

INTERNATIONAL  
SCHOOL IN  
NONLINEAR  
SCIENCE



September 5-16, 1995

NONLINEAR WAVES

Synchronization and Patterns

Part 1



Nizhny Novgorod, Russia

1 9 9 5

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

## синхронизация и структуры

Под редакцией М. И. Рабиновича,  
М. М. Сущика,  
В. Д. Шалфеева

Издательство Нижегородского университета  
Нижегород  
1995

**БК 22.3**

**H 44**

**H 44 Nonlinear Waves. Synchronization and Patterns. Part 1.**

Edited by M. I. Rabinovich, M. M. Sushchik, and V. D. Shalfeev

Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press, 1995 - 138 pp.

This book includes the reviews lectures, and communications presented at the International School in Nonlinear Science held in Nizhny Novgorod in September 1995. Problems of dynamical chaos, synchronization and pattern formation are considered in applications to hydrodynamics, biology, electronics, and other branches of science. The Proceedings are published in two volumes, each containing papers arranged alphabetically.

The book is intended for specialists involved with investigations of nonlinear phenomena.

H  $\frac{1604010000-318}{M 137(03)-95}$

ISBN 5 - 85746 - 172 - 3

**ББК 22.3**

**Н 44**

- Н 44** Нелинейные волны. Синхронизация и структуры. Ч.1.  
Под редакцией М. И. Рабиновича, М. М. Сушика, В. Д. Шалфеева.  
Нижний Новгород: Издательство Нижегородского  
университета, 1995. – 138 с.

Сборник содержит обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций, прочитанных на Международной школе по нелинейным колебаниям (Нижний Новгород, сентябрь, 1995 г.), а также по материалам семинаров, состоявшихся на этой школе. Проблемы динамического хаоса, синхронизации, образования структур обсуждаются в связи с различными приложениями в гидродинамике, биологии, электронике и др. Материал сборника условно разделен на две части и публикуется в виде двух отдельных томов; в каждой из частей работы расположены в алфавитном порядке.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся проблемами нелинейных явлений.

Н  $\frac{1604010000-318}{М 137(03)-95}$

ISBN 5 – 85746 – 172 – 3

©Нижегородский университет, 1995  
©Институт прикладной физики РАН, 1995

The Organizing Committee of The International School in Nonlinear Science  
highly appreciates the support of

The Russian Ministry of Science and Technical Policy,  
The State Committee of Higher Education of the Russian Federation,  
The Russian Foundation for Basic Research,  
The International Soros Science Education Program,  
The Nizhny Novgorod Regional Administration

Оргкомитет Международной школы по нелинейным явлениям приносит  
глубокую признательность спонсорам школы:

Российскому Министерству науки и технической политики,  
Государственному комитету по высшему образованию Российской Федерации,  
Российскому фонду фундаментальных исследований,  
Международному научному фонду Дж. Сороса,  
Нижегородской областной администрации

## PREFACE

The International School in Nonlinear Science was organized for active researchers and students from Russia and other countries and was held in Nizhny Novgorod from September 5, 1995 through September 16, 1995. This school followed in the long tradition of the schools organized by the Institute of Applied Physics RAS in Gorky (Nizhny Novgorod) from 1972 to 1989. These schools were called "Schools on Nonlinear Physics". This is by no means accidental. Even at our first schools held in 1972 and 1973, general problems and methods in the theory of nonlinear oscillations and waves were discussed including various nonlinear phenomena in plasma and solid state physics, as well as in astrophysics, chemical kinetics, biology and other branches of natural science. In such a way these schools were "Schools of Nonlinear Sciences". Indeed, during the last seven or ten years the term *nonlinear science* has become rather popular in the English-speaking countries. Under this "slogan" a number of international meetings have been held, many collected papers have been published, and some new journals have appeared. In general, nonlinear phenomena in various areas of fundamental science and applications are of great interest and draw more and more attention.

We are now experiencing a new stage in the development of the branch of science that is traditionally called *nonlinear theory of oscillations and waves* or *nonlinear dynamics*. As is well known, the classical theory of nonlinear oscillations can be traced back to the works of H. Poincaré, B. van der Pol, L. Mandelshtam, and A. Andronov. This theory was completed in the early sixties. A unified nonlinear language was formulated and an interdisciplinary system of models, images and notions was created. In short, a new way of thinking, called "nonlinear thinking" according to Mandelshtam, was formed. In addition, effective methods of analysis of nonlinear dynamics for various systems and media were elaborated. However, the description of the whole variety of phenomena was reduced to the analysis of dynamical systems in two-dimensional phase space. The effects of the third dimension, even if they were considered, were in the shadow of "small parameters", thus preventing the appearance of qualitatively new, surprising features.

To the end of this "classical period" many scientists thought that nearly all fundamental problems were solved, and the majority of specialists in nonlinear physics were only going to enlarge its scope, trying to find some new terra incognita. Such researches were certainly very important, because they brought many practical results, but they did not change anything in the classifications of the possible types of behaviour of nonlinear systems which had been formed by this time. The situation changed drastically in the middle of the nineteen sixties due to the discovery of chaotic behaviour of dynamical systems and of stable structures of nonlinear fields (solitons) localized in space.

The birth of solitons and the discovery of strange attractors (i.e., the creation of *chaotic dynamics*) marked the beginning of a new stage in the history of the theory of nonlinear oscillations and waves – that is the study of essentially nonlinear phenomena evolving in space and time and qualitatively different from the phenomena of quasi-linear physics. The advances in this area followed one after another, and by the beginning of the eighties a sufficiently high level in understanding and description of chaotic dynamics of nonlinear systems and media, behaviour of solitons and their ensembles, etc. was achieved. Of course, there is a lot to be done yet in this domain, but now the "center of gravity" in studies on nonlinear dynamics began to shift to new directions, i.e., to research on complicated nonlinear systems with variable structures, systems with memory and self-learning systems, as well as neurobiology.

The study of nonlinear dynamics and construction of models for such complicated processes and systems as turbulent flows and the cortex of the human brain demand new methods of diagnostics. In particular, such methods as reconstruction of a dynamical model based on the analysis of dimensionality of its realization proved to be very promising and were discussed at our school (H. Abarbanel, "The analysis of observed chaotic data: Making physics with chaos").

Apart from the theory of pattern formation and dynamics of complex nonlinear systems and media, the traditional nonlinear problems arising in ocean dynamics, plasma physics, atmospheric dynamics were discussed at the school. On the teaching level, the following lectures were given: "Spatio-temporal patterns in biology" by M. Rabinovich, "Pattern formation in fluids: Methods of calculation" by W. Pesch, "Nonlinear waves, chaos and patterns in microwave electronic devices" by D. Trubetskov, "Low-frequency dynamics of lasers" by Ya. Khanin, "Anti-phase dynamics in lasers" by P. Mandel, "Nonlinear properties of biological neurons" by A. Selverston, "Nonlinear oscillating structures in earthquake and seaquake dynamics" by B. Levin, "Nonlinear waves and patterns in blood coagulation" by G. Guria, "Nonlinear graviphysics" by A. Fridman, and others (41 invited lectures total). Besides the pedagogical lectures, research oriented lectures and communications were presented in the frame of seven minisymposia:

- Nonlinear Dynamics and Neurophysiology
- New Trends in Nonlinear Optics
- Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics
- Quantum Nonlinear Physics
- Nonlinear Physics of Microwaves
- Nonlinear Waves in Condensed Media
- Nonlinear Dynamics, Turbulence and Noise

Part of the invited lectures will be published in the focus issue "Synchronization and Patterns in Nonequilibrium Media" in the International Journal CHAOS.

These Proceedings, that consist of two volumes, include some invited lectures and materials presented at the minisymposia.

In conclusion we express our gratitude to all the participants of the school who have submitted their papers to these proceedings and to the members of the Organizing Committee who took active part in their preparation. We hope for further fruitful cooperation.

M.I. Rabinovich  
M.M. Sushchik  
V.D. Shalfeev

# CHAOTIC OSCILLATIONS AND PATTERN INTERACTION IN THE ELECTRON BEAM WITH VIRTUAL CATHODE

V.G.Anfinogentov

College of Applied Science, Saratov State University  
83 Astrakhanskaya st., Saratov 410071, RUSSIA  
E-mail: vga@college.saratov.su

## Abstract

The chaotic behaviour of the electron beam with virtual cathode in the plane Pierce diode and bounded drift tube are considered. The processes of the structure formation are observed. The analysis of the eigenmodes and its time behaviour take the understanding of the nonlinear behaviour of the beam from the point of view of structure interaction. Simple model for interacting structures is suggested and considered briefly.

## Introduction

In this work we are interested in the investigation of the chaotic behaviour of the simple microwave devices with bounded electron beam and analyzing the inner structures of the beam.

We will consider two models of the bounded electron devices, called Pierce diodes [1]. The first model is the plane Pierce diode (Fig.1a). In this model infinite electron beam propagates between two grounded planes. Space charge density  $\rho_0$  and velocity  $v_0$  of the beam are kept constant on the entrance of the system. Nonperturbed space charge is compensated by the immobile ions. Distance between grids is  $L$ . This model has one dimensionless parameter

$$\alpha = \omega_p L / v_0, \quad (1)$$

where the  $\omega_p$  is the plasma frequency, corresponded to the charge density on the entrance of the beam. The threshold of the linear instability is the  $\alpha = \pi$ . When  $\alpha$  is more than  $\pi$ , one or more linear modes increase and lead to the formation of the region with potential almost equal to cathode potential. This region is called the virtual cathode (VC).

The second model includes bounded drift tube (Fig.1b). The wall potential is equal to the potential of the entrance and exit grids. All other suggestions, mentioned above are kept in this case. When the tube is filled by the beam two independent dimensionless parameters of the system are  $\alpha$  and  $R' = R/L$ , where  $R$  is the radius of the tube. In the tube type diode if threshold of instability is exceeded the increasing of the perturbation leads to the formation of the virtual cathode also.

These diodes are not exact, but useful models for different types of the nonlinear behaviour, which are connected with nonlinear regimes of the Pierce type instability. They are electronic turbulence, different types of the VC oscillations and others [2]. New attention for these models was attracted some years ago as a result of the discovery of dynamical chaos in this system [3]. The Pierce type models can describe one mechanism of microwave generation in the vircators [4].

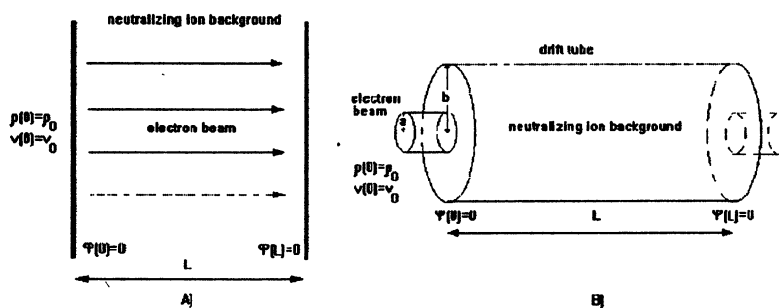


Figure 1: Two different cases of Pierce diode: a) the plane case; b) the tube-type case.



# 1 Structures

There are different dynamical states of the VC oscillations in the plane model [5]. In this case strong chaos regimes are excited as well as weak chaos. For large values of  $\alpha \approx 2\pi$  near to regular oscillations are appeared.

In the case of tube-type Pierce diode nonlinear dynamics of the electron beam with virtual cathode is slightly different. The windows of chaotic behaviour on the parameter plane are larger in this case. As compared with plane case attractors are more uniform and regular.

Dimensions of the chaotic attractors was estimated with the help of Grassberger–Procaccia algorithm [6]. The saturation of dimensions with increasing of the embedding dimensions was obtained. We can conclude, that chaotic behaviour of VC is defined by the exciting of the small number of the degree of the freedom.

The average mutual correlation function was calculated for the consequence sections of the beam in the chaotic case. This correlation function has one sharp peak that coincide with the place of the VC arising. This behaviour of correlation justify the existence of localized electron coherent structure in this region.

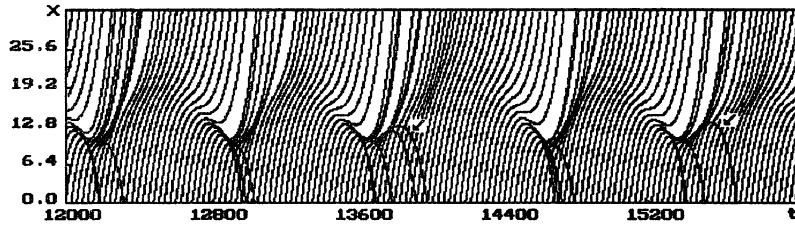


Figure 2: Space-temporal diagram for the chaotic oscillations.

Physical processes were analyzed with the help of the space–temporal diagram (Fig.2). Each curve on this diagram represents the trajectory of one charged sheet. Black areas are corresponded to bunches in the electron beam. As evident from the Fig.2 two different bunches are organized on each period of the oscillations. First bunch is the VC and it is organized as a result of the electrostatic instability, and the second one as a result of the kinematic instability. It is organized in the following way: when VC is disappearing, the incoming beam is moving in the increasing field. There is klystron bunching in this case, leading to the formation of the second pattern.

The patterns are connected by the common field of the space charge and the moving beam. In the regular regimes and regimes of the weak chaos connecting through beam is uni-directional because the formation of the second structure is defined by the beam transmitted through the VC.

If the space charge density in the second pattern is large enough then the part of the beam can be reflected from this pattern. Marked curves on the Fig.2 are corresponded to such reflected particles. Reflection from second pattern leads to the strong coupling of the patterns through beam because reflecting part of the beam defines the initial conditions for new formation of the VC.

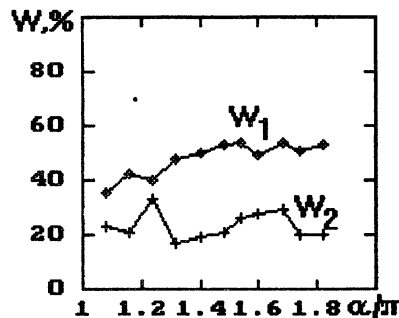


Figure 3: The energies of the first ( $W_1$ ) and the second ( $W_2$ ) eigenmodes for the different values of  $\alpha$ .

## 2 Eigenmodes

Now we recognize the inner structures of the beam with the help of the Karhunen–Loeve decomposition [7]. The most energy of the beam is contained in the four highest eigenmodes. First and second modes demonstrate strong nonuniform space distributions with one peak. These distributions almost coincide with space charge density distribution in the moment of the formation of VC and the second pattern.

Appearance of reflection from second structure and increasing of the coupling between structures is accompanied by increasing of energy of the second eigenmode. The energy of the second eigenmode may be used for measurement of the coupling. On the Fig.3 energies of the first ( $W_1$ ) and second ( $W_2$ ) eigenmodes are shown. The energy of the first mode increase from the threshold of the instability to the  $\alpha = 2\pi$  and this increasing is almost linear. As for energy of the second mode, their dynamics is not so simple. In the regimes of the strong chaos  $W_2$  is larger and in weak ones it is less.

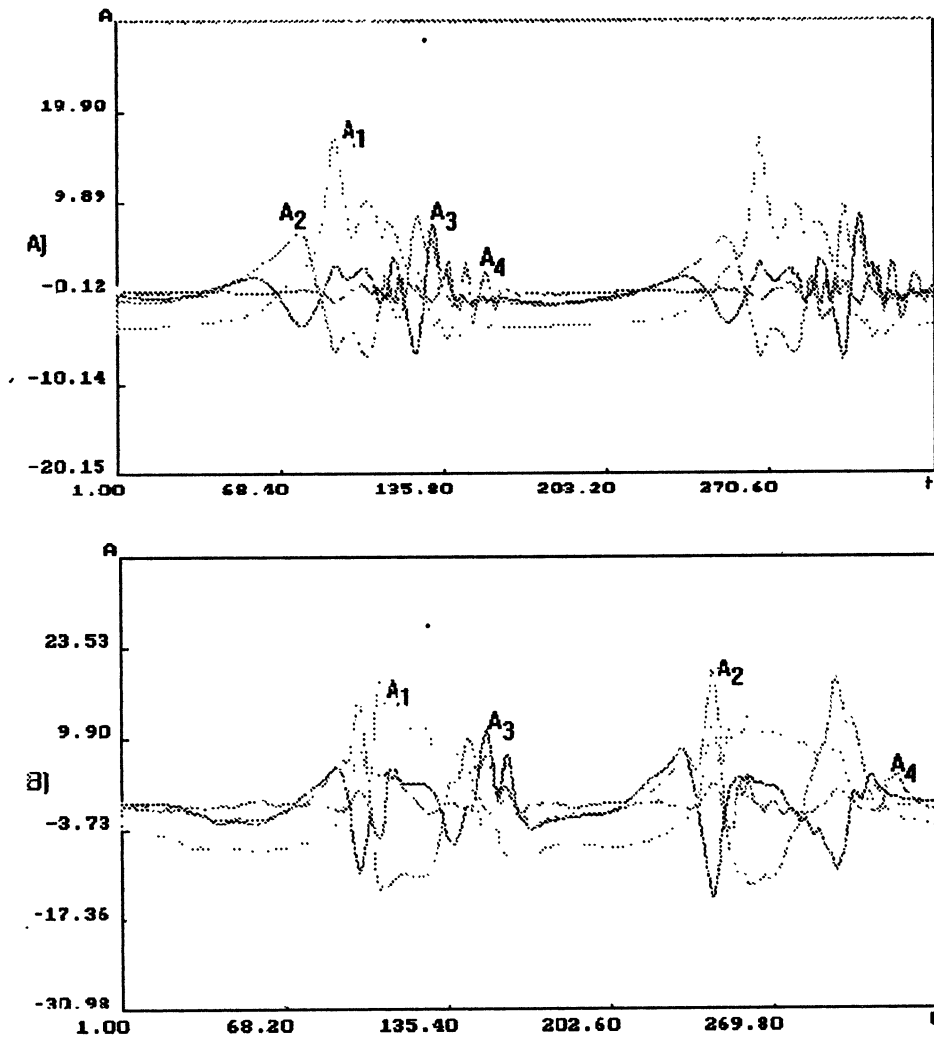


Figure 4: The time history of the mode amplitudes for the regular (a) and chaotic (b) regimes of VC oscillations.

It is necessary to concern the time behaviour of eigenmodes because VC oscillations is strong non-stationary process. Differences between two regimes (chaotic and regular) are presented in the time history of the eigenmodes also. On Fig.4 results of decomposition of the spatio-temporal data to the four highest modes are shown for two periods of oscillations in the chaotic (Fig.4a) and regular (Fig.4b) regimes. There are two easy seen stages of oscillation: the first – sleeping of the modes and second – exciting of the modes. The sleeping stages are almost equal in these cases but the exiting stages are different. In the chaotic case amplitudes of first and second modes are almost equal. The high value

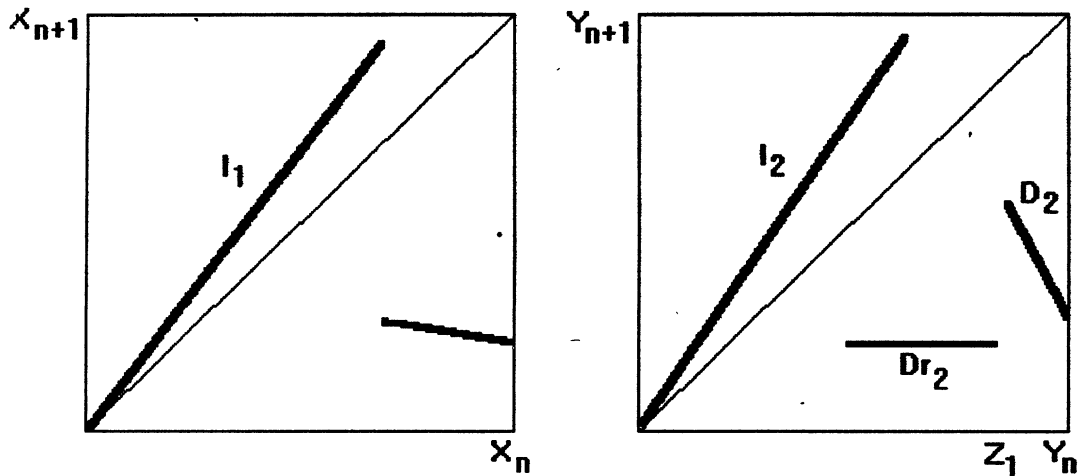


Figure 5: The piece-wise maps reconstructed from time series of charge density in the virtual cathode (X) and in the second pattern (Y).

of the second mode corresponds to the reflection of the beam from second pattern. In the regular case different modes are excited one from another and the amplitude of first mode is larger than any other.

Decomposition of spatio-temporal data in the tube type Pierce diode also leads to the four most energetic modes but energy is distributed for these modes more smoothly. Two highest modes present space charge distribution with one sharp peak as well as in the plane case. The maximums of this distribution coincide with points of the VC and second pattern formations.

The mechanism of the chaotic oscillations is the same as in the planar case. The reflections from second pattern appear in these regimes. In the time history of the mode amplitudes this reflection also is connection with almost equal amplitudes of the first and second modes.

### 3 Model

Understanding of processes of pattern formation in the beam leads to the simplest model of the beam with VC in the form of the two coupled one-dimensional maps (Fig.5).

First map shows the dynamics of VC. Piece  $I_1$  is corresponded to increasing of the instability in the beam and the second one presents the reflection from VC. Second map shows the dynamics of the second pattern. Piece  $I_2$  is corresponded to increasing of the kinematic instability, piece  $Dr_2$  presents the output of the bunch from second pattern region without reflection and piece  $D_2$  presents the reflection from second pattern.

The interaction between structures is included in the model in the following way: the initial conditions for the formation of the second pattern are defined by transmitted beam  $Y_n = F_{trans}(X_n)$  where  $F_{trans}$  is the transmission function and  $X_n$  is the charge density in the VC before the reflection. The initial condition of the new formation of VC is  $X_n + F_{reflect}(Y_n)$ , where  $F_{reflect}$  is the reflection function and  $Y_n$  is the charge density in the second structure after reflection. The bifurcation parameter of the system and the measure of interaction is  $Z_1$ . This is threshold of the reflection from second pattern and the larger the  $Z_1$  the smaller the interaction.

This model describe only nonlinearity of system and interaction between patterns through beam. The result in the form of bifurcation diagram on the plane  $(X_n, Z_1)$  are shown on the Fig.6.

In this model we obtain more (marked A) or less (marked B) homogeneous chaotic regimes and regular regimes (C) in the plane case (Fig.6a). It is evidence that decreasing of structure interaction leads from strong chaos to regular regimes. In the tube Pierce diode linear instability is decreasing. In the model the slope of  $I_1$  decreased. In this case as a result behaviour is more regular and chaotic attractors is more homogeneous (Fig.6b) as well as in the PIC-experiments.

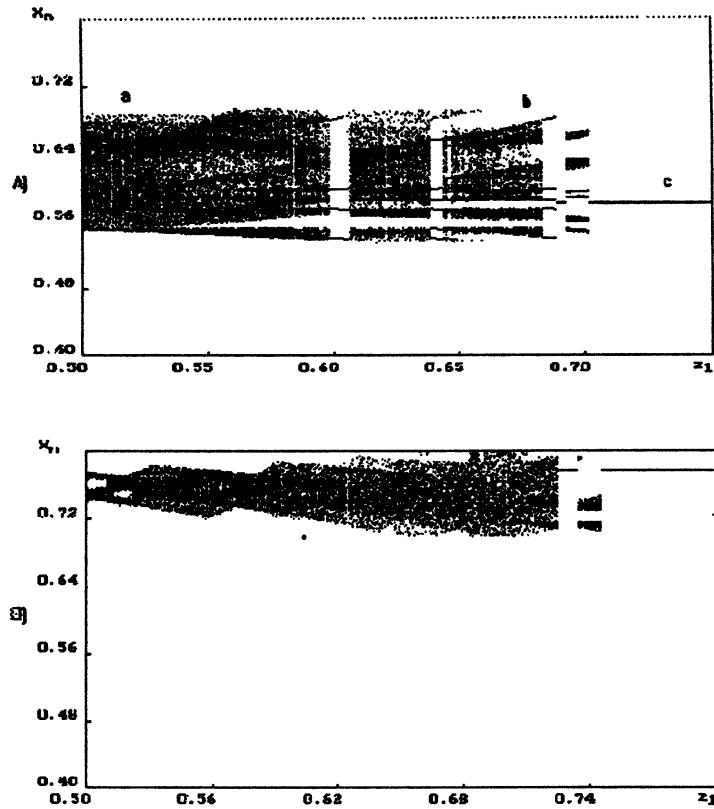


Figure 6: The bifurcation diagram for the model of interacting structures in the plane (a) and tube-type (b) cases.

## 4 Conclusion

In the electron beam with virtual cathode two coherent structures with different nature are organized.

For planar case nonlinear dynamics of electron beam with virtual cathode is determined by the dynamics of the second pattern and by interaction of the patterns. The increasing of the coupling between patterns leads to the strong chaotic behaviour. For tube-type Pierce diode decreasing of the linear instability leads to the increasing of the structure coupling. As a result the chaotic attractors are more homogeneous in the case.

The simple model of two coupled one-dimensional maps for electron structures was considered. Taking into account only nonlinearity of the system and structure interaction we can explain the main features of the beam dynamics.

## References

- [1] J. Pierce, "Limiting currents in electron beam in presence of ions", *J.Appl.Phys.*, 1944, Vol.15, No.10, pp.721-726.
- [2] S.Kuhn, "Linear longitudinal oscillations in collisionless plasma diodes with thin sheaths", *Phys.Fluids*, 1984, Vol.27, No.7, pp.1834-1851.
- [3] B.B.Godfrey, "Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode", *Phys.Fluids*, 1987, Vol.30, No.5, pp.1553-1568.
- [4] L.E.Thode, in *High Power Microwave Sources*, ed by V.L.Granastein and I.Alexeff, Artech House, Boston, 1987.

- [5] V.G.Anfinogentov, "Analysis of nonlinear oscillations of the electron beam with a virtual cathode", Pr. *International Symposium "Physics and Engineering of Millimeter and Submillimeter Waves"*, 1994, Kharkov, Vol.II, pp.289–293.
- [6] P.Grassberger, J.Procaccia, "On the characterization of strange attractors", *Phys.Rev.Lett.*, 1983, Vol.50, pp.346–352.
- [7] J.L.Lumley, in *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, ed. by A.M.Yaglom and V.I.Tatarski, Nauka, Moscow, 1967.

## ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУКТУР В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ

В.Г.Анфиногентов

В работе рассмотрено хаотическое поведение простых электронных устройств с ограниченным электронным потоком при образовании виртуального катода (ВК) и проанализированы возникающие в потоке структуры.

Анализ размерностей аттракторов хаотических колебаний ВК в потоке показал, что при этом возбуждается небольшое число собственных степеней свободы системы. В потоке на каждом периоде колебаний формируются две структуры – ВК и сгусток, образующийся при его распаде.

Хаотическим колебаниям ВК соответствует усиление связи между структурами в результате отражения части потока от второго сгустка.

При помощи разложения Карунена-Лоэва были определены собственные моды колебаний плотности заряда в междусеточном пространстве. Две высшие моды соответствуют двум структурам, формирующимся в потоке, при этом основная энергия колебаний ВК сосредоточена в четырех высших модах и в режиме хаотических колебаний энергия второй моды возрастает. При анализе временной динамики амплитуд отдельных мод обнаружено, что в хаотическом режиме все моды возбуждаются одновременно и их амплитуды близки. В регулярном режиме динамика потока полностью определяется поведением первой моды.

В работе построена простейшая модель взаимодействующих структур, включающая два связанных отображения, каждое из которых описывает динамику изолированной структуры. При исследовании модели получены решения, соответствующие наблюдавшимся в численном эксперименте при использовании метода крупных частиц.

# MULTISTABILITY IN A SYSTEM OF TWO COUPLED NONAUTONOMOUS NONISOCHRONOUS OSCILLATORS

B. P. Bezruchko, M. D. Prokhorov, E. P. Seleznev

Saratov Branch of the Institute of RadioEngineering and Electronics  
of Russian Academy of Sciences  
38 Zelyonaya str., Saratov 410019, RUSSIA  
E-mail: bezr@ire.saratov.su

## Abstract

For a system of two coupled nonautonomous oscillators a model is proposed. The model is constructed from the experimental time series and has a form of coupled 1-D multiparameter multimodal maps. The arrangement of the system parameter space is numerically investigated. Universal configurations of bifurcation lines are revealed. The phenomenon of multistability in the coupled system is examined in detail. The results of simulation are compared with these of physical experiment for a real oscillating system.

## Introduction

A periodically driven dissipative oscillator demonstrates a set of various periodic motions, bifurcations and chaos [1]. Chains and lattices formed from oscillators with the help of coupling elements demonstrate more wide set of nonlinear phenomena [2–3]. For orientation in them we need planes of dynamical regimes in a parameter space. In present work we examine bifurcation set typical configurations in the parameter space for a system of two symmetrically coupled oscillators. The oscillators are driven in-phase and have the “soft-spring” behavior [4].

To avoid difficulties of differential equations numerical investigation we use a simple empiric model of nonisochronous oscillations. The model has a form of coupled 1-D multiparameter multimodal maps. Universal configurations of bifurcation sets are depicted and numerically investigated in the parameter space of excitation, dissipation and coupling. The main attention is paid to the phenomenon of multistability, which means the coexistence of two or more attractors with their basins of attraction in the parameter space at fixed parameter values. The universality of regularities discovered under discrete model investigation and their existence in objects with continuous time is demonstrated experimentally for a real oscillating system, that is a dissipatively coupled LR-diode circuits.

## 1 Model

Nonlinear oscillator nonisochronism consists in conventional period dependence on deviation from a stable state. For instance, in oscillators with “soft-spring” behavior the oscillation period decreases tending to  $T_0$  while oscillations are damped out [4], Fig. 1a.

Let the oscillator to be driven by periodic pulse force with a period  $T$  in such a way that  $x(t)$  gets an addition  $A$  and oscillation phases are equal after each kick. As a result the driven oscillations will have a form of a sequence of regions with varying conventional period [5], Fig. 1b. We simplify this situation considering the period dependence only on initial amplitude in these regions:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0(1 + \beta x_0)} t\right), \quad (1)$$

where  $x_0$  – is an initial deviation,  $T_0$  – is oscillation period as  $x_0 \rightarrow 0$ ,  $\delta$  – is a damping, and  $\beta$  – is a coefficient of nonlinearity.

The initial amplitudes just after the pulses can be related by a 1-D multimodal map:

$$x_{n+1} = x_n e^{-d/N} \cos\left(\frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n)}\right) + A, \quad (2)$$

where  $A$  – is a driving amplitude,  $d = \delta T_0$  – is a linear damping,  $N = T_0/T$  – is a normalized driving frequency. This map has the form, presented in Fig. 2. As one can see from the figure there can

exist several solutions under fixed parameter values. Depending on initial conditions we can have one or another attractor.

The map (2) models well the existence of oscillator various subharmonic resonances and subharmonic regimes based on these resonances. At small driving amplitudes these regimes have the period of the driving  $1T$  and differ by relationship between  $T$  and  $T_0$ , that is the number of oscillations during the driving period is different. Let denote the regimes based on  $1/k$ ,  $k = 2, 3, \dots$  subharmonic resonances as  $\Gamma_{1/k}$ . The regime based on the main resonance we'll define as  $\Gamma_1$ .

With driving amplitude increasing these basic cycles of period-1 undergo period-doubling bifurcations. Besides, regions of bistability and hysteresis bounded by lines of saddle-node bifurcations appear in the parameter space, Fig. 3a. On the Fig. 3b the inner structure of the regions from Fig. 3a is shown schematically. Such configuration known as "crossroad area" [6] is typical in the parameter space.

For modeling the system of two driven in-phase oscillators we bind together two maps of the form (2) and receive the system:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + k[f(y_n) - f(x_n)] \\ y_{n+1} &= f(y_n) + k[f(x_n) - f(y_n)], \end{aligned} \quad (3)$$

where the functions have the following form:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n e^{-d/N} \cos\left(\frac{2\pi}{N(1+\beta x_n)}\right) + A \\ f(y_n) &= y_n e^{-d/N} \cos\left(\frac{2\pi}{N(1+\beta y_n)}\right) + A, \end{aligned} \quad (4)$$

and  $k$  - is a coupling coefficient. This type of coupling is widely used for CML-models construction and is classified as dissipative [7].

## 2 Results

On the Fig. 4a the section of the parameter space ( $N, d, A$ ) is cited. The region of hysteresis is narrow for this case and bistability only for period-1 cycles takes place. On the plane coupling-driving amplitude, Fig. 6a, the arrangement of various regimes is presented. The regimes subscripts indicate the type of resonance in subsystems  $X$  and  $Y$ . The regimes with equal subscripts, divided into in-phase and out-of-phase, have the known principle of arrangement, the same as for the system of coupled logistic maps.

In the region corresponding to the hysteresis interval we have a new interesting situation: for some initial conditions we have out-of-phase regimes of period-1, that is in both subsystems  $X$  and  $Y$  exist period-1 cycles, but their amplitude is different. The number of regimes is indicated in the circles. For better perception on the Fig. 7 different regimes are presented schematically on separate sheets. So one can see that four period-1 regimes can coexist. With coupling increasing the out-of-phase regimes become unstable and only in-phase regimes remain.

On the Fig. 5 there are basins of attractor of the considered period-1 regimes. At large coupling we have only two in-phase regimes.

In case of more wide hysteresis, varying initial conditions we can obtain regimes with different period. For example, for the case cited in Fig. 4b, at fixed parameter values we can obtain period-1 or period-2 cycle. Such situation is more complicated. The number of multistable states is larger than in the previous case, Fig. 6b. We can also observe now the period-doubling bifurcations of regimes with different subscripts. On the Fig. 8 another two projections for the considered case are presented. At  $k$  equal to 0 regimes with different subscripts occupy the whole hysteresis interval. With coupling increasing their areas become smaller and only in-phase regimes remain at last.

## 3 Comparison with experiment

To test our model the physical experiment was conducted for a system of nonlinear electrical pendulums, that is a dissipatively coupled LR-diode circuits. The scheme of the experimental set is represented on the Fig. 9. Two resonators consist of inductors  $L$  and semiconductor capacitancies which are varactor diodes.  $R_c$  - is a coupling element. The oscillators are driven in-phase by periodic pulses from the

common source. The temporal current dependencies are most close to the dependencies considered in section 1 (Fig. 1) when the oscillators are excited by current pulses having the forward polarity for the diodes.

On the Fig. 10 the experimental plane is shown. The comparison of the experimental results with these of simulation (Fig. 6a) demonstrate their good coincidence. In the real experiment we cannot achieve the absolute identity of the elements. So, special numerical investigations accounting the nonidentity of the elements were conducted. These results demonstrate that the identity of the oscillating elements in the experiment was sufficiently good. The coefficient of identity was close to unity.

## Conclusion

The considered configurations are sufficiently universal. We obtained good qualitative coincidence of physical experimental and discrete modeling results. The obtained results can be used as a priori for experimental analysis of coupled oscillating system or for more precise numerical investigation of coupled oscillators differential equations. In particular, the obtained results describe the dynamics of in-phase (homogenous) and out-of-phase modes for closed in ring chain of oscillating elements of the considered class. In distinction from the known chain for which coupled logistic maps model transition to chaos via a sequence of period-doubling bifurcations, our model also demonstrates the existence of various resonance cycles, hysteresis and multistability. The advantage of our approach is also the presense of the procedure for experimental estimation of the model parameters.

## Acknowledgement

This work was supported by the Russian Foundation of Fundamental Research, Grant No 93-02-16171 and by a fellowship of INTAS Grant 93-2492 and was carried out within the research program of International Center for Fundamental Physics in Moscow.

## References

- [1] P. S. Linsay, "Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator", *Phys. Rev. Lett.*, 1981, Vol.47, No.19, pp.1349-1352.
- [2] R. Buskirk, C. Jeffries, "Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators", *Phys. Rev. A*, 1985, Vol.31, No.5, pp.3332-3357.
- [3] J. P. Crutchfield, K. Kaneko, *Phenomenology of spatio-temporal chaos. Direction in chaos.*, World Scientific Publishing Co., Singapore Hao-Bai-lin, 1987.
- [4] C. Scheffczyk, U. Parlitz, T. Kurz, W. Knop, W. Lauterborn, "Comparison of bifurcation structures of driven nonlinear oscillators", *Phys. Rev. A*, 1991, Vol.43, No.12, pp.6495-6502.
- [5] B. P. Bezruchko, M. D. Prokhorov, E. P. Seleznev, "Model of a dissipative nonlinear oscillator in the form of 1-D map with three parameters", *Pis'ma v JTF*, 1994, Vol.20, No.12, pp.78-82.
- [6] J. Carcasses, C. Mira, M. Bosch, C. Simo, J. C. Tatjer, "Crossroad area - spring area transition (I). Parameter plane representation", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1991, Vol.1, No.1, pp.183-196.
- [7] S. P. Kuznetsov, "Universality and similarity in the behavior of coupled Feigenbaum systems", *Izvestiya VUZov. Radyophysic*, 1985, Vol.28, No.8, pp.991-1007.



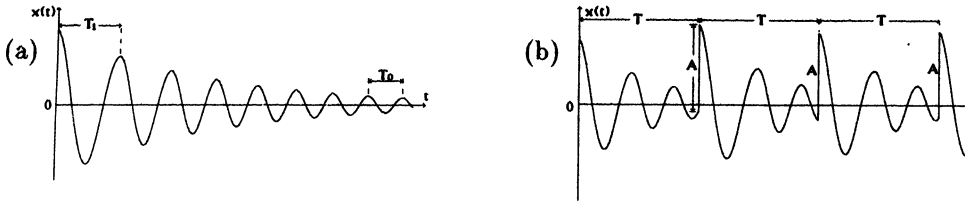


Figure 1. Oscillation temporal dependencies of (a) autonomous oscillator with “soft-spring” behavior, (b) oscillator driven by pulse force.

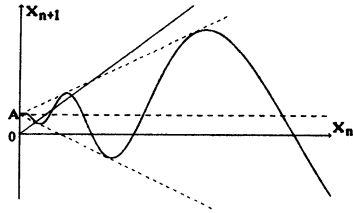


Figure 2. The plot of the map (2).



Figure 3. (a) the sketch of the parameter space  $(N, d, A)$ ; (b) the inner structure of regions on Fig. (a).



Figure 4. Sections  $(N, A)$  of the parameter space (a)  $d = 0.4$ ; (b)  $d = 0.2$ .

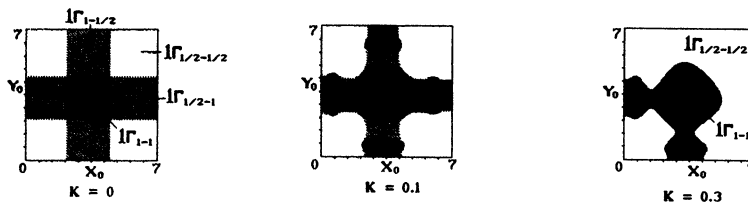


Figure 5. Basins of attraction of period-1 regimes.  $A = 2, d = 0.4, N = 0.4$ .

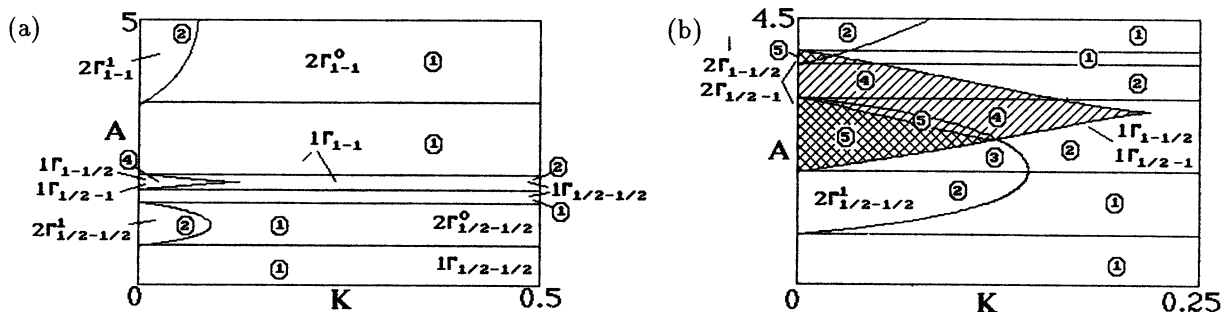


Figure 6. Arrangement of dynamical regimes on  $(k, A)$  planes (a)  $d = 0.4, N = 0.4$ ; (b)  $d = 0.2, N = 0.47$ . In the circles the number of regimes is indicated.

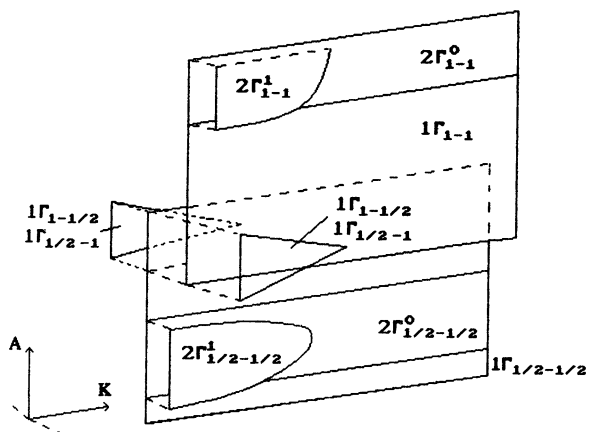


Figure 7. Schematic representation of Fig. 6a in 3-D space.

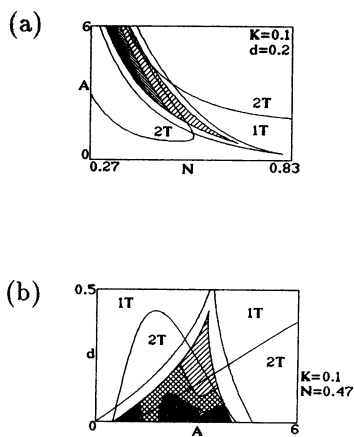


Figure 8.  $(N, A)$  and  $(A, d)$  plane sections of the parameter space  $(N, d, A)$ . Dashed are the regimes with different subscripts.

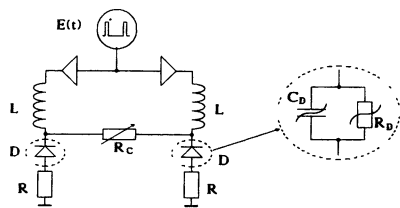


Figure 9. The scheme of the experimental set and the equivalent diode scheme.

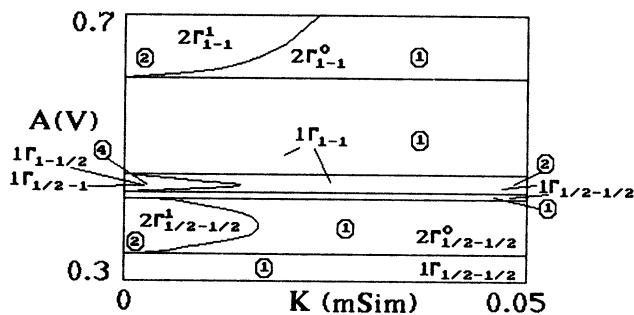


Figure 10. The experimental  $(k, A)$  plane.

# МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ НЕАВТНОМНЫХ НЕИЗОХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Б.П. Безручко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев

Диссипативный осциллятор, периодически возбуждаемый внешней силой, демонстрирует множество различных периодических движений, бифуркаций, разновидностей хаоса [1]. Еще более широк спектр нелинейных явлений в цепочках и решетках, образованных из осцилляторов с помощью элементов связи [2, 3]. Для того, чтобы в них ориентироваться необходимы карты режимов в пространстве параметров. В настоящей работе мы выделяем типичные конфигурации бифуркационных множеств в пространстве параметров системы двух симметрично связанных и синфазно возбуждаемых осцилляторов с нелинейностью, характерной для асимметричной "мягкой пружины" [4].

Чтобы избежать трудностей численного исследования системы нелинейных дифференциальных уравнений, мы используем простую эмпирическую модель неизохронных колебаний в виде связанных одномерных многопараметрических мультимодальных отображений (3). При построении отображений предполагается периодическое возбуждение осцилляторов импульсами, выделяются этапы вынужденного и собственного движений, а неизохронность моделируется зависимостью условного периода затухающих собственных колебаний только от начальной амплитуды [5].

Типичность закономерностей, обнаруженных при исследовании дискретной модели, и их наличие в объектах с непрерывным временем демонстрируется экспериментально на реальной осцилляторной системе – нелинейных электрических маятниках (резистивно связанных колебательных контурах с варакторными диодами).

Основное внимание в работе уделяется явлению мультистабильности. Мультистабильность означает сосуществование в фазовом пространстве при фиксированном значении параметров двух (бистабильность) или более аттракторов со своими бассейнами притяжения. Экспериментально и численно показано, что даже простейшие нелинейные колебания периода 1 (периода воздействия) реализуются в связанной системе несколькими способами. Число возможных мультистабильных колебательных режимов растет с каждой бифуркацией удвоения периода. Проведена классификация видов колебаний с учетом существования в отображениях и в экспериментальной системе при периодичности воздействия дискретной симметрии по отношению к временному сдвигу (на величину, кратную шагу итерации или периоду воздействия). Построены типовые карты режимов в пространстве параметров возбуждения, диссипации и связи при частотах внешнего воздействия ниже линейной резонансной (рис. 6, 8). Выделены универсальные элементы конфигурации бифуркационных множеств. Исследован принцип дробления фазового пространства связанной системы на бассейны притяжения сосуществующих аттракторов.

Предлагаемые результаты могут быть использованы как априорные данные при экспериментальном анализе связанных колебательных систем или при более точных численных исследованиях дифференциальных уравнений связанных осцилляторов. В частности, полученные результаты отражают динамику синфазной (однородной) и противофазной мод замкнутой в кольцо цепочки из колебательных элементов рассматриваемого класса. В отличие от известной цепочки, в которой взаимодействуют логистические отображения [3], моделирующие феномен перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, построенная нами модель отражает еще и существование в реальных колебательных элементах множества резонансных циклов, гистерезиса и мультистабильности. Достоинством нашего подхода является также наличие процедуры экспериментального определения параметров модели.

# ABOUT SOME PECULIARITIES OF AUTO-OSCILLATIONS ON A GROUND SURFACE

V. V. Chernov, V. V. Gushchin

Radiophysical Research Institute  
25/14 Bolshaya Pecherskaya str., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA  
E-mail: chernov@nirfi.nnov.su

## Abstract

The results are given of an experimental study of the action of acoustical radiation on the ground at the small height of loudspeaker. Apart nonlinear effects, observed in the experiment, the active action of acoustical radiation on the ground it was discovered. The nonlinearity of the ground influences the amplitude modulation and spectra of auto-oscillations in system with positive feedback.

## Introduction

It is known that the auto-oscillations in air are excited in system: microphone-amplifier-loudspeaker-air. This auto-oscillations are continuous. The air has not nonlinearity and dispersion in wide range of the pressures. We know that the ground is porous medium with big nonlinearity. This property of the ground was studied by a number of investigators [1-3]. How nonlinearity of the ground influences on the auto-oscillations on the ground surface? In particular it is very informative to investigate the phase relation between a seismic signal in the ground and signal of source.

### 1. A Phase Nonstability

We are studying now experimentally some peculiarities of this nonlinearity of the ground surface. A scheme of experiment is shown in a Fig. 1. The signal from generator is radiating by vibrator which we set on the ground surface (or loudspeaker which is situated on the ground surface overhang). The seismic signals are received by accelerometers setting in ground on the different depths. A phase difference between radiating signal and propagating signal is measured by phasometer. We observed that the phase difference was not constant if the one harmonic was radiated. It is changing in a time (Fig. 2). The acoustics waves of high amplitude change an elastic properties of the ground. However, if the radiation is absent, the elastic properties are returning to an initial value. This phenomenon was verified by the next experiment. If we will increase or decrease a radiated power, we will observe phase changes. The Fig. 3 shows how the phase difference behaviour when we increase the radiated power. Initially radiated power was small (sound pressure on the ground surface was 120 dB), then radiated power was larger (sound pressure was 128 dB). The phase difference decreases but it returns back with decreasing of the sound pressure. This result is observed for 3 polarization's of seismic signal. However, this phenomenon is observed in range about 5 sm. near the ground surface. The phase difference remains constant between seismic signals from different points in the ground.

### 2. The Feedback on the Ground Surface

On a base of this phenomenon we could observe one interest effect. Fig.4 shows a system with positive feedback. In this chain a vicinity ground is included. An emitter of oscillations may be either vibrator or loudspeaker. An amplifier coefficient in this system is about 60 dB. According to Nyquist criterion [4], this system is unstable if the phase different due to a chain is  $2\pi n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . The auto-oscillations are generating in such system are defined by an amplitude-frequency characteristic of the vibrator on the ground surface. This one have a resonance and a frequency oscillation is defined by formula [5]:

$$\omega = \frac{E\sqrt{S}}{\kappa M}, \quad (1)$$

where E - is for Young module, is defined by elastic properties of the ground; S - is for area of a contact of vibrator and ground; M - is for a mass of vibrator;  $\kappa$  - is for coefficient of a form. In the vicinity of resonance frequency a phase characteristic has a jump one  $\pi$ . Thus, in the vicinity of resonance frequency there is a such frequency, which compensates the phase difference in an other part

of system. After a beginning of generation of auto-oscillation with frequency  $\omega_1$  an influence of nonlinear effect in the ground is beginning. The elastic properties of ground surface are changing, and resonance frequency is changing, phase is changing, and as a result auto-oscillation is fading. Some time after elastic properties returning back and auto-oscillations excites again. Thus, in this system the auto-oscillations with amplitude modulation are excited. The Fig. 5a shows an oscillogramm of this process. A period of modulation is about 2 s.

If we place two accelerometer on some another distance, it is possible to generate of auto-oscillation with frequency  $\omega_2$  defined by delay along a way of propagation. We observed a sequence of auto-oscillations with two frequencies:  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . But initially the amplitude of a second frequency  $\omega_2$  is smaller. Under the action of radiation the elastic properties of the ground surface are changed and the amplitude of a first frequency is decreasing. But the amplitude of the second frequency is increasing. Next, the elastic properties of the ground surface are changing more and phase changing more, and the auto-oscillations with second frequency are fading too. The radiation is absent. Elastic properties of the ground surface are returning to the initial value and some time after all the auto-oscillation repeats again (Fig. 5b).

Thus, the nonlinearity of the ground influences the amplitude modulation and spectra of auto-oscillations.

### References

1. А.С. Алешин, В.В. Гушин, М.М. Креков, А.В. Николаев, А.В. Соколов, Г.М. Шалашов, "Экспериментальные исследования нелинейных взаимодействий поверхностных сейсмических волн", ДАН СССР, 1981, т.260, N 3, с.574-575.
2. А.В. Николаев, "Проблемы нелинейной сейсмологии", 1987, М., Наука.
3. А.М. Sutin "The methods of nonlinear acoustic diagnostics", Dynamic and stochastic wave phenomena, *Proceedings of the International Scientific School-Seminar in the University of Nizhny Novgorod 1-14 June 1992* 1992, Nizhny Novgorod, pp.68-72.
4. Н. Nyquist, Bell System Techn. J., 1932, 11, p. 126-147.
5. И.П. Пасечник "Исследование резонансных явлений в системе почва-сейсмограф", Изв. АН СССР, сер. геофизическая, 1952, N 5.

## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТА

В. В. Чернов, В. В. Гушин

В статье приведены результаты экспериментального исследования влияния нелинейности грунта на характер автоколебаний, возбуждающихся в системе с положительной обратной связью, в замкнутой цепи которой включена область поверхности грунта (рис.4). Наличие нелинейности приводит к генерации амплитудно-модулированных автоколебаний, а в некоторых случаях наблюдается также изменение их спектрального состава (рис.5). Обнаруженные эффекты объясняются активным воздействием акустического излучения на поверхность грунта, обратимо изменяющим его упругие свойства.

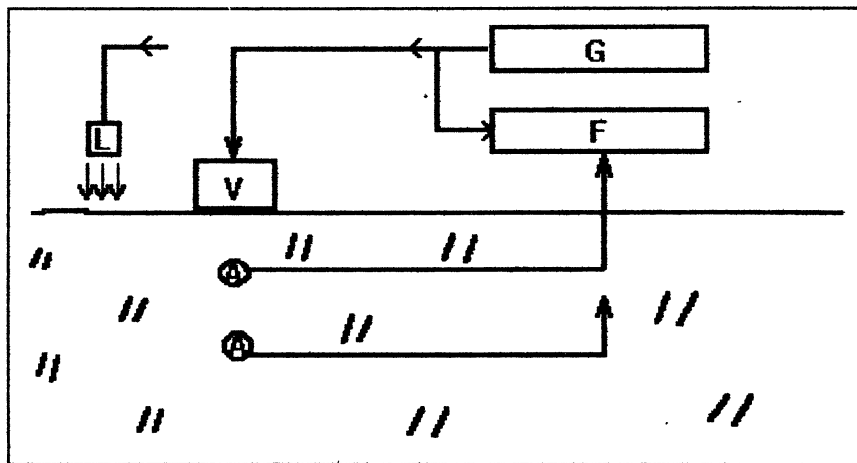


Fig.1. The scheme of experiment: G - generator, V - vibrator, L - loudspeaker, A - accelerometers, F - phasometer.

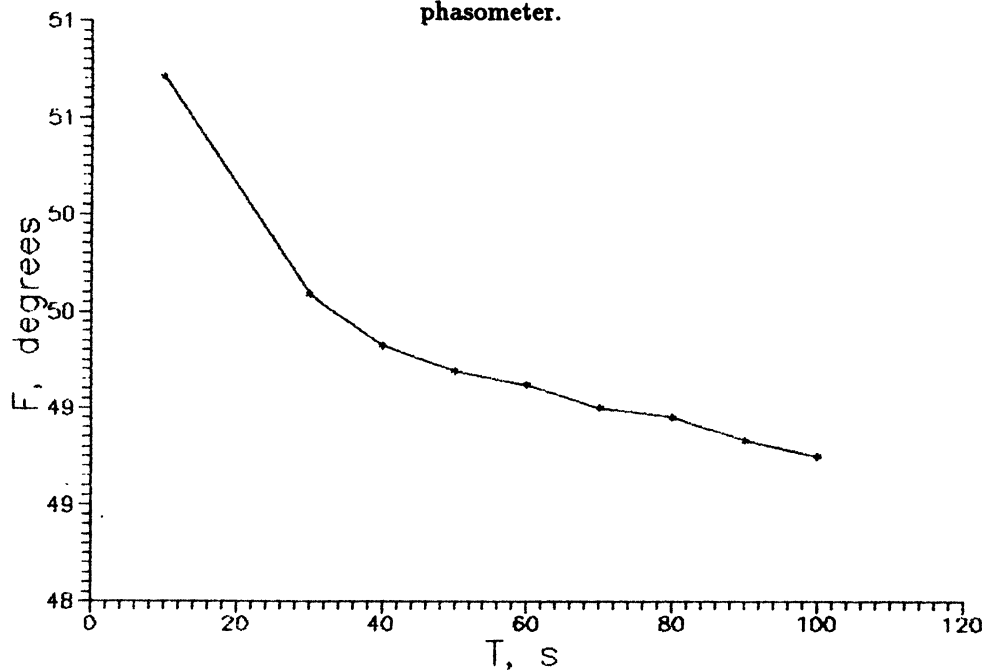


Fig.2. The changing of the phase with time.

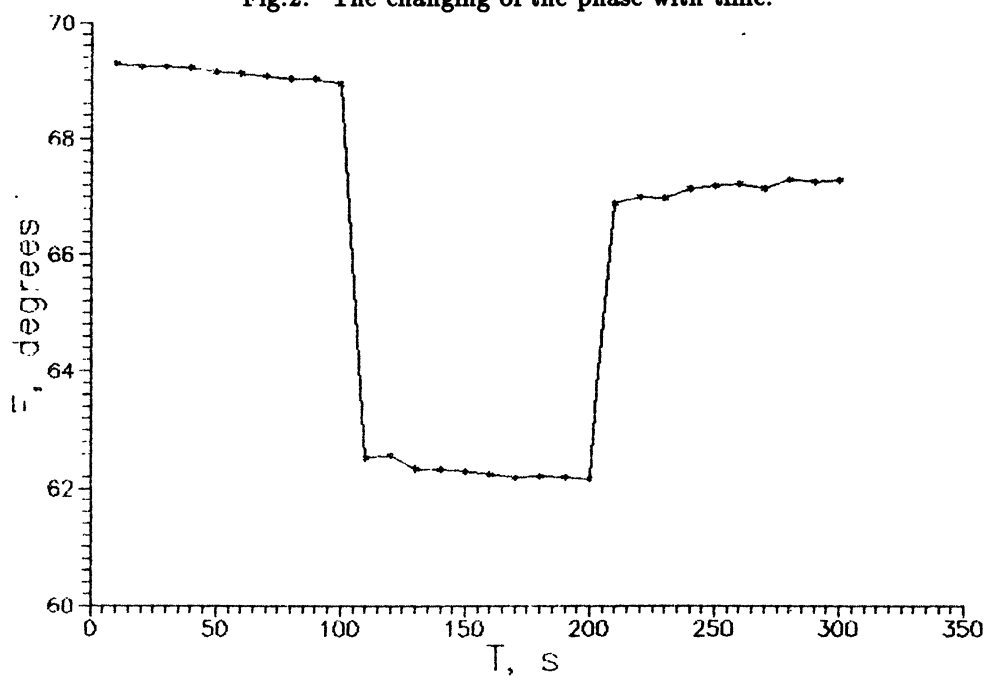


Fig.3. The changing of the phase with sound pressure.

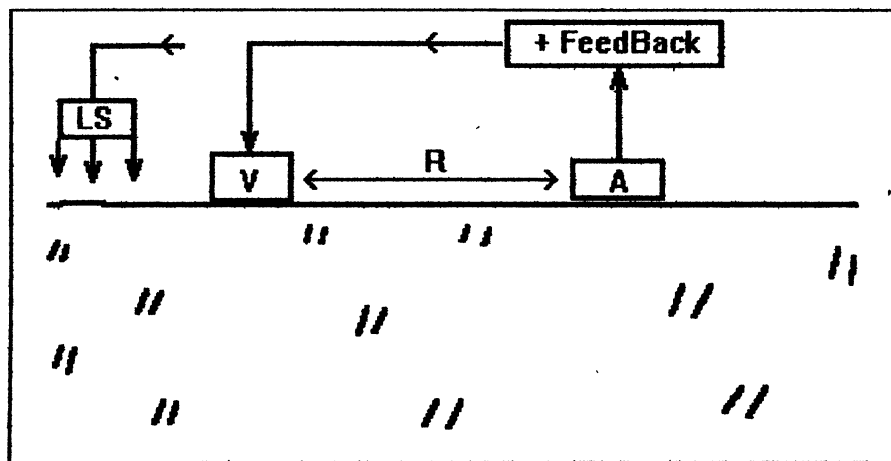


Fig.4 The scheme of autooscillation system: V - vibrator (or LS - loudspeaker), A - accelerometer, + FeedBack - amplifier.

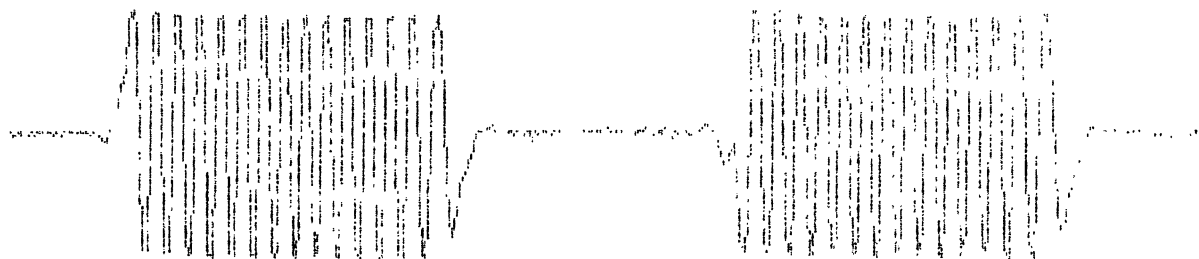


Fig.5a. The oscillogram of an autooscillation process with the one frequency.

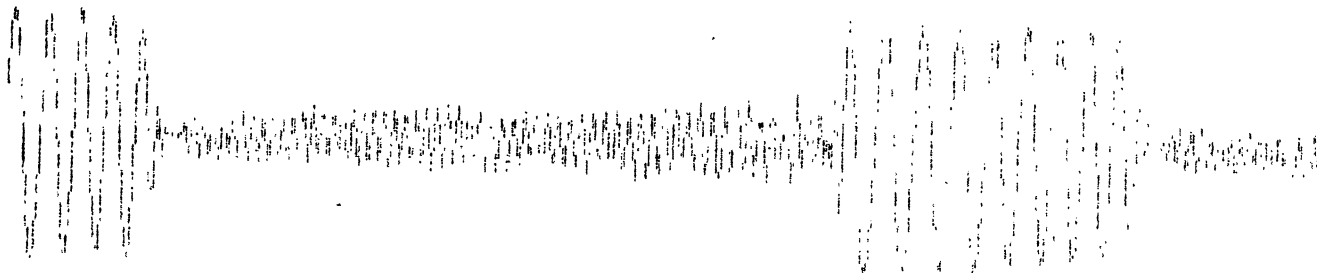


Fig.5b. The oscillogram of an autooscillation process with the two frequencies.

# Nonlinear dynamics of short wave trains in dispersive medium

Evgeny M. Gromov and Vladimir I. Talanov

Institute for Applied Physics, Russian Academy of Science, 46  
Ul'janov Str., 603600 Nizhny Novgorod, Russia , E-mail:  
gromov@hydro.nnov.su

The evolution of 1 –  $D$  intense short wave trains in dispersive medium in the higher approximations of the nonlinear dispersion theory is considered. At first the general properties of the higher approximation eqs. on examples of stationary localized nonlinear waves (solitons) and nonstationary wave packet dynamics are analyzed. The new phase-modulated soliton solutions this eqs. are obtained. For nonstationary wave packets the new effects absent in the parabolic approximation, in particular, dependence of the packet energy center velocity both on its intensity (nonlinear dispersion) and its length (linear aberration) are discussed. The examples of short intense both gravity waves on deep water and electromagnetic as well as Langmuir waves in isotropic plasma are analyzed. For gravity wave trains the experimental and simulation results of its dynamics in the higher approximations are given. The good description of the experimentally observed effects of the form and velocity evolution is obtained already in the third approximation. For electromagnetic wave in isotropic plasma the plane wave modulation instability is considered. The disappear of modulation instability for the amplitude greater critical value is shown.

## 1. Introduction.

Usually the high-frequency (HF) wave packets propagation

$$\varphi = \psi(x, t) \exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$$

in nonlinear dispersive media is analyzing in the quasi-optic approximation of nonlinear dispersion theory [1]. This approximation corresponds to the "parabolic" representation of the dispersion law  $\omega = \omega(k, |\psi|^2)$  near the point  $\omega_0 = \omega(k_0, 0)$  and adding the local nonlinear term of the first order intensity. The envelope  $\psi(x, t)$  in this approximation is described by the well-known



nonlinear Schrödinger eq. (NSE)

$$2i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega''_{kk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\alpha |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1.1)$$

where  $\xi = x - V_g^L t$ ,  $V_g^L = (\partial \omega / \partial k) |_{k=k_0, |\psi|=0}$  is the linear wave group velocity,  $\omega''_{kk} = \partial^2 \omega / \partial k^2 |_{k=k_0, |\psi|=0}$ ,  $\alpha = (\partial \omega / \partial |\psi|^2) |_{k=k_0, |\psi|=0}$  is the nonlinear parameter. Eq. (1.1) has been well analyzed (see, for example, [2]). There is the possibility of the reconstruction eq. (1.1) from expansion of the nonlinear dispersion law  $\omega = \omega(k, |\psi|^2)$  into the series in the vicinity of the point  $\omega_0 = \omega(k_0, 0)$  up to the second order terms of parameters  $\Delta k = k - k_0$  and  $|\psi|$

$$\omega - \omega_0 = \omega'_k (k - k_0) + \frac{1}{2} \omega''_{kk} (k - k_0)^2 + \alpha |\psi|^2, \quad (1.2)$$

without applying the initial field eqs. by the operational transforms

$$\omega - \omega_0 \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k - k_0 \longleftrightarrow i \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

This reconstruction possibility of the NSE using dispersion law makes the second approximation vary attractive in different problems.

The second approximation of the dispersion law describes correctly the intensive packets evolution only if both time as well as space packet spectrum widths ( $\Delta \omega$  and  $\Delta k$ ) and nonlinearity are small enough:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} \sim \frac{\Delta k}{k} \sim |\psi| \sim \nu \ll 1.$$

In this case the well-known results are following from NSE. Let, for example,  $\alpha \omega''_{kk} < 0$ . Then these results are modulation instability, self-compression, soliton solution and others. In particular, for symmetrical initial conditions  $\psi(\xi, 0) = \psi(-\xi, 0)$  only symmetrical deformation of the envelope  $\psi(\xi, t)$ , i.e.  $\psi(\xi, t) = \psi(-\xi, t)$ , are possible.

However, when the packet length  $\Delta$  is small (for example,  $\Delta \sim (2 \div 3) \lambda$ ) and the intensity is high, the second approximation of the nonlinear theory become invalid.

Let us consider, for example, the gravity waves on deep water. The nonlinear dispersion law of these waves is the Stokes waves law

$$\omega = \sqrt{g |k| (1 + k^2 |a|^2)}; \quad k |a| \leq 0.2,$$

where  $|a|$  is the wave amplitude and  $k |a|$  is the wave steepness. NSE from this law is the next

$$2i \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\omega_0}{4k_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \omega_0 k_0^2 |a|^2 a = 0.$$

Let us take  $k|a| \sim 0.3$ , so that  $k|a|^2 \sim 0.1$ . This parameter is sufficiently small and we could hope to find the usual consequences of NSE. The results of experiment are shown in the Fig. 2. You can see the large asymmetric distortions of the pulse shape with distance. This distortions cannot be described by the NSE. In the case of the short intensive packets the envelope eq. reconstruction from nonlinear dispersion law is not possible because both nonlocal and non-stationary nonlinearity terms arise in it. Strictly speaking to find these terms is possible only from the initial eqs. for field. But if we restrict ourself only by the third approximation terms to the parameter  $\nu \sim |\psi/(\partial\psi/\partial\xi)| \sim |\psi|$  the general envelope eq. can be written in form

$$2i \frac{\partial\psi}{\partial t} + q \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \alpha |\psi|^2 \psi = -2i \left( \beta |\psi|^2 \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \mu\psi \frac{\partial|\psi|^2}{\partial\xi} \right) - i\gamma \frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} - \psi U(|\psi|^2). \quad (1.3)$$

In the left part of (1.3) there are the second order terms, on the right part - the third order ones  $\nu = |\psi/(\partial\psi/\partial\xi)| \sim |\psi|$ . To the last time the overstepping the limits of the second approximation of the nonlinear dispersion theory was only limited by the nonlinear dispersion terms account causing the packet envelope fronts steeping. For the first time the envelope steeping possibility up to caused by nonlinear dispersion was considered by Ostrovsky (1965) [9]. In optic the given effect was studied both experimentally [10] and theoretically [11] in the frames of the nonlinear geometrical optic method and was called "self-steeping". The envelope eq. for the short strong gravity wave trains on deep water in the third approximation of the nonlinear dispersion theory was studied by Dysthe (1979) [12]. In particular, the decrease down in both increment value and the instability region in comparison with the second approximation of the dispersion theory was shown [12]. For instance let us represent the gravity waves on deep water eq. in the third approximation of the nonlinear dispersion theory [12]

$$2i \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{5}{2} V_g^L k_0^2 |a|^2 \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) + \frac{\omega_0}{4k_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \omega_0 k_0^2 |a|^2 a - i \frac{\omega_0}{8k_0^3} \frac{\partial^3 a}{\partial \xi^3} + \omega_0 k_0 a \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(\xi', t)|^2 \frac{[(\xi - \xi')^2 - s^2]}{[(\xi - \xi')^2 + s^2]^2} d\xi' = 0. \quad (1.4)$$

Here  $a$  is water surface deviation from the equilibrium at the packet with center wave number  $k_0$  and frequency  $\omega_0$  satisfying the linear dispersion relationship  $\omega_0^2 = gk_0$ ,  $V_g^L = \omega_0/(2k_0)$  is the packet group velocity. Eqs. (1.3) and (1.4) coincide under the condition

$$a \equiv \psi, \quad q = \frac{\omega_0}{4k_0^2}, \quad \alpha = \omega_0 k_0^2, \quad \beta = \frac{5}{2} V_g^L k_0^2 |a|^2, \quad \gamma = -\frac{\omega_0}{8k_0^3}.$$

The integral in the right part of (1.4) describes flow induced by gravity wave train near the water surface.

In contradiction the parabolic approximation the eq. coefficients in the higher approximations depend essentially on the independent variable types. Coordinates  $t$  and  $\xi = x - V_g^L t$  are convenient for the initial problem. In this case the train evolution created in the initial time moment  $\psi(t=0, x) = \psi_0(x)$  is investigated. In other case for the boundary problem the coordinates  $x$  and  $\tau = -\xi/V_g^L$  are more suitable. Change from the coordinates  $t, \xi$  to the  $x, \tau$  are made by relationships  $x = V_g^L t + \xi, \tau = -\xi/V_g^L$ . Limiting by the third approximation terms we will have from (1.3) the next eq. of the same as (1.3) type

$$2iV_g^L \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{q}{V_g^L} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \alpha |\psi|^2 \psi = -2i \left( \beta_1 |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \mu_1 \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \tau} \right) - i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau^3} - \psi U(|\psi|^2), \quad (1.5)$$

but with the other coefficients

$$\beta_1 = \frac{1}{V_g^L} \left( \beta + \frac{q\alpha}{V_g^L} \right), \quad \mu_1 = -\frac{1}{V_g^L} \left( \mu + \frac{q\alpha}{V_g^L} \right), \quad \gamma_1 = \frac{1}{V_g^L} \left( \gamma + \frac{q^2}{V_g^L} \right).$$

For instance for the gravity waves we have  $\gamma_1 = 0$  and the eq. (1.5) has the form

$$2iV_g^L \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + \omega_0 k_0^2 |a|^2 a = -2i \left( \frac{7}{2} k_0^2 |a|^2 \frac{\partial a}{\partial \tau} + \mu_1 a \frac{\partial |a|^2}{\partial \tau} \right) - \omega_0 k_0 V_g^L a \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |a'(x, \tau')|^2 \frac{[(\tau - \tau')^2 - s^2]}{[(\tau - \tau')^2 + s^2]^2} d\tau' \quad (1.6)$$

without the third order linear dispersion term. The fact  $\gamma_1 = 0$  is explained by them that the linear dispersion relationship form  $k_0 = \omega_0^2/g$  corresponding to eq. (1.6) has the strict second degree polynomial form. Let us note that according (1.6) of dispersion length (analogy of the diffraction length) of pulse with halfduration  $\tau_0$  is equal to

$$L_{disp} = \frac{g\tau_0^2}{2},$$

where  $g$  is the gravity acceleration.

Let us return now to the eq. (1.3) and analyze the general properties of the higher approximations eqs.

## 2. General properties of the higher approximations eqs.

### 2.1. Soliton solutions.

The higher order terms modify the well-known soliton solution and give the new ones. To demonstrate this let us consider at first the modified NSE including only nonlinear dispersion terms:

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2.7)$$

Eq. (2.7) is the particular case of the more general nonlinear eq.

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} \right) + q \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + i\gamma \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} + \alpha |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2.8)$$

For  $\beta = \gamma = \mu = 0$  eq. (2.8) is the well-known NSE [4, 5]; for  $\alpha = q = 0$  and real function  $\psi$  eq. (2.8) is the modified Korteweg-de Vries eq. [6, 7]. For  $\mu = 0$  and  $2q\beta = 3\gamma\alpha$  eq. (2.8) was analyzed by Hirota [8]. All these cases (NSE, modified Korteweg-de Vries eq. and Hirota eq. ) were analyzed by inverse scattering method [5] and exact  $N$ -soliton solutions of these eqs. were obtained. In eq. (2.7) we have  $2q\beta \neq 3\gamma\alpha$  and  $\mu \neq 0$ , i.e. eq. (2.7) does not reduce to the analyzed cases. Eq. (2.8) has the phase modulated soliton solution. To demonstrate this fact we present the solution of eq. (2.7) in the form of stationary travelling wave

$$\psi(\xi, t) = A(\xi - Vt) \exp \{i\Omega t + i\varphi(\xi - Vt)\}. \quad (2.9)$$

Then we have the next system of eqs. for the packet amplitude  $A$  and the packet phase  $\varphi$

$$A \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} + 2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{dA}{d\zeta} + 2(A^2 \Theta - V) \frac{dA}{d\zeta} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} - A \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2 + A^3 - 2A\Omega + 2A \frac{d\varphi}{d\zeta} (V - \beta A^2) = 0, \quad (2.11)$$

where  $\zeta = \xi - Vt$ ,  $\Theta = \beta + 2\mu$ . Integrating eq. (2.10) we obtain for the packet phase  $\varphi$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = -\frac{1}{2} A^2 \Theta + V. \quad (2.12)$$

Substituting (2.12) into (2.11), we get for the packet amplitude  $A$

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} = (2\Omega - V^2) A - A^3 (1 - 2\beta V) - \Theta \left( \beta - \frac{\Theta}{4} \right) A^5. \quad (2.13)$$

For the further consideration we change the variables

$$\rho = \zeta \sqrt{2\Omega - V^2}, \quad B = A \sqrt{\frac{1 - 2\beta V}{2\Omega - V^2}}. \quad (2.14)$$

In new variables eqs. (2.12), (2.13) take the forms

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -qB^2 + \frac{V}{\delta}, \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} = B - B^3 - rB^5, \quad (2.16)$$

where

$$r = \Theta \left( \beta - \frac{\Theta}{4} \right) \frac{(2\Omega - V^2)}{(1 - 2\beta V)^2}, \quad q = \frac{\Theta \sqrt{2\Omega - V^2}}{2(1 - 2\beta V)}, \quad \delta = \sqrt{2\Omega - V^2}.$$

The eq. (2.16) under the zero both field and its derivation conditions at infinity  $B(\zeta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$  and  $B'(\zeta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$  has the solution

$$B^2(\rho) = \frac{4}{1 + (1 + 16r/3)^{1/2} \cosh(2\rho)}. \quad (2.17)$$

Taking into account the eq. (2.17), the soliton phase solution of the (2.15) takes the form

$$\varphi(\rho) = \frac{V}{\delta} \rho - q \int_0^\rho \frac{4d\hat{\rho}}{1 + (1 + 16r/3)^{1/2} \cosh\left(2\hat{\rho}\right)}. \quad (2.18)$$

We see from (2.17) that the solitons are existences for the values  $r > -3/16$ . The dependence of the packet envelope  $B$  and phase  $\varphi$  on coordinate  $\rho$  for different values  $r$  are shown in Fig. 1. Fig. a) corresponds to envelope  $B$ ; b) - phase  $\varphi$  for  $q = r$ . Curves 1 correspond the value  $r = -2990/16000$ , 2 -  $r = 0$ , 3 -  $r = 2$ . The soliton amplitude  $B_0 = B(0)$  and soliton length  $\Delta$  decrease with the growth of the parameter  $r$ . In the limit case  $r = 0$  corresponding absent nonlinear dispersion and  $V = 0$  the relations for the amplitude and phase (2.17), (2.18) take the forms, corresponding to the well-known NSE soliton [4]:

$$B(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(\rho)}, \quad \varphi(\rho) = 0, \quad (2.19)$$

We can see that for the modified soliton, when  $r \neq 0$ , there is the nonzero phase distribution. This distribution conserves the soliton symmetric form in conditions of nonlinear dispersion.

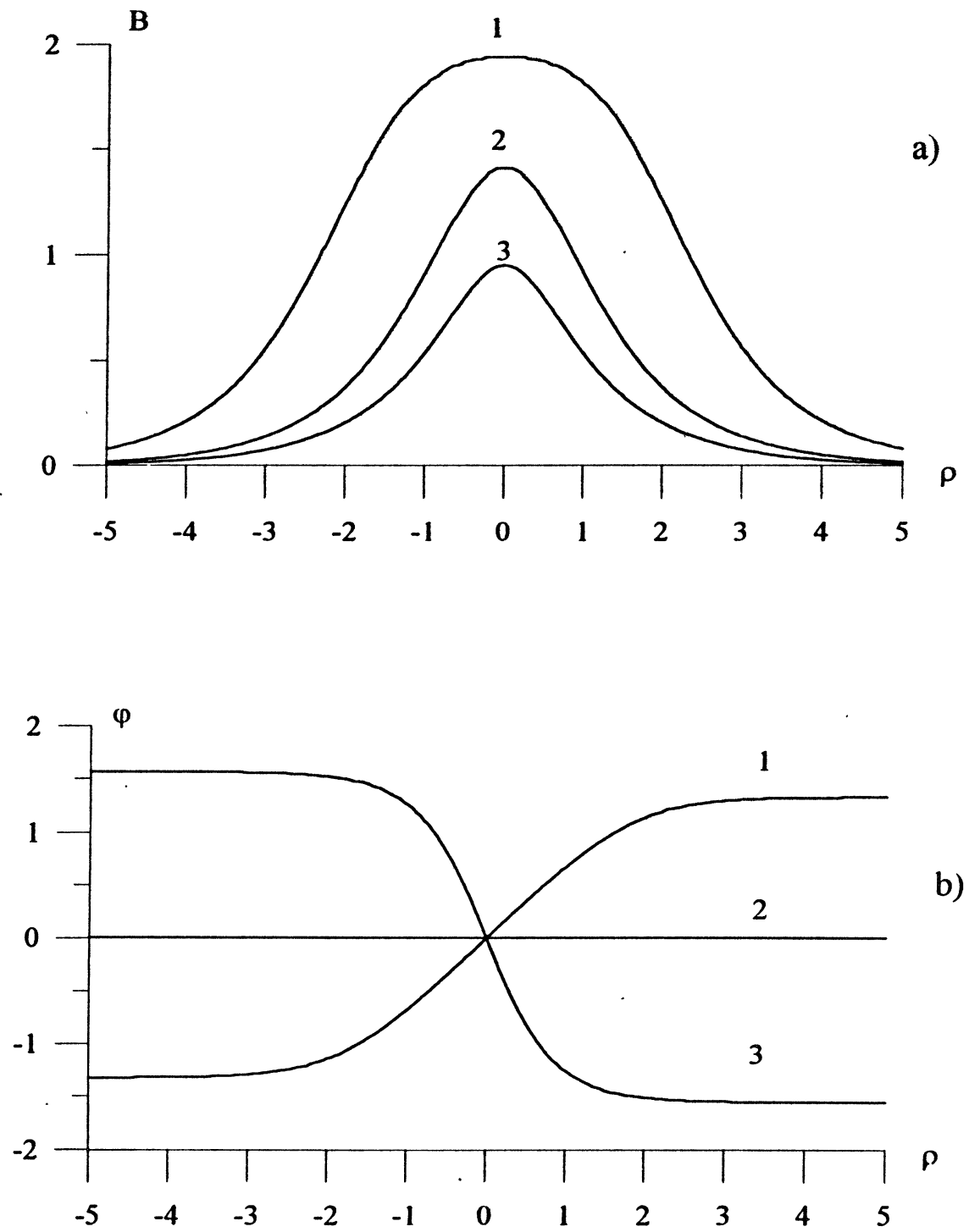


Fig.1.

The general nonlinear eq. (2.8) has the soliton solution too. For demonstrate this we pass to the reference system moving with the velocity  $V : \varsigma = \xi - Vt, t' = t$  and the obtained eq. solution we present in the stationary wave form

$$\psi(\varsigma, t) = \phi(\varsigma) \exp(i\Omega t). \quad (2.20)$$

For  $\phi(\varsigma)$  we have the eq.

$$i \left( \gamma \frac{d^3 \phi}{d\varsigma^3} + 2\beta |\phi|^2 \frac{d\phi}{d\varsigma} + 2\mu \phi \frac{d|\phi|^2}{d\varsigma} - 2V \frac{d\phi}{d\varsigma} \right) + q \frac{d^2 \phi}{d\varsigma^2} + \alpha |\phi|^2 \phi - 2\Omega \phi = 0. \quad (2.21)$$

Assuming  $\phi = \phi^*$  we obtain the two eqs. for the function  $\phi$

$$\gamma \frac{d^3 \phi}{d\varsigma^3} + 2(\beta + 2\mu) \phi^2 \frac{d\phi}{d\varsigma} - 2V \frac{d\phi}{d\varsigma} = 0, \quad (2.22)$$

$$q \frac{d^2 \phi}{d\varsigma^2} + \alpha \phi^3 - 2\Omega \phi = 0. \quad (2.23)$$

Integrating the eq. (2.22) over  $\varsigma$  under the zero conditions in infinity  $\phi(\varsigma \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$  and  $\phi''(\varsigma \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$  we have the next eqs.

$$\frac{d^2 \phi}{d\varsigma^2} + \frac{2(\beta + 2\mu)}{3\gamma} \phi^3 - \frac{2V}{\gamma} \phi = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\varsigma^2} + \frac{\alpha}{q} \phi^3 - \frac{2\Omega}{q} \phi = 0. \quad (2.25)$$

The eqs. (2.24) and (2.25) consistent under the conditions

$$2q(\beta + 2\mu) = 3\alpha\gamma, \quad V = \gamma \frac{\Omega}{q} \quad (2.26)$$

and have the soliton solution with the velocity non equal the linear wave velocity. The velocity value  $V$  depends to the linear aberration  $V \sim \gamma$ . The soliton existence condition (2.26) for eq. (2.8) reduces to the Hirota condition in the case  $\mu = 0$ .

## 2.2. Nonstationary wave packets.

Higher order terms in the packet envelope eq. (1.3) give the new effects for nonstationary moving packets too. So, first and second terms in the right part of eq. (1.3) correspond to the dependence of the local packet group velocity on

its intensity  $|\psi|^2$  (nonlinear dispersion). To demonstrate it we assume  $q = \alpha = \gamma = U = 0$  and transform the obtained eq. to the form

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + (\beta + 2\mu) |\psi|^2 \frac{\partial |\psi|^2}{\partial \xi} = 0.$$

We see that packet regions of different intensity move with different group velocity

$$\frac{d\xi}{dt} = \Delta V_g^{NL} = (\beta + 2\mu) |\psi|^2. \quad (2.27)$$

At  $(\beta + 2\mu) > 0$  the packet regions of greater intensity move with greater velocities. In this case the leading front of the initially symmetric packet will become steeper. At the opposite case  $(\beta + 2\mu) < 0$  the packet regions with greater intensity move with the less velocities. In this case the back front of the initially symmetric packet will become steeper.

To further indicate the role of the higher approximations terms let us find energy center velocity in the coordinate system moving with the linear wave group velocity  $V_g^L$

$$\overline{\xi}(t) = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |\psi|^2 d\xi, \quad (2.28)$$

where  $N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d\xi$  is the wave packet energy. We shall multiply eq. (2.28)

by  $\xi\psi^*$ , where  $\psi^*$  is the complex conjugate of  $\psi$  and we shall add to the resultant expression its complex conjugate. Integrating obtained relationship over  $\xi$  from  $-\infty$  to  $\xi$  for localized wave packets and for real function  $U$  ( $U = U^*$ ), we obtain

$$\dot{\overline{\xi}}(t) = \frac{(\beta + 2\mu)}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^4 d\xi - \frac{3\gamma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|^2 d\xi + \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} |\psi|^2 d\xi, \quad (2.29)$$

where  $\bullet \equiv d/dt$ ,  $\varphi$  is the phase of the packet  $\psi = |\psi| \exp(i\varphi)$ . The energy center velocity change  $\overline{\Delta V} = \dot{\overline{\xi}}(t)$  in compare with the NSE (last term in (2.29)) is described by two terms:  $\overline{\Delta V} = \overline{\Delta V}^{NL} + \overline{\Delta V}^L$ . The first term  $\overline{\Delta V}^{NL}$  in the right part (2.29) depends to the field intensity and is caused by nonlinear dispersion

$$\overline{\Delta V}^{NL} = \frac{(\beta + 2\mu)}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^4 d\xi. \quad (2.30)$$

Second term  $\overline{\Delta V}^L$  in the right part eq. (2.29) does not depend to the packet intensity. It is caused by linear dispersion law aberration and corresponds in



eq. (1.3) to the third derivative term ( $\gamma \neq 0$ )

$$\overline{\Delta V^L} = \frac{3\gamma}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|^2 d\xi. \quad (2.31)$$

The aberration velocity value  $\overline{\Delta V^L}$  is less zero  $\overline{\Delta V^L} < 0$  for  $\gamma > 0$  and  $\overline{\Delta V^L} > 0$  for  $\gamma < 0$ . Absolute value of the aberration velocity shift  $|\overline{\Delta V^L}|$  increases with decreasing of packet width, i.e. with increasing of packet spectrum width.

The higher approximations terms modified the packet acceleration too. The packet acceleration value from eq. (1.3) is equal

$$\overline{\ddot{\xi}(t)} = \frac{(3\alpha\gamma - 2q\beta)}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} |\psi|^4 d\xi + \frac{1}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial \xi} |\psi|^2 \left( q - 3\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi. \quad (2.32)$$

The change of the energy center acceleration  $\overline{\Delta a} = \overline{\ddot{\xi}(t)}$  depends to the field intensity and is described by two terms:  $\overline{\Delta a} = \overline{\Delta a_h} + \overline{\Delta a_{inh}}$ . The first term  $\overline{\Delta a_h}$  in the right part (2.32) does not connect with inhomogeneous potential  $U$  and depends to the packet phase modulation. The depending of inhomogeneous potential  $U$  packet acceleration part  $\overline{\Delta a_h}$  contains two terms:

$$\overline{\Delta a_{inh}} = \frac{1}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial \xi} |\psi|^2 \left( q - 3\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) d\xi. \quad (2.33)$$

First corresponds to the classic acceleration in the Schrödinger eq. frames for the packet moving in inhomogeneous medium with potential  $U$  :

$$\overline{\Delta a_{clas}} = \frac{q}{2N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial \xi} |\psi|^2 d\xi. \quad (2.34)$$

The second term of the inhomogeneous part acceleration  $\overline{\Delta a_{inh}}$  corresponds to the phase modulated packets acceleration in the present both inhomogeneous potential  $U$  and linear aberration ( $\gamma \neq 0$ ).

After analyze the general properties of the higher approximations eqs. let us consider the examples of short intense trains dynamics both gravity wave on deep water and electromagnetic as well as Langmuir wave in isotropic plasma.

### 3. Nonlinear dynamics of short intense gravity wave trains on deep water.

Experimental investigation of the short intense gravity waves trains propagation on deep water has been made many times also (for example, by Lake and Yuen

[13]). But the given experimental results have been interpreted by the NSE [14, 15] in the second ("parabolic") approximation frames of dispersion theory ignoring discrepancy between the experimental results and theoretical model.

The discrepancy was initiated by the disruption nonsymmetrical packet form of the initial pulse. This experimental result can not be explained in the frame of the second approximation of the nonlinear dispersion theory, corresponding NSE (1.1). For the detail comparing with the third approximation theory we must have the more information on packet form. So we carried out the new experiments.

### 3.1. Experiment.

Experiment was carried out in the big tank  $(20 \times 4 \times 2)m^3$ . The gravity wave trains were generated by wavemaker at one tank end and was absorbed at the other end. A gravity wave trains were generated by five wavemaker oscillations at the frequency  $\nu = 1.6 Hz$  ( $\lambda = 58.5cm$ ). Since for gravity waves on deep water the phase velocity  $V_p$  is twice as larger as the group velocity  $V_g$ , the initial length of packet was only  $2.5 \cdot \lambda = 145cm$ . The values of the water surface deviation from the equilibrium were measured at distances of  $4m$ ,  $6m$ ,  $8m$ ,  $10m$ . The next Figs. 2 – 4 exhibit the oscillograms of the water surface displacement at the different distances from the wavemaker. The initial amplitude equals correspondingly to  $3cm$ ,  $2cm$  and  $1cm$ . For the maximum value of the gravity wave trains  $a = 3cm$  (Fig. 2) the leading front of the packet envelope at the distance  $6m$  is steeping (Fig. 2. b), c); at the larger distances on the leading front the pulses of shorter length is formed (Fig. 2. d)). For the gravity wave train initial amplitude to  $2cm$  the distortion of the pulse envelope is expressed smaller (Fig. 3). For the initial gravity wave amplitude to  $1cm$  the distortion of the pulse envelope is almost absent. The dependence of energy center coordinate

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2 dx , \quad (3.35)$$

on real time for too different values of the water surface displacement  $a = 1cm$  and  $3cm$  are shown in Fig. 5 (curves 1 and 2 correspondingly). The center energy velocity value increases with growth of its amplitude. So, the center energy velocity for initial packet amplitude  $3cm$  is larger the center energy velocity for initial packet amplitude  $1cm$  on value  $\overline{\Delta V}^{NL} \simeq 5cm/sec$  according to theoretical prescriptions

### 3.2. Simulation.

To compare the packet shape distortions with the third approximation prescriptions we made the simulation on the bases of Dysthe's eq. (1.4). In dimensionless

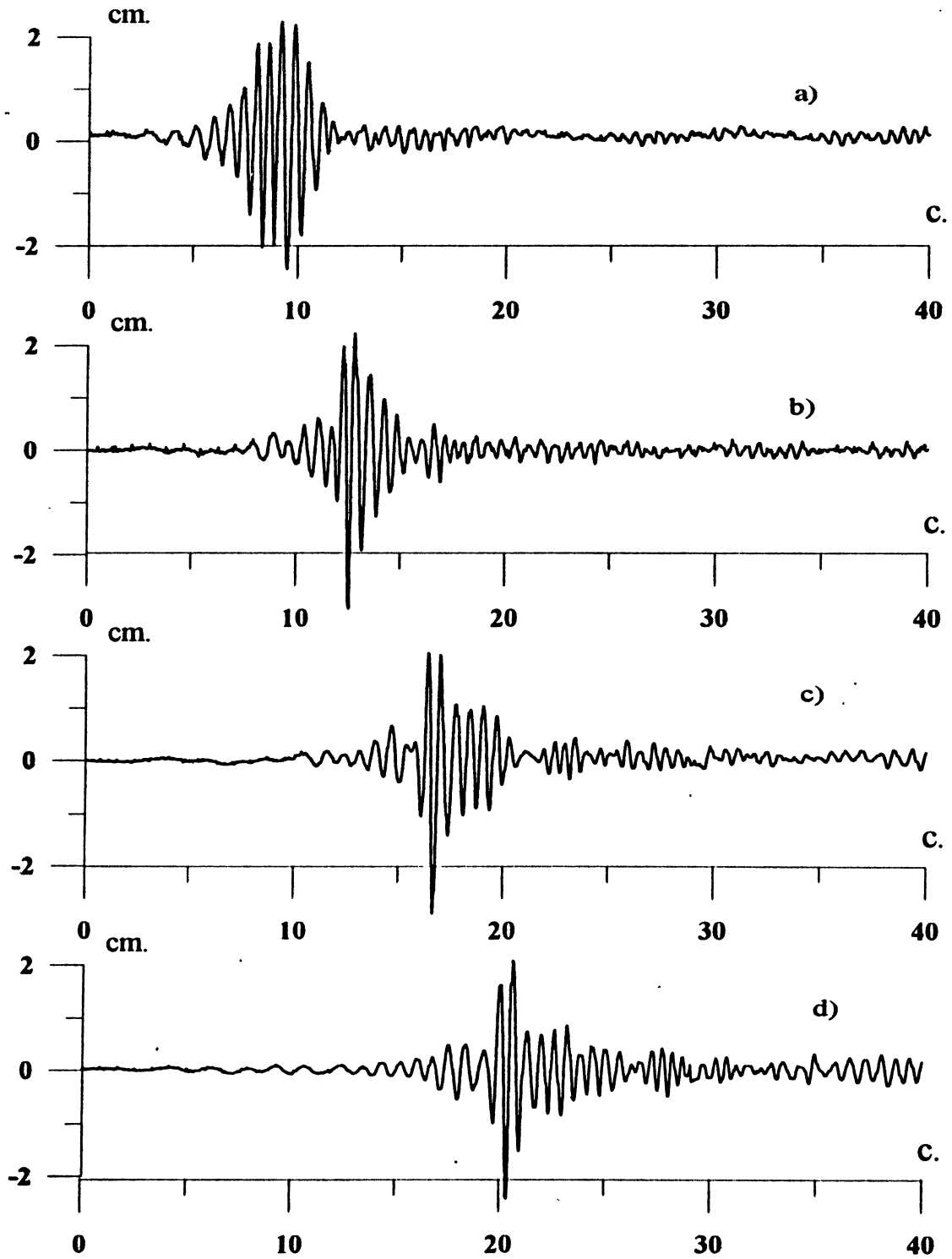


Fig.2.

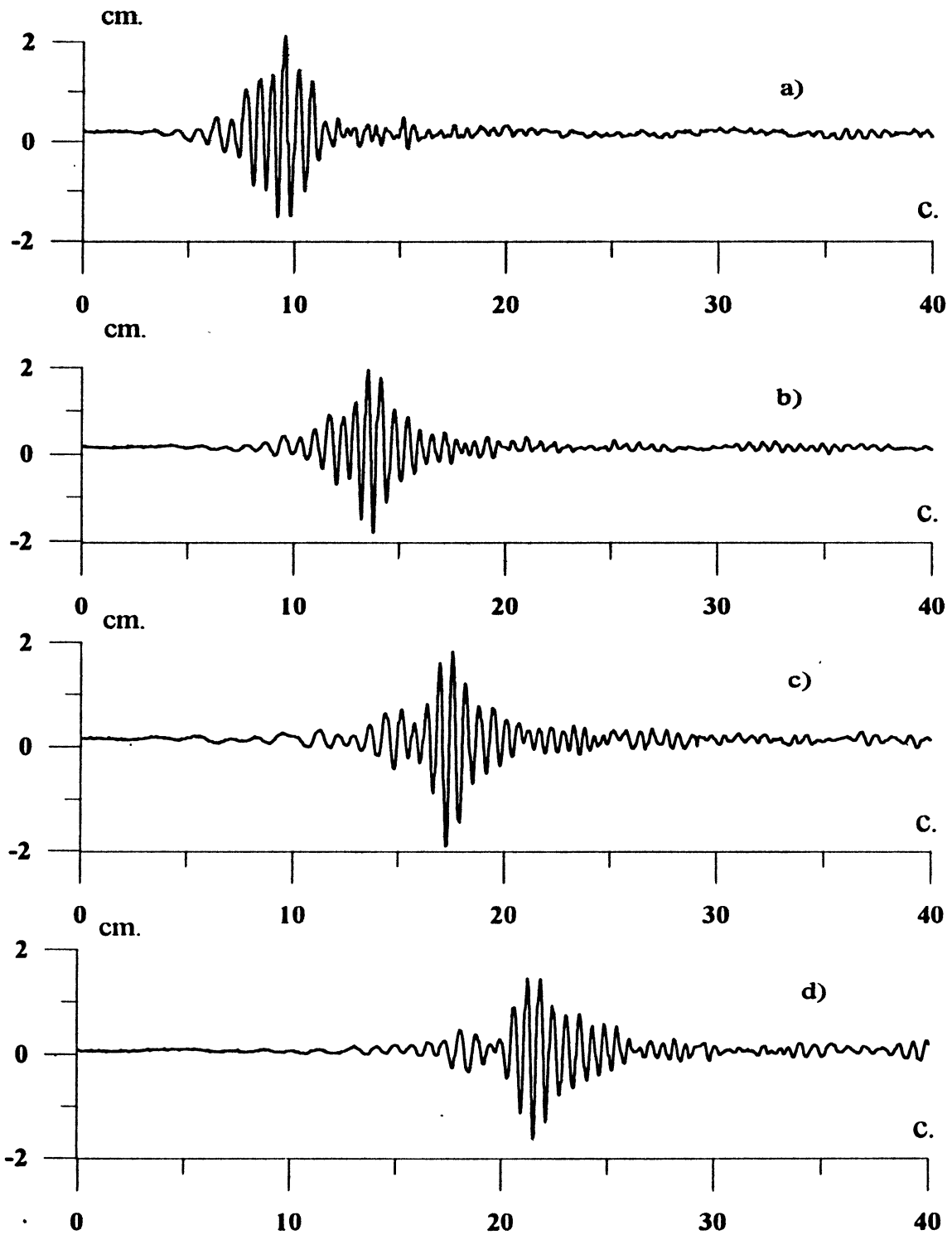


Fig.3.

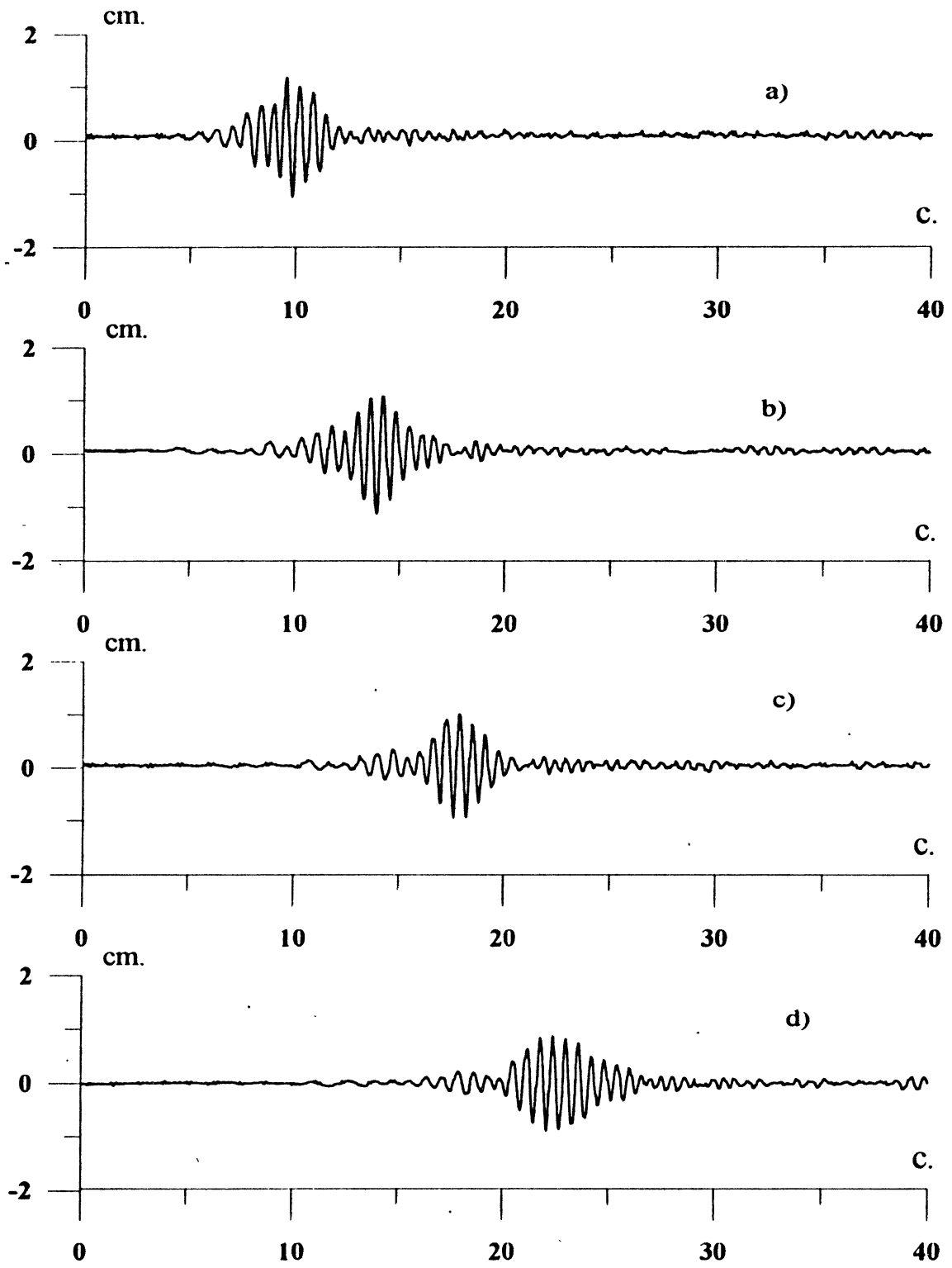


Fig.4.

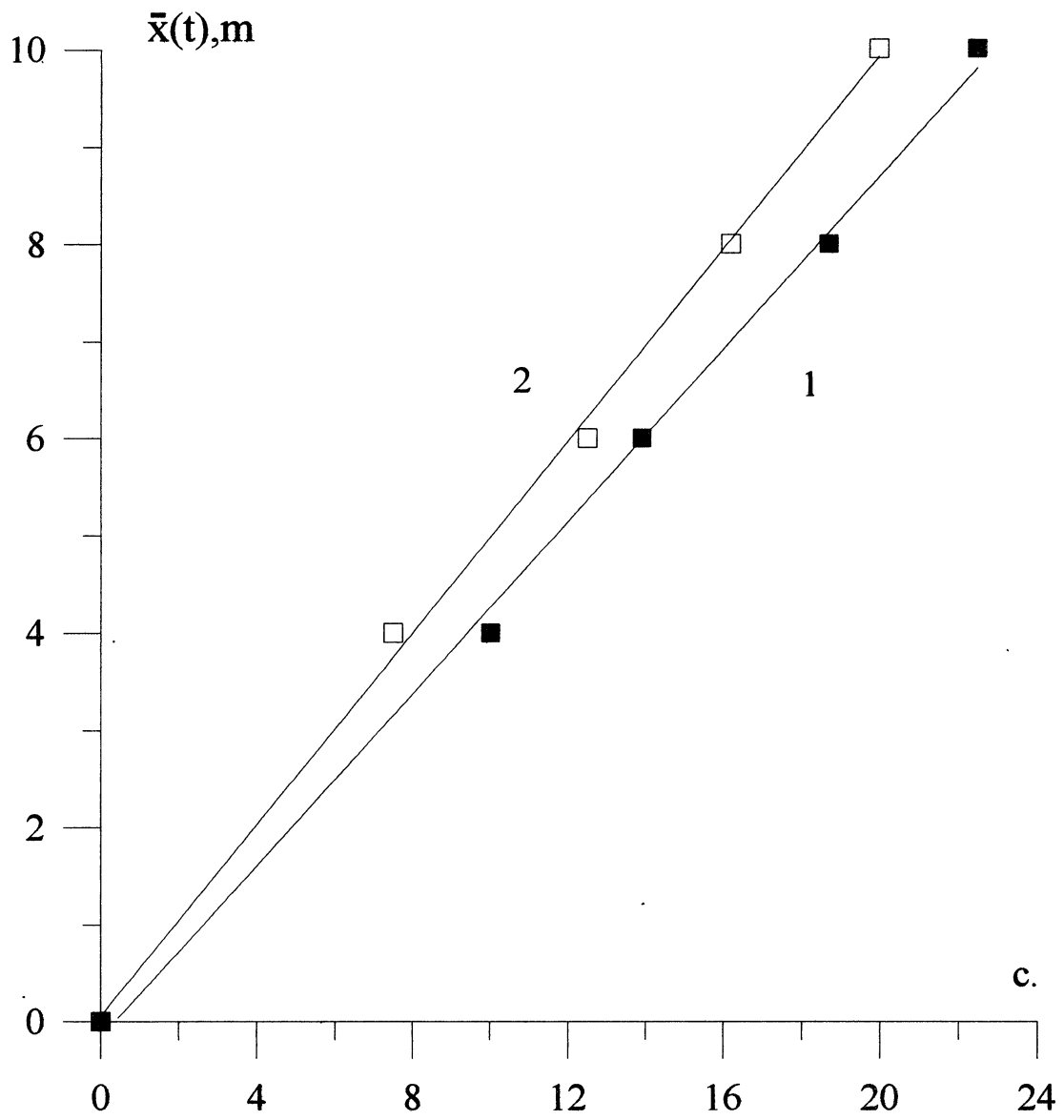


Fig.5.

variables:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \eta = \frac{\xi}{l}, \quad \psi = \frac{a}{\bar{a}}, \quad (3.36)$$

where

$$\omega_0 T = \frac{25}{4}, \quad k_0 l = \frac{5}{4}, \quad k_0 \bar{a} = \frac{2}{5}.$$

this eq. (1.4) takes the form:

$$2i \left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - i \frac{2}{5} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + |\psi|^2 \psi + \\ + \frac{4}{5} \psi \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\eta', \tau)|^2 \frac{[(\eta - \eta')^2 - s^2]}{[(\eta - \eta')^2 + s^2]^2} d\eta' = 0. \quad (3.37)$$

Assume the initial conditions for eq. (3.37) in the form of the even function without phase modulation:

$$\psi(\eta, 0) = \frac{\psi_0}{\cosh(2\eta/\delta)}. \quad (3.38)$$

The values of dimensionless parameters take  $\psi_0 = 0.75$  and  $\delta = 4\pi$  corresponding in dimensional variables to the experimental values of the gravity wave train steepness  $k_0 a = 0.4 \cdot \psi_0 = 0.3$  and its length  $\Delta = 5\lambda\delta/(8\pi) = 145\text{cm}$  on the distance  $L_0 = 4\text{m}$  from the wavemaker. The dependence of the packet envelope modulus  $|\psi|$  on coordinate  $\eta$  in different time moments  $\tau$  are shown in Fig. 6. The distance  $L$  from wavemaker to the measurement point is defined by the relationship  $L = (4 + 0.29 \cdot \tau)\text{m}$ . Initial time moment  $\tau = 0$  corresponds the distance  $L = 4\text{m}$  (Fig. a);  $\tau = 6.8 - L = 6\text{m}$  (Fig. b);  $\tau = 13.6 - L = 8\text{m}$  (Fig. c);  $\tau = 20 - L = 10\text{m}$  (Fig. d);  $\tau = 26,8 - L = 12\text{m}$  (Fig. e). We can see that at first the packet leading front is steeping (Fig. 6. b); then near the leading front the short intense pulse originates (Fig. 6. c, d). It corresponds to experimental results.

To determinate the role of induced current to propagation short intense gravity wave trains the simulation eq. (3.37) without the integral term was made. The simulation result for the same initial conditions (3.38),  $\psi_0 = 0.75$  and  $\delta = 4\pi$  is shown in Fig. 7 at the same as Fig. 6 time moments. In the absent of the induced current the modulation instability arises on the earlier time order  $\tau \sim 20$  (Fig. 7. d). In the present of the induced current the modulation instability arises on the greater times (Fig. 2. d). So, the induced current decreases the modulation instability increment.

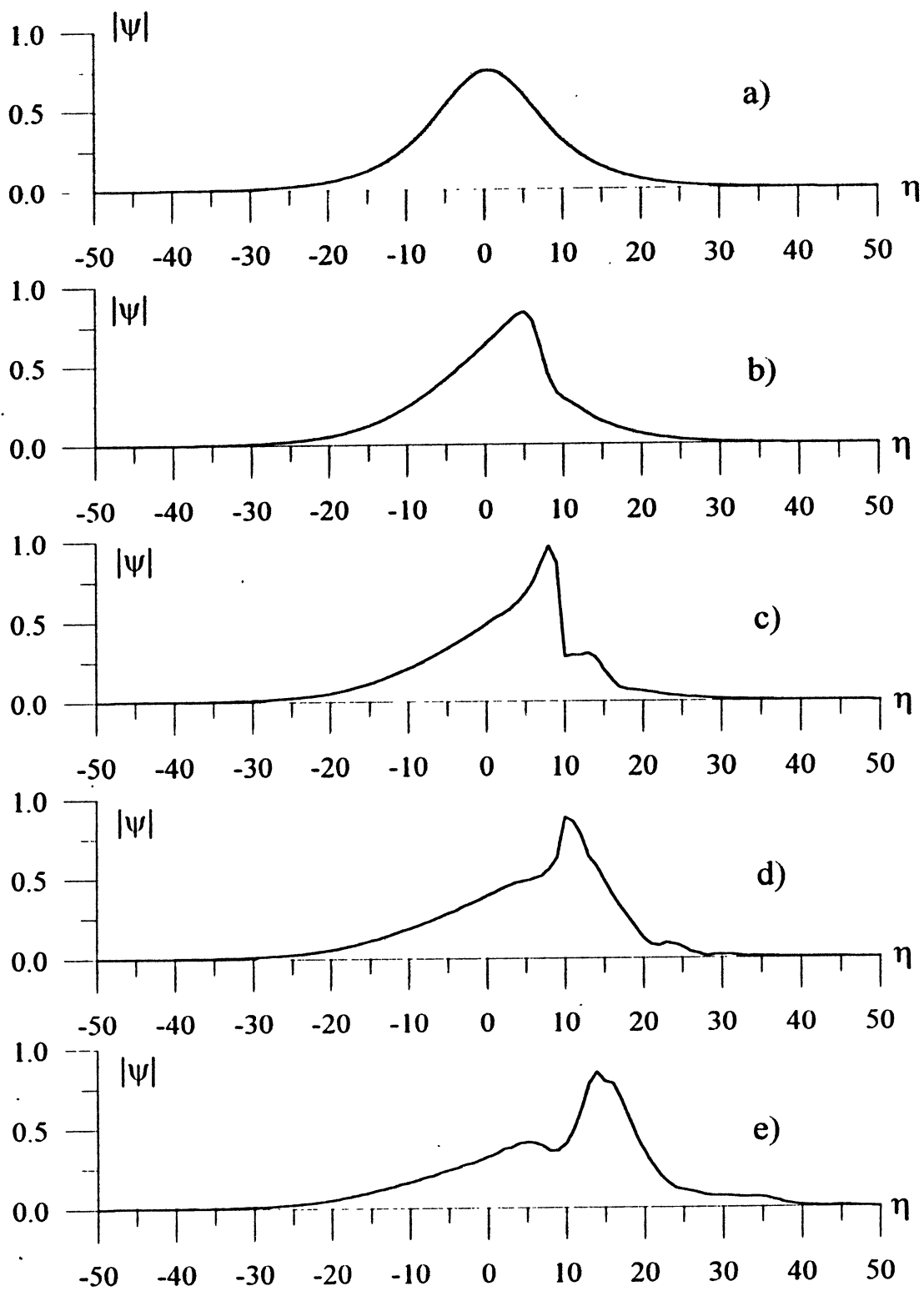


Fig.6.



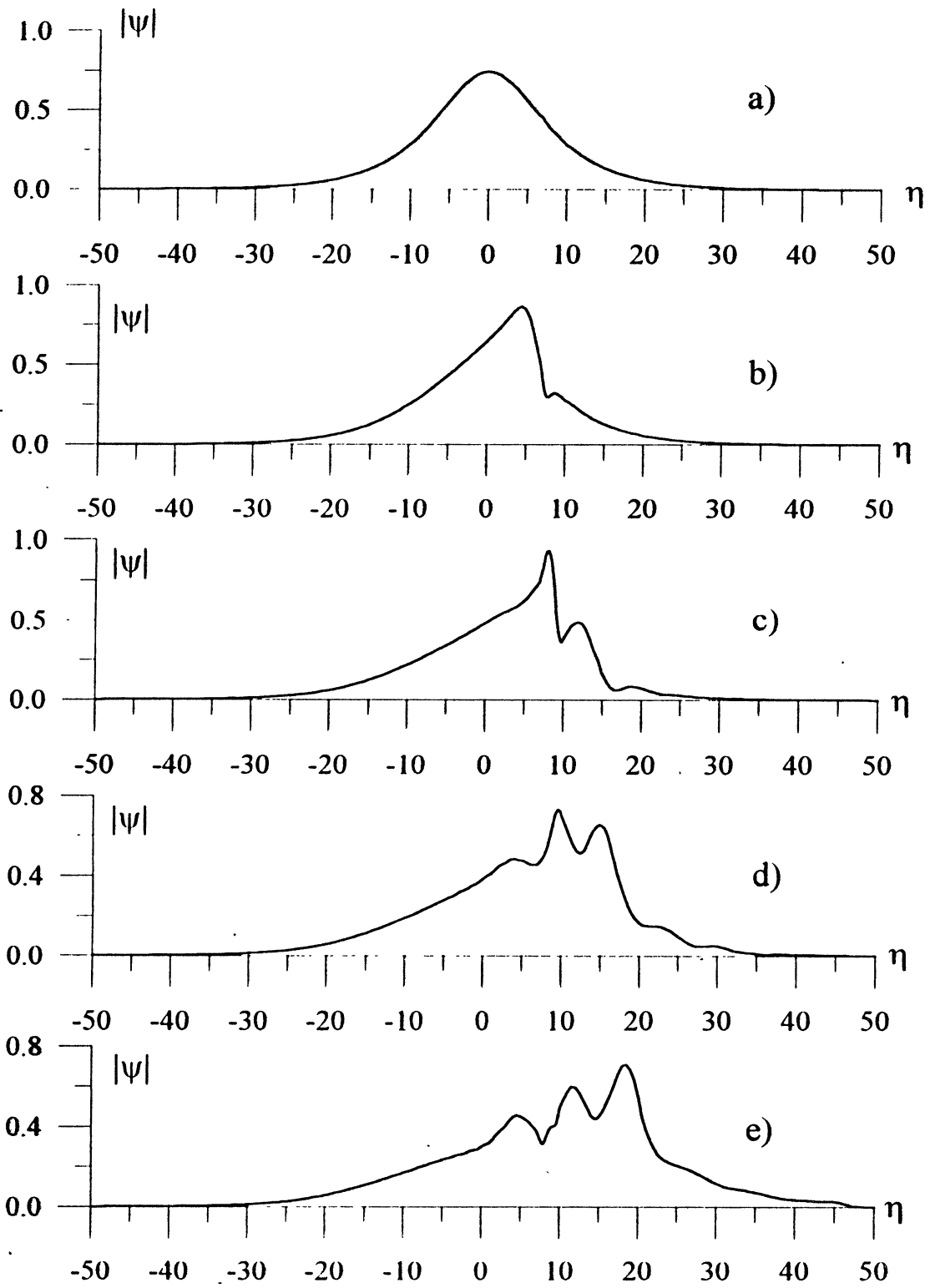


Fig.7.

## 4. The higher approximations of the short intense trains description in isotropic plasma.

### 4.1. Basis equations.

As other example describing short intense wave trains let us consider evolution of the strong HF (linearly polarized electromagnetic or Langmuir) packet in homogeneous isotropic plasma with striction nonlinearity. In this case the initial eqs. are the Zakharov-type system eqs. [4]

$$V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \omega_p^2 \left( 1 + \frac{\delta n}{N} \right) E = 0, \quad (4.39)$$

$$c_s^2 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta n}{\partial z^2} = \frac{c_s^2}{16\pi T_e} \frac{\partial^2 (\widetilde{E^2})}{\partial z^2}, \quad (4.40)$$

where  $E$  is the electric field,  $\delta n$  is the plasma concentration deviation from the equilibrium value  $N$ ,  $c_s$  is the ion-acoustic wave velocity,  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m_e$ , the parameter  $V$  in (4.39) corresponds to the light velocity  $c$  for electromagnetic waves or the electron heat velocity  $V_{Te}$  for Langmuir waves. The wave line in right part (4.40) corresponds to HF field time averaging. In (4.39), (4.40) we change to dimensionless variables

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \eta = \frac{z}{l}, \quad \psi = \frac{E}{\bar{E}}, \quad \text{where } \omega_p T = 1, \quad l = \frac{V}{\omega_p}, \quad \bar{E} = \sqrt{16\pi N T_e}, \quad (4.41)$$

for which the system (4.39), (4.40) takes the form

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - (1 + n) \psi = 0, \quad (4.42)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 (\widetilde{\psi^2})}{\partial \eta^2}. \quad (4.43)$$

where  $\alpha = V/c_s \gg 1$ . The solution of (4.42), (4.43) we present in the quasi monochromatic wave packet form

$$\psi(\eta, \tau) = \varphi(\eta, \tau) \exp(-i\omega_0 \tau + ik_0 \eta), \quad (4.44)$$

where  $\omega_0$  and  $k_0$  are related by the linear dispersion relationship  $\omega_0^2 = 1 + k_0^2$ . In the relations obtained in such a way we pass to the reference system moving at the HF wave group velocity  $v \equiv v_g^L = \partial\omega_0/\partial k_0 = k_0/\omega_0$ :

$$\xi = \eta - v\tau, \quad \tau' = \tau.$$

In this case for  $\varphi(\xi, \tau)$  and  $n(\xi, \tau)$  we obtain eqs.

$$2i\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - n\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial \xi}, \quad (4.45)$$

$$(v^2 \alpha^2 - 1) \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 (|\varphi|^2)}{\partial \xi^2} = -\alpha^2 \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} - 2v \frac{\partial^2 n}{\partial \tau \partial \xi} \right). \quad (4.46)$$

The left parts (4.45), (4.46) correspond to the second approximation of the dispersion theory leading to NSE for HF field packet envelope  $\varphi$

$$2i\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - n\varphi = 0, \quad (4.47)$$

in which

$$n = -\frac{|\varphi|^2}{1 - v^2 \alpha^2} \quad (4.48)$$

is taking into account. Substituting (4.47), (4.48) into the right parts of (4.45), (4.46) we shall find

$$2i\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - n\varphi = -i \frac{v}{\omega_0^3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} + \frac{v |\varphi|^2}{2\omega_0^2 (1 - v^2 \alpha^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{v}{2\omega_0} \left( \frac{\varphi}{(1 - v^2 \alpha^2)} \frac{\partial |\varphi|^2}{\partial \xi} + \frac{|\varphi|^2}{(1 - v^2 \alpha^2)} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right), \quad (4.49)$$

$$n = -\frac{|\varphi|^2}{1 - v^2 \alpha^2} - \frac{2\alpha^2 v}{2\omega_0^2 (1 - v^2 \alpha^2)^2} \frac{1}{2i} \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} \right), \quad (4.50)$$

where the variation of concentration  $n$  has now the correction to the stationary value. Combining these expressions we shall yield in the third approximation of the dispersion theory for  $\varphi$

$$2i\omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{|\varphi|^2}{1 - v^2 \alpha^2} \varphi = -2i\omega_0 \left( \beta |\varphi|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \mu \varphi \frac{\partial |\varphi|^2}{\partial \xi} \right) - i \frac{v}{\omega_0^3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3}, \quad (4.51)$$

where in the right part there are the approximation third terms with the parameters

$$\beta = \frac{v}{2\omega_0^2 (1 - v^2 \alpha^2)} \left( 1 - \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2 (1 - v^2 \alpha^2)} \right), \quad (4.52)$$

$$\mu = \frac{v}{2\omega_0^2 (1 - v^2 \alpha^2)} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\omega_0^2 (1 - v^2 \alpha^2)} \right). \quad (4.53)$$

The nonlinear deviation of the HF packet group velocity from the linear quantity in (4.51) is

$$\Delta v_g^{NL} = \frac{3v|\varphi|^2}{2\omega_0^2(1-v^2\alpha^2)}. \quad (4.54)$$

At  $\alpha v < 1$ , corresponding to the packet velocity less than the ion-acoustic wave velocity, we have  $\Delta v_g^{NL} > 0$ , i.e. the regions of the HF packet with greater amplitude move with greater velocities. In this case the leading front of the initially symmetric packet will steepen. At  $\alpha v > 1$  corresponding to the packet velocity greater than the ion-acoustic wave velocity we have  $\Delta v_g^{NL} < 0$ , i.e. the HF packet regions with greater amplitude move with the less velocities. In this case the back front of the initially symmetric packet will become steeper. The characteristic time  $t^*$  of steepening as the time of the packet maximum shift by its half width  $\Delta/2$  is equal:

$$t^* = \Delta / (2\Delta v_g^{NL}) = \frac{\omega_0^2 \Delta |1 - v^2 \alpha^2|}{3v |\varphi|^2}. \quad (4.55)$$

The distance  $L^*$ , at which the steep front is formed for the initially symmetric pulse, constitutes

$$L^* = t^* v = \frac{\Delta \omega_0^2 |1 - v^2 \alpha^2|}{3 |\varphi|^2}. \quad (4.56)$$

We can see that the terms of the third approximation are significant in the group synchronism between HF and low-frequency waves when  $\alpha v \sim 1$ .

## 4.2. Instability of the plane wave.

To further analyze the effects of the third approximation let us investigate the instability of the plane wave in the case  $\alpha v < 1$ . Change in (4.51) the variables

$$\theta = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \varsigma = \frac{\xi}{\delta}, \quad \phi = \frac{\varphi}{\bar{\varphi}}, \quad (4.57)$$

where

$$\delta = \frac{v}{2\omega_0}, \quad \tau_0 = \frac{v^2}{4}, \quad \bar{\varphi} = \frac{4\omega_0}{v^2} \sqrt{1 - v^2 \alpha^2},$$

we yield

$$2i \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \beta_1 |\phi|^2 \frac{\partial \phi}{\partial \varsigma} + \mu_1 \phi \frac{\partial |\phi|^2}{\partial \varsigma} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varsigma^2} + |\phi|^2 \phi + 2i \frac{\partial^3 \phi}{\partial \varsigma^3} = 0, \quad (4.58)$$

where

$$\beta_1 = 1 - \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2(1-v^2\alpha^2)}, \quad \mu_1 = 1 + \frac{\alpha^2}{\omega_0^2(1-v^2\alpha^2)}.$$

The solution of the eq. (4.58) we present in the form of the plane wave with small space perturbations

$$\phi = (\phi_0 + \tilde{\phi}) \exp(i\phi_0^2\theta/2), \quad (4.59)$$

where  $|\tilde{\phi}| \ll \phi_0$ . Keeping in the obtained relationship linear on  $\tilde{\phi}$  terms we have

$$2i \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} + (\beta_1 + \mu_1) \phi_0^2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \varsigma} + \mu_1 \phi_0^2 \frac{\partial \tilde{\phi}^*}{\partial \varsigma} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \varsigma^2} + \phi_0^2 (\tilde{\phi} + \tilde{\phi}^*) + 2i \frac{\partial^3 \tilde{\phi}}{\partial \varsigma^3} = 0. \quad (4.60)$$

Changing  $\rho = \varsigma - (\beta_1 + \mu_1) \phi_0^2 \theta$  and  $\theta' = \theta$  the eq. (4.60) takes the form (sign vanish)

$$2i \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} + \mu_1 \phi_0^2 \frac{\partial \tilde{\phi}^*}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \rho^2} + \phi_0^2 (\tilde{\phi} + \tilde{\phi}^*) + 2i \frac{\partial^3 \tilde{\phi}}{\partial \rho^3} = 0. \quad (4.61)$$

Presenting the space perturbations in the form

$$\tilde{\phi} = A \exp(\Gamma\theta + iq\rho), \quad (4.62)$$

we obtain from the existence nonzero solution condition for the two algebra eqs. for  $A^*$  and  $A$  :

$$\Gamma = -iq^3 \pm \frac{1}{2}q\sqrt{2\phi_0^2(1 - 2\mu_1^2\phi_0^2) - q^2 - 4q^4}. \quad (4.63)$$

The instability increment value from the relationship (4.63) is equal

$$Re\Gamma = \frac{1}{2}q\sqrt{2\phi_0^2(1 - 2\mu_1^2\phi_0^2) - q^2 - 4q^4}. \quad (4.64)$$

Let us compare this expression with the well-known relationship for the instability increment corresponding the NSE

$$(Re\Gamma)_{NSE} = \frac{1}{2}q\sqrt{2\phi_0^2 - q^2}. \quad (4.65)$$

We can see that in the third approximation the modulation instability increment decreases by the both nonlinear dispersion (term with  $\mu_1^2$  in eq. (4.64)) and cubic linear aberration in dispersion curve  $\omega(k)$  (the last term under the square). For the greater amplitude

$$\phi_0 > \frac{1}{\sqrt{2}\mu_1}$$

the modulation instability disappears.

It is known that the similar effect of the restabilization of perturbations takes place for the gravity waves on deep homogeneous water, but there it associates

with the induced flow. So, the description of the intense wave trains propagation in the strong dispersive nonlinear medium may be constructed on the next after parabolic approximations. In particular, as we shown over for the gravity waves on deep homogeneous water the account of the third approximation gives the good description of the experimentally observed effects of the form and velocity evolution, which does not described in the frames of the NSE. For stratified water, when the internal waves there are, the third approximation effects may play the same role for the interaction between surface gravity and internal waves as in plasma. The description of this interaction is similar to the wave interaction in plasma ( the role of ponderomotive forces plies the Reynolds stress). So we may wait the distinct demonstration of the third approximation effects in the conditions of the group synchronism of the surface gravity and internal waves.

This work was supported by International Science Foundation and Ministry for Science of Russia (Grant No R8V300).

### References

1. M.B.Vinogradova, O.V. Rudenko, A.P.Sukhorukov, Wave theory, M., 1979.
2. A.C. Scott, F.Y.E. Chu and D.N. Mac'Laughlin, Soliton: a new concept in applied science, Proc. IEEE, 61(1973).
3. V.I.Talanov, Izv. VUZov-Radiofizika, v. 7, 564(1964).
4. V.E.Zakharov, ZhETF, vol. 62, 1745 (1972).
5. V.E.Zakharov, A.V. Shabat, ZhETF, vol. 61, 118 (1971).
6. M.Wadati, J. Phis. Soc. Jap., vol. 32, 1681(1972).
7. R.Hirota, J. Phis. Soc. Jap., vol. 33, 1456(1972).
8. R.Hirota, J. Math. Phis., vol. 14, 805 (1965).
9. L.A.Ostrovsky, ZhETF, vol. 33, 905 (1965).
10. D.Grischovsky, E.Conrtens, J.A.Armstrong, Phys. Rev. Lett., vol. 31, 422(1973).
11. S.A.Akhmanov, V.A.Vislouxh, A.S.Chircin, Uspehi Fiz. Nauk, vol. 149, 449(1986).
12. K.B.Dysthe, Proc. R. Soc. Lond. vol. A369, 105 (1979).
13. J.E.Feir, Proc. R. Soc. London, vol. A299, 54 (1967).
14. T.B.Benjamin, J.E.Feir, J. Fluid Mech. vol. 27, 417 (1967).

15. H.C. Yuen and B.M. Lake, Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves, *Advances In Applied Mechanics*, vol. 22, 67(1982).

## Нелинейная динамика коротких цугов волн в диспергирующих средах

Е.М.Громов, В.И.Таланов

Институт прикладной физики Российской академии наук  
ул. Ульянова, 46, Нижний Новгород, 603600, Россия  
E-mail: gromov@hydro.nnov.ru

Исследована нелинейная динамика коротких (порядка двух-трех длин волн) интенсивных цугов волн в диспергирующих средах в высших приближениях теории нелинейной дисперсии. Вначале изучены общие свойства нелинейных волновых уравнений высших приближений на примере стационарных локализованных нелинейных волн (солитонов) и динамики нестационарных волновых пакетов. Получены новые решения данных уравнений, описывающие фазомодулированные солитоны, скорость движения которых отлична от скорости линейных волн. Для нестационарных волновых пакетов изучены эффекты, отсутствующие в параболическом приближении, такие как, зависимость скорости движения пакета от его интенсивности (нелинейная дисперсия) и протяженности (линейная абберация). Затем рассмотрены примеры нелинейной динамики коротких цугов интенсивных гравитационных волн на глубокой воде и электромагнитных и ленгмюровских волн в изотропной плазме. Для гравитационных волн на глубокой воде приведены результаты экспериментальных исследований и численного моделирования распространения коротких интенсивных цугов в высших приближениях теории дисперсии. Показано совпадение экспериментальных результатов с результатами численного счета уже в третьем приближении теории нелинейной дисперсии. Для электромагнитных волн в изотропной плазме исследована модуляционная неустойчивость плоских волн. Показано исчезновение модуляционной неустойчивости при превышении критического значения амплитуды, величина которой определяется нелинейной дисперсией.

# PROCESSING INFORMATION-BEARING CHAOTIC SIGNAL IN A PRESENCE OF NOISE USING COUPLED OSCILLATING SYSTEMS

A. K. Kozlov and V. D. Shalfeev

Radiophysical Faculty, University of Nizhny Novgorod  
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603600, RUSSIA  
E-mail: alex@hale.appl.sci-nnov.ru, shalfv@rf-nngu.nnov.ru

## Abstract

Transmission of binary information using chaotic oscillations as a carrier is considered. The method of noise reduction via processing received signal with two *directionally coupled oscillating systems* is suggested. The efficiency of the method proposed is considered for white and low-frequency noise and different values of the coefficient of coupling. All the experimental data are obtained for mathematical model of simple chaotic oscillator — the tunnel diode generator.

## 1 Introduction

In this paper we consider the following problem: how to transmit a binary informational signal using analog chaotic process in a presence of noise. The problem is acute for various branches of engineering where deterministic chaos are expected to be applied — spread-spectrum communications, secure communications, data compression, etc. [1–6].

## 2 Robust scheme of signal transmission

The common scheme of signal transmission is shown in Fig. 1. Binary signal  $s$ , say, the sequence of “0” and “1”, passing through the encoder  $E$  is transformed to the pseudo-random time-series or chaotic continuous process  $y_{tr}$ . While propagating through the communication channel the transmitted signal  $y_{tr}(t)$  is corrupted with noise  $\xi(t)$  so the received signal  $y_r(t)$  is not quite identical to the transmitted one  $y_{tr}(t)$ . The point is to suggest a design of decoder which is able to extract information from chaos reducing the influence of noise.

Here we consider a simple realization of the scheme from Fig. 1 based on the circuitry of the tunnel diode generator which is shown in Fig. 2a. This chaotic oscillator was suggested by Rabinovich and Kiyashko in 1980 [7] and, perhaps, was the first generator for producing chaotic signals. There is the only nonlinear element in the circuitry of Rabinovich-Kiyashko generator — the tunnel diode which characteristic is shown in Fig. 2b. Chaotic oscillations of the generator usually look like relatively slow motions along  $\alpha$  and  $\beta$  pieces of the tunnel diode characteristic with fast jumps between them. The generator has rather complex behavior and very simple circuitry and, as an illustration, may be clearly implemented in a scheme of secure communications. The circuit in Fig. 2a where points 1 and 2 is merely connected with wire corresponds to autonomous generator. If the wire is replaced with controlled voltage source we have the encoder which transforms input informational signal to the complex oscillations. If points 1 and 2 are disconnected we have passive oscillating system with input 1 and output 2 corresponding to the encoding generator so it may be treated as a decoder. This approach resembles one suggested by Pecora and Carroll in 1990 [8] and is similar, in a sense, to that developing by Hasler where decoding oscillating system provides inverse signal transformation to the encoding one [9]. There is still another

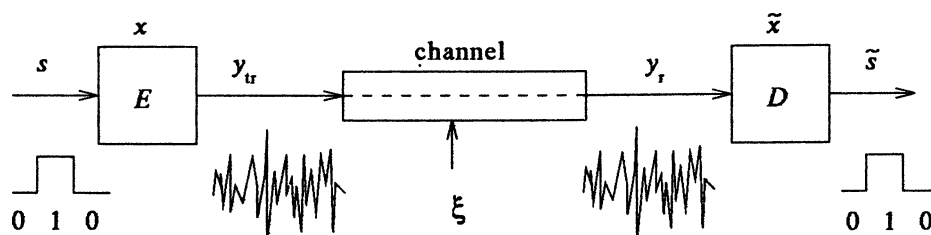


Fig. 1.



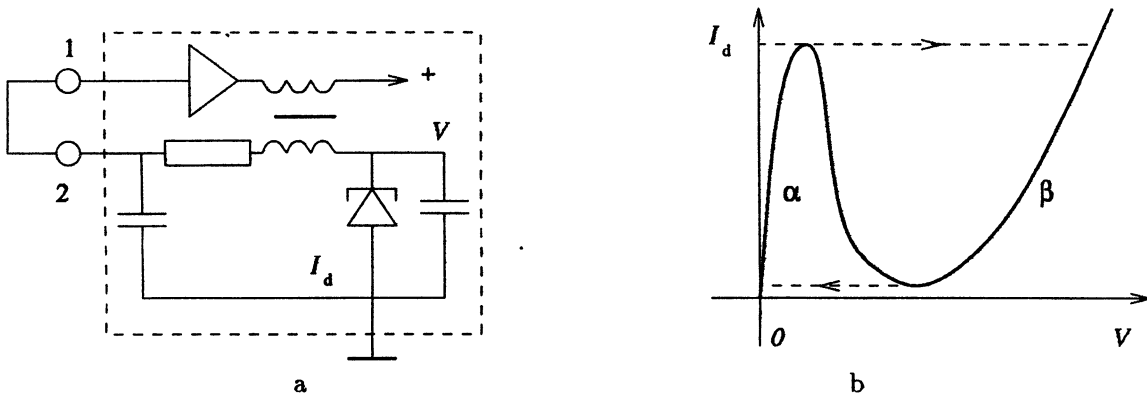


Fig. 2.

way of synchronous signal processing based on stochastic synchronization of generators discovered by Afraimovich, Verichev and Rabinovich in 1986 [10]. Below we show how to exploit some advantages of that approach to increase noise immunity of decoder.

First, we consider the common signal processing scheme which is displayed on Fig. 3. Here  $y \equiv y(t, s(t))$  are complex oscillations induced by input signal  $s(t)$ . Transmitted signal  $y_{tr} \equiv y + s$  passes through the communication channel with additive noise so the received signal is  $y_r \equiv y_{tr} + \xi$ . Without noise, if all the parameters of decoder and encoder are equal then the received signal  $y_r$  produces in the decoder complex oscillations which become strictly identical to the oscillations in the encoder as time increases:  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t) - y(t)| = 0$ . Then we obviously get  $\tilde{s}(t) = y_r(t) - \tilde{y}(t) = s(t)$ .

The situation dramatically changes in a presence of noise because of two reasons. First, input noise disturbs decoder's oscillations  $\tilde{y}(t)$  so they could not be equal to  $y(t)$  no longer. Second, the noise passes through the decoder directly to its output (see Fig. 3). To avoid this we suggest two-cascaded receiver using filtered output of the first cascade  $\tilde{y}_1(t)$  to synchronize the second one.

Now we consider two schemes using the idea proposed which are displayed on Figs. 4–5. The only difference between them is the way the cascades are synchronized. In the first case (Fig. 4) we use two identical receivers connected merely with wire just like in experiment of Lozi and Chua [11]. Another scheme (Fig. 5) is improved by choosing varying directional coupling between receiving cascades. Moreover, the second cascade is self-oscillating system whereas in Fig. 4 both receiving cascades are passive. The design displayed on Fig. 5 is the main point of our presentation. Now let us consider how it works.

We treat sinusoidal input signal as information "1" and no input state as "0". (Sinusoidal input, however, is not the best way to govern encoder's oscillations but quite enough for explanation.) Without noise, when there is no input the oscillations in all the three systems synchronize so the output difference signal  $d(t)$  tends to zero. When there is an input signal the response oscillations of the first receiving cascade  $\tilde{y}_1(t)$  could not be synchronous to transmitted signal  $y(t)$  as well as  $\tilde{y}_2(t)$  with respect to both  $y(t)$  and  $\tilde{y}_1(t)$ . Desynchronization of receiving cascades caused by input "1" may be detected as finite chaotic oscillations of difference  $d(t)$ . In a presence of noise there is no longer strictly zero output of the decoder but time periods corresponding to input "0" and "1" may be distinguished by observing current dispersion of the difference  $d(t)$  with finite time of averaging. Of course, with increase of noise the difference between the values of dispersion of output bursts corresponding to input "0" and "1" ('contrast') vanishes. And this is the principal limitation of admissible noise for the scheme proposed.

### 3 Computer simulation

The efficacy of the scheme for noise reduction depends in a great extent on frequency bandwidth of the noise. Power spectra of complex transmitted signal as well as white and low-frequency noise are shown in Fig. 6. Both Fig. 6a and Fig. 6b correspond to signal-to-noise ratio 19dB.

For white noise, even the first receiving cascade of the decoder (see Fig. 5) significantly suppresses higher frequencies of the noise due to its own filtering properties. It leads to perfect filtering of synchronizing signal  $\tilde{y}_1(t)$  so quiet periods and bursts of desynchronization in the decoder's output are well distinguished and informational signal is clearly detected as one can see in Fig. 7.

For low-frequency noise which power spectrum occupies the band of oscillating systems (see Fig. 6b), it is possible to achieve good quality of detection for small influences only. In this case, the output

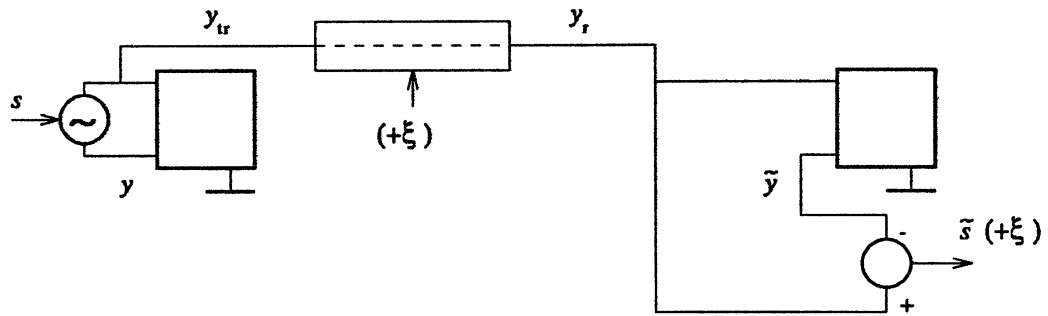


Fig. 3.

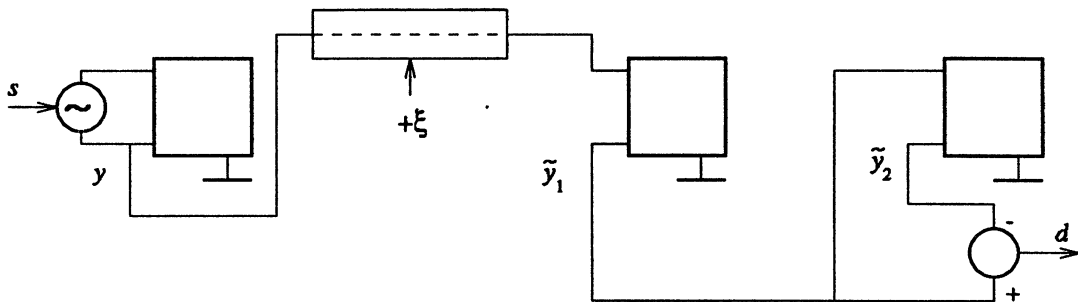


Fig. 4.

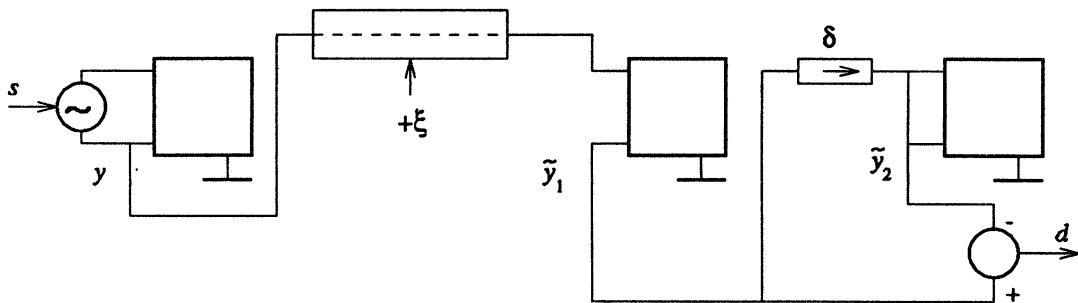


Fig. 5.

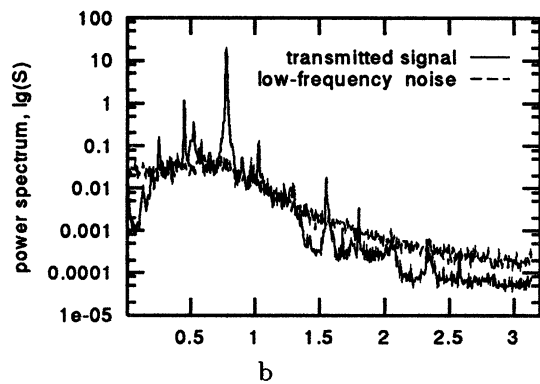
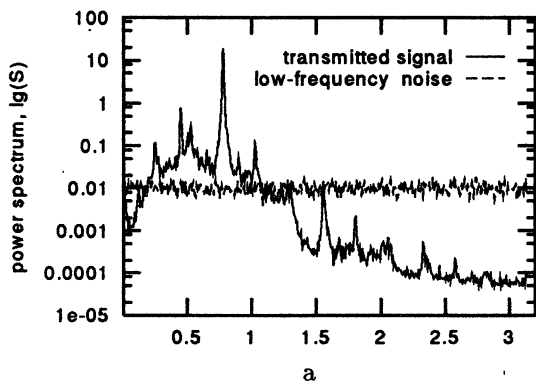


Fig. 6.

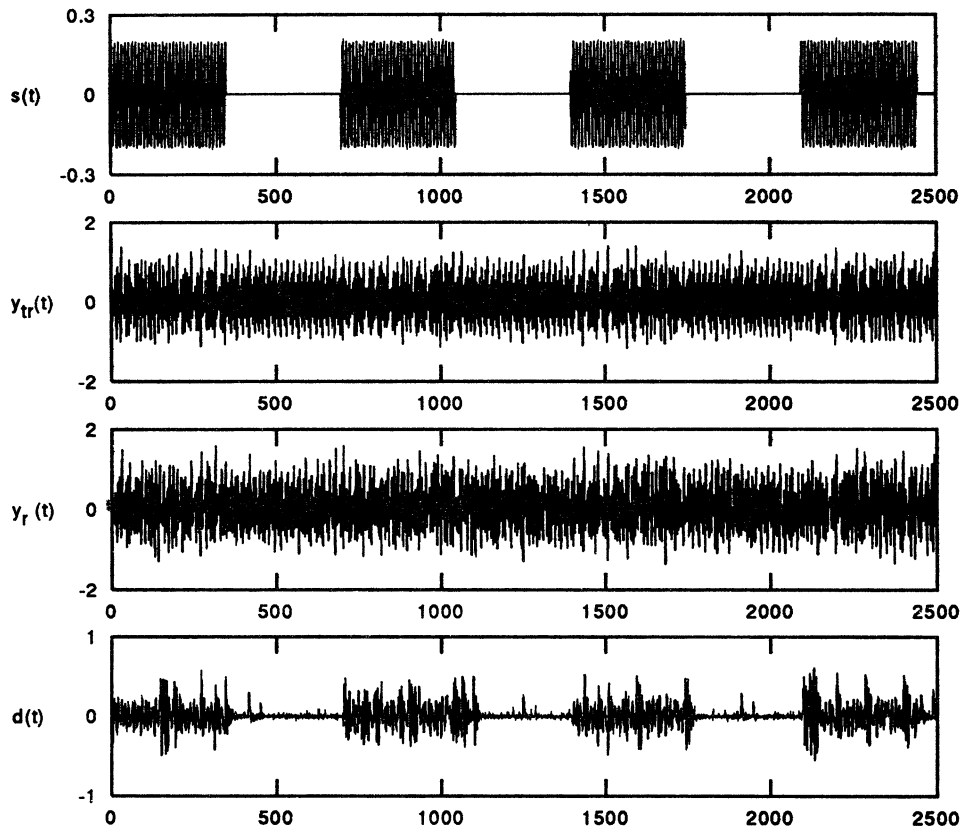


Fig. 7.

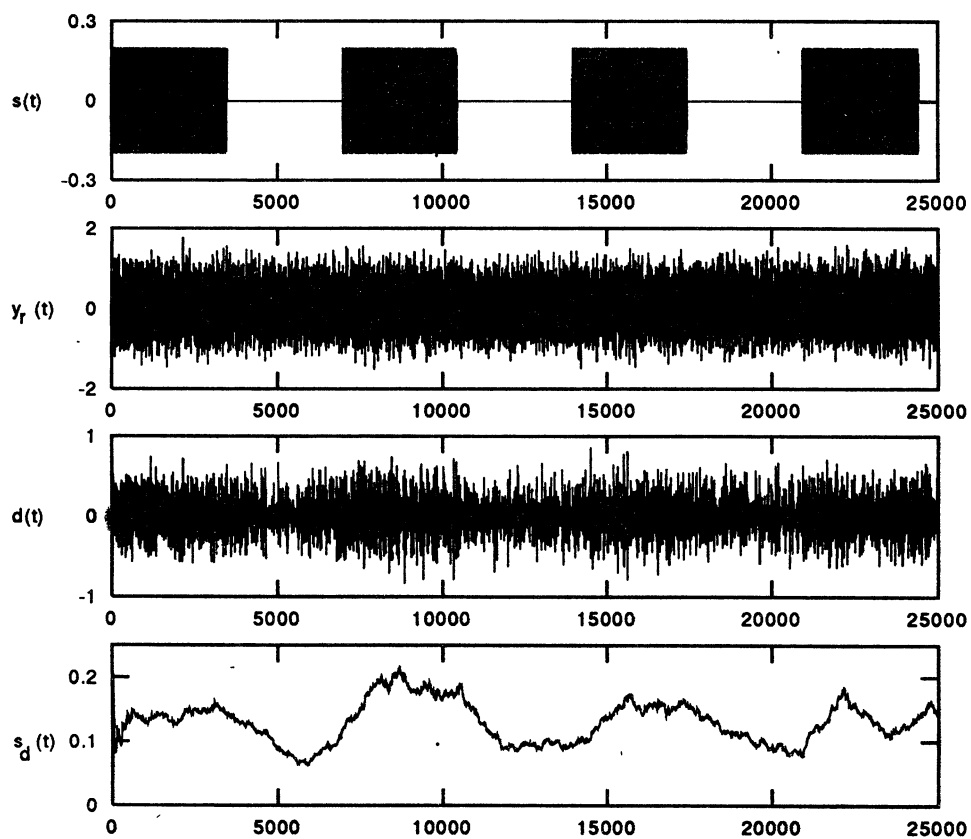


Fig. 8.

difference signal  $d(t)$  looks like the sequence of more or less frequent bursts of desynchronization. Now the different levels of intensity of the bursts correspond to input "0" and "1". To detect "0" or "1" in the output we calculate the current dispersion  $\sigma_d(t_i)$  of sampled difference signal  $d(t_i)$  over finite time of averaging

$$\sigma_d^2(t_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left( d(t_j) - \overline{d(t_i)} \right)^2, \quad \overline{d(t_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} d(t_j), \quad t_i - T \leq t_j \leq t_i,$$

where  $T$  is time of averaging. Time-series corresponding to input informational signal  $s(t_i)$ , received signal corrupted with low-frequency noise  $y_r(t_i)$ , output difference signal  $d(t_i)$ , and normalized current dispersion of the difference  $\sigma_d(t_i)/\sigma_{y_r}$  are presented on Fig. 8. Upper levels of value of  $\sigma_d(t)/\sigma_{y_r}$  correspond to input "1" and the lower ones — to "0". The averaged deviation between output "0"- and "1"-levels called  $a$  characterizes sensitivity of receiving scheme and strongly depends on the intensity of noise. It is obtained numerically that the value of  $a$  decreases with the increase of noise intensity (or decrease of signal-to-noise ratio, SNR) and tends to zero for sufficiently strong influences. Plots of  $a$  versus SNR obtained for different values of the coefficient of coupling  $\delta$  and SNR equal to 19dB are shown on Fig. 9. Figures near the curves correspond to the values of  $\delta$ . The function  $a$  of SNR calculated for the detecting scheme

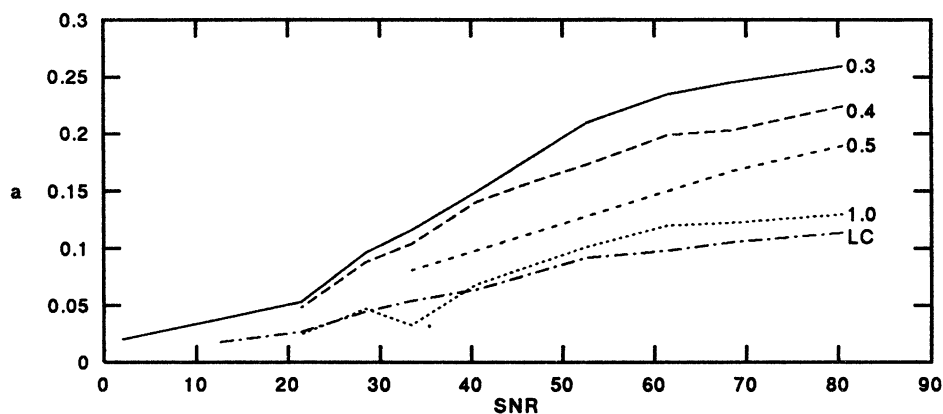


Fig. 9.

which was designed according to [11] (see Fig. 4) is depicted in Fig. 9 with letters "LC". Graphs presented on Fig. 9 evidently show that our improved scheme (see Fig. 5) may give us more than twice gain in sensitivity or, in the other words, noise immunity of the decoder with respect to the scheme shown on fig. 4. However, the price of the gain in sensitivity for small coefficient of coupling  $\delta$  is the lost of rapidity of the system since the decrease of  $\delta$  immediately leads to slowing down of transition processes in the decoder.

## References

- [1] A. S. Dmitriev, A. I. Panas, and S. O. Starkov. Experiments on speech and music signals transmission using chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 5(4), 1995.
- [2] K.M. Cuomo, A.V. Oppenheim, and S.H. Strogatz. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Trans. Circ. and Syst.-II: Analog and Digital Signal Processing*, 40(10):626–633, 1993.
- [3] Lj. Kočarev, K.S. Halle, K. Eckert, and L.O. Chua. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2(3):709–713, 1992.
- [4] A.P. Волковский, Н.Ф. Рутьков. Синхронный хаотический отклик нелинейной колебательной системы как принцип детектирования информационной компоненты хаоса. *Письма в ЖТФ*, 19(3):71–75, 1993.
- [5] A. K. Kozlov and V. D. Shalfeev. Selective suppression of deterministic chaotic signals. *Tech. Phys. Lett.*, 19(12):769–770, 1993.

- [6] H. Dedieu, M.P. Kennedy, and M. Hasler. Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuit. *IEEE Trans. Circ. and Sys.-II: Analog and Digital Signal Processing*, 40(10):634–642, 1993.
- [7] Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением. *Радиотехника и электроника*, 25(2):336–343, 1980.
- [8] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8):821–824, 1990.
- [9] U. Feldman and M. Hasler. Inverse system realization with operational amplifiers: Stability vs. non-ideal characteristics. In M. P. Kennedy, editor, *3<sup>rd</sup> Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Dublin, Ireland, 28–29 July 1995*, pages 139–142.
- [10] V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, and M.I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Radiophys. and Quantum Electron.*, 29:795–803, 1986.
- [11] R. Lozi and L. O. Chua. Secure communications via chaotic synchronization. II. Noise reduction by cascading two identical receivers. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 3(5):1319–1325, 1993.

## ВЫДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ИЗ ХАОТИЧЕСКОГО СИГНАЛА В ПРИСУТСТВИИ ШУМА С ПОМОЩЬЮ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. К. Козлов, В. Д. Шалфеев

Рассматривается способ передачи двоичной информации хаотическими сигналами в присутствии шума. В качестве источника хаотических колебаний используется простой генератор на туннельном диоде [7], схема которого показана на рис. 2. Информационный сигнал, подаваемый в виде напряжения на клеммы "1" и "2", преобразуется в хаотические колебания. Выделение информации из хаотических колебаний в отсутствие шума возможно согласно методике, предложенной авторами ранее [5]. Для подавления шума предлагается использовать в декодере однонаправленно связанные колебательные системы, согласованные с хаотическим автогенератором передатчика (см. рис. 5). При наличии шума в канале на выходе декодера наблюдаются хаотические колебания, интенсивность которых минимальна, когда информационного сигнала нет, и максимальна во время действия сигнала. Соответствующие осциллограммы для белого и низко-частотного шума (отношение сигнал-шум 19дБ) приведены на рис. 7 и рис. 8. Исследована зависимость чувствительности декодера от интенсивности шума для различных значений коэффициента связи  $\delta$  (рис. 9).

# LAMINAR-TURBULENT TRANSITION IN A BOUNDARY LAYER

V.V.KOZLOV

*Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, 630090, Russia*

## 1. Introduction

This lecture is based on the paper "Laminar-turbulent transition at a high level of a free stream turbulence" by Alfredsson P.H., Bakchinov A.A., Kozlov V.V. & Matsubara M., that was presented by V.V.Kozlov at IUTAM Symposium on Non-linear Instability and Transition in three-dimensional boundary layer. Manchester, England, July, 1995.

Laminar-turbulent transition problem is one of the most significant and have not solved problem in fluid mechanics. The transition phenomenon investigation is important in both fundamental and application planes, in particular for controlling the boundary layer for drag reduction at vehicle elements, turbine blades etc.

The present review is concerned with experimental investigations of laminar-turbulent transition of a high free stream turbulence levels, for the cases when the levels are greater or equal to 1% of a free stream velocity ( $U_0$ ). We will examine:

1. Receptivity and stability of the boundary layer.
2. Possibility of the Tollmien-Schlichting wave generation, existence, development and influence on the transition at a high free stream turbulence level in different flows.
3. Interactions of instability waves with localized disturbances with formation of nonlinear wave packets and turbulent spots.
4. Turbulent spots generation and development.

Before moving to consideration of specific problems we are going to emphasize that significant difference of laminar-turbulent transition at "low" and "high" free stream turbulence is that in the former case the transition is connected with Tollmien-Schlichting wave development, in the later case it is able to onset without the waves or according to Morkovin's classification [1], laminar-turbulent transition at a high free stream disturbance level is a "bypass" of Tollmien-Schlichting wave development (see figure 1).

## 2. Laminar-turbulent transition at a low free stream disturbance level.

Many investigators have tried to divide laminar-turbulent transition in boundary layers to stages using known facts on disturbance development. The number of stages reaches six and most of them are concerned with non linearity of the process.

It is possible to select the following general points in laminar-turbulent transition in boundary layers at low free stream turbulence [2, 3]:

- 1) Tollmien-Schlichting wave generation;

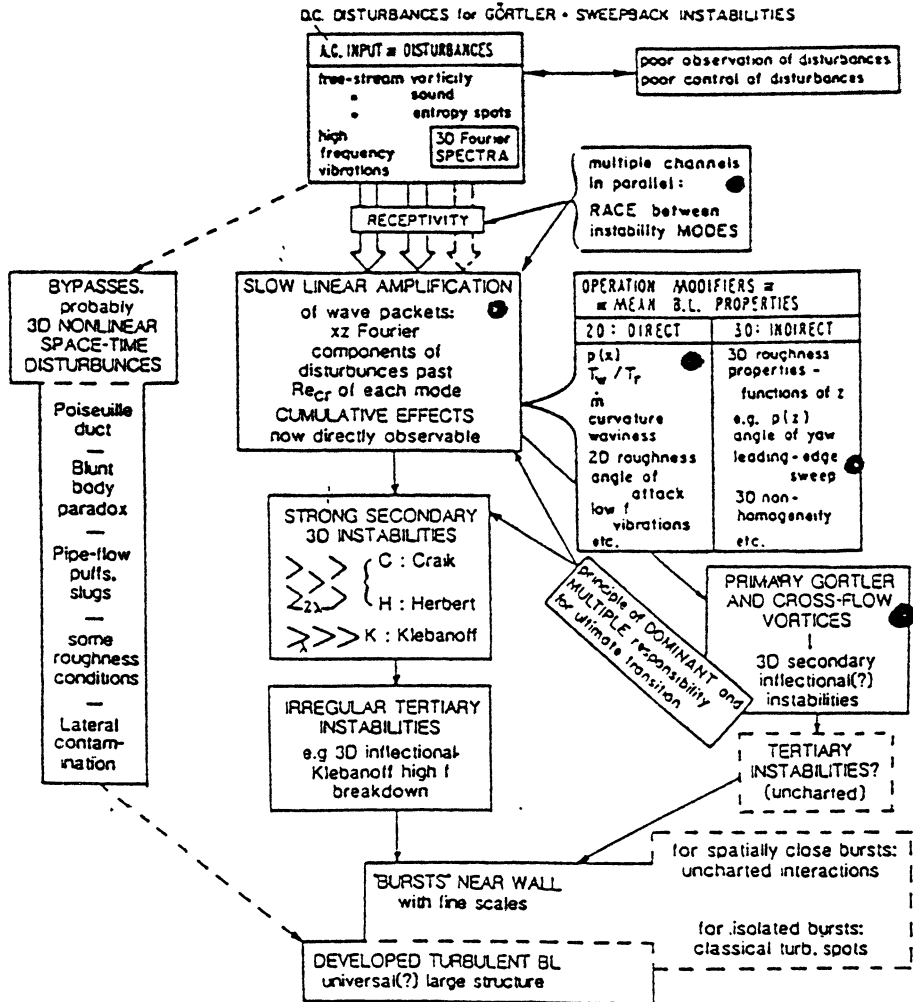


Figure 1. Transition processes in wall layers [ 1].

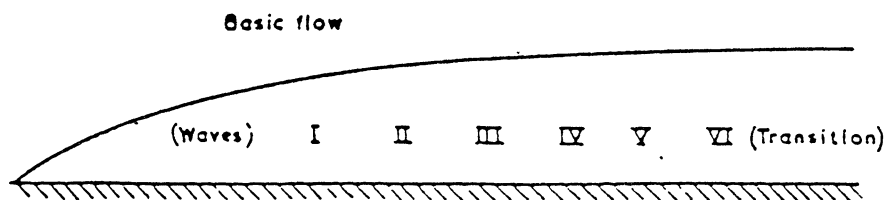


Figure 2. Instability of the boundary layer on flat plate and its transition to turbulence [ 2]

- I. Region of instability to small wavy disturbances.
- II. Region of three-dimensional wave amplification.
- III. Peak-valley development with streamwise-vortex system.
- IV. Vorticity concentration and shear-layer development.
- V. Breakdown.
- VI. Turbulent-spot development.

- 2) linear Tollmien-Schlichting wave amplification;
- 3) nonlinear boundary layer breakdown to turbulence accompanied by disturbance interactions,  
appearance of nonlinear wave packets, turbulent spots etc. (see figure 2.).

First two stages have been reviewed in [3], now we turn to discussion of nonlinear stage of the transition. As a rule at amplitudes of about 1% nonlinearity of wave development and interaction becomes detectable. This stage of the transition is most significant to understand mechanism of turbulence appearance, because it covers deterministic laminar flow transformation to stochastic turbulent one. Nevertheless this stage is investigated weakly due to the process complexity.

Different attempts to imagine nonlinear steps of the transition like a sequence of events [3] are rather subjective but allow to select significant points of the process:

- 1) weakly nonlinear amplification of two-dimensional Tollmien-Schlichting wave.
- 2) 3-D triggering.
- 3) formation of nonlinear wave packets ( $\Lambda$ -structures).
- 4)  $\Lambda$ -structures transformation in turbulent spots and onset of fully turbulent boundary layer.

The division is rather conditional because different nonlinear processes exist in complex interplaying and some of them depending on specific conditions can be more significant than other or can be unrealized like in the case of the transition without turbulent spot formation [4].

Apparently, first evidence of non linearity under controlled conditions is generation of combination modes and development of system of multiple harmonics of a fundamental wave; in case of natural wave packet it is nonlinear wave interaction. Results of experimental simulations [4, 5] confirm significant role of multiple harmonics, subharmonics and other low frequency oscillations, their interactions with the fundamental wave and each other during the transition of initially two-dimensional disturbances. It should be mentioned that in the investigations [4, 5] two-dimensionality of disturbance field took place up to the latest stages of nonlinear process and the transition occurred bypassing turbulent spot formation. Such type of transition is known as "evolutionary" one. Nevertheless numerous experiments on laminar-turbulent transition in boundary layer point out that turbulent spot formation is in the most cases indispensable condition of the process.

In classic experiments by Klebanoff et. al. [6] the type of transition found was characterized by appearance of high frequency pulsation or "spikes" on oscilloscope traces of Tollmien-Schlichting wave. The spikes correspond to theoretically very unstable instantaneous inflectional velocity profiles that is background of secondary instability concept. Actually spike appearance is connected, probably, with three-dimensional structure of disturbance field [7]. Experimental data show that three-dimensional distortion of plane Tollmien-Schlichting wave and corresponding generation of spikes on oscilloscope traces lead to generation of system of longitudinal vortices. Each of the vortices develops downstream separately and is able to turn into turbulent spot. Up to now there is no exact answers on the questions about existence of secondary instability and origin of three-dimensional structures in the flow although there is intensive work in this direction [3]. Detailed experimental investigations [8] of the structure, generation and development of the vortices carried out using visualization and hot wire anemometry confirmed the vortices significance in the following formation of turbulence.

Last years attention of scientific community is attracted to turbulent spot investigation due to their importance in laminar-turbulent transition. Emmons [9] as well as Schubauer and Klebanoff [10] showed that the transition consists of random temporal alternation of laminar and turbulent states or traces of randomly arose turbulent formations (turbulent



spots) in laminar boundary layer. The spots grow downstream in a wedge regions that leads to their consolidation and finally to fully developed turbulence. Elder [11] was one of the pioneers who visualized turbulent spot in a water channel and confirmed experimentally Emmons suggestion about absence of interaction between the spots and their development independence.

Beginning with the middle of 1970th, significant success in turbulent spot investigations is connected with computers that allow to select mean characteristics of deterministic waves from turbulent pulsation using ensemble average.

Results of Cantwell, Coles & Dimotakis [12], Barrow, Barnes & Ross [13], Wignansky et al. [14] where they used the ensemble average method, significantly advanced understanding of turbulent spot development, structure, velocities of propagation and relations to surrounding fluid.

The subsequent rapid development of laminar-turbulent transition investigations at a low free stream turbulence level is detailed in recent reviews by W. Saric [15] and Yu. Kachanov [16].

### 3. Laminar-turbulent transition features at a high free stream turbulence level.

Overviews of papers on a laminar-turbulent transition at a high free stream turbulence (FST) level are presented in a chronological order in articles recently published in the *J. Fluid Mechanics* (1994), vol. 281, pp. 193-242: "Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Part 1 and Part 2". References in a schematic view demonstrating both authors and years are shown in figure 3 separately for theoretical understanding and experiments. Experiments under "natural" conditions are distinguished from those with controlled "model" disturbances. It should be emphasized that "model" experiments allow to obtain quantitative results and to separate a complicated mechanism of the laminar-turbulent transition into consequent stages by modeling consequently different stage of this process. At present this way is powerful method to understand and solve the laminar-turbulent transition problem.

In second part of the report some results obtained by different authors will be commented in an understanding way. Figure 4 shows a flow structures visualization at a high FST level ( $Tu = 3\%$  of  $U_0$ ) obtained by means of a smoke wire located in the coming flow [17]. As shown in the figure eddies penetrate in a flat plate boundary layer and are elongated along streamwise direction.

In the figure 5 smoke flow visualizations in boundary layer at low FST level (a) and high FST level (b) are presented. One can see that in latter case longitudinal streaky structures are obviously observed. These boundary layer structures were found to have deterrment scale in the span direction and correlate with a local boundary layer thickness.

On the next figure (fig. 6) both a flow visualization in a whole scale is shown (a) and spanwise correlation for this case is presented (b) [18]. The correlation of a fluctuation motion in the boundary layer is order of 10 mm that corresponds to two local boundary layer thickness.

Some quantitative experimental results on a localized boundary layer perturbations evolution are presented in figure 7. The figure reveals different propagation speed of a front

and rear of these disturbances and their not spreading in the span direction over two local boundary layer thickness [19, 20].

Figure 8 demonstrates a origination and development of a localized disturbance ("puff"-structure) in the boundary layer. On the basis of experiments [19-21] it have been demonstrated (figure 9) that two different types of symmetric "puff"-structures exist (3

## Laminar-Turbulent transition at a high level of a free stream turbulence (referenses)

| <u>Theoretical understanding</u> | <u>Experiments under "natural" conditions</u>                    |
|----------------------------------|--|
|                                  | 1976 Dyban, Ye. P., Eplik, E. Ya. & Suprun, T.T.                 |
|                                  | 1978 Arnal, D. & Juillen, J.C.                                   |
| "BYPASS"                         | 1982 Kosorygin, V.S., Polyakov, N.Ph.,                           |
| 1984 Morkovin M.V.               | Suprun, T.T. & Eplik, E. Ya.                                     |
|                                  | 1985 Kendall, J.M.   |
| "BYPASS"                         | 1988 Suder, K.L., O'Brien, J.E. & Reshotko, E.                   |
| 1989 Morkovin M.V.               | 1989 Gulyaev, A.N., Kozlov, V.E., Kuznetsov, V.R.,               |
| Reshotko E.                      | Minceev, B.I. & Sekundov, A.N.                                   |
|                                  | 1990 Kendall, J.M. (USA)   |
|                                  | 1990 Kosorygin, V.S. & Polyakov, N, Ph.                          |
|                                  | 1991 Kendall, J.M.   |
|                                  | 1992 Blair, M.F.   |
|                                  | 1994 Boiko, A.V., Westin, K.J.A., Klingmann, B.G.B.,             |
|                                  | Kozlov, V.V. & Alfredsson, P.H.                                  |
|                                  | 1994 Kendall, J.M.   |
|                                  | 1995 Alfredsson P.H., Bakchinof. A.A.,                           |
|                                  | Kozlov V.V. & Matsubara M.                                       |
|                                  |  |
| <u>Theoretical understanding</u> | <u>Experiments by generating controlled "model" disturbances</u> |
|                                  | 1985 Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                   |
|                                  | 1987 Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                   |
| " The lift-up effect"            | 1989 Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                   |
| 1990 Landahl, M.T.               | 1990a Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                  |
|                                  | 1990b Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                  |
|                                  | 1991a Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                  |
|                                  | 1991b Grek, H.R., Kozlov, V.V. & Ramazanov, M.P                  |
|                                  | 1991 Grek, H.R., Dey, J., Kozlov, V.V.,                          |
|                                  | Ramazanov, M.P & Tughto, O.N.                                    |
| ' Streamwise streaks'            | 1992 Grek, H.R. & Kozlov, V.V.                                   |
| 1993 Henningson, D.S,            | 1993 Bakchinov, A.A, Grek, H.R. & Kozlov, V.V.                   |
| Lundbladh, A. &                  | 1994 Westin, K.J. A., Boiko, A.V., Klingmann, B.G.B.,            |
| Johansson, A.V.                  | Kozlov, V.V. & Alfredsson, P.H                                   |
|                                  | 1994 Bakchinov, A.A, Westin, K.J.A.,                             |
| 1993 Herbert, T.                 | Kozlov, V.V. & Alfredsson, P.H.                                  |
| 1994 Henningson, D.S.            |  |
|                                  | 1995 Dovgal, A.V., Kozlov, V.V.                                  |
|                                  | 1995 Alfredsson, P.H., Bakchinov, A.A,                           |
|                                  | Kozlov, V.V. & Matsubara M.                                      |

Figure 3. Overview of papers on the laminar-turbulent transition at a high free stream turbulence level.

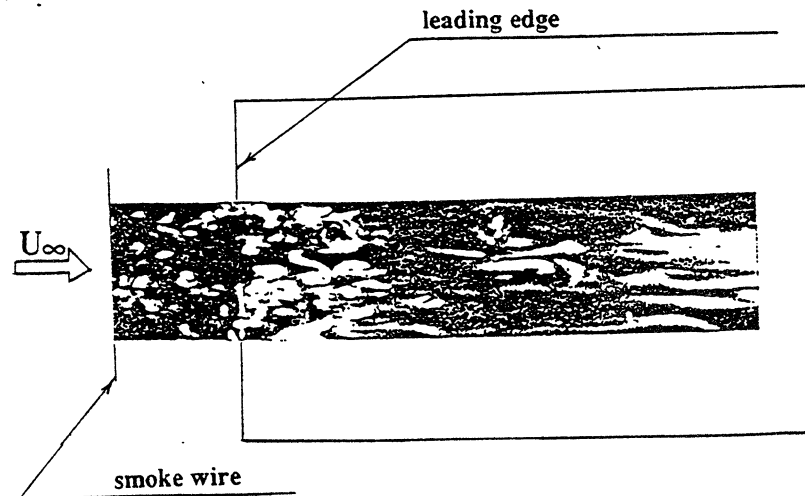


Figure 4. Smoke flow visualization (smoke wire)  
 $U_{\infty} = 4 \text{ m/sec}$ ,  $\epsilon = 3\%$  [17].

and 4). Two other types of anti-symmetric "puff"-structures (1 and 2) differed one from other by the rotation direction were found.

Evidence on the possibility of Tollmien-Shlichting (T-S) waves existence at a high FST level ( $Tu=1.5\%U_0$ ) is presented in figures 10 and 11, obtained from papers [22]. Characteristics of T-S waves (figure 10) and a wave amplitude evolution (figure 11) in comparison with the a low FST level case are shown. Characteristics of T-S waves in both cases are the same, whereas amplification rates along streamwise direction rather differs. At a high FST level a wave dissipation may be observed [22, 23].

Figure 12 demonstrates the turbulent spot origination process in the flat plate boundary layer under a "natural" conditions when an "incipient spot" appears in the vicinity of the leading edge. The initial disturbance is evidently observed to appear on one of the longitudinal structures and have periodical character.

The same kinds of boundary layer structures are generated under interaction T-S waves and so-called streaky structures induced in the boundary layer by free stream large scale eddy disturbances at high FST level (see figure 13). Quantitative results on the interaction of the T-S wave and streaky structures ("Puff"-disturbance) are shown in figure 14 [19, 24]. A result of this interaction were found to might be new streaky structures much larger amplitude ( $\sim 15\% U_0$ ).

A smoke visualization of the interaction process is demonstrated in figure 15. The interaction of an isolated impulse perturbation with "natural" streaky structures results in "incipient spot" and then lead to the turbulent spot.

As experiments on the development of the turbulent spot at both a low and a high FST level [23] show, integral characteristics of turbulent spots and their propagation speed were not found to depend on FST level ( see figure 16).

Experiments carried out in the controlled manner in the Novosibirsk group (until 1992) allowed to suggest the laminar-turbulent transition scenery at a high FST level (see figure 17) and to make comparison with the case of laminar-turbulent transition at a low FST level (see figures 18 and 19).

Extensive quantitative results of the experiments, obtained in Novosibirsk (ITAM) [21, 23-25] and Stockholm (KTH) [18-20, 22] on the interaction of the high frequency T-S wave with "puff"-disturbances allowed to correct the scenery of the "BYPASS"-transition (see figure 20).

The following conclusions can be done as a result of this review: it was found one of possible mechanisms of laminar-turbulent transition at a high free stream turbulence level through the interaction of localized structures with Tollmien-Schlichting waves.

Taking into account above results it is possible to conclude that a lot of features of boundary layer interaction with a high free stream turbulence are the same at high as well as at low level, namely, free stream disturbances can generate streaky structures ("puff"-disturbances), Tollmien-Schlichting wave packets, "incipient spot"-disturbances and turbulent spots. Of course, laminar-turbulent transition at a high free stream turbulence level is very sophisticated and this review can not be considered as complete.

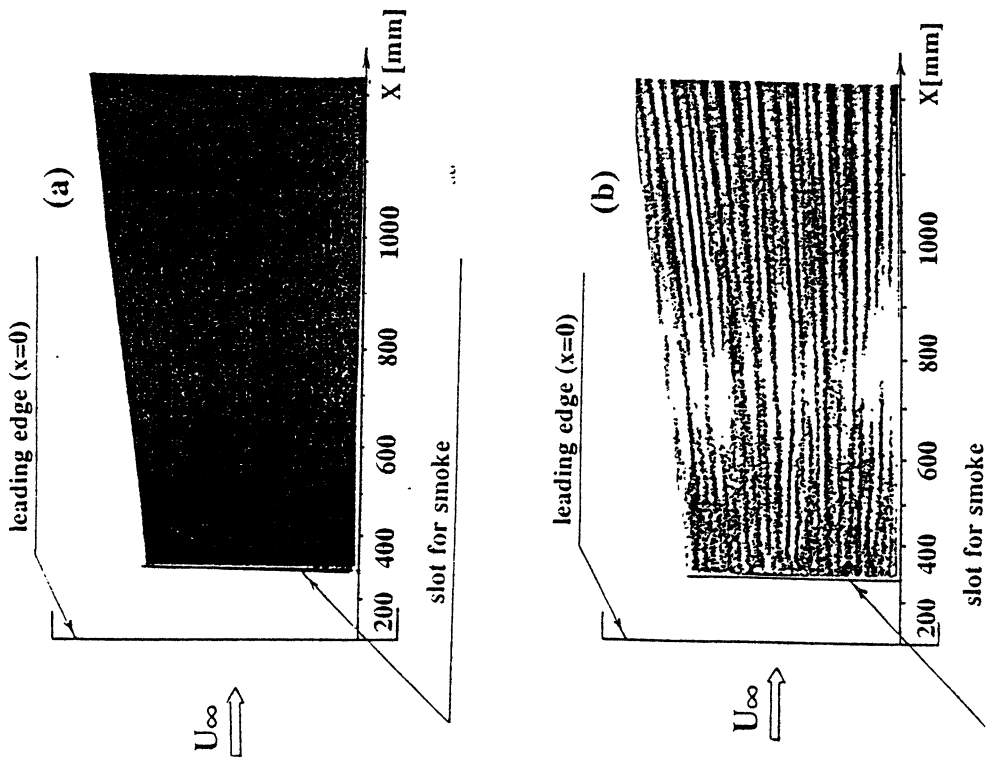


Figure 5. Smoke flow visualization in boundary layer  $U_{\infty}=3\text{m/sec}$   
 (a)  $\epsilon=0.02\%$   
 (b)  $\epsilon=1.5\%$

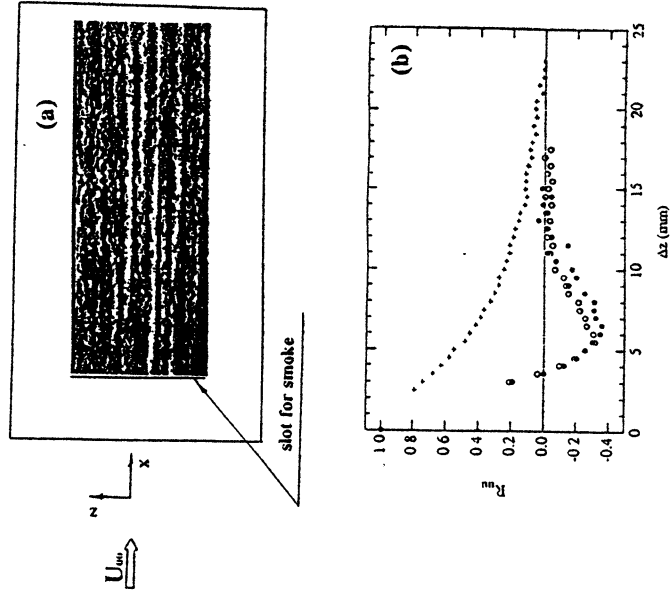


Figure 6. The flow visualization (a) and spanwise correlation (b) in the boundary layer for  $U_{\infty}=8\text{m/sec}, \epsilon=1.5\%$ :  
 (o)  $x=500\text{mm}$  ( $R=890$ ), (o)  $x=1000\text{mm}$  ( $R=1260$ ),  
 (+) spanwise correlation in the free stream ( $x=500\text{mm}$ )[18].

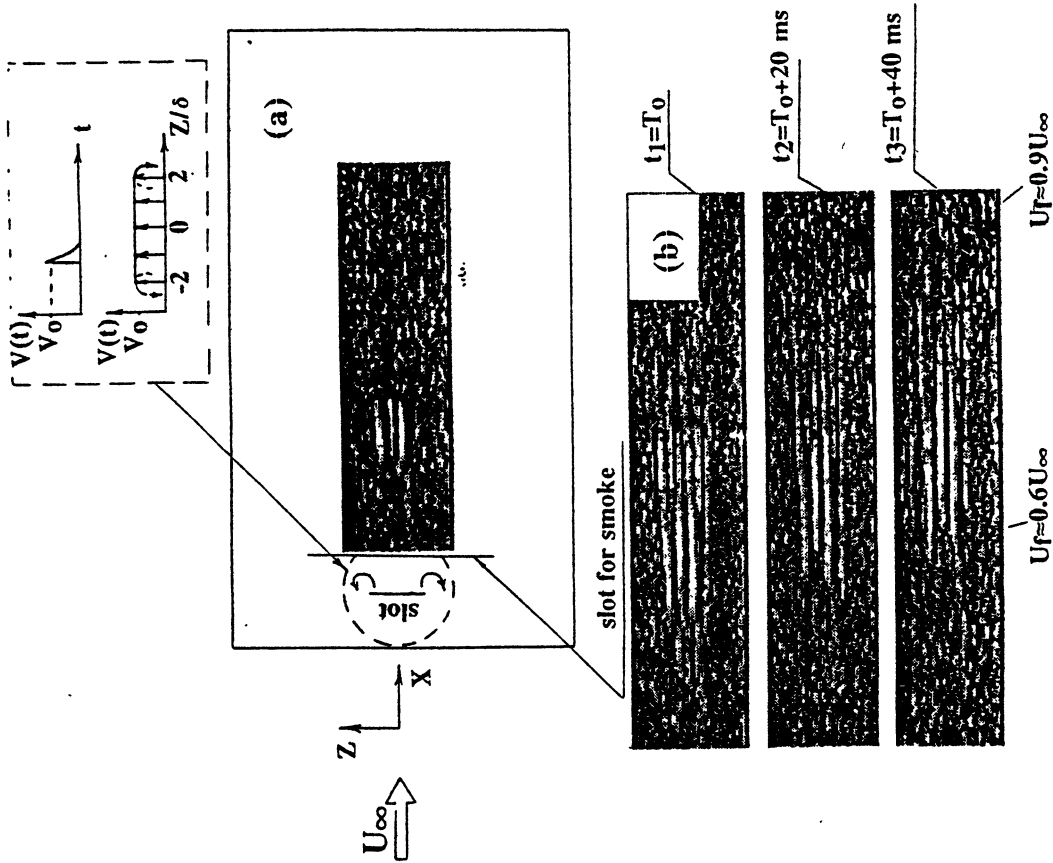


Figure 8. Smoke flow visualization of puff structure.  
 a) experimental set up  
 b) evolution of a localised disturbance

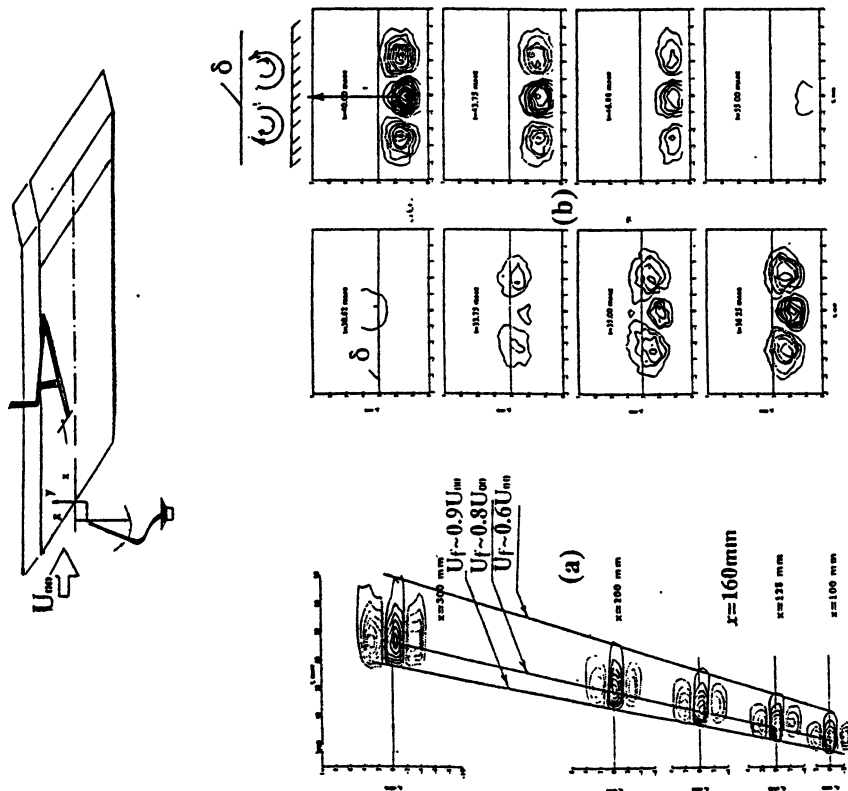


Figure 7. Evolution of a localised free stream disturbance[20]  
 a) Downstream development of the  $u$ -velocity structure (horizontal plane) at five different  $x$ -positions.  
 b) Contours of the streamwise velocity perturbation in the  $(y, z)$ -plane at  $x=160 \text{ mm}$  for several times through the passage of the boundary layer disturbance, time is indicated in each figure.

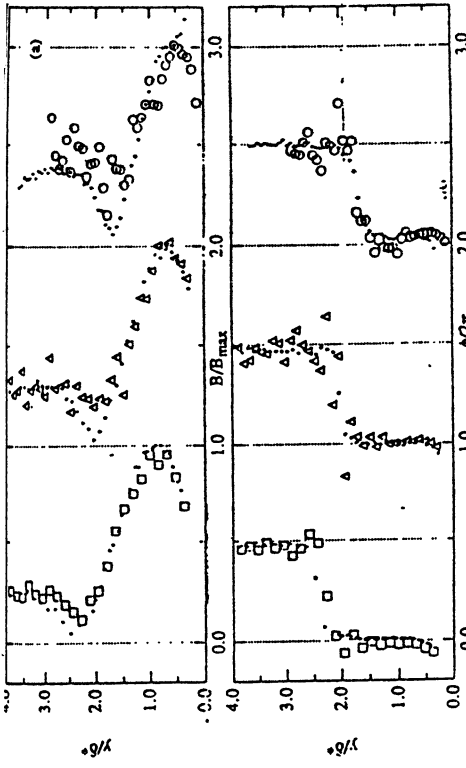


Figure 10. Characteristics of TS-waves in the presence of FST[22].

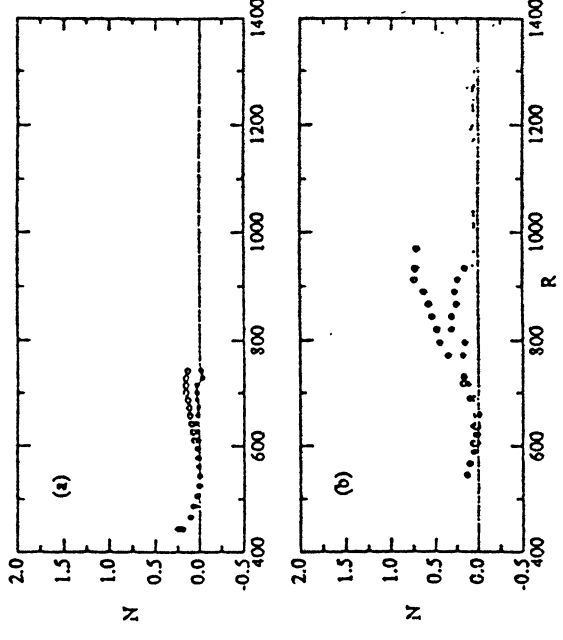


Figure 11. Amplitude evolution with and without the grid. (a)  $F=200$ , (b)  $F=150$  [22].

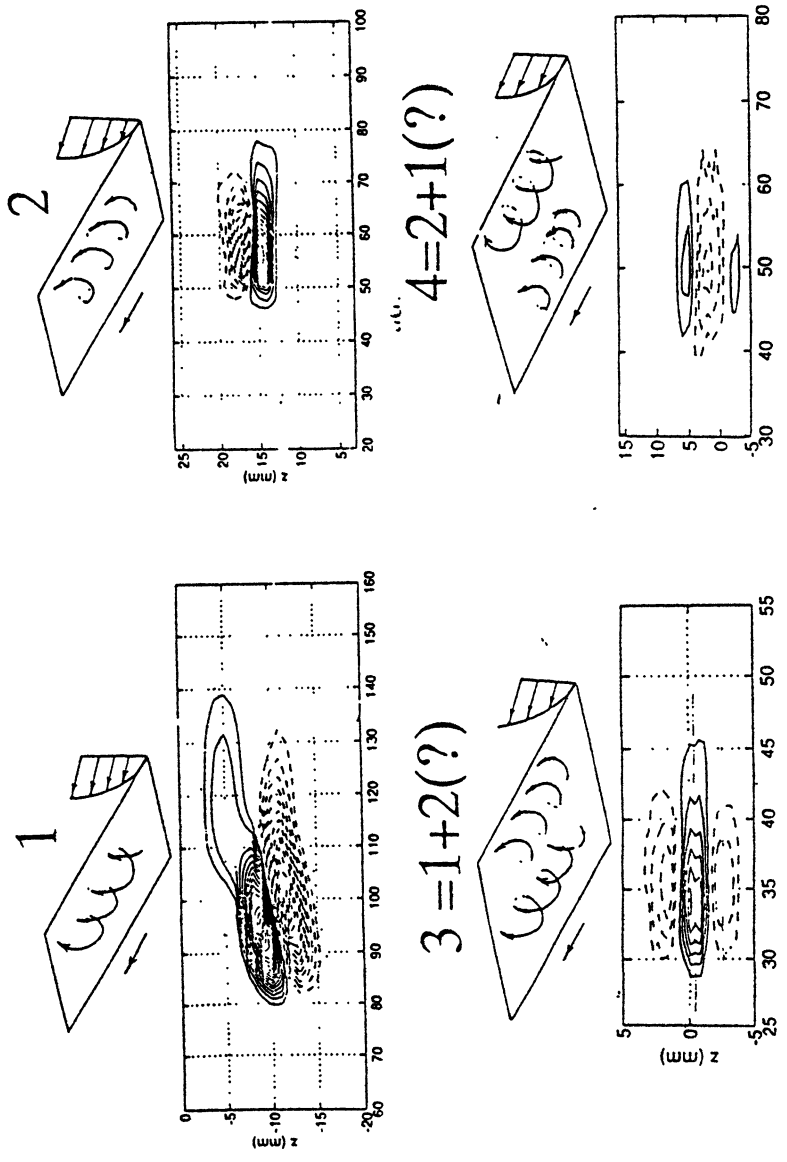


Figure 9. General types of the boundary layer streaky structures "PUFFS".

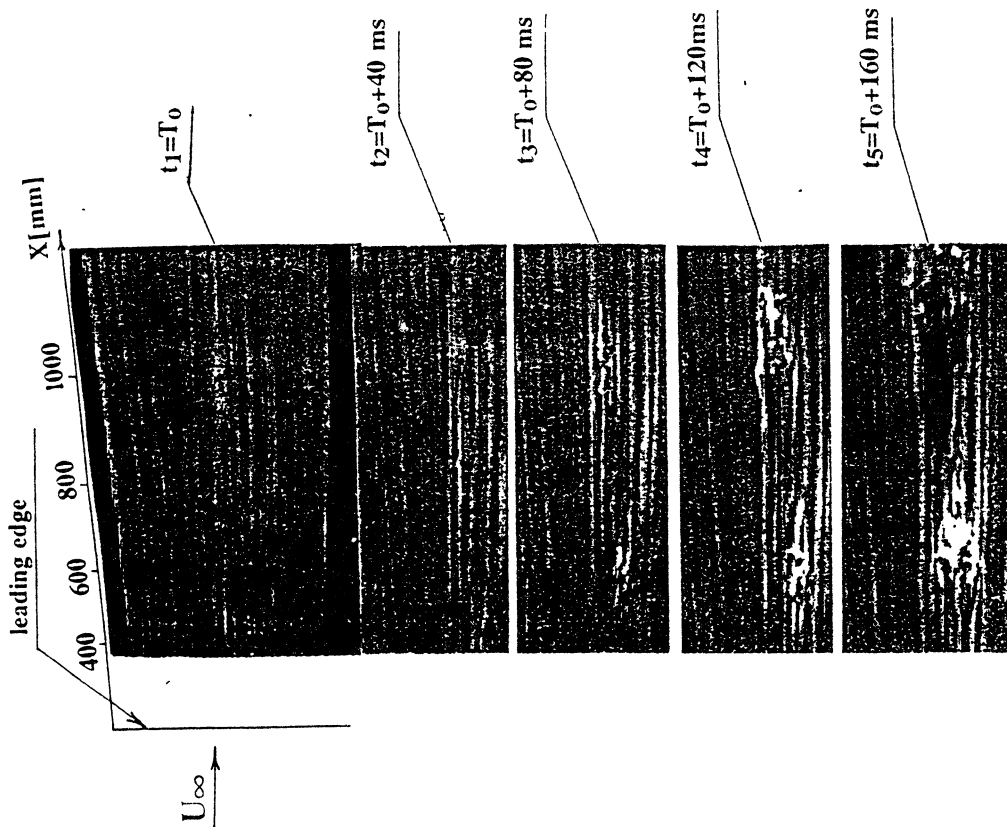


Figure 12. Smoke flow visualization in boundary layer  $U_{\infty}=3\text{m/sec}$ ,  $\epsilon=1.5\%$  (the incipient spots appear near the leading edge)

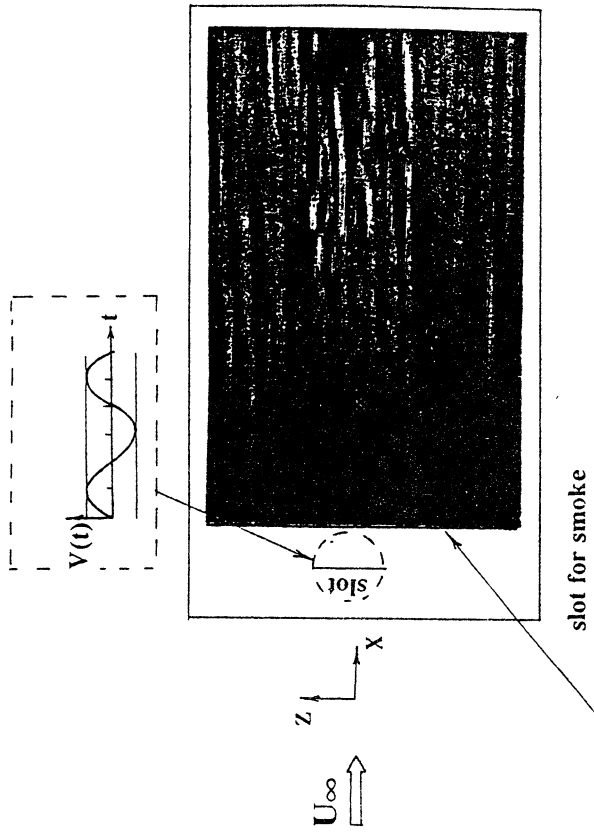


Figure 13. Smoke flow visualization of interaction between T-S waves and streaky structures in the boundary layer created by free stream turbulence.

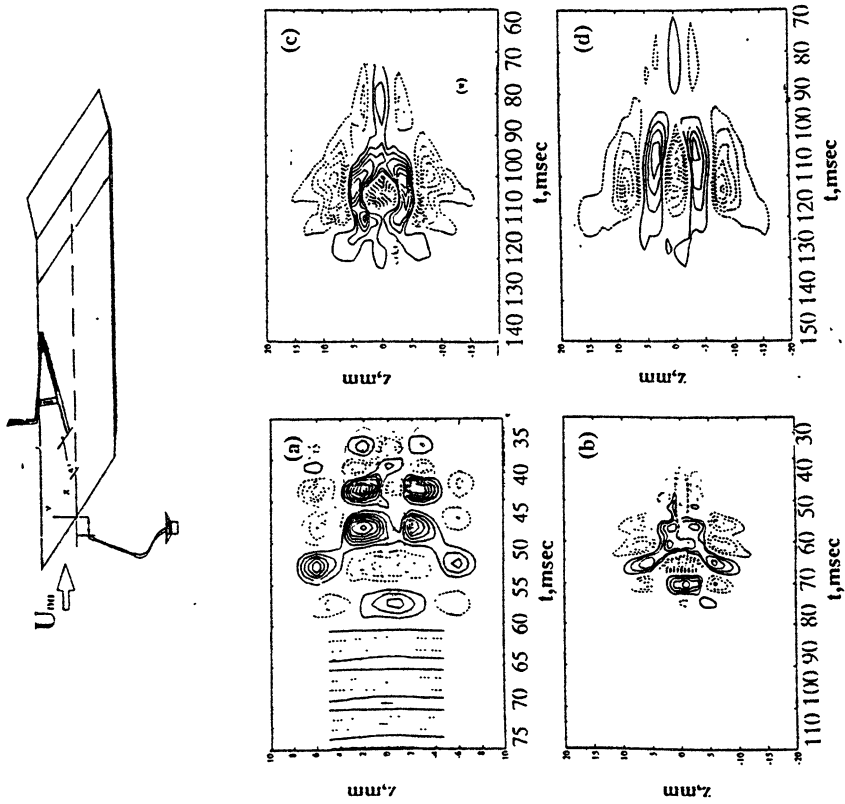


Figure 14. Interaction between T.-S.w. and streaky structures ("puffs") [19].

Spanwise view of the non-linear wave packet formation and spanwise contours of streamwise velocity perturbation in

- (a)  $x=160\text{mm}$  ( $Re\delta^*=456$ ) at  $y=0.92\text{mm}$ ,
- (b)  $x=200\text{mm}$  ( $Re\delta^*=511$ ) at  $y=1.23\text{mm}$ ,
- (c)  $x=300\text{mm}$  ( $Re\delta^*=631$ ) at  $y=1.85\text{mm}$ ,
- (d)  $x=400\text{mm}$  ( $Re\delta^*=724$ ) at  $y=2.60\text{mm}$

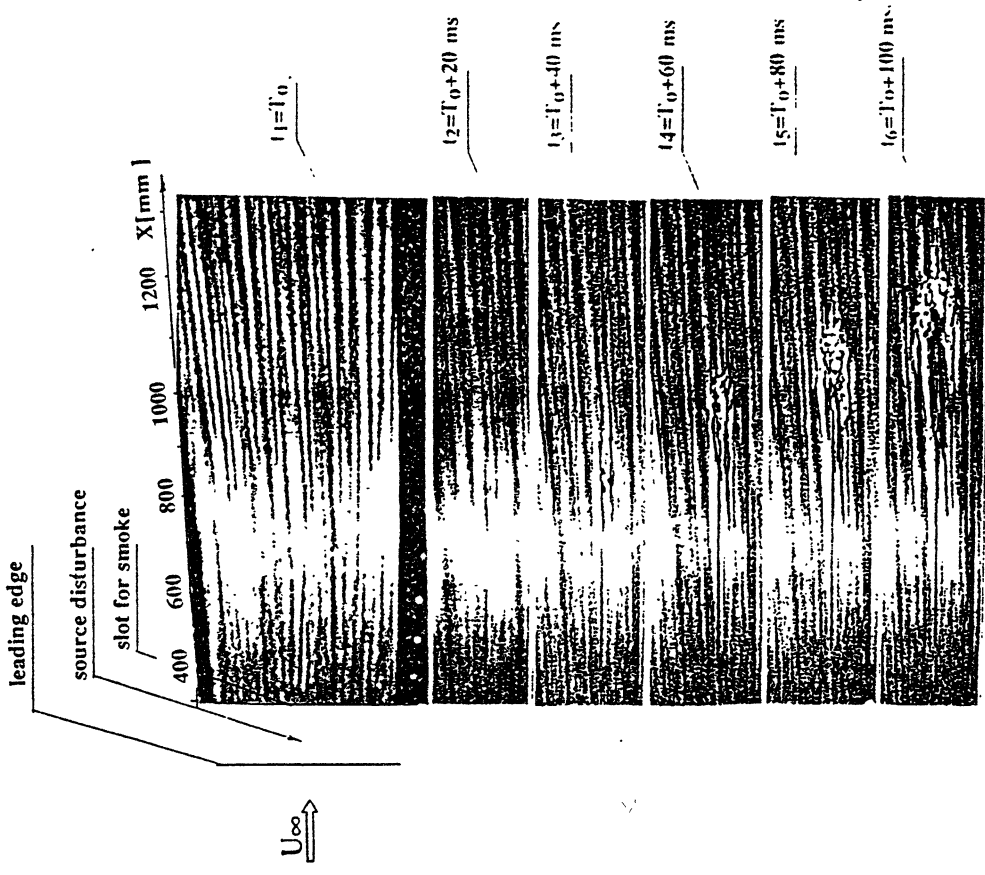


Figure 15. Smoke visualization of breakdown (incipient spot) to a turbulent spot in a boundary layer.



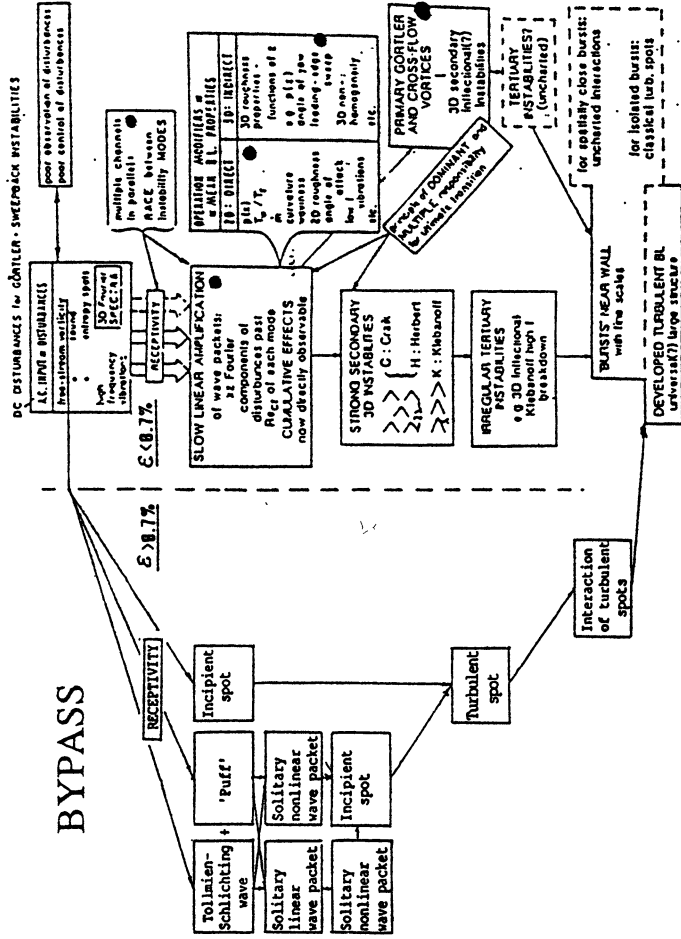


Figure 17. Transition process in wall layers, BYPASS-laminar turbulent transition at a high level of free stream turbulence (V.V.Kozlov version 1990-1992)

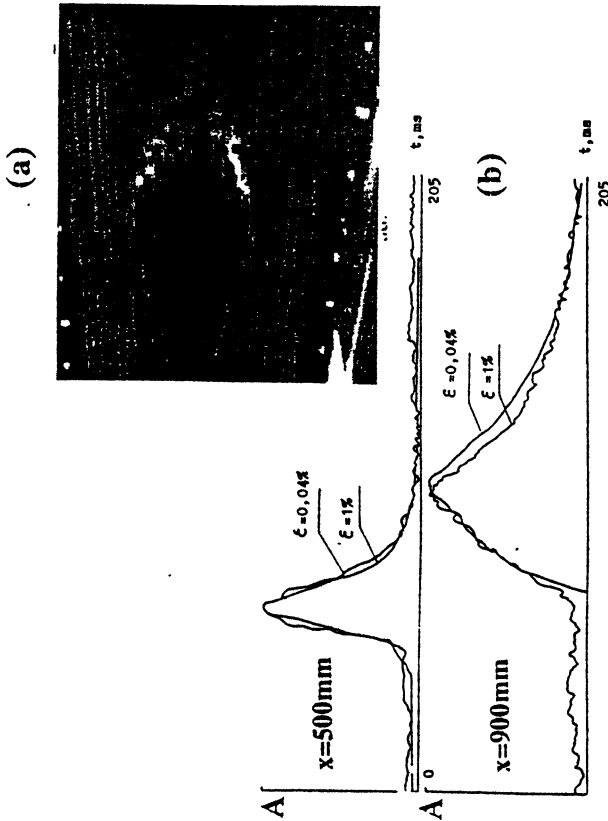


Figure 16. Turbulent spot development depending on the free stream turbulence. a) smoke visualization. b) hot-wire signal [23].

# BYPASS

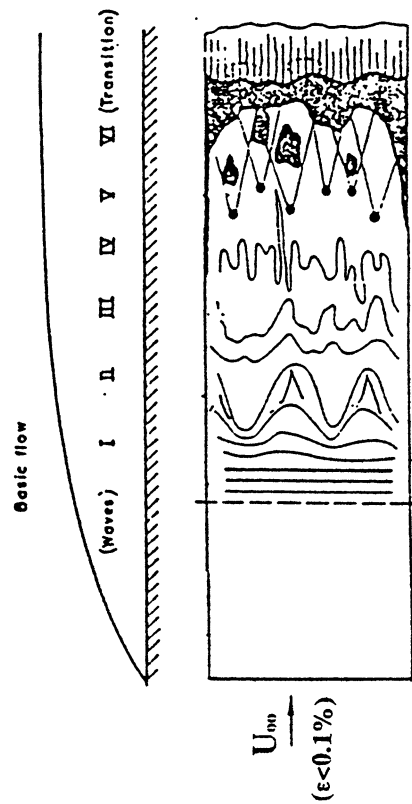


Figure 18. Instability of the boundary layer on flat plate and its transition to turbulence [J.T. Stuart, 1965; F.M. White, 1970]

- I. Region of instability to small wavy disturbances.
- II. Region of three-dimensional wave amplification.
- III. Peak-valley development with streamwise-vortex system.
- IV. Vorticity concentration and shear-layer development.
- V. Breakdown.
- VI. Turbulent-spot development.

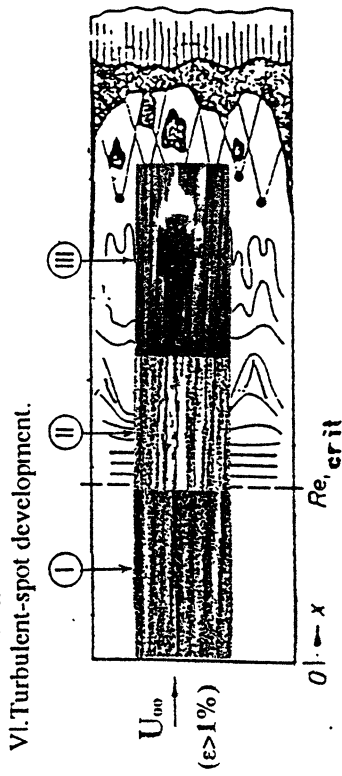


Figure 19. Laminar-turbulent transition at a high level of a free stream turbulence ( $\epsilon > 1\%$ ) and comparison with  $\epsilon < 0.1\%$ .

- I. Region of "Puffs" (streaky structures).
- II. Region "incipient spot" (interaction between T.-S. waves and streaky structures).
- III. Turbulent-spot development.

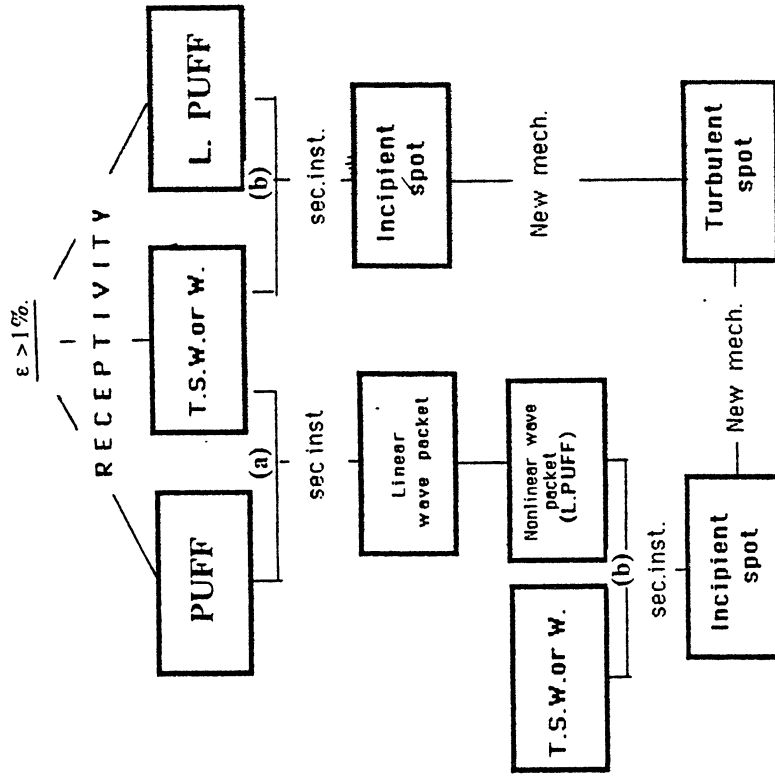


Figure 20. Laminar-turbulent transition at a high level of a free stream turbulence (a) mechanism [19],[24] and (b) mechanism [23],[25].

## 5. References

1. Morkovin, M.V.: Instability to turbulence and predictability, in *NATO AGAR Do graph.*, 1978, No. 236
2. Stuart, J. F.: Hydrodynamic Stability, in *Applied Mechanics reviews*, vol. 18, No. 7, 1965, p.p. 523-531.
3. Kachanov, Y.S., Kozlov, V.V., and Levchenko, V.Y.: *Beginning of Turbulence in Boundary Layers*, Novosibirsk: Nauka, Siberian Div. 152 pp. (in Russian).
4. Kachanov, Y.S., Kozlov, V.V., and Levchenko, V.Y.: Nonlinear development of a wave in a boundary layer, in *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza*, 1977, 3: 49-53 (In Russian). (Transl. *Fluid Dyn.* 1978, 12:383-90).
5. Kachanov, Y.S., Kozlov, V.V., and Levchenko, V.Y.: Experiments on nonlinear interaction of waves in boundary layer, in *Preprint No.16. Inst. Theoret. Appl. Mech., Siberian Div. USSR Acad. Sci.*, Novosibirsk, 1978, 35 pp. (In Russian).
6. Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D., and Sargent, L.M.: The three-dimensional nature of boundary layer instability, in *J.Fluid Mech.*, 1962, vol. 12. Pt.1.
7. Kachanov, Y.S., Kozlov, V.V., Levchenko, V.Y., and Pamazanov, M.P.: The nature of K-breakdown of laminar boundary layer, in *Izv. Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, Ser. Tekh. Nauk*, 1989, 2: 124-58 (In Russian). (Transl. *Sov. J. Appl. Phys.* 1990, vol. 4)
8. Kozlov, V.V., Levchenko, V.Y., and Saric, W.S.: Formation of three-dimensional structures in a boundary layer at transition, in *Preprint No. 10-83. Inst. Theoret. Appl. Mech., Siberian Div. USSR Acad. Sci.*, Novosibirsk, 1983 (In Russian).
9. Emmons, H.W.: The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Part 1, in *J. Aeronau. Sci.* 1951, vol. 18, No. 7.
10. Schubauer, G.B., and Klebanoff, P.S. Contributions on the mechanics of boundary layer transition, in *NACA Rep.* 1956, No. 1289.
11. Elder, J.W.: An experimental investigation on turbulent spot and breakdown to turbulence, in *J.Fluid Mech.* 1960, No. 9.
12. Cantwell, B., Coles, D., and Dimotakis, P.: Structure and development in the plane of symmetry of a turbulent spot, in *J.Fluid Mech.*, 1978, No. 87.
13. Barro, J., Barnes, F.H., and Ross, M.A.S.: The structure of turbulent spot in Blasius flow, in *J.Fluid Mech.* 1984, No. 149.
14. Wignansky, I., Haritonidis, J.H., and Zilberman, H.: On the spreading of a turbulent spot in the absence of a pressure gradient, in *J.Fluid.Mech.*, 1982. No. 123.
15. Saric, W.S.: Low-speed boundary layer transition experiments., in *Transition: Experiments, Theory & Computations*. Eds T.C. Corke, G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, 1994, Oxford.
16. Kachanov, Yu. S.: Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition, in *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994, 26: 411-82.
17. Gulyaev, A.N., Kozlov, V.E., Kuznetsov, V.R., Mineev, B.I., Sekundov, A.N. Laminar boundary layer interaction with free stream turbulence, in *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i gaza.*, 1989, No. 5. p.p. 55-65.
18. Westin, K.J.A., Boiko, A.V., Klingmann, B.G.B., Kozlov, V.V., and Alfredson, P.H.: Experimental in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Part I: Boundary layer structure and receptivity, in *J.Fluid Mech.*, vol. 281, pp. 193-218.
19. Bakchinov, A.A., Westin, K.J.A., Kozlov, V.V., and Alfredson, P.H.: On the receptivity of a flat plate boundary layer to localized free stream disturbances, in *Laminar-Turbulent Transition, IUTAM*, 1994, Sendai, Japan (to be published).
20. Alfredsson, P.H., Bakchinov, A.A., Kozlov, V.V., and Westin, K.J.A.: On by-pass transition in the Blasius boundary layer. Part I: Receptivity and evolution of a localized free stream disturbance. Technical Report 95: 4 ISRN.
21. Grek, H.R., Kozlov, V.V., and Ramazanov, M.P.: Three types of disturbances from the point source in the boundary layer, in *Laminar-Turbulent Transition 2* (ed. V.V.Kozlov), Springer, pp. 267-272.
22. Boiko, A.V., Westin, K.J.A., Klingmann, B.G.B., Kozlov, V.V., and Alfredson, P.H.: Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Part II: The role of TS-waves in the transition process, in *J.Fluid. Mech.*, 1994, vol. 281., pp. 219-245.
23. Grek, G.R., Kozlov, V.V., and Pamazanov, M.P. Laminar-turbulent transition at a high free stream turbulence level, in *Siberian Phys.-Tech. J.*, 1991, 6, 106-138 (in Russian).
24. Grek, H.R. and Kozlov, V.V.: Interactions between Tollmien-Schlichting waves and localized disturbances, in *Siberian Phys.-Tech.J.*, 1992, 5, 68-76 (in Russian).
25. Dovgal, A.V., and Kozlov, V.V.: On nonlinearity of transitional boundary-layer flows, in *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* (1995), 350, pp. 1-11.

# ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. В. Козлов

Обзор посвящен проблеме ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое. Приводится и обсуждается значительное количество экспериментальных данных. Рассматриваются вопросы устойчивости пограничного слоя, возбуждение волн неустойчивости, рождение и развитие турбулентности.



# ON HIGH-DIMENSIONAL OSCILLATIONS FROM LATTICE OF LINEAR ELEMENTS

L. V. Krasichkov<sup>1</sup> and A. A. Kipchatov<sup>2</sup>

College of Applied Science, Saratov State University  
83 Astrakhanskaya, Saratov 410071, RUSSIA  
E-mail: <sup>1</sup>lvk@ccollege.saratov.su, <sup>2</sup>kipper@ccollege.saratov.su

## Abstract

The lattice of the linear digital filters under chaotic external force generating by the logistic map is considered. It is shown that the output signal of this *linear dynamical* system for large lattice size is very complicated and can not be distinguished in its dynamical and statistical characteristics from noise.

## Introduction

In the past twenty years, the great progress was made in understanding of regularities of complex behaviour in low-dimensional dynamical systems. Oscillations arising in these systems are characterized by low-dimensional attractors. By now the properties of such attractors and the main universalities (scenarios) of appearance of chaos in the systems are well known and described. At the same time, the most of phenomena and processes in real world are space-temporal and their investigations are the subject of current active studies. Coupled and spatially extended systems are usually used in such studies. These systems demonstrate more complicated and rich dynamics and their attractors can be high-dimensional enough. Moreover, the problems connected with the appearance of high-dimensional chaos are close related to the long-standing problem of fully-developed turbulence.

Thus, the searching of regularities of transition from low-dimensional chaos to high-dimensional one is very important task of nonlinear dynamics. Another one problem is in searching of criteria to distinguish high-dimensional *dynamical chaos* from *noise*.

To solve the problems and answer the questions the lattices of nonlinear elements are widely investigated (see for review [1, 2] and references therein). However, there is another way to high-dimensional chaos, namely, the linear transformation of low-dimensional chaotic oscillations by linear inertial systems (filters). The facts of dimension increase of chaotic oscillation [3, 4, 5, 6, 7] and complication of attractor structure [4, 6, 8] during filtering are well known.

In this paper the last way will be discussed. It will be shown that the lattice of linear filters can provide an considerable increasing of the oscillations complexity, so that the oscillations on the output of the lattice become undistinguishable in dynamical and statistical characteristics form noise.

## 1 The lattice of linear filters under external force

One of the simplest systems demonstrating the complication of oscillations (dimension increase) is the linear low-pass filter under chaotic external force. The phenomenon was firstly mentioned in [3, 4]. It was also shown that the simplest digital filters have the same effect on chaotic signal [4, 9]. Investigations of chaotic signal transformation by digital filters lead to revealing of two ways of signal complication, namely, (i) stretching and folding of an initial attractor for nonrecursive (finite impulse response (FIR)) filters and (ii) complication of attractor structure on all scales (*superfractalization*) for recursive (infinite impulse response (IIR)) filter [9].

In this paper the process of further complication of an attractor structure by extended linear inertial system will be considered. The lattice of the IIR filters is organized for this purpose. Each element of the lattice is the IIR filter which was extensively studied in [9] and described as

$$z_n = (1 - \alpha)x_n + \alpha z_{n-1}, \quad (1)$$

where  $x_n, z_n$  are the input and output signals, respectively, and  $\alpha$  is the coefficient defining the filter cutoff. Thus, the lattice is defined by the following equation

$$z_{n,i} = (1 - \varepsilon)z_{n-1,i} + \varepsilon z_{n-1,i-1}, \quad (2)$$

where  $n$  is the discrete time ( $n = \overline{1, N_t}$ ,  $N_t$  is number of iterations of the equation, i.e. length of time series on system output),  $i$  is the discrete space or in other words the index for lattice site ( $i = \overline{1, N_{sp}}$ ,  $N_{sp}$  is the system size) and  $\varepsilon = (1 - \alpha)$  is the coupling parameter. At the same time,  $\varepsilon$  can be considered as coefficient defining the filter cutoff (see Eq.(1)).

Note that with  $\varepsilon$  in place of  $\alpha$  Eq.(2) is similar to the equation for the open flow lattices (OFL) (see [2] for the OFL) which is written as  $x_{n,i} = (1 - \varepsilon)f(x_{n-1,i}) + \varepsilon f(x_{n-1,i-1})$ , where  $f(x)$  is a logistic map and  $n, i, \varepsilon$  have the same sense as in Eq.(2). If  $f(x) = x$  in equation for the OFL, then we obtain Eq.(2) which describes the couple between elements only.

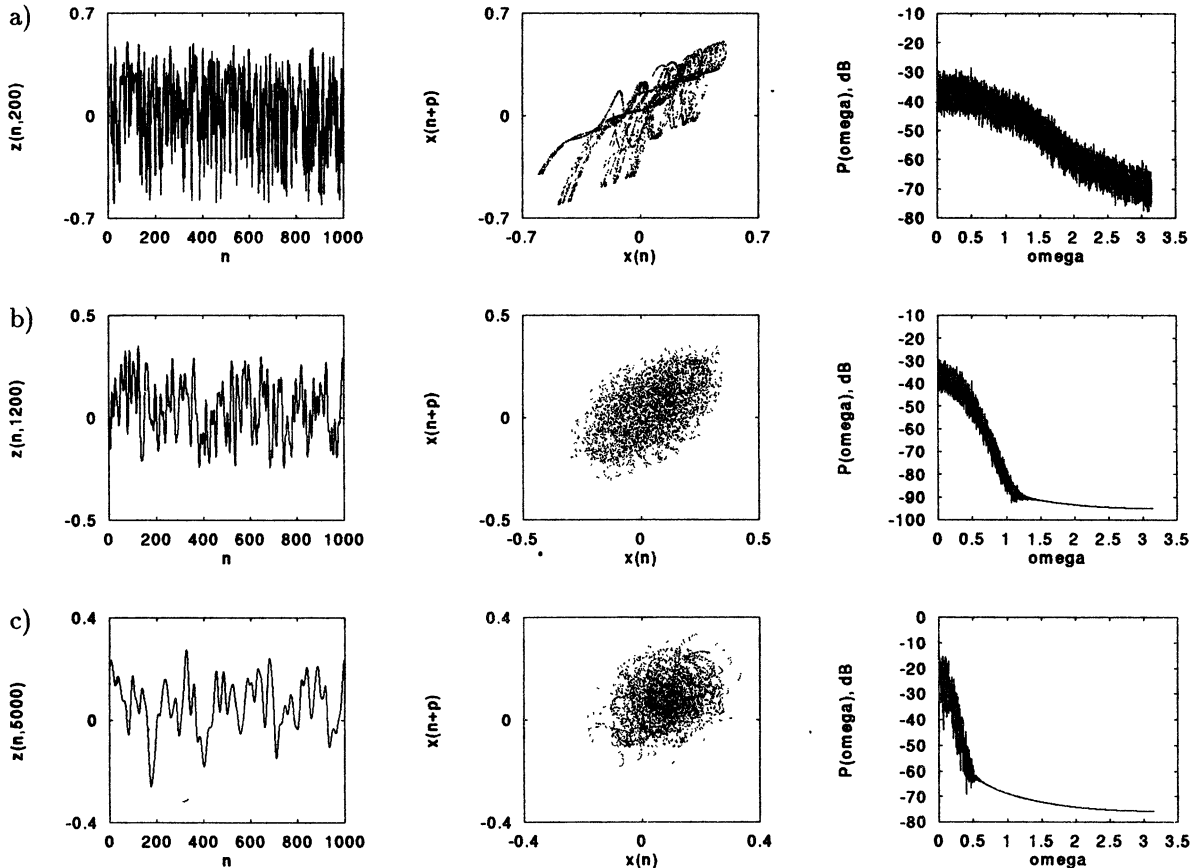


Figure 1: The time series (left column), the phase portrait (middle column), the power spectra (right column) for different lattice lengths:  $N_{sp} = 200, p = 1$  (a);  $N_{sp} = 1200, p = 5$  (b);  $N_{sp} = 5000, p = 15$  (c). To calculate spectra the fast Fourier transform (FFT) of order  $2^{15}$  was used.

As the input signal of the lattice Eq.(2) we used the chaotic oscillations generating by the logistic map

$$x_n = .1 - \lambda x_{n-1}^2, \quad (3)$$

where  $\lambda$  is the parameter of nonlinearity. The lattice input is given for  $i = 1$  as

$$z_{n-1,0} = x_{n-1}. \quad (4)$$

Thus, the lattice of linear filters investigating in this paper is described by Eqs.(2)–(4). We fixed  $\lambda = 1.99$  (developed chaos),  $\varepsilon = 0.99$  (very weak filtering properties) and studied phenomena demonstrating by the system under changes of the lattice length  $N_{sp}$ .

## 2 Results and analysis

In our studies of the system behaviour we iterated Eqs.(2)–(4) and analyzed oscillations in the fixed lattice point  $N_{sp}$ . Initial conditions were  $x_0 = 0.707, z_{0,i} = 0, i = \overline{1, N_{sp}}$ . The first  $10^4$  iterates were discarded as transients.

It should be noted here that we restricted ourselves to investigations of temporal behaviour of the system since the system is linear inertial media and demonstrate only trivial spatial dynamics.

To identify the complication of oscillations in the system the set of characteristics (the time series, the phase portrait and the power spectrum) was firstly estimated. We plotted reconstructed phase portraits using a time delay embedding [10, 11] which in application to signals of investigated system can be written as

$$\mathbf{x}_n = \{x_n, x_{n+p}, \dots, x_{n+p(m-1)}\}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{x}_n$  is  $m$ -dimensional state vector and  $p = 1, 2, \dots$  is the time delay. The time delay embedding was used since Eqs.(2)–(4), though ones are couple of maps, demonstrate changing of time scale of the system and plotting of attractor on  $(x_{n+1}, x_n)$  plane for increased  $N_{sp}$  would give a diagonal line.

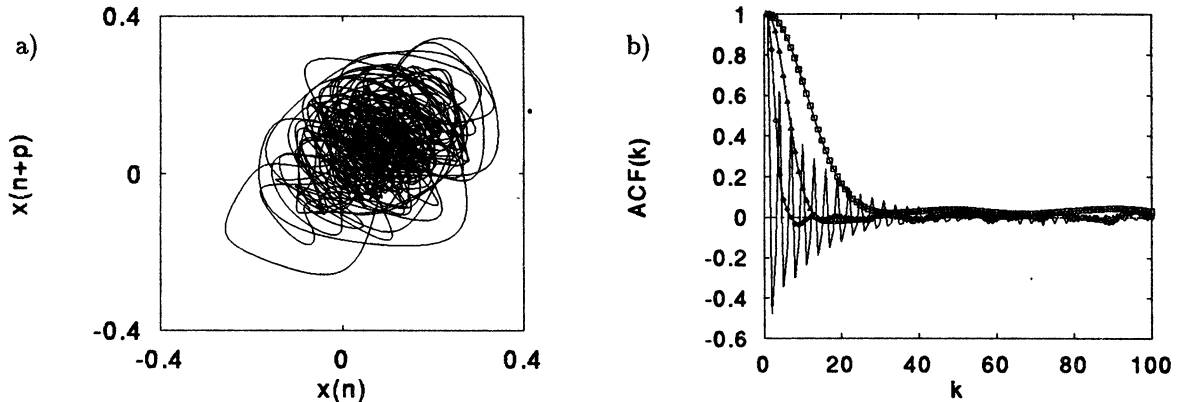


Figure 2: The phase portrait of attractor (Fig. 1 c) is plotted in lines (a). The autocorrelation functions for different lattice lengths:  $N_{sp} = 0$ , i.e. oscillations of the  $x_{n-1}$  variable of the logistic lattice Eq.(3) (solid line);  $N_{sp} = 200$  (line with diamonds);  $N_{sp} = 1200$  (line with triangles);  $N_{sp} = 5000$  (line with rectangles) (b).

Results of estimations of above mentioned characteristics are shown in Fig. 1. It is seen that the structure of the phase portrait becomes more complicated as length of the lattice increases (see Fig. 1 a and b). However, the further increasing of  $N_{sp}$  leads to appearance of some kind of structure in oscillations that depicted at the phase portrait (Fig. 1 c). The attractor of oscillations looks like one of a flow system (see evolution of time series in Fig. 1 also), though investigated system Eqs. (2)–(4) is the lattice of maps. To illustrate the fact we show in Fig. 2 a the attractor plotted in lines for  $N_{sp} = 5000$ .

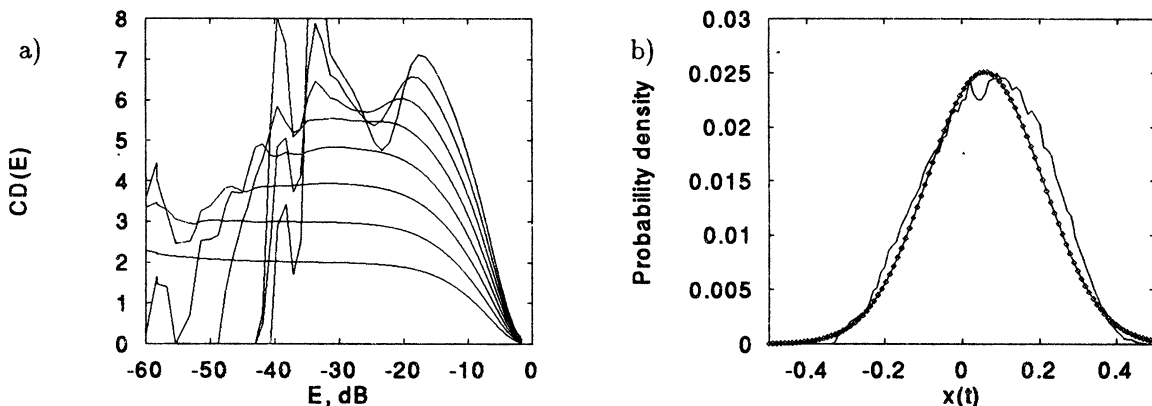


Figure 3: The correlation dimension Eqs.(6)–(7) versus the length scale (a) ( $N_{sp} = 1200$ ,  $N = 5 \cdot 10^4$ ,  $p = 5$ ,  $m = 2 - 9$ ); the probability density calculated for  $N_{sp} = 1200$  (solid line) and its approximation Eq.(8) ( $\mu = 0.0578$ ,  $\sigma^2 = 0.148$ ) (line with symbols) (b).

The spectrum of oscillations (Fig. 1) with increasing  $N_{sp}$  becomes very similar to one for  $1/f^\alpha$  processes, i.e. the processes with long correlations. Increasing of the correlation length is characterized by



the autocorrelation function ( $ACF(k) = \frac{1}{N_t \sigma^2} \sum_{j=1}^{N_t-k} (x_j - \mu)(x_{j+k} - \mu)$ , where  $\mu$  is the mean and  $\sigma^2$  is the variance) which is shown in Fig. 2 b. Thus, the above analysis qualitatively demonstrates the complication of oscillations under their passing in the IIR filter lattice.

Another one characteristic used to estimate the oscillation complexity is the correlation dimension [12]

$$CD(e) = \frac{\log(C(e)/C(e+\delta))}{\log(e/(e+\delta))}, \quad (6)$$

where  $C(e)$  is the correlation integral

$$C(e) \approx \frac{1}{N_t^2} \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{q=j+1}^{N_t} \theta(e - \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_q\|), \quad (7)$$

Here,  $\delta$  is the localization range of  $C(e)$  in which the linear least-square fit is performed,  $\theta$  is the Heaviside function and vertical bars denote the maximum norm.

The results of correlation dimension estimations are shown in Fig. 3 a, where the correlation dimensions are plotted as functions of the length scale  $E$  ( $E = 20 \cdot \log_{10}(\frac{e}{e_0})$ ,  $e_0$  is the maximum attractor size). It can be seen from (Fig. 3 a) that there is no any saturation of the dimension. The narrowing of scaling range for increasing  $m$  and breakdowns in  $CD(E)$  functions for  $m = 8 - 9$  are connected with lack of data points. The dimension estimations show again high value of complexity of oscillations (dimension at least larger than 7).

We estimated also the probability density which shown in Fig. 3 b (solid line). Since the plot of the function is very similar to one for normal (Gaussian) random process we tried to approximate the experimental data by well-known equation

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (8)$$

The mean  $\mu$  and the variance  $\sigma$  used for approximation by Eq. (8) are the same as ones calculated from modelling of lattice Eqs.(2)–(4). The result of approximation is plotted in Fig. 3 b (line with symbols). From qualitative comparison of these two curves, it can be concluded that the output oscillations of the lattice look like noise with normal distribution.

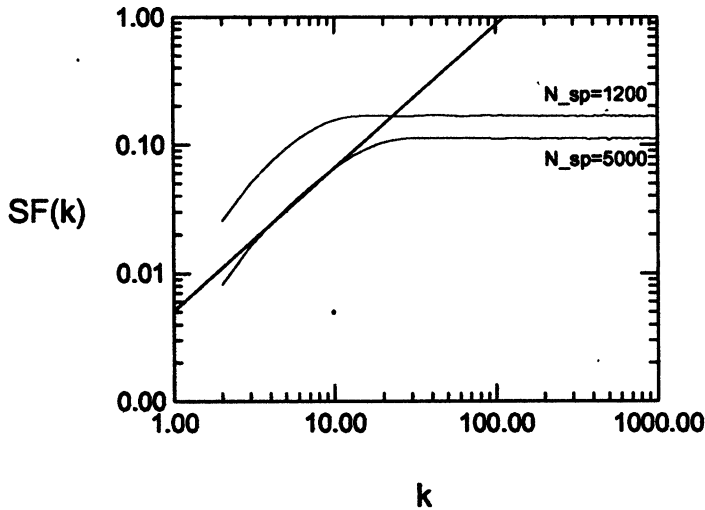


Figure 4: The log-log plot of structure function Eq.(9) for  $N_t = 10^5$ . The slope of the straight line is estimation of  $H$  Eq.(10) ( $\{H = 1.0$  for  $k \in [2, 12]$ ;  $H = 0.0$  for  $k \in [20, 200]\}$  for  $z_{n,5000}$ ).

The last characteristics which used to describe the complexity of oscillations arising in the lattice Eqs.(2)–(4) was the structure function (SF) (see, for example, [13, 14]). The SF is given by

$$SF(k) = \sum_{n=1}^{N_t-k} |x_{n+k} - x_n|. \quad (9)$$

The function for fractal signal obeys the relation:

$$SF(k) \sim k^H, \quad (10)$$

where  $H$  is the scaling exponent. For a stochastic process the SF has a scaling behaviour for all values of  $k$ , whereas for a deterministic ones the SF has  $H = 1$  at small values of  $k$ . The SF for the lattice length  $N_{sp} = 1200$  and  $N_{sp} = 5000$  shown in Fig. 4 demonstrates the scaling behaviour similar to one for deterministic chaos.

### 3 Conclusion

In this paper we have investigated the lattice of the *linear* IIR filters under *deterministic* chaotic external force. The system is the simplest example of medium which obeys with inertial properties only. We considered case when the inertial properties of each element of the lattice are very weak.

It is shown that the system demonstrates a considerable complication of chaotic oscillations with increasing of lattice length. Moreover, the output oscillations of the lattice, whose length is about one thousand, become similar to noise in its statistical and dynamical characteristics. At the same time, the structure function shows that these oscillations are not really stochastic or noisy process though the dimension of an attractor of the oscillations is very high.

Thus, it can be concluded that the inertial properties of a system have a dominant role in arising of high-dimensional chaos.

### Acknowledgement

This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under Grant No.93-02-16171.

### References

- [1] J.P.Crutchfield, K.Kaneko, "Phenomenology of spatio-temporal chaos", *Directions in Chaos*, World Scientific, Singapore, 1987, pp.272-353.
- [2] F.H.Willeboordse, K.K.Kaneko, "Pattern dynamics of a coupled map lattice for open flow", *Available from the chaos-dyn bulletin board in Los Alamos (ftp://xyz.lanl.gov) as manuscript No.9407001*, 1994.
- [3] R. Badii, G.Broggi, B.Derighetti, M.Ravani, S.Ciliberto, A.Politi, M.A.Rubio, "Dimension increase in filtered chaotic signals", *Phys. Rev. Lett.*, 1988, V.60, No.11, pp.979–982.
- [4] F.Mitschke, M.Moller, W.Lange, "Measuring filtered chaotic signals", *Phys. Rev. A*, 1988, V.37, No.11, pp.4518–4521.
- [5] T.Sauer, J.A.Yorke, "How many delay coordinates do you need?", *Int. J. Bifurcations and Chaos*, 1993, V.3, No.3, pp.737–744.
- [6] A.A.Kipchatov, L.V.Krasichkov, "The creation of high-dimensional oscillations from low-dimensional systems", *Pr. Int. Conference on Dynamical Systems and Chaos*, ed. by Y.Aizawa, S.Saito, K.Shiraiwa, World Scientific, Singapore, 1995, V.2, p.359–362.
- [7] J.Theiler, S.Eubank, "Don't bleach chaotic data", *Chaos*, 1993, V.3, pp.771-782.
- [8] A.A.Kipchatov, L.V.Krasichkov, "Modification of the structure of a strange attractor in the band-pass filtering of chaotic oscillations", *Tech. Phys. Lett.*, 1993, V.19, No.9, pp.557–558 [in Russian *Pis'ma v ZhTF*, 1993, V.21, No.17, pp.68–71].

- [9] A.A.Kipchatov, L.V.Krasichkov, "Superfractalization of a chaotic attractor during linear filtration", *Tech. Phys. Lett.*, 1995, V.21, No.2, pp.131-133 [in Russian *Pis'ma v ZhTF*, 1995, V.21, No.4, pp.1-6].
- [10] N.H.Packard, J.P.Crutchfield, D.J.Farmer, R.S.Shaw, "Geometry form a time series", *Phys. Rev. Lett.*, 1980, V.45, No.9, pp.712-716.
- [11] F.Takens, "Detecting strange attractors in turbulence", Pr. *Dynamical Systems and Turbulence*, ed. by D.A.Rand, L.-S.Young, Springer, Berlin, 1981, pp.366-381.
- [12] P.Grassberger, I.Procaccia, "Characterization of strange attractors", *Phys. Rev. Lett.*, 1983, V.50, No.5, pp.346-349.
- [13] A.Provenzale, L.A.Smith, R.Vio, G.Murante, "Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series", *Physica D*, 1992, V.58, pp.31-49.
- [14] J.J.Collins, C.J.De Luca, "Random walking during quiet standing", *Phys. Rev. Lett.*, 1994, V.73, No.5, pp.764-767.

## К ВОПРОСУ О ВОЗНИКНОВЕНИИ ВЫСОКОРАЗМЕРНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЦЕПОЧКЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.В.Красичков, А.А.Кипчатов

В работе рассматривается цепочка линейных цифровых фильтров под внешним воздействием. В качестве внешнего используются хаотические колебания генерируемые логистическим отображением. Показано, что если цепочка содержит достаточно большое количество (порядка  $10^3$ ) элементов, то колебания на ее выходе значительно усложняются по отношению ко входным. Причем усложняются настолько значительно, что их невозможно отличить от шума путем анализа как динамических так и статистических характеристик.

# SOME UNIVERSALITIES IN THE LARGE GROUPS OF TIME-DELAYED SYSTEMS

E. S. Mchedlova

College of Applied Science, Saratov State University  
83 Astrakhanskaya, Saratov 410071, RUSSIA  
E-mail: esm@college.saratov.su

## Abstract

In present paper the large groups of coupled limit-cycle oscillators is considered. Each oscillator describes by nonlinear time-delayed equation. The change in the type of coupling and values of system's parameters leads to a wide variety of different regimes: from synchronized behaviour and waves propagation to spatially irregular oscillations.

Lattices of coupled oscillatory systems are of interest in different fields of modern science [1, 2, 3, 4, 5, 6]. There are many papers devoted to investigation of large groups of autooscillators. Such models are frequently used to describe interactions between biological processes [7, 8, 9, 10, 11]. •

In this work we try to take into account that in many types of systems (for example, in living systems) the information transmission needs a finite time. In some cases this time is so small in comparison to characteristic time of processes under investigation that one can be neglected. In contrast to this, if we will focus on the processes that have characteristic time closely to time of information transmission, we have to take one into account. Here we have to emphasize that the model has no relation to concrete physical or biological system and now we will speak only about mathematical model, which gives some independent interesting results.

We will consider a large group of coupled oscillators. Each of them is described by simple equation with nonlinearity and time delay

$$\dot{x}(t) = a(1 - x(t - \tau))x(t). \quad (1)$$

Eq.(1) is so-called Hutchinson's equation, where  $a$  is the parameter and  $\tau$  is the delay;  $\dot{x}$  denotes the time derivative of  $x$ . There are only two types of behaviour for this equation: stationary state and autooscillations, which become more relaxational as parameter  $a$  is increased (Fig. 1, (a) and (b), respectively).

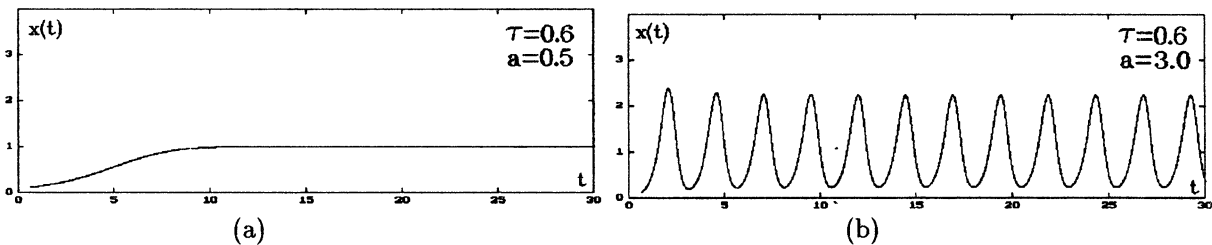


Figure 1: The basic regimes for Hutchinson's equation: (a) stationary state and (b) autooscillations.

The fundamental frequency in dependence on system's parameters presented in Fig. 2. Further to change the fundamental frequency  $\omega$ , we will vary  $a$  parameter. The value of delay  $\tau$  will be constant and equal to 0.6.

We can fix  $\tau$  because this value has no effect on qualitative features of system's behaviour. As it can be seen from Fig. 2, if  $\tau = 0.6$  and  $a$  is changed, for example, from 3 to 4, the fundamental frequency is changed from 2.3 to 2.7.

Let's look at the model. In common one can be described by following equation

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), x_i(t - \tau)) + \varepsilon F\{x_i\} + G(t), \quad (2)$$

$$F\{x_i\} = \frac{1}{2}(x_{i-1}(t) + x_{i+1}(t)), \quad (3)$$

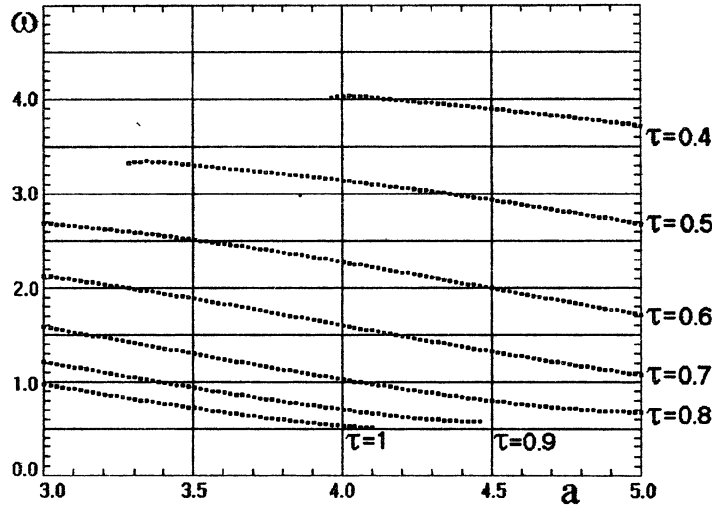


Figure 2: The dependence of the fundamental frequency of system, described by Eq.(1), on the parameter of nonlinearity for different values of delay.

$$F\{x_i\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ki}(t), \quad (4)$$

where  $i = \overline{1, N}$ ,  $f = a_i(1 - x_i(t - \tau))x_i(t)$  is a nonlinear function,  $F$  corresponds to the different types of coupling,  $\varepsilon$  is the coupling strength and  $G(t) = K(1 + \sin \omega_0 t)$  denotes periodical external force,  $N$  is the number of elements.

At the beginning we will consider the chain of two-way coupled oscillators with the periodical boundary conditions  $x_0(t) = x_N(t)$ ;  $x_{N+1}(t) = x_1(t)$  and there is no external force:  $G(t) = 0$ . The type of coupling is given by Eq.(3). In another word we have the ring. The frequencies of all elements of the ring are identical. Initial conditions were chosen randomly on the interval  $[0; 1]$ . In this case there is no synchronization in the system (Fig. 3, (a)).

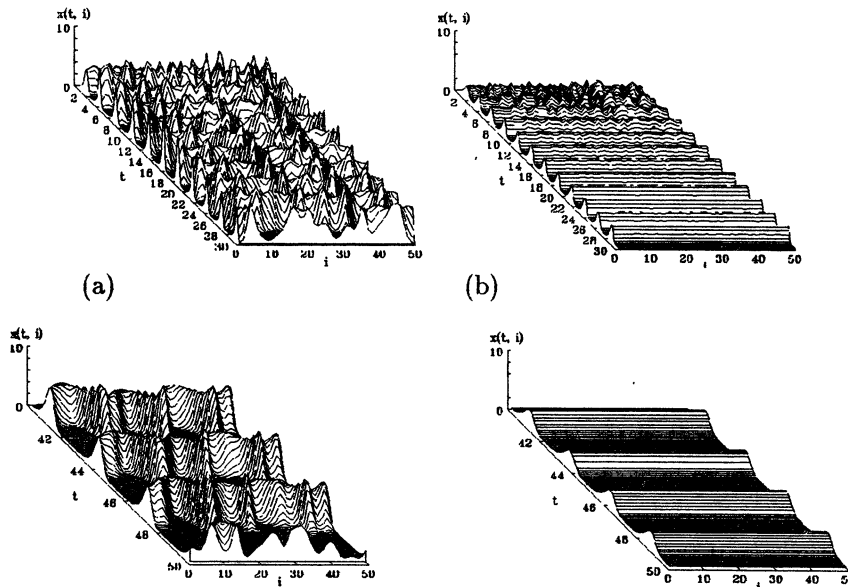


Figure 3: Spatio-temporal diagrams for two types of coupling: (a) - the chain of oscillators with diffusional coupling; (b) - the model with global coupling;  $\tau = 0.6$ ,  $a_i = a = 3.5 \forall i = \overline{1, N}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $N = 50$ . The low panel shows magnified area from the up one.

What happens if the coupling is global? This type of coupling may be represented by Eq.(4). The results shown in Fig. 3, (b) depict the fully synchronized behaviour.

As we see the possibility to demonstrate the collective oscillations in such system strongly depends on the type of coupling. This brings up the question: if we consider the chain, can we get the synchronized regime? Yes, we can. Such regime may be observed if we introduced the periodical external force with frequency which close to fundamental frequencies of autooscillators. Moreover, the synchronization exists in the finite range of frequencies. As the amplitude of external force is increased, the range of synchronization is shifted to the more high frequencies region.

Up to now the fundamental frequencies of oscillators with global coupling were identical. What happens if there are small differences between ones? Let's frequencies distributed uniformly on the small interval  $\omega_i \in [2.4; 2.6]$ . In this case there is no such value of external force frequency, which should provide synchronization (Fig. 4). We can only emphasize that at  $\omega_0 = 3.0$  (Fig. 4, b) oscillations become more

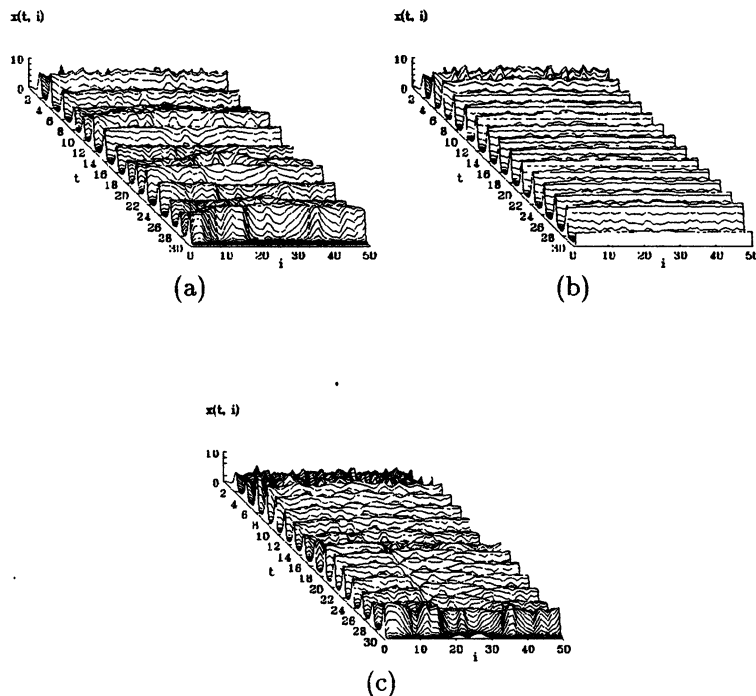


Figure 4: Spatio-temporal diagrams for globally coupled oscillators with different values of external force frequency. The fundamental frequencies of oscillators distributed uniformly on the interval  $[2.4; 2.6]$  ( $a_i \in [3.25; 3.75]$ );  $\tau = 0.6$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $N = 50$ . (a)  $\omega_0 = 2.5$ ; (b)  $\omega_0 = 3.0$ ; (c)  $\omega_0 = 4.0$ .

regulated than at another values of  $\omega_0$ .

The last concerned to the chain with periodical boundary conditions. External excitation is absent, but internal defect is presented. By this is meant that the frequency of one oscillator in the chain is essentially differ from other ones. As it can be seen from Fig. 5 under such conditions a few number

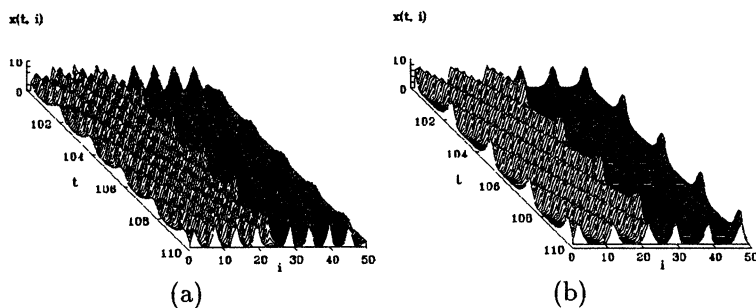


Figure 5: Waves moving along the ring with internal defect: (a)  $a_N = 5$ , (b)  $a_N = 1$ . Other values of  $a_i$  are identical and equal to 3.5;  $\tau = 0.6$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $N = 50$ .

of waves travels along the ring. These waves move from the place of excitation and one meet another half-way. When waves are met, they are disappeared. The number of waves, presented simultaneously at the ring, is depended on the magnitude of excitation.

Finally we note that there are many very complex equations, which demonstrate the similar behaviour, but in some cases it may be more convenient to limit oneself by much more simple models.

## References

- [1] K. Kaneko, "Overview of coupled map lattices", *Chaos*, 1992, V.2, pp.279–282.
- [2] V. S. Anishchenko, I. S. Aranson, D. E. Postnov, M. I. Rabinovich, "Spatial synchronization and bifurcation of the development of chaos in a chain of coupled generators", *Sov. Phys. Dokl.*, 1986, V.31, p.169.
- [3] G. S. Osipov, M. M. Sushchik, "The mechanism of the formation of localized structures in coupled chains of self-excited oscillators", *Izvestiya VUZ: Applied Nonlinear Dynamics*, 1994, V.2, No.1, pp24–29.
- [4] J. P. Crutchfield, K. Kaneko, "Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos: Directions in Chaos, *World Scientific*, 1987, Singapore, pp.272–353.
- [5] J. A. S. Kelso, G. Schöner, J. P. Scholz, H. Haken, "Phase-locked modes, phase transitions and component oscillators in biological motion", *Physica Scripta*, 1987, V.35, pp.79–87.
- [6] Y. Kuramoto, I. Nishikawa, "Onset of collective rhythms in large populations of coupled oscillators", *Pr. Int. Symposium on Coop. Dyn. Complex Phys. Syst.*, 1988, Kyoto. pp. 300–306.
- [7] Y. Aizawa, "Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems", *Progr.Theor. Phys.*, 1976, V.56, No.3, pp.703–716.
- [8] P. C. Matthews, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz, "Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators", *Physica D*, 1991, V.52, pp.293–331.
- [9] E. Niebur, H. G. Schuster, D. M. Kammen. "Collective frequencies and metastability in networks of limit-cycle oscillators with time delay", *Phys. Rev. Lett.*, 1991, V.67, No.20, pp.2753–2756.
- [10] H. G. Schuster, P. Wagner, "Mutual Entrainment of two limit-cycle oscillators with time delayed coupling", *Prog. of Theor. Phys.*, 1989, V.81, No.5, pp.939–945.
- [11] E. S. Mchedlova, A. D. Trubetskov, "Self-organization as a result of nonlinear interactions in large groups of biological oscillators", *Izvestiya VUZ: Applied Nonlinear Dynamics*, 1995, V.3, No.1, pp.73–81.

## НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДИНАМИКИ БОЛЬШИХ АНСАМБЛЕЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е. С. Мчедлова

Исследование поведения систем с запаздыванием представляет сегодня большой интерес для многих областей современного знания, в особенности для физики и биологии. Действительно, многие работы посвящены поиску математических моделей, которые в наибольшей степени отражали бы качественные особенности сложной динамики реальных систем и, в то же время, не отличались бы излишней сложностью. Настоящая работа представляет собой попытку создания одной из таких моделей и посвящена изучению закономерностей коллективного поведения системы большого числа взаимодействующих осцилляторов. Особенностью рассматриваемой системы является исключительная простота ее отдельного элемента, который описывается дифференциальным уравнением первого порядка с квадратичной нелинейностью и запаздыванием. Изменяя тип связи между элементами, параметры системы, а также воздействуя извне и внося возмущения можно получить широкий спектр всевозможных режимов - от полной синхронизации до неупорядоченных иррегулярных колебаний.

# ELASTIC SOLITON EXCITATIONS IN A NEW DOUBLE-MODE MODEL OF DNA

Oleg V. Usatenko and Sergey V. Denisov

Department of Physics, Kharkov State University,  
Kharkov 310077, UKRAINE  
E-mail: usatenko@univ.kharkov.ua

## Abstract

We introduce a new 1-D model for discrete soliton-bearing system with two degrees of freedom per unit cell. The model may be used for description of nonlinear elastic excitations of some molecular system, such as molecular tubes and DNA. We consider elastic nonlinear excitations with frequencies laying near the maximal frequencies of linear phonon spectrum and with wave number closed to the edge of the Brillouin zone. In general case an envelop function of out-of-phase particle displacements is chaotic, in contrast to the soliton solutions which take place in the models with one degree of freedom per unit cell. At the same time the existence both of simple polarized solitons and vector solitons is possible. We study the conditions of erasing of vector solitons from polarized ones for two cases "soft" and "hard" anharmonicity. It is shown that between two branches of linear phonon spectrum there exist polarized soliton solutions only.

## Introduction

The majority of theoretical works on soliton excitations in discrete molecular chains (DNA-models in particular) is based on the models which assume the existence of one particle and one degree of freedom per unit cell, [1], [2]. Such systems are first approached for study of real molecular chains. However, a lot of solid state and biological systems have much more complicated structures. This makes one look for the models which are, on the one hand, rather simple in treatment and, on the other hand, reflect the main features of real objects. Thus, models with two degrees of freedom per unit cell, which we call double-mode models, appear to be a bit more realistic, yet remaining simple for consideration. Some such models which have been introduced and investigated recently: Toda lattice model with a transversal degree of freedom [3] and model based on a system of two coupled sine - Gordon equations [4],[5].

The aim of our paper is to introduce and to describe new systems with two degrees of freedom per unit cell and to indicate new properties and a field of applicability of such models. We start from a general Hamiltonian describing a chain of discs coupled one with other by quartic nonlinear potential. Introduced model posses very riche properties and it is not possible to study its different features in the framework of one paper. Here we examine rather particular kind of motion in this model, namely, out-off-phase vibrations with frequencies laying near the maximal frequencies of linear phonon excitations and with wave number closed to the edge of the Brillouin zone. We obtain a set of two partial differential equations describing longitudinal and rotational motions of discs. Using rotating-wave approximation we derive a system of two coupled nonlinear differential equations. We show that the derived set of coupled nonlinear equations may be treated as dynamical equations for conservative Hamiltonian system with two degrees of freedom - "double  $\phi - 4$ " system. Trajectories of a particle in this potential correspond to the slowly varying envelopes of standing soliton excitations. Similar system of equations occur in a variety of different physical contexts and, in particular, in nonlinear optics [6],[7],[8], in Yang- Mills theory [9] and others [10], [11] [12]. In the general case the trajectories of a particle are chaotic. In our paper the main attention is paid to investigation of regular motion of the particle, i.e. we study coherent soliton excitations of the chain.

## 1 The model and its properties in a linear approximation

We consider one-dimensional molecular chain consisted of discs of equal masses coupled by anharmonic forces. We assume that discs are subjected to longitudinal displacements  $u$  as well as to rotational ones  $\phi$ . Hamiltonian of our system is supposed to be of the form

$$H = \frac{m}{2} \sum_i \dot{u}_i^2 + \frac{J}{2} \sum_i \dot{\phi}_i^2 + U^{(2)} + U^{(a)}, \quad (1)$$



where  $u_i$  is the  $i$ -th disc displacement from its equilibrium position,  $\phi_i$  is rotational angle of the  $i$ -th disc,  $U^{(2)}$  is harmonic part of potential and  $U^{(a)}$  is anharmonic cubic and (or) quartic term.

In a linear approximation the system is characterized by dispersion relation between the frequency  $\omega$  and the wave number  $k$  of a harmonic wave. Using the equations of motion

$$m\ddot{u}_i = -\frac{\partial U}{\partial u_i}, \quad J\ddot{\phi}_i = -\frac{\partial U}{\partial \phi_i}, \quad (1.2)$$

in a linear approximation, i.e. for  $U \cong U^{(2)}$ , where

$$U^{(2)} = \sum_i \left( \frac{A_1}{2} (\phi_i - \phi_{i+1})^2 + \frac{A_2}{2} (u_i - u_{i+1})^2 + A (\phi_i - \phi_{i+1})(u_i - u_{i+1}) \right) \quad (1.3)$$

we obtain the dispersion relation  $\omega = \omega(k)$ :

$$\omega_{\pm}(k) = \omega_{\pm}(\pi) | \sin(k/2) |, \quad (1.4)$$

where

$$\omega_{\pm}^2(\pi) = 2 \left( \frac{A_1}{J} + \frac{A_2}{m} \pm \sqrt{\left( \frac{A_1}{J} + \frac{A_2}{m} \right)^2 + \frac{A^2}{mJ}} \right).$$

The curve  $\omega = \omega(k)$  has two branches coupled by the constant  $A$ . The presence of this constant is the intrinsic feature of the general model in contrast to the chain with an axial symmetry. In this model the interaction potential has the even powers of displacements, therefore the coupling between the longitudinal and rotational displacements exists only in anharmonic approach. In the linear case the interaction of branches in (4) is absent, they become completely independent and for  $\omega_{\pm}^2(\pi)$  we get

$$\omega_{+}^2(\pi) = \omega_2^2 = 4 \frac{A_2}{m}, \quad \omega_{-}^2(\pi) = \omega_1^2 = 4 \frac{A_1}{J} \quad (1.5)$$

Without loss of generality we put here  $\omega_1 < \omega_2$ .

## 2. Nonlinear equations

For simplicity we will consider the even interparticle potential which contain the fourth power of relative displacements only

$$U^{(4)} = \sum_i \sum_{\alpha=0}^4 C_{\alpha} (\phi_i - \phi_{i+1})^{4-\alpha} (u_i - u_{i+1})^{\alpha}. \quad (2.6)$$

The reason to omit third powers of displacement is well known, these terms give soliton solutions in the second order of the theory of perturbation only. The potential (2.6) provides soliton solutions in the first order in small deviation of soliton frequency from linear phonon spectrum. The Hamiltonian (2.6) with general form of anharmonic potential  $U^{(4)}$  is rather complicated system. But it is possible to point out some more simple cases.

So, for the molecular chain with an axial symmetry the Hamiltonian may contain the even powers of the relative angular displacement  $(\phi_i - \phi_{i+1})$  only. It means that the constant  $A$  in Eq.(1.3) is equal zero and the Eq.(2.6) can be rewritten in the form

$$U^{(4)} = \sum_i \left( \frac{C_1}{4} (\phi_i - \phi_{i+1})^4 + \frac{C_2}{4} (u_i - u_{i+1})^4 + \frac{C}{2} (\phi_i - \phi_{i+1})^2 (u_i - u_{i+1})^2 \right). \quad (2.7)$$

Just this case will be examined in the paper. The constants  $C, C_1, C_2$  and  $A, A_1, A_2$  in Eqs.(1.3) and (2.7) are supposed not depending on  $i$ , which means that the considered chain is homogeneous, though it would be possible to study more general case, for example, multi-atomic chain with different masses of discs.

Using equations of motion (1.2) with harmonic potential (1.3) and anharmonic one (2.7) we obtain the equations of motion

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_i = & A_2(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + C_2[(u_{i-1} - u_i)^3 + (u_{i+1} - u_i)^3] + \\ & C[(\phi_{i-1} - \phi_i)^2(u_{i-1} - u_i) + (\phi_{i+1} - \phi_i)^2(u_{i+1} - u_i)], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$J\ddot{\phi}_i = A_1(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) + C_1[(\phi_{i-1} - \phi_i)^3 + (\phi_{i+1} - \phi_i)^3] + C[(u_{i-1} - u_i)^2(\phi_{i-1} - \phi_i) + (u_{i+1} - u_i)^2(\phi_{i+1} - \phi_i)]. \quad (2.9)$$

These equations describe different possible nonlinear excitations in considered model. It is not possible to study in the framework of one paper all variety of its solutions. Here we will consider nonlinear excitations which correspond to relatively narrow region near the edge of Brillouin-zone of linear phonon spectrum ( $k \cong \pi$ ). In this region the nearest-neighbor atoms in linear approximation execute opposite-phase vibrations. We will looking for solutions with frequencies laying in the vicinity of maximal phonon frequency. In this case the symmetry of vibration is valid for nonlinear excitations also. Introducing normalized out-of-phase displacements for an arbitrary disc

$$u_i = (-1)^i \sqrt{\frac{2A_1}{3|C|}} u(i, t), \quad \phi_i = (-1)^i \sqrt{\frac{2A_2}{3|C|}} \phi(i, t),$$

changing the discrete argument  $i$  by continuum coordinate  $x/2$  and expanding the functions  $u_{i\pm 1}$  and  $\phi_{i\pm 1}$  in Taylor series we obtain from Eqs. (2.8), (2.9) a set of partial differential equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u + \frac{8}{3} \alpha_2 u^3 + \frac{8}{3} \sigma \phi^2 u = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi + \frac{8}{3} \alpha_1 \phi^3 + \frac{8}{3} \sigma u^2 \phi = 0. \quad (2.11)$$

These equations describe nonlinear small-amplitude vibrations in the vicinity of the edge of Brillouin zone. In linear approximation Eqs. (2.10,2.11) give the correct expression for two branches of dispersion relation

$$\omega^2 = \omega_1^2(1 - \kappa^2), \quad \omega^2 = \omega_2^2(1 - \kappa^2)$$

This coincides with Eq. (1.4) if we take into account the correspondence between  $k$  and  $\kappa$ , namely,  $k = \pi - 2\kappa$ .

Below we consider the simplest case of stationary solitons. For the small parameter of expansion it is convenient to choose the values

$$\delta_1 = \omega^2/\omega_1^2 - 1, \quad \delta_2 = \omega^2/\omega_2^2 - 1,$$

which describe deviation of the nonlinear frequency  $\omega$  from two branches of the linear phonon spectrum. Let us represent the periodic in time solution as an expansion in Fourier series

$$\begin{pmatrix} \phi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ U \end{pmatrix} \cos(\omega t) + \begin{pmatrix} \Phi_3 \\ U_3 \end{pmatrix} \cos(3\omega t)$$

where  $\Phi, U \sim \delta^{1/2}$ ,  $\Phi_3, U_3 \sim \delta^{3/2}$ . In the lowest-order in  $\delta$  approximation for the amplitude of the main harmonic we obtain the set of ordinary differential equation of the second order

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \delta_1 \Phi + 2\Phi(\alpha_1 \Phi^2 + \sigma U^2) = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \delta_2 U + 2U(\alpha_2 U^2 + \sigma \Phi^2) = 0. \quad (2.13)$$

Here  $\alpha_1 = A_2 C_1 / A_1 |C|$ ,  $\alpha_2 = A_1 C_2 / A_2 |C|$ ,  $\sigma = \text{sign}(C)$ . We suppose also the strong nonequalities  $|\delta_1| \ll 1$ ,  $|\delta_2| \ll 1$  are fulfilled. Equations (2.12) and (2.13) can be considered as governing the motion of a particle on the plane  $(\Phi, U)$  in a potential well

$$V(\Phi, U) = -\frac{1}{2} \delta_1 \Phi^2 - \frac{1}{2} \delta_2 U^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \Phi^4 + \sigma \Phi^2 U^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 U^4. \quad (2.14)$$

Our aim is to find and to describe a regular motion and to find conditions of bifurcation of two-component (vector) solitons from one-component (polarized) solitons. We study the motion of the system for different signs of potential parameters. It is shown that a number of bifurcations of polarized solitons from vector dark solitons is finite as distinct from the case of light solitons where this number is infinite.

Using the method of the paper [6] we analyze here the motion of system (2.12), (2.13) for two cases of "hard" and "soft" anharmonicity. Two different cases - soft and hard anharmonicity, which are considered in present paper, are sufficiently general and the dynamics of soliton excitations for other potential parameters and for other regions of linear phonon spectrum may be analyzed on the basis of obtained results. Analysis of equations (2.12), (2.13) shows that in all other cases the existence of only simple polarized solitons is possible. This analysis may be done qualitatively and more visually by consideration of corresponding potential surfaces determined by Eq. (2.13). Extremum points of the potential is at the same time specific points of the set of Eqs.(2.12) and (2.13):

$$I.U = \Phi = 0, II.\Phi = 0, U = \pm\sqrt{\frac{\delta_2}{2\alpha_2}}, III.U = 0, \Phi = \pm\sqrt{\frac{\delta_1}{2\alpha_1}},$$

$$IV.U = \pm\sqrt{\frac{\alpha_1\delta_2 - \sigma\delta_1}{2(\alpha_1\alpha_2 - 1)}}, \Phi = \sqrt{\frac{\alpha_2\delta_1 - \sigma\delta_2}{2(\alpha_1\alpha_2 - 1)}}.$$

Let us to analyze the region of parameters in which the soliton solutions take place, without discussing its stability. Soliton solutions correspond to separatrix trajectories of a particle with zero initial and final velocity at the "moments"  $x = -\infty$  and  $x = \infty$ . Initial and final positions have to lie on a saddle or on a top of the potential  $V$ . We consider three different domains of frequency  $\omega$ .

At the frequency  $\omega > \omega_2 > \omega_1$  the nonequality  $\delta_1 > \delta_2 > 0$  is fulfilled and soliton solutions exist if at least one of the conditions  $A, B$ , or  $C$ . are satisfied

$$A.\alpha_1 > 0, B.\alpha_2 > 0, C.\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0, \alpha_1\alpha_2 < 1, \sigma = 1.$$

For the frequency lying between  $\omega_1$  and  $\omega_2$  soliton solutions occur if only  $A.\alpha_1 > 0$  or  $B.\alpha_2 > 0$ . At last for  $\omega < \omega_1$  soliton solutions exist if at least one of the conditions  $A, B$ , or  $C$ . are satisfied

$$A.\alpha_1 < 0, B.\alpha_2 < 0, C.\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1\alpha_2 < 1, \sigma = -1.$$

Bifurcations can arise both from polarized soliton of low-frequency rotation mode and from polarized soliton of high- frequency longitudinal oscillation mode.

### 3. Hard anharmonicity

In this case the constants  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are positive and  $\sigma = 1$ . We suppose that  $\delta_1$  and  $\delta_2$  are positive also. In this case the set of Eqs.(2.12),(2.13) has the simple "polarized" solutions which can be written in the form

$$\Phi = (\delta_1/\alpha_1)^{1/2} / \cosh(\delta_1^{1/2} x), \quad U = 0. \quad (3.15)$$

$$\Phi = 0, \quad U = (\delta_2/\alpha_2)^{1/2} / \cosh(\delta_2^{1/2} x). \quad (3.16)$$

In order to study the bifurcation from the state (1.4) we look for a solution of Eqs. (2.12),(2.13) as a soliton (3.15) with small perturbation

$$\Phi = (\delta_1/\alpha_1)^{1/2} / \cosh(\delta_1^{1/2} x) + \epsilon f_1, \quad U = 0 + \epsilon f_2. \quad (3.17)$$

Substituting (3.17) into (2.12) and (2.13), linearizing theirs with respect to the small parameter  $\epsilon$ , and renormalizing coordinate  $\delta_1^{1/2} x \Rightarrow x$  we get the equation for  $f_1$  and  $f_2$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} - f_1 + \frac{6}{\cosh^2 x} f_1 = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dx^2} - \nu f_2 + \frac{2}{\alpha_1 \cosh^2 x} f_2 = 0 \quad (3.19)$$

where  $\nu = \delta_2/\delta_1$ . Equations (12),(13) are Schrodinger-like equations. First of them has the solution  $f_1 = \sinh x / \cosh^2 x$ , the solution of Eq. (13) can be expressed by hypergeometric function [13]

$$f_2(x) = (\cosh x)^{-\beta} F(-n, 2\beta + n + 1, \beta + 1, z), \quad (3.20)$$

where  $\beta^2 = \nu$ ,  $z = (1 - \tanh x)/2$ . For zero and integer values of the first argument of  $F$  function the solution (20) may be presented in the form

$$f_2(x) = (\cosh x)^{-\beta} z^{-\beta} (1-z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta+n} (1-z)^{\beta+n}). \quad (21)$$

In this case solution (21) goes to zero at plus and minus infinities. From this condition we can obtain a connection between  $\nu$  and  $\alpha_1$ .

$$2\nu^{1/2} = (1 + 8/\alpha_1)^{1/2} - (1 + 2n) \quad (22)$$

For fixed value  $\alpha_1$  there exist finite number of solutions  $\nu = \nu(\alpha_1, n)$ . But at fixed value of parameter  $\nu$  and with decreasing of  $\alpha_1$  new solutions appear, i.e. there exists an infinite number of parameter  $\alpha_1$ . In the case  $\nu = 1$  Eq. (15) gives the result of Ref. [6].

## 4 Soft anharmonicity

In this case all parameter  $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2$  are negative and  $\sigma = -1$ . But for the sake of notation simplicity we rewrite (12) and (13) in the form

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \delta_1\Phi - 2\Phi(\alpha_1\Phi^2 + U^2) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \delta_2U - 2U(\alpha_2U^2 + \Phi^2) = 0 \quad (24)$$

where all constants are positive. For indicated signs of parameters there exist polarized soliton solutions in the form of dark solitons

$$\Phi = (\delta_1/2\alpha_1)^{1/2} / \tanh(\delta_1/2)^{1/2}x), \quad U = 0. \quad (25)$$

$$\Phi = 0, \quad U = (\delta_2/2\alpha_2)^{1/2} / \tanh(\delta_2/2)^{1/2}x), \quad (26)$$

In order to study the bifurcation from the state (25) we look for a solution of Eqs. (23) and (24) a dark soliton (25) with small perturbation

$$\Phi = (\delta_1/2\alpha_1)^{1/2} / \tanh((\delta_1/2)^{1/2}x)) + \epsilon f_1, \quad U = 0 + \epsilon f_2. \quad (27)$$

Using the method of previous section we find nonincreasing solutions:  $f_1(x) = 1/\cosh^2(x)$ ,  $f_2(x)$  has the same form as earlier (21) but with another value of  $\beta$ . Here we have  $\beta^2 = 2[1/\alpha_1 - \nu]$ . The beginning condition of new vector solitons has the form

$$\sqrt{8(1/\alpha_1 - \nu)} = \sqrt{1 + 8/\alpha_1} - (2n + 1) \quad (28)$$

Bifurcation of solution of Eq. (25) takes place for

$$\nu = k(k + 1)/2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

These values of  $\nu$  correspond to appearance of new dark soliton which transforms with increasing of  $\nu$  into light soliton. From point of view of quantum mechanics this is equivalent to arising of new level in the well potential at  $\beta = 0$ .

## References

- [1] V. Muto, A. C. Scott, P. L. Christiansen, *Phys. Lett. A*, 136 (1989) 33.
- [2] T. Dauxois, M. Peyrard, C. R. Willis, *Physica D*, 57 (1992) 267.
- [3] P. L. Christiansen, P. S. Lomdahl and V. Muto, *Nonlinearity*, 4 (1991) 477.
- [4] C. T. Zhang, *Phys. Rev. A*, 35 (1987) 886.

- [5] W. Hai, *Phys. Lett. A*, 186 (1994) 309.
- [6] V. M. Eleonskii, V. G. Korolev, N. E. Kulagin, L. P. Shil'nikov, *Sov. Phys. JETP*, 72 (1982) 619.
- [7] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Phys. Rev. Lett.* 70, 16 (1993) 2395.
- [8] J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, *Phys. Rev. E*, 48, 6 (1993) 4710.
- [9] S. G. Matinian, G. K. Savvidi, N. G. Ter-Arutiunan, *Sov. Phys., Pisma JETP*, 34, (1981) 613.
- [10] M. L. A. Nip, J. A. Tuszynski, Z. W. Gortel, F. A. Riauka, *Phys. Rev. B*, 48, (1993) 15732.
- [11] T.A.Vorobiov, G.M.Zaslavskiy, *Sov. Phys. JETP*, 92 (1987) 1564.
- [12] M. Lakshmanan, R. Sachadevan, *Phys. Rev. A*, 31 (1985) 861.
- [13] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Quantum Mechanics, Course of Theoretical Physics*, Pergamon, New York, 1985.

## УПРУГИЕ СОЛИТОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В НОВОЙ ДВУХМОДОВОЙ МОДЕЛИ ДНК

О. В. Усатенко и С. В. Денисов

Большинство теоретических работ призванных описать солитонные возбуждения в дискретных молекулярных цепочках основываются на моделях с одной степенью свободы на элементарную ячейку [1],[2]. Простейшей из таких моделей является линейная моноатомная цепочка с нелинейным характером взаимодействия частиц, способных совершать либо продольные либо поперечные колебания. Представляется интересным понять, что нового привносит усложнение такой модели путем увеличения числа степеней свободы на элементарную ячейку. С этой целью в качестве модели мы рассматриваем цепочку дисков связанных между собой нелинейными упругими силами и способными совершать как крутильные, так и продольные смещения оставаясь в то же время параллельными друг другу. Линейная часть взаимодействия определяется выражением (3), где член пропорциональный  $A$  описывает линейное взаимодействие колебательных мод. Предполагаемая аксиальная симметрия системы приводит к отсутствию такой связи в линейном приближении и отсутствию в выражении (3) нечетных по смещениям слагаемых. В линейном приближении система обладает двумя фоннными ветвями спектра (4). Нелинейная система дискретных уравнений (2) описывает в общем случае хаотическое пространственно-временное движение цепочки и представляется в общем виде весьма сложный для анализа. Мы рассматриваем частный случай движения цепочки: противофазные периодические во времени колебания, частоты которых лежат вблизи граници зоны Бриллюэна линейного фононого спектра. Предположение близости максимальных частот двух колебательных мод позволило ввести два плавно-меняющихся поля огибающей смещений и свести систему разностных уравнений (8)-(9) к системе двух дифференциальных уравнений в частных производных (10)-(11), а близость частоты нелинейных колебаний к максимальным частотам линейного спектра (5) позволяет построить асимптотическую процедуру их решения. В наименьшем приближении по малости отклонения частоты нелинейных колебаний от частоты линейных колебаний системы, уравнения (10)-(11) сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (12)-(13). Эта система описывает пространственное распределение амплитуд колебаний огибающей и может рассматриваться как описывающая движение частицы в нелинейном потенциале (14), движение, являющееся, вообще говоря, хаотическим. Среди всех возможных движений мы рассматриваем только такие, которые начинаются и заканчиваются либо в начале координат (случай светлых солитонов при жесткой нелинейности), либо в седловых точках потенциала (темные солитоны соответствующие мягкой нелинейности). В обоих случаях методом теории возмущений найдены векторные солитонные решения и получены критерии отщепления векторных солитонов от простых поляризованных.

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ СТАДИЙ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАЗМАПОДОБНЫХ СРЕДАХ

Н.Б. Волков, Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева, А.М. Искольдский

Институт электрофизики УрО РАН  
620049, Екатеринбург, Комсомольская 34

Рассмотрена начальная стадия ламинарно-турбулентного перехода в токонесущей плазмopodobной среде, представляющей собой несжимаемую жидкость с постоянными транспортными коэффициентами. Показано, что наблюдаемая в экспериментах стратификация жидкометаллического проводника с током есть результат зарождения в нем крупномасштабных вихревых структур. Этот процесс носит пороговый характер, а механизм возмущения поверхности проводника соответствует докритической бифуркации. Также исследована упрощенная модель существенно нелинейных стадий дробления проводника на "частицы" размером порядка диаметра.

Неравновесные фазовые переходы в токонесущих плазмopodobных средах, в частности, зарождение крупномасштабных вихревых структур на начальной стадии ламинарно - турбулентного перехода в жидкометаллическом цилиндрическом проводнике с током представляют интерес в качестве объекта исследования систем с высокой чувствительностью к условиям на границе. В работах [1-3] показано, что при определенных условиях в проводнике могут возникать крупномасштабные вихревые гидродинамические и токовые структуры с длиной волны возмущений порядка его диаметра. Ясно, что между вихревыми кольцами с направлением вращения к оси проводника поверхность вязкой жидкости может втягиваться и приводить к его дроблению [4-5]. Ниже мы покажем, что влияние, оказываемое возмущением границы на развитие крупномасштабных вихревых структур в проводнике, можно учесть в рамках модельного уравнения Свифта-Хоэнберга [6] с дополнительным членом, связанным с возмущением поверхности. Анализ этого уравнения показывает, что тип бифуркаций, а также характер критического поведения системы определяются этим членом, т.е. состоянием поверхности проводника.

В качестве исходной модели будем использовать уравнения магнитной гидродинамики (МГД). При этом, для того чтобы в явном виде выявить динамический характер исследуемого ниже неравновесного фазового перехода, рассматриваем несжимаемый жидкометаллический проводник с постоянными кинетическими коэффициентами.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $p$  — соответственно скорость, напряженность магнитного поля и давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость,  $\nu_m = c^2(4\pi\sigma)^{-1}$  — магнитная вязкость.

Считаем, что компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах имеют вид:  $\mathbf{v} = \{v_r(r, z, t), 0, v_z(r, z, t)\}$ ; а компоненты вектора напряженности магнитного поля — вид:  $\mathbf{H} = \{0, H(r, z, t), 0\}$ , что соответствует азимутальной симметрии задачи. Ясно, что существует такая потенциальная функция  $\psi$ , что  $v_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$  и  $v_z = \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}$ . Решение ищем в виде суммы возмущений  $\psi$  и  $h$  невозмущенного, то есть соответствующего неподвижной среде, распределения напряженности магнитного поля по сечению проводника  $H_1(r, t)$ . В дальнейшем мы будем его записывать в виде:  $H_1(r) = \frac{r}{r_0} H_0 (f(r, t) + 1)$ , где  $H_0 = 2i/cr_0$  ( $i$  — электрический ток через проводник,  $r_0$  — его радиус). Полагая  $f \ll 1$ , получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \hat{D}\psi}{\partial t} = \frac{\partial (\hat{D}\psi/r, \psi r)}{\partial(r, z)} + \frac{H_0}{2\pi\rho r_0} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{h}{2\pi\rho r} \frac{\partial h}{\partial z} + \nu \hat{D}^2\psi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial (h/r, \psi r)}{\partial(r, z)} + \frac{H_0}{r_0} \frac{\partial f}{\partial \ln r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \nu_m \hat{D}h, \quad (5)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\nu_m = c^2(4\pi\sigma)^{-1}$  — магнитная вязкость ( $\sigma$  — электропроводность);  $\hat{D}g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$  и  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(r, z)} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial r}$ .

Система (4)–(5) аналогична системе Зальцмана для возмущенных полей температуры и скорости в теории эффекта Бенара [7] с точностью до замены декартовой системы координат на цилиндрическую и скалярного температурного поля векторным магнитным. Эта система замечательна тем, что подстановка:

$$\psi(r, z, t) = X(t)J_1(k_1 r) \sin(kz), \quad h(r, z, t) = Y(t)J_1(k_1 r) \cos(kz), \quad (6)$$

(здесь  $k_1 = \mu_1/r_0$ ,  $\mu_n$  —  $n$ -й нуль функции Бесселя  $J_1$ ,  $k$  — волновое число структур по оси  $z$ ), соответствующая свободным граничным условиям на невозмущенной границе проводника, приводит к известной модели Лоренца [8].

В отличие от конвекции Бенара, в нашем случае поверхность проводника может втягиваться между вихрями с направлением вращения к оси проводника. В такой ситуации оказывается удобным использовать подстановку, которая удовлетворяет граничным условиям с точностью до вторых степеней амплитуды возмущения поверхности  $q = \delta r(z, t)/r_0$ :

$$\psi(r, z, t) = u(z, t) J_1(k_1 r) + \frac{r}{r_0} u q \left( \frac{3}{2} q - 1 \right) \mu_1 J_0(\mu_1). \quad (7)$$

Исключение  $h$  из уравнений (4)–(5) и использование представления (7) для  $\psi$  после несложных преобразований приводит к уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = u \left( \varepsilon + bq(1 - 3q/2) - au^2 \right) - d \left( k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 u, \quad (8)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $d$  — некоторые коэффициенты,  $\Re \equiv H_0^2 r_0^2 (2\pi\rho\nu\nu_m)^{-1}$  — магнитное число Рэлея,  $\Re_c$  — его критическое значение, соответствующее зарождающимся в первую очередь вихревым структурам с волновым числом  $k = k_0 \equiv k_1/\sqrt{2}$ , а  $\varepsilon = (\Re - \Re_c)/\Re_c$  — коэффициент надкритичности, который считается малым.

Следует здесь отметить, что предсказываемый этой теорией характерный размер периодических структур по оси  $z$  ( $\lambda = 2\pi/k_0 = 2.32r_0$ ) с хорошей точностью описывает экспериментальные результаты. Действительно, на рентгеновских снимках (см. рис. 1),

полученных в результате экспериментов по электрическому взрыву алюминиевой проволоки длиной 10 см и диаметром 0.58 мм, отчетливо просматриваются периодические структуры с характерным размером  $\lambda = 0.65 \pm 0.05$  мм. Согласно предлагаемой теории наблюдаемым фрагментам на первом снимке и парам фрагментов на втором снимке (эти снимки соответствуют двум различным стадиям процесса, разделенным интервалом времени в 300 нс), соответствуют спаренные вихри, между которыми развивается прорезь. Оценка для размера структур, даваемая такой моделью, будет  $\lambda \approx 0.67$  мм и, как видно, совпадает с данными эксперимента.

Несложно заметить, что уравнение (8) при  $b = 0$  переходит в известное уравнение Свифта-Хоэнберга [6]. Таким образом, начальная стадия зарождения вихревых структур в жидкометаллическом проводнике с током может быть исследована в рамках модельного уравнения Свифта-Хоэнберга с дополнительным членом, учитывающим влияние границы на процессы в проводнике.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, требуется добавить дополнительное уравнение на возмущение поверхности проводника  $q$ . Пусть скорость поверхности будет задаваться выражением:  $v_s \sim \frac{\partial u}{\partial z}$ . Это представление отражает тот факт, что между гидродинамическими вихрями с направлением вращения к оси проводника его поверхность будет втягиваться со скоростью, зависящей от амплитуды вихрей; причем если  $u$  — нечетная функция, то  $q$  — четная. С другой стороны,  $q \sim \int_0^\tau v_s d\tau$ , где  $v_s$ , а тогда получим:

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (9)$$

где коэффициент  $\zeta$  отрицательный.

Исследуем теперь характер потери устойчивости системы (8)–(9). Замечая, что  $\varepsilon \ll d(n^2 - 1)^2$  при  $n > 1$ , и, следовательно, мода с  $k = k_0$  — ведущая, то произведем подстановку:

$$u = X(\tau) \sin(k_0 z), \quad q = \zeta k_0 Y(\tau) \cos(k_0 z).$$

Тогда в окрестности точки  $X = Y = 0$  получим с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\frac{dX}{d\tau} = \varepsilon X - a_1 X^3 - b_1 X Y^2, \quad \frac{dY}{d\tau} = X, \quad (10)$$

где  $a_1 = 3a/4$  и  $b_1 = 3b\zeta^2 k_0^4/8$ . Исключая время  $\tau$  из (10), получим уравнение Риккати для фазовой траектории:

$$\frac{dX}{dY} = \varepsilon - a_1 X^2 - b_1 Y^2. \quad (11)$$

Представим  $X$  в виде ряда по степеням  $Y$ :  $X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i Y^i$ . Подстановкой в (11), получим для первых трех коэффициентов:  $c_1 = \varepsilon$ ,  $c_2 = 0$  и  $c_3 = -(b_1 + a_1 \varepsilon^2)/3$ . Это означает, что с точностью до членов более высокого порядка малости, динамика амплитуды  $Y$  будет определяться дифференциальным уравнением:

$$\frac{dY}{d\tau} = X = \varepsilon Y - \frac{(b_1 + a_1 \varepsilon^2)}{3} Y^3. \quad (12)$$

Из этого уравнения видно, что при малых  $\varepsilon$  тип бифуркаций целиком определяется знаком коэффициента  $b_1$ . Стационарное решение (12)  $Y = 0$  устойчиво при  $\varepsilon < 0$  и неустойчиво при  $\varepsilon > 0$ . Из этого уравнения видно, что при малых  $\varepsilon$  тип бифуркаций



целиком определяется знаком коэффициента  $b_1$ . Действительно, если  $b_1 > 0$  то мы имеем обычную закритическую бифуркацию типа "вилки". В случае  $b_1 < 0$  в окрестности точки  $\varepsilon = 0, Y = 0$  при положительных  $\varepsilon$  нет стационарных решений, за исключением неустойчивого тривиального (докритическая бифуркация), вследствие чего траектория системы за конечное время уходит из ее окрестности.

Таким образом, мы показали, что тип бифуркаций, а также характер критического поведения системы (8)–(9) целиком определяется нелинейным членом  $b u q (1 - 3q/2)$ , т.е. состоянием поверхности проводника. При этом знак коэффициента  $b$  определяет характер потери устойчивости (жесткое или мягкое возбуждение неустойчивости) границы проводника. Для того, чтобы ответить на вопрос о том, какой механизм потери устойчивости реализуется в действительности, и, тем самым идентифицировать знак  $b$  модели, рассмотрим упрощенную модель роста прорези. Обратим внимание на то, что в случае замены в (8)–(9)  $q \rightarrow -q$  и  $z \rightarrow -z$  получаемая система уравнений оказывается эквивалентной исходной, за исключением одного единственного члена  $b u q$ . Это означает, что именно этот член нарушает инвариантность системы (8)–(9) относительно указанной замены и, тем самым определяет различие направлений "от оси" и "к оси" в цилиндрической геометрии.

Рассмотрим укороченную систему:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = b u q, \quad (13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (14)$$

полученную отбрасыванием в уравнении (8) членов инвариантных относительно замены  $q \rightarrow -q$  и  $z \rightarrow -z$  и, следовательно, в которой в явном виде выражена зависимость характера роста прорези от ее направления.

Будем интересоваться решениями (13)–(14), обеспечивающими локализацию возмущения поверхности проводника в окрестности некоторой точки  $z = z_0$  и удовлетворяющими свойству:  $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} q dz = 0$ , что соответствует записанному в интегральной форме уравнению неразрывности в приближении несжимаемости вещества. Этим условиям удовлетворяют функции  $q$  и  $u$ , записанные в виде:

$$u = \frac{2}{b\zeta} \frac{z - z_0}{c^2(z - z_0)^2 + (\tau - \tau^*)^2}, \quad q = -\frac{2}{b} \frac{\tau - \tau^*}{c^2(z - z_0)^2 + (\tau - \tau^*)^2}, \quad (15)$$

где  $c$  — параметр, характеризующий геометрию прорези (действительно, объем прорези пропорционален  $\int_{-\infty}^{+\infty} q dz = 2\pi/bc$ ).

Выражения (15) для  $u$  и  $q$  описывают временную эволюцию поверхности проводника между двумя вихрями: за конечное время незначительное возмущение поверхности превращается в узкую  $\delta$ -образную прорезь, а вихри при этом притягиваются друг к другу. Действительно, при  $\tau \rightarrow \tau^*$  справедливо:

$$u \rightarrow \frac{2}{b\zeta} \frac{1}{c^2(z - z_0)}, \quad q \rightarrow \frac{2\pi}{bc} \delta(z - z_0). \quad (16)$$

Видно, что характер роста прорези, описываемый нашей упрощенной моделью (13)–(14) с  $b < 0$ , качественно совпадает с тем, что наблюдается в эксперименте: за конечное время формируется узкая прорезь, движущаяся по направлению к оси проводника. Проводник при  $\tau = \tau^*$  разбивается на частицы размером порядка его диаметра.

Из того, что  $b < 0$  следует, что  $b_1 < 0$ . Тогда уравнение (12) описывает докритическую бифуркацию и, следовательно, потеря устойчивости границы проводника —

жесткая. Это результат естественный, так как такая бифуркация приводит к необратимому (а потому необъясняемому в рамках закритической бифуркации) изменению состоянию проводника.

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ N 94-02-06654-а.

### Summary

The model of a nucleation of large-scale hydrodynamical and current structures in a liquid-metal cylindrical conductor is proposed. It is shown that such approach allows to explain experimental data on a conductor splitting into transversal strata when an electrical explosion occurs. Really a conductor surface may be drown between vorteces, with the periodic structure with a wave length  $\lambda = 2.32r_0$  ( $r_0$  is a conductor radius) arising. The character of losing a stability of the surface is proved to be subcritical. For non-linear stages of splitting conductor into strata the simplified model of appearing a narrow cut during a finite time interval is suggested. The main our equations are similar to equations of Benard effect theory.

### Литература

- [1] Н. Б. Волков, А. М. Искольдский, *Письма в ЖЭТФ*, **51**, 560 (1990).
- [2] N. B. Volkov and A. M. Iskoldsky, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, **26**, 6635 (1993).
- [3] Н. Б. Волков, Н. М. Зубарев, *ЖЭТФ*, **107**, 1868 (1995).
- [4] N. B. Volkov and A. M. Iskoldsky, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, **28**, 1789 (1995).
- [5] Н. Б. Волков, Н. М. Зубарев, А. М. Искольдский, *ЖЭТФ*, принято к публикации (1995).
- [6] J. Swift and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev. A*, **15**, 319 (1977).
- [7] B. Saltzman, *J. Atmos. Sci.*, **19**, 329 (1962).
- [8] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).

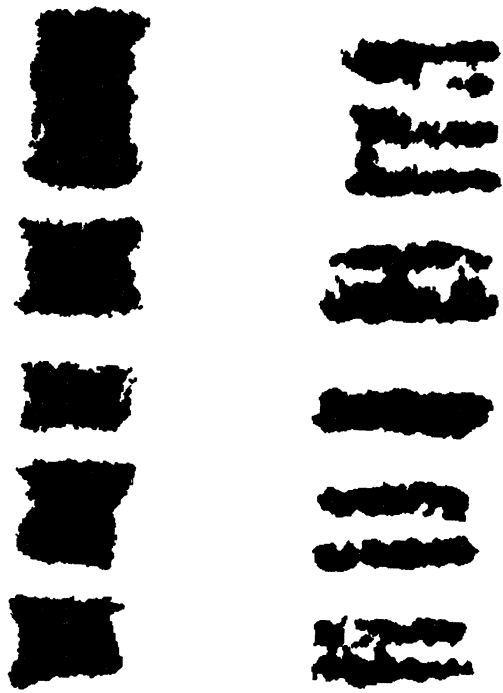


Рис. 1

# ДИСЛОКАЦИИ И ВОЛНЫ МОДУЛЯЦИИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ РЯБИ

А.Б. Езерский, Д.А. Ермошин, С.В. Кияшко

*Институт прикладной физики Российской академии наук*

*603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46, Россия*

*E-mail: ezer@appl.sci-ppov.ru; Факс: +7 (8312) 36 72 91; Тел. +7 (8312) 38 42 80*

## Введение

Исследование динамики структур, возникающих на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении капиллярных волн, является предметом многих экспериментальных работ, появившихся в последнее время [1–7]. К настоящему времени выяснены условия, при которых в пространственно протяженной системе могут устойчиво существовать структуры, различающиеся по топологии. Так при возбуждении волн на поверхности жидкости гармонической накачкой возможно существование структур, образующих паркет из квадратных [6, 7] или шестиугольных [1] ячеек. Если спектр внешней силы состоит из соизмеримых гармоник, то при определенных соотношениях между их амплитудами и фазами на поверхности жидкости возможно возбуждение квазиструктур [2, 3] — макроскопических аналогов квазикристаллов, обнаруженных недавно в твердом теле [8]. Волновое поле капиллярной ряби обладает при этом азимутальной симметрией высокого порядка (например, двенадцатого [2]), но не имеет переносной симметрии.

С увеличением амплитуды внешнего поля происходит переход от пространственно упорядоченных структур, представляющих собой ансамбль пар встречных волн с синхронизованными фазами, к пространственно-временному хаосу. Наиболее подробно исследована динамика квадратных структур, образованных двумя взаимноортогональными парами бегущих волн [4, 5]. Как установлено в ряде работ, переход к пространственно-временному хаосу может происходить различными путями в зависимости от параметров задачи. Если глубина жидкости значительно больше, чем длина волны возбуждаемой капиллярной ряби [5], то при увеличении надкритичности в каждой из пар волн возникает поперечная амплитудная модуляция. (Надкритичность  $\epsilon = a/a_0 - 1$ , где  $a$  — амплитуда накачки,  $a_0$  — пороговое значение, при котором возникает параметрическая генерация). С ростом надкритичности модуляция становится нестационарной и неупорядоченной — возникает хаос волн огибающих. Сравнение характеристик хаоса в жидкостях с различной вязкостью проведено в [9]. В жидкости, глубина которой меньше длины волны, с увеличением амплитуды внешнего поля в капиллярной ряби возникают дислокации. Само возникновение дислокаций связывается с сильным нелинейным затуханием, обусловленным существованием в капиллярной ряби пограничного слоя, толщина которого, вообще говоря, одного порядка с амплитудой волн и глубиной жидкости [6]. Структура дислокаций изучалась в работе [7]. Было установлено, что каждая дислокация — это связанное состояние из двух топологических зарядов одного знака. Образом пространственно-временного хаоса при возбуждении ряби в жидкости малой глубины может служить ансамбль взаимодействующих дислокаций — одна дислокация может рассеиваться на другой, дислокации могут аннигилировать или образовывать квазиустойчивые линейные цепочки [7].

С этой точки зрения дислокации в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби аналогичны дефектам, широко изучаемым в термоконвекции [10, 11] и электрогидродинамической конвекции в жидких кристаллах [12–14]. Как установлено в экспериментах [10], возникновение топологических дефектов является механизмом отбора волновых чисел наиболее предпочтительных структур. Для дислокаций в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби аналогия с дислокациями, возникающими при термоконвекции, позволяет сформулировать ряд вопросов. Как происходит отбор волновых чисел наиболее предпочтительных структур в параметрически возбуждаемой ряби? Какую роль при этом играют дислокации? Может ли дислокация, имеющая отличный от нуля топологический заряд, превращаться в волны модуляции, обнаруженные в экспериментах [5]? Если ответ положительный, то как именно происходит такая перестройка, и что, в частности, происходит при этом с топологическими зарядами?

Эти вопросы исследуются в данной работе. В разделе 1 описывается проведенный нами эксперимент, процедура обработки изображения капиллярной ряби и определяется внутренняя структура дислокации. В разделе 2 приводятся результаты, относящиеся к отбору волновых чисел наибо-

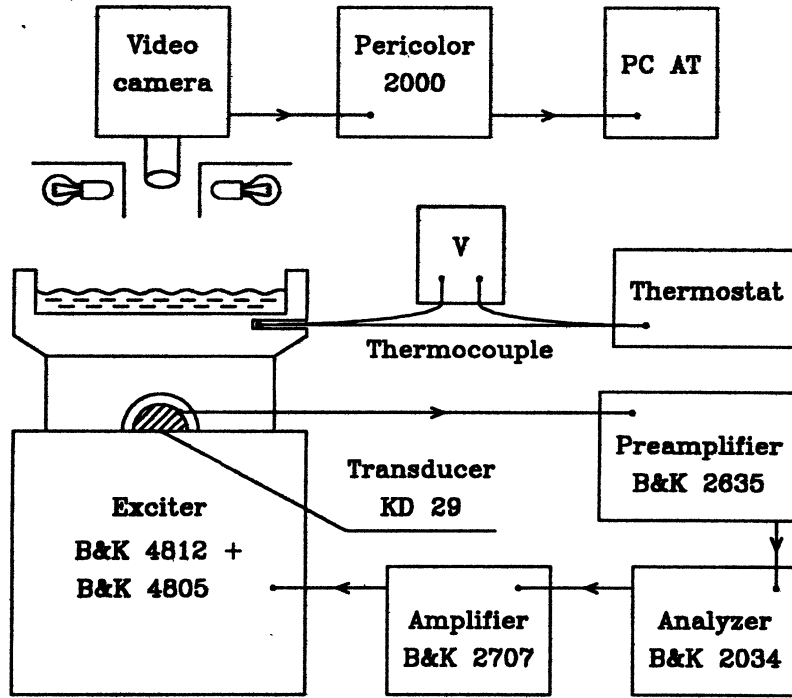


Рис.1: Схема эксперимента.

лее оптимальных структур. В третьем — исследуется переход топологических дефектов в волны модуляции.

## 1 Процедура получения экспериментальных данных

### 1.1 Экспериментальная установка

Эксперименты проводились с капиллярной рябью, параметрически возбуждаемой на поверхности жидкости, налитой в круглую кювету диаметром  $15.7$  см, выточенную из оргстекла. Толщина дна кюветы составляла  $\sim 10$  см. В качестве рабочей жидкости было выбрано силиконовое масло ПМС-5 с кинематической вязкостью  $\nu = 0.05$  см<sup>2</sup>/с, плотностью  $\rho = 0.89$  г/см<sup>3</sup> и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma = 17$  дин/см (данные соответствуют температуре  $25^{\circ}$  C). Выбор силиконового масла в качестве рабочей жидкости обусловлен тем, что оно практически не испаряется, а его поверхность не подвержена загрязнению.

Вертикальные колебания кюветы (см. рис. 1) создавались с помощью вибростенда Bruel & Kjaer 4805, на который через усилитель мощности В&К 2707 подавалось синусоидальное напряжение. В качестве источника синусоидального напряжения использовался встроенный в спектр-анализатор В&К 2034 тестовый генератор. Амплитуда ускорения вертикальных колебаний кюветы измерялась пьезоакселерометром KD29 фирмы VEB Metra Meß- und Frequenztechnik Radebeul, сигнал с которого через предусилитель В&К 2635 подавался на анализатор спектра. Поэтому в ходе эксперимента контролировалась не только амплитуда поля накачки, но и ее спектральный состав. Эксперименты проводились обычно при частоте накачки  $f \approx 100$  Гц.

В связи с тем, что вибростенд представляет собой источник тепла, и может происходить нагрев кюветы в ходе эксперимента, проводился контроль температуры. Для этого была использована дифференциальная медь-константановая термопара. Один спай этой термопары был вмонтирован в дно кюветы, как показано на рис. 1, а второй — соединен с телом, обладающим большой массой и теплопроводностью. Температура этого тела во время проведения эксперимента оставалась постоянной и равной температуре в комнате.

Запись изображения капиллярной ряби проводилась с помощью видеокамеры, помещенной на расстоянии  $\approx 130$  см от поверхности кюветы. Для подсветки капиллярной ряби использовались шесть маломощных ламп накаливания, помещенных по окружности вокруг объектива видеокамеры.

Такой способ подсветки позволял получить достаточно равномерную освещенность поверхности жидкости.

## 1.2 Алгоритмы обработки изображения

Для анализа видеofilма, который мы получали в ходе эксперимента, последовательность кадров записывалась в память персонального компьютера. Изображения представлялись в виде массивов данных из  $512 \times 512$  точек. Яркость каждой точки принимала значение от 0 до 255 (один байт информации). Таким образом могла быть представлена последовательность кадров, и изучена пространственно-временная динамика структур.

Для определения пространственного периода структуры, реализующейся в эксперименте, по полю яркости изображения методом дискретного быстрого преобразования Фурье вычислялся двумерный спектр. Предварительно поле умножалось на колоколообразную функцию, чтобы нейтрализовать скачок поля между противоположными границами. Спектр для квадратной решетки, образованной двумя взаимноортогональными парами встречных волн, состоит из набора пиков, более или менее размытых. Необходимо отметить, что в силу инерционности видеокамеры изображение параметрически возбуждаемой капиллярной ряби усредняется по времени. Связь отклонения поверхности  $\eta$  с изменением яркости изображения  $\delta I$  обсуждалась неоднократно, и здесь мы не будем останавливаться на этом подробно. Отметим лишь, что в первом приближении можно считать:  $\delta I \sim \langle \eta^2 \rangle$ . Так для двух пар встречных капиллярных волн с волновыми векторами, ориентированными вдоль осей  $OX$  и  $OY$ , т.е.  $a_+ \cos(\omega t - kx) + a_- \cos(\omega t + kx)$  и  $b_+ \cos(\omega t - ky) + b_- \cos(\omega t + ky)$ , спектр яркости изображения будет состоять из пространственных гармоник с волновыми векторами  $\mathbf{k}_{2x} = (\pm 2k, 0)$ ,  $\mathbf{k}_{2y} = (0, \pm 2k)$ ,  $\mathbf{k}_{xy} = (\pm k, \pm k)$ ,  $(\pm k, \mp k)$ . Поэтому в спектре яркости изображения мы отфильтровывали гармоники в окрестности спектральных пиков  $\mathbf{k}_{2x}$  и  $\mathbf{k}_{2y}$ . По каждому из них определялось среднее волновое число:

$$\mathbf{k}_c = \frac{\sum A_k \mathbf{k}}{2 \sum A_k}, \text{ где } A_k \text{ — амплитуда Фурье-гармоники}$$

Подобным образом вычислялись и центры тяжести пиков  $\mathbf{k}_{xy}$ , а также некоторых высших гармоник, если для них отношение сигнал-шум было удовлетворительным. Волновое число структуры  $k$  определялось методом минимизации квадратичного отклонения по всем пикам. Ошибка определения  $k$  по данной процедуре, как показали тесты, была меньше, чем величина волнового числа первой гармоники Фурье-спектра и составляла 0.3–1% от величины  $k$ . Следует подчеркнуть, что такая процедура определения волнового числа с использованием интегральных характеристик давала бóльшую точность, чем просто определение волнового числа с максимальной амплитудой  $A_k$ .

Для изучения динамики отдельных дислокаций необходимо иметь регулярную процедуру, позволяющую проводить их идентификацию в полях яркости капиллярной ряби. Для этой цели необходимо, прежде всего, определить комплексную амплитуду капиллярных волн. Комплексная амплитуда определялась так же, как в работе [12], где исследовалась динамика дефектов в одномерных роликах, возникающих при электрогидродинамической конвекции в жидких кристаллах. В случае капиллярной ряби из-за двумерности ее структуры необходима модернизация процедуры, предложенной в [12]. Нетрудно понять, что амплитуды Фурье-гармоник с волновыми векторами  $\mathbf{k}_{2x}$  и  $\mathbf{k}_{2y}$  пропорциональны соответственно  $a_+ a_-$  и  $b_+ b_-$ . Если теперь по гармоникам, принадлежащим окрестности этих пиков рассчитать обратное преобразование Фурье, приняв, что  $2\mathbf{k}_c$  является нулевой пространственной частотой, то тем самым можно выделить произведения огибающих встречных капиллярных волн.

Пример такого расчета показан на рис. 2. Поле яркости капиллярной ряби, представленное на рис. 2а, содержит одну дислокацию. Фурье-спектр, рассчитанный по этому полю, показан на рис. 2б. В окрестности спектральных пиков, отмеченных на рис. 2б пунктирными кружками, выделялись области, которые содержали  $50 \times 50$  гармоник, и по ним производилось обратное Фурье-преобразование. Поле амплитуды огибающей, полученной при расчетах обратного Фурье по гармоникам из области 1, показано на рис. 2в, а поле фазы на рис. 2г. Как видно из этих рисунков, дислокация содержит два точечных дефекта, разнесенных на небольшое расстояние. Оба этих близко расположенных дефекта имеют одинаковый топологический заряд в  $2\pi$ , определяемый как интегральный набег фазы при обходе по замкнутому контуру вокруг дефекта. За координаты дефектов принимались минимумы амплитуды огибающей, показанной на рис. 2в. В этих точках амплитуда поля была практически равна нулю.

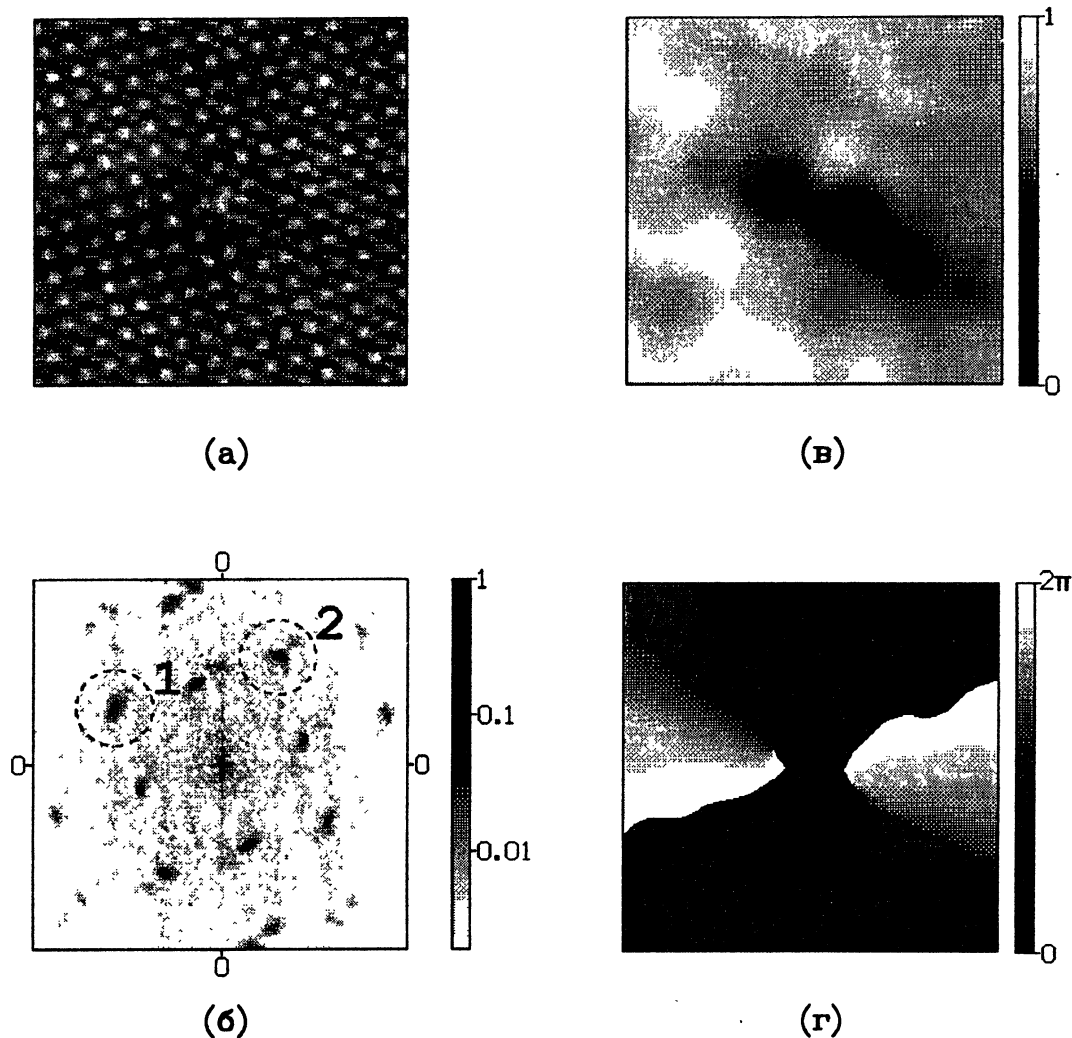


Рис.2: а) Поле капиллярной ряби. б) Фурье-спектр. Пунктиром обведены спектральные пики, для которых исследовались поля огибающих. в) Поле амплитуды комплексной огибающей спектрального пика 1. г) Поле фазы огибающей пика 1.

В поле капиллярной ряби, показанном на рис. 2а, дислокация состоит из топологических дефектов, принадлежащих одной паре волн. Как показали расчеты обратных преобразований Фурье по области 2 (рис. 2б), поле огибающей не содержало никаких дислокаций — в месте предполагаемого расположения дефектов нельзя было обнаружить уменьшение амплитуды до нуля или набег фазы при обходе. Отметим, что в ходе экспериментов наблюдались конечно же дислокации, принадлежавшие разным парам капиллярных волн. Определение огибающих всех гармоник позволяло уверенно идентифицировать месторасположение дислокаций в любом случае.

## 2 Результаты экспериментов

### 2.1 Отбор волновых чисел

В жидкости малой глубины в достаточно широком диапазоне надкритичностей реализуется совершенная структура. Это позволяет достаточно точно определить зависимость волнового числа капиллярных волн от надкритичности, рассчитывая их пространственный спектр<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>При возбуждении капиллярной ряби в бесконечно глубокой жидкости структура, образованная двумя взаимноортогональными парами бегущих волн, становится неустойчивой по отношению к поперечной амплитудной модуляции при малых надкритичностях. Поэтому точное определение волнового числа в зависимости от надкритичности не возможно.

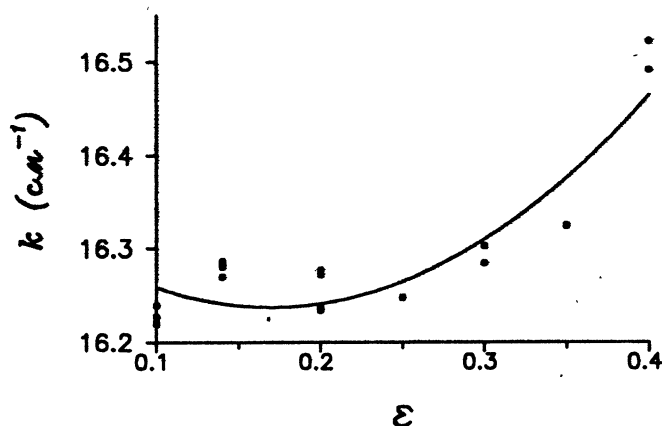


Рис.3: График зависимости волнового числа  $k$  от надкритичности  $\epsilon$  при  $H \sim 1$  мм,  $f = 100$  Гц.

Зависимость волнового числа  $k$  от надкритичности  $\epsilon$  приведена на рис. 3. При  $\epsilon > 0.5$  в структурах возникали дефекты, которые рождались на боковых стенках, а затем двигались по кювете. При расчете пространственного спектра выяснено, что появление в структуре дефектов сопровождается размыванием соответствующего спектрального пика, а потому точность определения волнового числа уменьшается. При  $\epsilon < 0.5$  самопроизвольное возникновение дефектов не происходило, и волновое число можно было определить с хорошей точностью. Как видно из представленных зависимостей, изменение волнового числа с ростом надкритичности происходит не монотонно. При малой величине  $\epsilon$  волновое число несколько спадает, а затем увеличивается.

На величину волнового числа при фиксированной частоте накачки могут влиять различные факторы. Оценим влияние двух, наиболее существенных, на наш взгляд: изменения температуры жидкости и мениска у боковых стенок кюветы.

Изменение температуры было связано, в основном, с тем, что нагревался сердечник вибростенда. Хотя толщина дна кюветы составляла  $\sim 10$  см, за время проведения серии экспериментов кювета могла нагреваться. Как показали измерения с помощью термопары, нагрев в ходе экспериментов не превышал  $0.5^\circ\text{C}$ . Оценим, к какому изменению волнового числа при фиксированной частоте приведет такое изменение температуры жидкости. В линейном приближении для капиллярных волн в жидкости конечной глубины имеем:

$$\omega^2 = (gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3) \tanh(kH), \text{ где } H \text{ — глубина жидкости}$$

Полагая  $\omega = \text{const}$  и пользуясь зависимостью параметров жидкости от температуры, а также пренебрегая влиянием температурного расширения жидкости и кюветы на глубину  $H$ , получим:

$$\Delta k \sim 0.01 \text{ см}^{-1}$$

В эксперименте изменение волнового числа с надкритичностью было на порядок больше, чем максимально возможные вариации волнового числа, вызванные изменением температуры.

Второй эффект, который может влиять на волновое число капиллярной ряби — это изменение контактного угла в мениске на боковых стенках. Если изменяется контактный угол, а это возможно, в принципе, из-за вибраций, то жидкость перетекает от стенок или к стенкам. Перетекание обуславливает изменение глубины слоя жидкости и изменение волнового числа, если частота волн фиксирована. Чтобы убедиться, что такой эффект отсутствует, нами был проведен следующий эксперимент. Мы зафиксировали, как реагирует капиллярная рябь на изменение амплитуды накачки. Было выяснено, что изменение волнового числа происходит, фактически, без запаздывания при изменении надкритичности. Если бы изменялся контактный угол, и происходило перетекание жидкости, то для такого процесса необходимо было бы конечное время  $\tau$ . Величину  $\tau$  можно оценить, если принять, что силы, действующие у боковых стенок, вызовут движение в центре кюветы через интервал, необходимый для диффузии завихренности на расстояние  $R$  или

$$\tau \sim R^2/\nu \sim 10^3 \text{ сек}$$

Такая оценка возможна, если принять, что среднее течение чисто вязкое, а все инерционные слагаемые не принимаются во внимание.



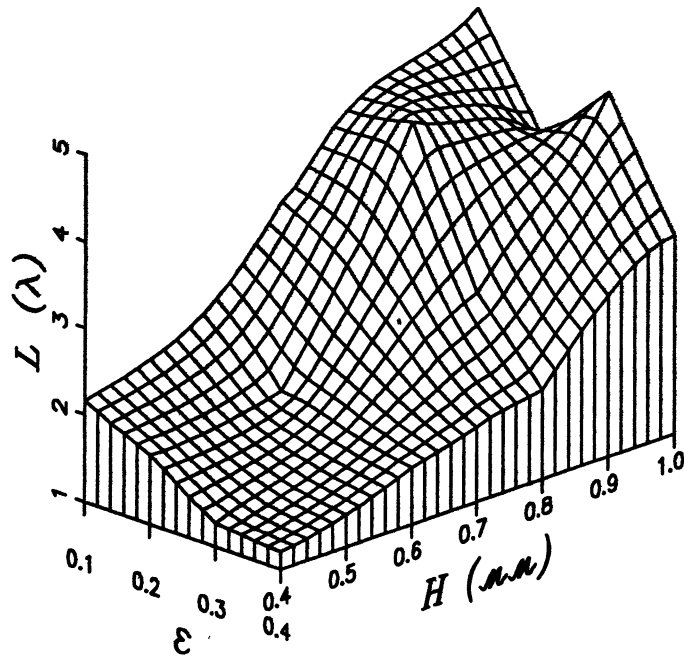


Рис.4: График зависимости расстояния между дефектами в дислокации  $L$  ( $\lambda$  — длина волны) от глубины жидкости  $H$  и надкритичности  $\epsilon$ .

## 2.2 Структура и динамика дислокаций

Каждая из элементарных дислокаций состояла из двух дефектов, имеющих одинаковый топологический заряд (см. рис. 2 в, г). Как видно на этом рисунке, дефекты в каждой дислокации смещены друг относительно друга на расстояние  $L$  преимущественно вдоль направления распространения волн в паре. На рис. 4 представлен график экспериментально снятой зависимости  $L = L(H, \epsilon)$ .

Как показали наблюдения, в большей части области параметров дислокация типа “climb” (т.е. движущаяся вдоль волновых фронтов) всегда идет в сторону с большим  $k$ . Очевидно, при этом происходит уменьшение размеров области с большим  $k$  по сравнению с областью с меньшим  $k$ . Это означает, что в процессе нелинейной конкуренции мод происходит вытеснение моды с большим  $k$  модой с меньшим. “Glide motion” (т.е. скольжение дислокации поперек фронтов капиллярных волн) может происходить равновероятно в обе стороны. Является ли движение дислокаций механизмом отбора мод, как это происходит, например, в термоконвекции? Чтобы выяснить, так ли это, измерялось волновое число капиллярной ряби  $k$  в зависимости от времени при фиксирован-

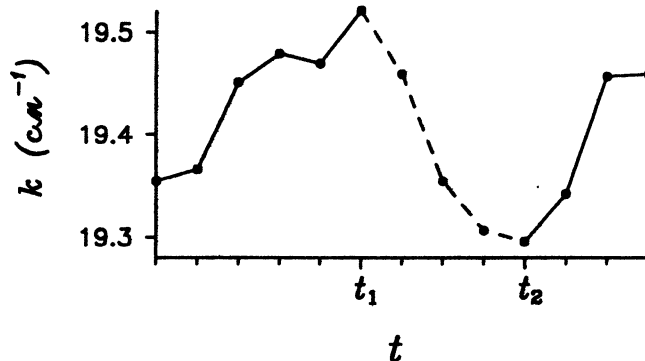
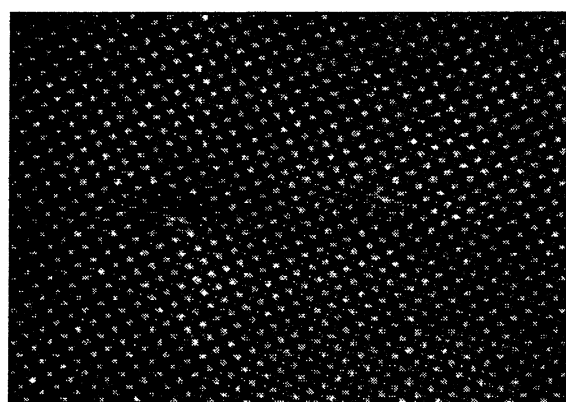
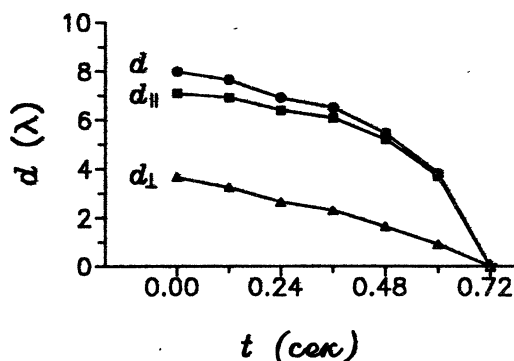


Рис.5: Изменение волнового числа при движении дислокации от одной стенки кюветы к другой:  $0 < t < t_1$  — идеальная решетка;  $t_1 < t < t_2$  — движется дислокация;  $t > t_2$  — снова идеальная решетка. Весь процесс занял  $\sim 1$  сек;  $\epsilon = 0.45$ ,  $H \sim 1$  мм.



(a)



(б)

Рис.6: Аннигиляция дислокаций при  $\epsilon = 0.5$ ,  $f = 100$  Гц. а) Снимок двух дислокаций. б) Расстояние между центрами дислокаций — кривая  $d$ ; расстояние вдоль направления распространения волн в паре — кривая  $d_{||}$ ; расстояние вдоль трансверсального направления — кривая  $d_{\perp}$ . Под центром дислокации мы понимаем точку посередине между образующими дислокацию дефектами.

ной надкритичности  $\epsilon$ . В достаточно большом интервале надкритичностей структура капиллярной ряби была совершенной, и волновое число капиллярных волн с течением времени практически не изменялось. Это означает, что в результате конкуренции мод возникает ситуация, когда одна мода вытесняет все остальные, и такая ситуация является устойчивой. При надкритичности  $\epsilon = 0.45$  в решетке могли появляться дислокации. Это значит, что одновременно могут сосуществовать моды с двумя различными  $k$ . Такие события при данной надкритичности были достаточно редкими. Дислокации типа “climb” возникали у боковой стенки, двигались по кювете и аннигилировали у стенки в другом месте. Представляется важным понять, что происходит со структурой во время возникновения и движения дислокации.

Волновое число, определенное по алгоритму, описанному в п. 1.2, в различные моменты времени показано на рис. 5. Как видно из этого рисунка, волновое число структуры увеличивается при  $t < t_1$ . Момент времени  $t_1$  соответствует возникновению дислокации. При  $t_1 < t < t_2$  спектральный пик, соответствующий паре волн с дефектом, размыт. Среднее значение  $k$ , показанное на рис. 5 пунктиром, уменьшалось во времени. В момент времени  $t = t_2$  дислокация аннигилировала с дислокацией, расположенной у стенки, и структура снова становилась совершенной, а при  $t > t_2$  опять происходило нарастание волнового числа. Таким образом, при нелинейной конкуренции мод в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби могут возникать квазипериодические колебания пространственного периода. Как правило, увеличение волнового числа происходит адиабатически (т.е. без изменения топологии решетки), а уменьшение осуществляется при перестройке топологии засчет возникновения и движения дислокаций.

При  $\epsilon = 0.5$  можно было выделить моменты времени, когда в кювете было две дислокации. Поэтому мы имели возможность наблюдать элементарные акты взаимодействия, которые представляют фундаментальный интерес при изучении пространственно-временного хаоса в системе (подробнее об этом см. в [7]). Например, аннигиляция дислокаций имела место, когда их топологические заряды были противоположны (см. рис. 6). В этом случае аннигиляции, как видно из рисунка, движение дислокаций — преимущественно “glide motion”.

### 3 Обсуждение результатов

Для описания дислокации будем исходить из уравнений для комплексных огибающих волн  $a_+$  и  $a_-$ , распространяющихся навстречу друг другу. Представим, что

$$\eta = \frac{1}{2} (a_+ e^{ikx} + a_- e^{-ikx} + b_+ e^{iky} + b_- e^{-iky}) e^{-i\omega t} + \text{к.с.}$$

Тогда в предположении, что амплитуды волн меняются медленно во времени и в пространстве, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial a_{\pm}}{\partial t} \pm v_g \frac{\partial a_{\pm}}{\partial x} - i\omega''_{kk} \frac{\partial^2 a_{\pm}}{\partial x^2} - \frac{iv_g}{2k} \frac{\partial^2 a_{\pm}}{\partial y^2} + \gamma a_{\pm} = \quad (1.1)$$

$$i(h + Fb_+b_-)a_{\mp}^* + ia_{\pm}[T|a_{\pm}|^2 + S|a_{\mp}|^2 + R(|b_+|^2 + |b_-|^2)];$$

$$\frac{\partial b_{\pm}}{\partial t} \pm v_g \frac{\partial b_{\pm}}{\partial y} - i\omega''_{kk} \frac{\partial^2 b_{\pm}}{\partial y^2} - \frac{iv_g}{2k} \frac{\partial^2 b_{\pm}}{\partial x^2} + \gamma b_{\pm} = \quad (1.2)$$

$$i(h + Fa_+a_-)b_{\mp}^* + ib_{\pm}[T|b_{\pm}|^2 + S|b_{\mp}|^2 + R(|a_+|^2 + |a_-|^2)]$$

Условия медленности изменения амплитуды в пространстве приближенно выполняются в эксперименте, когда размер дислокаций больше 2–3 длин волн. Медленность изменения амплитуд во времени здесь выполняется с гораздо большим запасом.

Рассмотрим симметрию решений  $a_{\pm}$ . Как обнаружено в эксперименте, в том случае, когда в паре волн с амплитудами  $a_{\pm}$  есть дефекты, амплитуды волн ортогональной пары  $b_{\pm}$  в окрестности дефекта изменяются мало. Поэтому будем считать  $b_{\pm} = const$  и рассматривать только пару уравнений (1.1). Их симметрия допускает решения, удовлетворяющие условию:

$$a_+(x, y, t) = e^{i\Delta\phi} a_-(-x, \pm y, t), \quad \Delta\phi = const \text{ (далее для простоты положим } \Delta\phi = 0) \quad (2)$$

Принимая во внимание экспериментально обнаруженные особенности структуры дислокации (см. п. 1.2), для моделирования поля капиллярных волн с дислокацией может быть предложена формула:

$$\eta = \eta_0 \left[ \cos(\omega t - ky) + \cos(\omega t + ky) + \right. \\ \left. \tanh \sqrt{\kappa_x^2(x - \Delta x)^2 + \kappa_y^2 y^2} \cos \left( \omega t - kx + \arctan \frac{\kappa_y y}{\kappa_x(x - \Delta x)} \right) + \right. \\ \left. \tanh \sqrt{\kappa_x^2(x + \Delta x)^2 + \kappa_y^2 y^2} \cos \left( \omega t + kx \pm \arctan \frac{\kappa_y y}{-\kappa_x(x + \Delta x)} \right) \right] \quad (3)$$

Знак “ $\pm$ ” в формуле (3), как и в (2), обозначает две различные ситуации. Можно показать, что в случае “+” топологические заряды во встречных волнах равны, а случае “-” — противоположны. В эксперименте имел место случай равных зарядов. Случай противоположных зарядов не реализовывался никогда. Видимо, соответствующее решение уравнений (1.1) неустойчиво. В пользу решения с равными зарядами говорит еще и следующий факт. Симметрия уравнений допускает стационарное решение вида  $a_+(x, y - vt) = a_-(-x, y - vt)$ , которое соответствует движению (типа “climb”) дислокации с равными зарядами, что, конечно, наблюдалось в эксперименте. Для дислокации с противоположными зарядами возможно стационарное решение другого вида:  $a_+(x, y - vt) = a_-(-x, -y - vt)$ . Т.е. такая дислокация не могла бы двигаться, а только расплываться в пространстве.

В формуле (3) есть несколько параметров, которые можно варьировать, чтобы подбирать поле капиллярных волн, дающее изображение, наиболее полно совпадающее с наблюдаемым в эксперименте. Так  $L = 2\Delta x$  — это расстояние между топологическими дефектами во встречных волнах, а с помощью коэффициентов  $\kappa_x$  и  $\kappa_y$  учитывается, что амплитуды волн  $a_{\pm}$  вблизи точек, где находятся топологические заряды, изменяются различным образом вдоль направления распространения волн и в перпендикулярном направлении. Сравнение яркости изображения, рассчитанного по формуле (3) может быть проведено как для усредненного по периоду ряби изображения (кадр видеозаписи), так и с мгновенным снимком (фотография со вспышкой). Эти изображения, вообще говоря, топологически не эквивалентны. На усредненном изображении есть два топологических дефекта с одноименными зарядами, а на мгновенном снимке — один дефект, положение которого зависит от фазы поля  $\omega t$ . Хотя в каждой из встречных волн  $a_{\pm}$  есть топологический заряд, суммирование полей волн не приводит к суммированию топологических зарядов. Если же при вычислении яркости изображения происходит возведение в квадрат и усреднение по времени, то такая операция приводит к перемножению полей и сложению топологических зарядов (см. п. 1.2).

В эксперименте измерялось расстояние между дефектами  $L$ , поэтому важно получить оценку этой величины из уравнений (1.1). Отметим, что условие применимости этих уравнений для описания решений типа (3) сводится к виду  $\kappa_{x,y} \ll k$ . Будем считать, что в окрестности расположения дефектов (при  $-\Delta x < x < \Delta x$ )  $|a_{\pm}|$  много меньше, чем стационарное значение, и нелинейными слагаемыми в уравнениях (1.1) будем пренебрегать. Пренебрежем также вторыми производными, считая, что изменение амплитуд в окрестности дефектов происходит линейно (это подтверждается обработкой реальных изображений). Тогда в стационарном случае для амплитуд  $a_{\pm}$  имеем:

$$\pm v_g \frac{\partial a_{\pm}}{\partial x} + \gamma a_{\pm} = i(h + Fb_+b_-)a_{\mp}^*$$

Эта система уравнений допускает аналитическое решение с амплитудами  $a_+$  и  $a_-$ , имеющими нули, расстояние между которыми есть искомое  $L$ . Полагая  $h + Fb_+b_- \approx \gamma$  (что эквивалентно малой надкритичности:  $\epsilon \approx 0$ ), для расстояния между дефектами получим оценку:

$$L \sim v_g / \gamma \quad (4)$$

Как показал расчет, при глубине силиконового масла  $1 \text{ мм}$  и частоте накачки  $f = 102 \text{ Гц}$  расстояние между дефектами составляет  $\sim 1 \text{ см}$  или 3 длины волны. В эксперименте — 5 длин волн (см. рис. 4). С уменьшением глубины жидкости уменьшается групповая скорость  $v_g$  и увеличивается затухание волн  $\gamma$  (возрастает трение о дно). Поэтому, как следует из (4), расстояние между топологическими зарядами должно уменьшаться. Эта тенденция наблюдается и в эксперименте. Хотя формула (4) качественно правильно отражает экспериментальные данные, ее область применения достаточно ограничена, так как в ней, фактически, не учитываются нелинейные и дисперсионные эффекты. Учтено лишь, что встречные капиллярные волны связаны через накачку. Так в эксперименте наблюдается зависимость  $L$  от надкритичности  $\epsilon$ . Из (4) получить такую оценку в принципе нельзя, так как всеми нелинейными эффектами при выводе мы пренебрегли. Оценку (4) нельзя применить как при очень малой глубине жидкости, так и в жидкости бесконечной глубины. В жидкости малой глубины расстояние между дефектами порядка длины волны (см. рис. 4), и не выполняются условия медленности изменения амплитуд волн  $a_{\pm}$ . А в жидкости бесконечной глубины каждая из взаимноортогональных пар промодулирована в поперечном направлении, и нельзя пренебречь вторыми производными по  $y$ :

$$\omega''_{kk} \left| \frac{\partial^2 a_{\pm}}{\partial y^2} \right| > v_g \left| \frac{\partial a_{\pm}}{\partial x} \right|$$

В глубокой жидкости, как показали эксперименты, топологические заряды в дислокации располагаются на большом расстоянии, которое, в принципе, может быть порядка размеров кюветы. Дислокация при этом переходит в уединенную волну модуляции. Дислокации, имеющие топологический заряд одного знака, могут образовывать линейную цепочку, выстраиваясь перпендикулярно  $\mathbf{k}$  (тогда как заряды внутри одной дислокации расположены на линии, параллельной  $\mathbf{k}$ ) [7]. Если увеличивать расстояние между зарядами в дислокациях до размера кюветы, то таким образом можно из цепочки построить волну модуляции, которая наблюдается в бесконечно глубокой жидкости (см. рис. 7).

## Выводы

1. В совершенных структурах, возникающих в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби, увеличение надкритичности приводит к изменению пространственного периода. Совершенные структуры при увеличении надкритичности становятся неустойчивыми к возникновению дислокаций.
2. Структура дислокаций, возникающих в параметрически возбуждаемой ряби зависит от глубины жидкости и надкритичности. С увеличением глубины жидкости или уменьшением надкритичности расстояние между топологическими зарядами, образующими дислокацию, возрастает. Линейная цепочка дислокаций при увеличении расстояния между топологическими дефектами переходит в волны модуляции.



(a)



(б)

Рис.7: Дислокации, переходящие в волны модуляции (а);  $\epsilon = 0.3$ ,  $H \sim 1$  м.м. Фаза (б) комплексной огибающей приведена для подтверждения наличия топологических зарядов.

## Литература

- [1] S. Douady, S. Fauve, "Pattern selection in Faraday instability", *Europhys. Lett.*, 1988, Vol.6, pp.221–226.
- [2] W.S. Edwards, S. Fauve, "Parametrically excited quasicrystalline surface waves", *Phys. Rev. E*, 1993, Vol.47, pp.788–792.
- [3] B. Christiansen, P. Altrom, M.T. Levinsen, "Ordered capillary wave states: quasicrystals, hexagons, and radial waves", *Phys. Rev. Lett.*, 1992, Vol.68, No.14, pp.2157–2160.
- [4] А.Б. Езерский, М.И. Рабинович, В.П. Реутов, И.М. Старобинец, "Пространственно-временной хаос параметрически возбуждаемой капиллярной ряби", *ЖЭТФ*, 1986, Том.91, Вып.6(12), с.2070–2083.
- [5] N.B. Tuffillaro, R. Ramshankar, J.P. Gollub, "Order–disorder transition in capillary ripples", *Phys. Rev. Lett.*, 1989, Vol.62, pp.422–425.
- [6] A.B. Ezersky, S.V. Kiyashko, P.A. Matusov, M.I. Rabinovich, "Domains, domain walls and dislocations in capillary ripples", *Europhys. Lett.*, 1994, Vol.26, No.3, pp.183–188.
- [7] A.B. Ezersky, D.A. Ermoshin, S.V. Kiyashko, "Dynamics of defects in parametrically excited capillary ripples", *Phys. Rev. E*, Vol.51, No.4, 1995.
- [8] D.S. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Chahn, *Phys. Rev. Lett.*, 1984, Vol.53, p.1951.
- [9] A.B. Ezersky, M.I. Rabinovich, "Nonlinear wave competition and anisotropic spectra of spatio-temporal chaos of Faraday ripples", *Europhys. Lett.*, 1990, Vol.13, No.3, pp.243–249.
- [10] V. Croquette, A. Pocheau, "Wavenumber selection in Rayleigh–Benard convective structure", *Lecture notes in physics*, Springer-Verlag, Berlin .. Tokyo, 1984, Vol.210, pp.104–126.
- [11] J.A. Whitehead, "Dislocations in convection and the onset of chaos", *Phys. Fluids*, 1983, Vol.26, No.10, pp.2899–2904.
- [12] S. Rasenat, V. Steinberg, I. Rehberg, "Experimental studies of defects and interaction in electrohydrodynamic convection", *Phys. Rev. A*, 1990, Vol.42, No.10, pp.5998–6008.
- [13] A. Joets, R. Ribbotta, "Electro-hydro-dynamical convective structures and transitions to chaos in a liquid crystal", *Lecture notes in physics*, Springer-Verlag, Berlin .. Tokyo, 1984, Vol.210, pp.294–305.
- [14] Ribbotta R., Joets A., "Defects and interactions with the structures in end convection in nematic liquid crystals", *Lecture notes in physics*, Springer-Verlag, Berlin .. Tokyo, 1984, Vol.210, pp.249–261.

## DISLOCATIONS AND ENVELOPE WAVES IN PARAMETRICALLY EXCITED CAPILLARY RIPPLES

A.B. Ezersky, D.A. Ermoshin, S.V. Kiyashko

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,  
46 Uljanov Street, 603600 Nizhny Novgorod, Russia;*

*E-mail: ezer@appl.sci-nnov.ru; FAX: +7 (8312) 36 72 91; Phone: +7 (8312) 38 42 80*

### Abstract

Experiments verify that the scenario of the transition to disorder and characteristics of the spatio-temporal chaos emerging in the perfect structures formed by parametrically excited capillary waves in spatially extended systems depend significantly on liquid layer depth. When the depth is larger than the wavelength, analysis of the image of capillary ripples shows that the structure consisting of two pairs of mutually orthogonal running waves is space modulated as the control parameter (the amplitude of external oscillations) is increased. It was shown in experiments that this modulation arises as a result of the instability of the structure with respect to the perturbations with the wave vectors perpendicular to the wave vector of the original pairs.

Solitary dislocations exist in the structures if the depth is smaller than the wavelength of capillary waves. An ensemble of interacting dislocations is an image of chaos in this case. It was shown that each dislocation is a bound state of two topological defects having equal charges. The distance between the topological defects in each dislocation grows with the increase of the liquid layer depth. It was shown experimentally that an individual dislocation is transformed to a solitary modulation wave, and the domain wall to a periodic envelope wave.

# МНОГОЗАХОДНЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ И ДИСЛОКАЦИИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ РЯБИ

С.В. Кияшко

Институт прикладной физики Российской академии наук  
 Нижний Новгород 603600, ул. Ульянова 46, РОССИЯ  
 E-mail: Kiyashko@appl.sci-nnov.ru; FAX: (8312)36 72 91; Phone:(8312)38 42 80

## Реферат

Экспериментально обнаружен и исследован новый класс параметрически возбуждаемых стационарных пространственных структур на поверхности жидкости — многозаходные спиральные волны. Показано, что многозаходная спираль возникает при взаимодействии дефектов с цилиндрической структурой типа мишень. В результате взаимодействий дефекты движутся к центру мишени и образуют устойчивую многозаходную спираль.

## Введение

Капиллярная рябь, параметрически возбуждаемая на поверхности жидкости — один из наиболее удобных объектов для исследования процессов образования устойчивых структур и перехода к хаосу. Эксперименты по параметрическому возбуждению капиллярной ряби удобны тем, что в этом случае можно менять контрольные параметры: надкритичность, диссипацию и длину возбуждаемых волн, пространственный размер системы и легко визуализировать поля поверхностных волн. Первые эксперименты по параметрическому возбуждению капиллярных волн начались еще с работ Фарадея [1]. Схема эксперимента следующая. На горизонтальную плоскость, колеблющуюся в вертикальном направлении с частотой  $f_0$ , помещается слой жидкости. Боковые стенки, ограничивающие растекание жидкости, имеют произвольную форму. При превышении амплитуды внешней силы некоторой критической величины  $a_n$  на поверхности жидкости возбуждаются стоячие капиллярные волны с частотой  $0,5f_0$ . Причем, в достаточно протяженных системах ( $L \gg \lambda$ ) структура капиллярной ряби не зависит от геометрии боковых границ. Пространственные картины стоячих волн можно наблюдать в отраженном свете и фиксировать на фото- или видеокамеру с дальнейшей обработкой на РС компьютере.

В зависимости от параметров: глубины ( $h$ ), длины волны ( $\lambda$ ), вязкости ( $\nu$ ) и надкритичности ( $\epsilon, \epsilon = a/a_n - 1$  ( $a$  — амплитуда ускорения,  $a_n$  — пороговая амплитуда генерации)) на поверхности жидкости возможно установление различных пространственных структур стоячих волн. Большинство экспериментальных работ по параметрическому возбуждению волн относится к жидкости малой вязкости. При этом обычно наблюдаются квадратная решетка капиллярной ряби, состоящая из двух пар взаимноортогональных стоячих волн. В слое жидкости малой глубины  $h \leq \lambda$ , когда существенно вязкое трение об дно, возможно нарушение квадратной решетки в виде отдельных дислокаций или доменных стенок, разделяющих области с различной пространственной ориентацией поля [2]. В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования возникновения и эволюции нового класса стационарных пространственных структур на поверхности жидкости — многозаходных спиральных волн. Однозаходная спиральная волна наблюдалась в круглом контейнере при резком увеличении амплитуды внешней силы в жидкости большой вязкости ( $\nu \simeq 1.00 \text{ см}^2/\text{сек}$ ) в работе [3].

## 1 Экспериментальная часть

Эксперимент проводился для жидкостей в широком диапазоне вязкости  $\nu = 0,01 - 1,20 \text{ см}^2/\text{сек}$  и в контейнерах различной формы: круглой ( $D16; 23 \text{ см}$ ) квадратной —  $11 \text{ см}$  и прямоугольной. В качестве жидкости использовалась как смесь глицерина с водой, так и силиконовое масло различной вязкости.

В результате экспериментального исследования на плоскости параметров: вязкость и отношение глубины жидкости к длине волны при фиксированной надкритичности — построены области существования шестигранной, квадратной и одномерной решетки стоячих волн (рис.1). На рис.1 номеру области соответствует число пар стоячих волн. В области 2 существует две пары стоячих



волн — квадратная решетка. В области 3 существуют три пары волн — шестигранные ячейки. В области 1 — одна пара волн — линейные (роликовые) структуры.

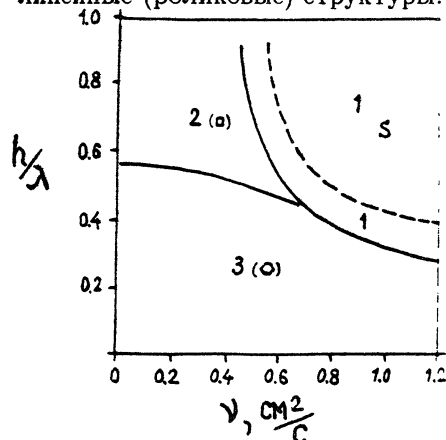


Рис. 1: Границы и области существования различных режимов на плоскости  $(h/\lambda, \nu)$ , ( $S$  — спиральные волны)

Такие структуры возможны при достаточно сильной вязкости и, по-видимому, из-за сильной конкуренции устойчива только одна пара волн. Поведение линейных структур подобно роликам в термоконвекции. В частности, они предпочтительно выстраиваются нормально к границе кюветы, поэтому по аналогии с термоконвекцией будем их в дальнейшем называть роликовыми структурами.

Область существования спиральных волн  $S$  (отмечена штриховой линией) находится внутри области существования линейных структур. На рис. 2 представлены различные типы стационарных роликовых структур: а - типа мишень (target), б - дугообразные ролики с центрами кривизны на границе, в, г - спиральная стоячая волна (число рукавов на картинке спирали удваивается за счет стоячей волны).

Заметим, что все эти стационарные структуры существуют при одинаковых управляющих параметрах, а выбор структуры осуществляется только начальными условиями возбуждения. Такое свойство мультистабильности характерно для автоколебательных систем.

При случайных начальных условиях или при искусственном возмущении поверхности жидкости на роликовой структуре могли возникать дефекты, которые обычно медленно двигались вдоль прямых роликов или двигались и поперек искривленных роликов к их центру кривизны. На рис.3 приведены последовательные картины движения пары дефектов, которые возникли в центре кюветы и двигаются к ее краям, а далее вдоль границ к центрам кривизны. Дефекты, движущиеся навстречу друг другу, могли аннигилировать. Эти результаты аналогичны свойствам дефектов, описанных нами ранее для квадратной решетки волн в жидкости малой вязкости [4].

Если дефекты находятся на фоне круговой решетки (типа мишень), то при взаимодействии между собой они могут аннигилировать или двигаться к центру мишени, образуя при этом многозаходную спиральную волну. На рис.4 представлен процесс образования однозаходной спиральной волны при взаимодействии одного дефекта со структурой типа мишень.

Временные интервалы между фотографиями пространственной структуры поля соответство-

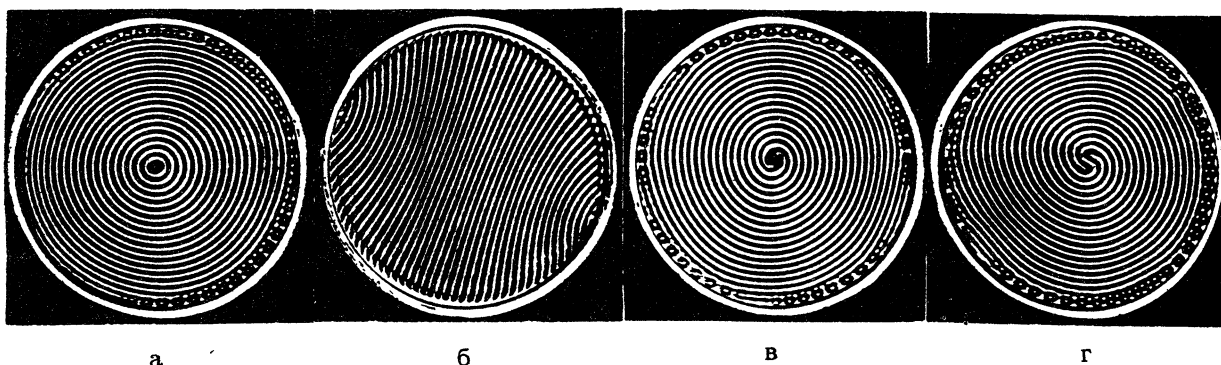


Рис. 2: Различные типы стационарных роликовых структур

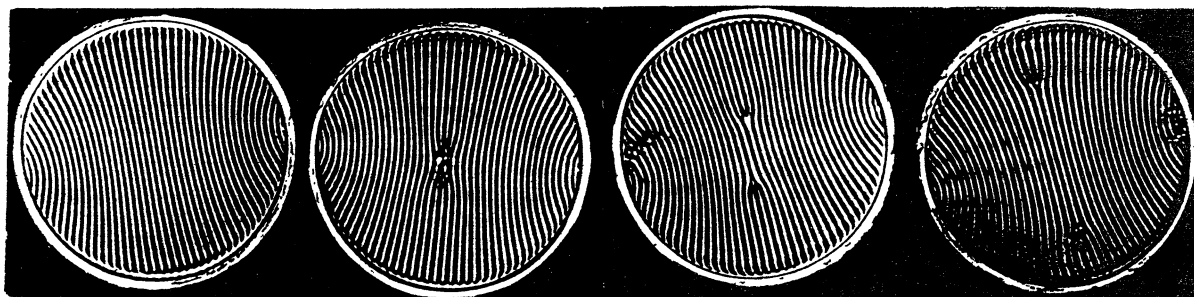


Рис. 3: Разбегание дефектов, родившихся в центре кюветы

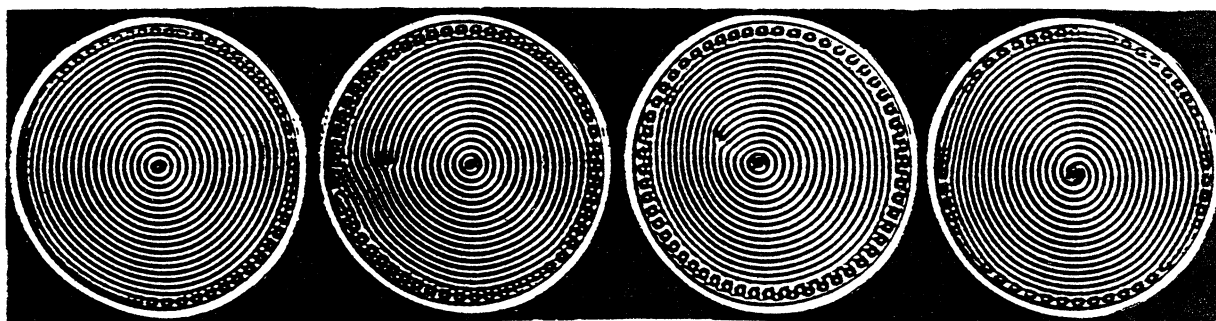


Рис. 4: Рождение однозаходной спирали при взаимодействии дефекта с структурой типа мишень

вали 50–100 периодам основного поля, а время экспозиции 3–5 периодов волны. Заметим, что в отличие от термоконвекции число дефектов внутри спирали и число ее рукавов удваивается за счет усреднения за время экспозиции. На мгновенных снимках период роликов был бы вдвое реже, а номер спирали совпадал бы с числом ее рукавов.

На рис.5 представлен процесс образования многозаходной спиральной волны при взаимодействии дефекта со спиральной волной с меньшим числом заходов.

На рис.5 видно, что дефекты внутри спирали и дефект вне ее совпадают по знаку топологического заряда, что и приводит к увеличению числа заходов спирали. Экспериментально наблюдался и обратный процесс уменьшения числа заходов спирали и даже превращения ее в мишень. Это происходило тогда, когда дефект имел топологический заряд противоположного знака по сравнению с топологическим зарядом спирали. Все подобные сценарии наблюдались и в квадратной кювете (рис.6).

Спиральная волна медленно вращалась в сторону, противоположную своей закрутке с периодом порядка 300 периодов основной волны. С увеличением числа заходов спирали период ее вращения увеличивался (рис.7).

Как показало специальное экспериментальное исследование, это вращение возникает из-за медленного дрейфа роликовых структур, вызываемого затухающей сдвиговой волной, генерируемой в вязком слое вертикальной стенкой кюветы. Меняя форму вертикальной стенки по глубине, можно было уменьшить эту скорость вдвое.

При увеличении надкритичности в системе на структурах возникали поперечные волны модуляции, затем случайные дефекты, домены, отличающиеся различной ориентацией роликов, а далее хаотичное движение волн модуляции и дефектов, сопровождающееся отрывом капель от поверхности жидкости (рис. 8).

волн — квадратная решетка. В области 3 существуют три пары волн — шестигранные ячейки. В области 1 — одна пара волн — линейные (роликовые) структуры.

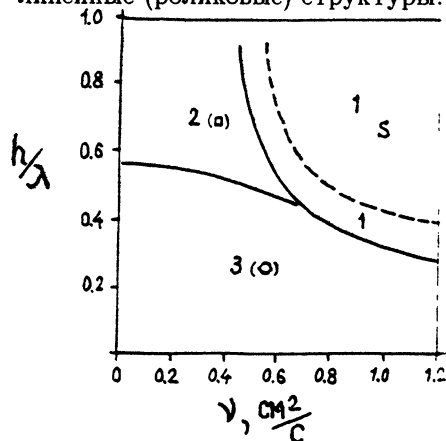


Рис. 1: Границы и области существования различных режимов на плоскости  $(h/\lambda, \nu)$ , ( $S$  — спиральные волны)

Такие структуры возможны при достаточно сильной вязкости и, по-видимому, из-за сильной конкуренции устойчива только одна пара волн. Поведение линейных структур подобно роликам в термоконвекции. В частности, они предпочтительно выстраиваются нормально к границе кюветы, поэтому по аналогии с термоконвекцией будем их в дальнейшем называть роликовыми структурами.

Область существования спиральных волн  $S$  (отмечена штриховой линией) находится внутри области существования линейных структур. На рис. 2 представлены различные типы стационарных роликовых структур: а - типа мишень (target), б - дугообразные ролики с центрами кривизны на границе, в, г - спиральная стоячая волна (число рукавов на картинке спирали удваивается за счет стоячей волны).

Заметим, что все эти стационарные структуры существуют при одинаковых управляющих параметрах, а выбор структуры осуществляется только начальными условиями возбуждения. Такое свойство мультстабильности характерно для автоколебательных систем.

При случайных начальных условиях или при искусственном возмущении поверхности жидкости на роликовой структуре могли возникать дефекты, которые обычно медленно двигались вдоль прямых роликов или двигались и поперек искривленных роликов к их центру кривизны. На рис. 3 приведены последовательные картины движения пары дефектов, которые возникли в центре кюветы и двигаются к ее краям, а далее вдоль границ к центрам кривизны. Дефекты, движущиеся навстречу друг другу, могли аннигилировать. Эти результаты аналогичны свойствам дефектов, описанных нами ранее для квадратной решетки волн в жидкости малой вязкости [4].

Если дефекты находятся на фоне круговой решетки (типа мишень), то при взаимодействии между собой они могут аннигилировать или двигаться к центру мишени, образуя при этом многозаходную спиральную волну. На рис. 4 представлен процесс образования однозаходной спиральной волны при взаимодействии одного дефекта со структурой типа мишень.

Временные интервалы между фотографиями пространственной структуры поля соответство-

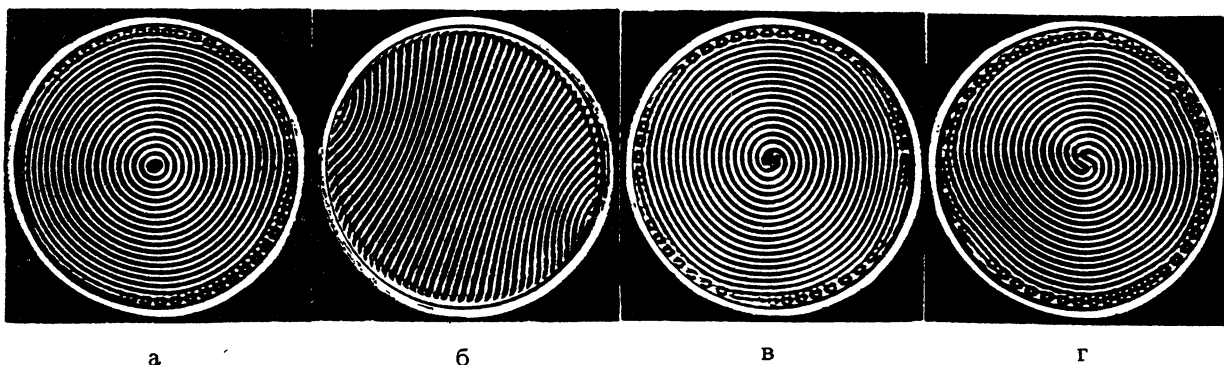


Рис. 2: Различные типы стационарных роликовых структур

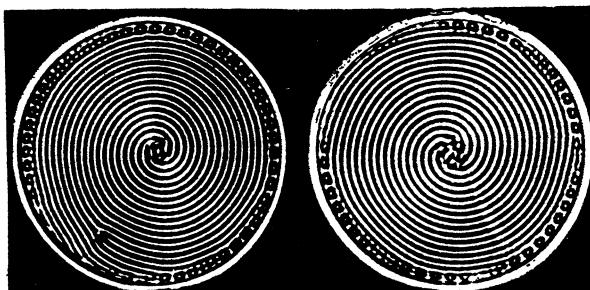


Рис. 5: Рождение многозаходной спирали при взаимодействии дефекта со спиралью

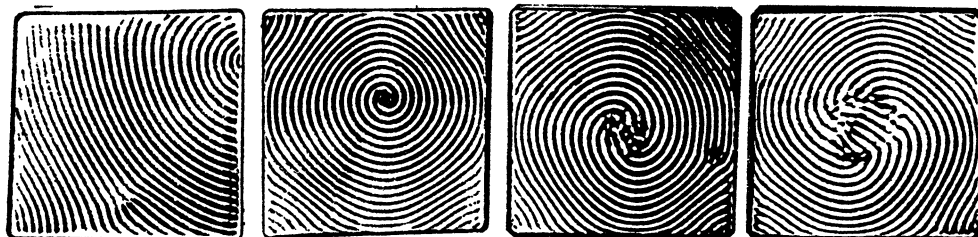


Рис. 6: Ролики и спиральные волны в квадратной кювете

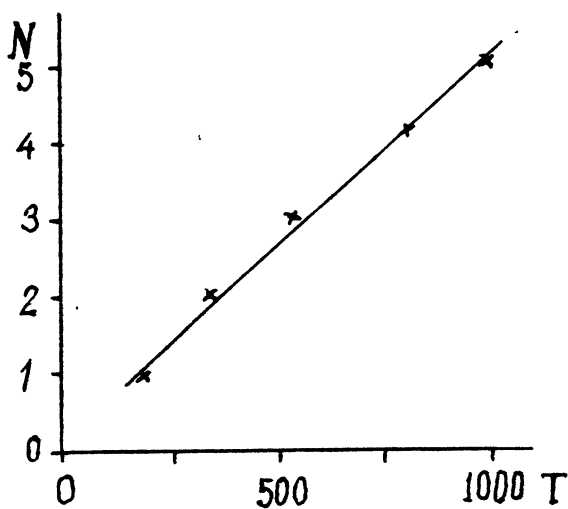


Рис. 7: Зависимость периода вращения спирали, выраженного в периодах основной волны от числа заходов спирали  $N$

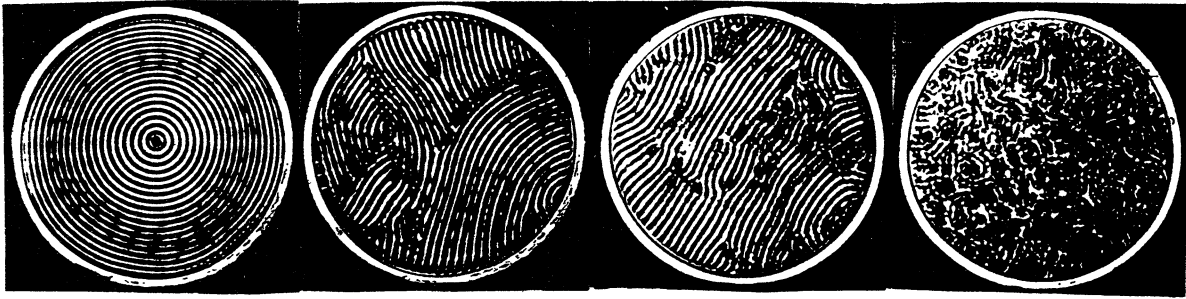


Рис. 8: Волны модуляции, дефекты и переход к хаосу при возрастании надкритичности

При возбуждении в кювете одновременно нескольких спиралей они медленно эволюционировали, сливаясь друг с другом, и затем устанавливался один из устойчивых режимов: спираль или ролики (рис 9).



Рис. 9: Эволюция многоспиральных начальных условий

В настоящее время, по-видимому, еще нет математического описания для процесса образования спиральных стоячих волн при параметрическом возбуждении. В то время, как для описания рождения спиральных волн в термоконвекции успешно используется обобщенное уравнение Свифта – Хоенберга [5]. Можно надеяться, что уравнения подобного типа могут быть использованы и в случае параметрического возбуждения волн.

Эта работа была выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (Грант N. N94-02-03263-а) и Международного научного фонда (Grant No. NOU 000, No. NOU 300).

## ССЫЛКИ

- [1] Faraday, Philos. Trans. R. Soc., 121(1831) 299.
- [2] Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Matusov P.A., Rabinovich M.I. Domain, domain walls and dislocations in capillary ripples. Europhys. Lett., 1994, v.26, N 3, p.183-188.
- [3] Edwards W.S., Fauve S. Patterns and quasi – patterns in the Faraday experiment. J. Fluid Mech., 1994, v.278, p.123-148.
- [4] Ezersky A.B., Ermoshin D.A., Kiyashko S.V. Dynamics of defects in parametrically excited capillary ripples. Phys. Rev. E, 1995, v.51, n.4, p.4411-4417.
- [5] Korzinov L.N., Nikulin A.S., Rabinovich M.I. Origin of spirals with a high topological charge. Phys. Lett. A 177; 1995, p.421-427.

## MULTIARMED SPIRAL WAVES AND DISLOCATIONS IN PARAMETRICALLY EXCITED CAPILLARY RIPPLES

S.V.Kiyashko

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,  
46 Uljanov Street, 603600 Nizhny Novgorod, Russia;*

*E-mail: Kiyashko@appl.sci-nnov.ru; FAX: (8312)36 72 91; Phone:(8312)38 42 80*

Experiments show that different perfect structures by parametrically excited capillary waves in the form of squares, hexagons rolls and spiral may be observed depending on parameters depth/ $\lambda$ -viscosities (Fig.1). It is found that the multiarmed spiral is a result of the evolution of defects against the background of a cylindrical target.

As a result of the interaction the defects come to the target center and a stable multiarmed spiral is formed (Fig.5).

The topological charge of this spiral depends on the initial number of defects of different signs. Spiral rotates with period of about one minute. The multiarmed spiral are observed in circular and square cell (Fig.6).



# УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА И КОЛИЧЕСТВЕННАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ДВУМЕРНЫХ НЕОБРАТИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.

Институт радиотехники и электроники Российской Академии наук,  
Саратовский филиал  
410019, Зеленая 38, Саратов, Россия  
E-mail: kuz@spkuz.saratov.su

## Аннотация

Рассмотрены два типа количественной универсальности при удвоениях периода в двумерных необратимых отображениях - при наличии у отображения особенности типа складки и при проецировании зонтика Уитни.

Общепризнано, что исследование одномерных необратимых отображений оказалось весьма плодотворным для понимания перехода к хаосу через удвоения периода. Решающий успех в этой области связан с идеями ренормгруппы (РГ), универсальности и скейлинга. В этом докладе мы хотим рассмотреть с аналогичных позиций новые типы универсального поведения, возникающие в двумерных дифференцируемых необратимых отображениях.

Для одномерных отображений содержание РГ анализа состоит в нахождении и исследовании седловых неподвижных точек (в более общем случае – периодических или непериодических седловых орбит) для рекуррентного функционального уравнения Фейгенбаума - Цвитановича [1]:

$$g_{k+1}(X) = \alpha_k g_k(g_k(X/\alpha_k)), \quad \alpha_k = 1/g_k(g_k(0)). \quad (1)$$

Двумерный аналог уравнения (1) представляется в виде (см. [2], [3]):

$$\begin{aligned} g_{k+1}(X, Y) &= \alpha_k g_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)), \\ f_{k+1}(X, Y) &= \beta_k f_k(g_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k), f_k(X/\alpha_k, Y/\beta_k)), \\ \alpha_k &= 1/g_k(g_k(0, 0), f_k(0, 0)), \quad \beta_k = 1/f_k(g_k(0, 0), f_k(0, 0)), \end{aligned} \quad (2)$$

где для удобства использована такая система координат на плоскости динамических переменных  $X, Y$ , чтобы правило пересчета масштаба имело диагональный вид,  $X \rightarrow X/\alpha, Y \rightarrow Y/\beta$ .

Для одномерных унимодальных отображений каждый определенный класс универсальности, ассоциирующееся с ним решение уравнения РГ, величина масштабной константы  $\alpha = \lim \alpha_k$  зависят от показателя степени  $z$  вблизи точки экстремума [4]. В гладком случае, который нас только и интересует,  $z$  целое четное. Для  $z = 2$  неподвижной точкой уравнения РГ служит известная функция Фейгенбаума  $g(x)$ , а факторы перенормировки  $\alpha_k$  сходятся к универсальной константе  $\alpha = -2.5029\dots$ . Ситуации, отвечающие  $z > 2$ , могут встречаться при анализе перехода к хаосу через удвоения периода в системах, содержащих несколько управляющих параметров [5].

Та роль, которую в одномерных отображениях играла точка экстремума, в двумерном случае переходит к особым точкам или линиям на плоскости динамических переменных, где обращается в нуль определитель Якоби (см. также [6]).

Для наглядности обратимся к геометрическому представлению двумерных отображений [7]. Пусть мы задали некоторую искривленную поверхность  $S$  в трехмерном пространстве  $(U, V, W)$ , и ввели на ней систему координат  $(u, v)$ . Математически это означает задание определенного отображения двумерного пространства в трехмерное:  $(u, v) \rightarrow (U, V, W)$ . Далее, спроецируем всю конфигурацию на плоскость  $U, V$  вдоль оси  $W$ . Результатом будет двумерное отображение  $(u, v) \rightarrow (U, V)$ . Его особенности могут возникнуть, во-первых, если направление проецирования в каком-то месте совпадает с касательной к поверхности  $S$ , и, во-вторых, в случае особого устройства самой поверхности вблизи некоторых точек. С формальной точки зрения, проблема состоит в нахождении решений двумерного уравнения РГ, обладающих особенностями определенного типа.

Известно [7], что двумерное отображение общего положения может иметь особенности только типа *линий складок* и *точек сборки* (рис.1a,b). Единственная типичная особенность отображений двумерного пространства в трехмерное представляется геометрически в виде показанной на рис.1c поверхности – *зонтика Уитни*.



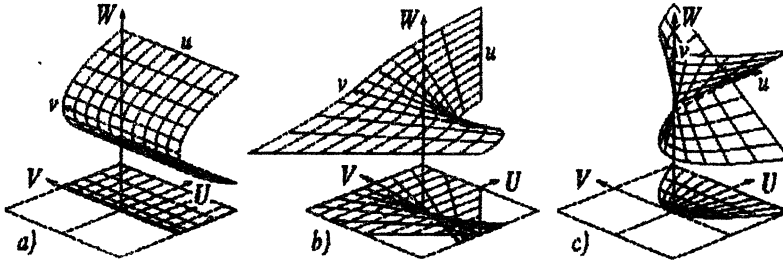


Рис. 1: Геометрическое представление сингулярностей двумерных отображений: (а) складка; (б) сборка; (с) проекция зонтика Уитни.

Мы сообщаем здесь о двух обнаруженных нами типах универсального поведения двумерных отображений при удвоениях периода. Первый (тип  $C$ ) реализуется при наличии у отображения особенности типа складки и встречается как феномен коразмерности два, т.е. оказывается типичным при двухпараметрическом анализе. Вторым (тип  $FQ$ ) связан с наличием особенности, получающейся при проецировании зонтика Уитни, и имеет коразмерность три. В случае сборки нам не удалось отыскать количественной универсальности, ассоциирующей с удвоениями периода.

Стандартная форма двумерного отображения вблизи складки:  $(u, v) \rightarrow (u^2, v)$ . Конструируя композицию этого отображения и общего аффинного преобразования, имеем  $(u, v) \rightarrow (A + Bu^2 + Cv, D + Eu^2 + Fv)$ . Число параметров в отображении можно минимизировать заменой переменных: полагая  $x = -Bu$ ,  $y = [D/(1 - F) - v]B^2/F$ ,  $a = B[CD/(F - 1) - A]$ ,  $b = EC/B$ ,  $d = F$ , имеем

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \quad y_{n+1} = -x_n^2 + dy_n. \quad (3)$$

Поверхность зонтик Уитни (рис.1с) определяется уравнениями  $U = u^2, V = uv, W = v$ . Выполним проекцию на плоскость  $(U, V)$  и построим композицию полученного двумерного отображения и общего аффинного преобразования:  $(u, v) \rightarrow (A + Bu^2 + Cuv, D + Eu^2 + Fuv)$ . С помощью подходящей замены переменных можно сократить число параметров до трех. В частности, если  $(F - B)^2 + 4EC > 0$ , то полагаем  $x = u/A$ ,  $y = (v - au)(D - \alpha A)^{-1}$ ,  $a = -A(B + \alpha C)$ ,  $b = -A(F - \alpha C)$ ,  $d = C(D - \alpha C)$ ,  $\alpha = \frac{F - B + \sqrt{(F - B)^2 + 4EC}}{2C}$  и получаем

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + dx_n y_n, \quad y_{n+1} = 1 - bx_n y_n. \quad (4)$$

На рис.2 показана карта динамических режимов отображения (3) на плоскости параметров  $(a, d)$  при фиксированном  $b = -0.6663$ . В области небольших  $d$  при увеличении  $a$  наблюдаются обычные фейгенбаумовские удвоения периода. Предел накопления бифуркационных линий представляет собой границу хаоса – фейгенбаумовскую критическую линию. Находясь на кривой, отвечающей  $i$ -ой бифуркации удвоения периода, будем увеличивать  $d$  и подстраивать  $a$  так, чтобы один мультипликатор цикла оставался равен  $-1$ . Двигаясь таким образом вдоль бифуркационной кривой, доходим до терминальной точки  $(a_i, d_i)$ , где второй мультипликатор равен 1. Согласно численным расчетам, на каждой линии удвоений периода обнаруживается своя терминальная точка; естественно предположить, что эти точки образуют бесконечный каскад. Оценивая предел последовательности терминальных точек  $(a_c, d_c)$ , находим критическую точку типа  $C$ . Попутно вычисляется предел последовательности элементов циклов при  $i \rightarrow \infty$ :  $x_c = \lim x_0 = 0$ ,  $y_c = \lim y_0$ . В общем случае сходимость очень медленная, но ее можно оптимизировать подбором  $b$ .

$$\text{Для } b = -0.6663: \quad a_c = 0.249902800, \quad d_c = 0.452902880, \quad y_c = -1.316447534. \quad (5)$$

При  $b > 0$  терминальные точки сходятся к критической точке того же типа.

$$\text{Для } b = 0.6544: \quad a_c = 0.566620683, \quad d_c = 1.597132592, \quad y_c = 1.709352174. \quad (6)$$

На рис.3 приводятся карта динамических режимов для отображения (4) на плоскости параметров  $(a, b)$  при взятом произвольно  $d = 0.3$ . При небольших  $b$  с ростом  $a$  отображение демонстрирует фейгенбаумовские удвоения периода. С ростом  $b$  характер динамики меняется: каждая из областей устойчивости циклов периода  $2^k$  ограничена линией бифуркации Хопфа, отвечающей

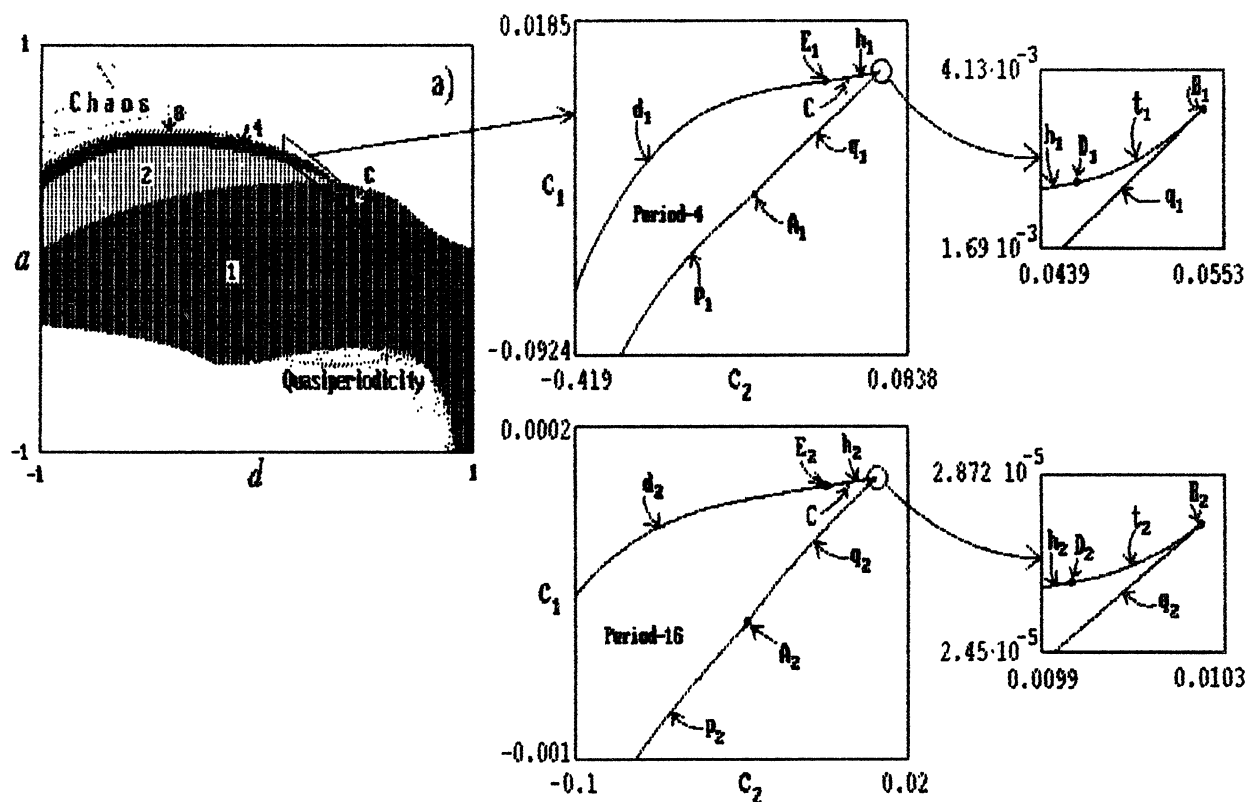


Рис. 2: Карта динамических режимов отображения (3) при  $b = -0.6663$ . Справа – конфигурация областей устойчивости циклов периода 4 и 16 в скейлинговых координатах. Обозначения бифуркационных линий:  $p$  и  $d$  – мягкие бифуркации удвоения периода,  $q$  – бифуркация Хопфа,  $t$  – касательная бифуркация,  $h$  – субкритическая (жесткая) бифуркация удвоения. Заглавные буквы  $A, B, D, E$  – точки бифуркации коразмерности два. Пересчет масштабов для картинок справа – на факторы (14)

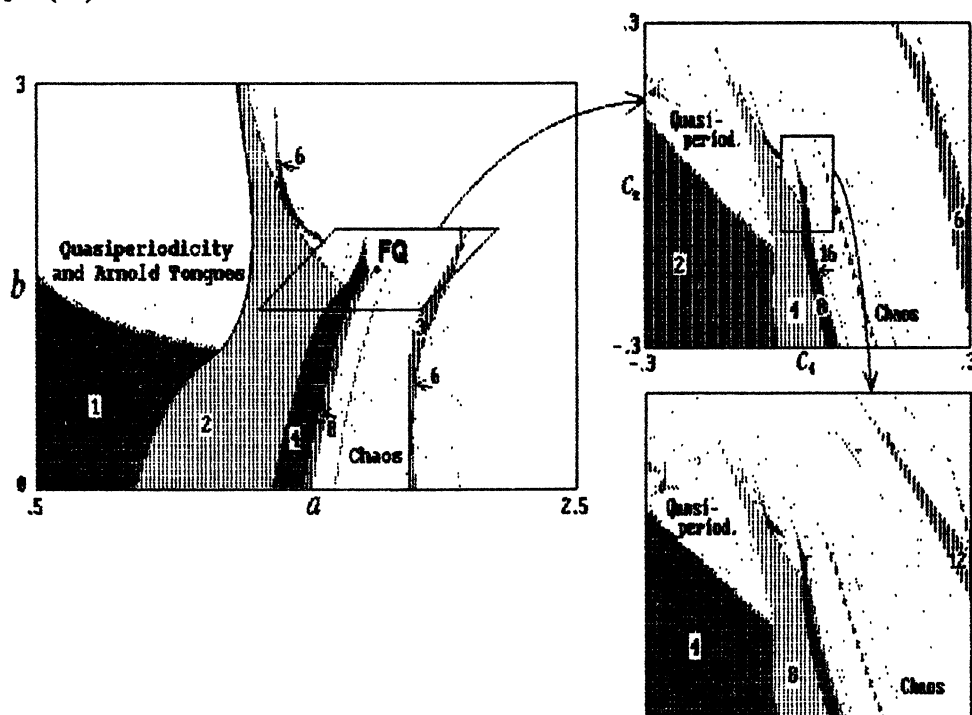


Рис. 3: Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения (4) при  $d = 0.3$ . Справа – окрестность критической точки  $FQ$  в скейлинговых координатах. Пересчет масштаба по горизонтали и вертикали – на факторы (15).

возникновению квазипериодического движения. Линии Хопфа втыкаются в линии удвоения периода в точках бифуркации коразмерности два, где оба мультипликатора цикла равны -1. Оценивая численно предел последовательности этих точек, находим критическую точку  $FQ$ .

$$\text{Для } d = 0.3: \quad a_c = 1.767192895, \quad b_c = 1.629678013. \quad (7)$$

Выбор  $d$  непринципиален; фактически в пространстве  $a, b, d$  имеется линия из точек  $FQ$ .

Какова природа решений уравнения РГ для найденных критических точек? Рассмотрим поведение последовательностей отображений, порождаемых уравнениями (2) в этих точках. Переход к скейлинговым переменным для отображения (3) производится сдвигом начала координат,  $X = x$  и  $Y = y - y_c$ , а для отображения (4) при  $d = 0.3$  - заменой  $X = x$ ,  $Y = y + 2.1091x$ . Зададим в качестве начального условия для уравнения (2) отображение (3) или (4) в новых переменных:

$$X_{n+1} = g_0(X_n, Y_n), \quad Y_{n+1} = f_0(X_n, Y_n), \quad (8)$$

и вычислим  $g_k$  и  $f_k$  следующим образом. Сначала выполняем  $N = 2^k$  итераций с нулевым начальным условием и обозначаем результат  $(\bar{X}_N, \bar{Y}_N)$ . Далее задаем  $X_0 = X \cdot \bar{X}_N$ ,  $Y_0 = Y \cdot \bar{Y}_N$ , итерируем исходное отображение  $N$  раз и получаем значения  $X_N$  и  $Y_N$ . Окончательно полагаем

$$g_k(X, Y) = X_N / \bar{X}_N, \quad f_k(X, Y) = Y_N / \bar{Y}_N, \quad N = 2^k. \quad (9)$$

Расчеты показывают, что последовательность отображений (2) сходится к определенному пределу в случае точки  $FQ$ , а для точек  $C$  асимптотически ведет себя как цикл периода два. В точках (5) и (6) реализуются один и тот же цикл, но с противоположными по фазе колебаниями.

Как и в одномерном случае, для численного нахождения неподвижной точки и цикла функционального отображения (2) можно аппроксимировать функции  $g$  и  $f$  конечными рядами по ортогональным полиномам, свести задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения и решить ее численно методом Ньютона. Начальным приближением может служить отображение, полученное для некоторого  $k$  с помощью описанной процедуры (9).

Для точки  $C$  мы нашли универсальные функции в виде разложений

$$\begin{aligned} g_1(X, Y) &= 1 - 0.49955Y - 1.27700X^2 + 0.04634Y^2 + 0.13906X^2Y - 0.00108Y^3 + \dots \\ f_1(X, Y) &= 1 + 0.22671Y - 2.32102X^2 + 0.14401Y^2 + 0.50507X^2Y - 0.00869Y^3 + \dots \\ g_2(X, Y) &= 1 + 0.23143Y - 1.52925X^2 + 0.00999Y^2 - 0.05923X^2Y - 0.00013Y^3 + \dots \\ f_2(X, Y) &= 1 + 1.34915Y - 1.65976X^2 + 0.00144Y^2 + 0.22124X^2Y - 0.00324Y^3 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

и масштабные константы, описывающие перенормировку  $X$  и  $Y$  за период ренормцикла:  $\alpha_* = \lim \alpha_k \alpha_{k+1} = 6.565350$  и  $\beta_* = \lim \beta_k \beta_{k+1} = 22.120227$ .

Для точки  $FQ$ :

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= 1 - 1.09793X^2 - 0.71142XY + 0.15733X^4 + 0.08652X^3Y + 0.00186X^2Y^2 + \dots \\ f(X, Y) &= 1 + 0.06695X^2 - 2.79605XY + 1.54170X^4 + 1.36213X^3Y + 0.21025X^2Y^2 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

и масштабные константы

$$\alpha = \lim \alpha_k = -1.900071670 \quad \text{и} \quad \beta = \lim \beta_k = -4.0081578492.$$

Замечательным свойством критической точки типа  $C$  является наличие у системы бесконечного самоподобного множества аттракторов - устойчивых циклов периода  $4^k$  или  $2 \cdot 4^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Прямыми вычислениями можно убедиться, что отображение  $(X, Y) \rightarrow (g_1(X, Y), f_1(X, Y))$  имеет устойчивую неподвижную точку с мультипликаторами

$$\mu_1 = -0.725255 \quad \text{и} \quad \mu_2 = 0.847450. \quad (12)$$

В силу уравнения РГ, отображение  $(g_1, f_1)$ , выполненное четыре раза и подвергнутое преобразованию масштаба  $X \rightarrow X/\alpha_*$ ,  $Y \rightarrow Y/\beta_*$ , превращается в себя. Поэтому наличие неподвижной точки влечет существование устойчивых циклов периода 4, 16, 64, ... Следовательно, отображение  $(X, Y) \rightarrow (g_1(X, Y), f_1(X, Y))$  имеет бесконечное (счетное) множество сосуществующих аттракторов - циклов периода  $4^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Точно также, отображение  $(X, Y) \rightarrow (g_2(X, Y), f_2(X, Y))$  имеет в качестве аттракторов циклы периода  $2 \cdot 4^k$ .

В критических точках типа  $C$  исходного отображения (3) циклы асимптотически большого периода обладают теми же свойствами. При  $b < 0$  мультипликаторы циклов периода  $4^k$  стремятся к универсальным значениям (12). При  $b > 0$  это справедливо для циклов периода  $2 \cdot 4^k$ .

Притягивающее множество, имеющее место в точке типа  $C$ , можно назвать *критическим квазиаттрактором*. Обычно под квазиаттрактором понимают сложно устроенный объект в фазовом пространстве, содержащий бесконечно много устойчивых периодических орбит, тогда как эмпирически наблюдаемое поведение выглядит хаотическим [8]. В нашем случае речь идет о феномене на границе хаоса, характеризующемся количественной универсальностью и скейлингом.

В точке  $FQ$  имеет место другая ситуация, более похожая на случай фейгенбаумовского критического поведения. Расчеты показывают, что отображение  $(X, Y) \rightarrow (g(X, Y), f(X, Y))$  имеет неустойчивую неподвижную точку с мультипликаторами

$$\mu_1 = -1.579739 \text{ и } \mu_2 = -1.057149. \quad (13)$$

В силу уравнения РГ наличие неподвижной точки влечет существование циклов периода 2, 4, 8, 16, ... с теми же мультипликаторами. Следовательно, отображение  $(X, Y) \rightarrow (g(X, Y), f(X, Y))$  имеет бесконечное (счетное) множество неустойчивых циклов периода  $2^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Аттрактор, как предельный объект, аппроксимируемый циклами периода  $2^k$  при  $k \rightarrow \infty$ , обладает свойством самоподобия: в скейлинговых координатах  $(X, Y)$  его структура воспроизводит себя при пересчете масштабов в  $\alpha$  и  $\beta$  раз по осям координат.

После того как найдено решение уравнения РГ в виде неподвижной точки или цикла, следует изучить спектр собственных чисел линеаризованного РГ преобразования. Количество собственных чисел, превышающих 1 по абсолютной величине, и не связанных с инфинитезимальными заменами переменных, определяет коразмерность. Это число параметров семейства систем, в котором феномен встречается типичным образом. Сами же собственные числа дают масштабные факторы скейлинга вдоль определенных направлений в пространстве параметров. Согласно нашим расчетам, для точки  $C$  существенных собственных чисел два:

$$\delta_1 = 92.43126348, \quad \delta_2 = 4.19244418, \quad (14)$$

а для точки  $FQ$  - три

$$\delta_1 = 6.32631925, \quad \delta_2 = 3.44470967 \text{ и } \delta_3 = \beta = -1.90007167, \quad (15)$$

т.е., говоря формально, коразмерность критического поведения типа  $C$  равна 2, а  $FQ$  - 3.

Заметим, однако, что для типа  $C$  имеется медленно затухающая третья собственная мода ( $\delta_3 \cong 0.93$ ), из-за чего универсальные количественные закономерности будут проявляться, вообще говоря, только после большого числа удвоений периода. Чтобы на практике наблюдать скейлинг, желательно иметь третий управляющий параметр, подбором которого можно было бы устранить вклад третьей моды. Другое замечание касается типа  $FQ$ . Хотя имеется три существенных собственных числа, в отображении (4) этот тип критичности был найден при подборе двух параметров. Дело в том, что из-за специального направления проецирования зонтика Уитни связанное с  $\delta_3$  собственное возмущение оказывается не включенным. В модифицированном отображении

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + d(x_n - c)y_n, \quad y_{n+1} = 1 - b(x_n - c)y_n, \quad (16)$$

тип поведения  $FQ$  появляется как трехпараметрический феномен.

Чтобы рассмотреть скейлинговые свойства пространства параметров вблизи критической точки, необходимо определить специальную систему координат - такую, чтобы смещение по параметрам из критической точки вдоль каждой оси координат приводило к включению одного определенного собственного возмущения линеаризованного уравнения РГ ("скейлинговые координаты"). Для отображения (3) вблизи критической точки  $C$  соотношение, связывающее скейлинговые координаты  $C_1, C_2$  с параметрами при  $b = -0.6663$ , можно определить в виде

$$a = a_c + C_1 - C_2 - 1.546069C_2^2 - 2.15C_2^3, \quad d = d_c + 0.79016607C_2. \quad (17)$$

На рис.2 справа показаны области устойчивости циклов периода 4 и 16 в скейлинговых координатах в окрестности критической точки (5). Соответствие картинок с разным увеличением иллюстрирует скейлинг вблизи точки  $C$ .

Перейдем к критичности типа  $FQ$ . Как мы уже упоминали, в отображении (4) сдвиг по параметрам из критической точки  $FQ$  приводит к появлению возмущений с собственными числами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . При  $d = 0.3$  соотношение для скейлинговых координат  $(C_1, C_2)$  на плоскости параметров таково:

$$a = a_c + C_1 + 0.4773293C_2, \quad b = b_c + C_2, \quad (18)$$

На рис.3 справа показана в скейлинговых координатах часть плоскости параметров, попадающая внутрь параллелограмма на левом рисунке. Картинка хорошо воспроизводит себя при пересчете масштаба в  $\delta_1$  и  $\delta_2$  раз по осям координат.

Если говорить о динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями, то при их анализе методом сечений Пуанкаре непосредственно могут получаться только обратимые отображения. Тем не менее, использование одномерных необратимых отображений для приближенного описания динамики диссипативных систем с размерностью фазового пространства  $\geq 3$  оказалось продуктивным. Благодаря Фейгенбауму, мы знаем, что поведение многих нелинейных систем у порога возникновения хаоса через удвоения периода относится к тому же классу универсальности, что и для одномерных необратимых отображений с квадратичным экстремумом. Точно также, двумерные необратимые отображения могут быть полезными для приближенного описания динамики нелинейных диссипативных систем с размерностью фазового пространства  $\geq 4$ . Мы полагаем, что в таких системах при двух- и трехпараметрическом анализе перехода к хаосу могут встретиться как типичные феномены типы критического поведения  $C$  и  $FQ$ . Двумерные отображения (3) и (16) являются простейшими представителями своих классов универсальности и играют ту же роль, что и логистическое отображение для фейгенбаумовского типа критичности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 95-02-05818).

## Литература

- [1] M.J.Feigenbaum, *J.Stat.Phys.*, 1978, Vol.19, p.25.
- [2] J.P.Eckmann, H.Koch, P.Wittwer, *Phys.Rev.A*, 1982, Vol.26, p.720.
- [3] S.P.Kuznetsov and I.R.Sataev, *Phys.Lett. A*, 1992, Vol. 162, p.236.
- [4] B.Hu, I.Satija, *Phys.Lett.A*, 1983, Vol. 98, p.143.
- [5] A.P.Kuznetsov, S.P.Kuznetsov, I.R.Sataev, *Phys.Lett. A*, 1994, Vol. 189, p.367.
- [6] C.Mira, *Chaotic Dynamics.*, World Scientific, 1987.
- [7] В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений.*, Наука, Москва, 1982; В.И.Арнольд, *Теория катастроф.*, Наука, Москва, 1990.
- [8] В.С.Анищенко, *Сложные колебания в простых системах.*, Наука, Москва, 1990.

## PERIOD DOUBLING AND QUANTITATIVE UNIVERSALITY IN TWO-DIMENSIONAL NON-INVERTIBLE MAPS

S.P.Kuznetsov and I.R.Sataev

Two types of scaling behavior are found associated with period doubling accumulating in two-dimensional non-invertible maps. The first of them labeled " $C$ " relates to maps having the simplest singularity of fold type. The second labeled " $FQ$ " appears in maps with singularity arising from projection of Whitney's umbrella. Renormalization group (RG) analysis shows that  $C$ -type corresponds to a period-2 saddle cycle, and  $FQ$ -type - to a fixed point of the same recurrent functional equations. The RG equation solutions have been found numerically; particularly, the phase space scaling factors and relevant eigenvalues of the linearized RG operator are calculated. It is shown that exactly at the critical point  $C$  there exist "critical quasi-attractor" - an infinite (denumerable) self-similar set of stable cycles of period  $4^k$  (or  $2 \cdot 4^k$ ). According to RG analysis, we conjecture that in nonlinear systems the  $C$ -type and  $FQ$ -type behavior may appear typically as codimension-2 and codimension-3 phenomena, respectively.

# КАНОНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

А. А. Куркин

Радиофизический факультет Нижегородского государственного университета  
РОССИЯ, 603600, Нижний Новгород, пр. Гагарина 23  
E-mail: [oscil@rf-nngu.nnov.su](mailto:oscil@rf-nngu.nnov.su)

## Аннотация

В данной работе построен гамильтоновский формализм для волн Кельвина и Пуанкаре в ограниченной вращающейся жидкости. Найдено преобразование к нормальным каноническим переменным исходной задачи и получены выражения для матриц, описывающих нелинейное взаимодействие встречных волн Кельвина с волной Пуанкаре и стабилизацию, возникающей при этом распадной неустойчивости кельвиновских волн. В приближении коротких волн Кельвина и длинной волны Пуанкаре найдено выражение для инкремента распадной неустойчивости и сделана его численная оценка применительно к условиям океана. Получены уравнения, описывающие процесс стабилизации распадной неустойчивости кельвиновских волн, и выражение для стационарного уровня возбуждения этих волн, а также произведена его численная оценка.

## Введение

Известны преимущества использования гамильтоновского формализма [1] в нелинейной теории разделенных систем. Такое использование открывает новые перспективы в исследовании нелинейной динамики волн в сплошных средах, характеризующихся известной сложностью своих уравнений. К настоящему времени успешно решены задачи гамильтоновского описания гравитационных волн в безграничной стратифицированной сжимаемой [2] и несжимаемой [3] среде, поверхностных [4] и взаимодействующих между собой поверхностных и внутренних [5] гравитационных волн в слое несжимаемой жидкости, бароклинных волн Россби [6] в океане. Настоящая работа продолжает этот список гамильтоновской теорией волн Кельвина и Пуанкаре в слое однородной вращающейся жидкости.

В работе для отыскания преобразования к каноническим переменным задачи использовано преобразование Клебша [7]. Исходя из него найдены нормальные канонические переменные - комплексные амплитуды волн Кельвина и Пуанкаре, - и получены выражения для матричных коэффициентов нелинейного взаимодействия этих волн применительно к задаче о распадной неустойчивости волн Кельвина в присутствии волны Пуанкаре и стабилизации этой неустойчивости за счет эффекта фазового рассогласования взаимодействующих волн на кубичной нелинейности среды. Вычислен инкремент данной неустойчивости и найден стационарный уровень возбуждения кельвиновских волн. Произведены их численные оценки применительно к условиям океана.

## 1 Нормальные канонические переменные

Будем исходить из модели океана в виде бесконечно широкого канала однородной вращающейся жидкости глубины  $h$  и плотности  $\rho_0$ , вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Ось  $X$  системы координат направим вдоль, а ось  $Y$  - поперек канала ( $0 \leq Y < \infty$ ). Начало отсчета по оси  $Z$  (ориентированной вверх), выберем в плоскости невозмущенной свободной поверхности.

Для отыскания канонических переменных рассматриваемой системы воспользуемся представлением Клебша [7], выразив проекции скорости  $\vec{V}$  на оси системы координат в виде :

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} - \sqrt{2\Omega} \alpha, \\ V_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} - \sqrt{2\Omega} \beta, \\ V_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial z}. \end{aligned}$$

В представлении Клебша уравнения движения могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta \int dt \int dx dy \int_0^{\eta(x,y)} \mathbf{L} dz = 0,$$

где  $\mathbf{L} = -\rho_0(\dot{\varphi} + \alpha\dot{\beta} + \frac{1}{2}\vec{V}^2 + gz + \Psi\dot{\eta})$  - плотность лагранжиана.  $\Psi = \varphi|_{z=\eta} + (\alpha\beta)|_{z=\eta}$ , а  $\eta$  - возвышение свободной поверхности жидкости. При этом следует учесть условия непротекания

$$V_z|_{z=-h} = V_y|_{y=0} = V_y|_{y \rightarrow \infty} = 0$$

на стенках канала и следующие граничные условия для вариаций лагранжевых координат  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  и  $\Psi$  на полной поверхности  $\Sigma$  рассматриваемой среды и на поверхности  $\bar{\Sigma}$ , получаемой из  $\Sigma$  вычетом свободной поверхности жидкости  $z = \eta(x, y)$  и дна :

$$\delta \varphi|_{\Sigma} = 0, \quad \delta \alpha|_{\Sigma} = 0, \quad \delta \beta|_{\Sigma} = 0, \quad \delta \eta|_{\Sigma} = 0, \quad \delta \Psi|_{\Sigma} = 0.$$

Зная плотность лагранжиана  $\mathbf{L}$  можно стандартным преобразованием Лежандра получить выражение для плотности гамильтониана  $\tilde{H}$  :

$$\tilde{H} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathbf{L}.$$

В этом выражении переменные  $\beta$  и  $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\beta}} = -\rho_0 \alpha$  играют роль канонически сопряженных координаты и импульса системы. Для них исходные уравнения движения

$$\dot{\beta} = \vec{V} \nabla \beta + \sqrt{2\Omega} V_x, \quad \dot{\alpha} = \vec{V} \nabla \alpha + \sqrt{2\Omega} V_y, \quad (1)$$

как нетрудно убедиться, находятся из уравнений Гамильтона

$$\dot{\beta} = \frac{\delta H}{\delta(-\rho_0 \alpha)}, \quad -\rho_0 \dot{\alpha} = -\frac{\delta H}{\delta \beta},$$

в которых гамильтониан  $H = \int \tilde{H} dU$  и равен полной энергии среды :

$$H = \frac{1}{2} \rho_0 \left\{ \int dx dy \int_{-h}^{\eta(x,y)} \vec{V}^2 dz + g \int \eta^2 dx dy \right\}. \quad (2)$$

Другая пара канонически сопряженных переменных системы -  $\eta$  и  $\Psi$ . В ней роль координаты играет переменная  $\eta$ , а роль импульса -  $\Psi$ . При этом уравнения Гамильтона

$$\dot{\eta} = \frac{\delta H}{\delta \Psi}, \quad \dot{\Psi} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}$$

дают кинематическое и динамическое граничные условия на свободной поверхности рассматриваемой среды :

$$\dot{\eta} = V_n|_{\eta} \sqrt{1 + (\nabla \eta)^2}, \quad \dot{\Psi} = -g\eta. \quad (3)$$

Поскольку уравнениями (1), (3) исчерпывается математическое описание динамики рассматриваемой системы, найденные канонические переменные  $\beta$ ,  $-\rho_0 \alpha$ ,  $\eta$  и  $\Psi$  полностью решают задачу гамильтоновского описания этой динамики.

Перейдем от переменных  $\beta$ ,  $-\rho_0 \alpha$ ,  $\eta$  и  $\Psi$  к нормальным каноническим переменным системы, описывающим взаимодействующие волны Кельвина и Пуанкаре. С этой целью представим исходные переменные  $\beta$ ,  $-\rho_0 \alpha$ ,  $\eta$  и  $\Psi$  в виде интеграла Фурье по продольной координате  $X$  (поскольку по  $X$  система пространственно однородна) и разложим вектор К-представления импульсов и координат по собственным функциям линейной краевой задачи [4]. Подставляя это разложение, полученное для случая бесконечно широкого канала в работе [8] в гамильтониан (2), получим для его квадратичной части  $H_0$  выражение вида

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \lambda_k^+ \hat{H}_0 \lambda_k dk,$$

где  $\lambda_k^+ = (\beta_k, -\rho_0 \alpha_k, \eta_k, \Psi_k)$ .

Выражение для  $\hat{H}_0$ , полученное в [8], в силу его громоздкости здесь не приводится.

С помощью линейного преобразования

$$\lambda_k^+ = N_k^+ \hat{M}_k \quad (4)$$

( ср., с [9] ), где  $N_k^+ = (a_k, b_k, a_{-k}^*, b_{-k}^*)$ , приведем  $H_0$  к диагональному виду

$$H_0 = \frac{1}{2} \int [\omega_0(k) a_k a_k^* + \omega(k) b_k b_k^*] dk ,$$

здесь  $\omega_0(k) = ck[1 - \frac{1}{6}h^2k^2]$  - закон дисперсии кельвиновских волн,  $\omega(k) = \sqrt{4\Omega^2 + c^2k^2}[1 - \frac{1}{6}h^2k^2]$  - закон дисперсии волн Пуанкаре,  $a_k$  и  $b_k$  - искомые нормальные канонические переменные задачи, описывающие, соответственно волны Кельвина и Пуанкаре. Для них уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{a}_k = -i \frac{\delta H}{\delta a_k^*}, \quad \dot{b}_k = -i \frac{\delta H}{\delta b_k^*} .$$

Закон канонического преобразования (4) к нормальным переменным  $a_k$  и  $b_k$  удобно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \Psi_k \\ -\rho_0 \alpha_k \end{bmatrix} = \hat{m}_k \begin{bmatrix} a_k - a_{-k}^* \\ b_k - b_{-k}^* \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \hat{n}_k \begin{bmatrix} a_k + a_{-k}^* \\ b_k + b_{-k}^* \end{bmatrix} .$$

Выражения для матриц  $\hat{m}_k$  и  $\hat{n}_k$  приведены в работе [8].

## 2 Распадная неустойчивость двух встречных волн Кельвина в присутствии волны Пуанкаре

Рассмотрим задачу о распадной неустойчивости двух встречных коротких волн Кельвина с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  ( $k_{1,2}h \gg 1$ ) в присутствии длинной волны Пуанкаре с волновым числом  $k_3$  ( $k_3h \ll 1$ ). Из законов дисперсии этих волн следует, что для такого процесса могут быть выполнены следующие условия пространственного и временного синхронизма

$$k_1 - k_2 = k_3, \quad \omega_0(k_1) - \omega_0(k_2) = \omega(k_3) .$$

Переходя в кубичной части гамильтониана (2) с помощью (5) к нормальным переменным  $a_k$  и  $b_k$ , из уравнений Гамильтона с полученным гамильтонианом найдем с помощью метода усреднения Крылова-Боголюбова [10] в приближении спектрально-узких волновых пакетов следующие укороченные уравнения для амплитуд волн Кельвина  $a_{1,2}$ :

$$\dot{a}_{1,2} = i\sqrt{2\pi} \frac{2k_3\omega_0(k_1)\lambda_0c}{k_1h\sqrt{4\Omega^2 + c^2k^2}} a_{2,1}^* A_0 ; \quad (6)$$

где  $A_0$  - заданная амплитуда волн Пуанкаре. Из (6) находим выражение для инкремента  $\gamma$  распадной неустойчивости кельвиновских волн:

$$\gamma = \gamma_0 \omega_0(k_1) ,$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{2\pi} \frac{2k_3 A_0}{k_1 h} \left[ 4 + \frac{k_3^2 c^2}{\Omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Оценим численное значение  $\gamma_0$ , взяв в качестве волны накачки волну типа цунами. На глубине  $h = 100$  м она имеет длину  $\lambda_3 = 10^4$  м и амплитуду  $A_0 = 10$  см. При длине волны Кельвина  $\lambda_1 = 10$  см это дает, согласно (7), величину  $\gamma_0 = 0.6 \times 10^{-3}$ .

Чтобы получить представление о реальной значимости рассматриваемого эффекта, рассчитаем отвечающий ему стационарный уровень возбуждения волн Кельвина. В качестве механизма стабилизации распадной неустойчивости примем эффект фазового рассогласования взаимодействующих волн за счет четырехволнового взаимодействия кельвиновских волн вида

$$\omega_0(k) + \omega_0(k_1) = \omega_0(k_2) + \omega_0(k_3) \quad (8)$$



Используя укороченные уравнения Крылова-Боголюбова

$$\dot{a}_{1,2} = -\delta_{1,2}a_{1,2} + V_{1,2}A_0a_{1,2}^* + iW_{1,2}|a_{2,1}|^2a_{1,2}$$

получим следующее выражение для стационарного уровня возбуждения кельвиновских волн :

$$\langle A_1^0 \rangle^2 = \frac{\delta_2 V_1 \langle A_2^0 \rangle^2}{\delta_1 V_2} = \frac{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\frac{A_0^2}{A_{nop}^2} - 1}}{W_2 + \frac{\delta_1 V_2}{\delta_2 V_1} W_1},$$

где  $A_{nop} = \frac{\delta_1 \delta_2}{V_1 V_2}$ ,  $\lambda_0 = \frac{\Omega}{c}$ ,  $V_{1,2} = \frac{2k_3 \omega_0(k_{1,2}) \lambda_0 c}{k_{1,2} h \sqrt{4\Omega^2 + c^2 k_3^2}}$ ,  $W_{1,2} = \frac{g c k_3 k_{1,2}^2}{64 h \Omega^2}$ , а  $\delta_{1,2}$  - коэффициент диссипации, обусловленный турбулентной вязкостью жидкости [4], на котором и ограничивается их амплитуда за счет нелинейного процесса (8). Полагая  $h = 100$  м,  $\lambda_1 = 10$  м,  $\lambda_3 = 10^4$  м,  $A_0 = 10$  см, найдем, что  $A_1^0 = 0.56$  м и  $A_2^0 = 0.48$  м. При этом  $A_{nop}$  составляет 6 см. Эта величина по порядку сравнивается с реально наблюдаемыми значениями амплитуд волн Кельвина в океане и следовательно рассматриваемый механизм нелинейной генерации кельвиновских волн может иметь реальное значение.

## Литература

- [1] В.Е. Захаров, "Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией", *Изв. вузов Радиофизика*, 1974, Т.17, No.4, С. 431-453.
- [2] А. Г. Гончаров, В. А. Красильников, В. И. Павлов, "Гамильтоновский формализм для стратифицированных сред", *Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия*, 1976, No.5 С. 603-607.
- [3] А. Г. Воронович, "Гамильтоновский формализм для внутренних волн в океане", *Изв. АН СССР. ФАО*, 1979, Т.15, No.1, С. 82-91.
- [4] Ш. М. Хасанов, "Эффекты нелинейного взаимодействия волн во вращающейся жидкости", *Дис. канд. Н.Новгород. ННГУ*, 1992, 112 с.
- [5] В. В. Петров, "Взаимодействие внутренних волн и мелкомасштабной поверхностной турбулентности в океане", *Изв. АН СССР. ФАО*, 1978, Т.14, No.3, С. 342-347.
- [6] В. Е. Захаров, А. С. Монин, Л. И. Питербарг, "Гамильтоновское описание бароклинических волн Россби-Блиновой", *Докл. АН СССР*, 1987, Т.295, No.5, С. 1061-1064.
- [7] Р. Л. Селиджер, Г. Б. Уиттем, "Вариационные принципы сплошной среды", *Сб. перев. "Механика"*, 1969, No.5, С. 99-123.
- [8] А. А. Куркин, В. В. Петров, "Каноническая теория нелинейного взаимодействия волн Кельвина и Пуанкаре", *Н.Новгород*, 1995, 14 с., - Деп в ВИНТИ 18.07.95. No. 2182-B95.
- [9] В. П. Гончаров, В. А. Красильников, В. И. Павлов, "К теории волновых взаимодействий в стратифицированных средах", *Изв. АН СССР. ФАО*, 1976, Т.12, No.11, С. 1143-1151.
- [10] А. Ю. Митропольский, "Метод усреднения в нелинейной механике", *Киев: "Наука Думка"*, 1971, 440 с.

## CANONICAL THEORY OF NONLINEAR WAVES INTERACTION IN THE ROTATIONAL FLUIDS

A. A. Kurkin

The problem of Hamiltonian description of Kelvin waves in the layer of the rotational liquid is solved. The transformation in the normal variables of the problem (5) is found and the expressions for the coefficients of nonlinear interaction matrix applied to the problem of the decay instability of Kelvin waves in the presence of Poincare's wave and regulation of this instability because of the phase mismatch effect of interacting waves of the cubic nonlinearity of the medium are derived. The increment of this instability (7) is calculated and the level of stationarity of the excited waves is found.

# АВТОСТРУКТУРЫ И РИТМЫ В СВЯЗАННЫХ РЕШЕТКАХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Г. В. Осипов

Нижегородский государственный университет  
РОССИЯ, 603600, Нижний Новгород, пр. Гагарина 23

М. М. Сушик

Институт прикладной физики Российской академии наук  
РОССИЯ, 603600, Нижний Новгород, ул. Ульянова 46  
E-mail: krivat@appl.sci-nnov.ru

## Реферат

Обнаружены пульсирующие локализованные структуры, у которых длинные периоды почти стационарного поведения чередуются с короткими вспышками активности — резким увеличением размеров структур с последующим быстрым их возвращением в исходное состояние.

1. Довольно часто встречаются ситуации, когда физическая задача может быть сформулирована как задача о взаимодействии в большом ансамбле связанных нелинейных осцилляторов или автогенераторов. В частности, такие ансамбли описывают динамику цепочек, образованных джозефсоновскими контактами [1, 2], полупроводниковыми лазерами [3, 4], релятивистскими магнетронами [5]. Решетки автогенераторов также используются для моделирования генерации биологических ритмов сердца [6], нервной системы [6, 7], кишечника [8], поджелудочной железы [9] и др. [10, 11]. В некоторых конкретных случаях, физическая проблема может быть сформулирована как исследование взаимодействия больших систем, каждая из которых состоит из большого числа связанных осцилляторов [12]. В частности, слабо связанные цепочки моделируют взаимодействие между двумя параллельными длинными контактами Джозефсона [13, 14], границу между двумя полубесконечными цепочками атомов, абсорбированных на поверхности металлов [15, 16], и взаимодействие возбуждений в упругих ферроэлектрических и ферромагнитных системах [17, 18]. Даже в тех случаях, когда такая формулировка физической задачи на языке связанных автогенераторов не очевидна, многие явления, наблюдаемые в неравновесных средах, похожи на явления в ансамблях автогенераторов [19]. Это является одним из побуждающих мотивов исследования осцилляторных моделей неравновесных сред.

2. Здесь мы остановимся на двухслойной осцилляторной среде, описываемой уравнениями для комплексных амплитуд, которые являются дискретными аналогами обобщенных уравнений Гинзбурга – Ландау:

$$\frac{da_{jk}}{dt} = pa_{jk} - |a_{jk}|^2 a_{jk} + d' \Delta_{jk} a_{jk} + c(b_{jk} - a_{jk}) + i[\Delta a_{jk} - \alpha |a_{jk}|^2 a_{jk} + d'' \Delta_{jk} a_{jk}] + F_{jk}(t) + \xi_{jk}(t) \quad (1)$$

$$\frac{db_{jk}}{dt} = pb_{jk} - |b_{jk}|^2 b_{jk} + d' \Delta_{jk} b_{jk} + c(a_{jk} - b_{jk}) \quad (2)$$

при  $j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, M$  с равенством нулю потоков на границе  $a_{0k} = a_{1k}$  и т.д. Здесь  $a_{jk}$  и  $b_{jk}$  — комплексные амплитуды колебаний в каждом из слоев;  $\Delta_{jk} x_{jk} = x_{j+1,k} + x_{j,k+1} - 4x_{jk} + x_{j-1,k} + x_{j,k-1}$ ;  $d'$  и  $c$  — действительные коэффициенты связи между элементами слоя и между слоями, соответственно. Слои не являются равноправными. В биологическом контексте можно, например, нижний слой представить себе как отмирающий, не реагирующий на внешнее окружение, не способный к "обучению" и демонстрирующий сам по себе лишь простое поведение. Единственная связь с окружением этим слоем  $B$  осуществляется через его более развитого соседа  $A$ , который более активно реагирует на внешнее воздействие и сохраняет более разнообразные связи. В уравнении (1)  $\Delta$  и  $\alpha$  описывают, соответственно, линейное и нелинейное изменения частоты;  $d''$  — реактивная

компонента связи между элементами в слое;  $F_{jk}(t)$  — внешнее регулярное воздействие, а  $\xi_{jk}(t)$  — шумовое воздействие.

3. Здесь мы основное внимание сфокусируем на локализованных структурах с частично или полностью синхронизованными осцилляторами [20, 21]. Один из механизмов, ответственных за образование таких структур (которые вполне соответствуют названию когерентные структуры), связан с эффектом, известным как "вымирание автоколебаний" ("oscillator death" или "amplitude death" [22–27]). Он обусловлен тем, что диссипативная связь между слоями после разрушения синхронизации оказывается эквивалентной дополнительному затуханию. Из-за этого при достаточно сильной связи  $c$  и большой линейной расстройке  $\Delta$  тривиальное состояние равновесия оказывается устойчивым. В то же время, если линейная расстройка может быть скомпенсирована нелинейной ( $\alpha|a_{jk}|^2 \approx \Delta$ ), то в определенной области параметров устойчивым оказывается и равновесное состояние с конечными амплитудами. В однородном случае

$$|a_{jk}|^2 = |b_{jk}|^2 = \Delta\alpha - 4(c-p) + \{[\Delta\alpha - 4(c-p)]^2 - 16(1 + \frac{1}{4}\alpha^2) \times [\frac{1}{4}\Delta^2 - c^2 - (c-p)^2]\}^{1/2} [4(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)]^{-1} \quad (3)$$

при

$$4c^2 - 4(c-p)^2 < \Delta^2 < 4c^2 - 4(c-p)^2 + [\frac{1}{2}\Delta\alpha - 2(c-p)]^2(1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{-1}, \quad (4)$$

$$\Delta\alpha - 4(c-p) > 0$$

В зависимости от начальных и граничных условий, а также внешних воздействий, эти состояния могут образовывать паттерны, имеющие различные конфигурации и топологии. Здесь мы остановимся на простейшем примере структур, которые однородны вдоль одного из направлений ( $a_{jk} = a_j; b_{jk} = b_j$ ).

В том, что эффект синхронизации ответственен за формирование таких паттернов, можно убедиться на простейшем примере при  $d'' = 0$ , задавая в начальный момент времени распределение амплитуд в виде ступеньки. В этом случае при слабой связи между элементами внутри слоев ( $d' < d'_{cr}$ ) формируется неподвижный фронт, который разделяет осцилляторы, находящиеся в возбужденном и невозбужденном состояниях. При сильной связи между элементами внутри слоя  $d' > d'_{cr}$  режим вымирания автоколебаний оказывается преобладающим, и область, в которой он реализуется, расширяется и охватывает всю решетку. При  $d' \gg d'_{cr}$  скорость фронта  $V$  имеет характерную для критических явлений зависимость:  $V \sim \sqrt{d' - d'_{cr}}$ , но имеет резкий (ступенчатый) переход от нулевых к ненулевым скоростям при  $d' = d'_{cr}$ .

Более детальный анализ переходных процессов, происходящих на границе между областями с двумя различными состояниями, дает непосредственно подтверждение, что переход от возбужденного к невозбужденному состоянию действительно определяется процессами десинхронизации. Об этом свидетельствует сопоставление осциллограмм  $Re\{a_j\}; Im\{a_j\}$  и  $Re\{b_j\}; Im\{b_j\}$  (здесь не приведены, см. рис.3 в работе [20]), из которого следует, что затуханию колебаний предшествует резкое изменение разности фаз между элементами слоев  $A$  и  $B$  с последующим формированием колебаний с частотами, близкими к частотам в каждом из слоев ( $\Omega_a \sim \Delta, \Omega_b \sim 0$ ).

4. При задании в начальный момент локализованного возбуждения с амплитудами, близкими к стационарному, определяемым выражениями (3) при  $d'' = 0$  формируются локализованные структуры (если  $d' < d'_{cr}$ ), либо возбуждения затухают (если  $d' > d'_{cr}$ ). Наличие реактивной компоненты коэффициента связи  $d'' \neq 0$  между элементами одного из слоев делает возможным существование локализованных структур и в последнем случае. При этом результат существенно зависит от знака произведения  $\alpha d''$ . Если  $\alpha d'' < 0$ , т.е. когда в пределе  $\alpha \rightarrow \infty; d'' \rightarrow \infty$ , соответствующее уравнение Шредингера описывает самосжатие локализованного возбуждения, процесс его затухания ускоряется. В противоположном случае ( $\alpha d'' > 0$ ) результат определяется конкуренцией двух эффектов: описанным выше расширением области вымирания автоколебаний, и противоположно направленным расплыванием локализованного возбуждения из-за совместного действия нелинейности  $\alpha|a|^2$  и "дисперсии"  $d''$ . Возможные результаты такой конкуренции обсудим на конкретном примере эволюции локализованного возбуждения с большой начальной амплитудой при  $p = 0, 5; d' = 0, 3; c = 0, 51; \Delta = 2; \alpha = 5, 75; N = 128$ . Напомним, что здесь мы обсуждаем лишь одномерные структуры, так что, если отвлечься от вопросов устойчивости по отношению к двумерным возмущениям, можно говорить об одномерной цепочке осцилляторов  $a_{jk} = a_j, b_{jk} = b_j, j = 1 \dots N$ .

5. С ростом дисперсии  $d''$  при  $\alpha d'' > 0$  происходит уменьшение скорости распространения фронтов, формирующих локализованную структуру. При достижении некоторого критического значения  $d''_1 \approx d' = 0,3$  действие эффекта вымирания автоколебаний уравнивается нелинейным саморасширением возбуждения, и в результате формируется устойчивая структура. Ее размеры с увеличением "дисперсии"  $d''$  растут и, наконец, при достижении второго критического значения  $d'' \approx 0,9$  преобладающим становится эффект саморасширения. Это в итоге приводит к делокализации возбуждения, и оно охватывает всю решетку.

Наиболее интересные явления происходят при значениях  $d''$ , приближающихся к  $d''_2$ . В случае строго симметричной задачи ( $a_i \equiv a_{128-i}; b_i \equiv b_{128-i}; j = 1, \dots, 64$ ) при значениях  $d''$  несколько меньших, чем критическое, из однородного локализованного возбуждения сначала формируется почти стационарное распределение амплитуд  $|a_j|, |b_j|$ . Оно сохраняется на больших интервалах безразмерного времени задачи ( $10^3 - 10^4$ ). После этого в течение существенно меньшего интервала времени ( $\approx 10$ ) происходит резкое симметричное расширение структуры (области высокоинтенсивных колебаний), и ее быстрое возвращение к исходному квазистационарному распределению амплитуд. В дальнейшем этот процесс повторяется. С ростом  $d''$  средняя частота появления таких выбросов возрастает. Даже в отсутствие шумов величина интервалов времени между этими событиями является случайной (насколько об этом можно судить по реализациям, содержащим до 100 выбросов). Если мы остаемся в рамках симметричных начальных условий, их малые изменения приводят к полному несовпадению отдельных реализаций, хотя качественно они не отличаются. Это свидетельствует в пользу динамического происхождения случайности в моментах возникновения выбросов, хотя количественный анализ более длинных реализаций требуется для окончательного вывода.

6. Добавление воздействия  $F_j(t); \xi_j(t)$  или возмущений начальных условий, нарушающих симметрию относительно центра цепочки не приводит к существенному изменению структур в периоды времени между выбросами. Однако во время каждого выброса они смещаются в ту или иную сторону (рис.1). Эти смещения происходят случайно как при шумовом воздействии, так и в его отсутствие при внесении асимметрии в начальные условия. Случайное блуждание структуры в конце концов приводит ее на границу цепочки, где она и остается во все последующие моменты времени. В результате мы естественным образом переходим к задаче о пограничном слое в рассматриваемой цепочке автогенераторов.

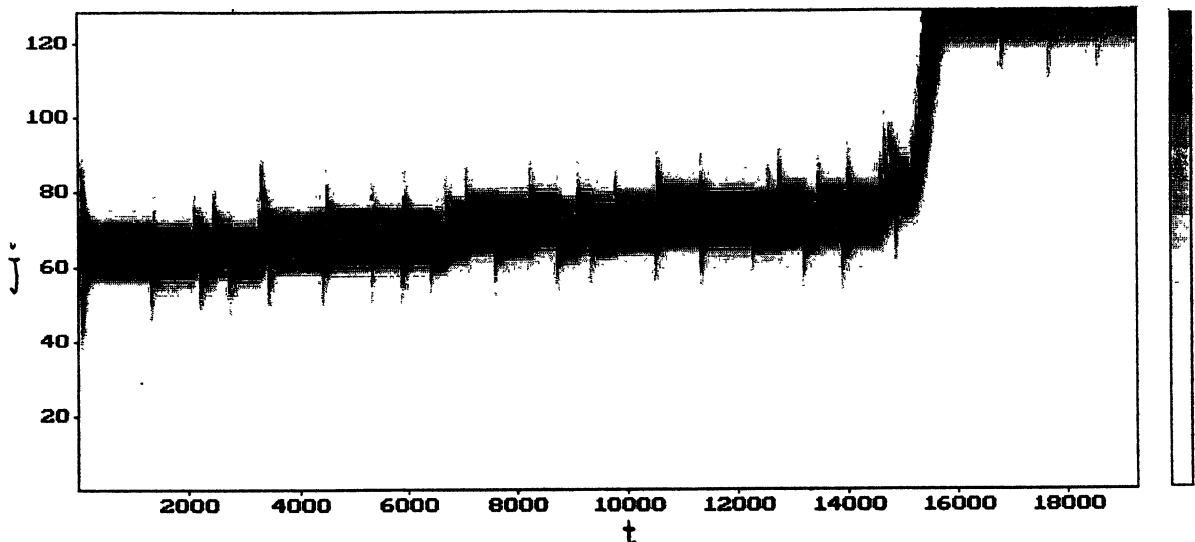


Рис. 1 Зависимость интенсивности колебаний  $|a_j|^2$  от номера элемента  $j$  и времени  $t$ . Максимальное затемнение соответствует максимальному значению интенсивности. Здесь  $p = 0.5$ ;  $d' = 0.3$ ;  $d'' = 0.84$ ;  $c = 0.51$ ;  $\Delta = 2$ ;  $\alpha = 5.75$ ;  $\eta = 10^{-4}$ ;  $N = 128$ .

7. Аналогично предыдущему случаю пограничная структура, сформированная на конце цепочки, сохраняет почти неизменное распределение амплитуды большую часть времени. Она расширяется и снова сжимается за короткие промежутки времени активности, следующие друг за другом через случайные интервалы. Средний период изменяется от  $\infty$  при  $d'' \approx 0,3$  до 0 при  $d'' \approx 0,9$ , когда происходит расширение структуры на всю цепочку. Добавление слабых шумов  $\xi_i(t)$  качественно не изменяет наблюдаемую картину. В численном счете (методом Рунге - Кутты четвертого порядка) шум имитировался добавлением к  $a_j$  на каждом шаге счета (размер шага  $\epsilon = 0,05$ ) случайных чисел  $\xi_i$ . Они были равновероятно распределены в интервале  $[0, \eta]$ . При  $\eta < 10^{-3}$  качественных отличий не наблюдалось. Лишь при  $\eta \geq 10^{-3}$  начиналось изменение средней частоты появления выбросов (рис.2).

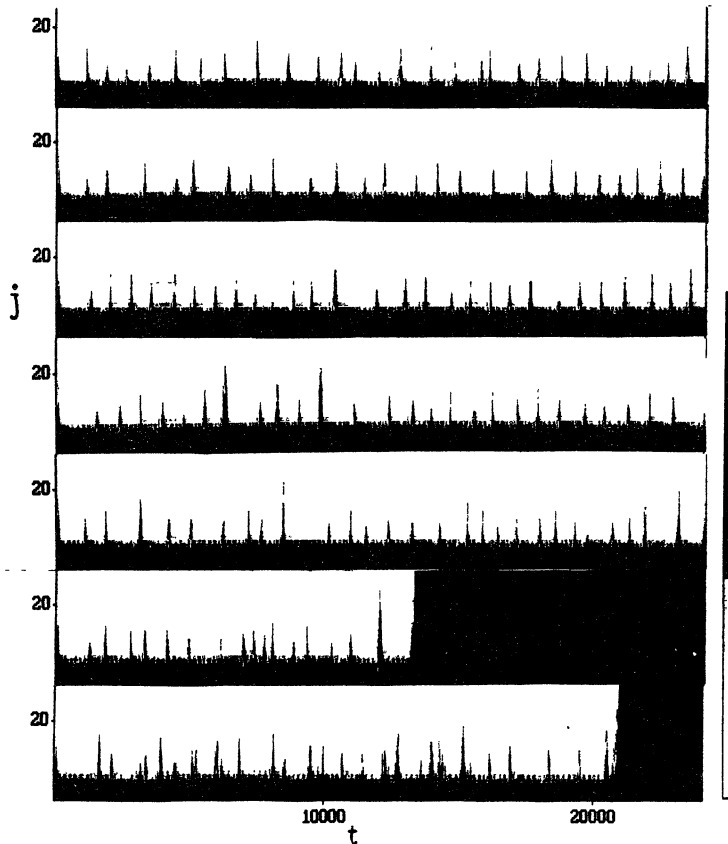


Рис. 2 Распределение интенсивности  $|a_j|^2$  колебаний в цепочке при различных уровнях шумов  $\xi$ . Величина  $\eta$  возрастает сверху вниз и соответственно равна  $0; 10^{-4}; 5 \cdot 10^{-4}; 10^{-3}; 2,5 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}; 10^{-2}$ . Здесь  $p = 0,5; d' = 0,3; d'' = 0,59; c = 0,51; \Delta = 2; \alpha = 5,75; N = 30$ .

Усредненная компонента интенсивности колебаний  $\langle |a_j|^2 \rangle$  максимальна на конце цепочки ( $j = 1$ ) и монотонно убывает при отходе от нее. Наоборот, пульсации интенсивности  $\delta I = \langle \max |a_j(t)|^2 \rangle - \langle |a_j|^2 \rangle$ , обусловленные выбросами, практически спадают до нуля на границе  $j = 1$  и достигают максимального значения в области, где усредненная интенсивность  $\langle |a_j|^2 \rangle$  уже убывает более чем на порядок (см.рис.3). Например, при  $d_i = 0,87; \eta = 10^{-4}$  ширина пограничной структуры по уровню 0,5 от максимальной интенсивности ( $\approx 0,4$ ) составляла  $j_{0,5} = 10$ . В то же время максимальная интенсивность пульсаций во время вспышек достигалась при  $j = 15 - 20$  и составляла  $\delta I \approx 0,25$ . Это значение более чем на порядок превышало значение интенсивности колебаний этих элементов в периоды между выбросами. При этом осциллограммы интенсивности осцилляторов  $j = 15 - 20$  очень похожи на осциллограммы релаксационных автогенераторов и представляли из себя короткие вспышки активности, во время которых интенсивность возрастала более чем на порядок (рис.4). Однако в данном случае принципиальное отличие состоит в том, что

они являются результатом коллективного взаимодействия слабонелинейных автогенераторов.

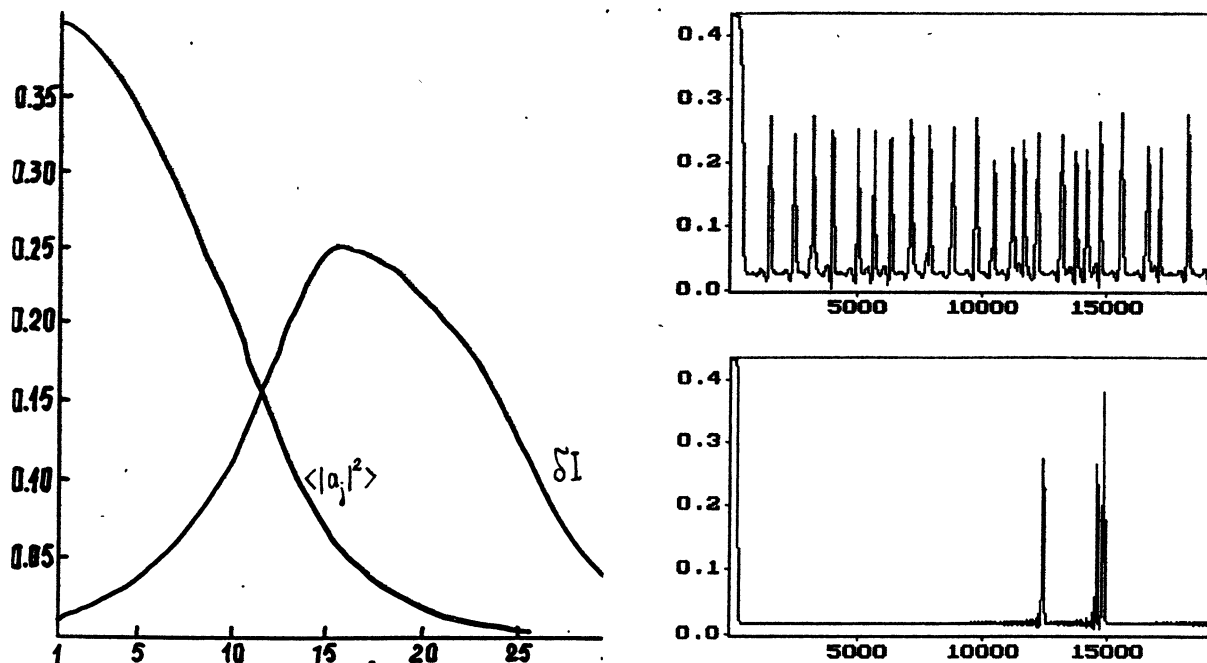


Рис. 3 Распределение усредненной интенсивности  $\langle |a_j|^2 \rangle$  и ее пульсационной компоненты  $\delta I$  при  $p = 0,5$ ;  $d' = 0,3$ ;  $d'' = 0,87$ ;  $c = 0,51$ ;  $\Delta = 2$ ;  $\alpha = 5,75$ ;  $\eta = 10^{-4}$ ;  $N = 128$ .

Рис. 4 а) Пульсации интенсивности на 20-ом элементе при значениях параметров, указанных в подписи к рис.3; б) Пульсации интенсивности на 12-ом элементе при  $p = 0,5$ ;  $d' = 0,3$ ;  $d'' = 0,66$ ;  $c = 0,51$ ;  $\Delta = 2$ ;  $\alpha = 5,75$ ;  $\eta = 10^{-4}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 94-02-03263) и ISF (гранты NOU000 и NOU300).

## Литература

- [1] P.Hedley, M.R.Beasley and K.Wiesenfeld. Phys.Rev.B 38(1988) 8712.
- [2] P.Hedley, M.R.Beasley and K.Veisenfeld. Appl.Phys.Lett. 52 (1988) 1619.
- [3] S.S.Wang and H.G.Winful. Appl.Phys.Lett. 52 (1988) 1774.
- [4] S.S.Wang and H.G.Winful. Appl.Phys.Lett. 53 (1988) 1894.
- [5] J.Benford, H.Sze, W.Woo, R.R.Smith and B.Harteneck. Phys.Rev.Lett. 62 (1989) 969.
- [6] L.Glass and M.C.Mackey. From clocks to chaos (Princeton Univ.Press, Princeton, NJ, 1988).
- [7] D.S.Levine, Math.Biosci. 66 (1983) 1.
- [8] G.B.Ermentrout and M.Kopell, SIAM J.Math.Anal. 15 (1984) 215.
- [9] A.Sherman, J.Rinzel and J.Keizer, J.Biophys. 54 (1988) 411.
- [10] J.J.Collins and I.N.Stewart. J.Nonlinear Sci. 3 (1993) 349.
- [11] Г.Д.И.Абарбанель, М.И.Рабинович, А.Селверстон, М.В.Баженов, Р.Хуэрта, М.М.Сущик, Л.Л.Рубчинский. УФН, 166 (1996) (в печати)
- [12] K.Okuda and Y.Kuramoto. Progr.Theor.Phys. 86 (1991) 1159.
- [13] M.B.Mineev, G.S.Mkrtchyan and V.V.Š it. J.Low-Temp.Phys. 45 (1981) 497.
- [14] T.Holst, J.V.Hansen, N.Groenbech-Jense J.A.Blackburn. Phys.Rev.B 42 (1990) 127.

- [15] S.Contininho, P.Pitanga and P.Lederer. Phys.Rev.B.23 (1981) 4567.
- [16] O.M.Braun, Y.U.S.Kivshar and A.N.Kosevich. J.Phys.C 21 (1988) 3881.
- [17] J.Pouget and G.A.Maugin. Physica D 14 (1984) 88.
- [18] G.A.Maugin and A.Miled. Phys.Rev.B 33 (1986) 4830.
- [19] М.И.Рабинович, М.М.Сущик. УФН, 160 (1990) 3.
- [20] Г.В.Осипов, М.М.Сущик. Изв.ВУЗов. Сер.Прикладная нелинейная динамика. 2 (1994) 24.
- [21] G.V.Osipov and M.M.Sushchik. Phys.Lett.A 201 (1995) 205.
- [22] Y.Yamaguchi and H.Shimizu. Physica D 11 (1984) 212.
- [23] K.Bar-Eli. Physica D 14 (1985) 242.
- [24] G.B.Ermentrout, in: Nonlinear oscillations in biology and chemistry, ed. H.Othmer (Springer, Berlin, 1986) Vol.66.
- [25] G.B.Ermentrout and W.C.Troy. SIAM J.Appl.Math. 46 (1986) 359.
- [26] G.B.Ermentrout. Physica D 41 (1990) 219.
- [27] D.G.Aronson, G.B.Ermentrout and N.Kopell. Physica D 41 (1990) 403.

## Self-Sustained Structures and Rhythms in Coupled Arrays of Oscillators

G.V.Osipov

The University of Nizhny Novgorod,  
23 Gagarin Ave., 603600 Nizhny Novgorod, Russia

M.M.Sushchik

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Science,  
46 Uljanov Str., 603600 Nizhny Novgorod, Russia  
krivat@appl.sci-nnov.ru

Pattern dynamics in a two-layer oscillatory medium is investigated. The layers are coupled diffusively, each being formed by discrete active elements capable of generating oscillations. The layers are described by the equations for complex amplitudes, i.e. by discrete analogs of generalized Ginzburg-Landau equations. One of the layers that may be referred to as an inert (nonevolving) layer is described by equations of the form (2). The second, evolving layer (that responds to external forcing) is described by analogous equations (1). The only difference is that these equations contain additional terms in the right-hand sides.

Primary attention is focused on localized structures and fronts, in the first place, to the ones that exist due to synchronization effects [20, 21]. One of the mechanisms responsible for the existence of such "genuinely" coherent structures is attributed to the effect known as "oscillation death" [22, 23], when a sufficiently strong dissipative coupling becomes, on breaking of synchronization, equivalent to additional damping. It may then appear that, on the one hand, the equilibrium state is stable due to large linear frequency mismatch and, on the other hand, the linear frequency mismatch in excited state is compensated, at finite amplitudes, by the nonlinear mismatch. The latter state is stable too, at least in the approximation of spatial homogeneity. Depending on initial and boundary conditions as well as on external forcing, the structures having different configurations and different topologies in continuous limit may be formed by these states.

In a definite parameter region, the localized structures are capable of generating low-frequency rhythms, not necessarily regular. These rhythms are due to collective effects and their average repetition rate  $T$  is much greater than all the characteristic time scales of an individual oscillator. The characteristic feature of rhythm formation is an almost unchanging oscillation intensity of central oscillators. At the same time, the peripheral oscillators stay in unexcited state most of the time (or perform low-intensity oscillations) and are activated only at small time intervals  $\Delta T \ll T$ . In the latter case their intensity is comparable to that of the central oscillator (Fig.3).

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Павлов И.С., Потапов А.И.

Нижегородский филиал института машиноведения РАН  
603024, Н.Новгород, ул.Белинского, 85

Рассмотрены плоские колебания цепочки "гантелевидных" частиц, имеющих три степени свободы. Такая система моделирует динамику одномерных кристаллов, состоящих из анизотропных молекул вытянутой формы. Из предположения о кубическом потенциале взаимодействия между частицами получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие различных типов волн (продольных, поперечных и ротационных), соответствующих определенным степеням свободы частиц, в рассматриваемой системе. Изучены дисперсионные свойства данной системы, и рассмотрены различные типы трехволновых резонансных взаимодействий.

## Введение

Многие динамические свойства "ориентированных" сред, состоящих из анизотропных молекул и имеющих кристаллическую решетку, относящуюся к типу так называемых молекулярных решеток [1-4], можно выяснить на примере плоских колебаний цепочки "гантелевидных" частиц. Такие частицы имеют три степени свободы: смещения центра масс в плоскости колебаний и поворот. С каждой степенью свободы связан свой тип волновой моды: две трансляционные моды, связанные с продольными и поперечными перемещениями центров масс частиц в цепочке, и ротационная мода, обусловленная пространственными изменениями их ориентации. В отличие от первых двух мод, присутствующих и в классической теории упругости [5], ротационная (или ориентационная) мода связана с микровращениями частиц среды. Примерами ориентированных сред служат слоистые и молекулярные кристаллы со сложной решеткой, такие как сероуглерод, нафталин, бензол, нитрит натрия, нитрат калия и др. [1,2,4,6], жидкие кристаллы [5], упругие ферромагнитные и ферроэлектрические кристаллы [7], поликристаллические и композитные материалы [8].

Целью настоящей работы является вывод нелинейных уравнений, описывающих динамику одномерной цепочки, состоящей из анизотропных частиц, выявление различных типов волновых мод и их дисперсионных свойств, а также изучение трехволновых нелинейных взаимодействий между различными модами такой системы.

## 1. Основные уравнения

Рассматриваются плоские колебания цепочки "гантелевидных" частиц ("диполей"), в исходном состоянии расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга и ориентированных перпендикулярно линии, соединяющей их центры масс (рис.1). Диполь представляет собой две

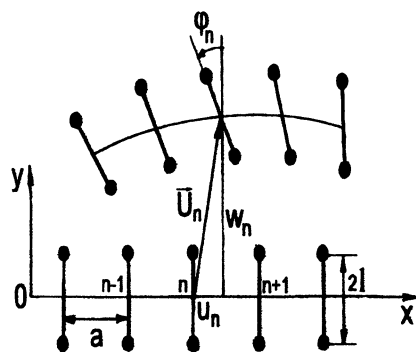


рис.1

одинаковые точечные массы  $m/2$ , соединенные жесткими стержнями длины  $2l$ , и его центр масс  $O_n$  совпадает с геометрическим центром. Каждая частица имеет три степени свободы: смещение центра масс в плоскости  $(x, y)$  и вращение вокруг нормали, проходящей через ее центр масс. Движение  $n$ -ой частицы складывается из горизонтального  $u_n$  и вертикального  $w_n$  перемещений ее центра масс  $\vec{u}_n = (u_n, w_n)$  и поворота  $\phi_n$  (рис.1).

Считается, что каждая масса взаимодействует со всеми массами двух ближайших соседей по цепочке. Это взаимодействие моделируется с помощью "нелинейных



упругих пружинок" и описывается кубическим потенциалом, зависящим от удлинений пружин, возникающих при отклонениях масс от положения равновесия. Углы поворота всех частиц полагаются малыми ( $\varphi_n \ll \pi$ ). При сделанных предположениях в континуальном пределе, когда характерная длина волны  $\lambda$  много больше расстояния между частицами ( $\lambda \gg a, l$ ), система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие различных типов волн в рассматриваемой среде, имеет вид :

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_1 u_x^2 + \alpha_2 w_x^2 + \frac{l^2}{a^2} \alpha_3 \varphi^2 + \frac{2l}{a} \alpha_4 w_x \varphi \right) , \\ w_{tt} - c_2^2 w_{xx} - \frac{l}{a} \beta_2 \varphi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_2 u_x w_x + \frac{l}{a} \alpha_4 u_x \varphi \right) , \\ a^2 (\varphi_{tt} - c_3^2 \varphi_{xx}) + \beta_1 \varphi + \frac{a}{l} \beta_2 w_x &= -\alpha_3 u_x \varphi - \frac{a}{l} \alpha_4 u_x w_x . \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $c_{1,2,3}$  - скорости распространения волн,  $\beta_{1,2}$  - параметры дисперсии,  $\alpha_1 \div \alpha_4$  - коэффициенты нелинейностей. К таким же уравнениям приводит и нелокальная теория упругости одномерных сред сложной структуры (нелинейный континуум Коссера), развитая в [9,10]. Следует отметить, что левые части второго и третьего уравнений аналогичны линейным частям уравнений, описывающих изгибные волны в стержне по теории Бресса-Тимошенко, учитывающей моментные усилия при сдвиговых деформациях. Правые же части уравнений (1) характеризуют эффекты нелинейного взаимодействия между различными волновыми модами в приближении квадратичной нелинейности.

Из системы (1) видно, что в линейном приближении ( $\alpha_i = 0, i = 1 \div 4$ ) продольные колебания независимы, а поперечные и ротационные связаны между собой. При нелинейном же рассмотрении все три вида волн становятся взаимосвязанными.

Волновые свойства линейной части системы (1) полностью характеризуются ее дисперсионным соотношением (рис. 2)

$$\left( \omega^2 - c_1^2 k^2 \right) \left[ \left( c_2^2 k^2 - \omega^2 \right) \left( \beta_1 + a^2 c_3^2 k^2 - a^2 \omega^2 \right) - \beta_2^2 k^2 \right] = 0 \tag{2}$$

и линейной связью между комплексными амплитудами поперечных  $A_w$  и ротационных  $A_\varphi$  волн

$$A_\varphi = i \frac{a(c_2^2 k^2 - \omega^2)}{l\beta_2 k} A_w = i \frac{a\beta_2 k}{l(\beta_1 + a^2 c_3^2 k^2 - a^2 \omega^2)} A_w = i\alpha(\omega, k) A_w , \tag{3}$$

где  $\omega$  - частота колебаний,  $k$  - волновое число,  $\alpha(\omega, k)$  - коэффициент линейной связи между амплитудами. Из рисунка 2 видно, что в данном приближении продольная мода (кривая 1) не обладает дисперсией, а ротационная мода (кривая 3) имеет критическую частоту  $\omega_* = \sqrt{\beta_1 / a}$ , ниже которой она является нераспространяющейся. Например, для кристаллов бензола  $\omega_* \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$ , а для нематического жидкого кристалла типа МББА, помещенного в магнитное

поле с напряженностью  $H_0 = 10^5 \text{ Э}$ , критическая частота  $\omega_* \approx 3 \times 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

В длинноволновом низкочастотном приближении ( $k < \omega_*/c_2, \omega < \omega_*$ ) ротационная мода становится нераспространяющейся и переменную  $\varphi$  можно выразить методом последовательных приближений через переменную  $w$  :

$$\varphi(x, t) \approx -A \frac{\partial w}{\partial x} - B \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + c_3^2 B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} ,$$

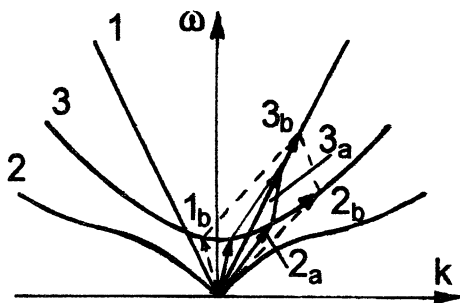


рис.2

где  $A = a\beta_2/I\beta_1$ ,  $B = \lambda a^2\beta_2/I\beta_1^2$ . В результате с принятой степенью точности система (1) сведется к двум уравнениям :

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 u_x^2 + \gamma_1 w_x^2), \\ w_{tt} - \tilde{c}_2^2 w_{xx} - c_3^2 \tilde{B} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{B} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} &= \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_x w_x). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\gamma_1 = \alpha_2 + \alpha_3(\beta_2/\beta_1)^2 - 2\alpha_4\beta_2/\beta_1$ ,  $\gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_4\beta_2/\beta_1$ ,  $\tilde{c}_2^2 = c_2^2 - \beta_2^2/\beta_1$ ,  $\tilde{B} = I\beta_2 B/a = a\lambda(\beta_2/\beta_1)^2$ . При этом во втором уравнении появляются четвертые производные, приводящие к дисперсии поперечной моды. Слагаемое, содержащее  $\partial^4 w/\partial x^4$ , характеризует "изгибные" напряжения, возникающие при поперечных смещениях частиц, а слагаемое, пропорциональное  $\partial^4 w/\partial x^2 \partial t^2$ , связано с приближенным учетом ротационных движений частиц в цепочке. Заметим, что именно эти слагаемые описывают дисперсию поперечной (изгибной) моды, обнаруженную в цепных и слоистых структурах.

## 2. Эволюционные уравнения трехволновых взаимодействий

В системах с квадратичной нелинейностью наиболее общими являются трехволновые резонансные взаимодействия (триплеты или триады), у которых частоты  $\omega_i$  и волновые числа  $k_i$  удовлетворяют условиям фазового синхронизма [11]:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_3 = k_1 + k_2. \quad (5)$$

В зависимости от того, какие типы волновых мод участвуют в резонансном взаимодействии и какая из волн триплетта является высокочастотной, а также от направлений их распространения ("а" - все три волны попутные, "б" - две волны попутные) возможны несколько качественно различных видов трехволновых взаимодействий. В рассматриваемой трехмодовой системе их число достигает шести.

Рассмотрим частный случай взаимодействий, когда высокочастотной является продольная волна и все волны попутные, т.е.  $0 < k_1 < k_2 < k_3$  (рис.2, триплет "а"). При этом решение системы (1) будем искать в виде набора квазигармонических волн:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_3(x, t)e^{i\theta_3(x, t)} + k. c. \\ w(x, t) &= A_1(x, t)e^{i\theta_1(x, t)} + A_2(x, t)e^{i\theta_2(x, t)} + k. c. \\ \varphi(x, t) &= d_1 A_1(x, t)e^{i\theta_1(x, t)} + d_2 A_2(x, t)e^{i\theta_2(x, t)} + k. c. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $A_1, A_2, A_3$  - медленно меняющиеся комплексные амплитуды,  $\theta_j = \omega_j t - k_j x$  ( $j = 1 \div 3$ ) - фазы волн,  $d_1$  и  $d_2$  - коэффициенты линейной связи, вычисляемые по формуле (3),  $k. c.$  обозначает комплексно-сопряженную часть решения.

Подставляя (6) в (1) и проводя усреднение по быстро осциллирующим переменным [11], получаем систему эволюционных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\Gamma_1 A_2^* A_3, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} &= -\Gamma_2 A_1^* A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \Gamma_3 A_1 A_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $V_j = (d\omega/dk)_j$  - групповые скорости волн:

$$V_1 = (\omega_1^2 + c_2^2 k_1^2) / \omega_1 k_1, \quad V_2 = (\omega_2^2 + c_2^2 k_2^2) / \omega_2 k_2, \quad V_3 = c_1^2 k_3 / \omega_3.$$

а  $\Gamma_j = \alpha_2 k_1 k_2 k_3 / 2\omega_j$  - коэффициенты нелинейного взаимодействия, вычисленные в пренебрежении в (1) малыми слагаемыми с коэффициентами  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ .

### 3. Установившиеся процессы. Триплет типа "а"

Рассмотрим установившийся процесс взаимодействия монохроматических волн, когда в уравнениях (7)  $\partial A_j / \partial t = 0$ . В этом случае от комплексных амплитуд  $A_j$  удобно перейти к действительным амплитудам и фазам:  $A_j(x) = a_j(x) e^{i\Phi_j(x)}$ . В результате уравнения (7) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{da_j}{dx} &= e_j \frac{\Gamma}{V_j} \frac{a_1 a_2 a_3}{a_j} \cos \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dx} &= \Gamma \left( \frac{a_2 a_3}{V_1 a_1} + \frac{a_1 a_3}{V_2 a_2} - \frac{a_1 a_2}{V_3 a_3} \right) \sin \Phi, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Gamma = \sqrt{|\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3|}$ ,  $e_1 = e_2 = 1$ ,  $e_3 = -1$ , а  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$  - обобщенная фаза триплета. В частном случае, когда  $\Phi$  остается постоянной и равной  $-\pi$ , решение системы (8) для полубесконечного слоя  $x \geq 0$  при граничных условиях  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = a_{20}$ ,  $a_3(0) = a_{30}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{V_3}{V_1} a_{30}^2 \operatorname{cn}^2(qx - K(s), s), \\ a_2^2 &= a_{20}^2 + \frac{V_3}{V_2} a_{30}^2 \operatorname{cn}^2(qx - K(s), s), \\ a_3^2 &= a_{30}^2 \operatorname{sn}^2(qx - K(s), s). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $K(s)$  - полный эллиптический интеграл первого рода,  $s^2 = V_3 a_{30}^2 / (V_2 a_{20}^2 + V_3 a_{30}^2)$  - квадрат модуля эллиптического интеграла ( $0 \leq s \leq 1$ ),  $q = \Gamma \sqrt{(V_2 a_{20}^2 + V_3 a_{30}^2) / V_1 V_2 V_3}$  - параметр, характеризующий пространственный период волны.

Решение (9) описывает периодический обмен энергией между взаимодействующими волнами триады с пространственным периодом  $\Lambda = 2K(s)/q$ . В зависимости от соотношения между амплитудами начальных возмущений  $a_{30}$  и  $a_{20}$  возможны два качественно различных варианта взаимодействий: если в точке  $x=0$  энергия колебаний была запасена в основном в высокочастотной моде триплета, то с ростом  $x$  в интервале  $(0, \Lambda)$  она будет уменьшаться,

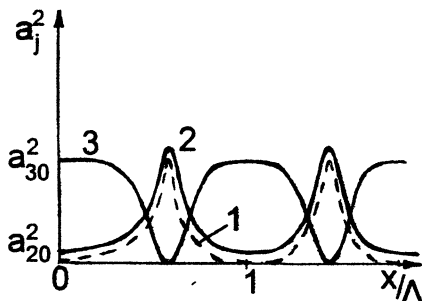


рис.3.а

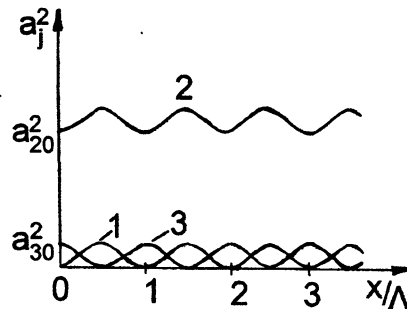


рис.3.б

передавая свою энергию в низкочастотные вторичные волны  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ . Максимальная передача энергии произойдет в точке  $\Lambda$ , и затем процесс пойдет в обратном направлении (рис.3.а). Если при  $x = 0$  энергия была запасена в одной из низкочастотных компонент триплета (например,  $a_{20} \gg a_{30}$ ), то обмен энергией между волнами триплета будет незначительным. Это соответствует тому, что в системе распространяется практически одночастотное возмущение  $a_2(x)$ , а амплитуды других волн триады остаются малыми по сравнению с ней (рис.3.б).

#### 4. Триплет типа "б"

Наряду с триплетом типа "а", состоящим из попутных волн, существуют триплеты типа "б", в которых лишь две волны имеют общее направление. Рассмотрим один из таких триплетов, в котором высокочастотной является продольная волна (рис.2, триплет "б"). В этом случае волновые числа удовлетворяют соотношению  $k_1 < 0 < k_3 < k_2$ . Система эволюционных уравнений (7) сохранит свой вид - лишь знак групповой скорости  $V_1$  станет отрицательным, но поскольку знаки групповых скоростей различные, в системе будет иметь место эффект распадной неустойчивости коротковолновой моды  $k_2$ , а волны с числами  $k_1$  и  $k_3$  будут устойчивы относительно малых возмущений. В этом случае в силу пространственно-временной аналогии роль неустойчивой высокочастотной моды  $\omega_3$  в триплете типа "а" будет играть коротковолновая мода  $k_2$ .

Однако теперь уже нельзя рассматривать задачу о распространении волн в полубесконечном слое  $x \geq 0$  - необходимо анализировать нелинейное взаимодействие волн триплета в слое конечной ширины  $0 \leq x \leq L$ , когда граничные условия для волн, бегущих в положительном направлении оси  $x$ , задаются в точке  $x = 0$ :  $a_2(0) = a_{20}$ ,  $a_3(0) = 0$ , а граничное условие для волны, распространяющейся в противоположном направлении, задается в точке  $x = L$ :  $a_1(L) = a_{1L}$ . При этом решение системы (8) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{V_2}{V_1} a_{20}^2 sn^2(qx - K(s), s) - \frac{b^2}{V_1}, \\ a_2^2 &= a_{20}^2 sn^2(qx - K(s), s), \\ a_3^2 &= \frac{V_2}{V_3} a_{20}^2 cn^2(qx - K(s), s). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $b^2 = V_2 a_{20}^2 sn^2(qL - K(s), s) - V_1 a_{1L}^2$ ,  $s^2 = V_2 a_{20}^2 / b^2$  - квадрат модуля эллиптического интеграла,  $q = b\Gamma / \sqrt{-V_1 V_2 V_3}$  - параметр, характеризующий пространственный период волны.

#### Заключение

В данной работе рассмотрены некоторые простейшие случаи нелинейных волновых процессов, когда в резонансном взаимодействии участвуют только три волны, принадлежащие различным дисперсионным ветвям. Помимо рассмотренных выше случаев трехволнового взаимодействия, возможны варианты резонансных триад, когда высокочастотной является ротационная волна. Тогда, в зависимости от направлений волн, задача исследования трехволновых взаимодействий может быть сведена к одной из двух рассмотренных выше. Для этого всего лишь нужно в уравнениях (6) у комплексных амплитуд и фаз поменять местами индексы 2 и 3.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (грант N R9B300) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 95-02-05360). Авторы признательны Драгунову Т.Н. за полезные дискуссии в процессе выполнения работы и помощь при оформлении статьи.

## Литература

1. Гросс Е., Коршунов А. Вращательные колебания молекул в кристаллической решетке органических веществ и спектры рассеяния. // ЖЭТФ, 1946, Т.16, No.1, С.53-59.
2. Ансельм А.И., Порфирьева Н.Н. Ориентационно-трансляционные волны в молекулярных кристаллах. // ЖЭТФ, 1949, Т.19, No.5, С.438-446.
3. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. // Физика твердого тела, 1960, Т.2, No.7, С.1399-1409.
4. Pouget J., Maugin G.A. Nonlinear dynamics of oriented elastic solids. // I, II. J. of Elasticity, 1989, V.22, P.135-155, 157-183.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости.* 4-е изд. - М.: Наука, 1987.
6. Сыркин Е.С., Феодосьев С.Б., Шамфарова О.Я. Влияние изгибной жесткости слоев на динамические характеристики слоистых кристаллов со сложной решеткой. // Физика низких температур, 1991, Т.17, No.6, С.746-754.
7. Pouget J., Askar A., Maugin G.A. Lattice model for elastic ferroelectric crystals: continuum approximation. // Phys.Rev.B. 1986, V.33, P.6320-6325.
8. Gauthier R.D., Jashman W.E. A quest for micropolar constants. // Arch. Mech., 1981, V.33, No.5, P.717-737.
9. Кунин И.А. *Теория упругих сред с микроструктурой.* - М.: Наука, 1975 - 416 с.
10. Potapov A.I., Erofeyev V.I. Nonlinear wave processes in elastic media with inner structure. In: *Nonlinear world*, V.2, Singapore 1990, P.1197-1215.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн.* - М.: Наука, 1984.

## NONLINEAR WAVES IN 1D ORIENTED MEDIA

I.S.Pavlov and A.I.Potapov

Plane oscillations of a chain of "dumb-bell-like" particles having three degrees of freedom are considered. This system models dynamics of one-dimensional crystals that consists of anisotropic molecules. For a cubic potential of the interaction between particles, the differential equations are obtained which describe the interaction of different types of waves (longitudinal, transverse and rotational) corresponding to certain degrees of freedom of the particles in the considered system. Dispersion properties of such a system are studied, and various types of three-wave resonant interactions are investigated.

# АКУСТО–ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

А.И.Потапов, С.А.Потапова

Нижегородский филиал Института Машиноведения РАН  
603024, Н.Новгород, ул.Белинского, 85.

Из полных уравнений гидродинамики нематического жидкого кристалла, находящегося в постоянном магнитном поле, получены одномерные уравнения, описывающие взаимодействия между акустическими и ориентационными возмущениями. Исследован случай трехволнового резонансного взаимодействия между акустической волной и крутильной волной директора. Показано, что мощная высокочастотная акустическая волна, изменяющая плотность ЖК, неустойчива и возбуждает две волны директора, частоты и волновые числа которых удовлетворяют условиям фазового синхронизма. В приближении несжимаемости жидкокристаллической среды связь между акустической и ориентационной модами исчезает, а нелинейная динамика поля директора описывается уравнением Синус-Гордона.

## Введение

Жидкий кристалл нематического типа (НЖК) представляет собой с макроскопической точки зрения "ориентированную" текучую среду. Состояние такой среды описывается заданными в каждой её точке наряду с обычными для жидкости величинами - плотности  $\rho$ , давления  $p$ , и скорости  $v$  еще и векторной величины  $n$  (директора), характеризующей ориентацию длинных осей молекул. Механика этих сред имеет в себе черты, свойственные как обычным жидкостям, так и упругим средам. Из экспериментов следует, что деформации сжатия-растяжения малы, а деформации сдвига приводят к течениям. Основные же типы деформаций, которые реализуются в ЖК - это так называемые изгибные деформации, связанные с изменением ориентации директора. Директор  $n$  характеризует упорядочение расположения молекул в макроскопическом объеме ЖК. Состояние движущейся кинематической среды определяется распределением в пространстве четырех полевых величин:  $p$ ,  $\rho$ ,  $v$  и  $n$ , а система уравнений, описывающая ее динамику, состоит из уравнения Эйлера, уравнения неразрывности и уравнения изменения момента импульса.

## 1. Гидродинамические уравнения НЖК

Рассмотрим жидкий кристалл, находящийся в постоянном магнитном поле  $H_0$ , которое в исходном состоянии совпадает с направлением директора  $n$ . Будем считать, что директор  $n$  зависит от одной пространственной переменной  $x_1 = x$ , и совершает движения либо в плоскости  $(x_2, x_3)$  (так называемая деформация кручения ЖК), либо в плоскости  $(x_1, x_2)$ , (поперечный изгиб ЖК). При первой конфигурации поле скоростей имеет одну компоненту  $v_x = v(x, t)$ , а директор можно представить в виде:  $n = (\sin\theta, \cos\theta, 0)$ , где  $\theta(x, t)$  - угол поворота. В этом случае полная система уравнений гидродинамики [1] НЖК примет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{K_2}{4\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (2)$$

$$\rho J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = K_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\chi_m H_0}{2} \sin 2\theta \quad (3)$$

где:  $\rho$  - плотность среды,  $J$  - момент инерции,  $K_2$  - константа упругости Франка,  $\gamma_1$  - коэффициент вращательной вязкости,  $b = (4/3\eta + \xi)/\rho$  - коэффициент диссипации акустической волны.

При второй конфигурации поле скоростей и директор имеют по две составляющие:  $v = \{v_1(x, t); v_2(x, t); 0\}$  и  $n = (\sin\theta, \cos\theta, 0)$ . В этом случае система гидродинамических уравнений имеет более сложный вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{K_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma_2}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v\Omega) = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{K_1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0 \quad (6)$$

$$\rho J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = K_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\chi H_0^2}{2} \sin 2\theta - (\gamma_1 + \gamma_2) \Omega \quad (7)$$

где  $\Omega = \frac{\partial v_2}{\partial x}$  -угловая скорость вращения среды, Здесь уравнение (4) описывает изменение продольной компоненты поля скоростей, а (5)-изменение сдвиговой компоненты поля скоростей. К уравнениям гидродинамики ЖК необходимо добавить соотношение между давлением и плотностью:

$$p(\rho) = p_* \left[ (\rho/\rho_0)^\Gamma - 1 \right] \quad (8)$$

где  $p_*$ -так называемое внутреннее давление в жидкости, характеризующее ее упругие свойства,  $\rho_0$  -плотность невозмущенной среды,  $\Gamma$  -нелинейный параметр, который характеризует отклонение адиабатической сжимаемости жидкости от линейного уравнения состояния [4].

## 2. Уравнения нелинейной акустики

Для малых акустических возмущений в системах уравнений (1)--(3) и (4)--(7) достаточно учесть лишь квадратичные слагаемые. Тогда взаимодействие акустической волны с крутильными колебаниями директора (1)--(3) сведется к двум связанным уравнениям второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho' + a_1 \rho'^2) - b \frac{\partial^3 \rho'}{\partial x^2 \partial t} = \frac{K_2}{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_\varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \omega_*^2 \sin \varphi = -\frac{c_\varphi^2}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \rho' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \int \frac{\partial \rho'}{\partial t} dx \right) \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:  $\varphi = 2\theta$ --удвоенный угол поворота директора,  $c_s = \sqrt{\Gamma p_*/\rho_0}$ ,  $c_{\varphi 2} = \sqrt{K_2/\rho_0 J}$ -- скорости распространения акустической и ориентационной волн соответственно,  $\omega_* = H_0 \sqrt{\chi_m/\rho_0 J}$ -- пороговая частота ориентационной волны,  $a_1 = (\Gamma + 1)/2\rho_0$ -- коэффициент, характеризующий акустическую нелинейность среды,  $\delta = \gamma_1/\rho_0 J$ --коэффициент крутильной вязкости. Нелинейное взаимодействие акустической и ориентационной волн является несимметричным. Акустическая волна воздействует на волну ориентации параметрическим образом через изменение параметров среды. Волна же ориентации директора выступает в роли нелинейного источника акустических возмущений.

Во втором случае кроме малости возмущений  $\rho$ ,  $p$  и  $v$  будем также считать малыми углы поворота директора. Тогда гидродинамические уравнения (4)--(7) могут быть приведены к следующей системе:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} \right) - b \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = \frac{c_s K_1}{4\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_x^2) + \frac{\gamma_2 c_s}{2\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} (v\Omega) - \frac{K_1}{2\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_x^2) + \frac{\gamma_2}{4\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_\varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \omega_*^2 \sin \varphi = -\delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\gamma_1 + \gamma_2) \Omega - (NL) \quad (13)$$

где:  $\varphi = 2\theta$ ,  $\kappa = \eta/\rho_0$ ,  $\delta = \gamma_1/\rho_0 J$ ,  $c_s = \sqrt{\Gamma p_*/\rho_0}$ ,  $c_\varphi = \sqrt{K_1/\rho_0 J}$ , . -нелинейные слагаемые. Здесь уравнение (11) описывает акустическую моду, (12)- ориентационную моду, (13) - уравнение динамики директора .

Характерные значения коэффициентов, входящих в уравнения (8)-(9) и (4)-(7), например, для нематического жидкого кристалла типа МББА, равны [1,5]:  $C_S = 1.6 \times 10^5$  см/с,  $C_\Phi = 1.8 \times 10^4$  см/с, геометрический момент инерции:  $J \sim l^2 \sim 10^{-14}$  см, критическая частота колебаний директора  $\omega_* = 2.5 \times 10^8$  1/с при  $H_0 = 10^5$  Э, коэффициент диффузии сдвиговой волны: см<sup>2</sup>/с, коэффициент кинематической вязкости:  $b = 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с.

Из приведенных оценок следует, что акустическая волна является слабозатухающей и связана с ориентационной модой через линейные и нелинейные слагаемые. Напротив, ориентационная волна достаточно сильно затухает и обладает линейной связью с диссипативной вихревой модой. В этой ситуации представляется интересным анализ как линейных, так и нелинейных взаимодействий различных типов волн в НЖК.

### 3. Взаимодействие акустических и ориентационных волн

В жидких кристаллах скорость акустических волн, как правило, много больше скорости ориентационных волн ( $c_s/c_\Phi \cong 8 \div 10$ ). Малость инерционных свойств молекул приводит также к большим значениям критических частот  $\omega_*$ . Эти обстоятельства обычно служат основанием для раздельного изучения акустических и ориентационных мод в жидких кристаллах. Теория и экспериментальные данные по линейным акустическим волнам достаточно подробно изложены в [1,2], а в работах [6,7,8] исследовались нелинейные ориентационные волны (волны директора), описываемые уравнением Синус-Гордона, которое получается из (10) в предположении несжимаемости среды.

Здесь будут рассмотрены трехволновые резонансные взаимодействия (триплеты) акустических и ориентационных волн, частоты которых удовлетворяют дисперсионному уравнению:

$$(\omega^2 - c_s^2 k^2)(\omega^2 c_\Phi^2 k^2 - \omega_*^2) = 0 \quad (14)$$

и условиям фазового синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k \quad (15)$$

где  $\Delta k$ - малая расстройка от резонанса.

Пусть триплет состоит из высокочастотной акустической и двух низкочастотных ориентационных волн;

$$\begin{aligned} \rho'(x, t) &= \rho_0 A_3(x) e^{i(\omega_3 t - k_3 x)} + k. c. \\ \varphi(x, t) &= A_1(x) e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2(x) e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + k. c. \end{aligned} \quad (16)$$

где  $A_i(x) = a_i(x) \exp\{i\psi_i(x, t)\}$  - медленно меняющиеся комплексные амплитуды.

Подставляя (16) в (13) и усредняя по быстрым осцилляциям [9], получим систему укороченных уравнений для действительных амплитуд и фаз взаимодействующих волн триплета. В нормированных безразмерных переменных:

$$t' = \omega_* t, \quad x' = \frac{\omega_*}{c_\Phi} x, \quad a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sigma_i}}$$

уравнения нелинейной динамики триплета имеют вид (штрихи опущены):

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dx} + \delta_i a_i &= e_i \sigma \frac{a_1 a_2 a_3}{a_i} \sin \Phi \\ \frac{d\Phi}{dx} &= \Delta k + \sigma \left( \frac{a_2 a_3}{a_1} + \frac{a_1 a_3}{a_2} + \frac{a_1 a_2}{a_3} \right) \cos \Phi \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $e_{1,2} = 1$ ,  $e_3 = -1$ ,  $\Phi = \psi_3 - \psi_1 - \psi_2 - \Delta k x$ - обобщенная фаза взаимодействующих волн,  $\delta_{1,2} = \delta \omega_{1,2} / 2k_{1,2}$ ,  $\delta_3 = b_1 \omega_3 k_3 c_\Phi^2 / 2c_s^2$ - коэффициенты затухания,  $\sigma = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$ ,  $\sigma_1 = (\omega_2^2 + k_2 k_3 \omega_2 \omega_3 k_2 / k_3) / 2k_1$ ,  $\sigma_2 = (\omega_1^2 + k_1 k_3 \omega_1 \omega_3 k_1 / k_3) / 2k_2$ ,  $\sigma_3 = (k_2 / 2k_3) (\omega_*^2 k_1^2 k_2^2 / 4c_s c_\Phi)$ -коэффициенты нелинейного взаимодействия волн.

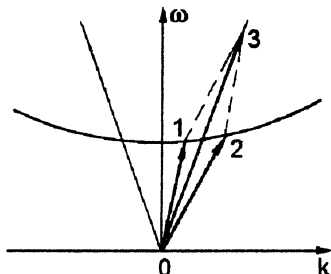


рис.2

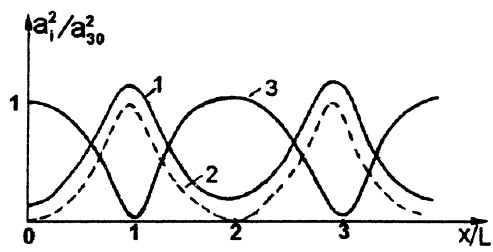


рис.3



Рассмотрим один важный частный случай решения системы (17), описывающий распадную неустойчивость интенсивной акустической волны при точном синхронизме ( $\Delta k = 0$ ). Пусть на границе среды  $x = 0$  имеются интенсивная акустическая волна  $a_3(0) = a_{30}$  и малые ориентационные возмущения директора  $a_1(0) = a_{10} \ll a_{30}$ ,  $a_2(0) = a_{20} \ll a_{30}$ , а  $a_2(0) = 0$ . Кроме того, положим, что начальная разность фаз волн  $\Phi(0) = \psi_3 \psi_1 - \psi_2 = \pi/2 + 2\pi n$ . При этих условиях решение системы уравнений (17) выражается через эллиптические функции и имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1^2(x) &= a_{10}^2 + a_{30}^2 cn^2[\sigma a_{30}(x - x_0), s] \\ a_2^2(x) &= a_{30}^2 cn^2[\sigma a_{30}(x - x_0), s] \\ a_3^2(x) &= a_{30}^2 sn^2[\sigma a_{30}(x - x_0), s] \end{aligned} \quad (18)$$

где  $s = a_{30}/(a_{30}^2 + a_{10}^2)^{1/2}$  - параметр эллиптической функции, ( $0 \leq s \leq 1$ ),  $x_0$  -- начальная фаза волны. Распределение интенсивностей взаимодействующих волн в пространстве показано на рис.3. Из него видно, что процесс перекачки энергии из акустической волны в ориентационные волны носит периодический характер. Расстояние, на котором энергия акустической волна полностью перекачивается в энергию ориентационных волн, равно:

$$L = \frac{K(s)}{a_{30}\sigma} \quad (19)$$

где  $K(s)$  - полный эллиптический интеграл первого рода. При  $a_{10}/a_{30} \rightarrow 0$  параметр эллиптичности  $s \rightarrow 1$ , эллиптические функции вырождаются в гиперболические и процесс преобразования акустической волны в ориентационные волны приобретает аperiodический характер.

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (грант N R9B300) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 95-02-05360).

### Литература

1. Сонин А.С. Введение в физику жидких кристаллов. М.:Наука, 1983
2. Ландау Л.Д., Лифшиц М. Теоретическая физика. Т.7, Теория упругости. М.:Наука, 1987
3. Аэро Э.Л., Бульгин А.Н. Гидромеханика жидких кристаллов // "Итоги науки и техники. сер. Гидромеханика", Т.7, М.:ВИНИТИ, 1973. С.106-213
4. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.:Наука, 1984
5. Капустин А.П., Капустина О.А. Акустика жидких кристаллов. М.:Наука, 1986
6. Каменский В.Г. Нелинейная динамика директора нематиков. //ЖЭТФ, 1984. Т.87, 7. С.1262-1270
7. Magyari E. The inertia mode of the mechanically generated solitons in nematic liquid crystals. //Z.Phys.B - Condensed Matter, 1984. V.56. P.1-3
8. Абдуллаев Ф.Х., Хабибулаев П.К. Динамика солитонов в неоднородных конденсированных средах. Ташкент, изд-во "ФАН", 1986
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.:Наука, 1984

## ACOUSTIC-ORIENTATION INTERACTIONS IN NEMATIC LIQUID CRYSTALS

A.I. Potapov and S.A. Potapova

One-dimensional equations describing interaction between acoustic and orientation perturbations are obtained from hydrodynamic equations for nematic liquid crystals at constant magnetic field. Three-wave resonant interactions between acoustic and torsion waves of director are investigated. It is shown that the powerful highfrequency acoustic wave is unstable and excites two director waves, frequencies and wave numbers of which satisfy the phase synchronism conditions. In the approximation of incompressibility of liquid-crystalline medium the coupling between acoustic and orientation wave modes disappear and nonlinear dynamics of director field is described by Sine-Gordon equation.

## CONTENTS

|   |     |
|---|-----|
| Preface .....   | 5   |
| Anfinogentov V. G. Chaotic oscillations and pattern interaction in the electron beam with virtual cathode .....   | 7   |
| Bezruchko B. P., Prokhorov M. D., Seleznev E. P. Multistability in a system of two coupled nonautonomous nonisochronous oscillators .....   | 13  |
| Chernov V. V., Gushchin V. V. About some peculiarities of auto-oscillations on a ground surface .....   | 19  |
| Gromov E. M., Talanov V. I. Nonlinear dynamics of short wave trains in dispersive medium .....  | 23  |
| Kozlov A. K., Shalfeev V. D. Processing information-bearing chaotic signal in a presence of noise using coupled oscillating systems .....   | 47  |
| Kozlov V. V. Laminar-turbulent transition in a boundary layer .....   | 53  |
| Krasichkov L. V., Kipchatov A. A. On high-dimensional oscillations from lattice of linear elements .....  | 69  |
| Mchedlova E. S. Some universalities in the large groups of time-delayed systems ..  | 75  |
| Usatenko O. V., Denisov S. V. Elastic soliton excitations in a new double-mode model of DNA .....   | 79  |
| Волков Н. Б., Зубарев Н. М., Зубарева О. В., Искольдский А. М.<br>Теоретическое исследование начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в тонконесущих плазмоподобных средах ..... | 85  |
| Езерский А. Б., Ермошин Д. А., Кияшко С. В. Дислокации и волны модуляции в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби .....   | 91  |
| Кияшко С. В. Многозаходные спиральные волны и дислокации в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби .....   | 103 |
| Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Удвоения периода и количественная универсальность в двумерных необратимых отображениях .....   | 111 |
| Куркин А. А. Каноническая теория нелинейного взаимодействия волн во вращающейся жидкости .....  | 117 |
| Осипов Г. В., Сущик М. М. Автоструктуры и ритмы в связанных решетках автогенераторов .....  | 121 |
| Павлов И. С., Потапов А. И. Нелинейные волны в одномерных ориентированных средах .....  | 127 |
| Потапов А. И., Потапова С. А. Акусто-ориентационные взаимодействия в нематических жидких кристаллах .....   | 133 |
| Contents .....  | 137 |

Нелинейные волны. Синхронизация и структуры. Ч.1.  
Под редакцией М.И.Рабиновича, М.М.Сушица, В.Д.Шалфеева.

Редакторы  
Технический редактор  
Обложка

ИБ 569  
Тем. план 1995, позиция 134  
Лицензия N 020235 от 16.01.91

Подписано к печати *15.01.96г.* . Формат 70 × 108 1/16  
Бумага типографская N . Печать офсетная. Усл.печ. *12*  
Уч.-изд.л. . Заказ N *35* . Тираж *300* экз. С.138.

Издательство Нижегородского ордена Трудового Красного Знамени  
государственного университета им. Н.И.Лобачевского  
603600, г.Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

---

Типография ННГУ. Ул. Б.Покровская, д.37.