)$$

где

$$p = (\alpha^2 + 1 - \beta + D_u k^2 + D_v k^2)$$

и

$$q = [\alpha^2(1 + D_u k^2) + (1 - \beta)D_v k^2 + D_u D_v k^4].$$

Как видно, при $\beta < 1$ однородное состояние устойчиво, тогда как при $\beta > 1$ оно уже может стать неустойчивым либо за счет появления временных пульсаций—этому соответствует переход в правую полуплоскость λ двух комплексно-сопряженных корней, либо—за счет прохождения в правую полуплоскость одного корня по действительной оси. Первому случаю отвечает отрицательность коэффициента p , а второму—отрицательность коэффициента q . Это, как раз, и есть неустойчивость Тьюринга. Легко заметить, что спонтанное нарушение симметрии происходит при $\beta > 1$, если $D_u \ll D_v$ —разные коэффициенты диффузии как раз и определяют природу такой неустойчивости. Неустойчивость раньше всего приводит к рождению паттернов с характерным пространственным масштабом $\Lambda_c = 2\pi/k_c$, где

$$k_c^2 = \frac{\alpha}{(D_u D_v)^{1/2}}. \quad (2.5)$$

Происходит такая смена устойчивости, как только параметр β превышает критическое значение

$$\beta_{cr} = \left[1 + \alpha \left(\frac{D_u}{D_v} \right)^{1/2} \right]^2. \quad (2.6)$$

Именно то обстоятельство, что при сколь угодно малом превышении порога неустойчивости ($\beta \geq \beta_{cr}$) рождается сплошной спектр мод $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ с произвольной ориентацией вектора \mathbf{k} дает возможность наблюдать в стационарном режиме самые разнообразные паттерны.

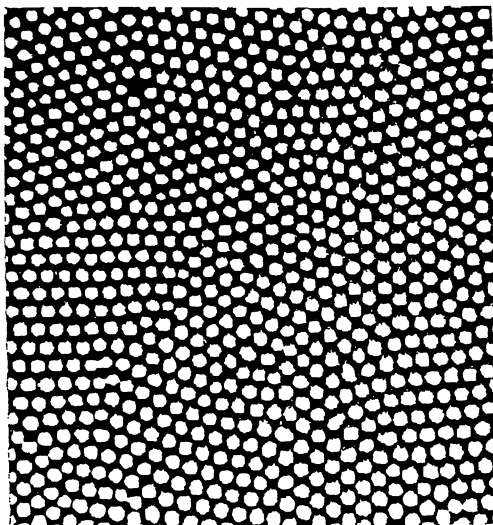


Рис. 2.1. Шестигранная частично упорядоченная структура, возникающая при химических реакциях [17]

Это могут быть кристаллы, квазикристаллы, скарлеты или частично упорядоченные паттерны, подобные тем, которые наблюдали в химических реакторах [17] см. рис. 2.1.

Физическая природа «резонансной» пространственной неустойчивости в безграничных неравновесных средах может быть различной. В диссипативных средах она, как правило, связана с конкуренцией сил, способствующих и препятствующих развитию неустойчивости. Например, в конвекции Релея—Бенара в подогреваемом снизу жидком слое толщины d механизм, приводящий к рождению паттернов с характерным масштабом $\sim d$ есть результат конкуренции вязких сил и термодиффузии с силами плавучести. Рис. 2.2 иллюстрирует этот факт (см. также [18]). Для узких конвективных ячеек преобладают горизонтальная термодиффузия и вязкое затухание, ассоциирующееся с вертикальным сдвигом скорости. Для широких ячеек преобладает вязкое затухание, связанное с горизонтальным сдвигом слоев и вертикальной термодиффузией (рис. 2.3). В результате кривая нейтральной устойчивости на плоскости $Ra - k$ имеет вид, как на рис. 2.4. Здесь $Ra = \alpha g \Delta T d^3 / \kappa \nu$ —число Рэлея, $\alpha = (1/\rho)(\partial \rho / \partial T)$ тепловой коэффициент расширения, g —ускорение свободного падения, ρ —плотность жидкости, ΔT —разность температур между верхней (холодной) и нижней (горячей) пластинами, ν и κ соответственно

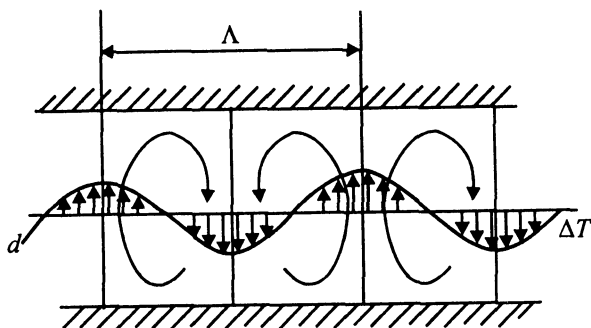


Рис. 2.2. Течения в конвективной моде, пространственный период которой меньше толщины слоя жидкости

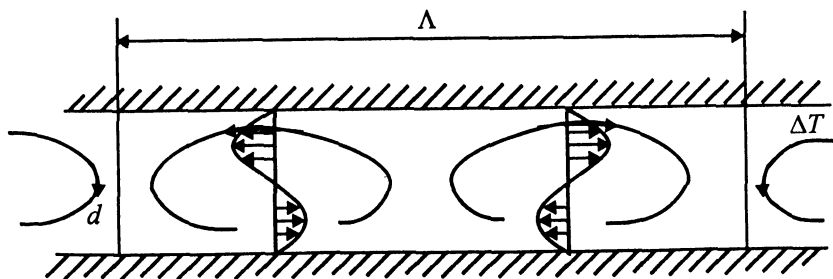


Рис. 2.3. Течения в конвективной моде с длиной волны превышающей толщину слоя жидкости

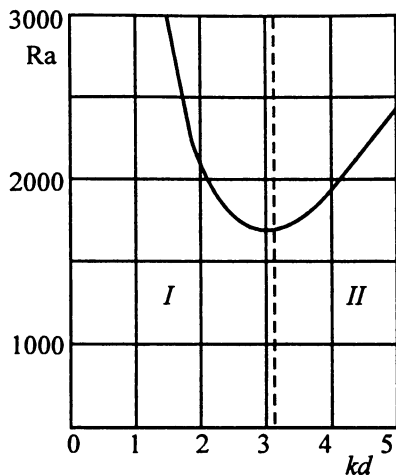


Рис. 2.4. Нейтральная кривая на плоскости (Ra, kd) . Области широких (I) и узких (II) конвективных ячеек

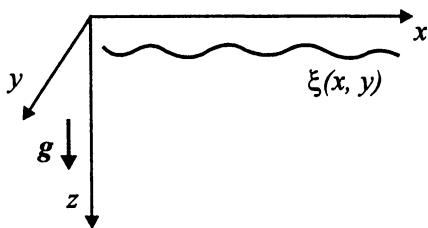


Рис. 2.5. Система координат в задаче о неустойчивости слоя жидкости, находящегося на потолке

кинематическая вязкость и коэффициент температуропроводности жидкости. При $Ra = Ra_{cr}$ рождаются структуры с характерным масштабом $\Lambda_c = 2\pi/k_0 \sim 2d$, для которых действие вязкости и диффузии минимально.

Подобная же конкуренция может быть замечена и в других случаях спонтанного нарушения симметрии, в частности, при развитии неустойчивости Релея–Тейлора в тонком слое тяжелой жидкости, находящейся под легкой (см. рис. 2.5). Поскольку этот пример не слишком известен и, в то же время, демонстрирует замечательное разнообразие нетривиальных двумерных паттернов, обсудим его несколько

подробнее [19]. Рассмотрим поведение границы тонкого слоя вязкой жидкости, «намазанной на потолок». Ясно, что такой слой в гравитационном поле $\mathbf{g} = g\mathbf{Z}$ будет неустойчив. В результате развития неустойчивости локальная толщина слоя будет функцией горизонтальных координат ($\mathbf{r} = (x, y)$)

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0 + \zeta(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

Полагая, что жидкость очень вязкая, можно пренебречь эффектами инерции и записать исходные уравнения в форме Стокса:

$$\begin{aligned} \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial Z^2} &= \nabla p \\ \eta \nabla^2 v_z + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial Z^2} &= \frac{\partial p}{\partial Z} - \rho g \\ \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial v_z}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

здесь ρ —плотность, η —вязкость, $\mathbf{u}(v_x, v_y)$ —горизонтальная компонента скорости, v_z —вертикальная компонента скорости, $p(\mathbf{r}, Z, t)$ —поле давления, а операторы ∇^2 и ∇ относятся только к горизонтальным координатам x и y . Граничные условия записываются в виде

$$\mathbf{u} = 0 \Big|_{z=0}; \quad \eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Z} = 0 \Big|_{z=\xi(\mathbf{r}, t)}; \quad (2.9)$$

$$p_{atm} - p = \gamma \nabla \left\{ \nabla \xi [1 + (\nabla \xi)^2]^{-1/2} \right\} \cong \gamma \nabla^2 \xi, \quad (2.10)$$

где γ —коэффициент поверхностного натяжения. Как и для всякого тонкого слоя (см., например, [20]) уравнения движения могут быть записаны в форме закона сохранения массы

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} + \nabla \cdot \int_0^\xi \mathbf{u} dz = 0. \quad (2.11)$$

При учете граничных условий и пренебрежении поправками порядка $(\zeta/\Lambda)^2$, где Λ —характерный масштаб паттернов, (2.11) приводит к эволюционному уравнению для параметра порядка $\zeta(\mathbf{r}, t)$ [19]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\xi_0^3}{3\eta} (\rho g \nabla^2 \zeta + \gamma \nabla^4 \zeta) - \frac{\xi_0^2}{3\eta} \nabla \cdot [(3\zeta + 3\zeta^2 + \zeta^3) \nabla (\rho g \zeta + \gamma \nabla^2 \zeta)]. \quad (2.12)$$

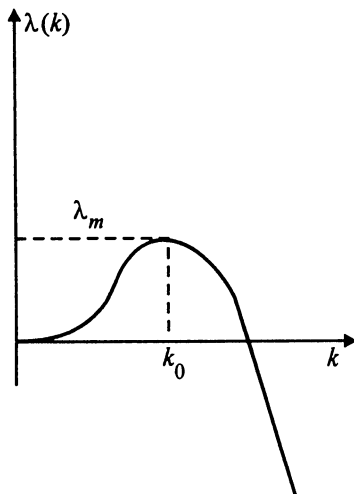


Рис. 2.6. Инкремент неустойчивости при конкуренции сил гравитации и поверхностного натяжения

Действительно, как видно из структуры линейного оператора, рост $\zeta(\mathbf{r}, t)$ определяется конкуренцией между порождающей неустойчивость гравитацией и сдерживающими капиллярными силами. Здесь также будут нарастать возмущения сплошного «по углу» спектра с характерным волновым числом k_0 , которому отвечает максимальный инкремент $\lambda_m = \lambda(k_0)$ (см. рис. 2.6), где

$$\lambda(k) = \frac{\xi_0^3}{3\eta} (\rho g k^2 - \gamma k^4). \quad (2.13)$$

Структура паттернов, возникающих в результате развития подобной неустойчивости может быть весьма разнообразна. В том числе они могут быть и неупорядоченными. Естественно, что механизмы рождения нетривиальных пространственных паттернов не исчерпываются только диссипативными неустойчивостями типа неустойчивости Тьюринга. Зачастую спонтанное нарушение симметрии сопровождается и зарождением пульсаций во времени, как это наблюдается, например, в бинарных жидкостях [21]. Да и в химических реакторах в широкой области контрольных параметров обнаруживается «взаимодействие» бифуркаций Тьюринга и Андронова–Хопфа. В этих

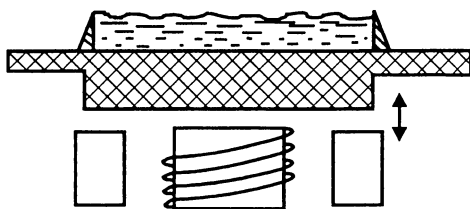


Рис. 2.7. Схема эксперимента по параметрическому возбуждению капиллярных волн

случаях мы имеем дело уже не со стационарными паттернами, а с волнами или в более общем случае, с пространственно-временными структурами, которые также могут быть регулярными или неупорядоченными. Среди этого круга проблем следует особо выделить задачи о пространственном распределении периодически меняющихся во времени полей. Действительно, если наблюдать осциллирующее поле стробоскопически, например, синхронизуя вспышки лампы с фазой временных осцилляций, то его пространственное распределение будет выглядеть неподвижным и мы и в этом случае можем обнаружить кристаллические или квазикристаллические регулярные паттерны или пространственный беспорядок. Замечательной иллюстрацией сказанного могут служить паттерны, наблюдаемые на поверхности плоского слоя жидкости, находящегося в осциллирующем гравитационном поле. Обсудим этот пример подробнее.

Речь идет о параметрической неустойчивости волн на поверхности жидкого слоя в пространственно-однородном поле накачки, осциллирующем с частотой ω_p (на рис. 2.7 приведена схема эксперимента). Закон дисперсии для поверхностных волн вида $\zeta(x, y, t) = Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$ хорошо известен (см., например, [22])

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (2.14)$$

Здесь ρ , g , γ , по-прежнему, плотность жидкости, ускорение свободного падения и коэффициент поверхностного натяжения. Если первое слагаемое пренебрежимо мало по сравнению со вторым «короткие волны», говорят о неустойчивости капиллярных волн. Регулярную кристаллическую картину возбуждаемых капиллярных волн наблюдал еще Фарадей полтора века назад [23]. Будем интересоваться

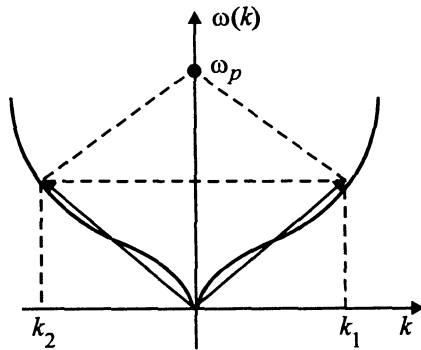


Рис. 2.8. Сематическое изображение резонанса частот и волновых чисел при параметрическом возбуждении волн на поверхности жидкости

лишь первой—основной зоной параметрической неустойчивости. При этом должны быть выполнены условия резонанса частот и волновых чисел капиллярных волн, черпающих энергию из поля накачки,—

$$\omega_p = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0 \quad (2.15)$$

($\mathbf{k}_p = 0$ поскольку поле накачки однородно). Графически эти условия представлены на рис. 2.8. Легко видеть, что в синхронизме с накачкой одновременно будет находиться бесконечное число пар волн частоты $\omega_p/2$, волновые вектора которых $\mathbf{k}(\omega_p/2)$ противоположны по направлению и одинаковы по величине. Все они лежат на окружности $k_x^2 + k_y^2 = k_0^2$, где $k_0 = [(\rho/\gamma)(\omega_p/2)^2]^{1/3}$. Если вязкостью пренебречь, то все эти пары волн будут нарастать со временем по закону $e^{\lambda t}$, где λ пропорциональна амплитуде A_p однородного поля накачки (т.е. осциллирующего гравитационного поля). При учете вязкости, как и в предыдущих примерах, будет существовать порог по параметру A_p , при превышении которого и будут устанавливаться те или иные капиллярные паттерны. И вновь мы здесь сталкиваемся с принципиальным вопросом—что происходит через достаточно большие промежутки времени? Почему одни пары мод, которые «росли вместе» выживают, а другие исчезают? От каких управляющих параметров зависит формирование, скажем, капиллярного квазикристалла? На эти вопросы мы попытаемся ответить в следующих главах

Глава 3

МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как следует обращаться с уравнениями математической физики? Должны ли мы просто выводить из них следствия и рассматривать уравнения, как неощущаемую реальность? Нет, не так! Главным образом уравнения нас должны учить тому, что можно и что следует в них изменить.

Анри Пуанкаре

То, что мы наблюдаем в складывающейся сейчас динамической теории формообразования, очень похоже на хорошо известную ситуацию в теории критических явлений и других разработанных областях нелинейной физики. А именно: многие феномены исследуются с помощью уравнений или моделей, которые внешне не имеют отношения к какому-либо эксперименту. Например, в теории критических явлений основной объект, которым оперирует теория,—это модельный гамильтониан. Формально он может быть не связан с конкретной физической ситуацией. Но такая модель обладает некоторыми свойствами универсальности, в том смысле, что описываемые ею эффекты типичны для широкого класса критических явлений. Поскольку подобные модельные уравнения доступнее для исследования, то, имея в виду свойства универсальности, разумно для построения качественной теории использовать именно их. Здесь следует пояснить слова «качественная теория». Когда речь идет о таких сложных объектах, как нелинейные поля, да еще и меняющиеся во времени, нахождение точных решений—это, в сущности, не успех и даже не удача, а просто—случайность. И не следует надеяться, что мы будем сталкиваться с ней достаточно часто. Поэтому для сколько-нибудь целостного понимания явлений в подобной ситуации необходима именно качественная теория. Термин «качественная» подразумевает здесь не отсутствие строгости, а тот же смысл, который вкладывается в

него, например, в качественной теории дифференциальных уравнений. Такая качественная теория предполагает сочетание следующих компонент. Во-первых, это—выбор или конструирование некоторых базовых нелинейных моделей, которые имеют отношение к определенным явлениям независимо от их природы физической, химической или какой—либо другой, и кроме того,—постановка ключевых экспериментов с целью экспериментального доказательства априорных гипотез о том, что эти модели являются универсальными. Другого способа показать, что эти модели хороши, по-видимому, просто нет. Вторая компонента, которая необходима для построения качественной теории,—это развитие некоторых приближенных методов, и прежде всего асимптотических, основанных на использовании разного рода малых параметров. Здесь стоит подчеркнуть, что малый параметр может входить не прямо в исходные уравнения, а может определяться свойствами решения. Например, он может быть связан с достаточно быстрым спаданием полей дефектов или локализованных структур на периферии, так что взаимодействие разных структур, определяющееся величиной их потенциала в поле максимума других структур, можно считать малым параметром. И, наконец, третья компонента, без которой зачастую вообще невозможно разобраться в достаточно трудной задаче динамической эволюции форм,—это, конечно, компьютерные эксперименты. Но это должно быть не просто нахождение частных решений определенных уравнений, а именно исследование феномена в целом. Мы здесь не зря выделяем слово «феномен», а не «система» и не «модель». Нас интересует не сама модель, а те эффекты, для изучения которых она удобна. Мы исследуем, например, эффект хаотического рассеяния частиц, или структуру поля уединенных форм, или образование конечномерного беспорядка в процессе временной эволюции. Какую мы для этого выбираем модель—точно соответствующую какой-либо конкретной физической системе или чуть отличающуюся от нее? Для исследования характерных черт рассматриваемого явления часто это не так уж и важно, если мы убеждены в типичности этого явления. Более того, по-видимому, при огромном разнообразии моделей число качественно различных феноменов совсем не велико. Именно это нам позволяет иногда пренебречь строгими уравнениями и пользоваться какими-то «усеченными» моделями. Но зато если с их помощью мы, может быть, сможем продвинуться достаточно далеко в понимании качественного смысла происходящих в рамках этой модели процессов, в дальнейшем мы сможем также достроить эту модель и добиться более точного

количественного описания. По существу, здесь и проявляется отличие физического подхода от формально-математического. Качественный физический подход позволяет сделать определенные выводы даже для тех проблем, достаточно строгое решение которых пока невозможно. Именно такие проблемы чаще всего и возникают перед физиками. Добавим, что стремление к построению качественной теории характерно именно для фундаментальных разделов физики. В частности, Р.Фейнман (может быть, несколько высокопарно) подчеркивал: «Грядущая великая эра пробуждения человеческого разума принесет с собой метод понимания качественного содержания уравнений. Сегодня мы еще не способны на это. Сегодня мы не можем увидеть в уравнениях течения воды такие вещи, как спиральное строение турбулентности... Мы не можем сказать, требуется ли что-нибудь сверх уравнений».

§1. Уравнение Свифта-Хоенберга

Обсуждение основных моделей динамической теории формообразования начнем с одной из наиболее популярных в этой области—уравнения Свифта-Хоенберга:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0} \left[\varepsilon - \frac{\xi_0^2}{4k_0^2} (\nabla^2 + k_0^2)^2 + g_2 u - g_3 u^2 - g_5 u^4 \right] u. \quad (3.1)$$

Здесь τ_0 и ξ_0 отражают соответственно временной и пространственный масштабы исследуемого процесса. Заметим, что уравнение (3.1) часто используют для описания паттернов в конвекции Релея-Бенара. В этом контексте ε есть превышение над порогом, т.е. $\varepsilon = (R/R_{cr}) - 1$, где Ra —это число Релея, а Ra_{cr} —критическое число Релея, k_0 —волновое число моды, которая первой становится неустойчивой, коэффициенты $g_{2,3,5}$ —характеризуют роль нелинейностей второго, третьего и пятого порядков соответственно. Их физический смысл мы сейчас обсудим. Характерный пространственный масштаб ξ_0 и характерное время τ_0 определяются для конвекции толщиной слоя d и временем диффузии температуры от нижней до верхней плоскости— d^2/κ .

Замечательно, что вблизи порога все коэффициенты (3.1) возможно подобрать численно таким образом, чтобы уравнение СХ количественно правильно описывало формирование, например, роликовых конвективных структур.

Если $\varepsilon > 0$ —случай суперкритической бифуркации—для так называемых буссинесковских жидкостей ($g_2 = 0$), то можно ограничиться учетом лишь стабилизирующей неустойчивость кубической нелинейности (предполагается $g_3 > 0$). При этом уравнение (3.1) можно представить в традиционной форме (после перехода к безразмерным переменным) [24]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\varepsilon - (\nabla^2 + 1)^2 - u^2] u. \quad (3.2)$$

Это уравнение при некоторых приближениях может быть выведено, например, из фундаментальных уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска в пределе больших чисел Прандтля.

Если же $\varepsilon < 0$ и $g_3 < 0$, то следует учесть для описания процессов стабилизации неустойчивости нелинейность пятого порядка. И, наконец, для небуссинесковской конвекции принципиальна квадратичная нелинейность $g_2 \neq 0$, отражающая, например, зависимость вязкости жидкости от температуры или нелинейную зависимость плотности от температуры [25].

Модель (3.1) СХ описывает формирование структур в изначально однородных и изотропных средах. Это уравнение инвариантно относительно трансляции и вращения. В случае $g_2 = 0$ все решения уравнения СХ симметричны относительно замены $u \leftrightarrow -u$. В субкритическом случае ($\varepsilon < 0$) существует устойчивое однородное состояние $u(\mathbf{r}, t) \equiv 0$. Это тривиальное решение становится неустойчивым при критическом значении $\varepsilon = 0$ для произвольных синусоидальных возмущений с волновыми числами $|\mathbf{k}| = k_0 = 1$ (в форме (3.2)).

Суперкритический случай ($\varepsilon > 0$) характеризуется существованием устойчивых регулярных или почти регулярны паттернов, которые можно представить периодическими функциями с волновыми числами, располагающимися в малой кольцевой области ($1 \pm \varepsilon^{1/2}$) вокруг окружности $k_x^2 + k_y^2 = 1$. В силу специфики нелинейных слагаемых (алгебраическая нелинейность) уравнение СХ описывает не все разнообразие паттернов, которые могут быть сформированы из подобных возбуждений. Это важное обстоятельство мы более подробно обсудим в главе о квазикристаллах.

В несколько более общей форме уравнения СХ выглядит так

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) - (1 + \nabla^2)^2 u, \quad f(u) = -\frac{\partial U}{\partial u}. \quad (3.3)$$

Это градиентное уравнение с функционалом свободной энергии

$$F = \int_{\Omega} \left[U(u) + \frac{1}{2} ((1 + \nabla^2)u)^2 \right] dx dy, \quad (3.4)$$

где Ω —граница интересующей нас большой области пространства, в которой наблюдается образование паттернов. Существование функционала F дает возможность записать (3.3) в градиентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta u} \quad (3.5)$$

с вариационной производной в правой части. Рассмотрим изменение F во времени

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Omega} \left[\frac{dU}{du} + (\nabla^2 + 1)^2 u \right] \frac{\partial u}{\partial t} dx dy,$$

поскольку выражение в квадратных скобках совпадает с правой частью (3.3) со знаком минус, мы имеем

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy \leq 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, свободная энергия, являющаяся для данной задачи функционалом Ляпунова— F , может только убывать в процессе эволюции, т.е. вдоль траектории в некотором фазовом пространстве. Если функционал свободной энергии не имеет минимумов, то в достаточно протяженной системе будет наблюдаться распространение фронтов, как, например, в уравнениях, описывающих реакцию горения. В этом случае функционал свободной энергии будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока фронт не подойдет к границе среды, если она ограничена. Другая возможность реализуется, когда функционал свободной энергии имеет минимумы. Таких минимумов может быть множество. Каждый минимум соответствует состоянию равновесия среды по времени—мультистабильность (см. рис. 3.1). Итак, для градиентных систем предельное поведение—это всегда либо статический аттрактор, либо распространяющиеся фронты. Нас будет интересовать ситуация, когда функционал свободной энергии имеет минимумы. Пространственные распределения полей, отвечающие разным минимумам, могут качественно отличаться: среди них могут быть периодические, квазипериодические распределения и, как мы убедимся в дальнейшем, среди них может быть также множество

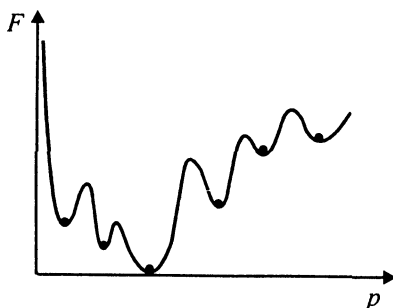


Рис. 3.1. Схематическое изображение минимумов функционала свободной энергии

состояний типа локализованных структур и устойчивого динамического беспорядка.

Чтобы проиллюстрировать возможности уравнения Свифта–Хоенберга в описании реальной ситуации, например, в экспериментах с конвекцией Релея–Бенара, мы приведем здесь только один пример. Если исследовать уравнение Свифта–Хоенберга при разных начальных условиях на компьютере, то в двумерной геометрии при $\epsilon \geq 0$ и $g_2 > (g_2)_{cr}$ получаются шестигранные структуры, как показано на рис. 3.2 [26]. При этом обнаруживается следующее интересное явление. Если взять в качестве начального условия одну шестигранную ячейку, то она очень быстро «обрастает» соседями и затем постепенно достраивается вся «кристаллическая решетка». Замечательно, что точно такой же рост структуры кристаллической шестигранной решетки наблюдался в экспериментах в реальной конвекции [27]. Распределения параметра порядка, полученные на дисплее компьютера, и наблюдаемый в лабораторном эксперименте контраст изображения, обусловленный распределением концентрации пассивной примеси, качественно совпадают. Более того, совпадение этих величин возникает, если среда близка к порогу возникновения конвекции, но находится ниже этого порога (это соответствует случаю субкритической бифуркации). Для того, чтобы перейти порог возбуждения, нужно конечное начальное возмущение. Как показывает компьютерный эксперимент, это возмущение вырастает и трансформируется в некоторую универсальную структуру и существует как локализованное состояние. Это тоже наблюдалось в упомянутых экспериментах [27].

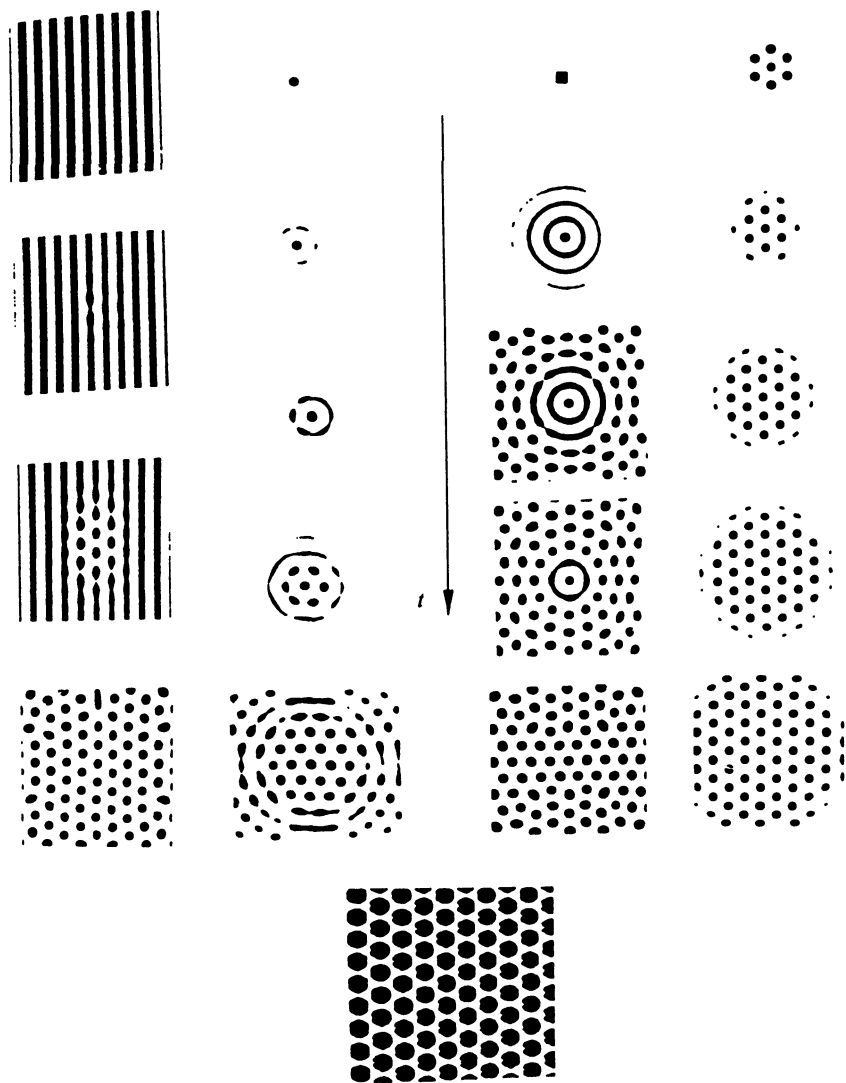


Рис. 3.2. Результаты компьютерных экспериментов, демонстрирующие различные пути возникновения шестигранной решетки

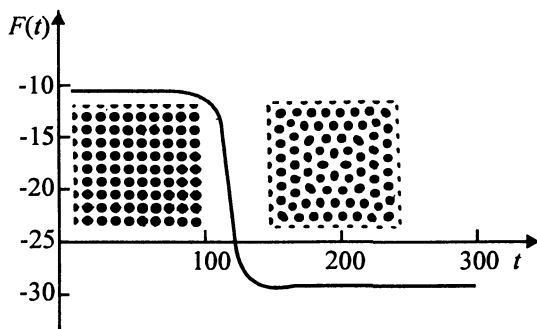


Рис. 3.3. Уменьшение величины функционала свободной энергии при переходе от четырехгранной решетки к шестигранной

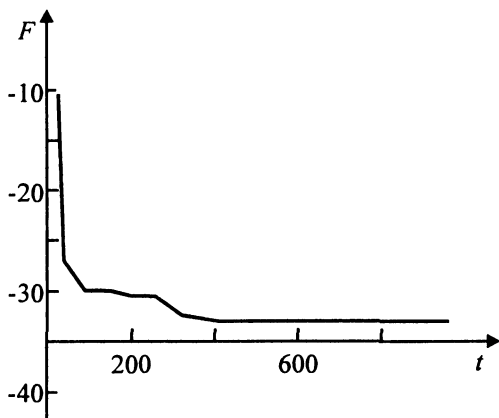


Рис. 3.4. Эволюция функционала F . Ступенчатый характер функционала F связан с аннигиляцией дефектов в шестигранной решетке

Естественно, что на компьютере нетрудно проследить и за эволюцией функционала F во времени. Эти результаты представлены на рис. 3.3 и рис. 3.4. Видно, что поэтапной достройке шестигранной структуры как на рис. 3.4 отвечает монотонное уменьшение F вплоть до величины, отвечающей значению F в глобальном минимуме. Существенно, что скорость убывания F в процессе формирования устойчивых паттернов (отвечающих локальным минимумам) может значительно меняться в процессе эволюции. На рис. 3.4 обращает на себя внимание ступенчатый характер изменения F —медленные

участки отвечают процессу постепенного сближения дефектов решетки, а «скачки» — их быстрой аннигиляции.

Упомянутые свойства уравнения СХ справедливы и в случае, когда параметр порядка $u(\mathbf{r}, t)$ является комплексным:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\varepsilon - (\nabla^2 + 1)^2 - |u|^2] u. \quad (3.7)$$

Вместо (3.5) при этом будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u^*}.$$

Как мы увидим в дальнейшем потенциальные (градиентные) уравнения описывают лишь сравнительно простые стационарные структуры. Для описания, в частности, квазикристаллических структур требуются уравнения с более сложными нелинейными слагаемыми, учитывающими, например, зависимость и от градиента функции u . В общем случае такие модели непотенциальны. Среди них наиболее известны уравнения, полученные в [28]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u - (\nabla^2 + 1)^2 u + \rho(\nabla u)^2 \nabla^2 u \quad (3.8)$$

и в [29]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u - (\nabla^2 + 1)^2 u - au^3 - bu(\nabla u)^2 + cu^2 \nabla^2 u. \quad (3.9)$$

Свойства линейной устойчивости этих моделей совпадают с (3.1), однако нелинейные феномены, определяющие формообразование, могут быть совершенно иными.

§2. Уравнение Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля

Среди модельных уравнений особое место занимают так называемые амплитудные уравнения, в которых роль параметра порядка играют поля огибающих на фоне паттернов заданной структуры. Такие уравнения удобны для описания, в частности, беспорядка дефектов, которые есть ничто иное, как особенности поля огибающих амплитуды и фазы. Рассмотрим, к примеру, решение (3.2) в виде системы роликов, ориентированных вдоль оси y . Деформацию роликов и дефекты на фоне решетки учтем в зависимости их комплексной

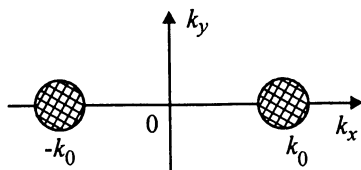


Рис. 3.5. Плоскость волновых чисел. Заштрихованные области соответствуют двумерному волновому пакету

амплитуды от координат. На спектральном языке такая структура из деформированных x -роликов представляет собой волновой пакет с векторами $\mathbf{k} \in [k_{0x} + k_x, k_y]$ (см. рис. 3.5). Запишем искомое решение (3.2) в виде

$$u(x, y, t) = A(X, Y, T)e^{ik_0x} + \text{к.с.}, \quad (3.10)$$

здесь $X = \varepsilon^{1/2}x$, $Y = \varepsilon^{1/4}y$, и $T = \varepsilon t$. Тогда для нового параметра порядка $A(X, Y, T)$ после усреднения по быстрой координате x получим при $k_0 = 1$ уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \varepsilon A + \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 A - |A|^2 A. \quad (3.11)$$

Это известное уравнение Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля. Обсудим смысл отдельных его членов. Слагаемое $|A|^2 A$ здесь ответственно за нелинейную стабилизацию мод, нарастающих при $Ra \geq Ra_{cr}$. Здесь может возникнуть вопрос—каким образом появляется нелинейная диссипация, например, в термоконвекции? Ведь уравнения Навье–Стокса содержат лишь обычные линейные слагаемые, ответственные за поглощение энергии. Ответ довольно прост. Исходные уравнения в том числе и уравнения Буссинеска, нелинейны. Эта нелинейность приводит, в частности, к генерации пространственных гармоник исходного возмущения, диссипация для которых возрастет как n^2 , n —номер гармоники. Таким образом при резонансной неустойчивости

уже вторая гармоника с волновым числом $2k_0$ сильно затухает. Поэтому можно считать, что ее амплитуда быстро релаксирует и следит (как тень) за квадратом амплитуды первой гармоники, которая ее возбуждает. Из уравнения $\dot{A}_{2k_0} = -\sigma A_{2k_0} + A_{k_0}^2$ и уравнения $\dot{A}_{k_0} = \dots - A_{2k_0} A_{k_0}^*$ при подстановке $A_{2k_0} = (A_{k_0}^2)/\sigma$ мы сразу получаем дополнительное нелинейное затухание $|A_{k_0}|^2 A_{k_0}$.

При выводе уравнения НУС учтена очевидная анизотропия решения (3.10). Поясним в связи с этим здесь структуру линейного оператора (3.11). Ее можно интерпретировать следующим образом [30]. Вблизи порога инкремент x -роликов $\lambda(\mathbf{k})$ определится выражением (см. 3.1)

$$\lambda(\mathbf{k}) = \tau_0^{-1} \left[\varepsilon - \frac{\xi_0^2}{4k_0^2} (\mathbf{k}^2 - k_0^2)^2 \right] \simeq \tau_0^{-1} \left[\varepsilon - \xi_0^2 (k_x + k_y^2/2k_0)^2 \right]. \quad (3.12)$$

Имея в виду, что λ , k_x и k_y соответствуют операторам $\lambda \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, $k_x \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$, and $k_y \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial y}$ получаем (в безразмерной форме) линейную часть уравнения (3.11).

Уравнение НУС получается для решений в виде деформированных роликов из различных исходных уравнений, в частности, из уравнений конвекции в приближении Буссинеска. Оно также записывается в градиентной форме

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta A^*} \quad (3.13)$$

с функционалом свободной энергии

$$F = \int dx dy \left\{ -\varepsilon |A|^2 + \frac{1}{2} |A|^4 + \left[\left(\partial_x - \frac{i}{2} \partial_y^2 \right) A \right]^2 \right\} \quad (3.14)$$

откуда

$$\frac{dF}{dt} = - \int \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq 0. \quad (3.15)$$

Если иметь в виду, что уравнение НУС получено из СХ для описания частного вида решений, то факт градиентности НУС представляется очевидным. Однако уравнение НУС может быть выведено из более общих, чем СХ уравнений, поэтому прямое установление факта градиентности (3.11) представляется небесполезным.

Итак, потенциальные (градиентные) модели могут быть использованы для описания лишь сравнительно простой—монотонной динамики неравновесных сред. Если, например, для какой-либо модели удалось доказать возможность представления в виде (3.5) или (3.13), то можно быть уверенным, что ни периодических пульсаций, ни, тем более, хаотической временной динамики в рамках такой модели описать не удастся. Если в реальной ситуации подобные феномены присутствуют, то следует обобщить модель, сняв, в частности, с нее ограничения в градиентности. Покажем это на примере связанных уравнений Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля.

§3. Связанные уравнения Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля

Попытаемся получить уравнение НУС не из (3.2), а из более общей модели (3.1), где $g_2 = \beta$ и $g_5 = 0$. Возможно ли это? Вполне. Однако неконструктивно. Дело в том, что уравнение НУС описывает паттерны на фоне роликов. Ориентация роликов может быть произвольной, но при этом предполагается, что ролики другой ориентации отсутствуют. В то же время, как можно убедиться (см. главу 5), если β не слишком мало, такое решение неустойчиво по отношению к возбуждению роликов, ориентированных под углом 120° к исходным. Именно такая неустойчивость и приводит к формированию шестигранной кристаллической решетки. Таким образом, если мы хотим получить уравнения для огибающих мод, то в приближенном решении следует учесть все три разноориентированные системы роликов. Тогда, вместо (3.10), мы будем иметь

$$u(x, y, t) = \sum_l A_l(X_l, Y_l, T) e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}} + \text{к.с.},$$

$$l = 1, 2, 3, \quad (3.16)$$

где $|\mathbf{k}_l| = k_0$ и удовлетворяет условию резонанса, $\sum_{l=1}^3 \mathbf{k}_l = 0$, X_l, Y_l это ортогональная система координат на l -й системе роликов (см. рис. 3.6).

По-прежнему, поперек роликов амплитуда A изменяется медленнее, чем вдоль $X_l \sim \varepsilon^{1/2} x_l$, $Y_l \sim \varepsilon^{1/4} y_l$, где $\varepsilon \ll 1$. После усреднения по быстрым осцилляциям поперек каждой цепочки роликов, для медленных функций A_l можно получить следующую систему уравнений

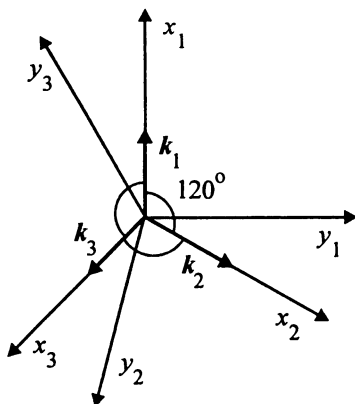


Рис. 3.6. Системы координат, используемые для описания пространственно-временной эволюции резонансно связанных мод

$$\tau_0 \frac{\partial A_l}{\partial T} = \xi_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial X_l} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial Y_l^2} \right]^2 A_l + \left[\varepsilon - \sum_{j=1}^3 \rho_{lj} |A_j|^2 \right] A_l + \beta A_i^* A_j^*, \quad (3.17)$$

где $\beta \sim g_2$ и $\rho_{lj} \sim g_3$. Полученные уравнения естественно назвать связанными уравнениями НУС (см. [31]).

Поскольку (3.17)—это уравнения, описывающие частный класс решений градиентной системы (3.1), они также должны быть градиентными. Из этого, в частности, следует легко проверяемое свойство симметрии матричных элементов ρ_{lj} ($\rho_{lj} = \rho_{jl}$). Добавим, что в нашем случае $\rho_{lj}/\rho_{jj} = 2$ ($l \neq j$).

Если $\beta = 0$, система (3.17) описывает пространственно-временную конкуренцию трех систем роликов. Наиболее вероятным результатом такой конкуренции при $t \rightarrow \infty$ должно стать установление идеальной системы валов, ориентация которых зависит лишь от начальных условий. В пространственно-однородном случае динамика такой конкуренции полностью ясна из фазового портрета соответствующей системы трех уравнений НУС (см. рис. 3.7).

В случае, когда условия симметрии, $\rho_{lj} = \rho_{jl}$ не выполнены, система (3.17) уже не будет градиентной и описывает в общем случае весьма сложную, в том числе и хаотическую, пространственно-временную динамику. Именно так обстоит дело с уравнениями вида

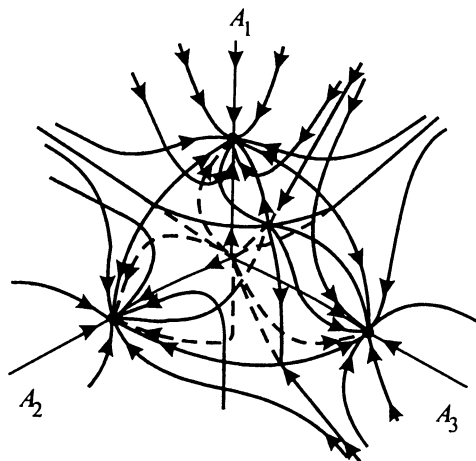


Рис. 3.7. Фазовое пространство для случая конкуренции трех мод

(3.17), описывающими Релей–Бенаровскую конвекцию во вращающейся жидкости при учете сил Кориолиса. Заметим, что исследование такой конвекции чрезвычайно интересно с точки зрения понимания динамики звездных и планетных атмосфер и циркуляции океанических течений. Для конвекции во вращающейся жидкости оказывается что, $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{31} \equiv \rho_+$ и $\rho_{21} = \rho_{32} = \rho_{13} \equiv \rho_-$, тогда как $\rho_+ \neq \rho_-$.

Непотенциальность системы (3.17) проявляется даже для пространственно однородных решений. При $\beta > \beta_{(cr)}$ в фазовом пространстве соответствующей системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений существует устойчивый предельный цикл. Это означает что ролики различной ориентации периодически сменяют друг друга во времени [32]. В некоторой области параметров в фазовом пространстве этой системы может существовать и странный аттрактор

§4. Фазовые уравнения

Как читатель уже заметил, при получении той или иной модели мы пользуемся априорной информацией о характере явления или решения. Конкретизируя вид процесса, который мы хотим исследовать например, уравнение НУС можно еще более упростить и получить более детальную информацию о нужном виде решения. Действительно

(3.11) имеет семейство стационарных решений

$$u_0 = \sqrt{\varepsilon - q^2} e^{iqx} \quad (q^2 < \varepsilon), \quad (3.18)$$

где q —волновое число продольных волн огибающих на фоне x -роликов. Если представить их в виде (считается, что амплитуда адиабатически медленно отслеживает изменения фазы)

$$u = \left(\sqrt{\varepsilon - q^2} + a \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) e^{i[qx + \phi(x, y, t)]}, \quad (3.19)$$

то после подстановки (3.19) в НУС, мы получим линейное уравнение диффузии фазы

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad (3.20)$$

где $D_2 = \frac{\varepsilon - 3q^2}{\varepsilon - q^2}$, $B_2 = 2q$.

В зависимости от знаков коэффициентов диффузии, будут проявляться различные формы неустойчивости. Если $D_2 < 0$, т.е. $\varepsilon < 3q^2$, то постоянная диффузии в x -направлении будет отрицательна и разовьется неустойчивость, которая приведет к модуляции положения роликов вдоль оси x (см. рис. 3.8). Это неустойчивость Экхауза. Нелинейная стадия эволюции такой неустойчивости описывается нелинейным фазовым уравнением [33, 34]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - D_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}, \quad (3.21)$$

здесь D_3, D_4 коэффициенты, подсчитанные в [33, 34].

Естественно, что это уравнение можно использовать лишь до тех пор, пока фазовые градиенты невелики. Если же $B_2 < 0$, т.е. $q < 0$, то развивается неустойчивость, приводящая к изгибной модуляции валов в y -направлении. Такую неустойчивость называют зигзаговой. Нелинейная стадия развития зигзаговой неустойчивости описывается другим нелинейным уравнением [35, 36]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = B_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + B_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - B_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}. \quad (3.22)$$

В (3.22) мы ограничились случаем модуляции только в y -направлении (см. рис. 3.9). Когда B_3 положительно, получаются устойчивые зигзаговые структуры. Если же $B_3 < 0$ модель (3.22) становится некорректной.

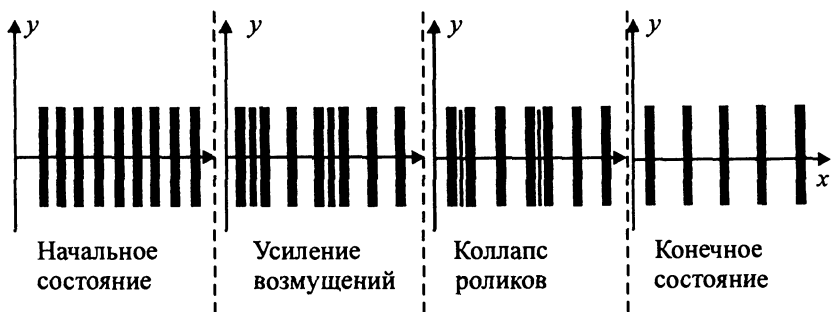


Рис. 3.8. Развитие неустойчивости Экхауза. Пространственный период установившейся структуры может быть больше или меньше начального периода

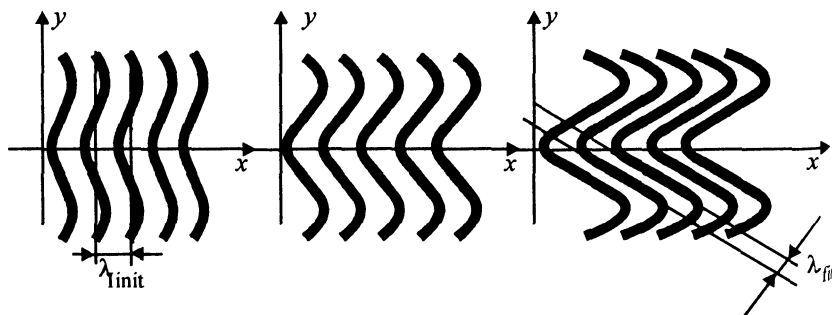


Рис. 3.9. Развитие зигзаговой неустойчивости. Пространственный период λ_{fin} возникающей структуры из-за поворота фазовых фронтов всегда меньше начального периода λ_{init}

Глава 4

Уравнение Гинзбурга–Ландау

... время от времени спрашивают —
действительно ли мы живем
в мире Гинзбурга – Ландау?...

Хьюг Шате

Как должна выглядеть универсальная модель, описывающая эволюцию параметра порядка, после потери устойчивости основным однородным состоянием через осцилляторную (Андронова–Хопфа) бифуркацию? Если воспользоваться опытом динамических систем с одной степенью свободы, то можно заметить, что это должно быть уравнение для комплексной амплитуды моды, типа уравнения Стюарта–Ландау [37]:

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon A - (1 + i\beta) |A|^2 A, \quad (4.1)$$

где параметр β характеризует неизохронность колебаний, т.е. зависимость частоты потерявшей неустойчивость моды от интенсивности колебаний. Учет медленного изменения комплексной амплитуды моды не только от времени, но и от координат для однородной и изотропной неравновесной среды приводит к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon A - (1 + i\beta) |A|^2 A + (1 + i\alpha) \nabla^2 A. \quad (4.2)$$

Это и есть одно из наиболее популярных в теории формирования структур уравнений—комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау. Оно описывает динамику цепочек или решеток связанных нелинейных осцилляторов [38], формирование структур в двумерных реакторах, где проходит автокаталитическая реакция [39], эволюцию поля в нелинейных оптических резонаторах [40], структуры в гидродинамических течениях [41, 42] и т.д. Ниже мы приводим два примера,

поясняющих, каким образом можно получить комплексное уравнение ГЛ в конкретных ситуациях, но прежде мы обсудим некоторые общие свойства решений этого уравнения.

Еще до взрывного всплеска популярности комплексного уравнения ГЛ (в последние пятнадцать лет) были довольно подробно исследованы его предельные формы—диссипативное уравнение ГЛ:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon A - |A|^2 A + \nabla^2 A \quad (4.3)$$

и консервативное:

$$-i \frac{\partial A}{\partial t} = \varepsilon A - |A|^2 A + \nabla^2 A. \quad (4.4)$$

Первое из этих уравнений исследовалось в связи с проблемой сверхпроводимости [43, 44, 45], а второе представляет собой известное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ); подробно изучавшееся в связи с динамикой сверхтекучей жидкости [46] и теорией нелинейных волн в плазме и оптике [47, 48]. Стационарные ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$) решения (4.3) и (4.4), естественно, совпадают, однако устойчивость решений может быть совершенно различной.

§1. Диссипативный предел уравнения Гинзбурга–Ландау

Диссипативное уравнение ГЛ—это градиентное уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta A^*} \quad (4.5)$$

с функционалом свободной энергии

$$F = - \int_{\Omega} \left[\varepsilon |A|^2 - \frac{1}{2} |A|^4 + (\nabla A)^2 \right] dx dy. \quad (4.6)$$

Ввиду $\frac{dF}{dt} = - \int_{\Omega} \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq 0$, как и в модели СХ, в рамках модели (4.3) должны наблюдаться либо стационарные распределения поля, удовлетворяющие уравнению (можно считать без ограничения общности $\varepsilon = 1$):

$$\nabla^2 A + A - |A|^2 A = 0 \quad (4.7)$$

либо фронты, процесс распространения которых сопровождается уменьшением функционала F . На устойчивых стационарных решениях (4.7) функционал F должен достигать минимума. Среди множества стационарных решений диссипативного уравнения ГЛ необходимо упомянуть так называемые вихри [49, 94]. Это точечные дефекты—решения, соответствующие сингулярностям фазы поля A . Вокруг точки сингулярности циркуляция градиента фазы кратна 2π :

$$A(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}, t)e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (4.8)$$

$$\oint \nabla\phi d\mathbf{l} = 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.9)$$

Величину n называют топологическим зарядом вихря (особенности). Известно, что в рамках диссипативного уравнения ГЛ устойчивы лишь вихри с $|n| = 1$. Линии постоянной фазы стационарного вихря—это прямые линии, выходящие из особенности. Если же коэффициенты комплексны (комплексное уравнение ГЛ), стационарный точечный дефект превращается в спиральную волну. Такой волне отвечает также фазовая сингулярность, вокруг которой существует ненулевая циркуляция фазы (см. гл. 7.). В этом случае линии постоянной фазы уже не прямые, а напоминают спираль Архимеда. Вся структура как целое вращается вокруг центра с постоянной угловой скоростью. Вихри и спирали упомянутого вида обычно называют топологическими дефектами, а область решения близким особенности—ядром дефекта.

Подстановка (4.8) в диссипативное уравнение ГЛ (4.3) дает два действительных уравнения—для амплитуды и фазы поля:

$$R_t = \nabla^2 R + (1 - |\nabla\phi|^2 - R^2)R \quad (4.10)$$

$$\phi_t = \nabla^2 \phi + 2R^{-1} \nabla R \cdot \nabla \phi. \quad (4.11)$$

Стационарные вихри с топологическим зарядом n в полярных координатах (r, φ) имеют распределения амплитуды $R_0(r)$, описываемые уравнением ($\phi = n\varphi$):

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} + \left(1 - n^2 \frac{1}{r^2} - R_0^2\right) R_0 = 0. \quad (4.12)$$

Для $|n| = 1$, решение $R_0(r)$ можно записать в виде

$$R_0(r) = \left\{ \begin{array}{ll} ar & r \ll 1 \\ 1 - \frac{1}{2r^2} & r \gg 1 \end{array} \right\}. \quad (4.13)$$

Таким образом, вне области ядра распределение интенсивности поля в вихре быстро выходит на константу.

Динамикой подобных дефектов мы будем заниматься в главе 8, здесь упомянем только, что в предельном случае консервативной модели (4.4) уравнения движения точечного дефекта содержат т.н. силу Магнуса и решение получается благодаря простой гидродинамической аналогии, о чем можно прочитать, например, в книге [51].

§2. Комплексное уравнение ГЛ и возбуждения нервной мембраны

При выводе комплексного уравнения ГЛ из исходных уравнений задачи в каждом конкретном случае используют специальные приближения, однако всегда предполагается, что поле $A(\mathbf{r}, t)$ медленно меняется во времени и вдоль координат, что позволяет учитывать в уравнении для A (для изотропных сред) лишь оператор $\nabla^2 A$. Для среды, которую можно представить в виде решетки отдельных элементов, наличие в комплексном уравнении ГЛ лишь $\nabla^2 A$ означает учет связей лишь между ближайшими элементами (соседями).

Рассмотрим простой пример. Как известно динамика «точечно-го» элемента нервной мембраны описывается уравнением Фитц Хью-Нагумо [52, 53]

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{dt} &= v - w - \frac{v^3}{3} \\ \frac{dw}{dt} &= pv - qw, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где переменную v называют активатором, а w — ингибитором (см. например, [52]). Пусть $\varepsilon = 1$, тогда мы из (4.14) получаем уравнение Ван-дер Поля–Дуффинга

$$\ddot{x} - \mu(1 - \rho x^2)\dot{x} + \beta x + \beta' x^3 = 0, \quad (4.15)$$

где $x = (p - q)v$, $\mu = 1 - q$, $\rho = ((p - q)^2(1 - q))^{-1}$, $\beta = p - q$, $\beta' = q/3((p - q)^2(1 - q))^{-1}$. Для $\mu \ll 1$, $\beta > 0$ и $\rho, \beta' \sim 1$ это уравнение близко к уравнению консервативного нелинейного осциллятора с потенциалом, как на рис. 4.1. Нелинейная диссипация лишь выбирает среди периодических решений одно и превращает его в предельный цикл (см. рис. 4.2). Период колебаний и их форма существенно зависят от энергии колебаний. При малой энергии колебаний

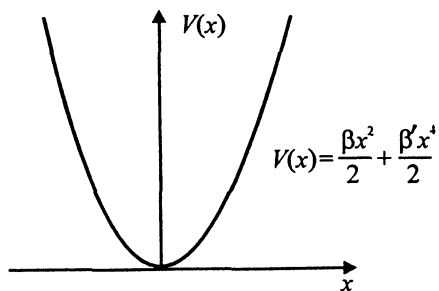


Рис. 4.1. Потенциальная энергия нелинейного осциллятора

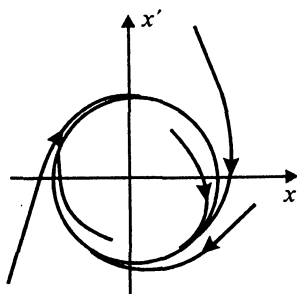


Рис. 4.2. Фазовая плоскость для уравнения (4.15) [117]

близки к гармоническим, но их период зависит от амплитуды. Воспользовавшись этим, представим решение (4.15) при малых μ в виде $x(t) = A(t)e^{i\omega(|A|^2)t} + \text{к.с.}$. Тогда после усреднения по быстрым осцилляциям для A получается известное уравнение Стюарта–Ландау (4.1). Учитывая симметричную связь между соседними элементами, получаем дискретный вариант комплексного уравнения ГЛ:

$$\frac{dA}{dt} j l = \varepsilon A_{jl} - (1 + i\beta) |A_{jl}|^2 A_{jl} + (1 + i\alpha)(A_{j+1,l} + A_{j-1,l} + A_{j,l+1} + A_{j,l-1} - 4A_{j,l}) \quad (j, l = 1, 2, \dots), \quad (4.16)$$

которое в длинноволновом пределе (плавное вдоль j и l изменение A) переходит в (4.2).

§3. Уравнение Гинзбурга–Ландау в нелинейной оптике

Подчеркнем здесь одно важное обстоятельство — независимость уравнения для комплексного параметра порядка $A(\mathbf{r}, t)$ от числа физических переменных в исходной задаче. Однако так получается не всегда, а лишь в том случае когда между амплитудами пульсаций различных полей существует лишь алгебраическая связь. Так, например, поле в резонаторе лазера при больших числах Френеля описывается уравнениями Максвелла–Блоха [54]

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -(i\omega_c + \kappa)E + \kappa P + i\alpha\kappa\nabla^2 E, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -(i\omega_a + \gamma_{\perp})P + \gamma_{\perp}ED, \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel}(D - D_0) + \frac{1}{2}(E^*P + P^*E). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь E , P и D — соответственно электрическое поле, поляризация атомов и инверсная населенность; κ , γ_{\perp} и γ_{\parallel} обратные времена релаксации этих полей, ω_a и ω_c соответственно частоты перехода и резонатора, D_0 — инверсная населенность в отсутствие лазерного излучения, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — Лапласиан. Дифракционный параметр α представляется в виде

$$\alpha = \frac{b^2}{4FT}, \quad F = \frac{\pi b^2}{\lambda L},$$

где b^2 — радиус поперечного сечения резонатора, T — коэффициент прозрачности зеркал, образующих резонатор, F число Френеля, λ — длина волны, L — продольная длина резонатора.

Как видно, уравнения Максвелла–Блоха инвариантны относительно замены $E \rightarrow Ee^{i\phi}$, $P \rightarrow Pe^{i\phi}$ и $D \rightarrow D$ (калибровочная инвариантность). Выразим все три поля через комплексный параметр порядка $A(x, y, t)$

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon A(x, y, t)e^{-i\omega_2 t}, \\ P &= \varepsilon(1 + i\theta)Ae^{-i\omega_R t}, \\ D &= D_0 - \varepsilon^2 |A|^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

где, как и прежде, $\varepsilon = \sqrt{D_0 - D_{cr}}$ — надкритичность, $\omega_R = \frac{\omega_c + \eta\omega_a}{1 + \eta}$, and $\eta = \kappa/\gamma_{\perp}$. После подстановки (4.18) в (4.17) и усреднения по бы-
строму времени мы приходим к комплексному уравнению ГЛ:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \left(1 + \eta + i\theta_0 \frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right) (1 - |A|^2) A + i\alpha(1 - i2\theta_0\eta\chi)\nabla^2 A, \quad (4.19)$$

где $\theta_0 = (\omega_c - \omega_a)/\gamma_{\perp}$ параметр расстройки, $\chi = \{1 + \eta + \theta_0^2[(1 - \eta)/(1 + \eta)]^2\}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}, \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \varepsilon \cdot \chi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и

$$T = \varepsilon^2 t \kappa \left[(1 + \eta)^2 + \{\theta_0[(\eta - 1)/(\eta + 1)]\}^2 \right]^{-1}.$$

В пределе добротного резонатора ($\eta \rightarrow 0$) получаем:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = (1 + i\theta_0) (1 - |A|^2) A + i\alpha\nabla^2 A,$$

Помимо (4.2) или (4.10) при описании пространственно-временной динамики оптических полей в активных средах используется векторная форма комплексного уравнения ГЛ:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{A} - (1 + i\beta)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*)\mathbf{A} - (\delta + i\eta)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}^* + (1 + i\alpha)\nabla_{\perp}^2 \mathbf{A}. \quad (4.20)$$

Естественно, что комплексное уравнение ГЛ допускает помимо (4.20) самые разнообразные обобщения — можно учесть неоднородность среды, что приведет к зависимости коэффициентов от координат (например, учитывая неоднородность оптического пучка поперек сечения резонатора), учесть анизотропность неравновесной среды (что принципиально, в частности, при описании волн, возбуждаемых ветром) [55] и т.д. Однако, важно подчеркнуть что комплексное уравнение ГЛ в его канонической форме (4.2) описывает такое разнообразие феноменов динамической теории беспорядка и пространственно-временного хаоса, что при ознакомлении с основами теории выход за его рамки, как правило, просто излишен.

§4. Уравнение Курамото–Сивашинского

Обсудим связь комплексного уравнения ГЛ с известным фазовым уравнением Курамото–Сивашинского.

Введем действительные функции ρ и ϕ соотношением

$$A(x, y, t) = (1 + \rho)e^{-i(\beta t - \phi)}. \quad (4.21)$$

Тогда из (4.2) (при $\varepsilon = 1$) получим два связанных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -2\rho + \Delta\rho - (1 + \rho)(\nabla\phi)^2 - 2\alpha\nabla\rho \cdot \nabla\phi + \\ &+ (1 + \rho)\alpha\Delta\phi - 3\rho^2 - \rho^3. \\ (1 + \rho)\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -2\beta\rho + 2\nabla\rho \cdot \nabla\phi + \\ &+ (1 + \rho)\Delta\phi + \alpha(1 + \rho)(\nabla\phi)^2 - 3\beta\rho^2 - \beta\rho^3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В новых «амплитудной» и «фазовой» переменных σ и ψ получаем

$$\begin{aligned} \phi &= \psi + \beta\rho - (1 + \beta^2)\nabla\rho \cdot \nabla\psi - \frac{1}{2}(1 + \beta^2)\nabla^2\rho - \frac{\beta}{2}\rho^2 \\ \rho &= \sigma - \frac{\alpha}{2}\nabla^2\psi - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{3}{2}\sigma^2 + \frac{\alpha^2\beta}{2}\nabla^4\psi + \\ &+ \left(\alpha - \frac{1}{2}(1 + \alpha^2)\right)\nabla^2(\partial\psi)^2 - \frac{1 + \alpha^2}{2}\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla^2\psi) \end{aligned} \quad (4.23)$$

здесь разложения для ρ и ψ ограничены четвертым порядком по пространственным производным. Тогда для $\partial\sigma/\partial t$ и $\partial\psi/\partial t$ будем иметь

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\Gamma(\nabla\psi)\sigma + B(\nabla\psi) \cdot \nabla\sigma + D_\sigma \cdot \nabla^2\sigma \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = D_2\nabla^2\psi + D_4\nabla^4\psi + g(\nabla\psi)^2, \quad (4.25)$$

где $\Gamma(\nabla\psi) = 2[1 - (\nabla\psi)^2 - \alpha\nabla^2\psi]$; $B(\nabla\psi) = -2(\beta + \alpha)\nabla\psi$; $D_\sigma = 1 - \beta\alpha$; $D_2 = 1 + \beta\alpha - \alpha(1 + \beta^2)\nabla\psi\nabla$; $D_4 = -\frac{\alpha^2}{2}(1 + \beta^2)$; и $g = \beta - \alpha - \frac{\alpha}{2}(1 + \beta^2)\nabla^2 - (1 + \beta^2)\nabla\psi\nabla$.

В представлении (4.24) для фазы ψ является основным параметром порядка, а амплитуда σ -зависимой переменной. Вблизи порога неустойчивости уравнение для фазы ψ трансформируется в двумерный аналог известного уравнения Курамоты–Сивашинского [56, 57]

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = (1 - \beta\alpha)\nabla^2\psi - \frac{\alpha^2(1 + \beta^2)}{2}\nabla^4\psi + (\beta - \alpha)(\nabla\psi)^2. \quad (4.26)$$

Это уравнение для действительного параметра порядка оказывается весьма удобным для исследования, в частности, феномена фазовой турбулентности.

§5. Галерея феноменов

Логичным завершением данной главы было бы обсуждение пространства параметров (ε , α and β) комплексного уравнения ГЛ и перечисление видов фазовых переходов, которые обнаруживаются в рамках этой модели, скажем, от спиральных волн к развитой турбулентности. Однако, несмотря на исключительно интенсивное исследование этого уравнения в последние годы, реализация этой идеи возможна, да и то не полностью, лишь для $1 - D$ случая (одна пространственная координата). В двумерном же случае разнообразие видов неустойчивостей (мягких и жестких) и разного рода бифуркаций столь велико, что просматриваются лишь отдельные фрагменты общей картины. И тем не менее, опираясь на результаты работ [116, 117] представим здесь разбиение плоскости параметров (α , β) на области существования и устойчивости различных видов структур. Характерные линии, разделяющие существенно разные режимы показаны на

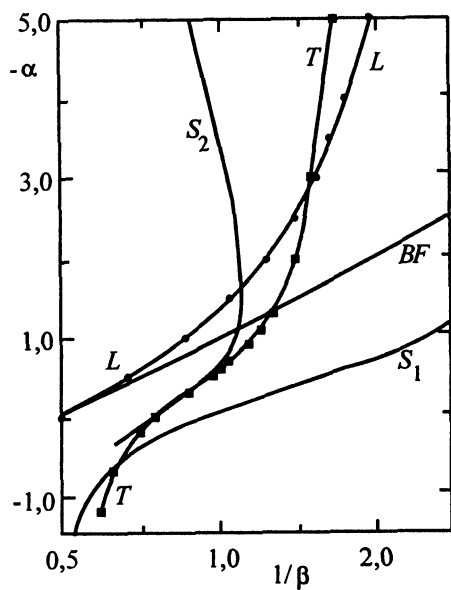


Рис. 4.3. Плоскость параметров для уравнения (4.2) [117]

рис. 4.3. Над линией BF находится область в которой решение уравнения (4.2) в виде плоской волны $A = ae^{i(\omega t - kx)}$ неустойчиво. Такую неустойчивость называют неустойчивостью Бенджамина-Фейра. В области между линиями L и BF в численных экспериментах наблюдается «фазовая» турбулентность. При этом амплитуда следит за изменениями фазы, нерегулярным образом изменяющейся во времени и по пространству. Амплитуда $|A|$ нигде не обращается в нуль и поэтому фаза всюду определена. Пример фазовой турбулентности показан на рис. 4.4. Поведение фазы в этом режиме описывается уравнением Куромоты-Сивашинского (см. предыдущий параграф). Слева от линии T на плоскости (α, β) находится область параметров, при которых возможно существование топологических дефектов — дислокаций, спиралей, дисклинаций и т.д. Тополический дефект привязан к точкам, где амплитуда $|A| = 0$ и фаза не определена (подробное обсуждение особенностей различных дефектов будет проведено в главах 7 и 8). Хорошо выраженные топологические дефекты и, в частности, спирали существуют правее линии S_2 (слева от кривой S_2 находится область абсолютной неустойчивости двумерных возмущений). Пример таких спиралей показан на рис. 4.5. Ансамбль взаимодействующих дефектов представляет нерегулярное нестационарное поле, которое может быть образом, например, спиральной турбулентности (см. рис. 4.6). Такие режимы возникают в окрестности кривой S_2 (справа от нее). Справа от S_1 — кривой отделяющей конвективно неустойчивые двумерные возмущения от устойчивых — и при не слишком больших α возможно существование квазистационарных «замороженных» структур (см. рис. 4.7). Существование таких паттернов связано, по-видимому, с тем, что в этой области параметров система близка к градиентной.

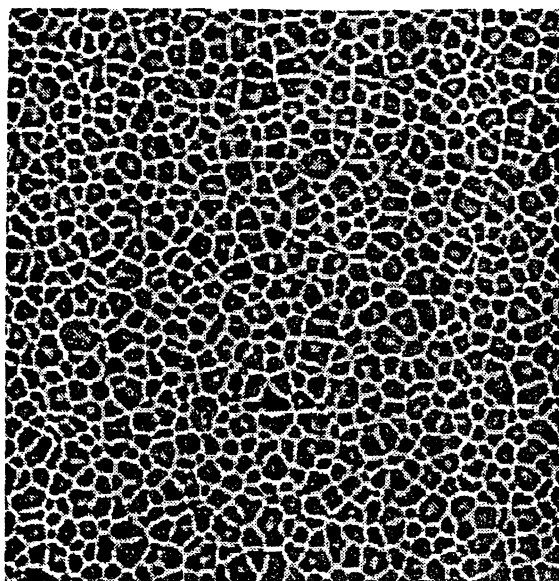
*a**б*

Рис. 4.4. Фазовая турбулентность [117]: а) поле амплитуды $|A|$; б) поле фазы $\arg A$

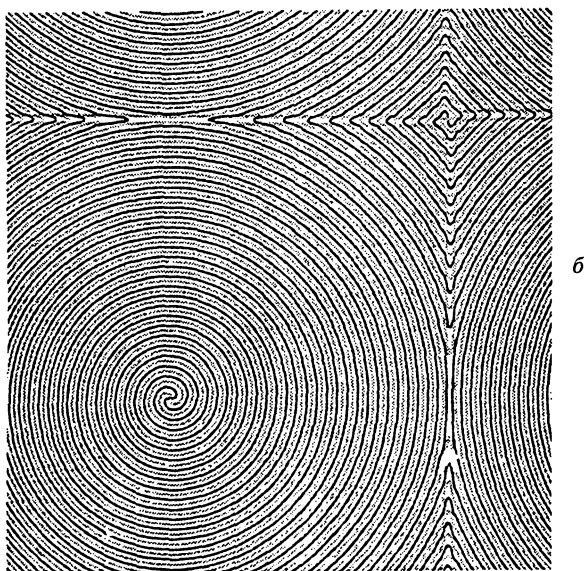
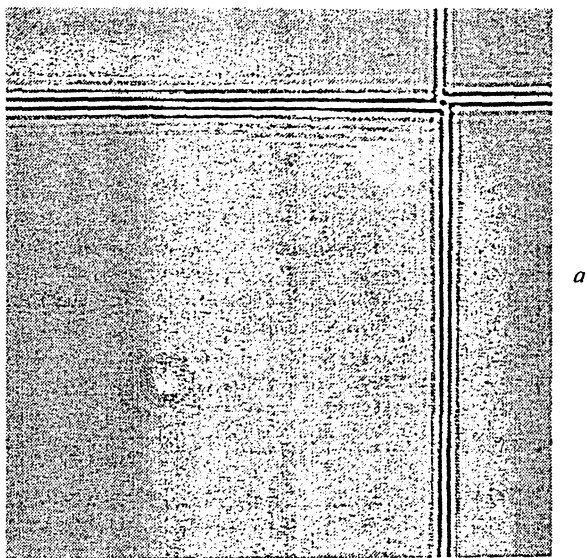


Рис. 4.5. Спиральный дефект [117]: а) поле амплитуды, черный цвет соответствует нулевой амплитуде; б) поле фазы, разность фаз между ближайшими черными линиями равна 2π , а между черной и серой — π

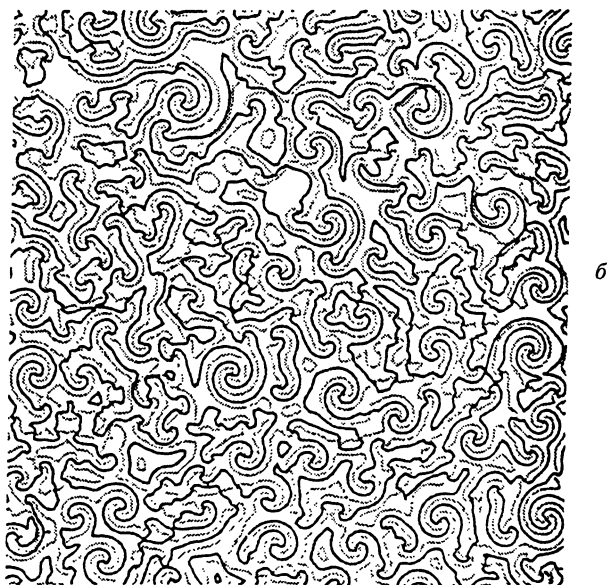
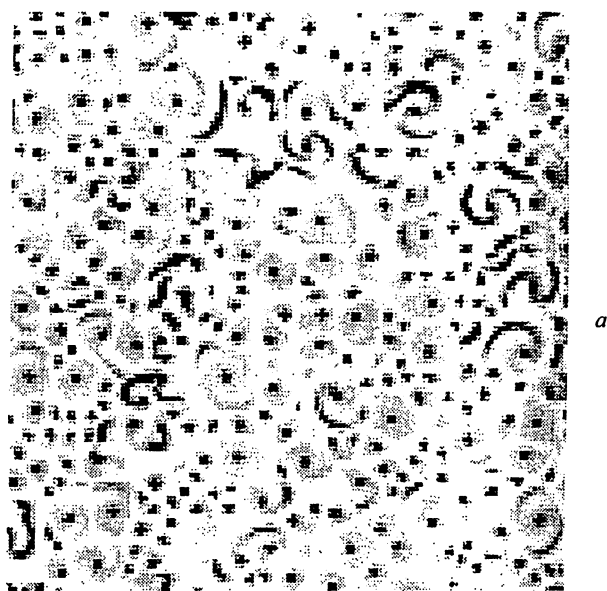


Рис. 4.6. Турбулентность дефектов [117]. Всего 268 топологических дефектов: а) поле амплитуды; б) поле фазы

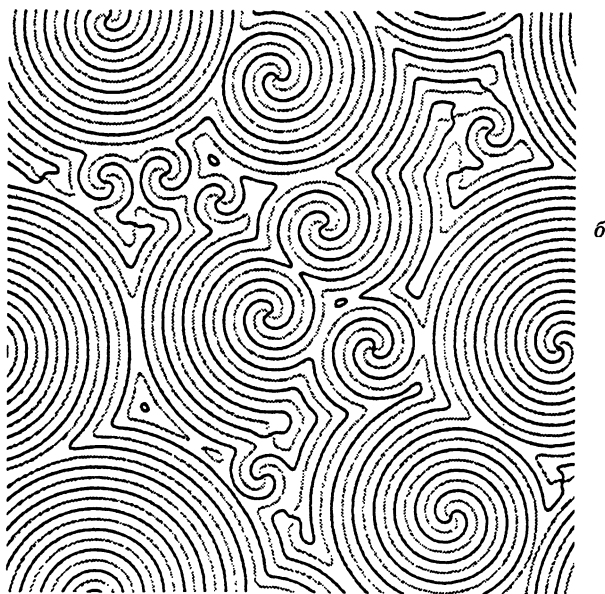
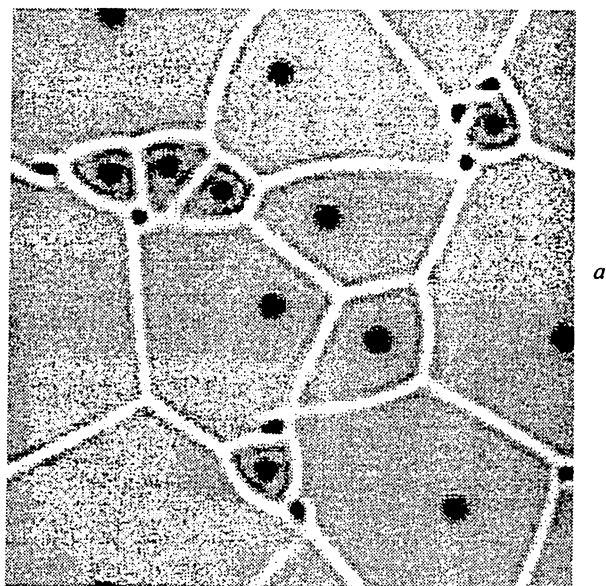


Рис. 4.7. Стационарный пространственный беспорядок [117]:
а) поле амплитуды; б) поле фазы

Глава 5

Динамическая теория «кристаллов»

Кристаллические формы, исключительно примитивные с точки зрения художника, во всяком случае несут в себе нечто от эстетической привлекательности простоты...

Чарльз Банн

Конечно, они предельно просты, эти, показанные на рис. 1.2 и 1.3, полностью упорядоченные паттерны, которые мы обобщенно называем «кристалл». Однако именно эта простота и регулярность вызывают очень трудные вопросы. Главные из которых: почему нелинейное поле в процессе эволюции переходит из начального неупорядоченного в полностью регулярное состояние? Каким образом в природе осуществляется отбор наиболее предпочтительных структур? Первый шаг к ответу на эти вопросы мы сделали еще в второй главе, обратив внимание на «резонансный» или избирательный в пространстве характер исходной неустойчивости. Именно такая неустойчивость обычно является необходимой для рождения упорядоченных паттернов, вызывающих наше восхищение. Однако, как мы видели, те же неустойчивости при изменении параметров задачи могут привести совсем к другим структурам или к рождению беспорядка. Таким образом, просто факта «резонансности» исходной неустойчивости еще недостаточно для формирования упорядоченной в пространстве кристаллической картины. Главным здесь является следующий этап эволюции—процесс взаимодействия разных мод—разных упорядоченных и неупорядоченных структур во времени. Это процессы конкуренции и селекции, которые и обеспечивают рождение порядка из первоначального хаоса.

Идеальное кристаллическое распределение поля (параметра порядка) выделяется среди прочих наличием трансляционной симметрии. Для двух пространственных координат это означает существование двух базисных векторов \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , таких, что рассматриваемая

картина остается неизменной при параллельных переносах (трансляциях) на любой вектор, представляющий собой линейную комбинацию этих двух векторов с целочисленными коэффициентами. В этой главе мы будем заниматься только идеальными «кристаллами» (без дефектов, неоднородностей, границ и т.д.). Пространственный Фурье-спектр идеального кристалла состоит из конечного числа дискретных компонент

$$A_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{2N} A_j \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_j}, \quad \mathbf{k}_{j+N} = -\mathbf{k}_j, \quad A_{j+N} = -A_j^* \quad (5.1)$$

все они лежат на окружности $|\mathbf{k}_j| = k_0 = 1$ и углы между ними равны (здесь \mathbf{k}_j — базисные вектора решетки). Для двумерных паттернов только $N = 1, 2, 3$ соответствуют кристаллам. Любой другой набор N формирует квазикристалл (см. следующую главу). Структура из роликов отвечает случаю $N = 2$, шестигранные Релей–Бенаровские ячейки $N = 6$ и решетки с квадратными ячейками (например, капиллярной ряби) $N = 4$.

Помимо исходных уравнений для параметра порядка удобно использовать также спектральную форму эволюционного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\mathbf{k}}}{dt} = & [\varepsilon - (k^2 - 1)^2] A_{\mathbf{k}} - \beta \int A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - \int \rho(\theta) A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта функция, $A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}}^*$ — комплексные амплитуды $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ мод, образующих двумерные паттерны, \mathbf{k} и \mathbf{r} — двумерные векторы, лежащие в плоскости этих паттернов, ε — расстояние до порога неустойчивости, β — параметр квадратичной нелинейности, определяющий трехмодовые взаимодействия типа $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, $\rho(\theta)$ — матричный элемент четырехмодового взаимодействия $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$, определяемого кубической нелинейностью, θ — угол раствора ромба, составленного из векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , и \mathbf{k}_3 . Для однородной и изотропной среды без вращения (ср. (3.17)) $\rho(\theta)$ удовлетворяет условиям симметрии

$$\rho(\theta) = \rho(-\theta) = \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta + 2\pi t). \quad (5.3)$$

Здесь t — это целое число.

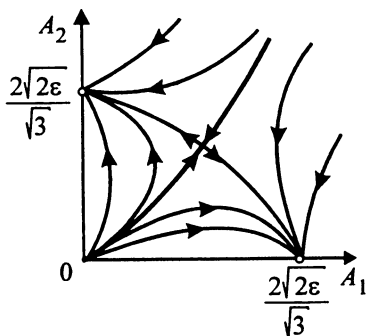


Рис. 5.1. Фазовый портрет системы (5.5)

Обсудим вначале более подробно случай, когда A_k — это Фурье-образ параметра порядка, описываемого уравнением СХ. Тогда непосредственно из (3.1) будем иметь

$$\rho(\theta) = \text{const} = \rho(0). \quad (5.4)$$

Если квадратичная нелинейность отсутствует $\beta = 0$, для комплексных амплитуд любой пары пространственно однородных мод получается простая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = \varepsilon A_{1,2} - \frac{3}{8} [|A_{1,2}|^2 + 2 |A_{2,1}|^2] A_{1,2}. \quad (5.5)$$

Здесь использовано представление $u(\mathbf{r}, t) = A_1(t)e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} + A_2(t)e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}} + \text{к.с.}$, где $|\mathbf{k}_{1,2}| = 1$. Фазовый портрет (5.5) представлен на рис. 5.1. Помимо неустойчивого состояния $A_1 = A_2 = 0$, здесь имеется еще седло с координатами $A_1 = A_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2\varepsilon}$ и два устойчивых узла: $A_1 = (2\sqrt{2\varepsilon})/\sqrt{3}$, $A_2 = 0$ и $A_1 = 0$, $A_2 = (2\sqrt{2\varepsilon})/\sqrt{3}$. Этот фазовый портрет описывает известный эффект конкуренции мод. Как видно, устойчивым оказывается лишь одномодовый (для конвекции — это однороликовый) режим. Другие возмущения подавляются.

На рис. 3.7 (глава 3) изображен фазовый портрет, описывающий конкуренцию 3-х мод. К сожалению, трудно представить траектории, отвечающие динамике n -модовой конкуренции, которая описывается системой

$$\dot{A}_j = \varepsilon A_j - A_j \sum_{l \neq j}^N \rho_{jl} |A_j|^2, \quad \rho_{jl} = \rho_{lj}, \quad \rho_{jl} > \rho_{jj}. \quad (5.6)$$

Отметим, что $\rho_{jl} = 6/8$, $\rho_{jj} = 3/8$, если уравнения конкуренции мод получены из уравнений Свифта-Хоенберга (3.2).

Используя выражение для свободной энергии покажем, что режим совместного сосуществования роликов различной ориентации неустойчив независимо от числа N . Действительно, из выражения для свободной энергии

$$F = -\varepsilon \sum_{j=1}^N |A_j|^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{jl} |A_j|^2 |A_l|^2 \quad (5.7)$$

следует, что в одномодовом режиме

$$F = F_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 / \rho_{jj}. \quad (5.8)$$

В то же время в режиме совместной генерации N мод с интенсивностями $|A_j|^2 = (\varepsilon / \sum_{l=1}^N \rho_{jl})$ имеем

$$F_N = -\frac{N}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sum_l \rho_{jl}}, \quad (5.9)$$

но $\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \rho_{jl} > \rho_{jj}$, следовательно $F_N > F_1$.

Таким образом, в рамках градиентной системы (5.6) в результате эволюции всегда устанавливается кристаллическая структура простейшего вида — периодическая система роликов. Их ориентация в пространстве произвольна и зависит от начальных условий.

Если $\beta \neq 0$, то простая роликовая структура может оказаться неустойчивой по отношению к возбуждению пар мод, удовлетворяющих условию трехмодового резонанса $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$. Действительно, если, например, для конвекции небуссинесковские эффекты существенны, именно такая неустойчивость, приводящая к рождению «кристалла» с симметрией $3(6)$ порядка и наблюдается в экспериментах (см. рис. 1.3, и рис. 5.2). Замечательно, что рождение шестигранной кристаллической решетки при сильной надкритичности практически не зависит от начальных условий. Возвращаясь к рис. 3.2 (Глава 3), где показаны результаты компьютерного эксперимента в рамках модели (3.1), можно проиллюстрировать различные пути рождения такого

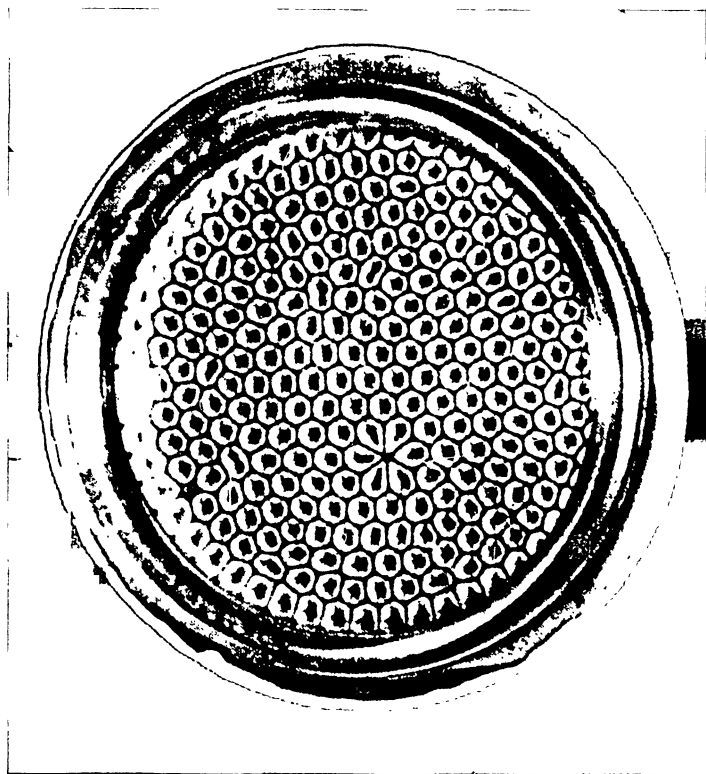


Рис. 5.2. Шестигранная решетка с несколькими топологическими дефектами, возникающая при конвекции Марангони-Бенара в слое силиконового масла при однородном подогреве снизу

кристалла. Как видно, промежуточные состояния могут быть весьма разнообразны—ролики, цилиндрические паттерны (мишени), локализованные шестигранники. Однако все они неустойчивы и при $t \rightarrow \infty$ устанавливается состояние, отвечающее минимуму свободной энергии системы (3.1)—шестигранная решетка.

Ориентация установившейся шестигранной решетки в «большой» (пространственно протяженной) системе слабо зависит от граничных условий и от эксперимента к эксперименту может быть различной. Добавим, что если надкритичность увеличивать, то, как правило, устанавливается не идеальная кристаллическая структура, а решетка с дефектами (см. рис. 5.2) или паттерн, состоящий из «кусков» шестигранной решетки различной ориентации (доменов), как на рис. 2.1. Эти феномены мы обсудим в Главе 8.

На модовом языке шестигранная решетка описывается системой ОДУ вида

$$A_j = \varepsilon A_j - \beta' A_l^* A_q^* - A_j \left[|A_j|^2 + 2 \sum_{l \neq j} |A_l|^2 \right]. \quad (5.10)$$

При не слишком малых β' эта система имеет лишь одно устойчивое равновесие $A_1 = A_2 = A_3 = A^0$, которое и отвечает регулярной шестигранной решетке. Естественно, что (5.10), как и уравнение СХ — это градиентная система (ср. (3.14)) с функционалом

$$F = - \left\{ \varepsilon (|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2) - \frac{1}{2} (|A_1|^4 + |A_2|^4 + |A_3|^4) - 2(|A_1|^2 |A_2|^2 + |A_1|^2 |A_3|^2 + |A_2|^2 |A_3|^2) - \beta' (A_1^* A_2^* A_3^* + \text{с.с.}) \right\}. \quad (5.11)$$

Таким образом, формирование кристаллической решетки с симметрией порядка 3(6) в данной модели должно происходить монотонно во времени, без всяких колебаний, что и подтверждается физическими и компьютерными экспериментами.

Рождение шестигранной решетки в рамках модели (3.1) или (5.10)—это пример рождения «кристалла», в котором не только амплитуды, но и фазы образующих его мод связаны. Такие кристаллы мы будем называть жесткими. Нетрудно, однако, заметить, что для совместного существования разноориентированных мод, которые

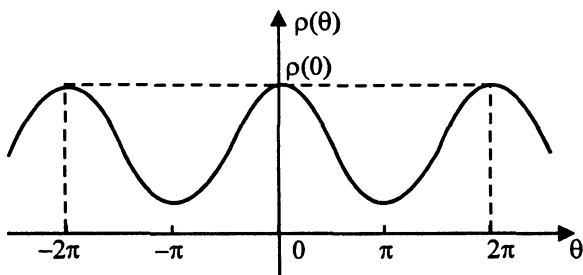


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента взаимодействия от угла, обеспечивающая устойчивость режима сосуществования мод

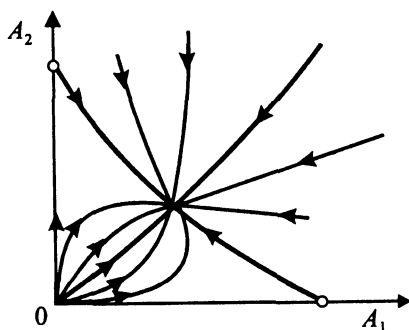


Рис. 5.4. Фазовый портрет для уравнений, описывающих сосуществование двух мод

могут сформировать кристалл, вовсе не обязательно, чтобы одни моды генерировали другие, вполне определенные. Необходимо другое — чтобы одни моды не мешали (!) существованию других. Другими словами, чтобы не было сильной конкуренции. Возможно ли такое? Формальный ответ прост: если матричные элементы ρ_{jl} таковы, что

$$\rho_{jj} > \rho_{jl} \quad (l \neq j) \quad (5.12)$$

или, в более общем виде, коэффициент $\rho(\theta)$ в (5.2) зависит от θ , как например, на рис. 5.3, то режим совместной генерации разноориентированных мод будет устойчив. Фазовый портрет амплитудных уравнений, описывающих взаимодействие двух мод в случае (5.12), представлен на рис. 5.4. Видно, что простые паттерны в виде роликов неустойчивы, а режим $|A_1|^2 = |A_2|^2 = \varepsilon / (\rho_{1,1} + \rho_{1,2})$, отвечающий,

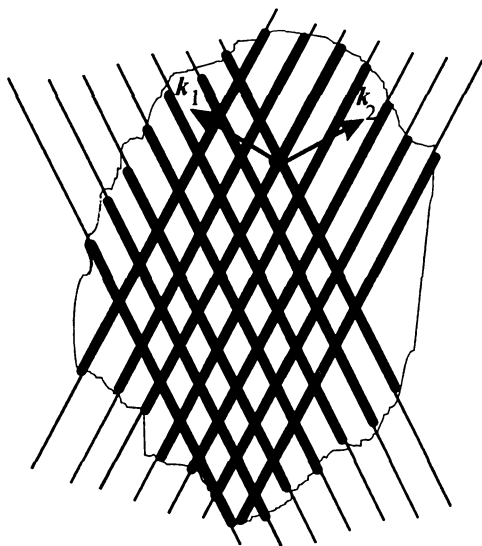


Рис. 5.5. Мягкий кристалл. Угол между волновыми векторами k_1, k_2 зависит от начальных возмущений

например, ромбическому кристаллу, как на рис. 5.5, будет устанавливаться в процессе эволюции при любых начальных условиях. Такие кристаллические структуры можно назвать «мягкими кристаллами». Фазы образующих их мод, в отличие от случая «жестких кристаллических структур», произвольны, т.е. не связаны друг с другом.

Данный нами формальный ответ, однако, ничего не говорит о физике дела. А именно: почему в одних случаях элементарные (нормальные) моды конкурируют сильно, а в других практически не замечают друг друга?

Это удобно пояснить на энергетическом языке. Непосредственно из уравнения (5.7) следует, что феномен конкуренции есть результат дополнительного нелинейного затухания, которое одна мода создает для другой. Если моды энергетически слабо зависимы (в простейшем случае «питаются» от разных источников), то такое дополнительное затухание незначительно. Именно так обстоит дело, например, в задаче о капиллярной ряби [5, 58] или для конвекции с плохой теплопроводностью от нижней части слоя к верхней [60]. При этом уравнение СХ недостаточно правильно описывает ситуацию—нелинейность,

ответственная за стабилизацию неустойчивости должна быть дополнена слагаемыми, зависящими не только от амплитуды возмущения, но и от градиента ее неоднородного распределения в пространстве. Это могут быть различные добавки вида $(\nabla u)^2 u$, $u(\nabla^2 u)^2$, $u(\nabla^4 u^2)$ и т.д. Выбор того или иного слагаемого определяется физикой задачи. В частности, для конвекции в отсутствие потока тепла для возмущений на верхней и нижней границах нелинейную диссипацию записывают в форме $u^3 - bu\nabla^4 u^2$. Тогда вместо (3.1) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\varepsilon - (\nabla^2 + D^2)] u - u^3 + bu\nabla^4 u^2. \quad (5.13)$$

Эта же модель используется и для описания конвекции в бинарных смесях. Прямой подстановкой в (5.13) решения в виде $u = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{iky} + \text{к.с.}$ для амплитуд взаимортогональных роликовых структур после усреднения можно получить при $b > 0$ уравнение вида (5.7) с коэффициентами ρ_{jl} , удовлетворяющими условию (5.12). Диссипация, описываемая слагаемым b , дает вклад лишь в самодействие и тем самым снижает конкуренцию между роликовыми структурами. На рис. 5.6 показана временная эволюция случайного начального распределения поля u в рамках модели (5.13). Даже в круглой кювете

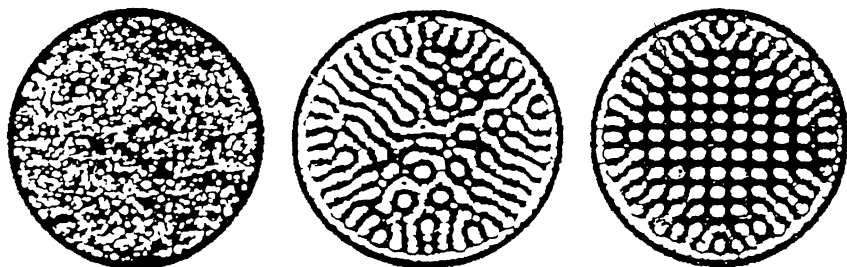


Рис. 5.6. Установление квадратной конвективной решетки в круглой кювете. Результат компьютерного эксперимента [59]

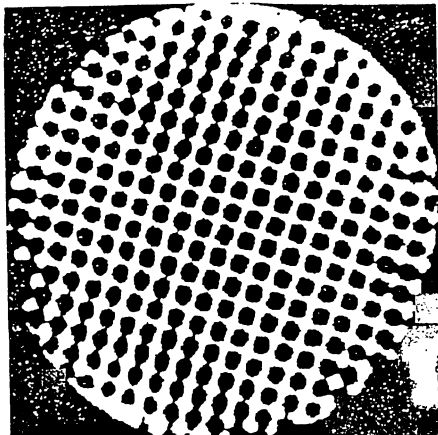


Рис. 5.7. Экспериментально наблюдавшаяся в круглой кювете кристаллическая решетка в виде суперпозиции взаимно ортогональных роликов

при достаточно большом t устанавливается кристаллическая решетка с квадратными ячейками [59]. Именно такой «кристалл» с квадратными ячейками наблюдается вблизи порога неустойчивости для конвекции в плоском слое при конечной теплопроводимости пластин—рис. 5.7 [60].

Таким образом, мы познакомились с двумя возможными динамическими механизмами формирования кристаллических паттернов. Один из них связан со слабой конкуренцией, допускающей сосуществование и устойчивость режима совместной генерации мод. Такие кристаллы мы назвали мягкими. Другой механизм связан с резонансным взаимодействием мод, когда моды не просто не мешают, но и индуцируют друг друга. Такие кристаллы естественно назвать жесткими. В качестве примера можно привести не только известную нам решетку из шестигранников, но и обсуждавшиеся только что решетки с квадратными ячейками. В частности, в эксперименте [61, 62, 63] сильная зависимость вязкости от температуры может быть ответственной за резонансное взаимодействие мод $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$.

Глава 6

Квазикристаллы и беспорядок

Это число является не чем иным, как отношением, известным под названием «золотого сечения», играющим столь важную роль в попытках сведения красоты пропорций к математической формуле.

Герман Вейль

Спроектируем периодическую структуру в виде решетки из M -мерных кубических ячеек на плоскость меньшей размерности m . При $M = 5$ и $m = 2$ и большинстве углов проектирования мы получим на плоскости удивительный по красоте неперiodический узор, изображенный на рис. 6.1 (см. [66]). Это знаменитый паркет Пенроуза. Он составлен из ромбов двух видов с острыми углами 36° и 72° [64, 65]. Паркет Пенроуза иногда называют геометрической игрушкой, однако такой квазикристалл с симметрией десятого порядка наблюдается в природе. Сейчас известны двумерные квазикристаллы с симметрией 4-го порядка в тонких пленках сплавов, 5-го порядка — в слоистых веществах и 6-го порядка — в малых твердых частицах. Известная

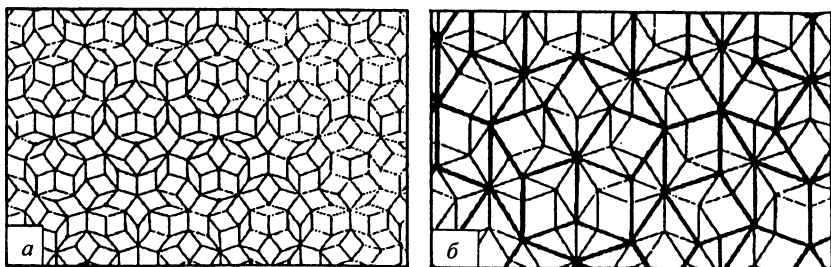


Рис. 6.1. Паркет Пенроуза

«алгебраическая» модель двумерного квазикристалла связана с представлением стационарного распределения плотности вещества (или параметра порядка) в формуле (5.1)

$$A_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{2N} A_j \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_j} \quad (6.1)$$

при условии, что проекции векторов \mathbf{k}_j на любую ось являются взаимно несоизмеримыми. Именно базис из пяти стоячих волн (волновых векторов) с равными 72° углами между соседями и порождает паркет Пенроуза. Подобно обычным кристаллам структура на рис. 6.1 обладает дальним порядком (это следует хотя бы из того, что такой рисунок получен как проекция строгого кристалла). Однако паркет Пенроуза обладает и локальной симметрией относительно поворота вокруг некоторой оси на угол 72° ¹, а это уже несовместимо с необходимой для кристаллов трансляционной инвариантностью. Добавим, что в узоре на рис. 6.1 можно найти сколь угодно большие фрагменты с симметрией пятого порядка, а если сравнить соотношение масштабов подобных структур (см. рис. 6.1б), то станет понятно, откуда красота пропорций — масштабы отличаются в $\mu = (1 + \sqrt{5})/2$ раз. Число μ — это и есть золотое сечение!

Реально наблюдаемый пространственный Фурье-спектр квазикристалла несколько отличается от (6.1). Он содержит не только N главных мод (проекции которых несоизмеримы), но и их высшие и комбинационные пространственные гармоники

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{2N} A_j e^{i\mathbf{k}_j \mathbf{r}} + (\text{высшие и комбинационные гармоники}). \quad (6.2)$$

Таким образом спектр квазикристалла, состоящий из дискретных компонент, может содержать их сколь угодно много и они могут быть расположены сколь угодно плотно (образуя канторовское множество). Однако особенных пиков (отвечающих периодическим модам, формирующим квазикристаллы) может быть немного. Именно эти пики и обнаруживаются в экспериментах по Брэгговскому рассеянию в металлических сплавах [143].

Хотя за последние десять лет появилось множество экспериментов, где квазикристаллические структуры наблюдались, все эксперименты связаны с микрофизическими объектами. Первые наблюдения

¹ В общем случае локальная симметрия определяется углом поворота π/N .

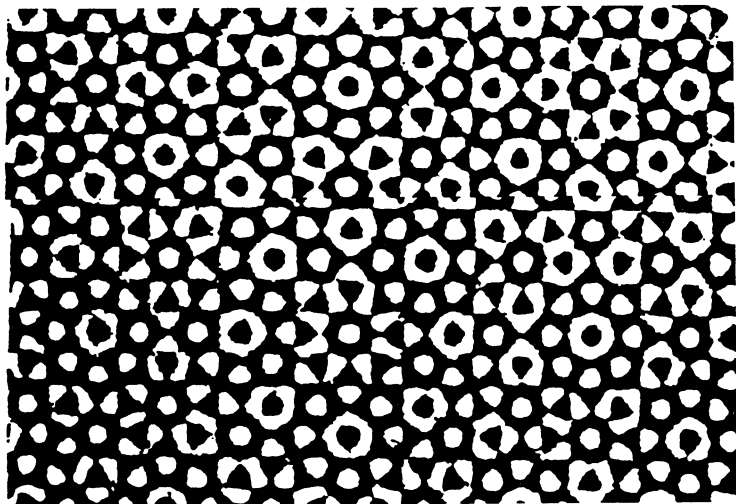


Рис. 6.2. Компьютерное моделирование квазикристалла, образованного четырьмя стоячими капиллярными волнами. Угол между соседними волновыми векторами составляет 45°

квазикристаллического порядка в макрофизике были сделаны только в 1992 году [9]. Речь идет об устойчивых квазикристаллических паттернах на поверхности слоя жидкости в осциллирующем гравитационном поле (квазикристаллы ряби) (см. также гл. 2). Копенгагенская группа [9] обнаружила устойчивые октагоны — квазикристаллы с симметрией восьмого порядка ($N = 4$), образованные четырьмя стоячими капиллярными волнами, развернутыми под углом 45° (см. рис. 1.7 и рис. 6.2). Эксперименты проводились с вязкой жидкостью в цилиндрической ячейке большого диаметра $d \sim 50\lambda$ (где $\lambda = 2\pi/k_0$ — длина параметрически возбуждаемых капиллярных волн). Французская группа [10] наблюдала квазикристалл, образованный шестью стоячими волнами, угол между которыми составлял 30° (см. рис. 1.8 и рис. 6.3). В этом эксперименте специально изменялась форма ячеек и, как видно из рисунка (см. рис. 1.8), и в круглой кювете, и в ячейке, границы которой повторяли границы Франции на географической карте (расстояние от Бордо до Женевы составляло 5 см), форма квазикристаллических паттернов была одной и той же. Существенной особенностью этого эксперимента была бигармоничность накачки. В

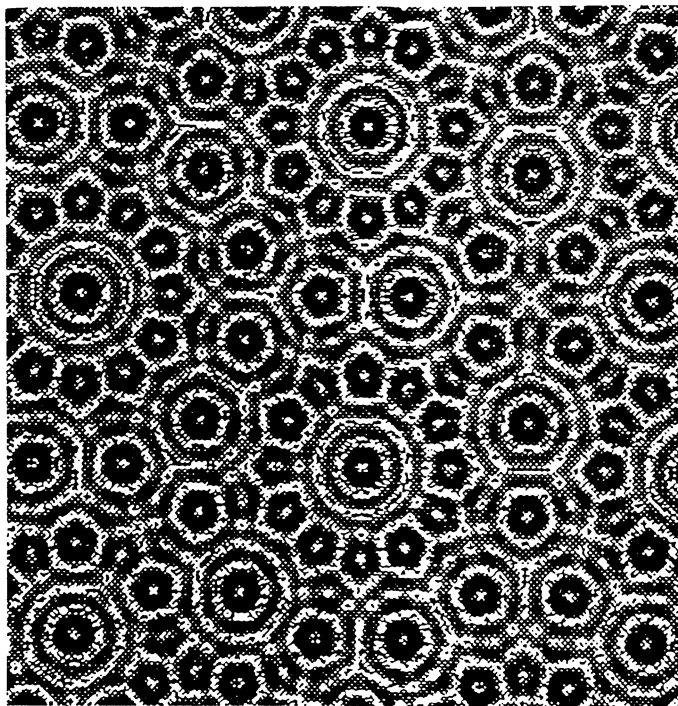


Рис. 6.3. Компьютерное моделирование квазикристалла, показанного на рис. 1.8а, 1.8б

результате одновременно могли возбуждаться моды с $|\mathbf{k}| = k_0$ and $|\mathbf{k}| = k_0 + \delta k$ (где $\delta k/k_0 \approx 0.17$). Проистекающие отсюда следствия весьма важны, и мы их обсудим специально чуть ниже.

§1. Октагоны, декагоны и додекагоны

Обратимся вновь к системе (6.1), описывающей динамику кристаллических или квазикристаллических паттернов с дискретным набором $2N$ Фурье-компонент. Для амплитуд этих мод как функций времени из (6.2) можно получить

$$\frac{dA_j}{dt} = \left[\dot{\gamma}_0 - 4\rho(0) |A_j|^2 - 8 \sum_{l=1}^N \rho(\theta_{jl}) |A_j|^2 \right] A_j + \beta' A_{j+2l}^* A_{j+4l}^* \quad (6.3)$$

Здесь $\beta' \neq 0$ только в случае, когда $l = n/3$, $\theta_{jl} = \pi(j-l)/N$ — угол между векторами \mathbf{k}_j и \mathbf{k}_l , как и прежде, $\rho(\theta) = \rho(-\theta) = \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta + \pi m)$. Ясно, что динамическая система (6.3) имеет смысл только в случае, если число взаимодействующих мод не слишком велико. Действительно, мы можем выделить лишь такие моды, угол между волновыми векторами которых значительно превосходит относительную ширину пакета взаимодействующих мод (т.е. ширину кольца на рис. 6.4, пропорциональную $\varepsilon^{1/2}$).

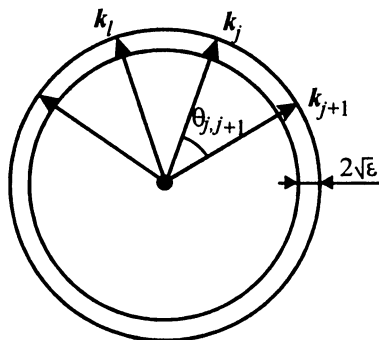


Рис. 6.4. Плоскость волновых чисел. Внутри кольца шириной $2\sqrt{\varepsilon}$ находятся волновые вектора, соответствующие неустойчивым модам

При $N = 4$ динамика системы (6.2) характеризуется двумя контрольными параметрами

$$\gamma_1 = 2\rho(\pi/4)/\rho(0) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\rho(\pi/2)/\rho(0).$$

Квазикристаллам с $N = 4$ (октагонам) отвечает состояние равновесия (6.3)

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \left[\frac{\gamma_0}{1 + 2\gamma_1 + \gamma_2} \right]^{1/2}. \quad (6.4)$$

Анализ устойчивости этого состояния в рамках системы (6.3) дает нам необходимые критерии устойчивости октагонов

$$\gamma_1 < (1 + \gamma_2)/2, \quad \gamma_2 < 1. \quad (6.5)$$

Полный анализ устойчивости по отношению к произвольным возмущениям должен проводиться на основе линеаризованного вблизи решения (6.4) уравнения (6.2) (ввиду громоздкости мы его здесь опускаем, см. работу [68]).

Квазикристалл с $N = 5$ изображен на рис. 6.5. Его, также как и октагоны, можно описать с помощью лишь амплитудных уравнений (6.3) при $\beta' = 0$. В этом случае мы имеем два независимых параметра

$$\gamma_1 = 2\rho(\delta/5)/\rho(0) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\rho(2\delta/5)/\rho(0).$$

Квазикристаллической структуре отвечает состояние равновесия с равным значением амплитуд всех мод

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = [\gamma_0/(1 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2)]^{1/2} \quad (6.6)$$

и произвольными фазами мод. Необходимые условия устойчивости (в рамках (6.3)) также легко находятся [68]:

$$1 + \psi\gamma_1 - \mu\gamma_2 > 0, \quad 1 + \psi\gamma_2 - \mu\gamma_1 > 0, \quad (6.7)$$

где $\mu = 2 \cos \pi/5$ — золотое сечение, а $\psi = 2 \cos 2\delta/5 = \sqrt{\delta - 1}/2$.

Квазикристаллы с $N = 6$ — додекагоны (см. рис. 6.3) — при $\beta' = 0$, как и квазикристаллы с более низкой симметрией ($N = 4, 5$), не несут никакой информации о фазах образующих их мод. Фазы произвольны. Однако, при $\beta' \neq 0$ квазикристаллические структуры, обнаруженные в эксперименте [10], представляют собой композицию уже не стоячих волн, а гексагонов, которые в данном случае можно рассматривать как нормальные формы. Внутри каждой резонансной тройки мод $\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_i = 0$ фазы ϕ_m связаны независимыми соотношениями

$$\sin \left(\sum_m \phi_m \right) = 0, \quad (6.8)$$

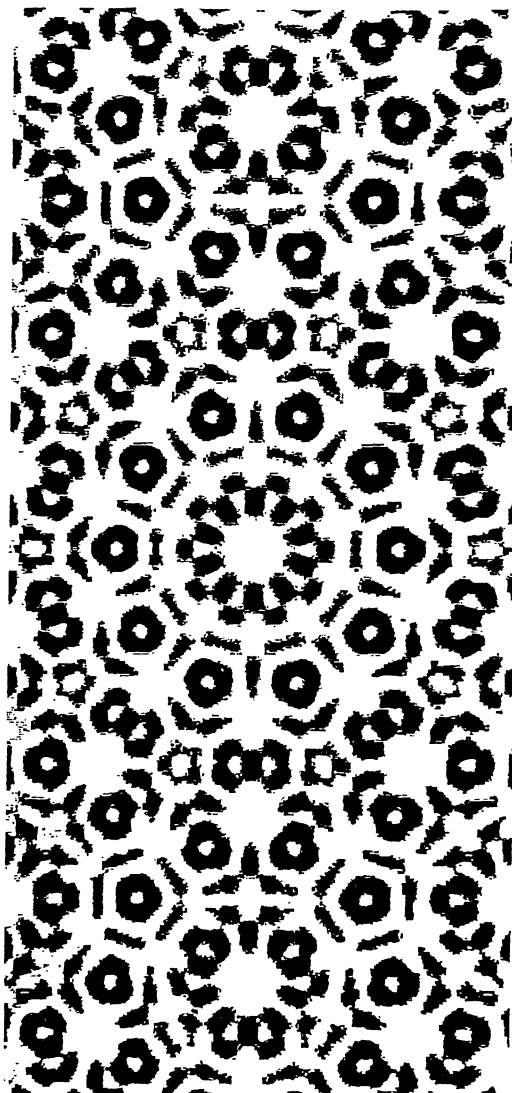


Рис. 6.5. Квазикристалл пятого порядка

здесь m — четно для одной тройки волн (одной подрешетки) и нечетно для другой.

Мы уже упоминали еще об одном проявлении квадратичной нелинейности в уравнениях типа (5.2) (или (6.3)) — с такой нелинейностью связан механизм взрывной неустойчивости. Существенно, что взрывная неустойчивость приводит, в частности, к жесткому возбуждению структур, т.е. к их генерации при отрицательной надкритичности, когда $\gamma_0 < 0$. Подобный механизм возбуждения характерен и для гексагонов.

В заключение этого раздела вернемся к обсуждавшемуся в начале главы эксперименту о наблюдении «капиллярных квазикристаллов» с $N = 6$. Как мы сейчас знаем, додекагоны можно рассматривать как композицию двух гексагонов с примерно равными амплитудами и развернутыми друг относительно друга на 30° . Для устойчивого сосуществования таких гексагонов необходимо, чтобы они слабо конкурировали друг с другом. Одна из возможностей реализовать это в эксперименте — доставлять энергию разным гексагонам из разных источников. Именно это и осуществляется в эксперименте [10] при возбуждении капиллярных квазикристаллов однородной накачкой с двумя разными, но близкими частотами.

§2. «Турбулентный» кристалл

Квазикристаллы с $N = 4, 5, 6 \dots$ — это простейшие квазипериодические пространственные структуры, уже содержащие элементы неопределенности — фазы мод. Вспомним здесь известную модель турбулентности Ландау–Хопфа [69, 147]. В рамках этой модели турбулентность представлялась как набор мод с несоизмеримыми частотами и произвольными фазами. Соответствующая временная реализация — наблюдаемая

$$u(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{i\omega_j t + i\phi_j} + \text{с.с.} \quad (6.9)$$

при достаточно большом N выглядит абсолютно случайной и вполне годится для моделирования нерегулярных и непредсказуемых турбулентных пульсаций. Корреляционная функция процесса (6.9) достаточно быстро падает и вновь становится близкой к единице лишь через время возврата T , которое очень велико (время возврата

Пуанкаре $T \sim e^{\alpha N}$, $\alpha \sim 1$, т.е. экспоненциально растет с ростом N). Подобная модель случайных временных пульсаций (ее математический образ — незамкнутая намотка на N -мерном торе в фазовом пространстве некоторой динамической системы) — действительно, имела бы право на жизнь, однако, как показывают недавние математические исследования, квазипериодические движения динамической системы с $N = 3$ обычно неустойчивы. Незамкнутая намотка на торе либо замыкается, образуя периодический аттрактор — предельный цикл, либо разрушается сам N -мерный тор и вместо него рождается другой аттрактор — странный, который и служит математическим образом устойчивых хаотических пульсаций, порождаемых динамической системой (подробнее см., например, [71]).

Сказанное относится к сосуществованию несоизмеримых временных мод. А что с пространственными? Похоже, что устойчивое сосуществование шести (а если говорить не о самих модах, а о волнах, то и 12) мод возможно. А если N значительно увеличить, то дальний порядок можно будет обнаружить лишь на столь далеких расстояниях (напомним, «длина возврата» $\sim O(e^{\alpha N})$, т.е. порядок теряет всякий физический смысл). Таким образом, это будет уже не квазикристалл, а хаотическое «турбулентное» распределение параметра порядка в пространстве, которое можно назвать «турбулентный кристалл» [72].

Рассмотрим в качестве примера эволюцию параметра порядка $u(\mathbf{r}, t)$, определяемую вариационной моделью с функционалом свободной энергии вида [72]

$$F = \int dx dy \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla^2 + 1)u]^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^2 + \alpha_1 (\nabla^2 u)^4 + \alpha_2 (\nabla u)^4 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} [(\nabla^2 + q_m^2)u_m]^2 + \frac{1}{2} \mu^2 u_m^2 + \mu \Gamma_m u_m u^2 \right\}. \quad (6.10)$$

Здесь u_m — некоторые вторичные поля, которые играют важную роль в снижении конкуренции между отдельными модами, формирующими квазикристалл. Формально это связано с «организацией» такой зависимости коэффициента $\rho(\theta)$, которая дает возможность сосуществовать очень большому числу мод. Добавим, что, например, в конвекции роль одного из полей вторичных u_m может играть среднее

течение. Представим u в виде

$$u = \sum_{j=1}^N (A_j e^{i\mathbf{k}_j \mathbf{r}} + \text{c.c.}) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (6.11)$$

где A_j имеют порядок $O(\varepsilon^{3/2})$. Поле u_m запишем так

$$u_m = \varepsilon u_{m_1} + \dots \quad (6.12)$$

Ньюэлл и Помо [72] показали, что при $\mu \ll \varepsilon^2$ и при функционале (6.10) коэффициент $\rho(\theta)$ описывается выражением

$$\begin{aligned} \rho(\theta) = 24\alpha_1 + (8 + 16 \cos^2 \theta)\alpha_2 - \sum_{m=1}^N 8r_m^2 \left[\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (q_m^2 - 2 - 2 \cos \theta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (q_m^2 - 2 + 2 \cos \theta)^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon + q^4 3_m} \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Если число вторичных полей велико, то можно реализовать ситуацию, когда $\rho(\theta) < 1/2\rho(0)$ (см. (5.1)), что и необходимо для существования турбулентного кристалла. Внешне пространственное распределение поля в турбулентном кристалле должно напоминать «скарлетный беспорядок», изображенный на рис. 1.4. Их статистические характеристики также будут похожи. Действительно, в установившемся режиме равных амплитуд мод

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\langle \rho \rangle}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j^N \cos(\mathbf{k}_j \mathbf{r} + \phi_j), \quad (6.14)$$

где $\langle \rho \rangle = (\rho_0 + \dots + \rho_{N-1})/N$. Поскольку ϕ_j имеют случайное распределение с нулевым средним, u имеет Гауссовское распределение с нулевым средним. При вычислении пространственной двухточечной кросс корреляции $\langle u(x, y)u(x', y') \rangle$, ввиду вращательной инвариантности, можно положить $y = y' = 0$. Тогда получается

$$\begin{aligned} \langle u(x, 0), u(x', 0) \rangle &= \left\langle \frac{\varepsilon}{\langle \rho \rangle} \frac{1}{N} \sum_{j,l} \cos(x \cos \theta_j + \phi_j) \cos(x' \cos \theta_l + \phi_l) \right\rangle = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\langle \rho \rangle} \frac{1}{N} \sum_j \cos[(x - x') \cos \theta_j] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2\langle \rho \rangle} \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma \cos[(x - x') \cos \theta] d\theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\langle\rho\rangle} J_0(|x - x'|) \quad (6.15)$$

(сравни с (1.2)). Таким образом пространственные корреляции экспоненциально быстро затухают. Как мы видели (см. гл.1) для этого достаточно $N \sim 100$. Как кажется, попытки конструирования «турбулентного кристалла» — это естественное желание использовать наиболее наглядный путь построения «статистического» пространственного беспорядка. В то же время сам факт существования квазикристалла — уже предвестник динамического (конечномерного) пространственного беспорядка. Действительно, незамкнутые «намотки на торе» в фазовом пространстве динамической системы обычно структурно неустойчивы, и при сколь угодно малом изменении параметров топология траекторий качественно меняется — возникает либо периодическая (замкнутая) траектория, либо — стохастическое множество. На основании пространственно-временной аналогии можно сказать, что первая возможность соответствует «кристаллу», а вторая — пространственному беспорядку. Теперь представим себе, что у нас есть управляющий параметр, например, амплитуда внешнего периодического в пространстве поля. Если этот параметр увеличивается, то, поскольку в некотором фазовом пространстве незамкнутая намотка на торе может разрушиться, кажется весьма правдоподобным, что при этом (как и в одномерном случае) произойдет переход от квазипериодичности к конечномерному пространственному беспорядку.

Такая двумерная задача не только никем не решалась, но даже и не ставилась. Эту задачу о рождении пространственного беспорядка при увеличении управляющего параметра в ближайшее время, несомненно, удастся решить, хотя она требует введения довольно тонких математических понятий, связанных именно с двумерностью или трехмерностью пространства. Например, необходимо ввести такое понятие, как незамкнутая намотка на торе в некотором матричном пространстве.

Как нам сейчас кажется, эту задачу можно поставить несколько более просто. Как известно, во многих экспериментах, например, с жидкими кристаллами, конвекцией Бенара и параметрически возбуждаемой рябью наблюдаются весьма интригующие картины неупорядоченного расположения дефектов. Часто сами дефекты могут быть принципиально неодномерными, например, типа «розеточек» (рис. 5.3), но могут быть и дефекты попроще — волнового типа, как изображенные на рис. 6.6а [74]. Подобные дефекты можно рассматривать в

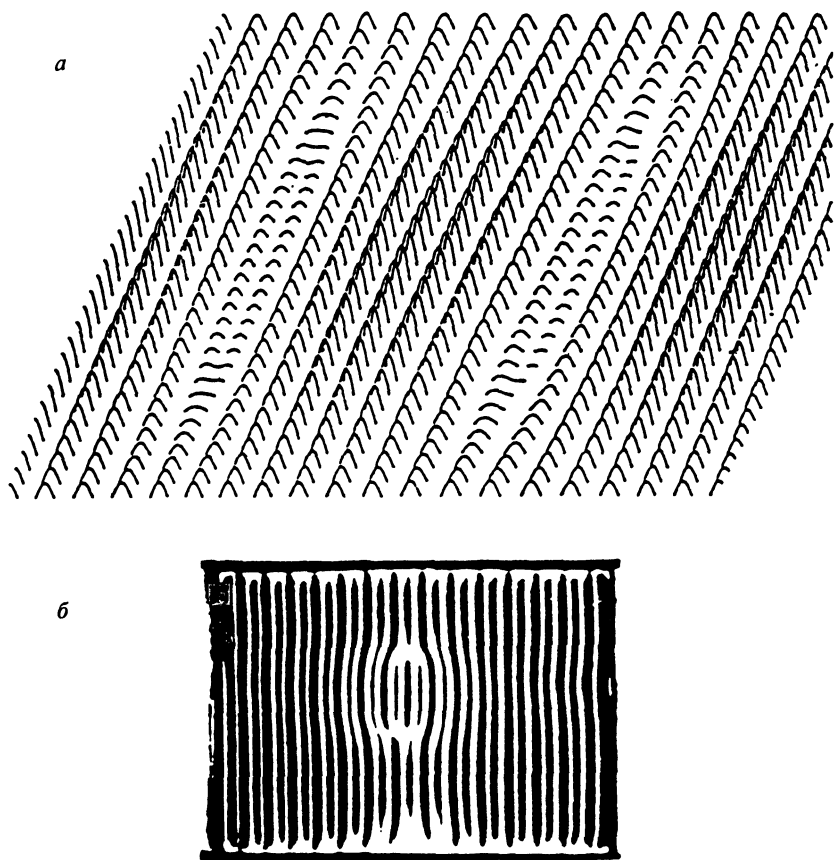


Рис. 6.6. Топологические дефекты формируемые функцией $u(x, y) = \cos x + 1,3 \cos y \cos (1,26x)$ [73] (а); наблюдаемые при электрогидродинамической конвекции в жидком кристалле [74] (б)

рамках почти одномерной задачи, если по одной из координат взять небольшое число мод (например, рассматривая магнитогидродинамическую конвекцию в узкой «полосе» жидкого кристалла), а вторую координату считать безграничной. Тогда мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по этому безграничному направлению. Так можно сконструировать периодическую дорожку дефектов из небольшого числа мод. Это сделано Экманом и Прокачия [73]. Но здесь еще нет динамического беспорядка. Если же приложить контролируемое внешнее периодическое поле (в данном случае мы имеем дело с незамкнутой намоткой на торе в обычном — векторном — фазовом пространстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений), то можно получить и пространственный беспорядок подобных дефектов. Однако прежде нам следует разобраться в элементах динамики дефектов, что мы и сделаем в следующих главах.

Глава 7

Рождение и нелинейная жизнь спиралей

Очень, очень интересно,
Хорошо ли я смотрюсь,
Когда быстро я верчусь
Из эстрадной песенки

§1. Спиральные формы

У каждого читателя, по-видимому, возникают свои ассоциации и образы таких форм. Спиральная форма раковины, спиральные галактики, спиральная структура токового слоя вокруг солнца, вращающиеся спиральные волны в химических автокаталитических реакциях и многое, многое другое. Что общего между этими столь разными феноменами и есть ли между ними что-либо общее? Ответ здесь точно такой же, как и в случае тривиальных структур, например, периодических по одной или двум координатам решеток. Когда речь идет о рождении спиралей, предстоит отыскать ответственную за это неустойчивость и нелинейные механизмы, формирующие устойчивые спиральные структуры. Естественно, что подобных механизмов может быть множество. Однако, в большинстве случаев спиральные структуры, в том числе и вращающиеся, имеют важную общую черту — это наличие особенности, или особенностей в ядре спирали. Такая особенность может быть естественной неоднородностью среды, как например, солнце, когда речь идет о спиральном токовом слое, либо это может быть топологическая особенность самого поля. Мы ограничимся в нашем рассмотрении только изотропными средами (полями) без неоднородностей. Спирали в таких средах — это волны. Волны концентрации или волны амплитуд и фаз осциллирующих полей. Мы рассмотрим оба случая.

§2. Неравновесные среды с реакцией и диффузией

Примерами таких сред, как мы уже упоминали в предыдущих главах, служат химические реакции на поверхности или в ограниченном слое [76], нервные ткани, например, такие как сердечная мышца [77], популяции амёб [78], среды с горением и восстановлением [79, 80] и многие другие. Во всех этих случаях спиральные структуры весьма типичные пространственно-временные образования.

Насколько нам известно, осциллирующие химические реакции впервые наблюдал Виллиам Брэй в 1921 году [81]. Он изучал разложение перекиси водорода на воду и кислород в присутствии йода как катализатора. К сожалению, его результаты были встречены всеобщим недоверием. Как считалось, они противоречили второму началу термодинамики. Как стало понятно примерно 30 лет спустя, благодаря работам Онсагера и Пригожина, осциллирующие химические реакции не имеют никакого отношения ко второму началу просто потому, что здесь речь идет о неравновесных процессах.² Вдали же от термодинамического равновесия следующий из второго начала принцип непрерывного возрастания энтропии, как известно, не работает. Доказательство тому рождение из начального беспорядка разнообразных пространственно-временных структур, о чем мы уже много знаем. И тем не менее, уже после опубликования работ Онсагера и Пригожина история повторилась. В 1958 г. Б.П. Белоусов наблюдал колебательную химическую реакцию, в ходе которой ионы бромата окисляют броммалоновую кислоту. Реакция катализировалась комплексными ионами железа [82]. И вновь научная общественность посчитала результаты странными, в результате чего работа Белоусова была опубликована в узкоспециальном «Сборнике рефератов по радиационной медицине» [82]. И только позже, благодаря работам А.М. Жаботинского [83], подобные реакции стали одним из основных примеров рождения разного рода диссипативных пространственно-временных структур (мишени, спирали, химическая турбулентность и т.д.).

²За разработку основ термодинамики необратимых процессов Ларс Онсагер был удостоен Нобелевской премии по химии в 1968 г., а Илья Пригожин — в 1977 г.

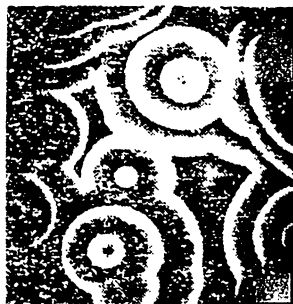


Рис. 7.1. Структуры в виде цилиндрических мод [75]

Основной особенностью современной версии реакции Белоусова-Жаботинского является присутствие ионов бромата в кислотном растворе, который окисляет какое-либо органическое вещество. В двумерном реакторе, заполненном однородным, в начале, раствором (с равными исходными концентрациями реагентов) в результате развития концентрационной неустойчивости происходит спонтанное нарушение симметрии. В результате рождаются паттерны с цилиндрической симметрией вокруг отдельных точек—трансляционная симметрия разрушается (см. рис. 7.1). Чтобы наблюдать спирали, а не мишени, необходимо несколько качнуть реактор (чашку) или механически разорвать фронт цилиндрической волны. В результате возникнет топологическая дислокация и родится спиральная волна (см. рис. 7.2; контраст изображения связан с различием в концентрации реагентов).

Как правило, спирали, наблюдаемые в подобных экспериментах, близки к Архимедовой спирали, т.е. в полярных координатах их уравнение $r \approx a\theta$. Другими словами, расстояние между фронтами (ширина) этих спиралей, примерно постоянно.

Если принять (во многих случаях, это действительно так), что двумерный реактор представляет собой континуум точечных подсистем с осциллирующим поведением, определяемым локальной химической кинетикой, то диффузия обеспечивает слабую связь между точечными генераторами и определяет таким образом их глобальную синхронизацию. Линии постоянной фазы этих синхронизованных генераторов и есть фронты спиральных волн или мишеней. Естественно



Рис. 7.2. Ансамбль взаимодействующих спиралей

при этом, что в центре спирали, где фронты пересекаются и фаза неопределена, должна быть сингулярность или топологический дефект, в центре которого концентрации реагентов должны обратиться в ноль. Наличие сингулярностей весьма характерно для разнообразных спиральных форм [84]. Однако существуют спирали и без топологических дефектов, отвечающие плавному изменению концентрации в неосциллирующих средах, т.е. в средах, точечная динамика которых не является колебательной.

Если для осциллирующих сред точечная динамика должна описываться, как минимум, двумя переменными, т.е. необходимо рассматривать два или более уравнения типа «реакция—диффузия», то для неосциллирующих сред такого ограничения уже нет. В этом отношении чрезвычайно интересными представляются результаты работы [85], в которой показано, что спиральные волны без сингулярностей могут рождаться в результате бифуркации Хопфа в однородных средах, описываемых одним скалярным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + \lambda u + f(u), \quad (7.1)$$

где $f(0) = 0$ и λ —действительный параметр. Как уже говорилось, решения спирального профиля, наблюдаемые в экспериментах, примерно имеют вид

$$u(r, \Theta) = V(mr + \Theta), \quad (7.2)$$

где (r, Θ) —полярные координаты и $m = \text{const}$. Такое решение на краю ограниченной области радиуса R должно удовлетворять «спиральным

граничным условиям» [85]

$$\frac{\partial u}{\partial r} = m \frac{\partial u}{\partial \Theta}. \quad (7.3)$$

Поскольку $mr + (\Theta + 2\pi) = m(r + \frac{2\pi}{m}) + \Theta$, число $\frac{2\pi}{m}$ —асимптотическая длина волны спирали—может интерпретироваться как ширина спирали.

В полярных координатах краевая задача (7.1), (7.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \lambda u + f(u), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= m \frac{\partial u}{\partial \Theta} \Big|_{r=R}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $m \neq 0$. Если решения $u(t, r, \Theta)$ есть решение (7.4), то и $u(t, r, \Theta + \psi)$, где $\psi \in (0, 2\pi)$ также есть решение, т.е. рассматриваемая задача характеризуется вращательной симметрией.

Рассмотрим устойчивость тривиального решения (7.4). Линеаризуя вблизи $u = 0$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \lambda u \quad (7.5)$$

с граничными условиями (7.3) Будем искать решение (7.5) в виде

$$u(r, \Theta, t) = e^{i\omega t} e^{in\Theta} u_n(r). \quad (7.6)$$

После подстановки (7.6) в (7.5) для $u_n(r)$ получаем уравнение в обыкновенных производных

$$i\omega u_n(r) = \frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_n(r) + \lambda u_n(r). \quad (7.7)$$

Введем комплексную координату $Z = \sqrt{\mu}r$, где $\mu = \lambda - i\omega$, тогда (7.7) примет вид комплексного уравнения Бесселя (см. [97])

$$\frac{d^2 v_n}{dZ^2} + \frac{1}{Z} \frac{dv_n}{dZ} + \left(1 - \frac{n^2}{Z^2}\right) v_n = 0. \quad (7.8)$$

В предположении, что $v_n(0)$ определено, т.е. сингулярность в нуле отсутствует, решение (7.8) имеет вид комплексной функции Бесселя $J_n(Z)$, или в старых переменных

$$u_n(r) = J_n(\sqrt{\mu}r). \quad (7.9)$$

Связь между n и m определяется из граничного условия

$$\sqrt{\mu} \frac{dJ_n}{dR} = imn J_n(\sqrt{\mu}R). \quad (7.10)$$

Используя равенство

$$\frac{dJ_n}{dR} = J_{n-1}(Z) - \frac{n}{Z} J_n(Z),$$

окончательно получаем

$$\sqrt{\mu} J_{n-1}(\sqrt{\mu}R) - n \left(\frac{1}{R} + im \right) J_n(\sqrt{\mu}R) = 0. \quad (7.11)$$

Нетривиальное решение $\omega \neq 0$ этого уравнения ($\mu = \lambda - i\omega$) отвечает рождению через бифуркацию Хопфа вращающейся волны с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Возникновение таких структур подтверждается прямым численным анализом исходной задачи (7.4). Результаты моделирования [85] представлены на рис. 7.3 для нелинейности $f(u) = -u^3$ и на рис. 7.4 для нелинейности $f(u) = +\alpha u^2 - u^3$.

§3. Спиральные волны синхронизации

В двух- и многокомпонентных средах, для которых типична осцилляторная активность «точечного» элемента среды, спиральные волны, как отмечалось, представляют собой волны синхронизации фазы локальных автогенераторов. Они возникают в однородных изотропных средах при отсутствии внешних источников. Как правило, спиральные волны синхронизации также приближенно могут быть описаны решением в виде Архимедовой спирали (см. выше). Почти сразу после открытия спиралей (например, в реакции Белоусова–Жаботинского [84]), было замечено, что структура в виде спирали, вращающейся как твердое тело, вокруг неподвижного центра, наблюдается достаточно редко. Прежде всего, центр спирали сам движется по весьма замысловатой траектории, напоминающей фигуры Лиссажу (волновой меандр [86], см. рис. 7.5). Также может быть неустойчив волновой фронт спирали—в результате развития вторичных неустойчивостей он может стать изрезанным и т.д. Особую проблему

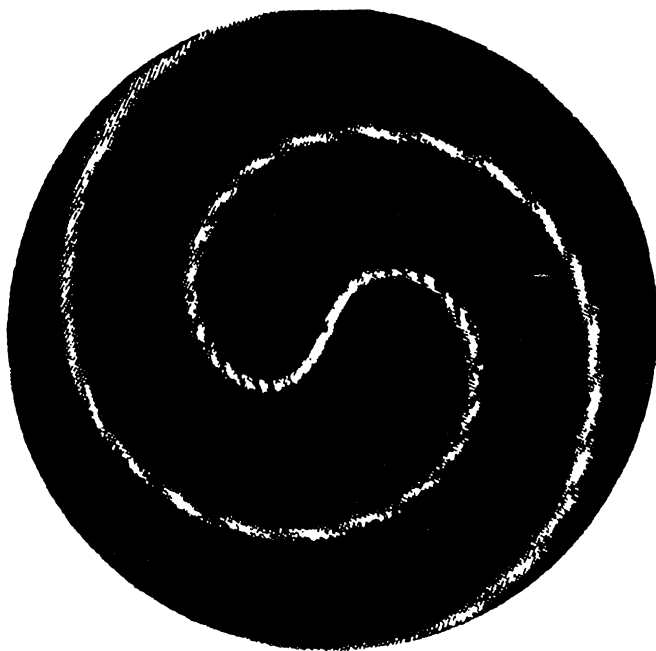


Рис. 7.3. Результат численного расчета решений уравнения (7.4) для $f = -u^3$, $\lambda = 10$

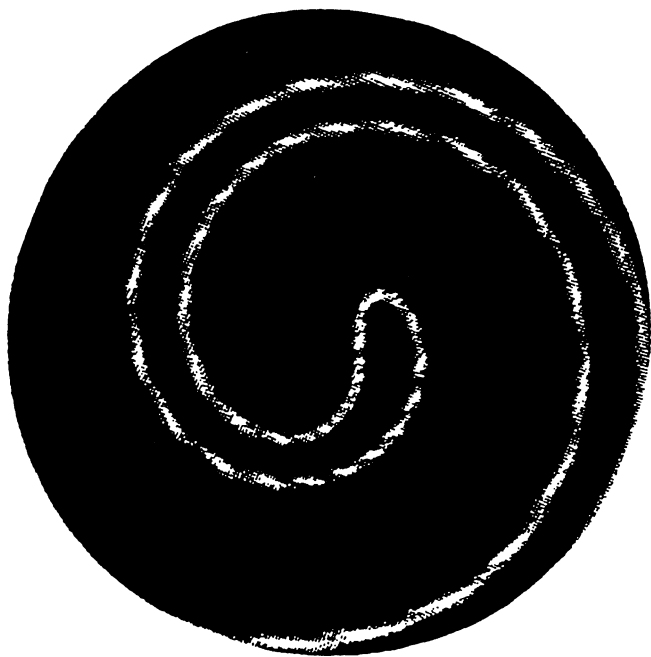


Рис. 7.4. Результат численного расчета решений уравнения (7.4) для $f = \alpha u - u^3$, $\lambda = 10$

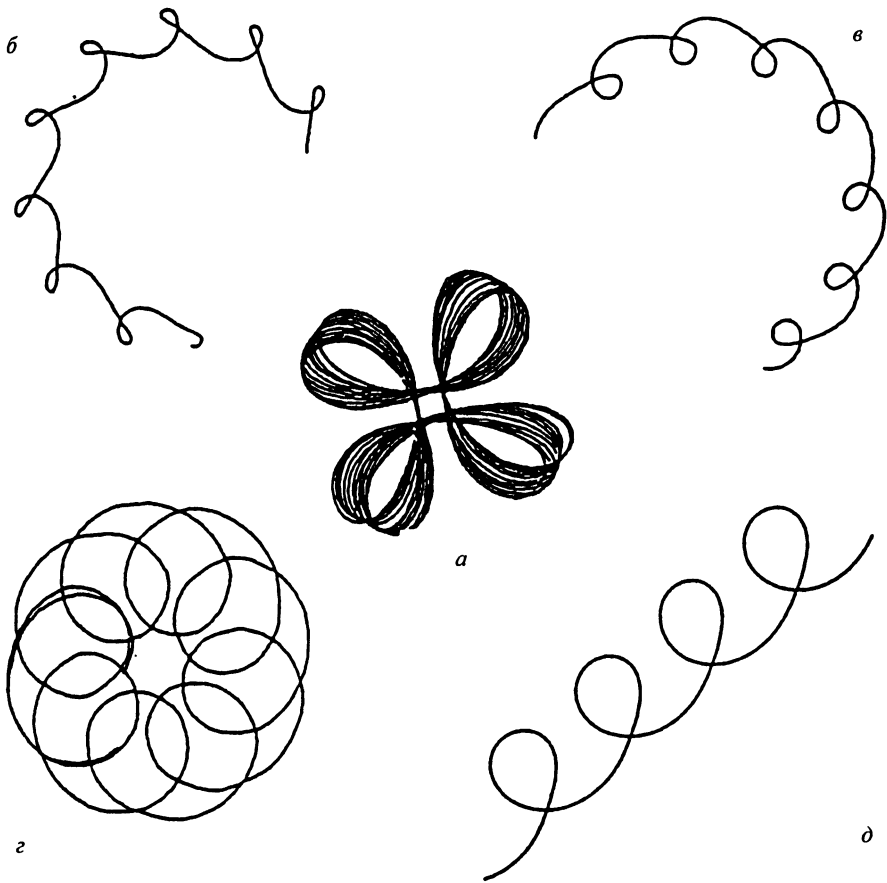


Рис. 7.5. Траектории центра спирали, описываемой уравнением (7.12) при $\gamma = 0,5$: а) $\epsilon = 0,2, \beta = 0,77$; б) $\epsilon = 0,11, \beta = 1,2$; в) $\epsilon = 0,12, \beta = 1,2$; г) $\epsilon = 0,2, \beta = 0,955$; д) $\epsilon = 0,2, \beta = 0,937$

представляет генерация новых спиралей и их взаимодействие друг с другом.

Рассмотрим здесь задачу о дрейфе спиральных волн в возбуждаемых двухкомпонентных средах. При этом воспользуемся одной из простейших и наиболее популярных моделей—уравнениями Фитц Хью-Нагумо (ФН) возбудимой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u + f(u, v) = \nabla^2 u + \epsilon^{-1} \left(u - \frac{u^3}{3} - v \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v) = \epsilon(u + \beta - \gamma v). \end{aligned} \quad (7.12)$$

В этой модели три параметра: β определяет асимметрию между возбуждением (u) и восстановлением (v); γ характеризует диссипацию в поле v , ϵ управляет соотношением пространственно-временных масштабов. Точечная динамика модели ФН определяется уравнениями:

$$\frac{du}{dt} = \epsilon^{-1} \left(u - \frac{u^3}{3} - v \right); \quad \frac{dv}{dt} = \epsilon(u + \beta - \gamma v). \quad (7.13)$$

Нуль-изоклины этой системы таковы:

$f(u, v) = 0$ — S -образная кривая, симметричная относительно нуля и с единичным наклоном в нуле; $g(u, v) = 0$ —прямая с наклоном $\gamma^{-1} > 0$. В дальнейшем предполагается $\gamma = 1/2$. При этом пересечение изоклин определяет единственное состояние равновесия на фазовой плоскости (v, u) (см. рис. 7.6).

Положение этого равновесия на кривой $f(u, v) = 0$ и его устойчивость определяется значением параметра β . Если равновесие попадает на участок кривой $-1 < u < 1$, то оно неустойчиво и точечный элемент среды (7.12) работает (при $\epsilon \ll 1$) как генератор импульсных колебаний. Нетрудно убедиться, что при $\beta \geq \frac{2}{3}$ пространственно однородное состояние неравновесной среды $u(\mathbf{r}, t) = u^0$, $v(\mathbf{r}, t) = v^0$ в линейном приближении устойчиво. Это состояние, однако, может быть неустойчиво по отношению к конечным возмущениям, которые в общем случае и порождают разнообразные пространственно-временные структуры спирального типа.

На рис. 7.7 представлено пространство параметров (ϵ, β) , иллюстрирующее области существования различных видов спирально-волновой динамики в модели ФН [86]. Естественно, что соответствующие результаты получены численно. При больших ϵ и δ исследуемая среда недостаточно возбудима, чтобы поддерживать какие-либо распространяющиеся волны — для любых начальных условий ниже кривой I

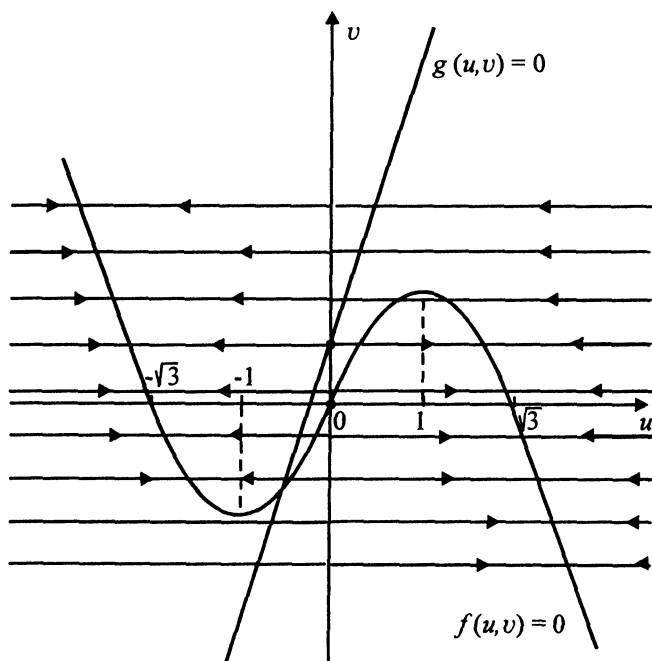


Рис. 7.6. Фазовый портрет системы (7.13)

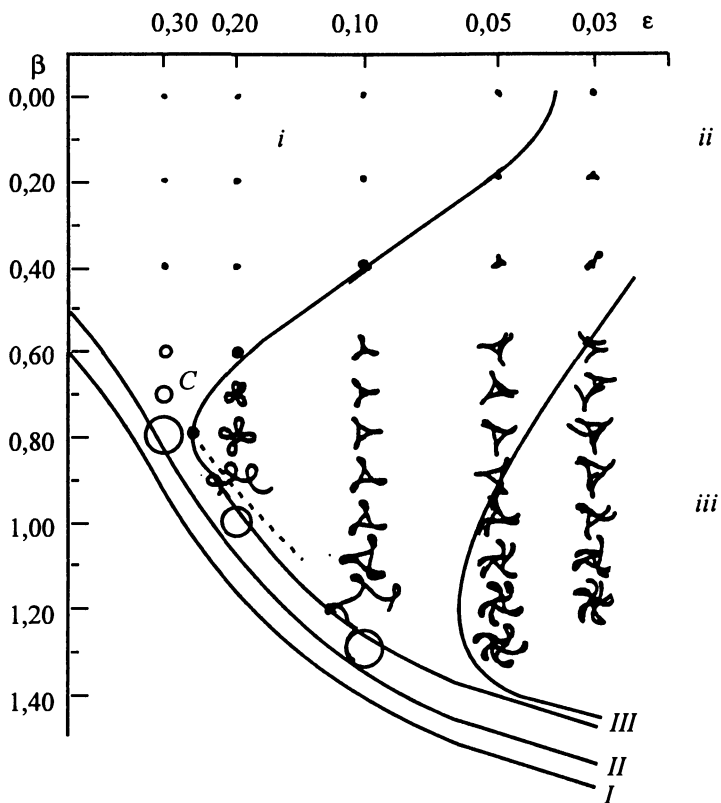


Рис. 7.7. Фазовая диаграмма для уравнения (7.13) при $\gamma = 0,5$. Точке С где пересекаются сплошная и пунктирная кривые, соответствуют кратные характеристические корни

устанавливается однородное статическое состояние. Везде в области параметров выше этой кривой среда может поддерживать распространение плоских волн.

Хотя плоские волны возможны везде выше границы I, спиральные волны существуют только выше границы II — границы «вращения» (см. также [87]). Выше кривой II существует, как минимум, три области с качественно различным характером поведения ядра спирали. Это (i) спирали, вращающиеся как твердое тело около фиксированного центра; (ii) спирали, представляющие собой модулированные бегущие волны и (iii) спирали, ядро которых совершает квазипериодические движения с различным соотношением несоизмеримых в общем случае частот [88].

Поскольку в обсуждаемой области параметров спирали—это «жесткие» образования, для описания их динамики естественно попытаться получить уравнения в обыкновенных производных лагранжевого типа. Эти уравнения могут быть получены в весьма общей форме с использованием лишь евклидовой симметрии и того факта, что возникновение осцилляций ядра спирали происходит через бифуркацию Хопфа и мнимая часть ляпуновских показателей переходящих из левой в правую полуплоскость, как раз и соответствует частоте осцилляций.

Как показывает анализ [86], при значениях параметров, отвечающих границе III, (см. рис. 7.7), спиральной волне соответствуют пять характеристических показателей λ , располагающихся на мнимой оси; все остальные лежат в левой полуплоскости. При переходе через эту границу к трем уже имевшимся мнимым показателям ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), связанным с симметрией плоской задачи, добавляются еще два: $\lambda_{4,5} = \pm i\omega_2$, ответственные за рождение (при переходе через кривую III вверх) «меандровой» или модуляционной неустойчивости спиральной волны. Показатели $\lambda_{1,2,3}$ всегда лежат на мнимой оси — $\lambda_1 = 0$, отвечает вращательной симметрии, и $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_1$, соответствует трансляционной симметрии. Действительно, можно убедиться, что в безграничной однородной системе спиральное вращение отвечает трансляционной моде $\tilde{u}_T = \frac{\partial u}{\partial x} \pm i \frac{\partial u}{\partial y}$ с характеристическим показателем $\lambda_T = \pm i\omega_1$. Здесь ω_1 —исходная частота вращения спиральной волны.

Везде, за исключением точки C (где фиксируются сразу оба параметра) на плоскости (β, ϵ) (см. рис. 7.7), все пять характеристических показателей на мнимой оси—различны. В точке C частота модуляции ω_2 , рождающаяся в результате бифуркации Хопфа, совпадает с

собственным значением трансляционной моды. В этом случае линейный оператор, определяющий устойчивость спиралей, имеет характеристические корни $\pm i\omega_1$, кратности два и нулевой корень.

Следуя [89], сконструируем в окрестности такого резонанса маломерную динамическую модель, описывающую движение спиральных волн. Эти уравнения записываются для переменных $p(t)$, $v(t)$ и $w(t)$. Здесь $p = x + iy$ отвечает положению ядра спирали, $v = Se^{i\phi}$ — скорости спирали, и w — пропорциональна мгновенной частоте вращения. В достаточно общем случае можно считать:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= v, \\ \dot{v} &= v [f(|v|^2, w^2) + iwh(|v|^2, w^2)], \\ \dot{w} &= wg(|v|^2, w^2).\end{aligned}\tag{7.14}$$

При любом выборе функций f, g и h эти уравнения инвариантны относительно вращения, отражения и трансляции. В действительной форме из (7.14) следует система уравнений пятого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho \cos \phi; \quad \dot{y} = \rho \sin \phi; \quad \dot{\phi} = wh(s^2, w^2); \\ \dot{s} &= sf(s^2, w^2); \quad \dot{w} = wg(s^2, w^2).\end{aligned}\tag{7.15}$$

Из условия ограниченности решений (7.15) и существования бифуркации соразмерности 2 можно выбрать функции f, g и h в виде полиномов с минимальными возможными нелинейностями [89]

$$\begin{aligned}f(s^2, w^2) &= \alpha_0 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 w^2 - s^4, \\ g(s^2, w^2) &= -1 + \beta_1 s^2 - w^2, \\ h(s^2, w^2) &= \gamma_0.\end{aligned}\tag{7.16}$$

На рис. 7.8 представлены траектории ядра спиральных волн, построенные при различных значениях параметров α_1, α_2 и γ_0 в рамках системы (7.15), (7.16). Как видно, совпадение с результатами вычислений в рамках исходной системы (10.12) действительно, впечатляющее (ср. рис. 7.8). Детальный анализ системы (7.16) можно найти в работе [89].

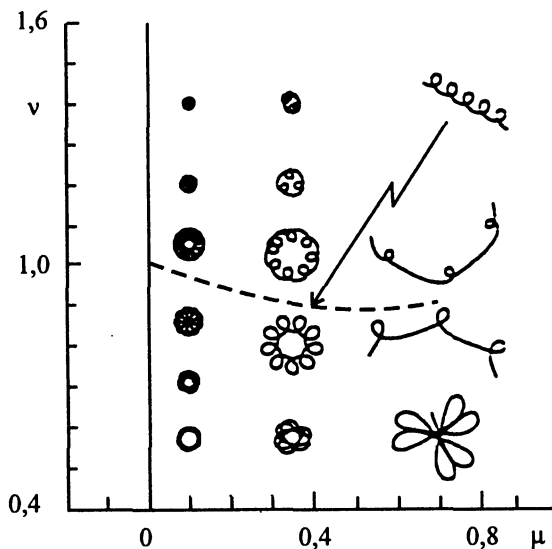


Рис. 7.8. Фазовая диаграмма для уравнения (7.16) в переменных $\mu = -(\alpha_2 + 5)/5$, $\nu = (\gamma_0)/\sqrt{28}$.
Остальные параметры в уравнении (7.16) фиксированы: $\alpha_0 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_1 = \frac{10}{3}$, $\beta_1 = 1$

§4. Параметрически возбуждаемые спирали

Спирали волновых полей обнаруживаются в разнообразных лабораторных экспериментах: конвекции Релея–Бенара [90, 91], жидких кристаллах [84] и др. Мы здесь, в качестве примера, рассмотрим рождение спиральных волн в эксперименте Фарадея. Речь идет о вращающихся капиллярных волнах в форме спиралей в большом (горизонтальные размеры много больше толщины) тонком слое вязкой жидкости, находящейся в осциллирующем гравитационном поле (см. рис. 2.7). Примеры спиральных структур и их эволюция во времени показаны на рис. 7.9а и рис. 7.9б. Наблюдались спирали с различным топологическим зарядом (см. рис. 7.9в). Такие спирали рождались, благодаря движению дефектов к центру цилиндрического паттерна. Как выяснилось в экспериментах [92], существование капиллярных спиралей поддерживается средним течением, генерируемым вблизи стенок кюветы быстро затухающими вязкими поверхностными волнами (см. рис. 7.10).

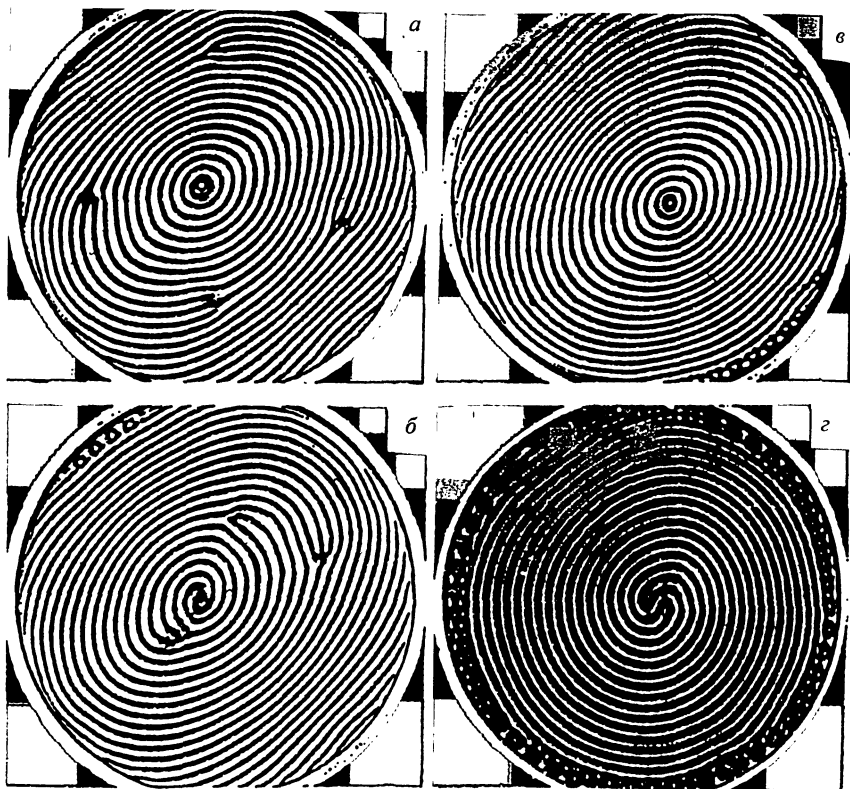


Рис. 7.9. Мгновенные снимки ряби Фарадея а) мишень четырьмя дислокациями (две имеют положительный и две—отрицательный топологический заряд); б) одна из четырех дислокаций, показанных на рис. 7.9а, достигла центра и мишень превратилась в спираль; в) все дислокации достигли центра и аннигилировали; г) многозаходная долгоживущая спираль

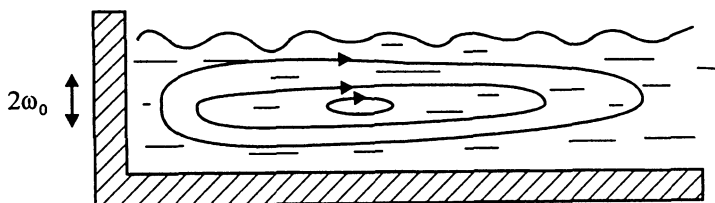


Рис. 7.10. Схематическое изображение стационарных вихрей, возникающих у края кюветы при параметрическом возбуждении капиллярных волн

Для описания спиральных волн в эксперименте Фарадея естественно воспользоваться уравнением для комплексного параметра порядка $\psi(\mathbf{r}, t)$. Будем считать, что $\psi(\mathbf{r}, t)$ — это медленно меняющаяся во времени амплитуда параметрически возбуждаемых капиллярных структур. Тогда

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\omega_0 t} + \bar{\psi}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t}. \quad (7.17)$$

Здесь $\xi(\mathbf{r}, t)$ мгновенное отклонение поверхности жидкости, а $2\omega_0$ — частота параметрического возбуждения жидкого слоя (частота осциллирующего гравитационного поля). В рамках такой записи пока не делается никаких предположений о геометрической конфигурации капиллярных структур.

Модельное уравнение для $\psi(\mathbf{r}, t)$, которое учитывает основные особенности параметрически возбуждаемых структур (дисперсию, вязкую диссипацию, нелинейность) можно представить в форме [92]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\gamma \bar{\psi} - \nu \nabla^2 \psi - (1 + i\alpha)|\psi|^2 \psi + i\kappa(\nabla^2 + k_0^2)\psi - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\psi. \quad (7.18)$$

Здесь γ — амплитуда накачки, κ — характеризует дисперсию волн, \mathbf{u} — скорость среднего течения вблизи поверхности. Линейные слагаемые в этом уравнении могут быть выписаны непосредственно из

закона дисперсии параметрически возбуждаемых капиллярных волн с центральной частотой ω_0 и волновым числом k_0 . Поскольку закон дисперсии для свободных капиллярных волн — $\omega^2 = k^3$, $k_0 = \omega_0^{2/3}$ и $\kappa = 3\omega_0/4k_0^2$. Нелинейное слагаемое здесь записано в простейшем виде и описывает два механизма стабилизации параметрической неустойчивости: за счет нелинейной диссипации энергии (слагаемое $|\psi^2| \psi$) и за счет нелинейной расстройки от параметрического резонанса (слагаемое $\alpha|\psi|^2\psi$). Последнее слагаемое в (7.18) описывает воздействие среднего течения на капиллярные волны.

При $\gamma > \mu$ ($\mu = \nu k_0^2$) тривиальное состояние $\psi = 0$ неустойчиво относительно возмущений с волновыми числами вблизи k_0 . Численные эксперименты показывают [92], что на нелинейной стадии эта неустойчивость приводит к рождению различных структур в виде роликов, цилиндрических паттернов или спиралей. При отсутствии среднего течения ($\mathbf{u} \equiv 0$) эти структуры остаются статическими. Среднее течение вблизи стенок кюветы порождает медленное движение фронтов к центру кюветы.

Компьютерное моделирование (7.18) продемонстрировало также возможность рождения спиралей с высоким топологическим зарядом, подобным тем, какие наблюдались в экспериментах (см. рис. 7.11). Такие многозаходные спирали возникают благодаря движению дислокаций к ядру структуры. Естественно, что топологический заряд спирали равен сумме топологических зарядов дислокаций. Несколько мгновенных снимков, иллюстрирующих движение дислокаций, представлены на рис. 7.12. Движение дислокаций не связано с движением волновых фронтов (роликов): дислокации движутся быстрее чем ролики и притягиваются к центру структуры и в отсутствие среднего течения—когда спирали не вращаются. Сравнение рис. 7.12 и рис. 7.9 подтверждает, что модель (7.18) качественно правильно описывает феномен спиральных волн капиллярной ряби.

Механизм движения дислокаций удобно исследовать в рамках фазовых уравнений [93] (см. также главу 4).

§5. Синхронизация спирального беспорядка в осциллирующих средах

Как к наиболее простой и естественной модели осциллирующей среды, обратимся вновь к уравнению Гинзбурга–Ландау (см. главу 4).

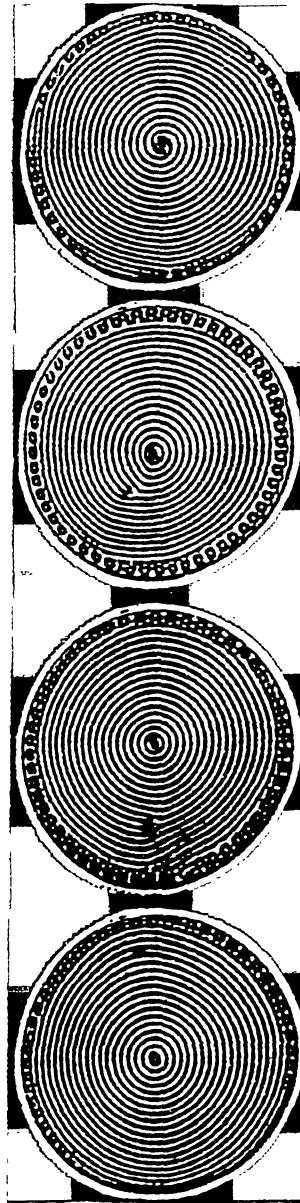


Рис. 7.11. Эволюция мишени в многозаходную спираль.
Дислокация рождается у стенки и движется к центру

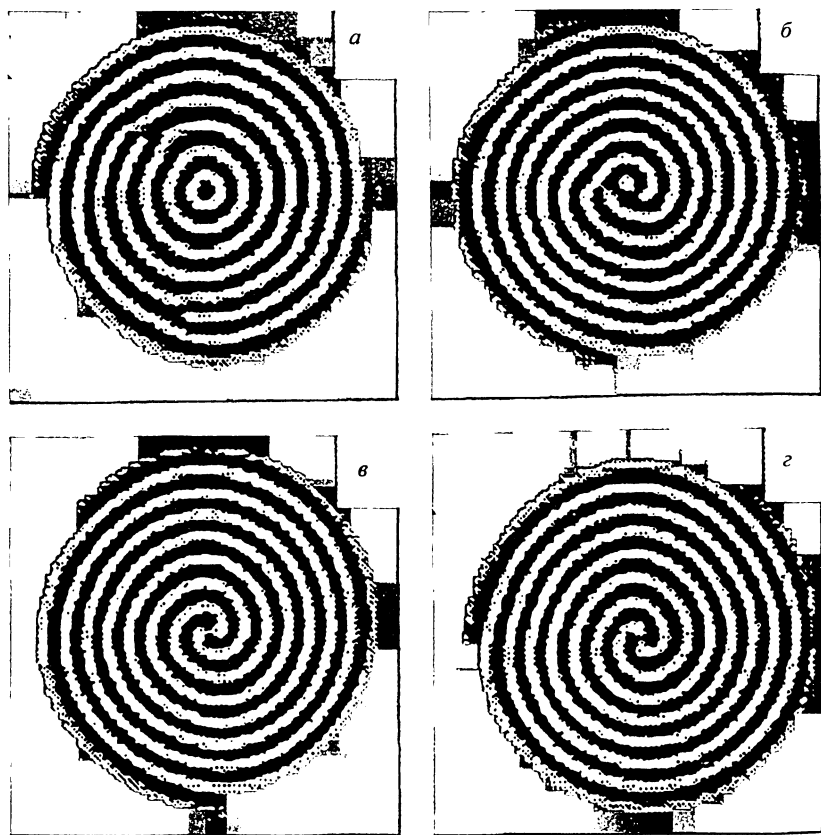


Рис. 7.12. Образование многозаходной спирали в численном эксперименте с уравнением (7.18): а) $t = 10$; б) $t = 100$; в) $t = 200$; г) $t = 300$

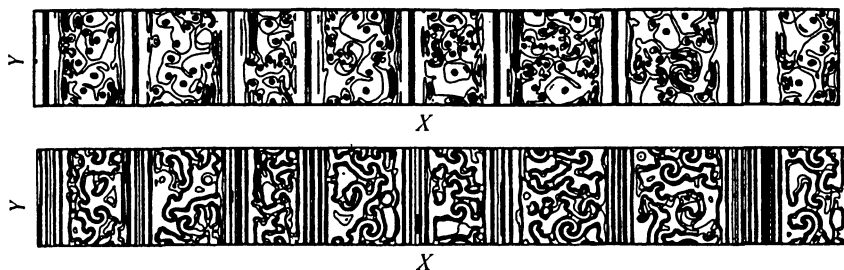


Рис. 7.13. Спиральный хаос

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a + (1 + i\alpha) \nabla^2 a - (1 + i\beta) |a|^2 a. \quad (7.19)$$

Решение (7.19) в виде спиральной волны имеет вид:

$$a_0(r, \phi, t) = F(r) \exp[-i\omega_0 t + im\phi + i\Theta_0(r)], \quad (7.20)$$

где r, ϕ , как и прежде полярные координаты, m —топологический заряд спирали, а $\omega_0 = (\alpha - \beta)Q^2 + \beta$. Здесь Q —асимптотическое волновое число, определяемое параметрами α и β (см. [94]). Уравнение (7.19) содержит решения в виде спиралей с произвольным числом рукавов, но только спирали с $m = \pm 1$ устойчивы [17]. Функции $F(r)$ сравнительно просто записываются аналитически только при $r \gg 1$:

$$F(r) = (1 - Q^2)^{1/2} - \frac{(1 + \alpha^2)Q}{2(1 - Q^2)^{1/2}(\alpha - \beta)} r^{-1} + O(r^{-2}), \quad (7.21)$$

$$\Theta_0(r) = Qr + \frac{1 + \alpha\beta}{2(\alpha - \beta)} \ln r + O(r^{-1}). \quad (7.22)$$

Взаимодействие спиралей порождает замысловатые пространственно-временные образования (некоторые из них представлены на рис. 7.13 [117]) и, в том числе, спиральный пространственно-временной хаос.

Мы здесь остановимся кратко на несколько неожиданном феномене, обнаруженном в компьютерном эксперименте с уравнениями (7.19)—это пространственный беспорядок, периодически изменяющийся во времени. Мгновенные снимки такого режима при значении параметров $\beta = 2, \alpha = 0,1$ представлены на рис. 7.14. Как можно

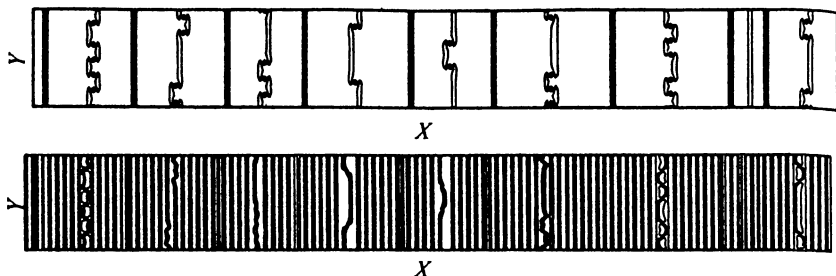


Рис. 7.14. Спиральные пары, разделенные «дырками» Нозакки-Бекки

видеть, области, где хаотически расположены спиральные пары, отделены друг от друга параллельными полосами (при моделировании использовались периодические граничные условия). Такие полосы также являются решениями (7.19)—это «дырки» Нозакки-Бекки [95]:

$$a_1(x, t) = A(x) \exp[-i\omega_1 t + i\Theta_1(x)]. \quad (7.23)$$

Амплитуды в окрестности «дырок» меняются в соответствии с выражением (см. рис. 7.14):

$$A(x) = \sqrt{1 - Q_1^2} \operatorname{th}(kx), \quad (7.24)$$

а фазы —

$$\frac{d\Theta_1}{dx} = -Q_1 \operatorname{th}(kx). \quad (7.25)$$

Здесь асимптотическое волновое число Q_1 связано с частотой ω_1 тем же законом дисперсии, что и для спиралей $\omega_1 = (\alpha - \beta)Q_1^2 + \beta$.

Естественно предположить, что должны существовать решения (10.19) и виде циркулярных полос. Они, действительно существуют, но неустойчивы—при $t \rightarrow \infty$ цилиндрические полосы схлопываются и все двумерное пространство занимает пространственно-временной спиральный хаос. Таким образом, роль осциллирующих полос в синхронизации пространственно-временного хаоса и превращения его в детерминированный пространственный беспорядок принципиальна

Глава 8

Локальное нарушение порядка

Природа потому и совершенна,
что Бог создал дефекты.

Легко представить себе самые разнообразные нарушения порядка в периодических по пространству паттернах. Могут, например, в периодической, в среднем, структуре встречаться ячейки разных размеров или различной ориентации. Мы будем интересоваться здесь только такими нарушениями порядка, от которых нельзя избавиться локальным растяжением или поворотом координат. Такие нарушения порядка представляют собой топологические особенности. Наиболее типичные топологические особенности приведены на рис. 8.1. Это доменные стенки (рис. 8.1а), дислокации (рис. 8.1б) и дисклинации (рис. 8.1 в, г, д). Их рождение, сосуществование, взаимодействие и исчезновение — это возможные механизмы перехода от одной структуры к другой, в том числе и пути появления пространственного беспорядка.

Являясь одной из наиболее привлекательных для исследователей областью нелинейной физики, динамика дефектов ставит много трудных вопросов, касающихся устойчивости топологических особенностей. На большинство подобных вопросов подробный ответ может дать только компьютерный анализ. Тем не менее, сделав определенные предположения о поведении дефектов, мы сможем описать эти явления аналитически. Эта глава посвящена, в основном, рассмотрению квазистационарных состояний градиентных или почти градиентных систем. Мы рассмотрим физические примеры динамики дефектов в периодических структурах, возникающих при конвекции в слое жидкости, подогреваемого снизу, и при параметрическом возбуждении поверхностных волн в слое жидкости, совершающей вертикальные колебания (рябь Фарадея).

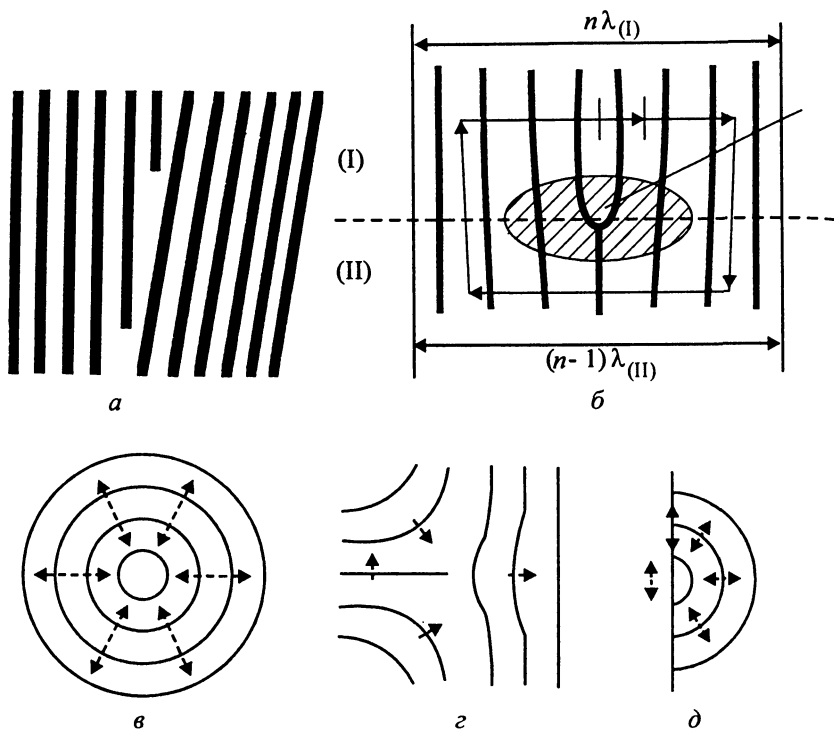


Рис. 8.1. Типичные топологические особенности:
 доменная стенка (а); дислокация (б);
 дисклинация (в, г, д)



Рис. 8.2. Домены с топологически разными структурами при конвекции Рэлея–Бенара в системе, близкой к точке перехода газ–жидкость

§1. Простая модель доменной стенки

Один из главных вопросов, который возникает, когда мы задумываемся о природе регулярной структуры в пространственно протяженной системе, может быть таков: в чем причина появления дальнего порядка, или как удаленные элементы структуры чувствуют порядок? Кристаллическая структура обычно рождается в результате развития неустойчивости, но не мгновенно во всем пространстве, а в начале независимо в отдельных областях, которые контактируя друг с другом образуют затем доменную стенку. Конкуренция доменов — движение доменных стенок и увеличение одних доменов за счет соседей — это механизм возникновения дальнего порядка (см., например, [100]). Структуры внутри отдельных доменов могут иметь различную ориентацию, периоды и даже различную симметрию, например как на рис. 8.2, где области с гексагональными ячейками перемежаются со структурами в виде роликов и дисклинаций. Если домены состоят из одинаковых кристаллических паттернов, ориентированных симметрично в неограниченной среде, тогда $q = 0$ и естественно предположить, что доменная стенка, как на рис. 1.11 должна быть устойчива.

В этом случае можно легко вычислить распределение параметра порядка $u(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющего уравнению Свифта–Хоенберга, вблизи доменной стенки. Предполагая, что доменная стенка может быть представлена в виде $(u(x, y, t \rightarrow \infty))$:

$$u(x, y) = A_1(\mu x) e^{i(k_x x - k_y y)} + A_2(\mu x) e^{i(k_x x + k_y y)} + \text{к.с.}, \quad (8.1)$$

где $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, а μ — малый параметр, который описывает медленное изменение амплитуд мод $A_{1,2}$ на периоде $\Lambda_x = 2\pi/(k \cos \theta/2)$ структуры, θ это угол между роликами симметрично ориентированными по отношению к границам доменов,³ как это показано на рис. 1.11. Отметим, что волновое число k отличается, вообще говоря, от максимально неустойчивого k_0 , $k_0 = 1$ на величину $\delta = 1 - k^2$.

Для решений в форме (8.1) уравнение Свифта–Хоенберга (см. (3.2)) во втором порядке по параметру μ дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $A_1(x)$ и $A_2(x)$

$$\frac{d^2 A_{1,2}}{dx^2} = A_{1,2}(1 - (A_{1,2}^2 + \rho A_{2,1}^2)), \quad (8.2)$$

где ρ — коэффициент нелинейного взаимодействия мод. При выводе (8.2) была сделана перенормировка амплитуд $(\frac{A_{1,2}}{\sqrt{\epsilon - \delta^2}} \rightarrow A_{1,2})$ и координаты $(\frac{x}{\mu} \sqrt{\frac{\epsilon - \delta^2}{2\delta}} \rightarrow x)$.

Нам интересны решения уравнений (8.2), которые вдали от границ доменов удовлетворяют условиям:

$$|A_1(\infty)|^2 = |A_2(-\infty)|^2 = 0; \quad |A_1(-\infty)|^2 = |A_2(+\infty)|^2 = 1. \quad (8.3)$$

В общем случае система (8.3) достаточно сложна для анализа, однако для одного значения коэффициента $\rho = 3$ она допускает простое аналитическое решение. В этом случае введение переменных $B_+ = A_1 + A_2$ и $B_- = A_1 - A_2$ позволяет после вычисления суммы и разности уравнений (8.3) выделить в правых частях соответственно куб разности и куб суммы. В новых переменных уравнения (8.3) разделяются и имеют простой вид:

³ Амплитуды A_1 и A_2 , зависят только от x -координаты благодаря симметричному расположению доменной стенки, что приводит к трансляционной инвариантности по y .

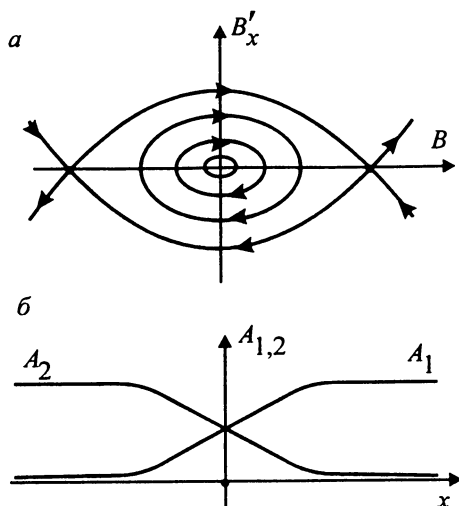


Рис. 8.3. Фазовый портрет системы (8.2) и решения, соответствующие сепаратисам

$$-\frac{d^2 B_+}{dx^2} = B_+(1 - B_+^2) \quad (8.4a)$$

$$-\frac{d^2 B_-}{dx^2} = B_-(1 - B_-^2). \quad (8.4б)$$

Фазовые портреты (8.4) представлены на рис. 8.3а. Сепаратрисе выходящей из седла $B_- = -1, \frac{dB_-}{dx} = 0$ и входящей в седло $B_+ = 1, \frac{dB_+}{dx} = 0$ (см. уравнение (8.4б)) и состоянию равновесия $B_+ = 1$ (см. уравнение (8.4а)) отвечает решение:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{2}} x \right),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{2}} x \right).$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (8.3). Доменная стенка (8.5) показана на рис. 8.3б. Имеют ли физический смысл другие решения (8.2), например близкие к сепаратрисам траектории? Да,

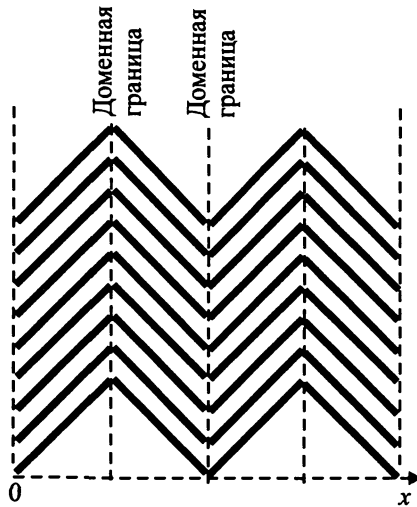


Рис. 8.4. Структура, соответствующая пространственно периодическому решению системы (8.2)

имеют. Одному из таких решений отвечает, в частности, паркет из роликов, периодически изменяющих по x ориентацию своих осей (см. рис. 8.4).

Идеальная доменная стенка или граница структур, аналогичная рассмотренной выше, может реализоваться при достаточно специфических граничных условиях. Даже если ролики с $|\mathbf{k}_{1,2}| = k$ устанавливаются внутри каждого домена, доменная стенка может быть несимметрична относительно направления волновых векторов мод. На границе доменов в этом случае появляются топологические дефекты (рис. 1.13). Такие топологические дефекты можно рассматривать как отдельные локализованные объекты — они обладают собственной динамикой, аналогичной динамике частиц, имеющих заряд. Такой «ньютоновский» подход может быть применим для объяснения многих явлений, наблюдающихся в экспериментах [13].

§2. Топологические дефекты

Непрерывное регулярное векторное поле градиента фазы параметра порядка соответствует кристаллической структуре. Для

реального параметра порядка $u(\mathbf{r}, t) = A \cos \theta$ это поле может быть представлено как

$$\nabla \theta = \pm \left(1 - \frac{u^2}{A^2} \right)^{-1/2} \nabla u. \quad (8.6)$$

Поле, допускающее такую запись, называют директорным. Для комплексного параметра порядка $U = Ae^{i\theta}$ имеем:

$$\nabla \theta = -iU^{-1} \cdot \nabla U \quad (8.7)$$

В поле градиента фазы возможно появление сингулярностей. Это точки экстремума u для реального параметра порядка и точки где U обращается в ноль для комплексного параметра порядка.

На рис. 8.1б показан дефект, возникающий из-за различия пространственных периодов структур: в верхней полуплоскости на один ролик меньше, чем в нижней. Это дислокация. Дислокация может двигаться поперек и вдоль осей роликов. Движение вдоль осей по сложившейся терминологии называется «climb» — подъем, поперек осей «glide» — скольжение. Поле фазы в ядре дефекта не определено, а при обходе вокруг ядра циркуляция градиента фазы имеет конечную величину. Для дислокаций

$$\oint \nabla \theta(\mathbf{r}, t) d\mathbf{l} = \pm 2\pi n, \quad (8.8)$$

здесь n целое не равное нулю число. Величина n называется топологическим зарядом дефекта. Для дисклинаций топологический заряд может быть и дробным. Так для дефекта, изображенного на рис. 8.1г заряд $n = \frac{1}{2}$. Нарушение симметрии, представленное на рис. 8.5, имеет топологический заряд $n = 0$ и это, в действительности, и не дефект вовсе, так как локальными непрерывными деформациями поля от такого нарушения порядка можно избавиться. Дефекты же с $n \neq 0$ не могут быть исключены подобным образом.

Из элементарных топологических дефектов, которые мы обсуждаем в этом разделе, могут быть составлены и более сложные паттерны, чем те, что представлены на рис. 8.1. В частности дефекты в гексагональной решетке, как будет показано в разделе 8.3, представляют из себя связанное состояние двух дислокаций. Паттерны показанные на рис. 1.14 (глава 1) можно представлять как суперпозицию дислокаций (рис. 8.1б) и дисклинаций (рис. 8.1 г, д).

Как ведет себя уединенная дислокация, куда с какой скоростью она движется? Оценим, например, скорость движения дислокации

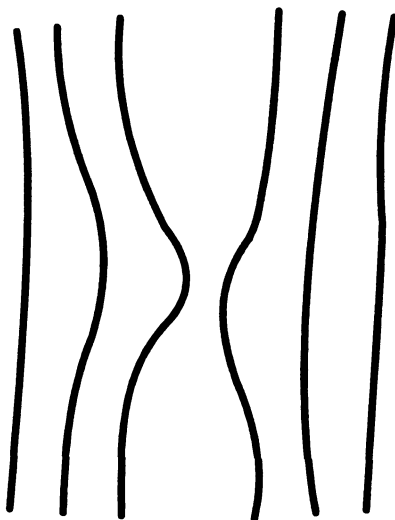


Рис. 8.5. Нарушение порядка, не являющееся топологическим дефектом

вдоль осей роликов. Для оценок используем уравнение Ньюэлла–Уайтхеда–Сегеля, НУС (см. Главу 3), которое описывает, в частности, дислокации в роликовых структурах. Предположим, что граница полупространства с определенным числом роликов движется с постоянной скоростью v и из-за этого дислокация смещается вдоль оси y (см. рис. 8.1б). Тогда, подставляя $A(x, y, t) = A(x, y - vt)$ в (3.11), мы переходим от уравнения НУС к уравнению

$$-v\partial_y A = (\varepsilon - q^2)A - A|A|^2 + \left(\partial_x - \frac{i}{2}\partial_{y^2}\right)^2 A + 2iq\left(\partial_x - \frac{i}{2}\partial_{y^2}\right)A. \quad (8.9)$$

Напомним, что $q > 0$ это расстройка от оптимального волнового числа k_0 (если $q < 0$, то ролики неустойчивы относительно зигзагообразных возмущений).

Имея в виду, что дислокация движется медленно, мы можем предположить, что поле амплитуды $|A|$ успевает релаксировать так что его можно считать пространственно однородным $|A| = \sqrt{\varepsilon - q^2}$. Тогда мы получим из (8.9) линейное уравнение

$$-v\partial_y A = \left(\partial_x - \frac{i}{2}\partial_{y^2}\right)^2 A + 2iq \left(\partial_x - \frac{i}{2}\partial_{y^2}\right) A, \quad (8.10)$$

которое описывает эволюцию фазы. Подставляя координаты $x = x/q$, $y = y/\sqrt{q}$ получаем:

$$-vq^{-3/2}\partial_y A = \left(\partial_x - \frac{i}{2}\partial_{y^2}\right)^2 A + 2i \left(\partial_x - \frac{i}{2}\partial_{y^2}\right) A. \quad (8.11)$$

Поскольку в правой части коэффициент отсутствует, коэффициент $\kappa = vq^{-3/2}$ в левой части уравнения должен быть безразмерным и не может зависеть от вида решения, т.е. это константа. Таким образом мы сразу получаем зависимость скорости движения дислокации от расстройки:

$$v \sim q^{3/2}. \quad (8.12)$$

Для конвекции Рэлея–Бенара такая зависимость скорости движения вдоль оси роликов (скорости подъема) от q была подтверждена прямыми компьютерными экспериментами с уравнениями Навье–Стокса в рамках приближения Обербека–Буссинеска.

Более сложно оценить скорость движения поперек роликов (скорость скольжения). Следует отметить, что при малых надкритичностях скольжение происходит в направлении максимальной кривизны фазового фронта, как это показано на рис. 8.6. Подобное движение дислокаций наблюдалось, например, в жидких кристаллах и при конвекции в жидкостях с большими числами Прандтля.

§3. Рождение пенто-гепто-дефектов

Нарушение порядка в гексагональной решетке, при котором существует пара ячеек с пятью и семью соседями получило название пенто-гепто-дефекта. Можно, конечно, представлять совершенно разные топологически нарушения порядка в шестигранных кристаллических решетках, однако, как показывает эксперимент, именно пенто-гепто-дефекты наиболее устойчивы — возникнув, они существуют не разрушаясь длительное время. Если построить линии постоянной фазы для роликовых систем, образующих конвекционные ячейки с дефектом, становится очевидным, что пенто-гепто-дефект состоит из

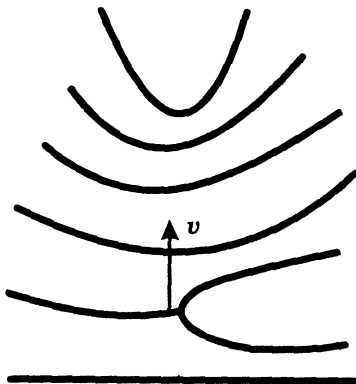


Рис. 8.6. Направление движения дефекта в структуре с изменяющейся кривизной фазовых фронтов

дислокаций, принадлежащих различным модам и имеющих противоположные по знаку топологические заряды (см. рис. 8.7). Понятно, что при движении и взаимодействии топологический заряд каждой дислокации сохраняется, поэтому пенто-гепто-дефект есть результат притяжения первоначально разнесенных на некоторое расстояние дислокаций. Это было проверено в численном счете [31], в котором использовались три связанных уравнения НУС (3.17). В качестве начальных условий выбирались разнесенные в пространстве топологические заряды. Для конвекции в бесконечно протяженном слое жидкости все коэффициенты нелинейного взаимодействия $\rho_{i,j}$ одинаковы, что позволяет написать функционал свободной энергии:

$$\begin{aligned}
 F = \int dx dy [& -\epsilon(|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2) - (A_1 A_2 A_3 + \text{к.с.}) \\
 & + \frac{1}{2}(|A_1|^4 + |A_2|^4 + |A_3|^4) \\
 & + \rho(|A_1|^2 |A_2|^2 + |A_1|^2 |A_3|^2 + |A_2|^2 |A_3|^2) \\
 & + (|\hat{D}_1 A_1|^2 + |\hat{D}_2 A_2|^2 + |\hat{D}_3 A_3|^2)], \quad (8.13)
 \end{aligned}$$

где $\hat{D}_j = (\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2})$. В справедливости (8.13) можно убедиться, получив уравнения (3.17) для случая $\rho_{i,j} = \text{const}$ варьированием свободной энергии F . В численном расчете исследовались траектории

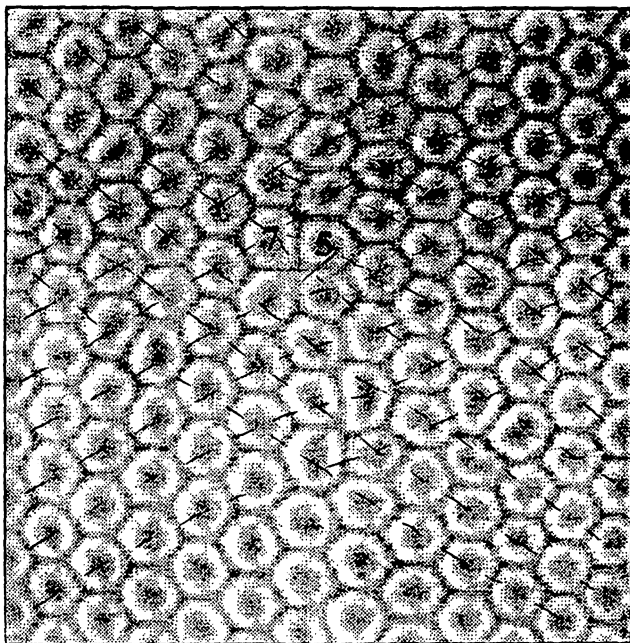


Рис. 8.7. Пенто-гепто-дефект и фазовые фронты
мод в шестигранной решетке

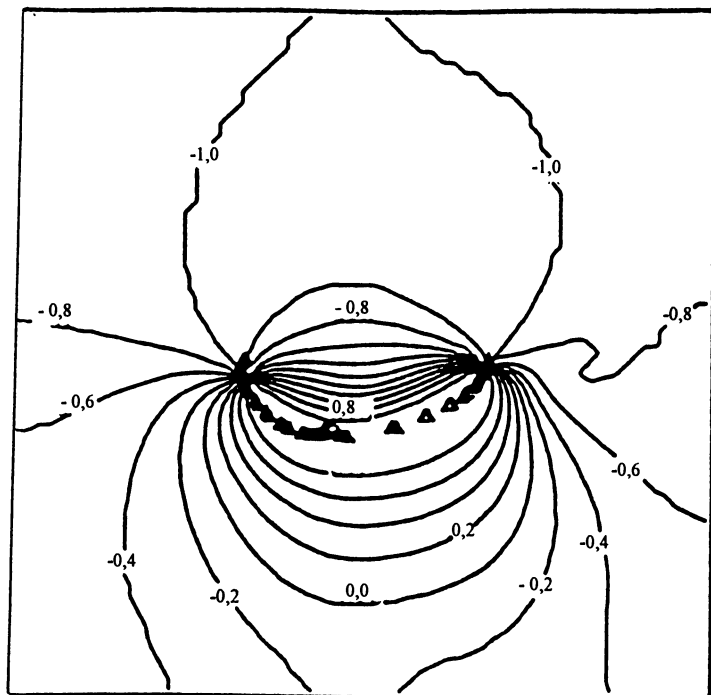


Рис. 8.8. Линии уровня параметра S . Треугольниками отмечено положение сближающихся дислокаций при начальной фазе $\Phi_0 = \frac{\pi}{4}$

особенностей полей фазы — именно наличие особенностей в поле фаз означает, что в структуре есть дефекты. Если анализировать поля амплитуд мод, то даже их очень сложное изменение в пространстве, и, в частности, обращение в ноль, не будет еще служить доказательством существования дислокаций. Для наглядного представления результатов введем амплитуды R_j и фазы Φ_j мод $A_j = R_j e^{i\Phi_j}$ и вычислим сумму фаз:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3.$$

Линии уровня параметра синхронизации $S = -\cos \Phi$ представлены на рис. 8.8. для $\Phi_0 = \frac{\pi}{4}$. Как видно из этого рисунка, в области, соединяющей дислокации, где сумма фаз Φ порядка π ($S = -\cos \Phi \sim 1$) происходит сгущение линий уровня. Эта область была названа коридором [31]. Согласно численному эксперименту, в начале формируется

такой коридор, а затем, вдоль этого коридора происходит медленное сближение дислокаций. Подобное поведение дислокаций можно качественно объяснить, используя фазовое приближение, которое предполагает, что все амплитуды одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$ и настолько медленно изменяются в пространстве и времени что отслеживают изменения фаз. Это предположение, конечно, справедливо только вне ядра топологического заряда. При этом для R из (3.17) имеем:

$$\epsilon R + \cos \Phi R^2 - (1 + 2\rho)R^3 = 0, \quad (8.14)$$

а индивидуальные фазы мод отвечают уравнениям:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -R \sin \Phi + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^2}, \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -R \sin \Phi + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_2^2}, \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} = -R \sin \Phi + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_3^2}. \quad (8.17)$$

Если пренебречь изменением фаз в пространстве, то для суммы $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ из (8.15)—(8.16) получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -3 \sin \Phi. \quad (8.18)$$

Как видно из последнего уравнения сумма фаз имеет два состояния равновесия — устойчивое $\Phi = 0$ и неустойчивое $\Phi = \pi$. Движение дислокаций происходит таким образом, что площадь области, занятой структурой с неустойчивой суммарной фазой уменьшается. Упрощенная система (фазовое приближение), как и полная система, имеет функционал свободной энергии. Непосредственными вычислениями можно проверить, что уравнения (8.15—17) могут быть получены вариацией функционала свободной энергии:

$$F = \int dx dy \left[- \left(\frac{1}{4(1+2\rho)} \left(\cos \Phi \left(\cos \Phi + \left(\sqrt{\cos^2 \Phi + \beta} \right) \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta \ln \left[\cos \Phi + \left(\sqrt{\cos^2 \Phi + B} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_3^2} \right)^2 \right) \right],$$

здесь $\beta = 4\epsilon(1+2\rho)$.

Плотность функционала является монотонной функцией параметра $S = \cos \Phi$, которая при $S = -1$ достигает минимума. Минимум функционала достигается в том случае, если дислокации сливаются, образуя пенто-гепто-дефект, либо когда они расходятся на бесконечно большое расстояние, и шестигранная структура становится совершенной. Первый случай реализуется в численном эксперименте при $\Phi_0 \sim 0$ (Φ_0 — начальное значение суммы фаз), а второй при $\Phi_0 \sim \pi$.

Процесс рождения пенто-гепто-дефекта на фоне шестигранной конвективной структуры исследовался недавно в эксперименте, проведенным с тонким слоем силиконового масла, подогреваемом снизу [98]. В условиях эксперимента числа Марангони Ma и Рэлея Ra , отвечающие за термокапиллярные и термогравитационные эффекты при возникновении конвективной неустойчивости, были одного порядка. Для задания определенных начальных условий слой жидкости неоднородно подогревался с помощью лампы накаливания, освещающей жидкий слой через экран с отверстиями. Расположение отверстий в экране соответствовало максимумам функции

$$L = A_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} + A_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} + A_3 e^{i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}} + \text{н.с.}, \quad (8.19)$$

где A_j — комплексные амплитуды мод, образующих конвективную структуру. Лампа накаливания и экран использовались конечное время, затем начальные возмущения развивались за счет неустойчивости. Если A_j были одинаковыми и не зависели от r , то возникала регулярная конвективная решетка. Если же амплитуда и фаза какой-то из A_j отвечала дислокации, то конвективная решетка имела дефект. Подобным образом можно было инициировать топологические особенности в различных модах и менять расстояние между топологическими дефектами при $t = 0$.

Процесс формирования пенто-гепто-дефекта при оптимальном периоде начальных возмущений (период инициируемой в начальный момент времени структуры совпадает с максимально неустойчивым масштабом) представлен на рис. 8.9. Здесь показано распределение контраста изображения (слева) и поле суммарной фазы мод (справа) в различные моменты времени. Как видно область рассинхронизации уменьшается, формируется коридор и дислокации, двигаясь вдоль этого коридора сближаются. Усредненная по нескольким реализациям зависимость расстояния между дефектами от времени представлена на рис. 8.10. На этом графике можно выделить два участка: первый, когда дефекты медленно сближаются и второй, когда дефекты быстро движутся навстречу другу другу и сливаясь образуют

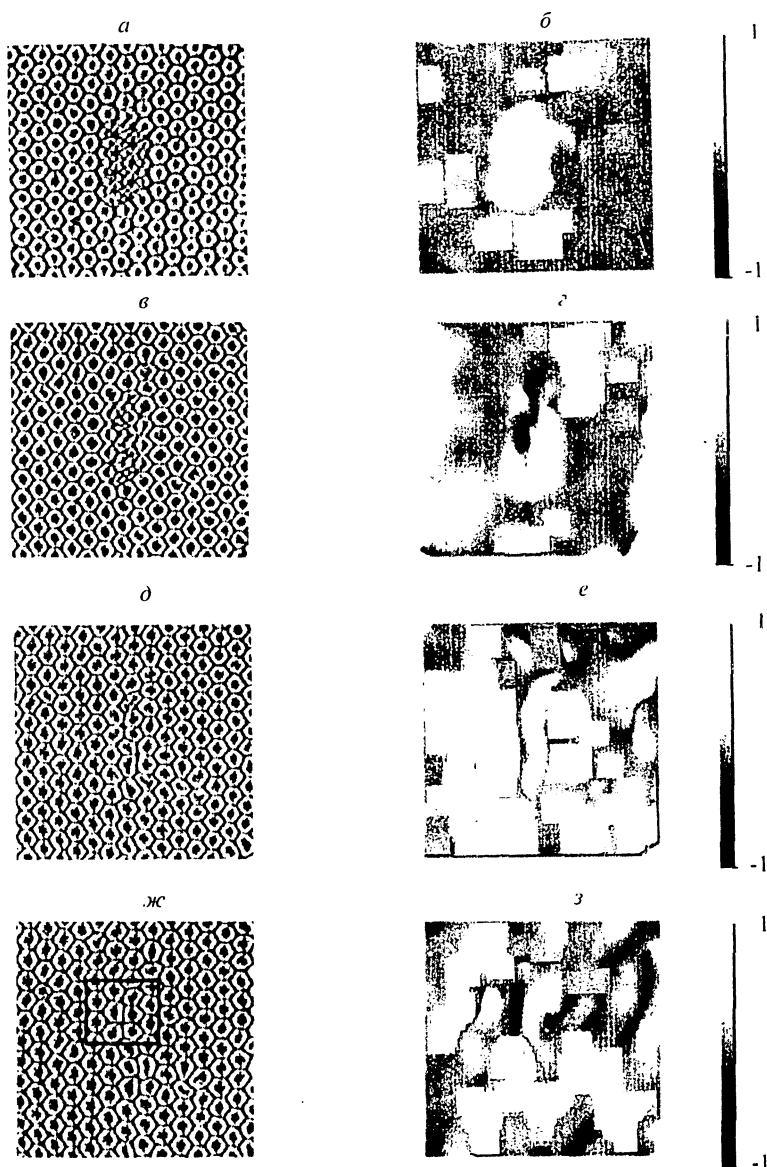


Рис. 8.9. Процесс возникновения пенто-гепто-дефекта в эксперименте с тонким слоем силиконового масла, подогреваемым снизу. Слева — контраст изображения конъективных ячеек, справа — значение параметра S

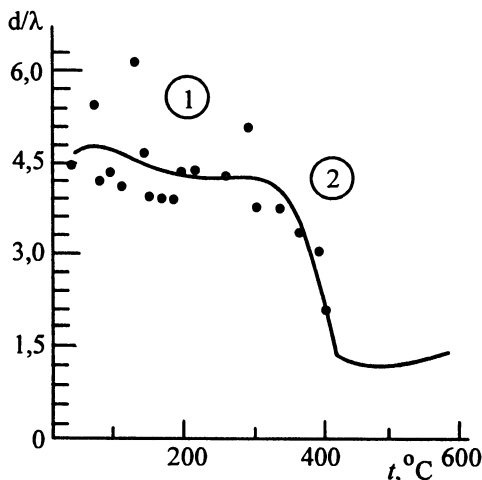


Рис. 8.10. Расстояние между дислокациями, принадлежащими разным модам

пенто-гепто-дефект. Далее расстояние между дефектами практически не меняется. Для такого состояния можно определить поля фазы каждой из мод. На достаточном удалении от пенто-гепто-дефекта зависимость фаз мод от угла θ представлена на рис. 8.11. Используя фазовое приближение, для устойчивого стационарного состояния $\Phi = 0$ из (8.15—8.17) можно получить:

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_j^2} = 0, j = 1, 2, 3, \quad (8.20)$$

если принять, что Φ_j зависят только от угла θ и не зависят от расстояния до пенто-гепто-дефекта, можно получить аналитическое решение [99], которое соответствует двум топологическим зарядам с противоположными знаками в модах 1 и 2 нулевому заряду в моде 3:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \theta - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right), \\ \Phi_2 &= -\theta - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \cos \left(2\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right), \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 - \cos(2\theta)). \end{aligned} \quad (8.21)$$

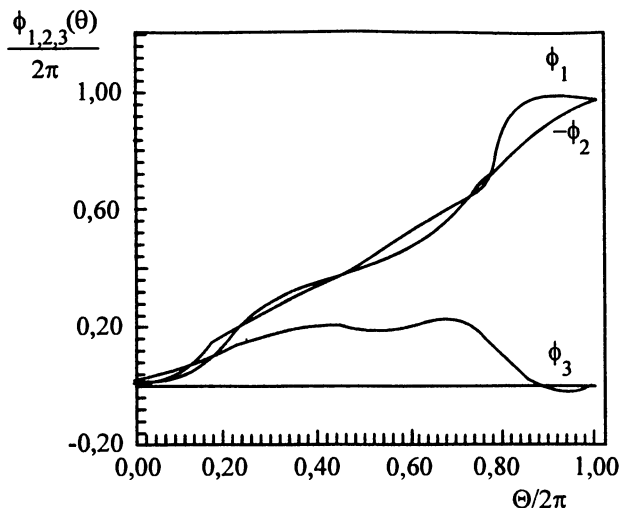


Рис. 8.11. Поле фаз различных мод, образующих структуру с пенто-гепто-дефектом при термоконвекции в слое жидкости

Такое решение (см. рис. 8.12) хорошо коррелирует с полями индивидуальных фаз мод, образующих гексагональную структуру с пенто-гепто-дефектом (см. рис. 8.11).

§4. Дислокации и доменные стенки в ряби Фарадея

Дислокации, их взаимодействие и нетривиальную динамику можно наблюдать и в системах, не являющихся в строгом смысле градиентными. Примером может служить параметрически возбуждаемая капиллярная рябь в тонком вертикально колеблющемся слое вязкой жидкости (см. рис. 2.7). В отличие от термоконвекции, где в результате неустойчивости возникают стационарные ролики, при параметрическом возбуждении волн однородным полем накачки рождаются пары встречных волн. Картина стоячей капиллярной волны с дефектом показана на рис. 8.13 [13].

Здесь отметим только, что такое распределение контраста изображения соответствует связанному состоянию из двух топологических

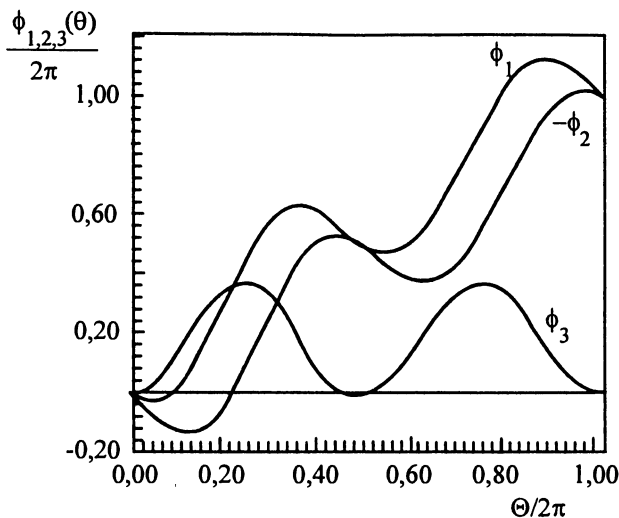


Рис. 8.12. Теоретический расчет зависимости фаз мод от угла

зарядов одного знака, разнесенных вдоль направления распространения волн — координаты x . Поле капиллярных волн может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \eta = & \text{th} \sqrt{\kappa_x^2 (x - \Delta x)^2 + \kappa_y^2 y^2} \cos \left(\omega t - kx + \text{arctg} \frac{\kappa_y y}{\kappa_x (x - \Delta x)} \right) + \\ & + \text{th} \sqrt{\kappa_x^2 (x + \Delta x)^2 + \kappa_y^2 y^2} \cos \left(\omega t + kx + \text{arctg} \frac{\kappa_y y}{\kappa_x (x + \Delta x)} \right) + \\ & + \cos(\omega t - ky) + \cos(\omega t + ky), \end{aligned} \quad (8.22)$$

здесь η — отклонение поверхности от равновесного состояния, $2\Delta x$ — расстояние между дефектами, κ_x и κ_y — параметры, описывающие амплитуды волн с частотами ω и волновыми числами k и $-k$. Благодаря внешнему осциллирующему полю накачки связанное состояние из двух зарядов является устойчивым. Если при параметрическом возбуждении реализуется не одна пара волн, а две взаимно ортогональные пары (такая структура чаще всего возникает при возбуждении капиллярных волн в пространственно-протяженном тонком слое), то

дефекты в виде связанных топологических зарядов могут существовать в каждой из пар. При этом взаимодействовать могут дефекты принадлежащие как одной и той же паре волн, так и ортогональным парам. Элементарные акты взаимодействия дефектов подробно исследовались в [13]. Было выяснено, например, что при взаимодействии дефектов, принадлежащих ортогональным модам, невозможно возникновение связанного состояния: происходит лишь рассеяние и/или один дефект проходит сквозь другой. При взаимодействии дефектов, принадлежащих одной и той же моде и имеющих противоположные по знаку заряды, происходит аннигиляция и в системе возникает совершенная структура. При одинаковых топологических зарядах в результате их взаимодействия возникает доменная стенка (см. рис. 1.13). Такая доменная стенка разделяет области с различной ориентацией фронтов капиллярных волн и является квазиустойчивым состоянием. Как показано в [100] возникновение совершенных структур из случайных начальных условий при параметрическом возбуждении капиллярных волн может происходить через конкуренцию доменов, движение границ которых приводит к поглощению малых доменов большими.

Глава 9

Локализованные образования и их ансамбли

Догадка предшествует доказательству.

Анри Пуанкаре

Внимательный читатель уже отметил, что во всех предыдущих главах мы говорили о структурах, занимающих все пространство, заполненное неравновесной средой. Возможно ли самозарождение и устойчивое существование в таких изначально однородных средах локализованных структур? Как ведут себя такие образования—как волны или как частицы? И, наконец, можно ли рассматривать сложные пространственные паттерны, устанавливающиеся при $t \rightarrow \infty$ как ансамбль таких «частиц»? В этой главе мы попытаемся, хотя и неполно, ответить на эти вопросы.

§1. Среда с жестким возбуждением

Одно из наиболее распространенных свойств неравновесных сред, способствующее возникновению локализованных образований или форм,—это бистабильность. Бистабильность означает, что при одних и тех же параметрах в одной и той же среде могут существовать два различных однородных состояния. Переход между этими двумя различными состояниями, располагающимися в различных областях пространства, и есть пример локализованной структуры. Рассмотрим для иллюстрации локализованные структуры в среде, описываемой уравнениями Свифта–Хоенберга с жестким возбуждением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \nabla^2)^2 u, \quad (9.1)$$

где $\beta > 0$ — параметр, отвечающий за нелинейную (взрывную) неустойчивость. Пространственно-однородные решения (9.1) отвечают градиентному уравнению

$$\frac{du}{dt} = -\frac{dF}{du}, \quad (9.2)$$

где функция

$$F = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}\beta u^3 + \frac{1}{4}u^4 \quad (9.3)$$

положительно определена, если $\beta < \frac{3}{\sqrt{2}}$. Можно убедиться, что при $\beta > 2$ потенциальная функция имеет два минимума, отвечающих двум разным однородным состояниям описываемой среды. Попробуем оценить существование цилиндрически симметричного решения (9.1), локализованного в смысле ограниченности энергии:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |u(r, t)|^2 dr < \infty. \quad (9.4)$$

Ясно, что в центре такой локализованной структуры (диска) значение u должно быть близко к $u^0 = \frac{\beta}{2} + (\frac{\beta^2}{4} - 1)^{\frac{1}{2}}$, а на периферии ($r \rightarrow \infty$) «хвосты» решения должны экспоненциально спадать. Поведение структуры поля вдали от центра диска описывается линеаризованным уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [-1 - (k_0^2 + \nabla^2)^2]u. \quad (9.5)$$

Полагая, что $u(x, y, t) = f(r, \phi) \exp(\lambda t)$, имеем:

$$[\lambda - 1 - (k_0^2 + \nabla^2)^2]f(r, \phi) = 0$$

или

$$(\nabla^2 + k_0^2 - \kappa_1)(\nabla^2 + k_0^2 - \kappa_2)f = 0,$$

где $\kappa_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda - 1}$. Ввиду линейности задачи мы можем ограничиться анализом решений, удовлетворяющих уравнениям

$$[(\nabla^2 + k_0^2) - \kappa_{1,2}]f_{1,2}(r, \phi) = 0 \quad (9.6)$$

Представим f_i в виде $f_i = \Phi_i(\phi)R_i(r)$, где $\Phi(\phi) \sim \cos n\phi$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда для $R_i(r)$ получается уравнение

$$r^2 \frac{d^2 R_i}{dr^2} + r \frac{dR_i}{dr} - [r^2(\kappa_i - k_0^2) + n^2] R_i = 0. \quad (9.7)$$

Для действительных κ_i , если $\kappa_i < k_0^2$, это уравнение Бесселя с осциллирующими решениями, которые не удовлетворяют (9.4) и нам неинтересны. Если же $\kappa_i > k_0^2$, то мы имеем модифицированное уравнение Бесселя с решениями вида:

$$R_i \sim K_n \left(r \sqrt{-k_0^2 \pm \sqrt{\lambda - 1}} \right), \quad (9.8)$$

(K_n — модифицированная функция Бесселя)

В случае комплексных κ_i (например, при $\lambda = 0$) функции R_i имеют асимптотику вида ($n = 0$):

$$R_i(r) \sim K_0(r \rightarrow \infty) \sim \frac{e^{-\nu r} \cos(\mu r)}{r}, \quad (9.9)$$

здесь $\nu = | \operatorname{Re} \sqrt{i - k_0^2} |$, $\mu = | \operatorname{Im} \sqrt{i - k_0^2} |$. Такие решения известны как вихри Абрикосова в теории сверхпроводимости.

Непосредственная проверка показывает, что центральносимметричный диск с полем, спадающим при $r \rightarrow \infty$ по закону (9.9) представляет из себя локализованное образование в смысле (9.4). Является ли локализованная цилиндрическая структура с затухающими осциллирующими хвостами устойчивой? Проще всего ответить на этот вопрос прямым вычислением функционала свободной энергии

$$F = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} u^2 - \frac{\beta}{3} u^3 + \frac{u^4}{2} + \frac{1}{2} ((k_0^2 + \nabla^2) u)^2 \right] dS, \quad (9.10)$$

где Ω — граница достаточно большой области, включающей интересующую нас структуру. Поскольку $\frac{dF}{dt} = - \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dv \leq 0$, функционал F может только монотонно убывать вдоль траектории. Следовательно, статическое решение, которое мы нашли из условия $\frac{\delta F}{\delta u} = 0$, будет устойчиво, если оно соответствует локальному минимуму F . Вычисления показывают [102], что локализованные состояния, о которых мы говорили выше, (см. рис. 9.1), устойчивы в интервале $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$. Оценка β_1 и β_2 дает соответственно $\beta_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\beta_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + k_0^4}$. При $\beta < \beta_1$, локализованное состояние схлопывается, при $\beta > \beta_2$ — расплывается.

Весьма замысловатой может быть топология локализованных состояний в трехмерной неравновесной среде. На рис. 9.2 представлены

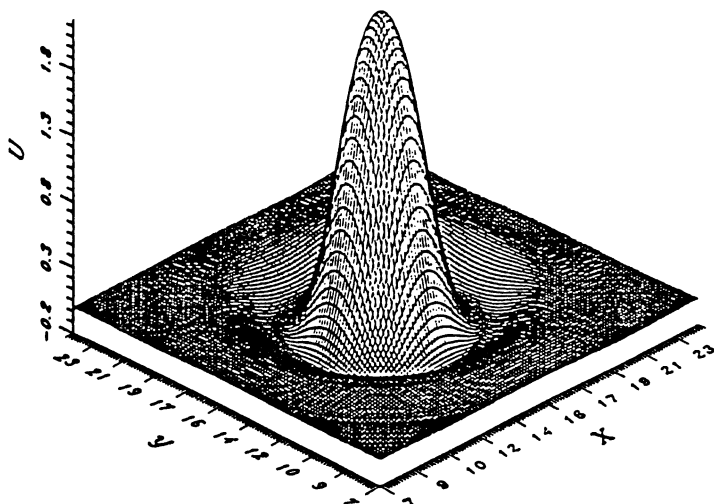


Рис. 9.1. Локализованное решение уравнения (9.1)

примеры частицеподобных решений в модели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= [\epsilon - (1 + \nabla^2)^2]u + \beta u^2 - u^3 + \kappa v \equiv -\frac{\delta F}{\delta u}, \\ \mu \frac{\partial v}{\partial t} &= (1 + D\nabla^2)v - \gamma v^3 + \kappa u \equiv -\frac{\delta F}{\delta v}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} F = \int_{\Omega} & \left[-\frac{\epsilon}{2}u^2 - \frac{\beta}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4 - \kappa uv - \right. \\ & \left. -\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{4}v^4 + \frac{1}{2}((1 + \nabla^2)u)^2 - \frac{1}{2}((1 + D\nabla^2)v)^2 \right] dS. \end{aligned}$$

Эта модель похожа на (9.1), но несколько более общая, поскольку надкритичность $(\epsilon + \kappa v)$ зависит от второй переменной, которая может иметь смысл, например, количества вещества.

«Элементарные частицы», обнаруженные при компьютерном эксперименте в модели (9.11) при значениях параметров $\epsilon = -0,007$, $\beta = 1$, $\kappa = 0,15$, $\mu = 0,1$, $D = 0,06$ и $\gamma = 4$ имеют вид: шара, тора и тора, уложенного на сферу в виде рисунка на теннисном мяче. Различные комбинации таких элементарных частиц, образующих новые структуры, показаны на рис. 9.2. Поскольку у элементарных частиц поле на

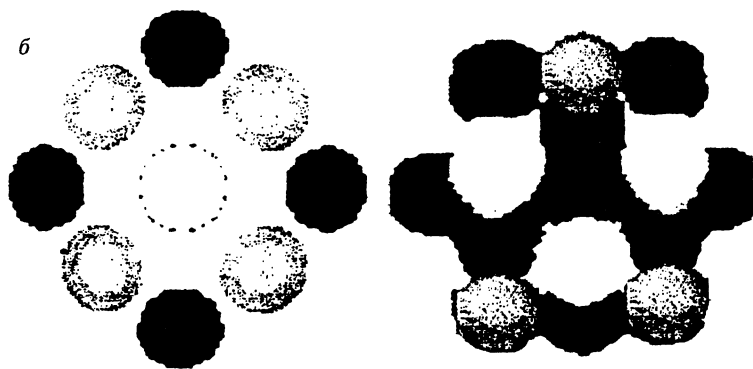
a*б*

Рис. 9.2. Связанные состояния из элементарных частиц а) три тора и два шара; б) кластер из сфер

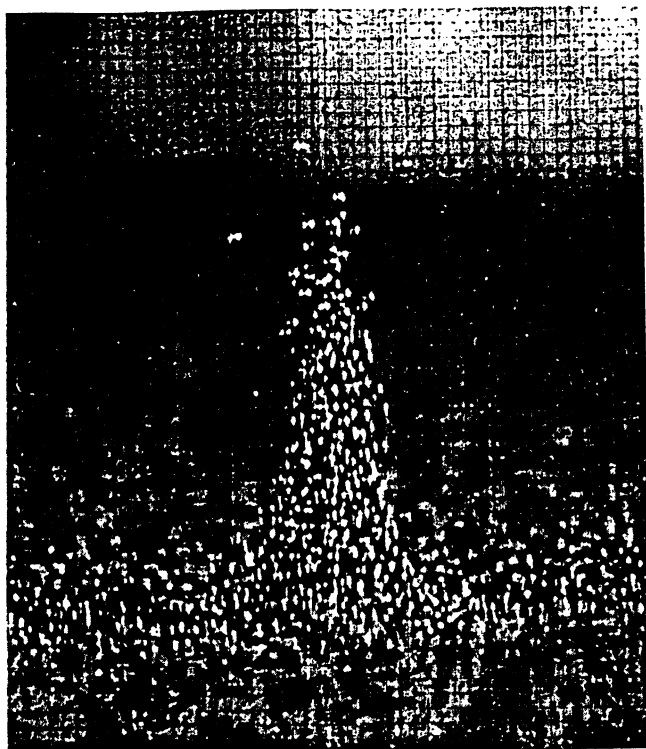


Рис. 9.3. Локализованная структура, возникающая при вибрациях гранулированных материалов

периферии осциллирует и достаточно быстро спадает, т.е. образует локальные минимумы потенциала, их комбинации цепочки, решетки и более сложные кластеры оказываются устойчивыми.

В экспериментах локализованные структуры наблюдаются достаточно часто. Мы здесь обсудим кратко результаты лишь одного эксперимента по наблюдению локализованного образования в слое гранулированного сыпучего материала, находящегося в осциллирующем гравитационном поле. Авторы назвали наблюдавшуюся структуру (см. рис. 9.3) «осциллон» [103]. Такие локализованные образования наблюдаются при соответствующих начальных условиях примерно в той же области параметров, где и квадратные решетки. Вообще недавние эксперименты показали, что структуры, наблюдающиеся параметрически возбуждаемом слое гранулированного материала, удивительно

похожи на структуры ряби Фарадея, которые мы неоднократно обсуждали.

Подобное сходство подсказало авторам работы [104] феноменологическую модель, для описания пространственных структур, наблюдаемых в осциллирующем гранулированном слое. Эта модель содержит уравнения для параметра порядка, подобные (7.18), дополненные законом сохранения для средней массы ρ гранулированного материала на единицу площади (или для локальной средней толщины слоя):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \gamma \psi^* - (1 - i\omega)\psi + (1 + i\beta) \nabla^2 \psi - |\psi|^2 \psi - \rho \psi, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \alpha \nabla (\rho \nabla (|\psi|^2)) + D \nabla^2 \rho. \end{aligned} \quad (9.12)$$

На рис. 9.4 представлены уединенные структуры, обнаруженные в экспериментах с моделью (9.12). Значения параметров указаны в подписях к рисунку. Разбиение пространства параметров модели ($\epsilon\eta, \mu\eta$) приведено на рис. 9.5. Здесь $\eta = \frac{\alpha}{D}$, а параметр μ представляет собой полную массу сыпучего слоя $\frac{1}{S} \int \rho dx dy = \mu = const$, где S — площадь слоя.

Так как нелокализованные пространственные образования, наблюдающиеся в осциллирующем гранулированном слое (см. рис. 9.6), имеют много общего со структурами капиллярной ряби. (см. рис. 1.2, 1.7, 1.13) то и рождение локализованных образований в достаточно тонком жидком слое, находящемся в осциллирующем гравитационном поле, не представляется чем-то нереальным.

§2. Пространственный беспорядок структур

Обнаруженная устойчивость разнообразных пространственных конфигураций подсказывает ответ на старый вопрос о существовании пространственного беспорядка динамической природы.

Весьма вероятной представляется следующая схема: «гладкое регулярное поле с малой нерегулярностью \rightarrow решетка локализованных состояний \rightarrow пространственный беспорядок» [105].

Вновь обратимся к модели (9.1), но в ее одномерном варианте:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \beta u^2 - u^3 - \left(k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u. \quad (9.13)$$

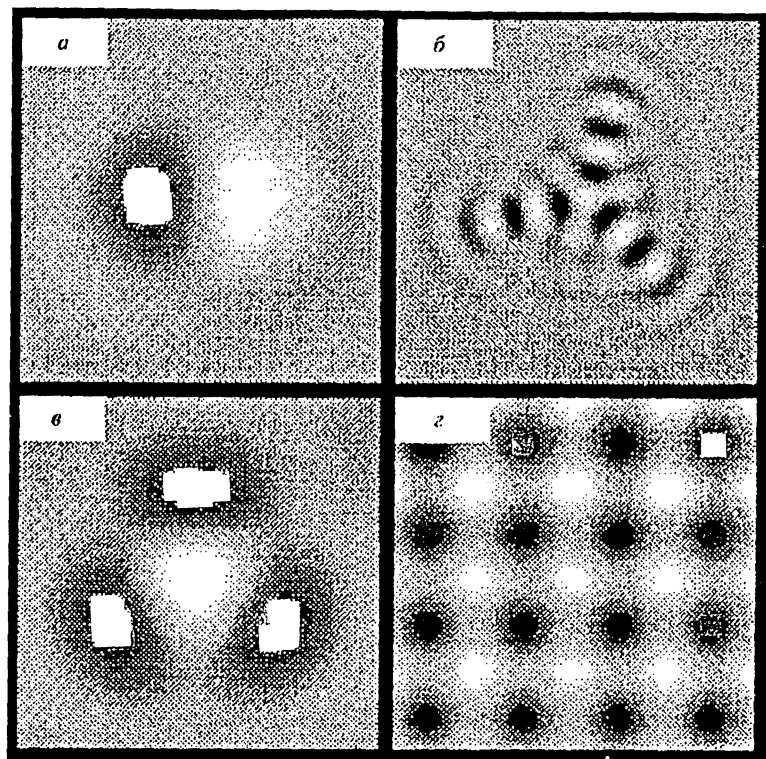


Рис. 9.4. Структуры, обнаруженные в численном счете системы (9.12)

- а) два осциллона с фазами, отличающимися на π ; $\beta = \omega = 1$, $b = 2$, $\eta = 2,78$, $\mu = 0,527$, $\gamma = 1,8$; б) осциллон с тремя соседями при тех же параметрах, что и в случае а); в) локализованная структура с азимутальной симметрией третьего порядка при $\beta = 1$, $\omega = b = 2$, $\eta = 1,9$, $\mu = 0,525$, $\gamma = 2,25$; г) квадратная решетка при $\beta = \omega = 1$, $b = 2$, $\eta = 2,72$, $\mu = 0,52$, $\gamma = 1,84$

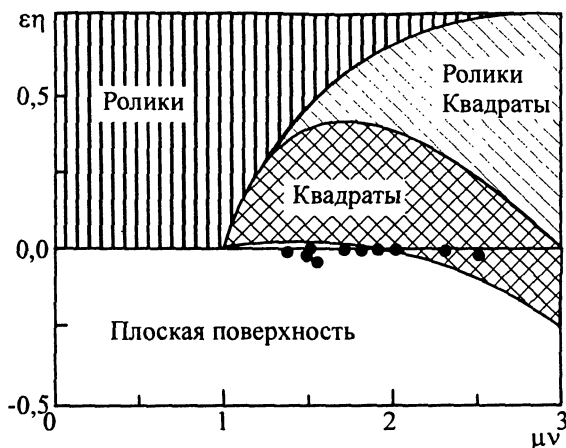


Рис. 9.5. Фазовая диаграмма для уравнения (9.12)

Поскольку рассматриваемая система градиентная, то весьма естественной представляется следующая постановка задачи: отыскать в фазовом пространстве системы (9.13) траектории, которые переводят систему из упорядоченных состояний в статические неупорядоченные при $t \rightarrow \infty$. Чтобы проиллюстрировать возможность такого перехода, рассмотрим эволюцию начального состояния в виде:

$$u(x) = a \sin(kx) + \epsilon f(x), \quad (9.14)$$

где $\epsilon \ll a$, а $f(x)$ — случайная функция. Волновое число выбирается так, чтобы начальное (близкое к периодическому) распределение было неустойчиво (например, соответствовало локальному максимуму функционала свободной энергии).

Численный эксперимент показал, что возникающий и устанавливающийся при $t \rightarrow \infty$ пространственный беспорядок обладает некоторыми универсальными свойствами, которые не зависят от статистических свойств начального возмущения $f(x)$, а определяются лишь динамической системой. Это подтверждается, в частности, вычислением энтропии Колмогорова–Синяя K_2 для пространственного распределения поля (см. главу 10) в различные моменты времени. Эти результаты представлены на рис. 9.7.

Пример пространственного беспорядка, полученного в двумерной модели (9.1), представлен на рис. 9.8.

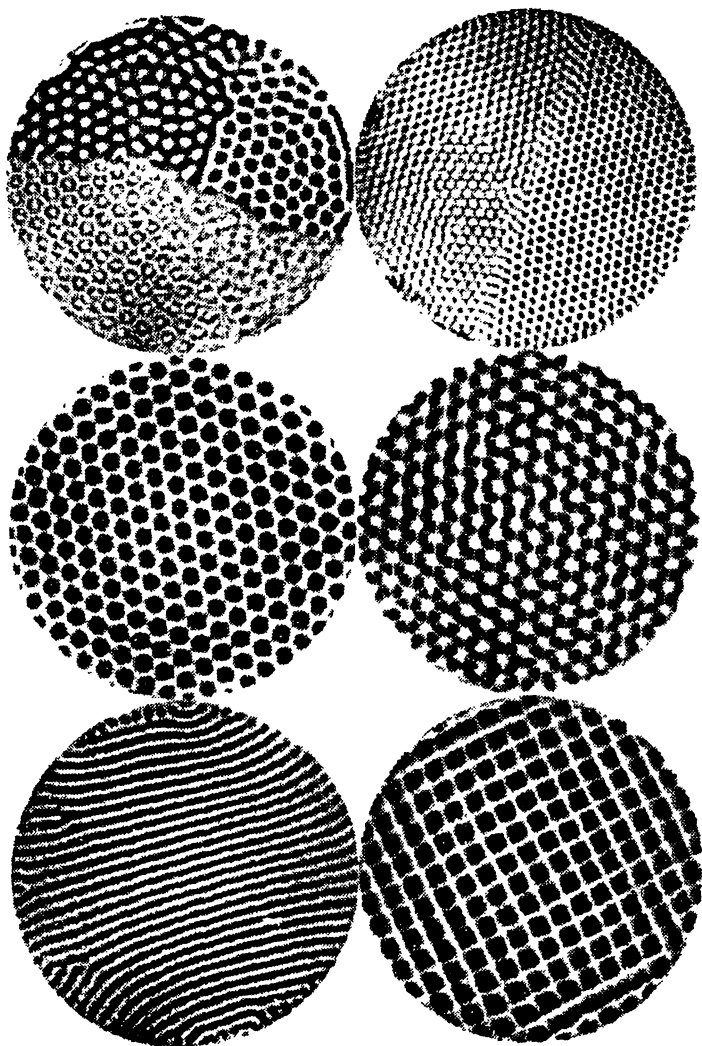


Рис. 9.6. Примеры нелокализованных структур, возникающих при вибрациях песка

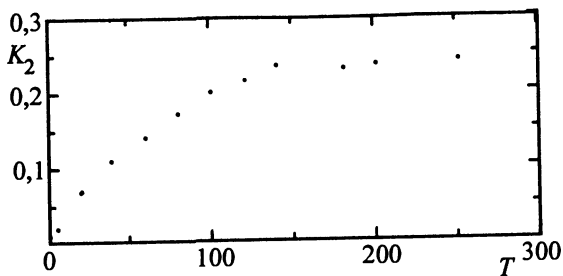


Рис. 9.7. Зависимость энтропии Колмогорова-Синия от времени

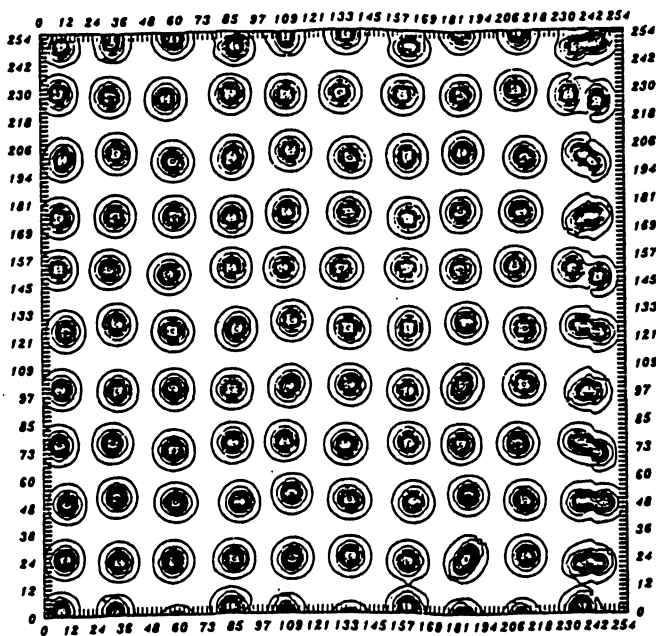


Рис. 9.8. Решения (9.1) в виде квазипериодических структур

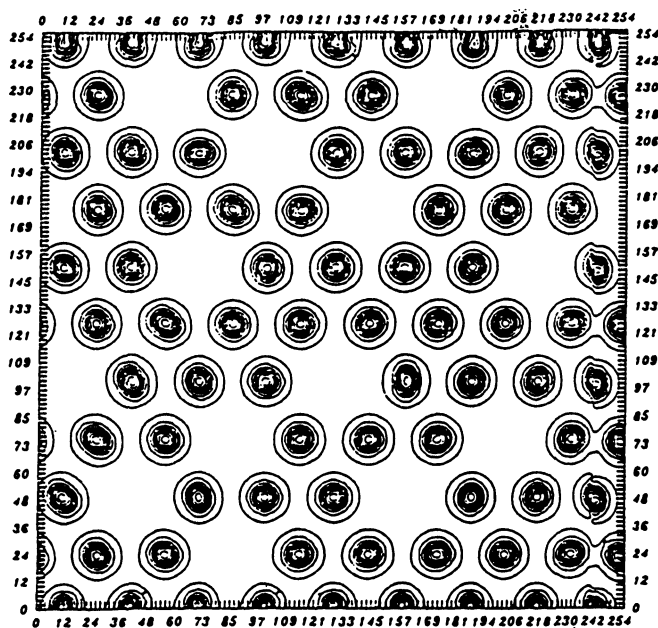


Рис. 9.9. Пространственный беспорядок в (9.1)

§3. Взаимодействие частиц

Результаты компьютерных экспериментов, представленные выше, убеждают, что локальные образования, обнаруженные в модели (9.13), действительно ведут себя как частицы. Только потенциал их взаимодействия не ньютоновский, а несколько более сложный, определяется структурой их «хвостов» (см. рис. 9.9). Для центра масс наших частиц с помощью асимптотического метода (с которым можно познакомиться в [107]) получаются такие же уравнения, как для движения тяжелого шарика по дну ванны с неровным дном, заполненной вязкой жидкостью:

$$M \frac{dx_i}{dt} = f_i \equiv - \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (9.15)$$

здесь x_i — координата центра i -й частицы, $M = \int (u_2^0(x))^2 dx$ — ее

подвижность, $u^0(x)$ — стационарное решение (9.13), определяющее профиль частицы и поле ее хвостов, u_i — потенциал, создаваемый частицами слева и справа ($i \pm 1$) в точке x_i :

$$u_i = U_0(e^{-\nu|x_i-x_{i-1}|} \cos(\mu|x_i-x_{i-1}| + \Phi_0) + e^{-\nu|x_i-x_{i+1}|} \cos(\mu|x_i-x_{i+1}| + \Phi_0)), \quad (9.16)$$

здесь ν и μ определяются формулой (9.9), а U_0 и Φ_0 — постоянные.

Очевидно, что эквидистантная решетка из частиц с произвольным периодом $l(x_i = il)$ соответствует статическому ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) решению (9.15). Однако решетка оказывается устойчивой только в том случае, если значения l принадлежат счетному числу интервалов. Устойчивым решениям отвечают минимумы потенциала u_i . Для малых отклонений от равновесия $\tilde{x}_i = x_i - il$ из (9.15) получается линеаризованная система:

$$\ddot{\tilde{x}}_i = \sum_j a_{ij} \tilde{x}_j, \quad (9.17)$$

где $a_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} |_{x_j=jl}$. Можно проверить, что $a_{ij} = 0$ для любой пары с $|i - j| > 1$ и

$$a_{ij} = A = -e^{\nu t} \sin(\mu l + \Phi_0 + \Phi) \sqrt{1 + k_0^4} \quad (9.18)$$

для соседей, т.е. когда $|i - j| = 1$; $a_{ii} = 2A$ и $\Phi = \arctg\left(\frac{\nu^2 - \mu^2}{2\nu\mu}\right)$. Поведение возмущений \tilde{x}_i определяется собственными значениями трехдиагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} 2A & -A & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -A & 2A & -A & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -A & 2A & -A & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & -A & 2A & -A & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -A & 2A & -A \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -A & 2A \end{pmatrix}.$$

Эти значения известны:

$$\lambda_k = 2A \left(1 + \cos\left(\frac{\pi k}{N+1}\right) \right), \quad k = 1, \dots, N,$$

где N порядок матрицы (число частиц). Поскольку знак ляпуновских показателей λ_k определяется лишь знаком A , мы можем заключить из (9.18), что эквидистантная цепочка «атомов» устойчива, если

$$2n\pi < \mu l + \Phi_0 + \Phi < (2n + 1)\pi \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (9.19)$$

Конечно, это приближенная формула, которая учитывает взаимодействие только с двумя ближайшими соседями — слева и справа. Однако, поскольку «хвосты» спадают экспоненциально, оценка (9.19), как показывает компьютерный эксперимент, оказывается достаточно хорошей.

Теперь уже кажется естественным, что мы можем прорезать решетку, по-существу, произвольным образом и получать весьма замысловатые, в том числе и нерегулярные, устойчивые образования (см. рис. 9.10). Добавим, что эти неупорядоченные формы действительно продуцируются динамической системой и получаются из регулярных начальных условий в результате развития неустойчивости (см. (9.14)).

Глава 10

Диагностика детерминированного пространственного беспорядка

Порядок стихотворных строк
Ценил поэт в своей тетрадке.
Он лишь в порядке видел прок,
А мы — и в беспорядке
Всем известный стишок

До сих пор мы обсуждали возникновение порядка, частичного порядка и беспорядка в рамках определенных моделей. Посмотрим на проблему описания пространственных паттернов с несколько иной стороны. Пусть у нас нет априорной информации о происхождении данного распределения поля в пространстве. Есть только полученная из эксперимента функция $u(\mathbf{r})$ — пространственная наблюдаемая. Будем пока считать поле безграничным. Какие характеристики (функции или числа) являются информативными для описания такой наблюдаемой? Очень важной функциональной характеристикой служит привычный нам пространственный Фурье-спектр. Однако, если речь идет о беспорядке, то эта характеристика не слишком содержательна — любому неупорядоченному распределению поля, любой нерегулярной наблюдаемой отвечает сплошной спектр. Могут, конечно, быть разные особенности, в частности, для двумерных полей, но ответить на интересующий нас вопрос о возможности описания данной неупорядоченной наблюдаемой с помощью динамической системы Фурье-спектр не может. Здесь уместно спросить: а типичны ли, вообще, такие наблюдаемые? Ясно, что среди множества всех пространственно неупорядоченных распределений поля детерминированно порожденные образуют множество меры нуль. Это и неудивительно. Удивительно другое — такие реализации, среди которых есть и периодические, и квазипериодические и нерегулярные, тем не

менее устойчиво наблюдаются, т.е. в определенном смысле типичны. Разрешение проблемы, по-видимому, связано с тем, что именно «редкие» детерминированно порожденные пространственные наблюдаемые являются эволюционными, т.е. именно они столь часто устанавливаются из случайных начальных условий при $t \rightarrow \infty$. Напомним, что генерация периодических колебаний нелинейной системой из начального шума столь же удивительна. Просто мы к этому привыкли.

Итак вернемся к наблюдаемой. Какие еще, кроме пространственного спектра, ее характеристики могут оказаться полезными? Попробуем воспользоваться опытом обработки временных наблюдаемых (time series). В этой области за последние пятнадцать лет накоплен очень большой опыт [108]. Мы обсудим здесь некоторые известные результаты из этой области, просто заменив время t на пространственную координату x (для начала пространственную наблюдаемую будем считать функцией лишь одной координаты) и на основе этого изложим соответствующую теорию, оставаясь в рамках которой, можно, в принципе, отличить «динамический беспорядок» от «случайного» — недетерминированного.

§1. Характеристики наблюдаемых

Будем считать, что наблюдаемая задана в бесконечном числе равно отстоящих точек (пространство дискретно). Тогда наблюдаемая — это последовательность цифр

$$\underline{a} = \{a_i\}_{i=0}^{\infty}. \quad (10.1)$$

Такая наблюдаемая называется детерминированно порожденной, если:

1) существуют пространственная динамическая система (т.е. отображение сдвига f с конечномерным фазовым пространством $M = \{u\}$), начальная точка u_0 и функция ψ такие, что $\psi(f^i(u_0)) = a_i$ и $i = 0, 1 \dots$;

2) траектории этой динамической системы не могут разбегаться быстрее, чем экспоненциально, т.е.

$$\text{dist}(f^x u, f^x v) \leq \text{const} \cdot e^{\lambda x} \cdot \text{dist}(u, v), \quad (10.2)$$

где $\lambda > 0$;

3) функция ψ линейно-непрерывна, т.е.

$$|\psi(u) - \psi(v)| \leq \text{const} \cdot \text{dist}(u, v) \quad (10.3)$$

для любых точек u, v в фазовом пространстве M .

Рассмотрим теперь пространство наблюдаемых B как множество всевозможных последовательностей $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots)$ и определим в B пространственную динамическую систему, задав отображение сдвига $\underline{a} \rightarrow f(\underline{a})$, где $f(\underline{a}) = (a_1, a_2, \dots)$, если $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Это и есть динамическая система, порождающая детерминированную пространственную наблюдаемую (ограниченную при $x \rightarrow \pm\infty$, или нарастающую медленнее, чем экспонента $e^{\lambda x}$).

Периодической пространственной наблюдаемой в фазовом пространстве M отвечает замкнутая кривая, квазипериодическому распределению поля с n несоизмеримыми периодами — незамкнутая намотка на n -мерном торе. Что же отвечает детерминированному пространственному беспорядку? Ему соответствует инвариантное стохастическое множество. Размерность или предельная емкость [108] этого множества и есть размерность наблюдаемой.

Таким образом, если размерность пространственной наблюдаемой конечна, то мы можем предъявить конечномерную динамическую систему, которая продуцирует такую наблюдаемую. Прежде, чем проиллюстрировать это на примерах, обсудим здесь более подробно понятия предельной емкости корреляционной размерности и максимальной ляпуновского показателя.

Пусть \mathcal{J} — подмножество некоторого метрического пространства \mathcal{E} с заданной функцией расстояния dist между любыми двумя точками. Обозначим через $N(\varepsilon)$ минимальное число шаров диаметром ε , совокупность которых покрывает все точки \mathcal{J} . Тогда число

$$D(\mathcal{J}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (10.4)$$

называется (верхней) предельной емкостью или фрактальной размерностью множества \mathcal{J} . Физический смысл этого определения довольно прост. Пусть V — это объем нашего множества, погруженного в некоторое пространство достаточно высокой размерности. Тогда при малом ε , $N(\varepsilon)$ можно рассматривать как число D -мерных шаров, необходимых для заполнения в этом пространстве объема V : $N(\varepsilon) \approx V\varepsilon^{-D}$. Для обычных множеств — множества N изолированных точек, отрезка линии L или площадки S двумерной поверхности,

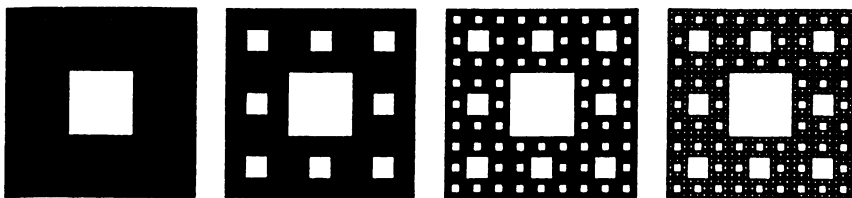


Рис. 10.1. Ковер Серпинского

мы имеем очевидные результаты. Соответственно: $N(\varepsilon) = N$ и $D = 0$ для точек; $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$ и $D = 1$ для отрезка; $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2$ и $D = 2$ для площадки.

Для более сложных — «дырявых» (или точнее канторовских) множеств фрактальная размерность может быть нецелой. Именно такова размерность орнамента, изображенного на рис. 10.1 (ковер Серпинского). Это самоподобное множество (любой элемент воспроизводит себя при изменении масштаба) и, кроме того, сам процесс построения множества самоподобен. Последнее означает, что на каждом последующем шаге делается то же самое, что и на предыдущем, но с элементами, уменьшаемыми в постоянное число раз. Для всех множеств, обладающих этими свойствами, имеется эмпирическое правило вычисления фрактальной размерности (в ряде случаев строго доказанное [108]). Если множество \mathcal{J} строится с помощью самоподобного процесса, причем на любом шаге линейный элемент длины L заменяется p линейными элементами длиной L/q каждый ($q > 1$), то фрактальная размерность равна:

$$D(\mathcal{J}) = \ln p / \ln q. \quad (10.5)$$

Для ковра Серпинского $p = 8$, $q = 3$, т.е. $D(\mathcal{J}) = \ln 8 / \ln 3 \approx 1.89$. Фрактальная снежинка, изображенная на рис. 10.2, имеет размерность $D(\mathcal{J}) \approx 1.49$ (здесь $p = 5$ и $q = 3$) [115].

Естественно, что большинство встречающихся фрактальных множеств «неоднородных». Они либо вообще строятся не по самоподобным правилам, либо в разных местах этих множеств самоподобие различно. В этих случаях информативно не только предельное значение $\ln N(\varepsilon)/(-\ln \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, но и характер стремления этого отношения к пределу, т.е. зависимость $D(\varepsilon)$.

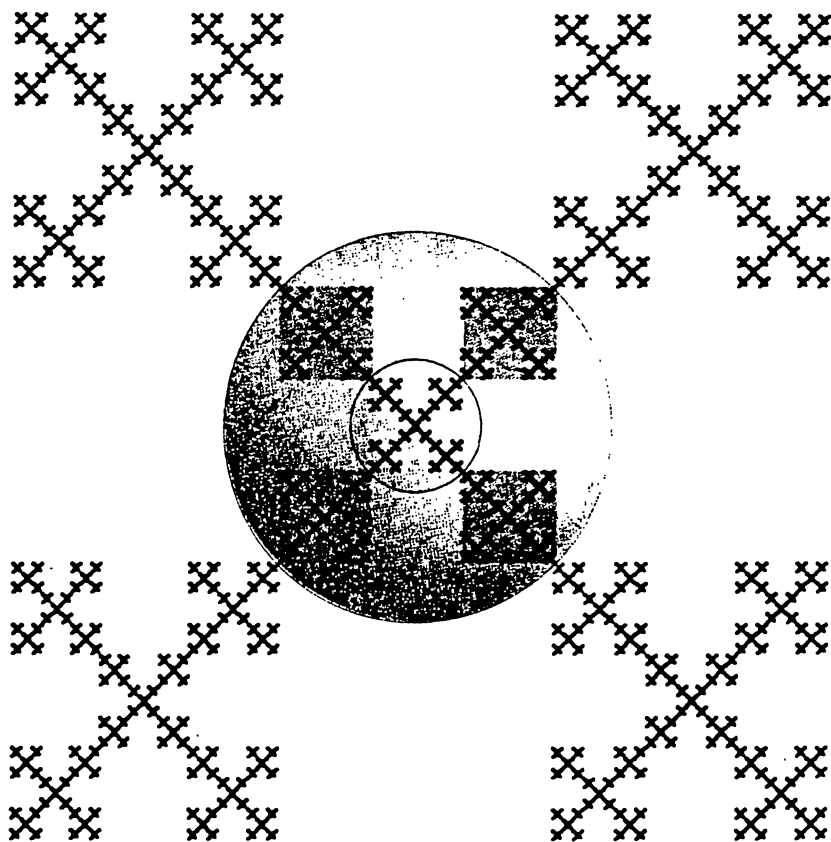


Рис. 10.2. Фрактальная снежинка

Множество \mathcal{J} — это может быть множество в обычном физическом пространстве, или в фазовом пространстве. И в том, и в другом случае его можно характеризовать фрактальной размерностью. Однако фрактальная размерность картинки в физическом пространстве, конечно, ничего не говорит о возможности ее продуцирования динамической системой. Набросаем на плоскость случайным образом горсти песка. Получится довольно своеобразное случайное множество, размерность которого будет конечной (< 2). Можно ли сгенерировать подобную наблюдаемую динамической системой? Никакой информации об этом у нас нет. Другое дело, если речь идет о размерности отвечающего наблюдаемой множества \mathcal{J} в фазовом пространстве. Конечная размерность этого множества гарантирует возможность продуцирования наблюдаемой динамической системой. Именно в этом смысле мы и говорим о конечномерности пространственного беспорядка.

Полагая, что наблюдаемая (10.1) является детерминированно порожденной, обратимся к анализу траекторий в фазовом пространстве соответствующей динамической системы. Расстояние между двумя траекториями удовлетворяет (10.2), где λ есть наибольший ляпуновский показатель. Общее число ляпуновских показателей для данной траектории определяется размерностью фазового пространства, в котором она расположена. Знание ляпуновских показателей позволяет вычислить, т.н. ляпуновскую размерность D_λ наблюдаемой [2], которая является оценкой сверху фрактальной размерности, а также определить K_2 — энтропию (энтропию Колмогорова–Синяя), которая есть сумма всех положительных ляпуновских показателей.

Ляпуновские показатели определяются как

$$\lambda_j = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{\ln l_j(x)}{\ln l_j(0)}, \quad (10.6)$$

где $l_j(0)$ начальное расстояние близкой к исследуемой траектории, а $l_j(x)$ расстояние между этими траекториями через интервал x . Предел в (10.6) означает, что мы рассматриваем относительную скорость изменения расстояния в среднем при движении вдоль траектории (см. рис. 10.3). Таким образом, чтобы вычислить λ_j , нужно иметь не одну траекторию, а пучок близких траекторий. Однако, если речь идет о траектории, принадлежащей инвариантному стохастическому множеству, роль разных траекторий в пучке могут играть разные куски одной и той же траектории, возвращающейся через достаточно большие интервалы x в одну и ту же ячейку фазового пространства с

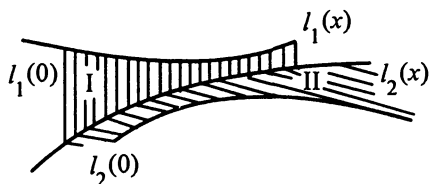


Рис. 10.3. Расстояние между траекториями в фазовом пространстве

характерным размером $l(0)$.

Колмогоровская энтропия K_2 является одной из наиболее интересных характеристик пространственного беспорядка. Ее вычисление на основе ляпуновских показателей, однако, весьма трудоемко. Приведем здесь другой подход к определению K_2 энтропии наблюдаемых, опирающийся на вычисление корреляционного интеграла [105].

§2. Алгоритм Грассбергера–Прокаччия

Рассмотрим отрезок пространственной наблюдаемой

$$\mathbf{u}(x, t) = \{u(x_1, t), u(x_1 + x, t), \dots, u(x_1 + (m-1)x, t)\}, \quad (10.7)$$

здесь время t выступает как параметр, x — минимальный шаг дискретизации, m — целое число, причем $m \geq d_E$, где d_E называют размерностью вложения. Рассмотрим выражение

$$C^m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta(\varepsilon - \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|), \quad (10.8)$$

где \mathbf{u}_i и \mathbf{u}_j — это два разных куска (кластера) реализации, каждый длиной m , а θ — функция Хевисайда. Функцию $C^m(\varepsilon)$ называют корреляционным интегралом. По смыслу корреляционный интеграл есть среднее (по всей наблюдаемой) число пар точек, расстояние между которыми меньше ε . Если в (10.8) не усреднять по всем точкам i , т.е. оставить только суммирование по j , то $C_i^m(\varepsilon)$ будет частотой попадания точки на траектории, отвечающей в фазовом пространстве нашей наблюдаемой, в m -мерный шар радиуса ε с центром в точке i .

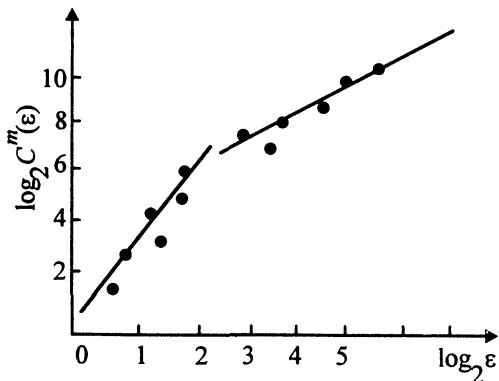


Рис. 10.4. Вид корреляционного интеграла при сложной организации наблюдаемой на различных масштабах

Предел

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln C^m(\epsilon) / \ln \epsilon, \quad (10.9)$$

если он существует, называется корреляционной размерностью. При некоторых условиях (см. [108]) корреляционная размерность совпадает с предельной емкостью (10.4).

Используя корреляционный интеграл (10.8), можно определить и K_2 — энтропию [109]

$$K_2 = h = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [C(\epsilon, m) - C(\epsilon, m - 1)]. \quad (10.10)$$

Конечно, непосредственно эту формулу применить при обработке реальной наблюдаемой нельзя. Хотя бы потому, что на практике мы всегда имеем дело с наблюдаемой ограниченной длины (т.е. N конечно) и, кроме того, конечную точность определения данных ϵ нельзя считать сколь угодно малой. Поэтому и D и h мы можем вычислить лишь приближенно.

Добавим, что поскольку корреляционный интеграл — это функция, он несет больше информации, чем размерность или K_2 — энтропия. Например, изломы $C^m(\epsilon)$, подобные показанным на рис. 10.4, свидетельствуют о сложной (структурированной) организации наблюдаемой по масштабам.

§3. Количественное описание процесса разупорядочивания

Имея в руках количественную характеристику беспорядка (K_2 -энтропию, пространственную размерность и т.д.) можно не просто сравнить, например, два разных беспорядка, но возможно проследить и рождение беспорядка во времени, процесс его эволюции. На рис. 9.7 показана зависимость от времени K_2 -энтропии, вычисленной для последовательности мгновенных снимков генерируемых системой (см. гл. 9)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \beta u^2 - u^3 - \left(k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u. \quad (10.11)$$

Поскольку начальное распределение поля близко к периодическому: — $u(x, t = 0) = a \sin Kx + \varepsilon f(x)$, где $\varepsilon \ll a$, то не удивительно, что $K_2(0) \approx 0$. Однако с ростом t K_2 -энтропия монотонно возрастает и, наконец, выходит на асимптоту, символизируя установление в градиентной системе (10.11) детерминированного пространственного беспорядка.

Рис. 10.5 показывает зависимость степени беспорядка, устанавливающегося в (10.11) при $t \rightarrow \infty$ от периода l начальной регулярной решетки (цепочки). Как видно K_2 -энтропия стремится с ростом l к нулю. Этот факт имеет довольно прозрачное физическое объяснение. Как мы видели в гл. 9, процесс формирования детерминированного пространственного беспорядка состоит из двух этапов — быстрого, когда из плавного периодического начального распределения формируется цепочка локализованных структур. Пространственный период этой цепочки совпадает с периодом l начального распределения поля. Характер эволюции на втором — медленном — этапе определяется фактом устойчивости цепочки структур (солитонов с осциллирующими в пространстве хвостами).

В случае неустойчивости расстояние между солитонами может либо увеличиться—они разойдутся на дополнительный минимум, либо это расстояние уменьшается на такую же единицу длины. Ясно, что степень беспорядка с ростом периода l может только уменьшаться, поскольку при больших l ошибка на один минимум слабо нарушает периодичность. Это и выражает рис. 10.5.

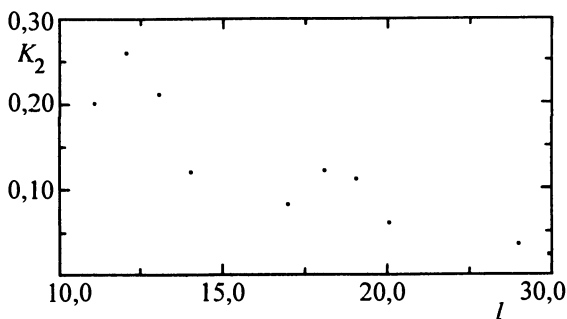


Рис. 10.5. Зависимость энтропии Колмогорова–Синая от периода начальной регулярной решетки

Завершая разговор о новых принципах обработки пространственных наблюдаемых, зависящих лишь от одной координаты (и от времени как от параметра), сделаем несколько общих замечаний. Прежде всего подчеркнем, что сдвиг кластера (10.7) вдоль x (т.е. изменение индекса i) соответствует тому, что вектор u_i в некотором пространстве (его можно называть фазовым) рисует некоторое множество точек или траекторию. Поскольку мы предполагаем, что движение установившееся по времени, то у нас никакого избранного направления нет. Мы можем двигаться в сторону как увеличения, так и уменьшения координаты x . То же самое можно сказать и о движении вдоль траектории в нашем фазовом пространстве.

Сама процедура восстановления траектории, которая есть образ нашей наблюдаемой в m -мерном пространстве, может быть различной, отличаясь некоторыми деталями. Но следует еще раз подчеркнуть, что мы восстанавливаем не исходную, а модельную систему, которая правильно описывает только одну траекторию, отвечающую нашей наблюдаемой. Это обстоятельство нам будет очень важно, когда мы перейдем к описанию двумерных и трехмерных пространственных наблюдаемых. Обычно об этом забывают.

Если мы, например, сконструировали систему дифференциальных уравнений, которая воспроизводит аттрактор, решения на котором обладают такими же свойствами, как и наша наблюдаемая, из этого совсем не следует, что эта система правильно описывает другие решения, например, переходные процессы. Эти переходные процессы в реальной динамической системе могут быть совершенно другими, более

того, они могут иметь совсем другую размерность и даже быть бесконечномерными. Типичный пример здесь — это гидродинамические течения, которые в установившемся режиме имеют малую размерность. В частности, в экспериментах по исследованию турбулентного течения Куэтта–Тейлора или конвекции сразу за точкой возникновения турбулентности было найдено, что с ростом характерного параметра (числа Тейлора или числа Релея) размерность растет, оставаясь небольшой, — 4–5. Именно такое маломерное движение и описывает модельная динамическая система, которая, в принципе, может быть восстановлена по наблюдаемой. Такая система описывает только то течение воды, которому отвечает движение на так называемом инерционном многообразии.

Как мы уже говорили, для одномерных случайных пространственных распределений полей работает пространственно-временная аналогия. Она несомненно верна с точки зрения формального описания на основе теории динамических систем. Но с физической точки зрения здесь возникают совершенно новые проблемы. Действительно, пусть у нас есть «случайная» функция координаты x , статистические свойства которой не меняются при замене x на $-x$. Как показали наши эксперименты, обрабатывая такую наблюдаемую, мы получаем стохастическое множество, размерность которого обычно получается дробной! Как это может быть? Ведь обращение знака координаты x не меняет свойств нашей наблюдаемой и, следовательно, не должно менять свойств той динамической системы, которая генерирует эту наблюдаемую. Эта динамическая система должна быть обратима по координате, подобно консервативной системе. Таким образом, размерность инвариантного стохастического множества нашей системы может быть меньше размерности фазового пространства на число интегралов, но в любом случае должна быть целой. В чем же дело? Мы приходим здесь к весьма интересному вопросу. Допустим, у нас есть много мгновенных снимков пространственного поля, зависящего только от одной координаты, взятых в разные моменты времени, подобно кадрам кинофильма. Возникает естественный вопрос: отличаются ли вообще чем-либо эволюционно зрелые, т.е. установившиеся статические пространственные картинки, от эволюционно незрелых, т.е. от каких-то переходных (по времени) картинок — в буквальном смысле «мгновенных» снимков? Вообще говоря, полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Но для некоторых систем, например, градиентного типа, уже сейчас можно утверждать, что если это пространственное распределение «эволюционно зрелое», т.е. оно

отвечает установившемуся при $t \rightarrow \infty$ аттрактору, то размерность соответствующей статической картинке должна быть целой, потому что соответствующая динамическая система (полученная из исходных уравнений при $\partial/\partial t = 0$ автономна, сохраняет фазовый объем и обратима по пространственной координате. А если картинка — лишь «мгновение» в эволюции и в следующий момент времени будет иной, то размерность картинке может быть и дробной! Действительно, структура нестационарного решения определяется не только взаимодействием полей в различных точках пространства, но и предысторией процесса. Слагаемые с производными по времени в нестационарном уравнении играют, в некотором смысле, ту же роль, что и внешняя сила для сосредоточенной неавтономной системы. Размерность же аттрактора неавтономной системы может быть и дробной.

§4. Обработка двумерных паттернов

Воспользуемся теперь «одномерным» опытом и обратимся к анализу двумерных мгновенных снимков. С помощью неограниченного в пространстве снимка определим динамическую систему, которая, в принципе, может его генерировать. Этот бесконечный в пространстве мгновенный снимок будем называть одной реализацией такой динамической системы. Поскольку здесь пространственных координат не одна, а, как минимум, две, то очевидно, что фазовое пространство, в котором действует эта динамическая система, должно быть каким-то другим. Раньше фазовое пространство было векторным, в том смысле, что каждому положению изображающей точки соответствовала определенная позиция радиуса-вектора и изображающая точка в фазовом пространстве задавалась последовательностью чисел — это были значения наших переменных. Пойдем по тому же пути. Только теперь каждая точка будет соответствовать не вектору, а некоторой матрице. Мы получим матричное пространство — объект математически вполне допустимый, хотя для физика он несколько непривычен и интуиция в обращении с ним пока не развита.

Ниже мы введем понятие фазового пространства для двумерной наблюдаемой $u(x_i, y_j)$ (для d -мерной — аналогично). Так же как и для одномерных реализаций, для двумерной наблюдаемой $u(x, y)$ мы дискретизируем мгновенный снимок, т.е. представляем его в виде решетки с узлами x_i, y_j . Каждый узел имеет два индекса, у него есть соседи — слева и справа, сверху и снизу. Мы вводим дискретный конечный

кластер $A_{K,L}^{(m)} = \{(u_{i,j}), i = K, \dots, K+m-1, j = L, \dots, L+m-1\}$, который определяется $(m \times m)$ точками. Сдвигая этот кластер (теперь это не ряд чисел, как в одномерном случае, а квадратная матрица) вдоль наблюдаемой, мы получаем траекторию в некотором матричном пространстве, которое также можно назвать фазовым. Действительно, для определения понятия фазового пространства главное — это определить понятие «близости» между состояниями системы в некотором пространстве, для чего следует ввести расстояние между отображающими разные состояния точками.

С помощью подобного подхода, как и для одномерных систем, мы можем определить корреляционную размерность и все те характеристики, которые раньше использовались для описания стохастических множеств в обычном фазовом пространстве: энтропию, ляпуновские показатели и т.д. Если размерность определяемого таким образом стохастического множества окажется конечной, то исследуемый мгновенный снимок можно назвать конечномерным беспорядком.

Реализуем теперь эту программу для d -мерной наблюдаемой на формальном математическом языке [113]. Рассмотрим множество непрерывных (вектор)-функций $u(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, $u \in \mathbf{R}^p$ с заданными на нем обычными операциями сложения и умножения на скаляр. Введем каким-либо образом расстояние в этом множестве и полученное метрическое пространство \mathcal{B} будем называть фазовым пространством системы. Каждому d -мерному вектору $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{R}^d$ поставим в соответствие отображение трансляции $T^\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, определяемое по формуле $T^\alpha u(x) = u(x + \alpha)$. Тем самым на \mathcal{B} определено действие группы \mathbf{R}^d , или, иначе говоря, мы имеем динамическую систему с d временами, которую мы будем называть трансляционной динамической системой.

Если исследуемый процесс обладает еще и тем свойством, что по начальному состоянию (начальному распределению поля) однозначно определяются состояния, последующие в любой момент времени, то на \mathcal{B} действует также и полугруппа операторов эволюции $\{S^t\}_{t \geq 0}$, т.е. определена и эволюционная динамическая система. Поведение траекторий этих двух динамических систем (трансляционной и эволюционной) в общем фазовом пространстве \mathcal{B} дает полное математическое описание пространственно-временных свойств рассматриваемого нами поля. Ввиду предположения о трансляционной инвариантности, характеристики мгновенного снимка $u(x)$, очевидно, не должны зависеть от системы координат в \mathbf{R}^d . Другими словами, эти характеристики должны описывать инвариантное множество точек вдоль

траектории трансляционной динамической системы:

$$\{T^\alpha u(x)\}_{\alpha \in \mathbf{R}^d} \equiv \mathbf{A}_{u(x)}.$$

В соответствии с этим будем называть предельной емкостью (фрактальной размерностью) мгновенного снимка $u(x)$ число $C(\mathbf{A}_{u(x)})$ (где $C(\mathcal{M})$ — предельная емкость множества \mathcal{M}). Аналогично определяются Хаусдорфова размерность мгновенного снимка и другие характеристики, не зависящие от меры. Если же на $\mathbf{A}_{u(x)}$ каким-либо образом определена инвариантная (относительно T^α) мера μ , то характеристики, зависящие от μ (например, поточечная или корреляционная размерности), также будем считать характеристиками мгновенного снимка.

Отметим, что если, например, двумерный мгновенный снимок периодическая функция x_1 и x_2 , то множество $\mathbf{A}_{u(x)}$ — это просто двумерный тор; если этот снимок имеет квазипериодически повторяющуюся структуру, то $\mathbf{A}_{u(x)}$ — также тор, но более высокой размерности; для хаотически же распределенных по плоскости паттернов $\mathbf{A}_{u(x)}$ будет фрактальным множеством. Эволюции во времени мгновенных снимков (наблюдаемой) отвечает движение в пространстве \mathcal{B} множества $\mathbf{A}_{u(x)} \xrightarrow{S^t} \mathbf{A}_{S^t u(x)}$.

Имея в виду аналогию с обычными динамическими системами и для упрощения дальнейшего описания ниже будем считать пространство и время дискретными, т.е. вместо \mathbf{R}^d будем использовать \mathbf{Z}^d , а вместо \mathbf{R}_+ , \mathbf{Z}_+ . Теперь мы уже можем дать строго определение конечномерного беспорядка.

Мгновенный снимок $\mathbf{u} = \{u(j), j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbf{Z}^d\}$ будем называть конечно-порожденным, если 1) существует динамическая система с d -мерным временем и конечномерным фазовым пространством \mathcal{M} ; 2) существует Липшиц-непрерывное взаимно однозначное отображение $h: \mathbf{A}_u \rightarrow \mathcal{M}$ такое, что обратное отображение h^{-1} также Липшиц-непрерывно.

Алгоритм вычисления поточечной и корреляционной размерностей мгновенных снимков заключается в следующем. Пусть имеется двумерный мгновенный снимок \mathbf{u} , заданный в виде массива $\{u_{i,j}, i, j \in \mathbf{Z}_+\}$. На практике размеры массива, естественно, ограничены: $i \leq N_1, j \leq N_2$, но N_1 и N_2 предполагаются достаточно большими. Для каждого целого $m \geq 1$ мы можем построить матрицы порядка $(m \times m)$ на основе массива $\{u(i, j)\}$: $\mathbf{A}_{K,L}^{(m)} = \{(u_{k,l}), k = K, \dots, K+m-1, l = L, \dots, L+m-1\}$. Определим корреляционный

интеграл как функцию:

$$C^{(m)}(\varepsilon) = \frac{R^{(m)}(\varepsilon)}{[(N_1 - m)(N_2 - m)]^2}, \quad (10.12)$$

$$R^{(m)}(\varepsilon) = \#\{((K, L), (K', L')) : \text{dist}(A_{K,L}^{(m)}, A_{K',L'}^{(m)}) \leq \varepsilon\}, \quad (10.13)$$

где $\#(\mathcal{E})$ — число элементов множества \mathcal{E} .

Тогда можно показать, что отношение $\ln C^{(m)}(\varepsilon)/\ln \varepsilon$ при достаточно малых ε будет приблизительно равно корреляционной размерности D_s двумерного мгновенного снимка в m -мерном пространстве вложения.

Следуя работе [113], можно оценить минимальный размер массива $(u_{i,j})_{N_1 \times N_2}$, который необходим, чтобы правильно вычислить размерность в интервале $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Поскольку

$$D_s \approx \frac{\ln_2 C^{(m)}(\varepsilon'') - \ln_2 C^{(m)}(\varepsilon')}{\ln_2 \varepsilon'' - \ln_2 \varepsilon'}, \quad (10.14)$$

$C^{(m)}(\varepsilon) \geq 1/(N_1^2 \cdot N_2^2) \cdot C^{(m)}(\varepsilon'') \leq 1$, то, предполагая $\varepsilon'' = 2^k \cdot \varepsilon'$, мы получим оценку

$$D_s \leq \frac{2}{K} \ln_2(N_1 N_2). \quad (10.15)$$

Заметим, что для d -мерного мгновенного снимка такая оценка имеет вид:

$$D_s \leq \frac{2}{K} \sum_{l=1}^d \ln_2 N_l. \quad (10.16)$$

Таким образом, определяя корреляционную размерность многомерного мгновенного снимка, надо иметь в виду, что число точек дискретизации вдоль каждой временной координаты может быть намного меньше, чем в случае одномерного времени.

Поскольку построение корреляционного интеграла требует проведения очень большого числа вычислений расстояний между матрицами, то для ускорения вычислений удобно ввести расстояние в виде:

$$\text{dist}(A_{K,L}^{(m)}, A_{K',L'}^{(m)}) = \max\{|u_{k,l}| - |u_{k',l'}|\},$$

где

$$k = K, \dots, K + m - 1, \quad k' = K', \dots, K' + m - 1, \quad (10.17)$$

$$l = L, \dots, L + m - 1, \quad l' = L', \dots, L' + m - 1.$$

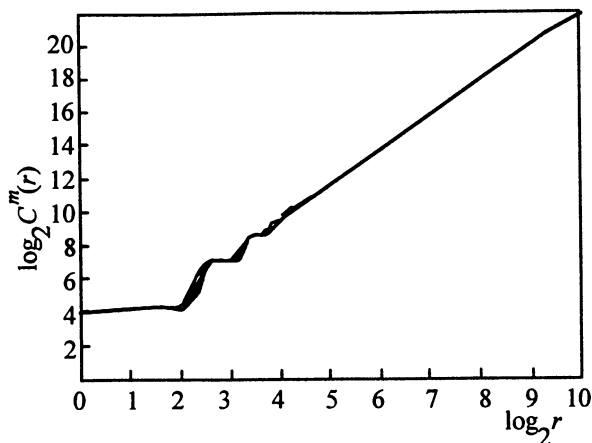


Рис. 10.6. Корреляционные интегралы, подсчитанные для двумерного поля, содержащего две несоизмеримых пространственных частоты

Такой способ определения расстояний позволяет исключить операции типа умножения, заменяя их операциями сравнения содержимого соответствующих ячеек ЭВМ.

Количество необходимых вычислений значительно снижается, если все матрицы $A_{K,L}^{(m)}$ сравниваются с подмножеством опорных матриц:

$$\{A_{K_i,L_j}^{(m)}, i \leq i_{ref}, j \leq j_{ref}\}, \quad (10.18)$$

где i_{ref} и j_{ref} — сравнительно небольшие числа. В этом случае точность вычисления корреляционной размерности двумерного мгновенного снимка определяется оценкой, подобной (10.15):

$$D_s \leq \frac{1}{K} \ln_2(N_1 N_2 i_{ref} j_{ref}). \quad (10.19)$$

Проведенное в работе [113] тестирование предлагаемого алгоритма показало, что поведение корреляционных интегралов практически не меняется при повороте мгновенного снимка на произвольный угол, что говорит об устойчивости алгоритма. На рис. 10.6 изображена зависимость величины $\ln_2 C^m(r)$ от $\ln_2 r$, где $r = 2^{10} \cdot \epsilon / \epsilon_{max}$ для двумерного мгновенного снимка $U(x, y) = \sin(x) \sin(\sqrt{3}/2 \cdot y)$, представляющего собой двумерный тор в соответствующем фазовом пространстве. Корреляционная размерность оценивается с хорошей точностью $D_s \in [1,96 \div 2,03]$ уже при $N_1, N_2 = 256$, $i_{ref}, j_{ref} = 4$.

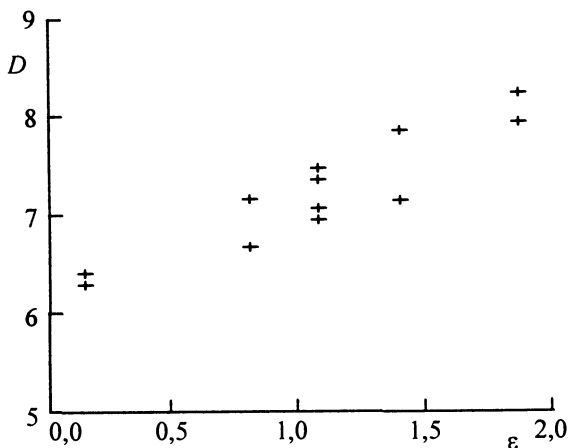


Рис. 10.7. Зависимость размерности двумерного поля контраста изображения капиллярной ряби от надкритичности ϵ

Обсуждавшаяся в этой главе процедура вычисления корреляционной размерности была применена к описанию пространственно-временного хаоса параметрически возбуждаемой капиллярной ряби [113]. Как было обнаружено в эксперименте [5], в протяженной системе при превышении порога генерации на поверхности жидкости (см. рис. 2.7) возбуждаются две взаимноортогональные стоячие волны. С увеличением надкритичности (под надкритичностью здесь понимается величина $\epsilon = \frac{A}{A_{cr}} - 1$, где A_{cr} — пороговое значение амплитуды ускорения A) на фоне решетки, образованной двумя взаимноортогональными стоячими капиллярными волнами (см. рис. 1.2) возникают волны огибающих. Когда амплитуда A достаточно велика, возникает турбулентность. Определение корреляционной размерности мгновенных снимков капиллярной ряби подтвердило факт усложнения поля капиллярной ряби. Результаты расчета показали, что при увеличении надкритичности от 0,15 до 1,85 корреляционная размерность возрастает от 6,3 до 8 (см. рис. 10.7).

Итак, мы можем подвести итог: конечномерный беспорядок — это беспорядок, которому отвечает траектория некоторой динамической системы. В одномерном случае это — обычная динамическая система, например, система дифференциальных уравнений, а в двумерном случае мы имеем динамическую систему с двумя временами. Хотя

последний тип систем в физике практически не обсуждался, надо отметить, что широким классом таких систем с d -временами являются, например, абелевы группы Ли, которые в физике использовались очень широко. Обычно группы Ли используют для того, чтобы описывать разного рода симметрии и получать решения, которые следуют из имеющегося с помощью различных групповых трансформаций. Здесь же мы преследуем в некотором смысле обратную цель, т.е. пытаемся найти неупорядоченные решения.

Во избежание путаницы в определениях сделаем здесь еще одно замечание. Не следует смешивать фрактальную размерность пространственной наблюдаемой, вычисленную по обобщенному методу Такенса, с фрактальной размерностью двумерного рисунка, который создает, например, хаотическая траектория частицы в переменном поле (см. [114]). В первом случае мы имеем в виду размерность стохастического множества в фазовом пространстве трансляционной динамической системы, а во втором — размерность самого мгновенного снимка, «нарисованного», например, одной линией, достаточно плотно заполняющей некоторые области на плоскости. В общем случае эти две характеристики никак не связаны друг с другом. Действительно, фрактальная размерность, например, «квазикристаллического паркета» — это размерность сетки линий (границ ячеек), т.е. равна единице. В то же время в фазовом пространстве трансляционной динамической системы такому рисунку соответствует незамкнутая намотка на n -мерном торе, и размерность этого множества равна n . Размерность же фрактальной картинки на плоскости в любом случае не может быть больше двух.

Мы хотим еще раз также подчеркнуть, что если наше неупорядоченное поле описывается уравнениями в частных производных, то динамические системы с несколькими временами не могут описать весь класс решений исходных уравнений в частных производных, а соответствуют только некоторому частному классу решений.

Глава 11

Формообразование в колониях микроорганизмов

§1. Хемотаксис

Живая материя демонстрирует множество замечательных примеров формообразования в неравновесных средах⁴. Рост и развитие любого живого организма — это непрерывный обмен энергией с окружающей средой. С точки зрения физика развитие многоклеточного организма есть последовательность нарушений симметрии, т.е. цепочка неустойчивостей, которые и определяют формирование упорядоченных паттернов. В большинстве случаев процесс развития ведет к формированию полноценного многоклеточного организма, который слишком сложен, чтобы быть смоделированным с помощью физических законов и уравнений. Однако, имеется множество примеров коллективного поведения одноклеточных микроорганизмов, природа которого может быть понята и описана на физическом уровне без обращения к молекулярной биологии.

Именно в последние несколько лет был достигнут значительный прогресс в нашем понимании процессов, управляющих формообразованием в больших колониях одноклеточных микроорганизмов.

Наиболее типичная стратегия кооперативного поведения в ансамбле микроорганизмов — это притягивающий хемотаксис. Суть хемотаксиса в том, что клетки обладают способностью двигаться (или против, в случае репульсивного хемотаксиса) градиенту распределения определенного химического вещества. Для бактерий хемотаксис был открыт в конце XIX-го века (см. [118] для ознакомления).

⁴Глава написана Л.Ш. Цимрингом

Энгельман, Пфеффер и другие с помощью микроскопа наблюдали скопление бактерий в водном растворе вблизи или, наоборот; вдали от газовых пузырьков или вблизи границы инжектора, через который поступало химическое вещество. Позднее макроскопическое движение бактерий под действием химикатов наблюдалось в виде распространяющегося фронта в квази-одномерной капиллярной трубке [119]. Нередко клетки способны производить подобные химические вещества в ответ на неблагоприятные окружающие условия. При этом хемотаксис становится способом информационного обмена внутри популяции.

Если колонию бактерий поместить в центре чашки Петри на субстрате с высоким содержанием пищи и промежуточной концентрацией агара, хемотаксис не играет никакой роли, и колония бактерий представляет собой набор самовоспроизводящихся и диффундирующих одноклеточных организмов. Колония остается компактной и ее гладкие границы расширяются со скоростью, которая определяется комбинацией роста и диффузии, как в классической модели Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера [120]. Если же окружающая среда становится враждебной (уровень питания низкий или среда препятствует свободному движению, как в случае твердой поверхности агара), бактерии начинают общаться друг с другом и в результате взаимодействия формируют разнообразные структуры. В последующих параграфах мы рассмотрим модельную теорию формирования в ансамблях одноклеточных трех разных видов.

§2. *Dictyostelium discoideum*

Это амёбы, которые в естественных условиях обитают в почве в виде слизистой плесени. При благополучных условиях (достаток еды) эти одноклеточные организмы растут и делятся. В комфортных условиях отдельные амёбы не общаются друг с другом. Однако, в условиях голода *Dictyostelium discoideum* включают специальную генетическую программу, цель которой сохранить споры до тех пор, пока жизнь вновь не наладится [78, 121]. Такое резкое изменение жизнедеятельности начинается с того, что отдельные наиболее чувствительные амёбы выделяет специальное химическое вещество—cyclic adenosine monophosphate (сАМР), которое является химическим аттрактантом для других амёб. Они получают сигнал и начинают

двигаться в направлении градиента концентрации сАМР. Кроме того, они выделяют дополнительное количество этого химиката.

В результате возникшего кооперативного поведения рождаются автокаталитические спиральные волны или кольцевые волны (таргеты) концентрации сАМР, подобные тем, какие наблюдаются в двумерной реакции Белоусова–Жаботинского (рис. 7.1 и 7.2). Так появляется группа колоний (одна группа на ядро спирали/таргета), в каждой из которых примерно 10^5 членов, объединяющихся вокруг общего центра. Таргетам обычно отвечает невысокая начальная концентрация клеток, спиралям же — высокая концентрация. Объединяющиеся микроамебы не движутся прямо к центру колонии, но формируют весьма необычные потоковые структуры (рис. 11.1). Рассмотренный процесс агрегации приводит к рождению примитивного многоклеточного организма, известного как слизевик.

После некоторого периода миграции слизевик останавливается и трансформируется в плодовое тело, которое состоит из сферического шара, заполненного спорами, располагающегося на длинном стебле. Биологи проделали огромную работу, чтобы разобраться в основных биохимических механизмах, управляющих самоорганизацией *Dictyostelium discoideum* на различных этапах ее жизненного цикла. Были развиты элегантные методы для визуализации *in vitro* не только движения индивидуальных клеток, но также и концентрации сАМР. Молекулярные биологи выяснили роль различных генов в процессе морфогенеза *Dictyostelium discoideum*.

С физической точки зрения, чтобы смоделировать формирование в ансамбле амев, необходимо описать движение клеток совместно с кинетикой сАМР. Наиболее естественный подход к этой задаче заключается в описании сАМР как непрерывного поля и клеток как дискретных объектов, которые обладают собственными внутренними часами, регулирующими выделение сАМР и динамику хемотаксиса. Конечно, реальные амебы — это исключительно сложные организмы, обрабатывающие множество разнообразных внешних сигналов и решающих множество жизненно важных задач под руководством их генетических программ. При построении феноменологической модели можно, однако, пренебречь этими деталями и представить реальную клетку как простой автомат («бион»), который откликается только на действие концентрации сАМР. При таком подходе клетки — это индивидуальные автоматы, которые изменяют в зависимости от сигнала свое внутреннее состояние, выделяют химический сигнал и перемещаются. Обращение с клетками как с отдельными дискретными

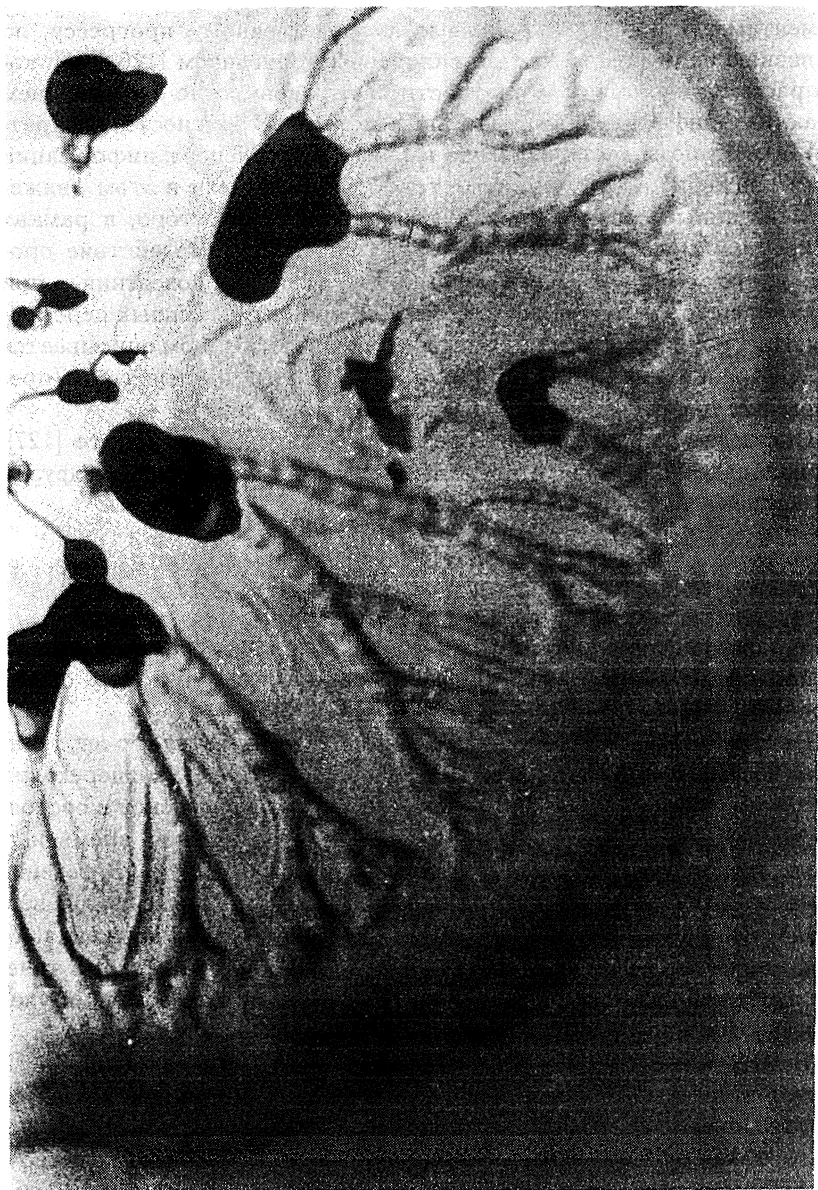


Рис. 11.1. Агрегация амёб на поверхности агара: Концентрация амёб, собирающихся к центру (фотографии любезно предоставлены П.Ньюэллом)

элементами [122, 123, 124] привело к существенному прогрессу, по сравнению со стандартным континуальным описанием [125, 126], когда рассматривается поле плотности клеток совместно с уравнением «реакция—диффузия» для сигнальной системы. В частности, дискретный подход позволяет напрямую вычислить транспорт информации через движение клеток и, кроме того, учесть помехи в этом движении, связанные с их локальным слипанием. Кроме того, в рамках дискретной модели может быть легко учтено взаимодействие простых клеток с мутантами, имеющими другие законы поведения, и при этом нет необходимости увеличивать число континуальных переменных. Наконец, при таком подходе естественным образом описывается и дифференциация клеток при их превращении в разные типы (пре-споры или пре-стеблевые клетки для амебы).

Обсуждаемая модель впервые была предложена в работе [127]. Сигнальная часть модели представляет собой уравнение диффузии для концентрации $c(\mathbf{r}, t)$ аттрактанта сАМР:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c - \Gamma c + \sum_i S_i(t)\sigma(r - r_i(t)), \quad (11.1)$$

D — коэффициент диффузии, Γ — постоянная, характеризующая распад сАМР, а последнее слагаемое описывает испускание сАМР бионами.

Внутреннее состояние каждого «биона» определяется его внутренними часами и концентрацией сАМР вокруг него. Когда c переходит определенный порог c_T , бион переходит из состояния покоя в состояние возбуждения и выделяет порцию Δc сАМР в течение времени τ . После этого бион переходит в фазу отдыха на время τ_R . В течение этого времени бион не может вновь возбудиться. После τ_R он возвращается в спокойное состояние. Что касается правил движения, то бион движется в направлении градиента сАМР (на решетке) в течение активной фазы; если только не обнаружится, что соседний узел решетки (по направлению движения) уже занят другим бионом.

Если движение бионов запретить, то обсуждаемая модель демонстрирует типичные свойства возбудимых сред: поддерживает распространяющиеся волны сАМР, спирали и таргеты (см. рис. 11.2а). Конечно, такие волны существуют только если среда обладает достаточно высокой возбудимостью, т.е. достаточно высокой плотностью амеб на единицу площади и достаточной величиной Δc . Когда же движение бионов в модели разрешено, они немедленно формируют «струйные структуры», напоминающие сетку из речных протоков (рис. 11.2б).

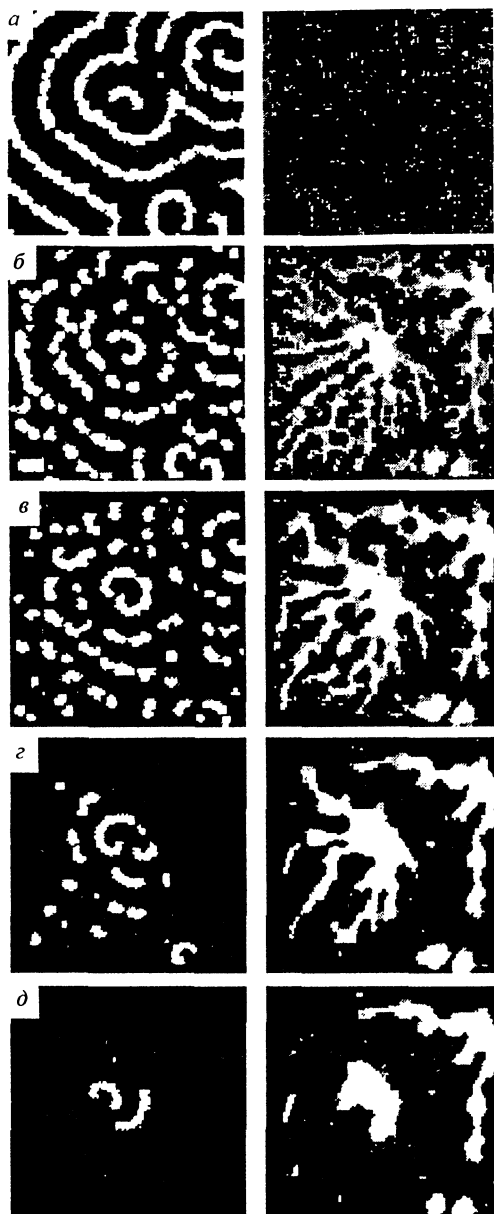


Рис. 11.2. Численное моделирование агрегации амёб: слева—концентрация САМР, справа—концентрация амёб в разные моменты времени (белый цвет соответствует высокой концентрации, черный—низкой)

Физический механизм струйной неустойчивости заключается в том, что более плотная группа амеб выделяет больше аттрактанта сАМР и следовательно притягивает еще больше амеб и т.д.

Существуют, конечно, более тонкие черты динамики *Distyostelium discoideum*, которые также должны быть отображены в полуреалистической феноменологической модели. В частности, как следует из прямых наблюдений, на начальной стадии агрегации, химические волны — это в большинстве случаев мелкомасштабные кольцевые волны и спирали. Со временем спирали становятся крупнее и их число сокращается. В исходной форме обсуждаемая модель не отражает эти черты реального процесса, как, например, и стандартная двух-компонентная модель Фиту Хью–Нагумо (см. гл.4 §2) не описывает формирование «крупно-зернистых» многоспиральных паттернов из мелкомасштабных. Как хорошо известно, клетки в богатой пище среде не продуцируют сАМР и не реагируют на нее в полную силу. И только когда они принимают сАМР сигнал от других клеток, они запускают генетическую программу для решения новой задачи, а именно, объединить достаточно большое число клеток (как минимум, 10^5) для постройки многоклеточного «организма».

Известно, что комбинация генов, определяющих разные стадии агрегации, не постоянна на временных интервалах характерных для образования спиральных волн. Естественно предположить, что существует положительная обратная связь, в результате которой комбинация генов, управляющая детектированием и выделением сАМР, сама контролируется существующими сАМР волнами. Такой динамический механизм может быть ответствен за трансформацию мелкомасштабных таргетов в крупные спирали. Обсуждаемая идея была использована в модели, предложенной в работе [128] в форме дополнительного уравнения для возбудимости данного биона

$$\frac{dE}{dt} = \alpha E + \beta c, \quad (11.2)$$

которое справедливо до тех пор, пока E ниже некоторого максимального уровня E_{max} . В соответствии с этим уравнением возбудимость E возрастает после прохождения волны сАМР и медленно затухает между волнами. Возбудимость E при этом определяет порог, при переходе через который выделяется сАМР и клетка начинает двигаться. Эта простая модификация модели резко меняет ход эволюции вначале неструктурированной популяции. Структуры

развиваются из случайно возбужденных клеток, проходя стадии кольцевых волн (таргетов), большого числа маленьких спиралей, к нескольким крупным спиралам (см. рис. 11.3). Для сравнения отметим, что в модели без «генетической» обратной связи с полностью возбужденными клетками развитие останавливается на стадии сосуществования многих мелких спиралей. Добавим, что подобный эффект укрупнения и конкуренции спиралей обнаруживается и в обычной модели с диффузией при наличии дополнительной сверхмедленной переменной, управляющей возбудимостью среды [129].

Конечно, модель, которую мы только что описали, воспроизводит только первую фазу жизненного цикла *Dictyostelium discoideum*, которая, пожалуй, наиболее проста. Другие фазы включают в себя формирование трехмерных структур; производство специальной межклеточной жидкости, которая изменяет эластические свойства холма (образуется «холм»); превращение «холмов» в движущуюся слизь; дифференциация клеток и т.д. и т.п. При этом динамика становится значительно более сложной. Тем не менее, как представляется, динамическое моделирование остается полезным и на этих поздних стадиях эволюции, поскольку, как следует из экспериментов, основные черты клеточной динамики, такие как хемотаксисное движение в ответ на сАМР волны, остается доминирующими в процессах агрегации. В недавней работе [130] были сделаны первые шаги в этом направлении, показавшие возможность клеток взбираться друг на друга и формировать трехмерные структуры.

§3. *Esherichia coli*

Е.Будрене и Х.Берг наблюдали самоорганизацию специального вида бактерий *Esherichia coli*, хемотаксисно движущихся в направлении вещества, которое выделяют сами бактерии [131, 132]. Они помещали свежеприготовленную культуру *Esherichia coli* в центр чашки Петри диаметром 8,5 см на поверхность питательной смеси и фотографировали колонии бактерий в течение двухдневного эксперимента. Колонии формировали исключительно регулярные структуры в виде колец, радиальных полос или пятен, в зависимости от концентрации пищи или других параметров эксперимента. Несколько снимков представлены на рис. 11.4. Подобные структуры наблюдались и в ансамблях *Salmonella typhimurium* [133] и *Bacillus subtilis* [134].

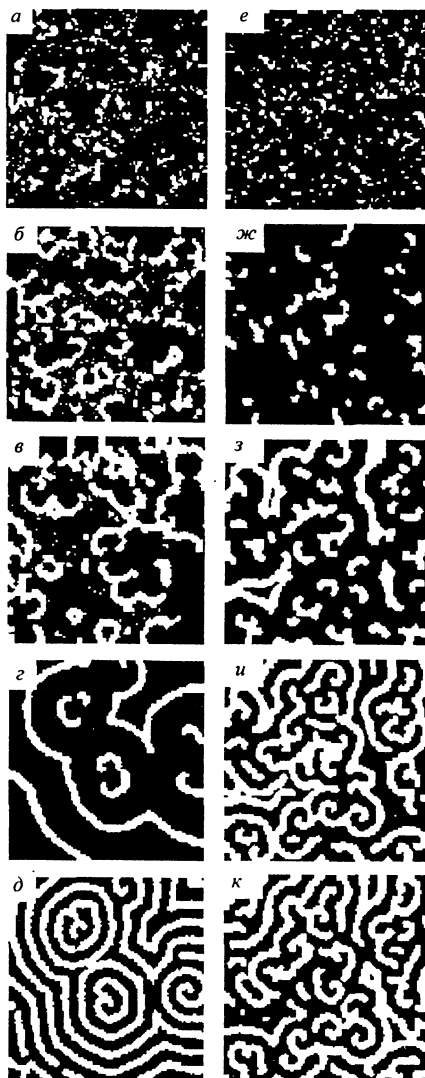


Рис. 11.3. Сравнение результатов численного моделирования спиральных волн cAMP с включенным механизмом обратной связи (слева) и без него (справа). В модели с включенной обратной связью формируются большие спирали и их частота вращения и волновое число возрастают, тогда как в модели без обратной связи число и характерный размер маленьких спиралей и таргетов, развивающихся из случайных начальных условий, не меняются (см. подробнее [128])

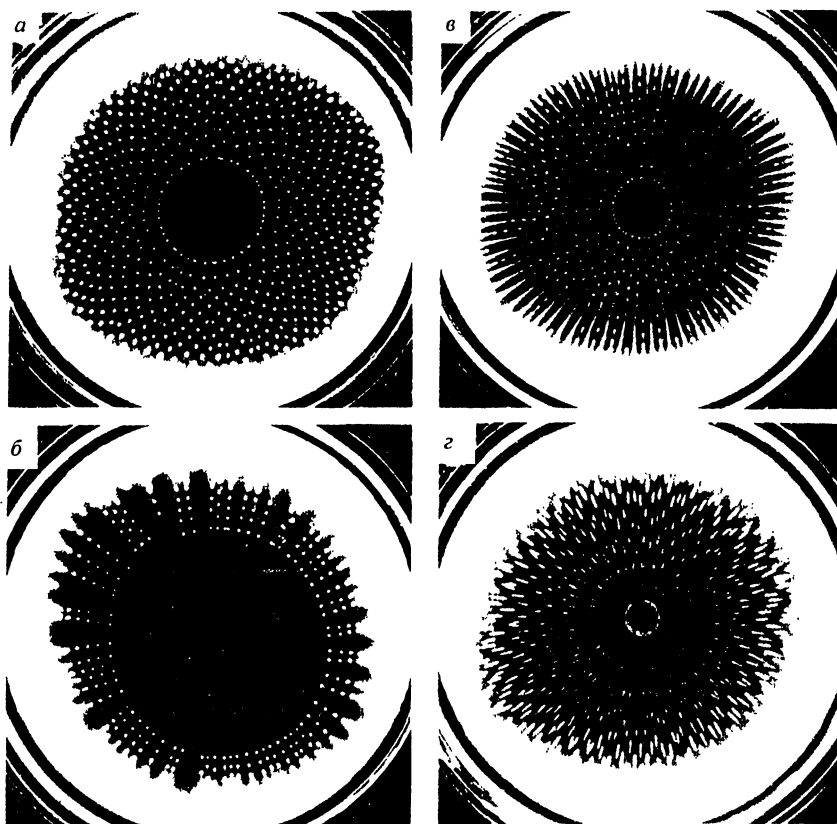


Рис. 11.4. Четыре примера паттернов, формируемых бактериями *Esherichia coli* в экспериментах Будрене и Берга [132] (фотографии любезно предоставлены Х.Бергом)

Хемотаксис также играет принципиальную роль в агрегации этих одноклеточных, в то же время структуры не формируются, если поверхность насыщена питательным веществом [131]. Можно сразу предложить простую модель динамики клеток в ансамбле, включающую уравнение для концентрации клеток ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_\rho \vec{\nabla}^2 \rho + G(\rho) - v_c \vec{\nabla}(\rho \vec{\nabla} c), \quad (11.3)$$

и уравнение для концентрации хемоаттрактанта $c(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_c \vec{\nabla}^2 c + T[c]\rho - \beta_c d. \quad (11.4)$$

D_ρ , D_c — коэффициенты диффузии соответственно для бактерий и хемоаттрактанта, $G(\rho)$ — нарастающая функция с насыщением (например, $G(\rho) = \gamma\rho - \rho^3$), что характеризует силу хемотаксисного отклика (подвижность бактерий относительно градиента $c(\mathbf{r}, t)$). Последние два слагаемых в (11.4) описывают производство и затухание хемоаттрактанта. Уже в рамках этой простой модели удастся описать особенные черты развития структур. Если стартовать с начальных условий, когда бактерии локализованы в центре системы, клетки начинают расплзаться. В отсутствие хемотаксиса ($v_c = 0$), уравнение для плотности принимает вид уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера [120]. Описываемый этим уравнением фронт, как известно, движется со скоростью $2\sqrt{D_\rho \gamma}$ в соответствии с обычным критерием устойчивости [135]. Фронт будет распространяться и в случае ненулевого, но не слишком большого v_c . С другой стороны, нетривиальное однородное состояние $\rho = \sqrt{\gamma}$, $c = 1/\beta$ — неустойчиво относительно возмущений с конечным волновым числом, при условии, что клетки демонстрируют достаточно сильный хемотаксисный отклик. Анализ линейной устойчивости модели (11.3), (11.4) приводит к следующему уравнению для показателя роста λ возмущений с волновым числом q :

$$(\lambda + D_\rho q^2 + 2\gamma)(\lambda + D_c q^2 + \beta_c) = v_c \gamma^{1/2} q^2. \quad (11.5)$$

Легко видеть, что для достаточно сильного хемотаксисного отклика

$$v_c > (2D_\rho D_c q_c^2 + 2\gamma D_c + \beta D_\rho) \frac{1}{\gamma^{1/2}} \quad (11.6)$$

исследуемая система имеет интервал волновых векторов, для которых показатели λ чисто действительны и положительны — это полоса q вблизи $q_c = (2\beta\gamma/D_\rho D_c)^{1/2}$. Неустойчивость определяется хемотаксисным слагаемым в (11.3), которое в линейном приближении обеспечивает отрицательную взаимную диффузию. В этом смысле рассмотренная неустойчивость отличается от обычной тьюринговской неустойчивости, так как последняя требует различия коэффициентов диффузии D_ρ и D_c (см. гл. 2).

Объединяя приведенные аргументы, можно ожидать, что в общем случае существует область промежуточных значений v_c , для которых колония бактерий будет распространяться наружу и образовывать непрерывно расширяющуюся область, внутри которой возникает неустойчивость тьюринговского типа (см. гл.2). Проведенное численное моделирование в целом подтверждает эти предсказания (см. рис. 11.5), однако некоторые важные черты реального эксперимента теряются. В частности, при распространении границы раздела наружу всегда рождается множество концентрических колец. Развал кольца на диске возможен только позади фронта. Причем это происходит в зависимости от величины v_c : для достаточно малых v_c кольца не разваливаются. Диски формируются в рамках модели, которая не обладает определенным ориентационным порядком, и благодаря хемотаксису они, в конечном итоге, притягиваются друг к другу и сливаются. Структуры демонстрируют медленное укрупнение. Это вовсе не то, что наблюдалось в эксперименте [131], где диски выстраивались строго друг за другом и образовывали замечательно упорядоченные паттерны, которые существовали неограниченно долго. Биологи предложили несколько обязательных факторов, которые должны быть приняты во внимание при построении более реалистичной модели. Прежде всего, как следует из микроскопических наблюдений, внутри внешнего кольца бактерии интенсивно двигаются, в то время как позади кольца их движение становится очень медленным и со временем они вообще останавливаются. Такая трансформация, как предполагают, вызвана тем, что питание оказывается на исходе. Таким образом в более реалистичной модели необходимо ввести две категории бактерий — подвижные и неподвижные. Первые переходят во вторые при локальном недостатке питания.

Другое свойство, которое важно для дальнедействующего взаимодействия между бактериями — это влияние отходов жизнедеятельности бактерий или продуктов дыхания. Существует концентрация отходов, при которой включается выделение вещества, инициирующего

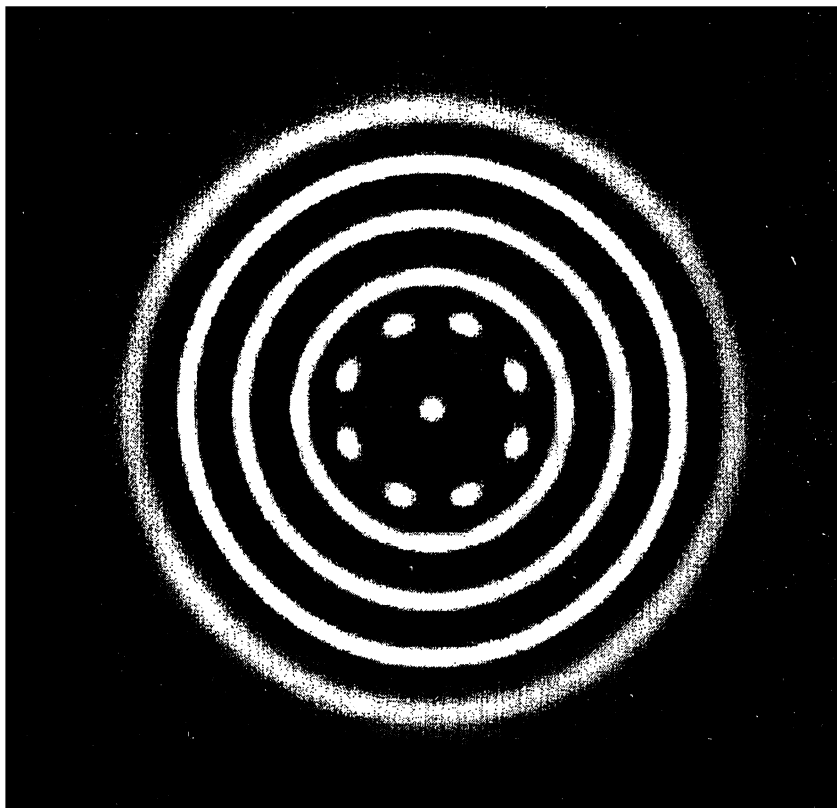


Рис. 11.5. Концентрация бактерий на промежуточной стадии формирования паттерна в рамках численной модели (1), (2).
Концентрические кольца бактерий формируются позади распространяющегося фронта популяции, позже эти кольца дробятся на отдельные сгустки

формирование структур в рассматриваемой биологической среде.

В итоге полная модель [136], содержащая 5 уравнений для: (1) концентрации подвижных бактерий ρ ; (2) концентрации неподвижных бактерий ρ_n ; (3) концентрации хемоаттрактанта; (4) концентрации пищи n ; и (5) концентрации отходов w , записывается в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_\rho \vec{\nabla}^2 \rho + G(\rho, n) - v_c \vec{\nabla} c - I[n]\rho, \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = I[n]\rho, \quad (11.8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \vec{\nabla}^2 n - \alpha \rho n, \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_w \vec{\nabla}^2 w - \alpha_w \rho n - (\beta_w + \kappa \rho)w, \quad (11.10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_c \vec{\nabla}^2 c + T[w, c]\rho - \beta_c d. \quad (11.11)$$

Здесь функция G зависит также и от концентрации пищи n , переход от подвижного состояния к неподвижному состоянию определяется пороговой функцией $I[n]$, наконец, производство хемоаттрактанта контролируется другой пороговой функцией $T[w, c]$, зависящей от локальной концентрации отходов w и концентрации самого аттрактанта (учитывается автокаталитичность процесса). Эксперимент продемонстрировал, что переход к неподвижному состоянию достигается благодаря эффекту голодания. Более конкретно: переход в недвижущую фазу происходит, когда $n_c \equiv \int_0^t (n_0 - n)\Theta(n_0 - n)dt$ превышает некоторый порог n_{tr} , или формально — $I[n] = \delta\Theta(n_c - n_{tr})$, где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда. Истощение пищи описывается уравнением (11.9). Предполагается, что расход еды пропорционален плотности бактерий и концентрации самой пищи, так что эта величина не может стать отрицательной, Накопление отходов пропорционально расходу пищи (см. (11.10)). Предполагается, что отходы распадаются со скоростью, зависящей от плотности бактерий, поскольку это основной механизм агрегации бактерий. Наконец, выделение хемоаттрактанта пропорционально локальной плотности бактерий и включает в зависимости от локальной плотности отходов. Более конкретно, предполагается, что хемоаттрактант выделяется или при $w > w_0$ и $c > c_0$, или при $w > w_1$, где $w_1 > w_0$. Это выражается формулой $T[w, c] = g_c \text{sign}(\Theta(w - w_0)\Theta(c - c_0) + \Theta(w - w_1))$. Различие между w_1 и

w_0 допускает автокаталитическое поведение аттрактанта. Последнее слагаемое в (11.11) описывает распад хемоаттрактанта.

Существование в модели сильно нелинейных функций делает тыльную часть наружного кольца чрезвычайно чувствительной к структуре концентрации различных химических компонент, участвующих в процессе. В частности, генерация хемоаттрактанта в начале включается в определенных точках позади наружного кольца, а не одновременно на всей окружности. Это помогает решить обе упомянутые выше проблемы — подходящий порог приводит непосредственно к генерации пятен и предыдущие пятна в значительной степени определяют формирование новых пятен (дисков).

Моделирование системы (11.7)—(11.11) проводилось с использованием спектрального метода на решетке 128×128 с дроблением шага. Линейная часть эволюции полей вычислялась с помощью быстрого преобразования Фурье и нелинейные части с помощью явного вычисления конечных разностей. Решеточная анизотропия, которая появляется из-за дискретизации хемотаксисного слагаемого в уравнении (11.7), минимизировалась благодаря одновременным вычислениям на двух решетках, развернутых под углом 45° друг к другу. На рис. 11.6 показаны результаты моделирования, демонстрирующие согласие с экспериментом. При различных значениях параметров получаются структуры в виде радиальных сгруппированных пятен, радиально расположенных полос или пятен расположенных на концентрических кольцах в шахматном порядке.

§4. *Bacillus subtilis*

Е.Бен-Джакоб и сотрудники выполнили серию очень интересных экспериментов *in vitro* с колониями различных видов бактерий *Bacillus subtilis* (см. обзор [138]). Они также помещали бактерии в центр чашки Петри, но в этом случае чашка Петри была с мягким агаром и пептоном относительной низкой концентрации в качестве питания. Типичные мгновенные снимки распределения бактерий, сделанные примерно через 10 часов после начала эксперимента, представлены на рис. 11.7. Мы видим очень сложные, временами закрученные структуры дендритного вида. В качестве первого приближения морфология колоний может быть объяснена без учета химического взаимодействия между отдельными клетками как средства общения.

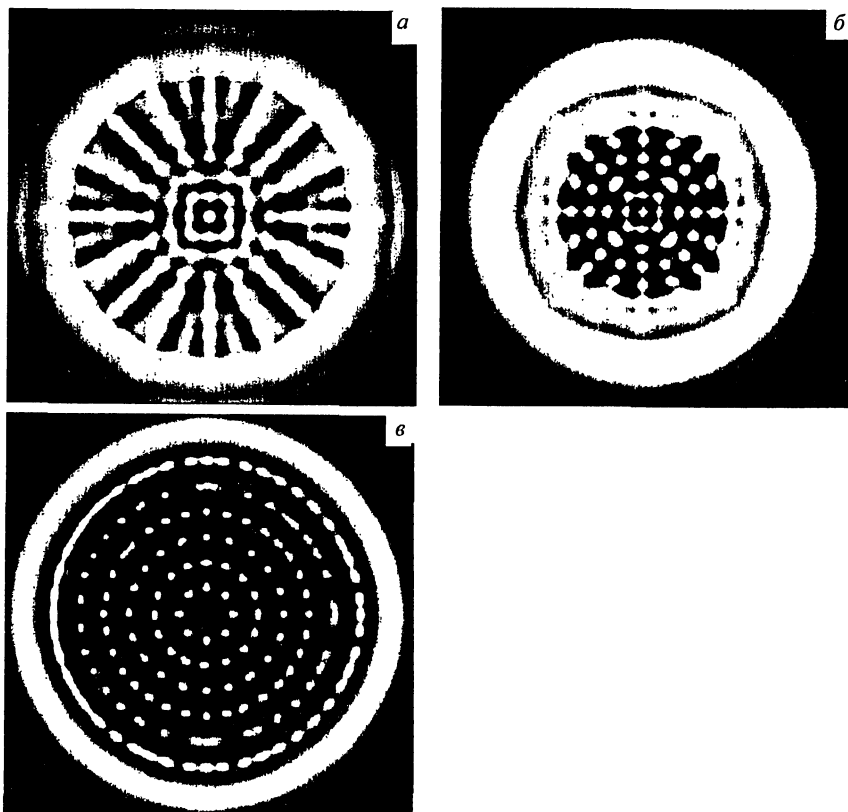


Рис. 11.6. Численное моделирование динамики бактерий в рамках полной модели (11.7)—(11.11). В зависимости от параметров модели, получаются либо радиально ориентированные сгустки (а) или полосы (б), или сгустки, расположенные на concentрических кругах в шахматном порядке друг за другом (в). См. подробнее ([136])

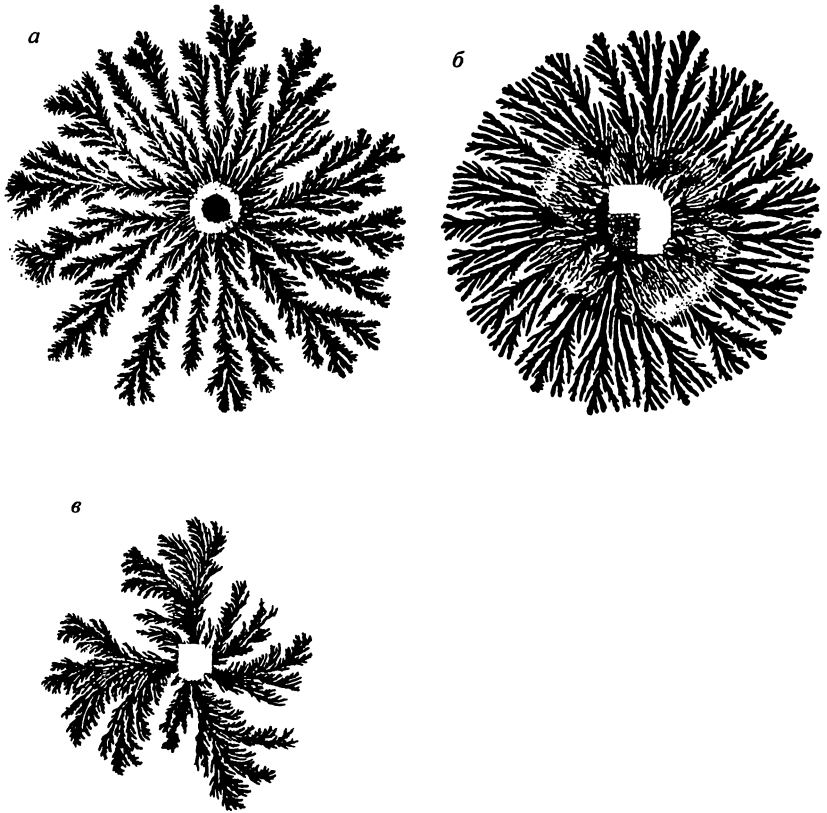


Рис. 11.7. Паттерны, образуемые различными морфотипами плодящихся *Bacillus subtilis* на твердом агаре (фотографии репродуцируются с любезного разрешения Е. Ван-Джакоба)

Действительно, так как недостаточное питание является ограничивающим фактором для роста колонии, можно ожидать сложной межфазной морфологии, известной в неживой природе, как агрегация ограниченной диффузией (АОД) [139]. Однако, более детальное изучение показывает, что поведение колоний бактерий более разнообразно, чем АОД. В частности, как следует из экспериментов, для низкой концентрации пептона морфология колоний сильно отличается от типичных дендритов (см. рис. 11.7б): структура становится более плотной в ограниченной области. Вне этой огибающей образуются тонкие и ориентированные по радиусу ветви. Разумно предположить, что такое изменение морфологии происходит из-за хемотаксисного общения между индивидуальными бактериями.

Наиболее естественный подход к моделированию колоний взаимодействующих бактерий снова заключается в использовании гибридного описания: для диффузии химического вещества применимо непрерывное уравнение диффузионного типа с источниками и стоками, а бактерии моделируются дискретно, как блуждающие «бионы». Конечно, нереально смоделировать поведение 10^{10} клеток, как в типичном эксперименте *in vitro*, поэтому каждый бион отражает осредненное поведение 10^4 – 10^5 соседних бактерий. Бионы случайно блуждают на двумерной решетке. Случайные блуждания определяются концентрацией хемоттрактантов и хемореппелентов (отталкивателей): вероятность движения в направлении градиента аттрактанта (реппелента) больше (меньше) чем в других направлениях. В соответствии с наблюдениями, бионы способны двигаться только внутри четко определенной области граница которой может смещаться (на один шаг решетки) после определенного числа попыток (N_c) для бактерий пересечь ее в определенном месте. Эта граница моделирует жидкость, которую бактерии выделяют сами или черпают ее из агара для облегчения движения. Бионы также потребляют пищу и выделяют химические вещества.

Удается смоделировать различные формы движения клеток, такие как «плавание» (движение по прямой), вращение в случайном направлении под некоторым случайным углом и т.д. В зависимости от количества питания подвижность бионов (вероятность перемещения в любом направлении) заметно меняется. Результаты численного моделирования [138], представленные на рис. 11.8, демонстрируют эволюцию колоний при низком начальном уровне питания при учете и без учета хемотаксисного взаимодействия.

Паттерны некоторых видов *Bacillus subtilis* сильно закручены в

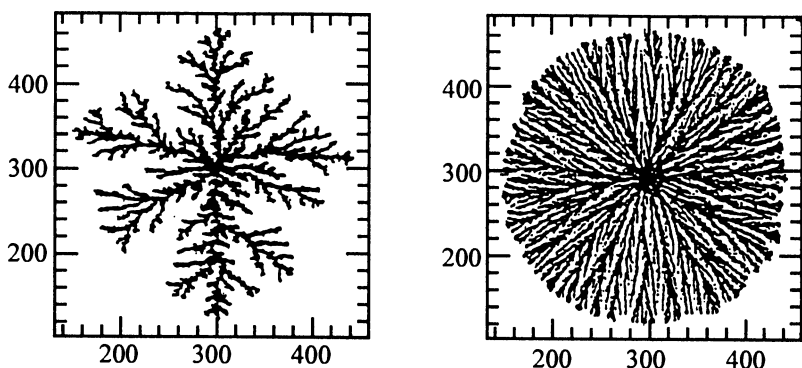


Рис. 11.8. Результаты численного моделирования гибридной модели взаимодействующих бионов с выключенным (а) и включенным (б) механизмом репульсивного хемотаксиса

определенном направлении, всегда одним и тем же для данного вида (см. рис. 11.7в [141]). Бен-Джакоб и сотрудники [138] объясняют их закрученность асимметрией «конечностей», при помощи которых бактерии передвигаются. Если в процессе вращения в случайном направлении бактерия вращается преимущественно в одном направлении и под определенным средним углом, это подразумевает анизотропию, необходимую для образования спирали. Этот эффект можно легко смоделировать. Результаты такого численного моделирования представлены на рис. 11.9.

Существуют и еще более экзотические типы паттернов, образующихся взаимодействующими бактериями. Так, например, *Vacillus circulans* образуют локализованные конгломераты бактерий, кружащихся по замкнутым спиральям [140]. Подобное поведение недавно было обнаружено также и у некоторых видов *Vacillus subtilis* [140]. Такое круговое движение бактерий может быть вызвано особым хемотаксисным откликом, когда клетка движется под определенным углом к градиенту химической концентрации. Когда этот эффект был смоделирован, то, как и следовало ожидать, он привел к вихревому движению бактерий и усложнению динамической структуры [140].

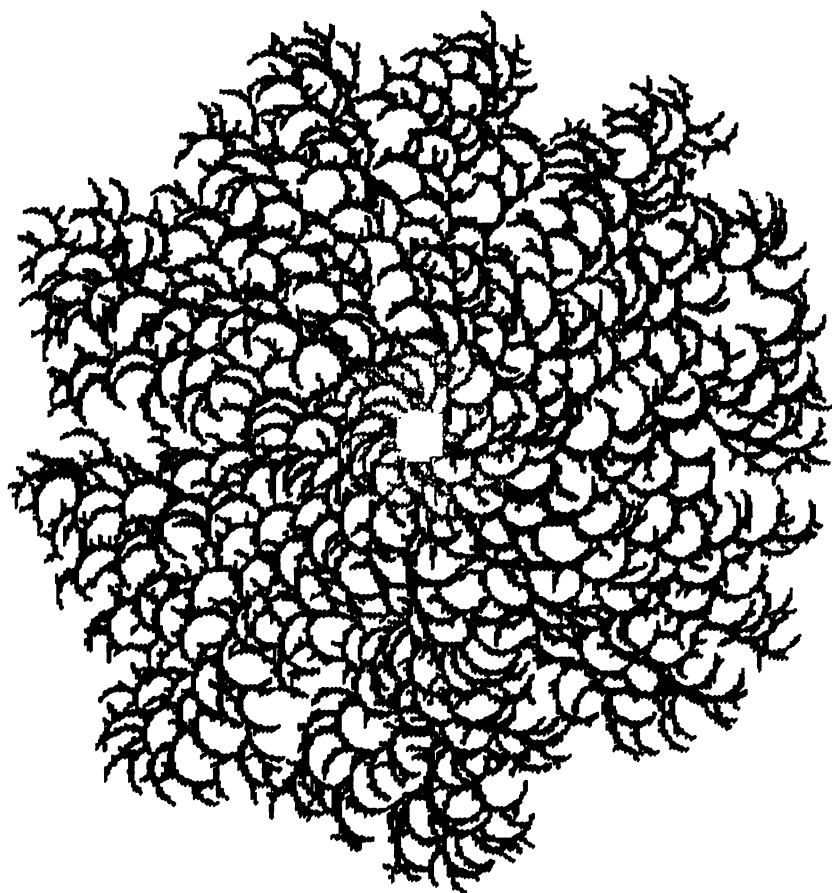


Рис. 11.9. Численное моделирование динамики бионов с анизотропным механизмом вращения

Эпилог: Живая материя и динамические формы

После изучения предшествующих глав у интересующегося читателя возникает естественный вопрос: что дальше? Не решены ли уже все наиболее достойные задачи формообразования и, если нет, то в какой области перспективы этой науки наиболее привлекательны? Ответы на подобные вопросы по определению субъективны. Тем не менее, мы рискуем высказать некоторые мысли о применении динамической теории форм (или паттернов) к живым системам. Следует сразу оговориться, что, в основном, это новая область, интерес к которой очень велик, однако, методы решения задач не ясны, да и сами задачи еще не поставлены достаточно четко. На что же можно опереться? Прежде всего на эксперименты. Именно специально поставленные эксперименты позволят построить адекватные модели, описывающие процесс рождения из набора идентичных клеток с тождественным генетическим кодом очень сложных организмов с огромным количеством подсистем и разнообразием функций [142] или восприятие, представление и долговременное запоминание информации об окружающем нас мире [143].

Чем, в принципе, отличаются живые системы от неживых? Среди прочего, наличием, помимо обычных динамических переменных, подчиняющихся детерминированным уравнениям, совершенно непривычной компонентой — информационной, которая может играть роль непрерывного фактора, а может проявляться лишь дискретно — время от времени. Информация, влияющая на последующее поведение, может быть заложена в каждом элементе исследуемого ансамбля, например, как гены в ядре клетки. Сигналы, изменяющие поведение, могут продуцироваться и специальными клетками, влияющими на способы общения между элементами ансамбля, и, таким образом, на рождение будущих форм. Проявления информации могут быть и более экзотическими — это могут быть, например, сигналы, изменяющие внутреннюю динамику не только отдельных клеток-нейронов, но и целых нейронных ансамблей, переводя, скажем, их из режима приема информации в режим запоминания и т.д. Из перечисленного уже ясно, что четкого определения понятия биологической информации у нас пока нет.

Механизмы включения «информационных часов» в разных ситуациях могут быть различны. Например, в процессах морфогенеза, как считается [142], информация о дифференциации изначально тождественных клеток включается, в зависимости от их геометрического

расположения по отношению друг к другу. В нейронных ансамблях под действием специальных, не всегда понятных нам сигналов, прорастают новые связи между нейронами и фактически меняется топология нейронного ансамбля. Число подобных примеров легко умножить.

Включение информационных механизмов в процессы формообразования очень напоминает игру, правила которой меняются на ходу, зачастую совершенно непредсказуемо. Неудобно, но факт. Причем изменение может быть столь разительно, что после переключения приходится иметь дело с совершенно новой системой, которая на отдельном отрезке жизни может быть динамической. Однако на всем интервале жизненного цикла подобную систему, конечно, назвать динамической нельзя: в ней не может быть определено понятие фазового пространства, т.е. пространства состояний, наделенного естественным понятием близости, и понятие траектории, поскольку начальное состояние не определяет поведение системы на всем отрезке от $t = 0$ до $t \rightarrow \infty$. Само понятие больших времен, как и понятие аттракторов, ввиду того, что по заданным правилам система живет лишь конечное время, здесь теряет строгий смысл.

И, тем не менее, объединение континуальных моделей с моделями типа мультитабильных автоматов и некоторыми алгоритмическими правилами могут позволить сформулировать динамические, т.е. не стохастические(!) модели нового уровня, где динамические и информационные переменные «играют на равных». Простейшие примеры такого моделирования мы обсуждали в гл. 11.

Поскольку проблемы поведения нейронных ансамблей авторам ближе, чем проблемы морфогенеза, мы обсудим перспективы нелинейной теории формообразования именно на их примере.

Время от времени и сегодня, не только в популярной, но и в научной литературе, всерьез обсуждаются аналогии между мозгом и быстрым и мощным компьютером. Действительно, некоторое подобие в функциях нейронов и элементов компьютера неоспоримо: и те, и другие могут работать как пороговые детекторы, схемы совпадения, интеграторы и другие элементы двухзначной или многозначной логики. Более того, взаимовлияние «компьютерных идей» и анатомической информации о многоуровневой структуре коры головного мозга со скрытыми уровнями и связями, формирующимися в процессе обучения, привело к созданию принципиально новых вычислительных структур — нейронных сетей [144]. Конечно, сегодня очень рискованно делать далеко идущие прогнозы, но, судя по всему, мозг использует совершенно иные, нам пока не известные, принципы,

среди которых, как мы убеждены, нелинейная динамика паттернов играет заметную роль.

Недавние эксперименты с разнообразными нейронами обнаружили замечательный феномен: отклик нейронов на весьма сложный и даже нерегулярный входной сигнал воспроизводится при многократном повторении экспериментов. Это означает, что нейрон функционирует как детерминированная система, т.е. его поведение при преобразовании информации не зависит от шумов и флуктуаций. Принципиально, однако, что большинство нейронов, как и нейронных ансамблей, не просто трансформируют информацию, как, например, сетчатка глаза, но и активно формирует ее. Может быть, один из наиболее ярких примеров здесь — галлюцинации. Как известно [145], люди в состоянии сна, под действием наркоза и т.п., не получая никакой информации извне, убеждены, что видят определенные картины, которые устойчиво воспроизводятся после пробуждения, выхода из комы и др. [146]. Обычно такие картины довольно универсальны и зависят более от вида наркотика, чем от индивидуума. Это — разного рода решетчатые узоры типа кристаллов (см. гл. 5), спирали (см. гл.7), тоннели, воронки и их комбинации [146]. Откуда берутся эти паттерны, что их продуцирует? Имеется весьма популярная модель, объясняющая этот феномен [145]. Суть ее такова. Кора головного мозга, которая воспринимает и обрабатывает зрительные образы, поступающие от сетчатки глаза, в обычном состоянии представляет собой нейронную среду, не способную генерировать собственные паттерны — большинство нейронов находятся в допороговом режиме. Под действием же галлюциногенов зрительная кора переходит порог генерации и, как уже знакомые нам неравновесные среды, способна продуцировать разнообразные пространственные структуры или паттерны. Почему эти паттерны оказываются столь универсальны? То, что генерирует зрительная кора, воспринимается как некоторые зрительные картины, которые как бы поступили на сетчатку глаза, и затем, благодаря некоторому трансформационному преобразованию, превратились в обсуждаемые нами самовозбуждающиеся паттерны. Таким образом, нужно решить обратную задачу: каким картинкам на сетчатке глаза отвечают простейшие структуры, генерируемые корой. Естественно предположить, что порог генерации визуальной корой превышает незначительно. Тогда простейшие формы, ею продуцируемые — это квадратные и прямоугольные решетки, ромбические структуры и гексагоны. Если теперь учесть, что сетчатка глаза имеет цилиндрическую симметрию, и использовать проекционные

преобразования от сетчатки к зрительной коре, то легко объяснить, что простейшие формы, генерируемые корой, должны трансформироваться в спиральные структуры, воронки, тоннели и другие картинки, имеющие особенность в центре зрительного поля. Именно эти картинки, как нам кажется, и видят люди во время галлюцинаций.

Необходимо подчеркнуть, что электрическая активность нейронов не единственный способ, с помощью которого они общаются друг с другом. Нейроны, как и большинство других клеток, выделяют разнообразные химические вещества. В данном случае — это нейромодуляторы. Такие нейромодуляторы под действием внешних стимулов в состоянии качественно изменить динамический режим работы нейрона или группы нейронов, перегруппировать нейронные цепочки, изменяя их внутренние связи и, наконец, объединить отдельные группы в большие ансамбли, которые характеризуются качественно новой динамикой. Подобные трансформации предполагают изменение под действием химических веществ не только свойств нейронов, но и свойств соединяющих их динамических элементов — синапсов [143]. Правила перестройки нейронных ансамблей при этом не заданы наперед, но зависят от поступающей информации. В противном случае, можно было бы просто расширить модель, включив в нее уравнения, описывающие изменение этих правил. На этом принципе, в частности, основаны разнообразные модели памяти, предложенные Хопфилдом [147].

Как известно, процесс передачи и обработки всякой информации — это процесс, связанный с модуляцией и демодуляцией какого-либо носителя. Можно предположить, что представление, обработка и даже производство информации в коре головного мозга — это пространственно-временная модуляция паттернов активности нейронных ансамблей.

Характер паттернов или форм активности может быть разным. Если, например, предположить, что генерация одних нейронов в распределенной популяции возникает как представление окружающей реальности, то столь же важно и молчание других нейронов в данный момент времени. Помимо таких «черно-белых» паттернов возможны и паттерны дифференцированной активности. Например, в одной области популяции динамика нейронов упорядочена, а в другой — это пространственно-временной хаос; или — отдельные группы нейронов могут быть синхронизованы по фазе, причем это могут быть и топологически не связанные конфигурации, и даже группы нейронов, принадлежащие к различным популяциям [148].

Последние эксперименты *in vivo*, проведенные оптическим методом на пчелах, показали, что различные запахи отображаются в части мозга, ответственной за восприятие запахов, различными пространственно-временными паттернами [149]. Другими словами, разным запахам, например, запаху гвоздики и запаху апельсина, отвечают разные пространственные формы нейронной активности «обонятельной части» мозга. Это тем более нетривиально, что, в отличие от зрительных образов, которые по природе своей — пространственные, запах воспринимается локально в пространстве. Обонятельные рецепторы передают лишь временную информацию. Однако в дальнейшем временной сигнал формирует специфические формы пространственной активности нейронов мозга. Причем паттерны, отвечающие различным запахам, практически не перекрываются.

То обстоятельство, что при восприятии запахов чрезвычайно важна и временная компонента активности нейронов, подтверждается элегантными экспериментами Джона Лорена [150], выполненными методами многоэлектродной записи на насекомых. Было показано, что при восприятии запахов принципиальна и последовательность возбуждения нейронов, вовлеченных в процесс распознавания. Скажем, запаху яблока отвечает возбуждение вначале 720 нейронов (при произвольной их нумерации), затем 1620, 2120, 320 и т.д. Запаху же мандарина совсем иная последовательность, например, 4, 12, 9, 27 и т.д.

Различные нейронные популяции, отображающие или формирующие пространственно-временные информационные паттерны, обычно объединены друг с другом многочисленными обратными связями, образуя так называемые базовые нейронные структуры (или цепи). Примерами здесь могут служить связи между таламусом и кортексом [151], и нейронными ансамблями разного уровня обонятельной системы мозга насекомых [152] и др.

Дополнительные трудности в «динамическом моделировании» создает еще и сосуществование и/или смена временных ритмов, в зависимости от поступающих извне сигналов. Высказываются весьма обоснованные гипотезы [153], что кратковременная память у высших животных записывает приходящую информацию на различающиеся по частоте носители. Эти носители — различные субгармоники основной частоты 40 Гц. При описании такого феномена возникает множество проблем. Например, влияют ли друг на друга пространственно-временные паттерны, записанные на различных носителях или: каким образом внешний стимул выбирает себе носитель и т.д.

Как известно, «мир говорит с нами на своем, а не на нашем языке» [154], тем не менее, мы надеемся, и предыдущий опыт подпитывает наш оптимизм, что развивающийся и совершенствующийся язык нелинейной динамики окажется адекватным как для понимания упомянутых феноменов, связанных с деятельностью нервных систем, так и для решения более общих проблем биологии.

Список литературы

1. Займан Дж. *Модели беспорядка*. — М.: Мир, 1982.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Линейные и нелинейные волны*. — М.: Наука, 1984.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.С. *Слабый хаос и квазипериодические структуры*. — М.: Наука, 1991.
4. Zverev V.A., Matveev A.L., Slavinsky M.M., Stromkov A.A. // *Acoustic array noises in a shallow sea. Proceedings of the Institute of Acoustics*, 1996, v.18, part 5, p.85.
5. Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М. // *ЖЭТФ* 1986, т.91, с. 2070.
6. Bodenscharts E., de Bruyn J. R., Ahlers G., Cannell D. // *Phys. Rev. Lett.* 1991, v.65, p.2370.
7. Blumel R., Davidson I.H., Reinhardt W.P. // *Phys. Rev. A* 1992, v.45, p.2641.
8. Berry M.V. *Chaotic behaviour of deterministic systems* Eds. G.Looss, R.Helleman, R.Stora. — N.Y.: North Holland, 1983.
9. Christianesn B., Alstrom Preben, Levinson M.T. // *Phys. Rev. Lett.* 1992, v.68, p.2157.
10. Edwards W.S., Rauve S. // *Phys. Rev. E* 1993, v.47, p.788.
11. Rasenat S., Steinberg V. // *Phys. Rev. A* 1990, v.42, n.10, p.5998.
12. Morris S.W., Bodenschatz E., Cannell D.S., Ahlers G. // *Phys. Rev. Lett.* 1993, v.71, p.2026.
13. Ezersky A.B., Ermoshin D.A., Kiyashko S.V. // *Phys. Rev. E* 1995, v.51, n.4, p.4439.
14. La Porta A., Surko C.M. // *Phys. Rev. Lett.* 1996, v. 77, n.13, p.2678.
15. Turing A.M. // *Phyl. Trans. Roy. Soc. London B*, 1952, v.237, p.37.
16. Гленсдорф Л., Пригожин И. *Термодинамическая теория структур, устойчивости и флуктуаций*. — М.: Мир, 1973.
17. Dennis Vigil, Ouyang Q., Swinney H. // *Physica A*, 1992, v.188, p.17.
18. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. — М.: Наука, 1972.
19. Fermigier M., Limat L., Wesfreid J.E., Boudinet P., Quilliet C. // *J. Fluid Mech.* 1992, v.236, p.349.
20. Филлипс О.М. *Динамика верхнего слоя океана*. — Л.: Гидрометеониздат, 1982.
21. Platten J.K., Legros J.C. // *Convection in liquids*. — Berlin: Springer – Verlag, 1984.

22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. — М.: Наука, 1984.
23. Faraday M. // *Phil. Trans. R. Soc. London* 1831, v.121, p.299.
24. Swift Y.S., Hohenberg P.C. // *Phys. Rev. A* 1977, v.15, p.319.
25. Haken H. *Advanced synergetics. Instability hierarchies of self organizing systems and devices*. Berlin, Hidelberg, New York: Springer, 1983.
26. Gaponov – Grekhov A.V., Lomov A.S., Osipov G.V., Rabinovich M.I. in *Non-linear waves I*, A.V.Gaponov – Grekhov, M.I.Rabinovich, J.Engelbrecht (Eds.), Berlin, Hidelberg, New York: Springer, 1989.
27. Вашкевич О.В., Гапонов-Грехов А.В., Езерский А.Б., Рабинович М.И. // *ДАН СССР* 1986, т.90, с.960.
28. Pismen L. // *Phys. Lett. A* 1986, v.116, p.241.
29. Greenside H.S., Cross M.C. // *Phys. Rev. A* 1984, v.31, p.2492.
30. Pesch W., Kramer L. // *Z. Phys.* 1986, v.63, p.121.
31. Rabinovich M.I., Tsimring L.S. // *Phys. Rev.E*, 1993, v.49, p.35.
32. Yuhai Tu, Cross M.C. // *Phys. Rev. Lett.* 1992, v.69, n.17, p.2515.
33. Kuramoto Y. // *Prog. Theor. Phys. Supp.* 1978, v.64, p.346.
34. Kuramoto Y. // *Prog. Theor. Phys.* 1984, v. 71, p.1182.
35. Cross M.C., Newell A.C. // *Physica D*, 1984, v.10, p.299.
36. Manneville P. *Dissipative structures and weak turbulence*. — Boston, San Diego, Toronto: Academic press, 1990.
37. Stewartson K., Stuart J.T. // *J.Fluid Mech.* 1971, v.48, p.529.
38. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. // *ЖЭТФ* 1985, т.89, с.92.
39. Kuramoto Y. *Chemical oscillations. Waves and turbulence*. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1984.
40. Moloney J.V., Newell A.C. // *Physica D* 1990, v.44, p.1.
41. Newell A.C., Whithead J.A. // *J.Fluid Mech.* 1969, v.36, p.239.
42. Segel L.A. // *J.Fluid Mech.* 1969, v.38, p.203.
43. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. // *ЖЭТФ* 1950, т.20, с.1064.
44. Куприянов М.Ю., Лихарев К.К. // *Письма ЖЭТФ* 1972, т.15, с.247.
45. Горьков Л.П., Копнин Н.Б. // *УФН* 1975, т.116, с.413.
46. Гинзбург В.Л., Питаевский Л.П. // *ЖЭТФ* 1958, т.34, с.1240.
47. Asano N., Taniuti T., Yajima N. // *J. Math. Phys.* 1968, v.10, p.2020.
48. Литвак А.Г., // *Письма ЖЭТФ* 1966, т.4, n.9, с.341.
49. Greenberg E. // *SIAM J. Appl. Math.* 1980, v.39, p.301
50. Hagan P. // *SIAM J. Appl. Math.* 1982, v.42, p.762.
51. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая механика*. — М.: Наука, 1984.
52. Fitz Hugh R. // *Biophys. J.* 1961, v.1, p.445.
53. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. // *Proc. IRE* 1962, v.50, p.2061.
54. Ханин Я.И. *Квантовая радиопизика, т.2. Динамика квантовых генераторов*. — М.: Советское радио, 1972.
55. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. // *ЖЭТФ* 1979, т.77, с.617.
56. Kuramoto Y., Tsuzuki T. // *Prog. Theor. Phys.* 1976, v.55, p.356.
57. Sivashinsky G.I. // *Acta Astronomica* 1977, v.4, p.1177.

58. Tuffalaro N.B., Ramshankar R., Gollab J.P. // *Phys. Rev. Lett.* 1989 v.62, p.422.
59. Bestehorn M. // *Springer Proceedings Physics R.Friedrich, A.Wunderlin (Eds.)* 1992, v.69, p.166.
60. Le Gal P., Pochen A., Croguette V. // *Phys. Rev. Lett.* 1985, v.54, p.2501.
61. Ahlers G., Behringer R.P. // *Phys. Rev. Lett.* 1978, v.40, p.712.
62. Assenheimer M., Steinberg V. // *Phys. Rev. Lett.* 1993, v.70, p.3888.
63. Assenheimer M., Steinberg V. // *Nature (UK)* 1994, v.367, p.347.
64. Penrose R. // *Bull. Inst. Math. Appl.* 1974, v.10, p.266.
65. Penrose R. // *Math. Intelligencer* 1979, v.2, p.32.
66. Нельсон Д.Р. // *В мире науки.* 1986, n.10, с.19.
67. Shechtman D., Bleck L., Gratias K., Cath I.W. // *Phys. Rev. Lett.* 1984, v.53, p.1951.
68. Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.И. // *ЖЭТФ* 1989, т.96, с. 684.
69. Ландау Л.Д. // *ДАН СССР* 1944, т.44, с.339.
70. Hopf E. // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1948, v.1, p.3031.
71. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика.* — М.: Мир, 1984.
72. Newell A., Pomo Y. *Turbulent crystal.* Preprint. — Tucson: 1993.
73. Eckman J.P., Procaccia I. // *Nonlinearity.* 1991, v.4, p.542.
74. Kai S., Chizumi N., Hohno M. // *Phys. Rev. A* 1989, v.40, p.6554.
75. Кринский В.И., Жаботинский А.М. *В кн. Автоволновые процессы в системах с диффузией.* — Горький: ИПФ РАН, 1981.
76. Жаботинский А.М. *Концентрационные автоколебания.* — М.: Наука, 1974.
77. Davidenko J.M. et al, // *Nature* 1992, v. 355, p.349.
78. Loomis W.F., *The development of discostelium discoideum* — New York: Academic, 1982.
79. Зыков В.С. *Моделирование волновых процессов в возбудимых средах.* — М.: Наука, 1984.
80. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы.* — М.: Наука, 1987.
81. Gray W. // *J.At. Chem. Soc.* 1921, v. 43, p.1262.
82. Белоусов Б.П. *Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г.* — М.: 1959. Полный текст статьи Б.П.Белоусова «Периодически действующая реакция и ее механизмы», найденный в его архиве и датированный 1951 годом, опубликован в сборнике [75] стр.176.
83. Жаботинский А.М. *В кн. Колебательные процессы в биологических и химических системах.* — М. Наука, 1967.
84. *Waves and Patterns in Chemical and Biological Media.* Ed. H.L. Swinney and V.I.Krinsky, // *Physica D* 1991, v.49, №1, 2.
85. Dellnitz M., Golubitsky M., Hohmann A., Stewart I. // *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1995, v.5, p.1487.
86. Barkly D., Kevrekidas I.G. // *Chaos* 1994, v.4, p.453.
87. Mikhailov A.S., Zykov V.S. // *Physica D* 1991, v.52, p.379.
88. Winfree A.T. // *Chaos* 1991, v.1, p.303.

89. Barkley D. // *Phys. Rev. Lett.* 1994, v.72, p.164.
90. Bodenschatz E., de Bruyn J.R., Ahlers G., Cannell D.S. // *Phys. Rev. Lett.* 1991, v.67, p.3078.
91. Morris S.W., Bodenschatz E., Cannell D.S., Ahlers G. // *Phys. Rev. Lett.* 1993, v.71, p.2026.
92. Kiyashko S.V., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.S. // *Phys. Rev. E* 1996, v.54, №5, p.5077.
93. Корзинов Л.Н., Никулин А.С., Рабинович М.И. // *Известия ВУЗов ПНД* 1994, т.2, с.73.
94. Hagan P.S. // *SIAM J. Appl. Math.* 1982, v. 42, p.762.
95. Nozaki K., Bekki N. // *Phys. Lett. A* 1985, v.110, p.133.
96. Bazhenov M., Rabinovich M.I. // *Physica D* 1994, v. 73, p.318.
97. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. Перев. с англ. Динкина В.А. и Карамзиной Л.Н. — М.: Наука, 1979.
98. Афенченко В.О., Езерский А.Б., Ермошин Д.А. // *Изв. РАН сер. Физическая* 1996, т.60, №12, с.146.
99. Pismen L., Nepomnyachshy A. // *Europhys. Lett.* 1993, v.24, №6, p.461.
100. Ezersky A.B., Matusov P.A., Kiyashko S.V., Rabinovich M.I. // *Europhys. Lett.* 1994, v.26, №3, p.183.
101. Aranson I.S., Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I. // *Physica D* 1990, v.43, p.435.
102. Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I. // *Phys. Lett. A* 1989, v.137, p.250.
103. Umbahowar P., Melo F., Swinney H. // *Nature* 1996, v.382, p.793.
104. Tsimring L.S., Aranson I.S. // *Phys. Rev. Lett.* (in press).
105. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л., Цимринг Л.Ш. // *УФН* 1992, т.162, с.1.
106. Gorshkov K.A., Korsinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.S. J. // *J. Stat. Phys.* 1944, v. 74, p.1033.
107. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A. // *Physica D* 1981, v.3, p.428.
108. Afraimovich V.S., Reinman A.M. in *Nonlinear Waves 2*, A.V.Gaponov-Grekhov, M.I.Rabinovich and J.Engelbrecht (Eds.) — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1989.
109. Grassberger P., Procaccia I. // *Physica D* 1983, v.9, p.617.
110. *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. Ed. A.Mayer-Kress. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
111. Grassberger P., Schreiber T., Schaffrath C. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1991, v.1, n.3, p.521.
112. Casdagli M., Eubank S., Farmer J.D., Gibson J. // *Physica D* 1991, v.51, p.52.
113. Afraimovich V.S, Ezersky A.B., Rabinovich M.I., Zheleznyak A.L., Shereshevsky M.A. // *Physica D* 1992, v.58, p.331.
114. Aranson I.S., Ezersky A.B., Rabinovich M.I., Tsimring L.S. // *Phys. Lett. A* 1991, v.153, p.211.
115. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. *Nonlinearities in Action* — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1992.
116. Bazhenov M., Rabonovich M.I. // *Physica D* 1993, v.73, p.318.

117. Chate H., Manneville P. // *Physica A* 1996, v.224, p.348.
118. Weibul C. *The Bacteria v.1* Eds. I.C.Gunsalus and R.Y.Stainer — New York: Dover, 1960.
119. Adler J. // *Science* 1966, v.153, p.708.
120. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. // *Бюл. МГУ. — Секц. А1* 1937, №6, с.1.
121. Bonner J.T. *The Cellular Slime Molds* — Princeton Univ. Press, 1967.
122. Parnas H., Segel L. // *J. Cell. Sci.* 1977, v.25, p.191.
123. Parnas H., Segel L. // *J. Theor. Biol.* 1978, v.71, p.185.
124. Vasieva O., Vasieva B., Karpov V., Zaikin A.N., // *J. Theor. Biol.* 1994, v.171, p.361.
125. Keller E.F., Segel L.A., // *J. Theor. Biol.* 1970, v.26, p.99.
126. Nanjundiah V. // *J. Theor. Biol.* 1973, v.42, p.63.
127. Kessler D.A., Levine H. // *Phys. Rev. E* 1993, v.48, p.4801.
128. Levine H., Aranson I., Tsimring L., Truong T.V. // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1996, v.93, p.6382.
129. Aranson I., Levine H., Tsimring L. // *Phys. Rev. Lett.* 1996, v.76, p.1170.
130. Levine H., Tsimring L., Kessler D.A // *Physica D* 1997, v.106, №3-4, p.375.
131. Budrene E.O., Berg H.C. // *Nature* 1991, v.349, p.630.
132. Budrene E.O., Berg H.C. // *Nature* 1995, v.376, p.49.
133. Blat Y., Eisenbach M. // *J. Bacteriology* 1995, v.177, №7, p.1683.
134. Ben-Jacob E., Shochet O., unpublished.
135. Van Saarloos W. // *Phys. Rev. A* 1989, v.39, p.6327.
136. Tsimring L. et al. // *Phys. Rev. Letters* 1995, v.75, n.9, p.1859
137. Ben-Jacob E. et al. // *Nature* 1995, v.373, p.566.
138. Ben-Jacob E. // *Contemporary Physics* 1997, v.38, n.3 p.205.
139. Kessler D.A., Koplik J., Levine H. // *Advances in Physics* 1988, v.37, №3, p.255.
140. Smith R.N, Clark F.E. // *J.Bacteriol.* 1938, v.36, p.59.
141. Ben-Jacob E., Cohen I., Czirok A. Smart bacterial colonies: from complex patterns to cooperative evolution, *Fractals* (1995).
142. Koch A.J., Meinhardt H. // *Rev. Mod. Phys.* 1994, v.66, №4, p.1481.
143. The synaptic organization of the brain. Ed. by Shepherd, 3d ed. — New York: Oxford Univ. Press, 1990.
144. Amari S., Arbib M.A. Competition and cooperation in Neural Nets. — New York: Springer-Verlag, 1980.
145. Ermentrout G.B., Cowan J. // *Biol. Cybern.* 1979, v.34, p.137.
146. Siegel R.R. // *Scientific American* 1971, v.224, p.88.
147. Hopfield J.J. // *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)* 1984, v.81, p.3088.
148. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л. // *УФН* 1996, т.166, №4, с.363.
149. Joerges J., Kuettner A., Galizia C., Menzel R., // *Nature* 1997, v.387, p.285.
150. Laurant G. // *TINS* 1996, v.19, p.489.
151. Llinas R. in *The Mind-Brain Continuum* R.Llinas and P. Churchland (Ed.) — MIT Press, 1996.

152. Laurant G., Wehr M., Davidowitz H., // *Journal of Neuroscience* 1996, v.16, p.3837.
153. Lisman J., Idiand M., // *Science* 1995, v.267, p.1512.
154. Генис А. // *ИЛ*, №9, 1996.

Научное издание

Михаил Израилевич Рабинович, Александр Борисович Езерский
ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

Сдано в набор 15.10.97. Подписано в печать 26.12.97.
Формат 60x88 / 16. Бумага офсетная N 1. Печать офсетная.
Уч.-изд л. 12,8. Физ.п.л. 12. Тираж 1000. Заказ N 4354

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ
140010, Люберцы, Октябрьский пр-кт, 403, тел.: 554-21-86

«Янус-К»

Лицензия на издательскую деятельность N ЛР 064784 от 02.10.96.

Каким образом на однородной вначале поверхности горизонтального жидкого слоя, находящегося в осциллирующем гравитационном поле, рождаются кристаллические и квазикристаллические пространственные структуры?

Почему в двумерном химическом реакторе, где происходит автокаталитическая реакция, наиболее типичные концентрационные образования—это спирали?

Что такое самоорганизация дефектов?

На эти и другие вопросы, связанные с рождением различных пространственных форм, авторы дают ответ в настоящей книге.

Изложение опирается на наглядные эксперименты с гидродинамическими, химическими и биологическими системами.

Книга рассчитана на широкую научную аудиторию и будет полезна студентам и преподавателям вузов.