



НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ



ГОРЬКИЙ · 1980

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ**

**НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

**Сборник
научных трудов**

**Под редакцией чл.-корр. АН СССР В.А.ЗВЕРЕВА
и профессора Л.А.ОСТРОВСКОГО**

Горький-1980

Издано по решению Редакционно-издательского
совета Института прикладной физики АН СССР

**НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА.
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

Сборник научных трудов

Редактор Н.А.Городецкая
Техн. редактор А.И.Елисеева
Корректор И.С.Ипатова

МЦ 00788 Подписано к печати 20.11.80г.
Формат 60x90/16. Бумага типографская №1.
Усл.печ.л. 14. Уч.-изд.л. 10,87. Тираж 500.
Заказ 151 Темплан 1980 г., Поз.2. Цена 1р.70к.

Отпечатано на ротапринте в Институте
прикладной физики АН СССР,
603600, г.Горький, ул.Ульянова, 46

В сборнике, содержащем обзоры и оригинальные статьи, отражено современное состояние исследований по теоретической и прикладной нелинейной акустике. Рассматриваются параметрические излучатели звука, дифракционные явления в интенсивных звуковых пучках, распространение мощных акустических импульсов в океане, нелинейные явления в жидкости, содержащей пузырьки газа, гидродинамические тумы, статистическая нелинейная акустика, нелинейные акустические взаимодействия в твердых телах и другие вопросы.

Сборник предназначен для широкого круга специалистов и студентов, работающих в области акустики и в других областях физики, связанных с нелинейными волновыми процессами.

This book contains reviews as well as original papers dealing with modern problems of theoretical and applied nonlinear acoustics. Parametric arrays, propagation of acoustic pulses in the sea, diffraction phenomena in intensive acoustic beams, nonlinear phenomena in a liquid with gas bubbles, hydrodynamic noise, statistical nonlinear acoustics, nonlinear acoustic interactions in solids and some others are considered.

The book is intended for a wide range of specialists and students working in acoustics and other branches of physics related to nonlinear wave processes.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
К.А.Наугольных, Л.А.Островский, А.М.Сутин. Параметрические излучатели звука.....	9
Б.К.Новиков, О.В.Руденко, В.И.Тимошенко. Исследования и разработки гидроакустических параметрических антенн и приборов.....	31
А.М.Сутин. Дифракционные явления в интенсивных звуковых пучках.....	45
В.Е.Фридман. Нелинейная акустика взрывных волн.....	68
В.В.Канер, А.А.Карабутов, О.В.Руденко. Нелинейные эффекты в акустических резонаторах.....	98
С.Н.Гурбатов, А.И.Саичев. Статистические задачи нелинейной акустики.....	108
Ю.А.Кобелев, Л.А.Островский. Модели газожидкостной смеси, как нелинейной диспергирующей среды.....	143
К.А.Наугольных, С.А.Рыбак. Нелинейные акустические явления в двухфазном пограничном слое.....	161
С.А.Рыбак. Акустические волны с отрицательной энергией.....	176
Л.К.Зарембо, В.А.Красильников, О.Ю.Сердобольская. Нелинейная акустика кристаллов и некоторые ее применения.....	189

Редакционная коллегия

В.А.ЗВЕРЕВ - чл.-корр. АН СССР, проф. (отв. редактор),
проф. К.А.НАУГОЛЬНЫХ - д.ф.-м.н., проф. Л.А.ОСТРОВ -
СКИЙ - д.ф.-м.н., проф. (отв. редактор), А.М.СУТИН - к.ф.-
м.н., В.Е.ФРИДМАН - к.ф.-м.н. (зам. отв. редактора),
Н.А.ГОРОДЕЦКАЯ (отв. секретарь).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелинейную акустику (НА) обычно определяют как раздел механики сплошных сред, относящийся к волновым движениям конечной, но относительно малой амплитуды (в смысле малости акустического числа Маха). Предмет НА охватывает чрезвычайно широкий круг вопросов – помимо нелинейного распространения и взаимодействия акустических волн в газах, жидкостях и твердых телах, к нему относят такие явления, как шумы гидродинамических потоков, акустические течения, нелинейные колебания пузырьков газа в акустическом поле, нелинейные электроакустические взаимодействия и т.п.

За последние несколько лет в этой области произошли существенные сдвиги, связанные как с успехами теории, так и с развитием экспериментальных исследований. Несомненно и рост практического значения НА, связанный с повышением мощности гидроакустических излучателей, созданием мощных ультразвуковых концентраторов и, конечно, параметрических излучателей звука, которые после длительного периода изучения доказали свою перспективность для целого ряда приложений. Известны также успешные попытки использования нелинейных акустических эффектов в твердых материалах для создания радиотехнических устройств.

Не исключено, однако, что, несмотря на сравнительно давнюю историю НА, имеющиеся практические результаты – это лишь начальный этап, поскольку существуют большие принципиальные возможности реализации различных нелинейных операций (например, преобразования частоты) непосредственно с акустическими сигналами, без их трансформации в электрические и обратно, а также создания новых, не –

линейных методов диагностики свойств вещества. Как бы то ни было, объем исследований по НА в последние годы непрерывно растет. В этом легко убедиться, например, просмотрев программы Международных симпозиумов по НА, которые проводятся чуть ли не ежегодно.

Задача настоящего сборника — дать читателю представление с состоянием исследований по некоторым современным проблемам НА. Не стремясь удовлетворить каким-либо требованиям полноты (многие важные вопросы, например, о нелинейных эффектах в акустических волноводах, акустических потоках и т.д., остались за рамками сборника), мы все же хотели схватить достаточно широкий и представительный круг задач. В относительно крупных статьях авторы стремились удовлетворить нескольким, часто противоречивым, требованиям: дать краткий обзор ситуации, рассказать о новых достижениях и проблемах, а там, где это возможно, выяснить соотношение между теорией, экспериментом и практическими приложениями. Наряду с этим в сборник включены небольшие статьи по отдельным вопросам НА (новые эксперименты и теоретические решения, попытки новых интерпретаций известных эффектов и т.д.). Основная часть сборника относится к акустике жидкости-газа, однако мы сочли целесообразным поместить одну статью, посвященную обзору недавних экспериментальных исследований по НА кристаллов, включая электроакустические взаимодействия переменных полей.

Авторы статей этого сборника принадлежат к различным научным школам и работают в различных научных центрах страны, и мы не рассчитывали сделать его вполне однородным. Более того, здесь отражены определенные точки зрения, которые подчас могут показаться спорными другим исследователям. Вместе с тем, можно надеяться, что и в таком виде сборник будет полезен достаточно широкому кругу специалистов и студентов, работающих как в области акустики, так и в других областях физики, связанных с изучением нелинейных волновых процессов.

В.А.Зверев

Л.А.Островский

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ ЗВУКА

К.А.Наугольных, Л.А.Островский,
А.М.Сутин

Введение

Идея создания так называемых параметрических излучателей (ПИ) возникла из рассмотрения эффектов "рассеяния звука на звуке", проведенного ещё на рубеже 60-х годов Зверевым и Калачёвым в нашей стране и Вестервелтом в США [1]. В области пересечения двух интенсивных звуковых пучков возникают поля комбинационных частот, и эта область становится источником излучения на частотах, отличных от частот исходных волн. Ввиду того, что в обычных условиях в жидкости и газе практически отсутствует дисперсия, фазовые скорости всех волн при коллинеарном распространении равны, и в этом случае возникает резонансная генерация поля комбинационных частот в области, размеры которой ограничиваются затуханием. На этом и основан принцип работы ПИ. Излучается остронаправленный звуковой пучок (волна накачки), состоящий из двух высокочастотных волн близких частот или, в более общем случае, модулированный сигналом низкой частоты. Благодаря нелинейности среды возникает волна низкой частоты, излучаемая из области взаимодействия первичных волн. Иногда говорят, что низкочастотная волна излучается виртуальными источниками, возникающими из-за нелинейности в указанной области, которая служит "бестелесной" антенной. Направленность излучения определяется размерами этой области (длина которой ограничивается затуханием первичного пучка), а

не габаритами высокочастотного преобразователя.

Наряду с острой направленностью, достоинствами ПИ являются: малость боковых лепестков диаграммы направленности, а также широкополосность — для существенного изменения частоты излучения достаточно весьма малых относительных изменений частоты первичной волны.

Первая модель ПИ была рассмотрена Вестервелтом в начале 60-х годов. С тех пор теоретические и экспериментальные исследования ПИ непрерывно расширяются; по некоторым оценкам число публикаций, посвященных ПИ, в течение 1971-1976 гг. росло экспоненциально [2].

В настоящей работе дается краткий обзор современного состояния исследований ПИ, включая: классификацию режимов работы ПИ и их простейшее теоретическое описание; предельные режимы работы ПИ; особенности работы параметрических излучателей в двухфазной среде; краткая характеристика созданных к настоящему времени излучателей. Здесь мы старались ограничиться простейшими расчетами и сформулировать некоторые выводы, которые представляются нам важными как в физическом, так и в прикладном отношении.

Линейные режимы ПИ

Теория ПИ может быть практически всегда основана на приближении "заданной накачки". В этом приближении низкочастотный сигнал p_s описывается линейным волновым уравнением с правой частью, определяемой первичным полем и описывающей распределение виртуальных источников низкочастотного поля [1,3-5]

$$\Delta p_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = - \frac{\epsilon}{\rho c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle p_i^2 \rangle, \quad (1)$$

где p_i — давление в первичной волне (предполагается, что эта волна имеет вид узкого пучка), знак $\langle \rangle$ обозначает усреднение по периоду высокой частоты, c — скорость звука, ρ — плотность. Из (1) следует выражение для вторичного низкочастотного поля

$$P_s = - \frac{\epsilon}{4\pi r c^4} \int \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} \langle R^2 \left(t - \frac{r}{c} \right) \rangle dV, \quad (2)$$

где dV - элемент объема в первичном пучке, r - расстояние от элемента dV до точки наблюдения; интеграл берется по объему V , занятому первичным пучком.

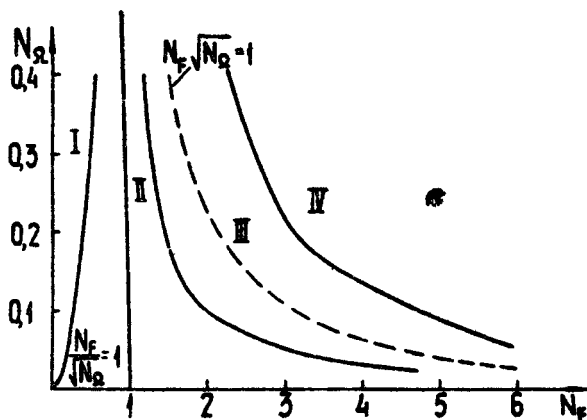
Распределение источников в (2) зависит от размера излучателя d , частот первичной волны ω и модуляции Ω , а также от длины затухания первичной волны L , и в общем случае включает как прожекторную, так и волновую зоны первичной волны. Мы будем в основном рассматривать поле в дальней зоне ПИ, т.е. на расстояниях, много больших длины антенны L . Если пренебречь нелинейными искажениями высокочастотной волны (это и понимается под "линейным" режимом), то режимы работы ПИ можно характеризовать следующими безразмерными параметрами [6]

$$N_\Omega = \frac{\Omega}{\omega}, \quad N_F = \sqrt{L/R_\Phi}.$$

(где $R_\Phi = \kappa d^2/8$ - параметр Фраунгофера по высокой частоте) или другими их безразмерными комбинациями, например, $N_A = \sqrt{N_\Omega/N_F}$ и $N_D = \sqrt{N_\Omega} N_F$. Параметр N_A представляет собой отношение длины прожекторной зоны на низкой частоте к длине затухания первичной волны, а N_D - отношение ширины диаграммы направленности первичной волны к ширине диаграммы направленности излучаемой низкочастотной волны, рассчитанной в приближении бесконечно узкого пучка. В зависимости от значений этих параметров можно классифицировать режимы работы ПИ. Существуют различные, но в общем сходные варианты этой классификации. Мы выделим четыре области на плоскости параметров (N_Ω, N_F) (рис.1) и в соответствии с этими областями четыре режима работы ПИ.

В области I где $N_F > \sqrt{N_\Omega}$ ($N_D > 1, N_A < 1$), эффективная длина антенны меньше дифракционной длины даже по низкой частоте (т.е. величины $N_\Omega R_\Phi$) и направленность излучения ПИ определяется размерами излучателя (рис.2,а).

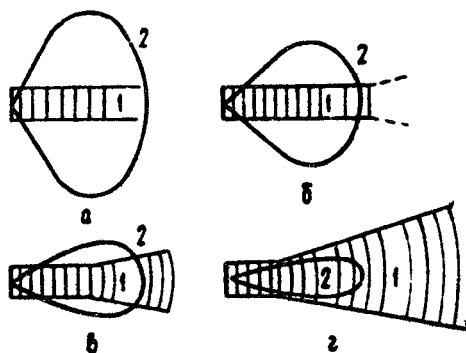
В области II $\sqrt{N_\Omega} < N_F < N_\Omega^{-1/2}$ ($N_A, N_D > 1$). Здесь ширина диаграммы направленности определяется длиной нелинейной антенны L .



Р и с. 1. Схема разбиения плоскости параметров на области

Случай $N_f < 1$, когда первичный пучок можно считать плоским, рассматривал Вестервелт [1]. В этом случае высокочастотное поле можно представить в виде

$$p_i = \int m(y, z) E \left(t - \frac{r}{c} \right) \exp[-\alpha r + i(\omega t - kr)] , \quad (3)$$



Р и с. 2. Схема формирования диаграммы направленности ПИ в разных режимах 1 - структура первичного пучка, 2 - диаграмма направленности ПИ. Случаи а-г соответствуют режимам I-IV

где $E(t)$ - функция модуляции первичного пучка ($E = |\sin \frac{\Omega t}{2}|$ для бигармонической волны, $E = 1 + m \sin \Omega t$ для синусоидальной амплитудной модуляции), $\alpha = \Gamma^{-1}$ - коэффициент затухания на высокой частоте. Поле на оси такого излучателя выражается следующим образом [7]:

$$P_{sm} = \frac{\epsilon P_m^2 S}{16\pi R \alpha r c^4} \frac{d^2(E^2)}{dt^2}, \quad (4)$$

где S - площадь излучателя (P_m считается однородным в пределах этой площади).

Таким образом, P_{sm} здесь нелинейно зависит от формы огибающей $E(t)$; в частности, синусоидально модулированная первичная волна дает двухчастотное излучение, тогда как двухчастотная волна (режим биений) дает синусоидальное излучение на разностной частоте Ω . Диаграмма направленности ПИ на основной частоте вторичной волны определяется выражением

$$D(\theta) = \left(1 + \kappa_s^2 \alpha^{-2} \sin^4 \frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}, \quad \text{где } \kappa_s = \Omega/c, \quad (5)$$

(здесь пренебрегается вкладом апертурного множителя, зависящего от диаметра пучка, что можно делать при $N_A \gg 1$). Интересно отметить, что выражение (5) близко к известной резерфордской формуле рассеяния. Ширина диаграммы, следовательно, равна (рис.2,б)

$$\theta_{3dB} \approx 2(\alpha/\kappa_s)^{1/2} \quad (6)$$

Представляют интерес также импульсные режимы ПИ. На рис. 3. показана форма низкочастотного импульса, генерируемого в соответствии с (5) высокочастотным импульсом с гауссовой огибающей.

Нетрудно показать, что формулы (4 - 6) справедливы во всей области Π , в том числе для излучателя, у которого $N_f > 1$, т.е. первичный пучок расходится [8,9]. Это нетрудно понять, поскольку при условии $N_D \gg 1$ в правой части уравнения (1) можно пренебречь кривизной фронта первичной волны, поскольку изменение фазы виртуальных источников в плоскости сечения пучка мало по сравнению с Π .

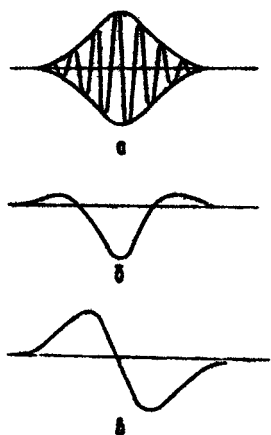
Сравнительно просто описывается также поле ПИ, характеристики которых отвечают области $\Gamma\Sigma$, где $N_f \gg N_\Omega^{-1/2} (N_D \ll 1)$.

Здесь излучение формируется в основном в волновой зоне первичного пучка, и вторичное излучение не выходит за пределы его диаграммы направленности (рис.2,г). Задача о нахождении вторичного излучения без труда решается, причём поле на оси излучателя дается выражением [8]

$$P_s = \frac{\epsilon P_n^2 R^2}{4 \rho c^3 R} \ln(2 N_A^{-2} \gamma) \frac{d(E^2)}{dt^2} D^2(\theta) \quad (7)$$

Здесь $\gamma = 178^\circ$ - постоянная Эйлера, $D(\theta)$ - диаграмма направленности первичной волны.

Существенно, что диаграмма направленности на низкой частоте здесь равна квадрату диаграммы первичного пучка, т.е. направленность по низкой частоте даже выше направленности по высокой. Как видно из формулы (7), поле на оси излучателя в этом режиме пропорционально уже не второй, а первой производной от квадрата функции модуляции. Форма импульса для ПИ, работающего в импульсном режиме, иллюстрируется рис.3,в.



Р и с. 3. Детектирование импульсного сигнала в ПИ, а - исходный сигнал, б - форма волны при работе в режиме II, в - при работе в режиме III

Подчеркнем, что указанный результат справедлив при выполнении условия $N_D \gg 1$ для всей полосы частот модулирующего сигнала.

Наиболее сложен для расчётов режим III, являющийся

переходным между режимами II и IV. Здесь $N_D \sim 1$ и расходимость первичного пучка уже существенно влияет на диаграмму направленности, тогда как вторичное излучение ещё существенно шире первичного (рис.2,в). Этот случай, пожалуй, чаще других встречается на практике (см. далее табл. 2). Изучению ПИ в таком режиме посвящено много работ. Полученные в них решения основаны либо на раздельном учёте вкладов прожекторного и волнового участков первичного пучка [10,11], либо на различных численных или приближенных аналитических решениях уравнения Хохлова-Заболотской для этого пучка [12,13].

Приведем здесь несколько наиболее простых приближенных соотношений, применимых в этой области. В работе [11] получено выражение для поля на оси ПИ (путем суммирования вкладов прожекторного и волнового участков), которое для бигармонического источника можно представить в виде

$$P_{\text{sum}} = \frac{\epsilon P_m^2 R_p^2 \Omega}{8 \rho c^3 R} \exp\left(\frac{2\alpha R_p \omega}{\Omega}\right) \left[Ei\left(\frac{2\alpha R_p \omega}{\Omega}\right) - Ei\left(\frac{2\alpha R_1 \omega}{\Omega} + R_1\right) \right] \quad (8)$$

Здесь Ei - интегральная показательная функция, R_1 - размер зоны взаимодействия; для поля в дальней зоне $R_1 \rightarrow \infty$. При условии $N_D \gg 1$ это выражение переходит в формулу Вестервелта (4), а при $N_D \ll 1$ - в формулу (7).

Более простое выражение для поля на оси было получено путем анализа уравнения Хохлова-Заболотской [13]. Рассматривался излучатель, создающий высокочастотные пучки с гауссовым поперечным распределением, т.е. $\rho_i = P_m \times \exp(-r^2/d^2)$. При этом для упрощения расчетов реальное экспоненциальное затухание аппроксимировалось скачкообразным изменением амплитуды первичной волны, когда до расстояний $R = R_0 = \lambda^{-1}$ затухание не сказывается, а при $R > R_0$ первичное поле равно нулю. В этом приближении поле на оси определяется соотношением

$$P_3 = \frac{\epsilon P_1 P_2 R_p^2 \Omega}{\rho c^3} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left[1 + \left(\frac{\Omega}{2\alpha \omega R_p} \right)^2 \right] + \arctg \left(\frac{\Omega}{2\alpha \omega R_p} \right) \right\} \quad (9)$$

Несмотря на грубость учёта затухания, это соотношение довольно хорошо описывает результаты экспериментов (см. следующую статью в сборнике).

Большое число теоретических и экспериментальных работ посвящено описанию и экспериментальному исследованию поля в ближней зоне ПИ. В этом случае теория значительно сложнее; пожалуй, наибольшие успехи здесь достигнуты с помощью решений уравнения Хохлова-Заболотской [14,15]. С их помощью были созданы номограммы, позволяющие рассчитать уровень поля в различных областях пространства и найти его угловые зависимости.

Предельные режимы работы и КПД ПИ

Вопрос об энергетической эффективности является одним из самых трудных при разработке ПИ. Уже из общих соображений следует, что КПД параметрического излучателя в обычных условиях не может быть большим. Действительно, согласно известным соотношениям Мэнли-Роу [16], даже в нелинейной среде без диссипации отношение мощности W_{Ω} , генерируемой на частоте Ω , к мощности W_{ω} , поступающей в среду на частоте ω , близко к отношению Ω/ω , т.е. всегда мало в интересных для использования ПИ режимах. Реальная ситуация, однако, ещё гораздо хуже, поскольку большая часть энергии накачки диссипирует в среде на длине L . Согласно выражениям (4), (5), (9), КПД излучателя $\eta = W_{\Omega}/W_{\omega}$ равен в режиме II

$$\eta_{II} = M^2 (\kappa_s d)^2 \kappa_s / 64 \pi \alpha, \quad (10, a)$$

а в режиме IV

$$\eta_{IV} = \left[\frac{\kappa_s R_p M}{4} \ln \left(2 \alpha \gamma R_p \Omega / \omega \right) \right]^2, \quad (10, b)$$

где $M = \dot{Q}_m / \rho c^2$ - число Маха для накачки на излучателе. Отсюда видно, что КПД растёт пропорционально мощности накачки. В этом смысле выгодны мощные ПИ; однако для мощной первичной волны существенны нелинейные искажения (перекачка энергии в высшие гармоники идет гораздо эффек-

тивнее, чем в низкочастотную волну). Это приводит к образованию разрывов и последующему быстрому затуханию накачки.

Расчёт ПИ в подобных "предельных" режимах может проводиться по-прежнему на основании формул (1)-(2), однако вычисление величины $\langle \rho_i^2 \rangle$ требует решения задачи о нелинейной дифракции волны накачки. Здесь возможна та же классификация режимов ПИ, что и выше, причем роль L играет длина нелинейного затухания. В настоящее время рассмотрены ПИ, работающие при нелинейном насыщении волн накачки, для случаев, соответствующих режимам II и IV, когда накачка либо затухает уже в прожекторной зоне, либо источником вторичной волны служит главным образом сферически расходящийся пучок накачки. В первом из них волна накачки определяется известным решением для нелинейной плоской волны, которая затухает после образования разрывов. Расстояние образования разрыва для модулированной волны различно на различных участках волны и определяется соотношением $I_* = \rho c^2 / \epsilon k \Phi_m [(\tau - I/c)]$. При $I < I_*$ величина $\langle \rho_i^2 \rangle$ остается в этом приближении такой же, как в гармонической волне, а при $I > I_*$ уменьшается (за счёт диссипации на разрывах) по закону [17]

$$\langle \rho_i^2 \rangle / \langle \rho_0^2 \rangle = \left(1 - \frac{\sigma V_m}{\pi} \right) \pm V_m \sqrt{1 - V_m^2} + \frac{2\sigma V_m^2}{3\pi} \quad (\sigma > 1), \quad (11,а)$$

$\sigma = I/I_*$, $\langle \rho_0^2 \rangle$ - средний квадрат давления в волне при $I = 0$, а V_m - нормированная амплитуда разрыва, определяемая известным соотношением $V_m = \sin \sigma V_m$. В выражении (11,а) знак "+" берется при $\sigma < \pi/2$, а знак "-" при $\sigma > \pi/2$.

Для упрощения расчётов используются различные аппроксимации выражения (11,а), например, [18]

$$\left. \frac{\langle \rho_i^2 \rangle}{\langle \rho_0^2 \rangle} \right|_{\sigma \pi} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{1 + \sigma} \right)^2 - 7,05 \exp(-2,5\sigma). \quad (11,б)$$

Эта аппроксимация дает точность не менее одного процента. Подставляя (11,б) в (2), получим следующее выражение

для давления на оси излучателя в дальней зоне

$$P_s = \frac{P_m S}{2\pi c \omega R} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (12)$$

Интересно, во-первых, что этот результат не зависит от параметра нелинейности среды ϵ и, во-вторых, что величина P_s линейно, а не квадратично связана с функцией модуляции E . Так, синусоидальная амплитудная модуляция дает гармоническое излучение на оси, а излучение от бигармонической накачки имеет резко несинусоидальный характер, формально даже с особенностями вблизи нулей огибающей, хотя на самом деле в этих точках формула (12) неприменима, и образуются выбросы конечной ширины. На рис. 4 показана снятая экспериментально форма вторичного поля для ПИ в режиме насыщения [19]. Ширина диаграммы направленности на разностной частоте для бигармонического возбуждения равна [18]

$$\theta_{\text{шир}} = 2(0,2/k_0 I_*)^{1/2} \quad (13)$$



Р и с. 4. Волна на оси ПИ, работающего в режиме насыщения

Видно, что ширина диаграммы увеличивается с уменьшением I_* , т.е. с увеличением интенсивности волны у излучателя. Это уширение прекращается при переходе в режим I, когда диаграмма направленности определяется просто дифракцией вторичной волны. Здесь КПД ПИ достигает максимально возможного значения, определяемого соотношением

$$\eta = b (\Omega/\omega)^2, \quad (14)$$

где b зависит от вида функции модуляции: $b = 0,36$ для бигармонической накачки и $b = 0,67$ для амплитудно-моду-

зированной с глубиной модуляции 100%.

Таким образом, в режиме, соответствующем модели Вестервелта, вместе с ростом КПД происходит ухудшение направленности, и наибольший КПД достигается в режиме, малоинтересном с точки зрения приложений ПИ.

Значительно более перспективным представляется в этом отношении режим IY, когда основной частью бестелесной антенны является сферически расходящаяся часть первичного пучка, в которой возникают разрывы. Ранее для таких излучателей было показано [20,21], что вследствие нелинейного затухания расширяется диаграмма направленности первичного пучка.

Здесь для описания первичного поля также верны формулы (11,а,б), если под σ понимать приведенное расстояние

$$\sigma = \frac{\epsilon \Phi_{nk} R_p E_p}{\rho c^2} \ln(R/R_p)$$

Расчёт ПИ в таком режиме был проведен в [22]. Давление низкочастотного поля на оси излучателя равно

$$p_s = \frac{\Phi_n S}{2\pi c R} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (15)$$

Таким образом, p_s снова линейно зависит от E , но, в отличие от (1), пропорционально E_t , а не E_{tt} , причём в случае синусоидального E здесь p_s в ω/R раз больше, чем в режиме Вестервелта. Диаграммы направленности по низкой и высокой частотам здесь практически совпадают. КПД излучателя в этом режиме опять равен предельному значению (14), однако теперь уже при достаточно узкой диаграмме направленности.

О проблеме оптимизации ПИ

Естественно возникает вопрос о каком-то выборе между рассмотренными выше режимами и вообще об оптимизации параметров ПИ; этот вопрос неоднократно рассматривался в литературе [23,24]. Однозначного ответа здесь дать нельзя: он зависит от требований к работе ПИ и от возможности варьировать те или иные параметры. Рассмотрим несколько

ко примеров оптимального выбора режима работы ПИ. Сначала будем рассматривать ПИ в режиме, далеком от нелинейного насыщения. Во всех примерах считаем изменяющимся один параметр излучателя, а все остальные фиксированными.

а) Выбор диаметра излучателя d , соответствующего максимальному давлению на оси Φ_{II} , при фиксированной мощности первичного пучка $Q = \Phi_{II}^2 S$. Согласно формулам (4) и (7), в режиме IV $\Phi_{II} \sim d^2 \ln(2\gamma N_A^2)$, а в режиме II Φ_{II} не зависит от d при фиксированном Q . В целом Φ_{II} монотонно растет с ростом d , достигая, однако, практически постоянной величины при $d \geq \sqrt{8/k_s d} = d_c$, т.е. с переходом из области III в область II . Эту величину можно считать оптимальной, поскольку дальнейшее увеличение d нецелесообразно.

б) Выбор оптимальной частоты первичной волны f для получения максимальной амплитуды давления на оси излучателя Φ_{II} . Из полученных формул следует, что в режиме II $\Phi_{II} \sim d^{-1}$, а в режиме IV $\Phi_{II} \sim f \ln(2\gamma N_A^2)$. Примем для коэффициента затухания формулу Шихи и Хале [25]

$$\alpha_{\text{шх}} = 4,14 \cdot 10^{-6} f^{3/2} \text{ КГц.} \quad (16)$$

Тогда, очевидно, Φ_{II} растет с ростом f , однако с ростом частоты растут затухание и длина проекторной зоны, так что параметр N_D падает пропорционально $f^{-7/2}$. При значениях N_D , меньших единицы, излучатель работает уже в другом режиме, где рост Φ_{II} прекращается, и в режиме II поле на оси падает уже как $f^{-3/2}$. Следовательно, максимум Φ_{II} достигается в режиме III и может быть определен соотношениями (8), (9).

Таким образом, указанные частные оптимизации приводят к выводу, что оптимальным является режим III (к сожалению, как отмечалось, он наиболее сложен для расчёта).

Рассматривая далее режим насыщения, целесообразно включить в число оптимизируемых параметров КПД излучателя. Из приведенного выше рассмотрения следует, что КПД достигает наибольшего значения порядка $(\Omega/\omega)^2$ в двух режимах - I и IV ; при этом узкая направленность достигается в режиме IV .

Рассмотрим выбор амплитуды давления на излучателе \mathcal{P}_i , при которой максимально отношение амплитуды вторичного поля в дальней зоне к \mathcal{P}_i . При малых \mathcal{P}_i расстояние образования разрыва велико, и ПИ работает в режиме IV , где, согласно (15), $\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_m \sim S\Omega/2\pi cR$, тогда как при больших \mathcal{P}_i разрывы образуются и затухают уже в ближней зоне (область II) где, согласно (12), $\mathcal{P}_I = \mathcal{P}_{II}\Omega/\omega$. Следовательно, отношение $\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_i$ падает на протяжении промежуточной области III . Наиболее выгодна граница между режимами III и IV , поскольку $\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_i$ здесь близко к наибольшему значению при хорошем КПД.

Этот же вывод был сделан путем расчёта по формуле (7), в которую в качестве расстояния взаимодействия R_1 подставлялось расстояние образования разрыва в волне накачки [24].

Таким образом, оптимальным для достижения максимума КПД, поля на оси и остроты диаграммы направленности, можно считать режим, соответствующий границе областей III и IV . Для работы в таком режиме должно выполняться соотношение

$$\text{exp}(\epsilon_k M R_\phi^{-1}) \approx \omega/\Omega, \quad \alpha^{-1} > R_\phi \omega/\Omega.$$

В этом случае, как видно из выражений (14), (15), достигаются следующие значения параметров ПИ

$$\eta = (\Omega/\omega)^2, \quad \theta = \lambda/d, \quad p_s = \Omega S \mathcal{P}_m / 4\pi R c, \quad (17)$$

т.е. диаграмма направленности излучения определяется угловой шириной первичного пучка.

ПИ в среде с пузырьками газа

Из сказанного выше ясна важность попыток повысить эффективность работы ПИ. Согласно соотношению (14), его предельный КПД зависит, в сущности, только от используемых частот, а не от величины нелинейности. Однако большинство реальных излучателей в настоящее время еще далеки от режима насыщения, поэтому повышение нелинейнос-

ти рабочей среды позволило бы повысить их эффективность при сравнительно небольших мощностях накачки и, кроме того, уменьшить мощность, на которой достигается предельный режим.

Более радикальное решение состояло бы в использовании диспергирующей среды, в которой сохраняется синхронизм между волнами накачки и сигнала, но устраняется синхронная перекачка энергии в высшие гармоники, приводящая к образованию ударных волн. В этом случае насыщение накачки достигалось бы за счёт перекачки её энергии в полезный сигнал. Исходя из известных соотношений Мэнли-Роу, можно видеть, что максимальный КПД в этом случае имеет порядок Ω/ω , а не $(\Omega/\omega)^2$, как в формуле (14).

Нельзя сказать, что подобные возможности сейчас хорошо изучены. Чаще других изучается в этой связи влияние на работу ПИ пузырьков газа в жидкости [26]. Свойства пузырька как нелинейного осциллятора и влияние пузырьковой среды на нелинейные акустические эффекты описаны в другой статье этого сборника [27]. Это влияние проявляется, с одной стороны, в повышении нелинейности (замене в уравнении (1) $\epsilon_2 = (\gamma + \sqrt{2})$ на некоторый другой параметр $\epsilon_2 > \epsilon_1$), а с другой — в росте поглощения.

Расчет ПИ в жидкости с пузырьками одинакового радиуса (монопузырьки) был проведен в работе [26] для условий, соответствующих модели Вестервелта. При этом для амплитуды давления и мощности излучения на низкой частоте получаются те же выражения (4) и (10,а), что и выше, но с другими значениями параметра нелинейности ϵ и коэффициента затухания α . Анализ, проделанный в работе [26], показал, что наличие пузырьков одного радиуса практически не приводит к увеличению амплитуды сигнала на оси излучателя. В то же время полная излучаемая мощность растёт за счёт расширения диаграммы направленности.

Таким образом, даже без учета рассинхронизма фазовых скоростей использование нерезонансных пузырьков вряд ли перспективно для ПИ, работающего без пузырьков в режиме П. Кроме того, в обычных условиях практически невозможно получить пузырьки одинакового размера.

Если же пузырьки характеризуются широкой функцией распределения по радиусам, включающей и резонансные для используемых частот, то при достаточно большой добротности пузырька как осциллятора основную роль играют именно такие резонансные пузырьки, для которых и нелинейность, и поглощение максимальны. Влияние резонансных пузырьков на свойства ПИ рассматривалось в работе [28]. В режиме, соответствующем модели Вестервелта, снова не получается особенно обнадеживающих результатов. Действительно, согласно выражению (4), поле на оси излучателя пропорционально отношению ϵ/α , которое, как следует из выражения для ϵ , полученного в [27], имеет значение

$$\epsilon/\alpha = 5,3 \cdot 10^3 \lambda Q, \quad (18)$$

которое зависит не от концентрации пузырьков, а лишь от длины волны накачки λ и добротности Q пузырьков, резонирующих на частоте накачки. Принимая снова для закона затухания волны в среде без пузырьков формулу (16), легко видеть, что в режиме П, когда поле на оси определяется выражением (4), отношение давлений на оси излучателя в данной зоне в присутствии пузырьков и без них равно

$$K = \sqrt{f/122},$$

где f — частота первичной волны в кГц. Очевидно, что наличие пузырьков заметно усиливает поле на оси только на частотах, многократно превышающих 100 кГц (хотя общая мощность снова может расти и на более низких частотах за счет уширения диаграммы направленности).

Однако большинство реальных излучателей работает в режимах III или IV. В этом случае введение пузырьков уменьшает длину антенны и может перевести ее в режим П. В частности, для излучателя, работающего без пузырьков в режиме IV, изменение поля на оси за счет пузырьков определяется соотношением

$$K = \left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)_n \frac{\Omega}{2\epsilon_0 R_p \omega \ln(2\alpha_0 r R_p \omega / \Omega)}. \quad (19)$$

Здесь $(\epsilon/\alpha)_n$ определяется выражением (18), ϵ_0, α_0, r

нелинейность и затухание в чистой воде.

Величина K в данном случае не зависит от концентрации пузырьков, однако оптимальной следует признать концентрацию, при которой ПИ работает вблизи границы областей III и IV, поскольку дальнейшее увеличение концентрации приводит к дополнительному уширению диаграммы направленности.

В табл.1 приведены примеры, показывающие возможность увеличения эффективности ПИ в пузырьковой среде.

Отметим еще, что в море, согласно данным работ [29, 30], объемная концентрация пузырьков с резонансной частотой 20 кГц может превышать 4 см^{-4} , а с частотой 50 кГц - 20 см^{-4} .

Т а б л и ц а 1

Влияние пузырьков на возрастание эффективности некоторых ПИ

Диаметр излучателя, см	Первичная частота, кГц	Коэффициент преобразования частоты, Ω/ω	Концентрация пузырьков, $n, \text{см}^{-4}$	Коэффициент эффективности пузырьковой среды, K
50	20	0,1	5	12
20	50	0,1	0,1	7
140	5	0,1	50	7

Как видно из табл.1, такие концентрации могут существенно влиять на работу ПИ. Не исключено даже, что то обстоятельство, что в излучателе FADS, описанном в [38], (см. табл.2) амплитуда вторичного поля на оси превышает теоретически рассчитанную, может объясняться влиянием содержащихся в море пузырьков.

Что касается работы ПИ в предельных режимах, то для этого случая влияние пузырьков пока еще не изучено.

Можно надеяться, что это влияние может привести к увеличению предельных КПД излучателей. Такой рост возможен за счет дисперсии, связанной с нерезонансными пузырьками, которая, как указывалось, препятствует образованию разрывов, или благодаря тому, что в среде с распределенными по размерам пузырьками перекачка энергии вверх по спектру идет менее эффективно, чем вниз. В частности, параметр нелинейности в пузырьковой среде при генерации второй гармоники оказывается существенно меньшим, чем при генерации волны разностной частоты [27].

Другая возможность состоит в использовании волно-водной дисперсии. В акустических волноводах (жидкостных или твердотельных) легко осуществить синхронную трансформацию частоты волн на больших мощностях без образования разрывов [31,32]. Такие системы, правда, становятся в той или иной степени "телесными", но зато их КПД может быть порядка (Ω/ω) вместо $(\Omega/\omega)^2$. Однако этот вопрос выходит за рамки данной статьи.

Некоторые характеристики действующих ПИ

Лабораторные исследования ПИ ведутся уже давно. В последние годы был создан ряд ПИ для различных прикладных гидроакустических исследований. Некоторые характеристики ПИ приведены в табл.2. Описание ПИ, разработанных в Таганрогском радиотехническом институте, дается в следующей статье этого сборника.

Из табл. 2 видно, что лабораторные исследования проводятся с излучателями, работающими в различных режимах, в то время как ПИ, созданные для практических целей, работают в режимах III и IV. Заметим, что в лабораторных экспериментах измерения часто производятся на расстояниях $R_{\text{набл}} < L$, т.е. в ближней области. В этом случае характеристика направленности может быть уже, чем в дальней зоне, что отмечалось, например, в [9,14].

Параметрические излучатели уже нашли применение в эхолотах и особенно в системах профилирования дна и придонных слоев [4]. ввиду возможности получить хорошую направленность на частотах, достаточно низких для

Т а б л и ц а 2

Наименование	Автор	Классификация инт. источник	Параметры				R мм м	W, Вт	Решение патента	Тип сатури- ции	Примечание
			$\omega/2\pi$, кГц	$Q/2\pi$, кГц	d, см	θ , град. поверх.					
Лазеротроны используемые	Зееман Келчев	33	5000	39	3x1,5	3	0,6	2	II	линейн.	
	Есимова др.	34	107,5	15	92	2	80	60	II	линейн.	
	Muir, Willeke	35	450	64	10	4	120	0,3	IX	линейн.	
	Björns et al.	36	990	40	2	2	10	100	III	линейн.	
	Willeke et al.	19	610	25	10	5	6,5	600	II	нелинейн.	$7 < Q/2\pi < 36$ кГц
	Kossov	37	2400	100	3,4	3	18	7	II	нелинейн.	$35 < Q/2\pi < 200$ кГц
	Мур	4	200	12	23	2		200	III	линейн.	$8 < Q/2\pi < 14$ кГц
	Konrad	38	65	10	90	2		5000	III-IV	линейн.	$0,5 < Q/2\pi < 14$ кГц
	Konrad	38	24	5	50x20	2x8		80000	III-IV	нелинейн.	$0,05 < Q/2\pi < 5$ кГц
	Для восста- новления дол- говых часов										

проникновения зондирующего сигнала в грунт.

Предполагается использовать ПИ для изучения распространения звука в мелком море и в подводных звуковых каналах, поскольку узкая диаграмма направленности позволяет избежать отражений от границ, которые затрудняют прямые акустические измерения [39]. Перспективно использование ПИ для помехозащищенных линий подводной связи [40]. Благодаря широкополосности ПИ используются также для калибровки электроакустических преобразователей, кроме того, высокая направленность позволяет в этих случаях уменьшить влияние стенок измерительного бассейна

Обсуждаются применения ПИ в медицинской акустике. Предлагается использовать ПИ, работающие в воздухе, для зондирования атмосферы, для контроля взлетных полос [41]. Сейчас трудно предвидеть, сколь широки будут реальные применения ПИ, но уже очевидно, что в некоторых важных областях гидроакустики они обладают уникальными преимуществами.

Л и т е р а т у р а

1. Westervelt P.J. - J.Acoust.Soc.Amer., 1963, 35, N4, p.535-537.
2. Muir T.G. - Abst. 7th Int.Symp. nonlinear acoust., Blacksburg, USA, 1976, p.104-107.
3. Берктей Х.С. - В сб.: Подводная акустика. М., Мир, 1980, с.325-346.
4. Мюир Т.Д. - В сб.: Акустика морских осадков. Под ред. Л.Хэмптона. М., Мир, 1977, с.227-273.
5. Зарембо Л.К. - Успехи физ. наук, 1979, 128, №4, с.713-720.
6. Новаек Н., Vesterheim M. - Тр. VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Т.1. М., изд-во МГУ, 1976, с.272-289.

7. Berktaу H.O. - J.Sound and Vibr., 1965, 2, N4, p.435-461.
8. Berktaу H.O., Leahy D.Y. - J. Acoust. Soc. Amer., 1974, 55,N3, p.539-546.
9. Hobaek H. - Scientific/Technical report. University of Bergen,Norway, 1977, N99.
10. Fenlon F.H. - J.Acoust. Soc. Amer., 1974, 55,N1, p. 35-46.
11. Дудина Т.А., Есипов И.Б., Козяев Е.Ф. - Тр. VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Т.1. М., изд-во МГУ, 1976, с.296-307.
12. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. - Акуст. журн., 1977, 23, №4, с.596-602.
13. Новиков Б.К., Рыбачек М.С., Тимошенко В.И. - Акуст. журн., 1977, 23, №4, с.621-626.
14. Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И. - Акуст. журн., 1974, 21, №1, с.591-597.
15. Тимошенко В.И. Расчёт и проектирование параметрических преобразователей. Ч.1. Таганрог, ТРТИ, 1978.
16. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. М., изд. АН СССР, 1974.
17. Сутин А.М. - Акуст. журн., 1978, 24, №4, с.539-601.
18. Сутин А.М. - Акуст. журн., 1978, 24, №1, с.104-107.
19. Willette J.G., Moffett M.B., Konrad W.L. - Тр. VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Т.1. М., изд-во МГУ, 1976, с.308-319.
20. Островский Л.А., Фридман В.Е. - Акуст. журн., 1972, 18, №4, с.584-589.
21. Shooter J.A., Muir T.G., Blackstock. -J.Acoust. Soc.Amer., 1974, 55,N1, p.54-62.
22. Гурбатов С.Н., Дёмин И.Ю., Сутин А.М. - Акуст. журн., 1979, 25, №4, с.515-520.

23. Зарембо Л.К., Краси́льников В.А. - Тр. VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Т.1. М., изд-во МГУ, 1976, с.290-297.
24. Есипов И.Б., Наугольных К.А. - Тез. докл. Всесоюзн. совещ. "Нелинейная гидроакустика-76". Таганрог, 1976, с.7-10.
25. Акустика океана. Под ред. Л.М.Бреховских. М., Наука, 1974.
26. Козяев Е.Ф., Наугольных К.А. - Акуст. журн., 1980, 26, №1, с.91-98.
27. Кобелев Ю.А., Островский Л.А. - В наст. сборнике, с.143.
28. Кобелев Ю.А., Сутин А.М. - Акуст. журн., 1980, 26, №6, с.860-865.
29. Medwin H. - J.Geophys.Res., 1977,82, N6, p.971-976.
30. Колобаев П.А. - Океанология, 1975, 15, №6, с.1013-1015.
31. Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M. - Acustica, 1978,39,N5, p.298-306.
32. Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин А.М. - Тез. докл. Всесоюзн. совещ. "Нелинейная гидроакустика-76". Таганрог, 1976, с.42-45.
33. Зверев В.А., Калачев А.И. - Акуст. журн., 1968, 14, №2, с.214-220.
34. Есипов И.Б., Зверев В.А., Калачев А.И., Наугольных К.А. - Акуст. журн., 1976, 22, №4, с.606-608.
35. Muir T.G., Willette J.G. - J.Acoust.Soc. Amer., 1972, 52,N5, p.1481-1486.
36. Bjørnø L., Christoffersen B., Schreiber M.P. - Тр. VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Т.1. М., изд-во МГУ, 1976, с.272-289.
37. Козяев Е.Ф. - Тез. докл. Всесоюзн. совещ. "Нелинейная гидроакустика-76". Таганрог, 1976, с.86-89.
38. Konrad W.L. - Proc.1973 Symp. Ed. L.Bjørnø, 1974,p.180-183.

39. Clynych J.R., Muir T.G. - Abstr. 7-th Int. Symp. Nonlinear acoust. Blacksburg, USA, 1976, p.133-136.
40. Konrad W.L. - J. Acoust. Soc. Amer., 1976, 60, Suppl.1, S-99.
41. Muir T.G. - Abstr. 8-th Int. Symp. Nonlinear Acoust, Paris, 1978, p.33.

ИССЛЕДОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АНТЕНН И ПРИБОРОВ

Б.К.Новиков, О.В.Руденко, В.И.Тимошенко

В последние годы появился новый класс гидроакустических приборов с параметрическими излучающими и приемными антеннами [1,2]. Эти антенны по сравнению с традиционными обладают рядом существенных преимуществ: широкой полосой пропускания (покрытие по частоте составляет десятки и даже сотни раз), узкой диаграммой направленности (несколько градусов) при низком уровне боковых лепестков (до -40 дБ), постоянством ширины характеристики направленности в полосе рабочих частот, малыми габаритами исходных преобразователей накачки и др.

В данной статье приведены некоторые результаты экспериментальных исследований и технические характеристики параметрических антенн и приборов (параметрических гидролокаторов, прецизионных эхолотов, измерительных излучателей и приемников и др.), созданных в Таганрогском радиотехническом институте (ТРТИ). Проводится также сравнение с теорией параметрических антенн, разработанной авторами [1 - 3]. В этой теории учитываются дифракция и затухание взаимодействующих волн накачки и волн разностной частоты (ВРЧ). В качестве предельных частных случаев из нее вытекают известные решения Берктея, Вестервелта и др. Сравнительная простота нашей теории позволяет решать конкретные практически важные задачи расчета характеристик реальных устройств в реальных средах, что другими способами сделать затруднительно.

Экспериментальные исследования проводили с параметрическими излучателями и многоэлементными антеннами, имеющими диаметр 2λ преобразователей накачки от 15 до 350 мм с частотами накачки f_0 от 20 до 12000 кГц. Рабочие разностные частоты f_{Δ} находятся в диапазоне от 0,2 до 400 кГц. Измерения проводили в гидроакустических бассейнах, на натурной испытательной базе "Сигма" в Таганрогском заливе, а также в акваториях Черного, Балтийского и Азовского морей с искусственными и естественными объектами отражений.

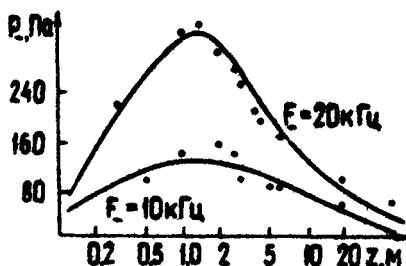
Теоретические графики построены с использованием аналитических соотношений и расчетных номограмм, полученных авторами [1 - 3]. В настоящее время студенты ТРТИ и других вузов используют эти номограммы для расчета [1,4] основных характеристик параметрических антенн при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Вначале кратко рассмотрим основные характеристики параметрических антенн: распределение излучения на оси, характеристики направленности (ХН), амплитудно-частотные (АЧХ) и фазовые характеристики.

Совместное влияние затухания и дифракции взаимодействующих волн в пучках приводит [1 - 3] к плавному росту (рис. 1) амплитуды ВРЧ (без обычных для ближней зоны флуктуаций поля) ρ_{Δ} до расстояния z порядка длины области дифракции волны накачки $z = l_{\Delta}$. Затем следуют области стабилизации и последующего уменьшения ρ_{Δ} с ростом z . С расстояний порядка нескольких l_{Δ} закон спада амплитуды ВРЧ близок к сферическому. Для иллюстрации на рис.1 сплошными кривыми показаны расчетные [1,3], точками - экспериментальные [5] данные об осевом распределении ρ_{Δ} для антенны параметрического гидролокатора ПГЛ-300 с частотой накачки $f_0 = 300$ кГц (см.далее таблицу 2).

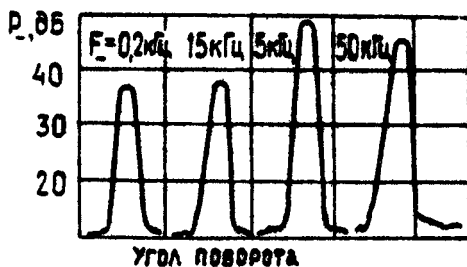
Дифракционная расходимость пучка волны накачки эквивалентна увеличению диаметра преобразователя, что в случае параметрической антенны приводит к компенсации обычного расширения ХН при понижении частоты [1 - 3]. В итоге ширина ХН параметрической антенны почти не зависит от частоты f_{Δ} . Типовые записи диаграмм направленности измерительного параметрического излучателя на частотах f_{Δ}

Р и с. 1. Распределение звукового давления ВРЧ на оси ПГЛ-300.



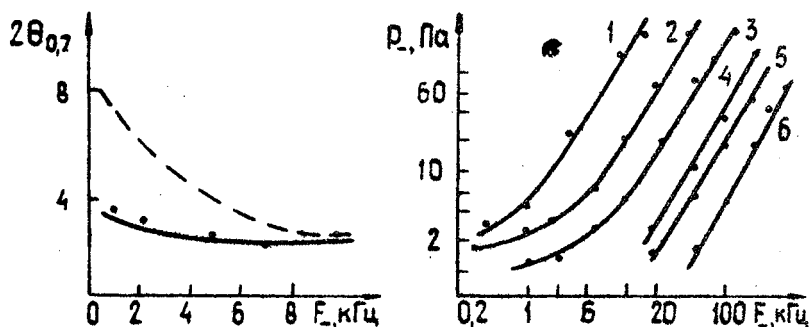
от 0,2 до 50 кГц представлены на рис. 2. Боковые лепестки в диаграммах направленности практически отсутствуют вследствие гауссовского поперечного распределения амплитуды в пучке волн накачки.

Р и с. 2. Диаграммы направленности при $f_0 = 1 \text{ МГц}$, $z_0 = 35 \text{ мм}$



Для дополнительной иллюстрации на рис.3 приведена расчетная зависимость ширины ХН по уровню 0,7 в функции от F_- (сплошная линия). Экспериментальные результаты (отмечены точками) сняты на расстоянии $z = 100 \text{ м}$ от многоэлементного преобразователя накачки с $f_0 = 136 \text{ кГц}$. Уровень звукового давления на f_0 поддерживался постоянным $P_m = 3,98 \cdot 10^5 \text{ Па}$. На этом же рисунке приведена зависимость $2\theta_{0,7}$ от F_- , построенная по номограммам зарубежных авторов [6,7] (штриховая линия). Видно, что опубликованные ранее номограммы, рассчитанные по вестервелтовской модели, дают значительные расхождения с экспериментальными результатами.

Путем различных конструктивных мероприятий [1,2] можно добиться формирования ХН треугольной, Π - образной и др. формы, а также производить сканирование ХН параметрической антенны.



Р и с. 3. Зависимость ширины ХН от $F_{\text{н}}$

Р и с. 4. АЧХ параметрических антенн:

1 - $z = 100$ м; 2 - $z = 15$ м; 3 - $z = 5$ м, 6 - $z = 2$ м; 4 и 5 приведено к 1 м.

При проектировании параметрических гидроакустических приборов различного назначения важно априорно знать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ). Разработанные в ТРТИ параметрические приборы охватывают практически весь частотный диапазон, используемый современной гидроакустикой. На рис.4 сплошными линиями 1-6 показаны расчетные АЧХ некоторых параметрических антенн, частоты накачки которых соответственно равны $f_0 = 136,500, 1014,1980, 2030$ и 4800 кГц. Точками обозначены результаты экспериментов.

Следует особо отметить удовлетворительное согласие теоретических [1,3] и экспериментальных данных. Диаметры исходных преобразователей накачки для графиков 1-6 были соответственно равны: для кривой 1-2 $\varnothing = 180$ мм (многоэлементный преобразователь); для 2 - $\varnothing = 30$ мм; для 3 - $\varnothing = 40$ мм; для 4 - $\varnothing = 18$ мм; для 5 - $\varnothing =$

» 30 мм (слабовыпуклый с радиусом кривизны 23,7 мм); для $6 - 2 \Omega = 15$ мм. На рис.4 указаны расстояния λ , на которых измерялись АЧХ. Для кривых 4 и 5 значение ρ приведено к расстоянию 1 м.

Из графиков рис.4 видно, что АЧХ параметрических антенн, имеющих различные размеры и конструкции, весьма сходны. Величина $\rho \sim f^2$. Показатель степени ρ на линейных участках АЧХ меняется в незначительных пределах от 1,5 до 1,8. Для кривых 1-6 этот показатель соответственно равен: 1,52; 1,55; 1,56; 1,75; 1,55 и 1,77. Отметим, что в работах [8,9 и др.] указаны те же пределы изменения показателя степени (от 1,5 до 1,7). Однако у широкополосных антенн на начальных участках кривых 1-3, где коэффициент снижения по частоте f_0/F приближается к тысяче, показатель степени ρ плавно увеличивается от 0,4 до 1,5. В этой области заметную роль играет изменение дифракционной расходимости ВРЧ [1-3].

АЧХ параметрического гидроакустического прибора зависят не только от АЧХ параметрической антенны, но и от электронной схемы (способа формирования сигнала), а также от АЧХ преобразователя накачки. Электронные схемы параметрических приборов позволяют производить коррекцию АЧХ антенны. Так, в измерительном параметрическом приборе НАИ-6 (табл. 1) создана АЧХ типа "полочка" [1,2].

Параметрические антенны для разработчиков гидроакустической аппаратуры являются сравнительно новым элементом, поэтому их интересует помимо описанных выше также фазовые характеристики. Наглядную картину изменения фазы ВРЧ на оси параметрического излучателя $f_0 = 1,875$ МГц и $2 \Omega = 18$ мм дают экспериментальные точки и расчетные графики рис.5 и 6. Изменение поперечного распределения фазы ВРЧ приведено в книгах [1,2]. Отметим, что расчет (сплошные кривые рис.6) и измерения фазы ВРЧ проведены впервые [1,2,9,10].

Значения частоты ВРЧ приведены на рисунках. При измерении фазы $\Delta \varphi$ в качестве опорного сигнала использовался сигнал отгибающей из блока формирования НАИ-5. Из графиков рис.5 и 6 видно, что $\Delta \varphi$ ВРЧ по мере удаления от преобразователя накачки растет вместе с амплитудой,

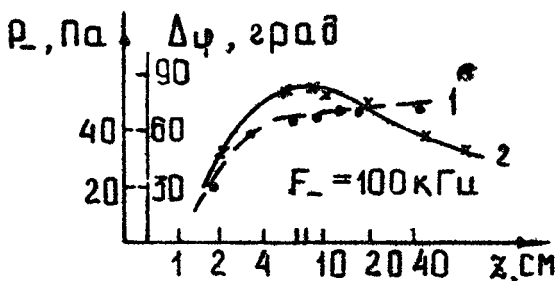
Т а б л и ц а 1

Тип прибора	Диапазон f , кГц	Уровень ρ		Ширина $2\theta_{0,7}$, градусы	Преобразователь накачки			Схема формирования сигнала	Условия работы
		Па	При z , м		f_0 , МГц	$2a$, мм	форма		
НАИ-5	2-300	15	1 5	30,0±1,0	1,014 2,03	40 30	и слабо-выпуклый, слабо-вогнутый	биения	для бассейнов
НАИ-6	1-150	5	3 10	3,5±0,5	1,19	30	плоский	биения	для бассейнов
НАИ-6М	10-100	5	3 10	3,5±0,5	1,43	30	плоский	биения	для бассейнов с большим гидростатическим давлением
НАИ-7	0,1-10	10	100 1	2,5±0,5	0,136	300	плоский многослойный элементный	2 канала	для натуральных условий

Т а б л и ц а 1 (окончание)

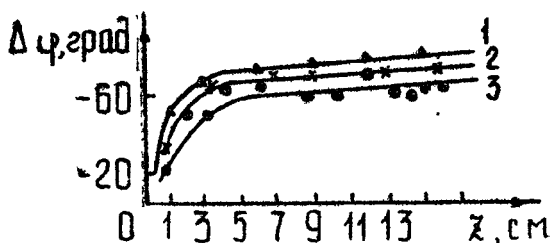
Тип прибора	Диапазон $f_{\text{с}}$, кГц	Уровень β		Ширина $2\theta_{0,7}$, градусы	Преобразователь			Условия работы
		Па м	При χ на $f_{\text{с}}$, кГц		f_0 , МГц	$2Q$, мм	форма	
НАИ-8	1-10	5	3	5,0 \pm 0,5	0,48	50	плоский с сегментами	для бассейнов с большим гидростатическим давлением
НАИ-8М	1-50	10	3	3,0 \pm 0,5	0,73	65	плоский с сегментами	для бассейнов с большим гидростатическим давлением
НАИ-9	1-200	5	3	5,0 \pm 0,5 и 30,0 \pm 1,0	0,98 и 2,0	30 и 20	плоский и слабый	для бассейнов (цифровая индикация)

стремясь к постоянному значению $\pi/2$. Начиная с области стабилизации (расстояние z порядка λ_g), фаза ВРЧ практически не изменяется.



Р и с. 5. Фаза (1) и амплитуда (2) ВРЧ.

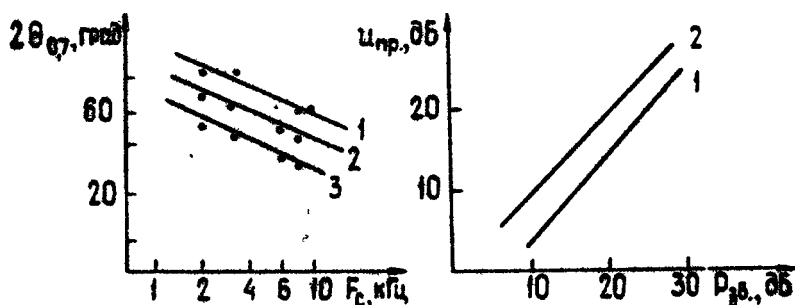
Амплитудно-фазовые, динамические и др. характеристики, а также вопросы оптимизации, влияния свойств среды и управления ими обсуждаются в книгах [1,2].



Р и с. 6. Фаза ВРЧ на оси: 1 - $F_- = 50$ кГц (эксперимент - \blacktriangle); 2 - $F_- = 100$ кГц (эксперимент - \times); 3 - $F_- = 150$ кГц (эксперимент - \bullet)

Коснемся кратко характеристик параметрического акустического приемника [1, 12', 13]. Параметрический приемник перед традиционным имеет единственное преимущество, связанное с "бестелесностью". Все основные его характеристики примерно такие же, как у аналогичной традиционной антенны бегущей волны. Для иллюстрации на рис.7 приведены расчетные графики (сплошные кривые) и экспериментальные точки зависимости ширины диаграммы направленности (по уровню 0,7) прибора НПАП-1 (нелинейный пара-

метрический акустический приемник) в функции от частоты принимаемого сигнала F_c при различных длинах базы L приемника. Видно, что диаграмма направленности обужается при увеличении частоты сигнала и при увеличении базы приемника (длины приемной параметрической антенны). Расчетные сплошные кривые рис.7 построены в соответствии с теорией, разработанной авторами [1], учитывающей дифракцию и затухание волн накачки в параметрическом приемнике. Созданный впервые в ТРТИ измерительный параметрический прибор НПАП-1 с фазовым детектированием имеет частоту накачки $f_0 = 1,25$ МГц, максимальную длину базы $L = 3$ м, (длину базы можно менять). Прибор принимает сигналы в диапазоне 0,01-50,0 кГц [1, 11, 12].



Р и с. 7. Направленность НПАП-1. 1 - $L = 0,5$ м; 2 - $L = 1$ м; 3 - $L = 2$ м.

Р и с. 8. Динамические характеристики НПАП-1.

Чувствительность параметрического приемника на частоте 8,0 кГц, определяемая по величине сигнала на выходе фазового детектора, составила 100 мкВ/Па при отношении сигнал-шум, равном 50 дБ [11].

На рис. 8 приведена динамическая характеристика параметрического приемника (кривая 1). Для сравнения здесь же показана динамическая характеристика пьезокерамического стандартного гидрофона (кривая 2) в виде сферы диаметром 50 мм. По чувствительности, частотному и динамическому диапазонам параметрический приемник близок к

указанному гидрофону, но НПАП-1 обеспечивает направленность приема и не загружает "акустическую ось" бассейна.

В ТРТИ проведены исследования параметрической приемной антенны из 2-х, 4-х и 6-ти параметрических приемников с различным расположением составных элементов (многоярусным, линейным, кольцевым и др.).

Параметрический приемник НПАП-1 работает в комплексе с измерительными параметрическими излучающими приборами типа НАИ (см. табл. 1).

Указанные в начале статьи ценные свойства параметрических антенн используются в измерительных приборах и гидроакустической аппаратуре активной локации.

В табл. 1 приведены технические характеристики впервые созданных комплексов приборов параметрических акустических излучателей для гидроакустических измерений (аналог генератора стандартных сигналов), разработанных в ТРТИ. Более подробные сведения о приборах приведены в книгах [1,2].

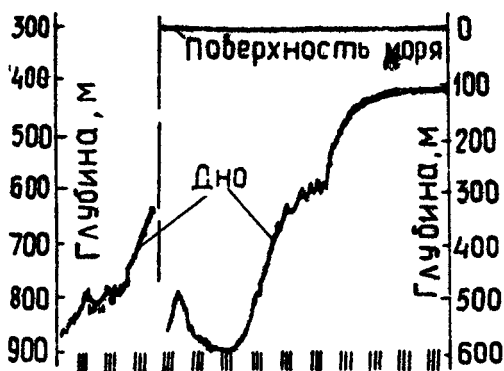
В ТРТИ созданы первые комплекты приборов параметрических гидролокаторов (типа ПГЛ). Краткие технические характеристики этих приборов приведены в табл.2. Эти приборы использовались [5] в акваториях Черного, Балтийского и Азовского морей, а также в некоторых озерах (включая известное Семлевское озеро) для рыболокации, прецизионного эхолотирования и профилирования дна, определения структуры придонных слоев грунта, эхолотирования придонных и приповерхностных целей, определения координат объектов в загазованном иле и др. Дистанции эхолотирования и эхолотирования в пресной и соленой воде достигали 900 м, прозвучивания придонных слоев - 25 м, в загазованном иле - до 18 м. Для иллюстрации на рис.9 и 10 приведены записи эхограммы профиля участка дна Черного моря (глубина до 900 м) и профиля придонных слоев (речные наносы) участка дна Рижского залива Балтийского моря, полученные с помощью приборов ПГЛ. Более подробные сведения приведены в книге [1].

Параметрические антенны в приборах локации позволили резко уменьшить влияние поверхностной и придонной реверберации. На ряде эхограмм можно четко наблюдать отражения от звукорассеивающих слоев (кильватерных струй

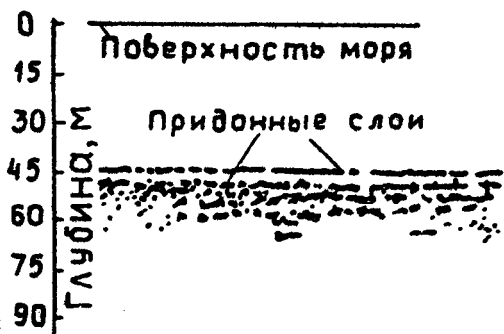
Таблица 2

Тип прибора	Рабочая частота $f_{\text{р}}$, кГц	Уровень β			Ширина 2θ , градуса	Преобразователи				Схема формирования сигнала	Мощность тракта $P_{\text{тр}}$, кВт	Длительность импульса, мс	Частота следования импульсов, Гц
		Па	м			f_0 , кГц	шт.	2θ , мм	форма				
			призма	Г									
ПГЛ-300	1-25	150	10	20	$4,0 \pm 0,5$	1	300	100	плоский	бесшум	0,5	0,1-20,0	0,4-200,0
ПГЛ-2	136	1500	10	136	$3,5 \pm 0,5$	28 (14+14)	420 и 536	75x75	мозаика	2 канала	0,3x2	0,01-5,0	0,4-200,0
ПГЛ-2А	50	200	10	30	$3,5 \pm 0,5$	28 (14+14)	408 и 456	75x75	мозаика	2 канала	0,3x2	0,01-5,0	0,4-200,0
ПГЛ-3	5-25	200	5	10	$4,0 \pm 0,5$	1	294	100	армиров.	бесшум	0,8	0,1-20,0	0,4-200,0

корабля). В настоящее время в приборах активной локации используется только свойство малогабаритности и безлепестковости ХН параметрических антенн. Ждет своего использования свойство широкополосности этих антенн.



Р и с. 9. Эхограмма участка дна Черного моря



Р и с. 10. Эхограмма придонных слоев, участка дна Рижского залива

Параметрические гидроакустические приборы типа НАИ и НПАП, разработанные в ТРТИ, демонстрировались на Всесоюзных (ВДНХ СССР - 1977, 1978, 1980 г.г.; в Кремле - в 1977 г.; на НТТМ - в г.Владимире - в 1978 и в 1980 г.г.) и международных (в Венгрии - в 1978 г.;

в Чехословакии - в 1979 г., "ОКЕАНЭКСПО" во Франции - в 1980 г.) выставках.

Л и т е р а т у р а

1. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика (параметрические приборы и антенны). Л., Судостроение, 1980.
2. Тимошенко В.И. Расчет и проектирование параметрических преобразователей. Ч.1. Таганрог, ТРТИ, 1978.
3. Новиков Б.К., Рыбачек М.С., Тимошенко В.И. - Акуст. журн., 1977, 23, №4, с.621-626.
4. Тимошенко В.И. - В кн. Сборник задач по курсу "Акустика". Ч.П. Таганрог, ТРТИ, 1978 г., с 18-38
5. Воронин В.А., Гурский В.В., Котляров В.В., Тарасов С.П., Тимошенко В.И. - В кн. Акустические методы исследования океана. Вып. 303, ЦП НТО. Л., Судостроение, 1979, с.78-85.
6. Мюир Т.Дж. - В кн. Акустика морских осадков. М., Мир, 1977, с.227-273.
7. Урик Р.Дж. - В кн. Основы гидроакустики. Л., Судостроение, 1978, с.103-106.
8. Bjørnø L. - Advanced Study Institute on Signal Processing, 30 Aug.-11 Sept., 1976, La Spezia, Italy and Dordrecht-Boston, 1977, p.33-38.
9. Hobaek H. - Scientific/Technical Report, N99, Bergen, University of Bergen, Norway, 1977.
10. Воронин В.А., Рыбачек М.С., Тарасов С.П., Тимошенко В.И. - В кн.: Акустические методы исследования океана. Вып. 294, ЦП НТО. Л., Судостроение, 1978, с.126-132.
11. Гривцов В.В., Рыбачек М.С. - В межвуз. сб. Прикладная акустика. Т.У. Таганрог, ТРТИ, 1977, с.35-41.

12. Воронин В.А., Максимов В.Н., Пояркова В.А., Тимошенко В.И. - В кн. Акустические методы исследования океана Вып. 294, ЦП НТО. Л., Судостроение, 1978, с.133-139.
13. Воронин В.А., Максимов В.Н., Тимошенко В.И. - В кн. Акустические методы исследования океана. Вып. 303, ЦП НТО. Л., Судостроение, 1979, с.86-93.

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИНТЕНСИВНЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКАХ

А.М.Сутин

Введение

В различных областях техники все большее применение находят мощные акустические системы, создающие звуковые пучки, в которых возможны значительные нелинейные искажения формы волны. Однако нелинейные эффекты в акустике относительно хорошо изучены лишь для одномерных случаев (плоские, сферические и цилиндрические волны) [1,2], в то время как при расчётах полей реальных излучателей необходимо учитывать и дифракционные эффекты. В связи с этим в последнее время много внимания уделяется теории ограниченных пучков конечной амплитуды. Нахождение характеристик поля в этом случае связано с большими математическими трудностями в связи с необходимостью анализа дифракционных явлений в волнах, профиль которых непрерывно изменяется из-за нелинейности. В 1969 г. Р.В.Хохловым и Е.А.Заболотской было предложено упрощенное уравнение для нелинейных акустических пучков с узким угловым спектром [3], которое имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\tau dz} = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} u + \frac{\epsilon}{2c} \frac{d^2 u^2}{d\tau^2}, \quad (1)$$

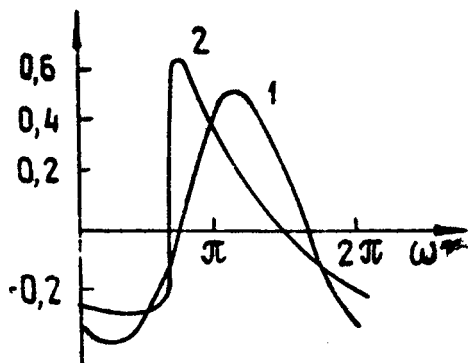
где $\tau = t - (z/c)$ - бегущая с волной координата, z - расстояние вдоль пучка, Δ_{\perp} - поперечный лапласиан, $u = p/\rho c^2$ - безразмерное акустическое давление в волне (акустическое число Маха), ρ - акустическое давление,

ρ - плотность, $\epsilon = (\gamma + 1)/2$ - параметр нелинейности среды, c - линейная скорость звука. Однако даже упрощенное уравнение Хохлова-Заболотской еще чрезвычайно сложно для анализа, и лишь для некоторых частных случаев известны его приближенные аналитические решения. Так, в работах [3,4] рассматривались решения этого уравнения, описывающие эффекты нелинейной саморефракции при распространении однополярных возмущений. Эти решения соответствовали случаю преобладающего влияния нелинейности и не учитывали собственно дифракции. Было показано, что квазиплоский импульс сжатия с амплитудой, спадающей к краям пучка, при распространении становится расходящимся за счёт нелинейной саморефракции, которая обусловлена более быстрым движением фронта волны в центре пучка, чем на его краю. Аналогичным образом нелинейная саморефракция при распространении импульсов разрежения приводит к сжатию пучка. Для гармонического плоского пучка, при условии преобладающего влияния нелинейности, в работе [5] получены дифракционные поправки к одномерному нелинейному решению. Из них следует, что дифракция приводит к несимметричной деформации волны относительно областей сжатия и разрежения, а именно, к увеличению амплитуды положительной части давления в волне и уменьшению амплитуды отрицательной. Аналитические решения уравнения (1) были получены методом возмущений и в другом крайнем случае, когда преобладает дифракция. Таким способом было проанализировано поведение второй гармоники в гармоническом пучке [6,7], а также волны разностной частоты при взаимодействии волн с близкими частотами [8,9]. Последний случай наиболее важен, поскольку такой процесс имеет место в параметрических излучателях звука.

Однако в мощных излучающих и фокусирующих системах нелинейные и дифракционные эффекты зачастую одинаково существенны. Такие случаи наиболее сложны для анализа и, вместе с тем, наиболее физически интересны. Путем машинного счета было проанализировано поведение звуковых пучков при различном соотношении между дифракцией и нелинейностью для различных начальных распределений амплитуды по сечению пучка [10-12]. Была рассчитана форма волны в различных областях и найдены области существования ударных:

воли. На рис.1 показана рассчитанная на ЭВМ форма волны [10] на оси плоского пучка на расстоянии порядка размера зоны Фраунгофера при различных амплитудах волны.

Р и с. 1. Рассчитанная на ЭВМ [10] форма волны на оси пучка, создаваемого плоским излучателем на расстоянии порядка размера зоны Фраунгофера. Кривая 1 при $N_0 \approx 6$, кривая 2 при $N_0 \approx 2$



С помощью машинных методов анализировалось и поведение сходящихся акустических пучков конечной амплитуды [11]. Здесь также происходят несимметричные искажения волны, ее форма близка к изображенной на рис.1. При этом интенсивность достигает максимума ближе к излучателю, чем пиковое значение давления. Из расчетов следует, что нелинейность может приводить к возрастанию амплитуды и интенсивности поля на оси пучка по сравнению с линейным случаем, причем это возрастание тем больше, чем больше нелинейные искажения.

Однако даже машинные алгоритмы решения уравнения Хохлова-Заболотской весьма сложны. Проведенные расчеты относятся к ограниченному числу случаев. В частности, не рассчитывалось поле в дальней зоне плоских излучателей, что не дает возможности построить их диаграммы направленности; не рассмотрены сходящиеся пучки, создаваемые концентраторами с большими коэффициентами усиления, которые широко используются на практике, и т.д. Поэтому представляет существенный интерес развитие приближенных аналитических методов, которые позволили бы относительно легко рассчитывать характеристики реальных акустических систем. Такому методу, основанному на раздельном учете на различ-

ных этапах процесса нелинейных и дифракционных эффектов, и некоторым примерам его использования посвящена настоящая работа.

Поэтапный подход при описании нелинейных и дифракционных искажений

Сначала мы рассмотрим критерии, по которым можно судить, о том, какой эффект преобладает на данном этапе — дифракция или нелинейность, запишем общие соотношения, определяющие поле на каждом из этапов, и найдем условия применимости поэтапного подхода. Ясно, что этот подход применим в тех случаях, когда в задаче удастся выделить области, где преобладает либо дифракция, либо нелинейность, и показать, что в переходной области, где они одного порядка, влияние дифракции и нелинейности незначительно. Для определения критериев, характеризующих относительное влияние дифракции и нелинейности, будем сравнивать влияние этих факторов на небольшом расстоянии $d z$ от данного сечения пучка, где форма волны и поперечное распределение поля меняются незначительно. Считаем известной зависимость поля $v_0(t, r)$ от времени и поперечной координаты r (для простоты рассматриваем аксиально-симметричный пучок) в некотором сечении пучка z_0 , и ищем решение в плоскости $z_0 + dz$ методом возмущений

$$v(z_0 + dz, r, t) = v_0(z_0, r, t - dz/c) + w_n + w_D, \quad (2)$$

где $w_{n,D}$ — малые поправки, обусловленные влиянием нелинейности и дифракции соответственно. Для нахождения поправок можно использовать общее неоднородное уравнение нелинейной акустики [13], но мы будем исходить из более простого уравнения (1). Нетрудно видеть, что в правой части этого уравнения первый член ответствен за дифракционные эффекты, а второй за нелинейные. Подставляя в (1) соотношение (2), получим выражения для добавок

$$w_n = \frac{\epsilon}{2c} \frac{dv_n^2}{dt} dz,$$

$$w_D = \frac{c dz}{2} \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau \frac{\partial v_a}{\partial \tau} \right) d\tau. \quad (3)$$

Отношением этих добавок и можно характеризовать сравнительную роль дифракционных и нелинейных эффектов. Однако это отношение зависит от поперечной координаты и времени, что создает неудобства при анализе, особенно для несинусоидальных волн. Мы используем более грубый критерий, а именно, будем сравнивать не сами добавки, а значения их модулей, усредненных по периоду и площади сечения пучка. Для наглядности и удобства определим для каждого χ характерные масштабы дифракции и нелинейности L_D и L_N следующим образом:

$$L_{N,D} = \langle |v_a| \rangle dz / 2 \langle |w_{v,D}| \rangle. \quad (4)$$

Здесь усреднение проводится как по времени, так и по поперечному сечению пучка. При этом масштаб нелинейности L_N характеризует расстояние, на котором среднее значение от нелинейной добавки к линейному решению без учёта дифракции достигает примерно половины среднего решения без учёта дифракции и нелинейности. Аналогичный смысл имеет и характерный масштаб дифракции L_D .

Локальным отношением масштабов $N = L_N / L_D$ мы и будем характеризовать относительную роль указанных эффектов.

Для гауссова пучка, у которого

$$v(z=0) = M \exp(-r^2/a^2) \sin \omega t, \quad (5)$$

имеем $L_N = \lambda / \pi \epsilon M$, где λ — длина волны, $L_D \approx 2a^2 / \lambda$ и параметр N определяется выражением

$$N(z=0) = \frac{1}{2\pi \epsilon M} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2, \quad (6)$$

которое отличается от полученного в [6] (параметр Хохлова) лишь численным множителем π . Существенно, однако, что здесь рассматривается изменение параметра N с расстоянием.

При равномерном распределении поля по сечению пучка $L_n = \lambda/2\pi\epsilon M$, что соответствует расстоянию образования разрыва в плоской волне. Однако в этом случае масштаб L_D , определяемый согласно (4), становится бесконечно малым из-за сильной дифракции вблизи краев. В этом случае мы примем за L_D расстояние, на котором отношение средней дифракционной поправки к решению без учёта дифракции составляет 50%. Для гармонической волны это расстояние примерно равно ρ^2/λ . Таким образом, для пучка радиусом ρ с равномерным распределением амплитуды по сечению величина N определяется также соотношением (6).

При поэтапном подходе в зависимости от значения параметра выделяются область преобладания нелинейности ($N \ll \ll 1$) и область преобладания дифракции ($N \gg 1$), а также промежуточная область сшивки, где N меняется от больших до малых значений, или, наоборот, без существенных нелинейных или дифракционных искажений (за счёт, например, сходимости или расходимости волнового пучка, наличия экрана и т.д.). Поэтапный подход применим, если характерный размер этой области меньше как дифракционного, так и нелинейного масштабов.

Перейдем к описанию поля на каждом из этапов.

На нелинейном этапе, где дифракция незначительна ($N \ll \ll 1$), нелинейные искажения играют основную роль, и для описания волны можно воспользоваться уравнением Хохлова-Заболотской с равным нулю дифракционным членом (приближение нелинейной геометрической акустики). Для плоских, сферических или цилиндрических волн в этом приближении получается уравнение простой волны [1,2]

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad (7)$$

где $\theta = \omega t$, $V = p R^n / p_0 R_0^n$, R - радиус кривизны волнового фронта, p_0 - начальная амплитуда давления волны при $R = R_0$ ($z = 0$ для плоских волн),

$$\sigma = \begin{cases} \epsilon\omega Mz/c, & n=0 & \text{для плоских} \\ 2\sigma_0 |1 - \sqrt{R/R_0}|, & n=1/2 & \text{цилиндрических} \\ \sigma_0 |\ln(R/R_0)|, & n=1 & \text{сферических волн} \end{cases} \quad (8)$$

$$\sigma_0 = \epsilon\omega M R_0 / c, \quad M = \dot{Q}_0 / \rho c^2.$$

Решение уравнения (7) записывается в неявном виде

$$V = f(\theta + \sigma V), \quad (9)$$

где f - произвольная функция, определяемая формой волны при $R=R_0$. Если в волне образуются разрывы, то уравнение (7) должно быть дополнено граничными условиями на разрыве.

В том случае, если на границе нелинейной области имеется синусоидальная волна, т.е. $f(\theta) = \sin \theta$ разрывы образуются при $\sigma = 1$, а при $\sigma \gg 1$ волна становится практически пилообразной.

Поле на дифракционном этапе ($N \gg 1$) будем описывать с помощью нестационарного интеграла Кирхгофа [14,15], который удобен при описании дифракции несинусоидальных волн с узким угловым спектром (что всегда выполняется в рамках применимости выражения (1)). Этот интеграл представляет собой обобщение принципа Гюйгенса: если известно поле в определенном сечении пучка S , то поле вне этого сечения представляется в виде суперпозиции сферических волн, излучаемых каждым элементом сечения dS . Если известно поле на некоторой поверхности S , перпендикулярной волновому фронту, то поле на больших расстояниях ($r \gg \lambda$) и под малыми углами определяется соотношением

$$p = \frac{1}{2\pi c} \int_S \frac{1}{r} \frac{d}{dt} p_s(t - \frac{r}{c}) dS, \quad (10)$$

где r - расстояние от точки наблюдения до элемента поверхности dS , p_s - акустическое давление на поверхности S .

При поэтапном способе описание эволюции звуковых пучков проводится следующим образом. Определяется параметр N вблизи излучателя, и если $N \ll 1$, то первый этап является нелинейным, а при $N \gg 1$ дифракционным. В соответствии с этим для описания поля используются либо соотношения (8), (9), либо дифракционный интеграл (10). Из полученного решения находится зависимость $N(x)$ от расстояния; область, где N становится порядка единицы, считаем границей первого этапа и началом второго. Сшивка решений производится в этой области; так, при переходе от дифракционного этапа к нелинейному форма волны на границе определяет произвольную функцию в выражении (9), а при переходе от нелинейного этапа к дифракционному поле на границе R_s определяет значение подынтегрального выражения в (10). Условием применимости поэтапного метода является малость переходной области по сравнению с характерными масштабами дифракции и нелинейности в ней.

Рассмотрим теперь ряд задач, к которым применим поэтапный подход.

Интенсивные звуковые пучки, создаваемые плоскими излучателями

Первой задачей, в которой был использован поэтапный подход, был пример плоского гармонического излучателя, параметры которого удовлетворяют соотношению [16-18]

$$N_0 = \frac{2}{\pi \epsilon M} \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \gg 1, \quad (11)$$

где d - характерный диаметр излучателя. При этом вплоть до дальней зоны нелинейностью можно пренебречь, и происходит формирование линейной диаграммы направленности. В дальней зоне падает амплитуда волны и происходит уширение пучка, так что параметр N меняется с расстоянием по закону

$$N \approx d^2 N_0 / \pi \lambda R \quad (12)$$

Отсюда видно, что расстояние R_s , являющееся границей

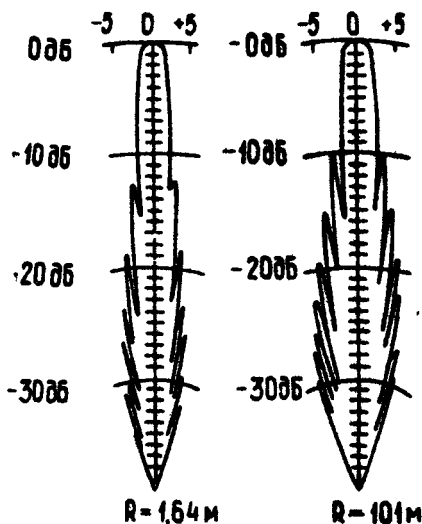
дифракционного этапа, определяется соотношением

$$R_s = N_0 d^2 / \pi \lambda. \quad (13)$$

При $R > R_s$ поле описывается с помощью соотношений (8), (9). Здесь нелинейное затухание, обусловленное разрывами, наиболее сильно сказывается в тех направлениях, где поле максимально, что приводит к уширению с расстоянием углового распределения поля [16-18]. Такое уширение наблюдали Блэксток с сотрудниками [18] при экспериментах с мощным гидроакустическим излучателем диаметром 7,6 см, работающем на частоте 450 кГц. На рис.2 приведены диаграммы направленности этого излучателя измеренные на различных расстояниях.

До тех пор, пока не скажется нелинейное затухание, параметр N меняется с расстоянием согласно выражению (12), из которого можно получить размер переходной области, где N меняется от больших значений до малых. Эта область простирается от $R_s \gamma$ до R_s / γ , где γ - малый параметр. При выборе γ из условия $N_0^{-1} < \gamma \ll 1$ переходная область лежит в зоне Фраунгофера и дифракционные искажения в ней несущественны. Не трудно также видеть, что характерный размер переходной области меньше характерной длины нелинейности. Таким образом, условия применимости поэтапного подхода здесь выполнены.

Более сложны задачи, в которых дифрагирует не синусоидальная, а нелинейно искаженная волна. Типовую задачу



Р и с. 2. Диаграммы направленности мощного излучателя на различных расстояниях

такого рода можно поставить следующим образом.

На расстоянии l от экрана с отверстием характерного размера $d \gg \lambda$ находится плоский гармонический излучатель диаметра D ($D \gg \sqrt{\lambda l}$), создающий интенсивную волну, причём волна, приходящая на отверстие, успевает исказиться ($N \ll 1$). Задачи такого типа о дифракции на отверстиях нелинейно искаженной волны возникают при расчёте мощных "апертурных" антенн (рупорных, рефлекторных, линзовых), поле на раскрыве которых существенно искажено из-за нелинейности. В частности, для рупорной антенны длиной l параметр искажений определяется соотношением

$$\sigma = \frac{2\pi\epsilon M}{\lambda} \int_0^l \sqrt{S_0/S(z)} dz, \quad (14)$$

где $S(z)$ — зависимость площади сечения рупора от координаты. Для такой антенны при малых углах раскрыва можно считать, что на раскрыве дифрагирует плоская нелинейно искаженная волна.

При условии, что параметр N на отверстии велик, сразу за отверстием начинается дифракционный этап, и поле описывается соотношением (10).

Рассмотрим сначала случай, когда волна на отверстии не содержит разрывов, т.е. $\sigma < 1$. Характерный временной масштаб такой волны равен $(1-\sigma)\omega^{-1}$ и, следовательно, волновая зона начинается с расстояний $R_\varphi \approx d^2/\lambda(1-\sigma)$. В этой зоне под углами, близкими к нормали, как следует из (10), поле пропорционально производной от поля на отверстии, т.е.

$$p = \frac{S}{2\pi c R} \frac{d}{dt} p_s\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (15)$$

форма такой волны показана на рис.3. Пиковые значения положительной и отрицательной частей такой волны соответственно равны

$$P_+ = P_{i,n}/(1-\sigma), \quad P_- = P_{i,n}/(1+\sigma), \quad (16)$$

где $\mathcal{P}_{l_{in}} = S\mathcal{P}_s/R\lambda$ — амплитуда волны на оси при дифракции синусоидальной волны с амплитудой \mathcal{P}_s .

Волна такой формы наблюдалась в экспериментах с мощными рупорными излучателями в воздухе [19]. Следует отметить, что наша теория дает хорошее количественное совпадение с экспериментом. Так, уровни давления, измеренного при экспериментах [19], отличаются от рассчитанного по формулам (16) не более чем на 1 дБ. Нетрудно рассчитать интенсивность такой волны

$$I = \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} - 1 \right) I_{lin}, \quad (17)$$

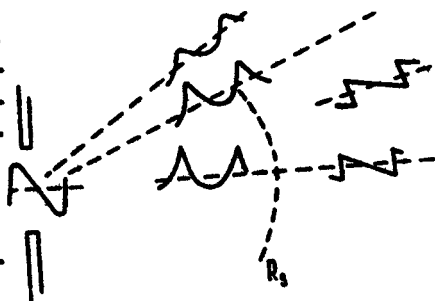
где $I_{lin} = \mathcal{P}_{l_{in}}^2 / 2\rho c$ — средняя интенсивность на оси при дифракции неискаженной волны.

Из соотношений (16), (17) видно, что нелинейные искажения, предшествующие дифракции, приводят на дифракционном этапе к росту интенсивности и амплитуды поля на оси по сравнению с линейным случаем. Этот рост обусловлен более сильной концентрацией и меньшей угловой расходимостью высших гармоник, имеющих в спектре нелинейно искаженной волны.

Из интеграла (10), можно также найти форму волны, излучаемой в различных направлениях [20] (рис.3), и построить угловое распределение пикового давления и интенсивности в дальней зоне [20, 21] (рис. 4).

Для определения границы дифракционного участка оценим изменение параметра N с расстоянием. Подставляя в (6) характерную ширину пучка на основной частоте $d \approx \lambda R/d$ и среднюю амплитуду поля на оси согласно (16), получим, что при $R > R_\phi$

$$N = d^2(1-\sigma^2)N_0/\pi\lambda R, \quad (18)$$



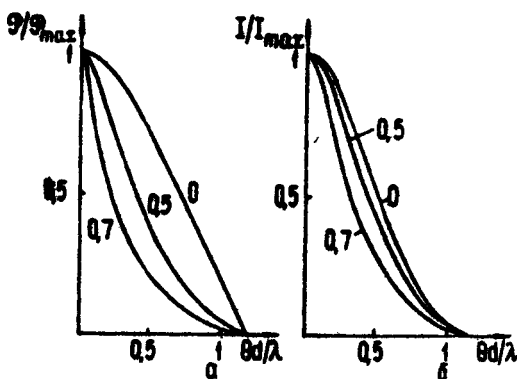
Р и с. 3. Схема дифракции нелинейно искаженной волны на отверстии в плоском экране

откуда следует, что граница дифракционного этапа определяется выражением

$$R_s = \frac{d^2}{\pi \lambda} (1 - \sigma^2) N_0. \quad (19)$$

Видно, что при $\sigma = 0$ это выражение переходит в (13). При выводе (18) мы предполагали, что $R_s > R_\phi$. Отсюда получаем условия применимости рассматриваемого при σ приближения

$$N_0(1 - \sigma^2)/2 \gg 1. \quad (20)$$



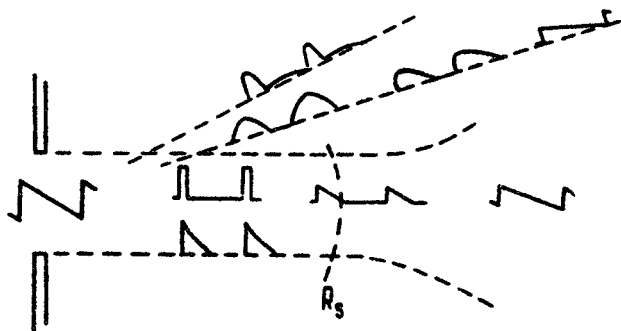
Р и с. 4. Угловые распределения пикового давления и интенсивности. Цифры у кривых - значения σ

При $R > R_s$ начинается нелинейный этап; здесь нелинейные искажения происходят вдоль сферически расходящихся лучевых трубок и описываются соотношениями (8), (9). На этом этапе профиль волны искажается, она становится пилообразной (рис.3). На больших расстояниях нелинейное затухание снова приводит к уширению диаграммы направленности.

Здесь, как и в предыдущем случае, можно оценить размер переходной области и показать, что при выполнении условия (20) этот размер мал по сравнению с характерными масштабами дифракции и нелинейности в этой области.

При значениях σ , близких к единице, волновая зона отодвигается от излучателя, условие (20) перестает выполняться, так что нелинейными искажениями вплоть до волновой зоны пренебречь уже нельзя. Однако и здесь на некотором расстоянии от отверстия преобладает дифракция и поле можно рассчитывать линейным образом. Мы рассмотрим случай $\sigma \gg 1$, когда дифрагирует уже пилообразная волна.

Если на отверстии $N_0 \gg 1$, то сразу за отверстием преобладает дифракция, и форма волны может быть рассчитана с помощью (10). Поле на этом этапе представляет собой последовательность положительных импульсов, находящихся на отрицательном пьедестале [21]. Их длительность $\tau = (R_1 - R_2)/c$, где R_1 и R_2 — расстояния до точек отверстия, наиболее удаленной и наиболее близкой к точке наблюдения. В "пржекторном" цилиндре, опирающемся на отверстие, импульсы имеют плоский разрывный фронт постоянной амплитуды, равной перепаду давления на отверстии (рис.5).



Р и с. 5. Схема дифракции пилообразной волны на отверстии

Длительность импульсов уменьшается с расстоянием как R^{-1} . В данном случае в линейном приближении волновой зоны не существует, поскольку фронт волны в прожекторном цилиндре остается плоским, а ее амплитуда постоянной. Вне указанного цилиндра формируются импульсы гладкой формы, которая определяется формой отверстия

[21,22]. Амплитуда этих импульсов изменяется обратно пропорционально расстоянию.

Для нахождения границы дифракционного этапа найдем закон изменения параметра N с расстоянием. Для этого в соотношение (6) подставим амплитуду волны M_0 , а вместо $\lambda/2$ - характерную длину импульса на оси ($\delta = d^2/8R$). Тогда получим

$$N(R) = R_s/R, \quad (21)$$

где

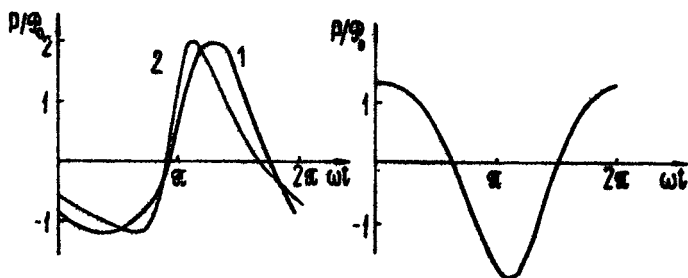
$$R_s = d^2 \sqrt{N_0} / \lambda = d/2 \sqrt{2\pi \epsilon M_0}$$

Границей этапа является $R = R_s$. Однако нетрудно видеть, что в переходной области, где N меняется от больших значений до единицы, дифракция заметно изменяет форму волны. Можно показать, что и нелинейность существенно сказывается в этой области. Таким образом, строго говоря, перейти поэтапным методом к нелинейному этапу нельзя, поскольку в переходной области существенны дифракционные и нелинейные эффекты. Переход к нелинейному этапу здесь можно сделать лишь исходя из довольно грубых оценок, основанных на рассмотрении искривления волнового фронта, обусловленного различными скоростями движения фронта волны [21]. Поскольку фронт волны в центре движется быстрее, чем на краю, то в результате такой нелинейной "саморефракции" волна из плоской превращается в сферически расходящуюся. Оценки показывают, что характерное расстояние, на котором волна становится сферической, соответствует расстоянию R_s , определяемому согласно (21) [21]. На больших расстояниях ($R \gg R_s$) преобладают нелинейные эффекты, здесь образуются разрывы и импульсы приобретают треугольную форму. Амплитуды импульсов, распространяющихся в различных направлениях, выравниваются с расстоянием, и происходит изотропизация излучения, подобно тому, как это обсуждалось в начале раздела.

Выше мы рассматривали задачи о дифракции нелинейно-искаженных волн, т.е. случаи, когда волна сначала успевает исказиться, а потом дифрагирует. Для мощных плоских излучателей, в свободном пространстве, у которых параметр N порядка единицы, волна искажается и дифрагирует од-

новременен, так что поэтапный подход здесь "в чистом виде" не применим. Однако применение поэтапного метода к этому случаю все же дает решение, хорошо согласующееся с экспериментом и результатами машинного счёта. Для описания поля разобьём весь процесс на три этапа. На первом этапе вблизи излучателя волна близка к плоской и нелинейные искажения описываются соотношениями (8), (9). Границей этого этапа будем считать расстояние $R_0/4$. На следующем, дифракционном этапе рассматриваем линейную дифракцию плоской нелинейно искаженной волны, как уже делалось выше.

На рис. 6 приведена рассчитанная по приближенной теории и экспериментально наблюдаемая [24] форма волны от квадратного излучателя шириной 40 см, с рабочей частотой 150 кГц и амплитудой давления у излучателя 2 атм. Видно, что приближенный расчёт хорошо определяет амплитуду волны и особенности ее формы (в частности, асимметрию относительно нулевого уровня). Некоторое отличие связано с пренебрежением на дифракционном этапе нелинейными искажениями.



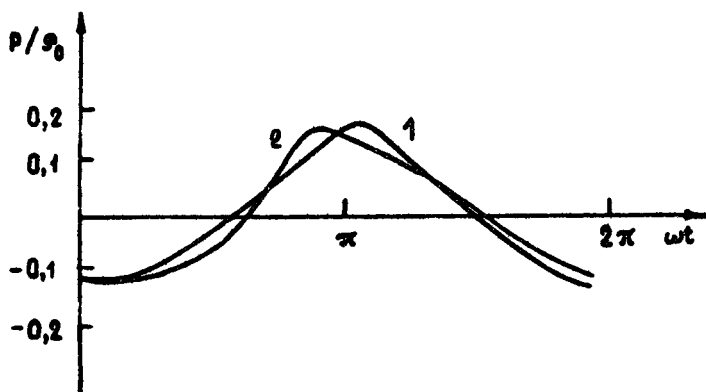
Р и с. 6. Теоретически рассчитанная (1) и экспериментально наблюдаемая (2) формы волны от квадратного излучателя

Р и с. 7. Форма волны от квадратного излучателя после отражения от акустически мягкой стенки. Теоретическая и экспериментальная кривые практически совпадают

Интересно отметить, что если эти искажения скомпенсированы, например, при отражении от акустически мягкой стенки,

то экспериментально наблюдаемая форма волны [25] практически полностью совпадает с полученной нами теоретически (рис.7).

В работе [10] рассчитывалось на ЭВМ поле круглого излучателя с параболическим распределением по амплитуде. Сравнение приближенного и численного расчетов приведено на рис.8. Видно, что приближенный расчет и здесь хорошо определяет амплитуду волны.



Р и с. 8. Рассчитанный на ЭВМ (1) и по приближенной теории (2) профиль волны на оси круглого излучателя с параболическим распределением амплитуды

Фокусировка акустических пучков конечной амплитуды

При распространении сходящихся акустических пучков сходимостью способствует более быстрому, чем в плоском или расходящемся пучке, накоплению нелинейных эффектов, приводящих к искажению формы волны. Рост амплитуды за счёт сходимости ограничивается дифракцией, которая также приводит к изменению формы несинусоидальной волны. Описание фокусировки интенсивных акустических волн представляет значительный практический интерес в связи с необхо-

димостью учёта нелинейных эффектов в высокочастотных акустических концентраторах, широко используемых в ультразвуковой технологии и медицине [26-28]. Обычно структура поля таких концентраторов рассчитывается с помощью линейной дифракционной теории [26,27]. Однако многочисленные экспериментальные данные показывают, что нелинейные эффекты существенно меняют структуру поля в фокальной области и сказываются на коэффициентах усиления фокусирующих систем.

Имеющиеся численные расчёты уравнения Хохлова-Заболотской относились лишь к фокусирующим системам с малыми коэффициентами усиления [11]. Вместе с тем здесь также оказывается эффективным приближенный поэтапный подход [29,30].

Рассмотрим сходящийся акустический пучок, создаваемый сферическим излучателем с частотой ω , углом раскрытия α_m и фокусным расстоянием F (считаем, что $\alpha_m < 30^\circ$). Для того чтобы вблизи излучателя преобладали нелинейные искажения, должно выполняться условие

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon M_0} \left(\frac{\lambda}{\alpha_m F} \right)^2 \ll 1 \quad (22)$$

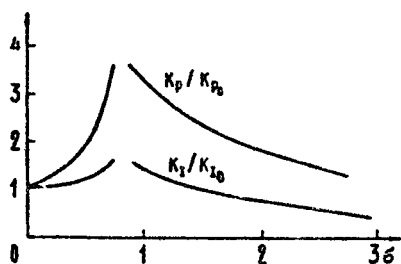
На расстояниях от фокуса $R > R_0$ ($R_0 = 2\lambda/\alpha_m^2$ - расстояние вдоль оси до первого нуля давления) дифракция мало сказывается, и в предположении о малости затухания нетрудно получить закон изменения параметра N с расстоянием: $N = N_0 F/R$. Отсюда следует, что расстояние R_s на котором дифракционные эффекты сравняются с нелинейными, равно $F N_0$. Из условия $R_s > R_0$ получим

$$\sigma_0 = 2\pi\epsilon M F / \lambda < 0,5 \quad (23)$$

Поле на нелинейном этапе при $R < R_s$ описывается соотношениями (8),(9), а на дифракционном этапе при $R > R_s$ интегралом (10). В этом интеграле площадью S является сегмент, вырезаемый пучком на сфере радиуса R_s .

При $\sigma = \sigma_0$ $\ln(F/R_s) < 1$ ударная волна не образуется. В этом случае нелинейные искажения приводят к росту интенсивности и амплитуды поля в фокусе по сравнению с линейным случаем (см.рис.9). Этот рост описывается соот-

ношениями (16), (17), где $\mathcal{F}_{lin}, I_{lin}$ - амплитуда и интенсивность поля в фокусе без учёта нелинейности. Причиной такого возрастания является более сильная фокусировка высших гармоник, образовавшихся из-за нелинейности в спектре волны. Аналогично тому, как при дифракции нелинейно искажённых волн происходило сужение углового распределения амплитуды и интенсивности поля, здесь происходит сужение распределения амплитуды и интенсивности поля в фокусе, т.е. уменьшается размер фокальной области.



Р и с. 9. Зависимость коэффициентов усиления фокусирующей системы от параметра искажений (K_p, K_{I0} - коэффициенты усиления в линейной среде)

Как видно из соотношений (16), (17), при $\sigma \rightarrow 1$ давление и амплитуда в точке фокуса стремятся к бесконечности. Этот рост ограничен нелинейными искажениями в фокальной области; при σ , близких к единице, приближение, основанное на преобладании дифракции над нелинейностью вблизи фокуса, уже не применимо.

Из полученного дифракционного решения можно найти параметр N в фокальной области: $N(R=0) = (1 - \sigma^2) / \sigma_0$. Видно, что при $\sigma > \sigma_k = \sqrt{1 - \sigma_0^2}$ вблизи фокуса снова преобладает нелинейность и, следовательно, соотношения (16), (17) уже не применимы. Для этого случая можно сделать грубые оценки поля в фокусе, основанные на рассмотрении скоростей движения разрывов и нелинейной саморефракции [29]. Эти эффекты приводят к ограничению роста поля в фокусе и смещению точки с максимальной амплитудой колебаний по направлению к излучателю.

При $\sigma \gg 1$ разрывы образуются на участке, где волна является сферически сходящейся ($R > R_g$). Нелинейное затухание в этом случае приводит к падению коэффициентов усиления фокусирующей системы (рис.9). Этот эффект был

рассмотрен еще в 1959 г. [31].

Поэтапный подход позволяет также описать поле в фокальной области цилиндрически сходящихся акустических пучков конечной амплитуды [30].

Изменения характеристик фокусирующих систем, вызванные нелинейными эффектами, неоднократно наблюдались в экспериментах. Так, в работах [32,33] отмечалось возрастание поля в фокусе по сравнению с линейным случаем, в [33, 34] сужение фокальной области, в [33] смещение точки с максимальной амплитудой колебаний по направлению к излучателю. В таблице приведены рассчитанные по соотношениям (16,17) характеристики ряда практически используемых концентраторов. Видно, что нелинейные эффекты могут сильно увеличивать коэффициенты усиления.

Т а б л и ц а

Назначение	$f, \text{МГц}$	$F, \text{см}$	α_m	мощность, Вт	K_p/K_{p0}	K_I/K_{I0}
Ультразвуковая технология	0,5	31,4	68°	3000	2,9	1,5
Создание аэрозолей	2,5	7	60°	100	1,8	1,15
Воздействие на ткани мозга	5	8	23°	3,5	1,75	1,15
" - "	2,7	3,8	23°	16	1,25	1,03
Лечение болезней глаза	7	13	8°	2	4,5	1,6

Поэтапный метод может быть использован и в других не одномерных нелинейных задачах. В частности, с его помощью была рассмотрена трансформация волны конечной амплитуды на каустике в неоднородном океане [35].

Из проведенного рассмотрения видно, что задачи дифракции нелинейно искаженной волны и фокусировки сходящихся акустических пучков при больших коэффициентах усиления хорошо описываются в рамках поэтапного метода. В ряде

задач, возникающих при рассмотрении полей мощных плоских излучателей, фокусирующих систем с малыми коэффициентами усиления, поэтапный метод в чистом виде не применим. Однако при введении некоторых дополнительных предположений он и здесь может давать хорошее согласие с экспериментом. Поэтапный метод может быть использован и при описании предельных режимов параметрических излучателей звука. В настоящее время созданы настолько мощные излучатели [36], что в их первичных пучках существенны нелинейные эффекты, и нелинейное затухание ограничивает их интенсивность. Уже сейчас ясно [37], что оптимальные режимы работы таких излучателей лежат в области, где одинаково существенны нелинейные и дифракционные эффекты, и которая, следовательно, менее всего поддается точному анализу.

Автор благодарен Л.А.Островскому за ценные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику М., Наука, 1966.
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики М., Наука, 1975.
3. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акуст. журн., 1969, 15, №1, с.40-47.
4. Заболотская Е.А., Хохлов В.В. - Акуст. журн., 1970, 16, №1, с.49-53.
5. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. - ДАН СССР, 1975, 225, №5, с.1053-1066.

6. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. - Акуст. журн., 1973, 19, №6, с.871-876.
7. Куницын В.Е., Руденко О.В. - Акуст. журн., 1978, 24, № 4, с.459-555.
8. Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И. - Акуст. журн., 1974, 21, №1, с.591-597.
9. Новиков Б.К., Рыбачек М.С., Тимошенко В.И. - Акуст. журн., 1977, 23, №4, с.621-626.
10. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акуст. журн., 1976, 22, №4, с.487-491.
11. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. - Акуст. журн., 1978, 24, №1, с.21-28.
12. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. - Акуст. журн., 1979, 25, №6, с.810-814.
13. Кузнецов В.П. - Акуст. журн., 1970, 16, №4, с.548-553.
14. Скучик Е. Основы акустики. Т.2. М., Мир, 1976.
15. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. М., ИЛ, 1958.
16. Островский Л.А., Фридман В.Е. - Акуст. журн., 1972, 18, №4, с.584-589.
17. Lockwood J.G., Muir T.G., Blackstock D.T. - J.Acoust.Soc.Amer.,1973,53,N4,p.1148-1153.
18. Shooter J.A., Muir T.G., Blackstock D.T. - J.Acoust.Soc.Amer.,1974,55,N 1,p.54-62.
19. Theobald M.A., Webster D.A., Blackstock D.T. - Abstr.7th Int.symp.nonlinear acoust. Blacksburg,USA,1976,p.218-221.
20. Ostrovsky L.A., Sutin A.M. - Abstr. 7th Int. symp. nonlinear acoust., Blacksburg,USA,1976, p.222-225.

21. Островский Л.А., Сутин А.М. - Акуст. журн., 1976, 22, №1, с.93-100.
22. Харпевич А.А. Неустановившиеся волновые явления. М.-Л., Гостехтеориздат, 1950.
23. Островский Л.А., Сутин А.М. - Акуст. журн., 1977, 23, №1, с.174-176.
24. Browning D.G., Mellen R.H. - J.Acoust.Soc. Amer., 1968,44, N2, p.644-646.
25. Browning D.G., Mellen R.H. - J.Acoust.Soc. Amer., 1968,44,N2,p.646-647.
26. Каневский И.Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн. М., Наука, 1977.
27. Розенберг Л.Д. Фокусирующие излучатели ультразвука. - В кн. Источники мощного ультразвука. Под ред. Л.Д.Розенберга. М., Наука, 1967, с.207-244.
28. Гаврилов Л.Р. - Акуст. журн., 1972, 17, №3, с.337-345.
29. Островский Л.А., Сутин А.М. - ДАН СССР, 1975, 221, №6, с.1300-1303.
30. Сутин А.М. - Акуст. журн., 1978, 24, №4, с.593-601.
31. Наугольных К.А., Романенко Е.В. - Акуст. журн., 1959, 5, №2, с.191-195.
32. Борисов Ю.Я., Гынкина И.М. - Акуст. журн., 1973, 19, №4, с.616-618.
33. Smith C.W., Beyer R.T., - J.Acoust.Soc.Amer., 1969,46,N3,p.806-813.
34. Зарешкий А.А. - Акуст. журн., 1968, 14, №3, с.471-472.
35. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е. - Акуст. журн., 1976, 22, №6, с.914-921.

36. Willette J.G., Moffett M.B., Konrad W.L.
- J.Acoust.Soc.Amer.,1977,62,N6,p.1377-1381.
37. Наугольных К А., Островский Л.А., Сутин А.М.
- В наст. сборнике, с.9.

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА ВЗРЫВНЫХ ВОЛН

В.Е.Фридман

1. Введение

Широкое применение акустических волн, генерируемых при детонации подводных взрывных источников, вызвано большим пиковым значением давления (что позволяет использовать их при сверхдальней передаче по звуковому каналу) и широкополосностью (что позволяет вести параллельную обработку большого числа спектральных каналов). Кроме того взрывные источники автономны, имеют небольшую массу и их использование не связано с ограничениями по глубине.

Многообразно акустическое использование взрывных волн. Сюда относятся весьма точные измерения рельефа морского дна, исследование гидрологии и изучение свойств звукопроницающих слоев, морская геология и сейсмология [1 - 5]. Взрывные источники применяются при исследовании землетрясений и действующих подводных вулканов [6,7]. Они находят применение в подводной связи, для спасения летчиков, потерпевших катастрофу, при управлении объектами и сопровождении аппаратуры, устанавливаемой на дне, для определения местоположения судна и в гидролокации [8-14]. Широкое применение нашли акустические волны и в технологии, где используется их высокая интенсивность [15,16].

Качественно картина подводного взрыва имеет следующий характер. После инициирования ударная волна детонации, распространяясь по взрывчатому веществу, достигает его границ и частично переходит в окружающую воду. Вслед

за ударной волной генерируются более слабые волны давления, связанные с пульсациями газового пузыря, образованного продуктами детонации [8-10, 17]*). Большая мощность и малая длительность обуславливают проявление нелинейных эффектов при распространении взрывных волн. Поэтому для расчета их параметров необходимо применение методов нелинейной акустики. Однако до настоящего времени формулы нелинейной акустики в конкретных расчетах используются редко. Как правило, для расчета параметров акустических сигналов от подводных источников применяются эмпирические формулы [8,18]. Вызвано это, в первую очередь, тем, что эмпирические формулы учитывают связь параметров взрывных волн непосредственно с весом заряда [8,9]. Однако физические механизмы, лежащие в основе эмпирических формул, и область применимости самих формул остаются не вполне ясными.

Поэтому главной задачей нелинейной акустики взрывных волн является получение близких к эмпирическим теоретических соотношений, учитывающих непосредственно вес заряда и позволяющих проводить расчеты с той же простотой, что и эмпирические формулы. Отметим, что применимость эмпирических формул ограничивается однородным океаном; применимость формул нелинейной акустики оказывается значительно шире, поскольку позволяет проводить расчеты параметров нелинейных акустических сигналов в неоднородных средах, в которых может создаваться сложная лучевая структура поля [19-28]. Для однородной среды теоретические и эмпирические формулы должны давать близкие значения параметров взрывных волн. Для некоторых параметров — амплитуда, энергия — это выполняется [29-33]. Другие параметры — длительность, импульс — теоретические и эмпирические соотношения описывают по разному [33]. Причина такого отличия заключается в том, что теория учитывает лишь некоторые механизмы, ответственные за трансформацию гидроакустического сигнала; эмпирические законы, естественно, учитывают все механизмы. В данной работе, в частности, показано, что дополнительный учет релаксационных эффектов,

*) Качественно аналогичная картина имеет место и для акустических сигналов, вызванных электронскровым разрядом или оптическим возбуждением.

определяемых наличием солей в морской воде, объясняет эмпирические зависимости для длительности взрывной волны.

Другой важной задачей является определение области применимости нелинейных соотношений для взрывных волн. Знание дистанции, на которой проявляются нелинейные эффекты, позволит упростить процедуру расчетов; для области вблизи источника можно применять формулы нелинейной акустики, а далее — формулы линейной теории, для которых форма нелинейно искаженного сигнала на найденном расстоянии является новым граничным условием. Для определения области применимости формул нелинейной акустики выдвигались различные критерии [33-36]. Наиболее последовательный подход основан на том, что сферически расходящаяся ударная волна в среде с потерями не остается стационарной волной, т.е. волной, профиль которой формируется действием нелинейных и диссипативных эффектов. Уменьшение амплитуды приводит к тому, что стационарная ударная волна перестает существовать; волна становится линейной, а ширина ее фронта (все же достаточно узкая) определяется только диссипативными эффектами. На основе такого подхода выводится выражение для расстояния, на котором проявляются нелинейные эффекты.

Прежде чем приступить к последовательному изложению нелинейной акустики взрывных волн, убедимся в том, что при распространении акустических волн от взрывного источника, наряду с диссипацией и геометрической расходимостью фронта сферической волны, проявляются нелинейные эффекты. Тем самым убедимся в том, что эмпирические формулы описывают влияние всех отмеченных механизмов. Для этого сравним эмпирические формулы с линейными соотношениями, которые нетрудно получить, интегрируя Фурье-спектр экспоненциальной волны

$$p = p_0 \exp(-t/\theta), \quad (1.1)$$

(профиль которой достаточно хорошо описывает головную ударную волну взрывного сигнала), с учетом эмпирического коэффициента затухания в реальном океане [37]

$$\alpha \approx 0,036 f^{1/2} \quad (1.2)$$

Здесь p — давление, p_0, θ — пиковое значение давления и

постоянная времени взрывной волны, α — коэффициент затухания (дБ/км), f — частота (кГц). Использование коэффициента затухания (1.2) позволяет проследить за трансформацией взрывной волны. С увеличением расстояния затухание приводит к размыванию фронта экспоненциальной волны, уменьшению ее амплитуды и росту длительности. Сравним результаты расчетов с эмпирическими формулами для пиковой величины давления P_s , постоянной времени θ , энергии E_s и импульса I_s взрывной волны [8-10,15,37,38]

$$\begin{aligned}
 P_s &\sim (Q^{4/3}/r)^{1,13}, \quad \theta \sim \theta^{4/3} (Q^{4/3}/r)^{-0,22}, \\
 I_s &\sim Q^{4/3} (Q^{4/3}/r)^{0,9}, \quad E_s \sim Q^{4/3} (Q^{4/3}/r)^{2,1}.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Численные коэффициенты в (1.3) определяются усреднением большого количества экспериментальных данных; их значения по данным разных авторов приведены в [2,39]. Пренебрежение нелинейностью приводит к совершенно другим, отличным от (1.3) законам изменения параметров. Так, амплитуда линейной волны сладеет существенно быстрее, а длительность медленнее нарастает (рис.1), чем соответствующие характеристики реального взрывного сигнала. Таким образом, эмпирические законы учитывают наряду с диссипативными и нелинейные механизмы.

Рассмотрим теперь, как можно учесть перечисленные механизмы в рамках нелинейной акустики. Вообще говоря, известные сейчас методы позволяют рассматривать совместное действие нелинейности, диссипации, релаксации, дифракций и неоднородности [20,22,24-28,40,41]. Однако для объяснения особенностей распространения взрывных волн в океане можно воспользоваться упрощенной моделью и рассмотреть распространение сферической ударной волны в однородной, диссипативной и релаксирующей среде. В этом случае исходное уравнение описывает изменение профиля волны давления (или скорости частиц) из-за совместного действия указанных факторов [40]

*) Этот результат получен совместно с Ю.В.Петуховым.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \beta_1 v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \beta_2 e^z \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \beta_3 e^z \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial v}{\partial \tau'} \exp[-(\tau - \tau')/\alpha] d\tau'. \quad (1.4)$$

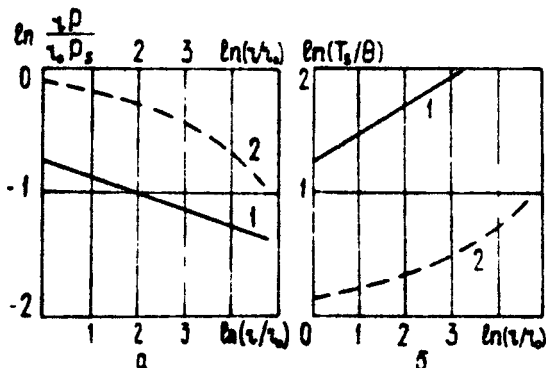
Здесь введены следующие обозначения:

$$v = u \tau / u_m \tau_0 = \rho \tau / \rho_m \tau_0, \quad z = \ln(\tau / \tau_0), \quad \tau = (t - \tau_0) / T_m,$$

$$\beta_1 = \epsilon \tau_0 u_m / c_0^2 T_m, \quad \beta_2 = \nu \tau_0 / 2 c_0^3 T_m^2 \rho_0, \quad \beta_3 = m \tau_0 / 2 c_0 T_m, \quad (1.5)$$

$$\tau_0 = \rho_0 c_0^3 T_m / \epsilon \rho_m = c_0^2 T_m / \epsilon u_m$$

В выражениях (1.5) u — скорость частиц в волне, ρ — давление, τ — расстояние, t — время, u_m , ρ_m и T_m — амплитуды скорости, давления и характерная длительность начального возмущения, заданного в точке τ_0 вблизи источника звука, ν — коэффициент вязкости, m — коэффициент релаксации, α — время релаксации, $f_* = (\alpha T_m)^{-1}$ — частота релаксации, ρ_0 — плотность среды, ϵ — параметр нелинейности



Р и с. 1. Изменение значения давления (а) и постоянной времени (б) взрывной волны с расстоянием. Как видно из графиков, эмпирические законы (кривая 1) резко отличаются от расчетов по линейной теории, учитывающей реальную зависимость коэффициента затухания от частоты (кривая 2)

Уравнение (1.4) описывает трансформацию интенсивного акустического сигнала. Из-за замены переменных сферическая расходимость волны проявляется в уравнении экспоненциальным нарастанием коэффициентов при втором и третьем слагаемых в правой части (1.4). Потери в среде определяются молекулярной вязкостью и релаксационным процессом диссоциации и восстановления молекул соли под действием давления акустической волны. Интеграл, входящий в (1.4), кроме потерь, описывает дисперсию, связанную с наличием выделенного масштаба — времени релаксации. Коэффициент при нелинейном слагаемом в уравнении (1.4) определяется энергией взрывного источника. Приведем характерные примеры [30]. Взрывная волна от заряда ТНТ весом несколько грамм описывается уравнением (1.4) с $\beta_1 \approx 1$, $\beta_2 \approx \beta_3 \approx 10^{-5} + 10^{-6}$, $\rho \approx 0,1 + 1$.

Не всегда имеет смысл использовать уравнение (1.4)

Для описания изменения амплитуды и энергии взрывной волны можно это уравнение упростить и кроме нелинейности учесть только диссипацию в узком слое скачка давления. Для определения области проявления нелинейных эффектов необходимо более общий учет диссипации. Полное уравнение (1.4) необходимо для точного вычисления временных характеристик взрывной волны. Такой анализ и проводится ниже.

2. Проявление нелинейности при распространении сферической ударной волны

Теоретические соотношения для взрывных волн

Как уже отмечалось, простейшее и наглядное решение можно получить, отбрасывая в уравнении (1.4) диссипативное и релаксационное слагаемые ($\beta_2 = \beta_3 = 0$). Однако при этом диссипация энергии полностью не исключается, поскольку вводятся граничные условия, которые учитывают затухание ударной волны. В такой постановке (1.4) (в котором координата x предопределена как $\beta_1 z$) является хорошо известным уравнением Римана

$$\frac{dv}{dz} = v \frac{dv}{d\tau} \quad (2.1)$$

Граничное условие для этого уравнения зададим на сфере r_0 вокруг взрывного источника *)

$$v(0, \tau) = \begin{cases} \epsilon \Gamma \rho(-\tau), & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение уравнения Римана, удовлетворяющее граничному условию (2.2), дает форму профиля взрывной волны

$$v(z, \tau) = \epsilon \Gamma \rho[-\tau + z v(z, \tau)] \quad (2.3)$$

Решение (2.3) в виде простой волны необходимо дополнить выражениями для амплитуды разрыва и постоянной времени. Эти выражения нетрудно получить, учитывая, что точки профиля, связывающие разрыв, принадлежат простой волне (2.3), а сам разрыв движется со скоростью, отличной от скорости звука. При этом разрыв перемещается по профилю; его амплитуда и положение меняются. Приведем конечное выражение для амплитуды разрыва взрывной экспоненциальной волны [27,28]

$$v_s = 2 \left(1 + \sqrt{1 + 2z}\right)^{-1} \quad (2.4)$$

Как нетрудно убедиться из выражений (2.3) и (2.4), первоначально экспоненциальный сигнал при распространении превращается в импульс, по форме близкий к треугольному, амплитуда которого спадает как $z^{-1/2}$ (рис. 2). Для получения расчетной формулы для постоянной времени (т.е. длительности сигнала по уровню ϵ^{-1}) необходимо вновь учесть, что скорость фронта взрывной волны отличается от скорости звука ($d\tau/d\hat{t} = c_2 + \epsilon c_1 / 2$), а также то обстоятельство, что точка профиля, в которой $c = \epsilon^{-1} c_1$, сдвигается из-за нелинейной трансформации. Постоянную времени удобно вычислить как сумму двух интервалов τ_1 и τ_2 (см. рис. 2). Первый интервал τ_1 легко найти из приведенной формулы для скорости фронта. В наших обозначениях выражение для скорости разрыва имеет вид

*) Выбор координаты r_0 обсуждается в работах [29,33],

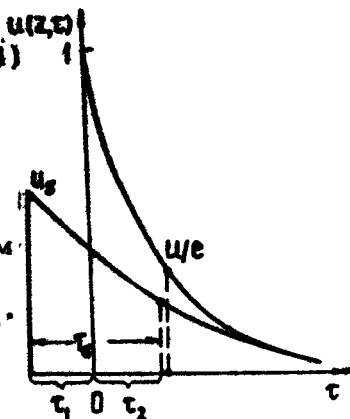
$$d\tau/dz = v_s/2 \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.5) выражение (2.4) для амплитуды U_s , получим

$$\tau_1 = (1+2z)^{1/2} + \ln 2 [1 + (1+2z)^{1/2}]^{-1} - 1. \quad (2.6)$$

Используя теперь (2.3), определим τ_2 как интервал от $\tau = 0$ до момента τ_2 , в который $U = e^{-1} U_s$. В результате получим

$$\begin{aligned} \tau_2 = & 1 - \ln 2 [1 + \\ & + (1+2z)^{1/2}]^{-1} - 2ze^{-1} \cdot \\ & \cdot [1 + (1+2z)^{1/2}]^{-1}. \quad (2.7) \end{aligned}$$



Р и с. 2. Трансформация экспоненциальной волны

Складывая оба интервала, получаем выражение для постоянной времени

$$\tau_s = e^{-1} [1 + (e-1)(1+2z)^{1/2}]. \quad (2.8)$$

Запишем также выражение для энергии E , полученное с помощью интегрирования римановской волны вдоль характеристики [27, 42]

$$E_s = 4 [3 + 4z + 3(1+2z)^{1/2}] / 3 [1 + (1+2z)^{1/2}]^3. \quad (2.9)$$

Здесь $E_s = 2E\tau^2/\tau_0^2 \rho_0 u_m^2 T_m$ - безразмерная энергия, нормированная на сферическую расходимость. Из выражения (2.3) следует, что импульс взрывной волны (т.е. площадь под

*) Отметим, что кроме постоянной времени можно определить и другие временные интервалы (см., например, [31]).

кривой $v(t)$ должен сохраняться. Поэтому для безразмерного импульса I_s , связанного с импульсом I соотношением $I_s = I \tau / I_0 \beta_1 u = \tau_s$, имеем

$$I_s(\tau) = 1 \quad (2.10)$$

Выражения (2.3), (2.4), (2.8) - (2.10) описывают полностью распространение взрывной волны первоначально экспоненциальной формы. При выводе этих соотношений пренебрегалось затуханием и релаксацией. Учитывались лишь потери на ударном фронте*.

Сравнение эмпирических и аналитических законов

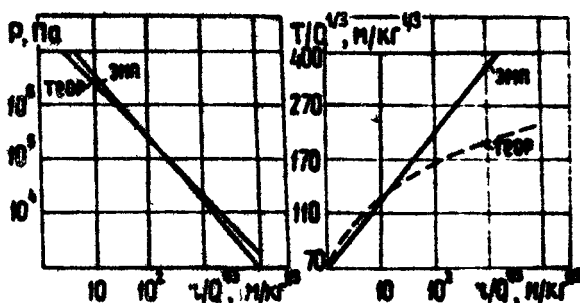
Сравним полученные аналитические соотношения с эмпирическими для пикового значения поля и постоянной времени. Введем безразмерную координату $Z = \tau / \tau_0$. Тогда координата Z будет иметь вид $Z = Z_0 \ln Z$, где $Z_0 = \tau_0 / \tau_s$. В принятых обозначениях аналитические и эмпирические формулы имеют вид

$$\begin{aligned} v_s^1 &= 2 \left[1 + (1 + 2Z_0 \ln Z)^{1/2} \right]^{-1}, & v_s^2 &= Z^{-0.19}, \\ \tau_s^1 &= e^{-1} \left[1 + (e-1)(1 + 2Z_0 \ln Z)^{1/2} \right], & \tau_s^2 &= Z^{0.22}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Потребуем теперь, чтобы на определенном интервале расстояний величина $|v_s^1(Z) - v_s^2(Z)| / v_s^1(Z)$ не превышала 10%. Тогда из (2.11) получаем значение $Z_0 \approx 1$, при котором теоретические и эмпирические законы для максимума давления взрывной волны близки (рис.3) [30,33]. При этом также достигается хорошее совпадение эмпирических и теоретических законов изменения энергии взрывной волны. Однако при $Z_0 \approx 1$ теоретическое соотношение дает более медленный рост постоянной времени (рис.4). Имеется также отличие в теоретическом и эмпирическом законах изменения им-

* Как стало известно автору, ранее некоторые аналитические соотношения для взрывных волн были получены Д.Т.Блякстоком, но опубликованы не были (частное сообщение).

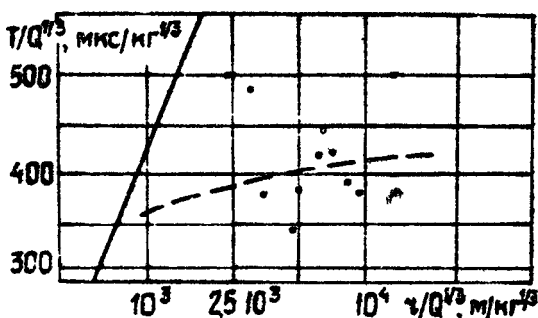
пульса. Механизм этого явления пока еще не вполне ясен. Однако вероятно, что для получения точных теоретических законов изменения постоянной времени необходимо выйти за рамки экспоненциального приближения формы сигнала и учесть последующие осцилляции, обусловленные пульсациями газового пузыря. Это должно повлиять на значения постоянной времени (см. разд. 4). В то же время соотношение для энергии является достаточно точным, поскольку большая часть начальной энергии содержится в головной ударной волне.



Р и с. 3. Сравнение теоретического и эмпирического законов изменения пикового значения давления во взрывной волне

Р и с. 4. Сравнение теоретического и эмпирического законов изменения постоянной времени экспоненциальной взрывной волны при значении $Z_0 = 1$

Следует отметить, что надежность эмпирического соотношения для постоянной времени невелика. Это видно из большого разброса значений показателя степени для различных расстояний и при зарядах разного веса [30,33], а также из ряда экспериментов. Например, значения постоянной времени вершинных сигналов при больших глубинах детонации [45] много меньше величин, рассчитанных по эмпирической формуле, но достаточно хорошо соответствуют теоретической (рис.5).



Р и с. 5. Сравнение теоретического и эмпирического законов с экспериментальными значениями длительности взрывной волны (отмечены точками), вызванной глубоководной детонацией

Теперь несложно связать параметры взрывной волны с весом заряда. Поскольку $\tau_0 = \tau_0 / \tau_0 \approx 1$, то из выражений (1.5) можно определить эффективный размер заряда τ_0 через амплитуду и длительность взрывного сигнала $\tau_0 \approx \tau_0 = \rho_0 c_0^3 T_m / \epsilon \rho_m$. Используя на расстоянии τ_0 эмпирические законы, нетрудно получить связь τ_0 с весом заряда Q . Теперь все формулы нелинейной акустики связаны с весом заряда. Кроме того, нетрудно учесть при расчетах глубину детонации взрывного источника (подробнее см. [33]).

Спектры взрывных волн

Экспериментальные данные показывают, что на частотах ниже 10 кГц затухание токовых сигналов (малой интенсивности) меньше затухания соответствующих частотных компонент взрывной волны [46]. Вероятно, это объясняется действием нелинейных эффектов, что впервые отмечалось в [47]. Однако проделанные в [47] расчеты показали, что нелинейность приводит к уменьшению затухания на частотах ниже 10 кГц. Этот вывод, очевидно, противоречит как экспериментальным данным, так и теоретическому представлению об увеличении затухания низкочастотных компонент за счет нелинейной "перекачки" энергии от низких частот в высокие (см. [38]). И все же существуют экспериментальные результаты [48], качественно подтверждающие вывод работы [47]. Эксперимент, описанный в [48], показал, что интенсивность низкочастотных компонент ниже 400 Гц медленно увеличи-

вается с расстоянием^{*}). Таким образом, вопрос о влиянии нелинейности на затухание гидроакустических сигналов достаточно запутан, поэтому необходимо использовать нелинейную теорию, которая позволит объяснить все имеющиеся экспериментальные данные.

Рассмотрим вначале исходные предположения, при которых вычислялась трансформация спектра в [47]: а) сферическая взрывная волна имеет экспоненциальную форму; б) при распространении форма волны остается неизменной; в) изменяются только пиковое давление P_0 и постоянная времени θ ; г) изменение этих величин описывается эмпирическими законами (1.3). При этих предположениях вычисление частотной зависимости спектра сигнала $B(f)$ не представляет трудности

$$B(f) = P_0 \theta / 2\pi (1 + 2\pi i f \theta) \quad (2.12)$$

Используя эмпирические законы для P_0 и θ , можно получить из выражения (2.12), что амплитуда НЧ компонент спектра взрывной волны уменьшается медленнее, чем в сферически расходящейся линейной волне. Из этого факта был сделан вывод о том, что в импульсных сигналах нелинейные эффекты приводят к перекачке энергии вниз по спектру! Одна из причин расхождения между результатами, полученными из выражения (2.12), и экспериментальными данными очевидна. Дело в том, что предположение о неизменной экспоненциальной форме взрывной волны неверно. Нелинейные эффекты приводят к искажению формы волны, вплоть до образования на больших расстояниях импульса треугольного профиля. Для последовательного учета влияния нелинейных эффектов на трансформацию спектра взрывной волны можно использовать решение (2.3) и получить спектр сигнала

$$B(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{T_1}^{\infty} \exp[-\tau + z v(z, \tau)] \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (2.13)$$

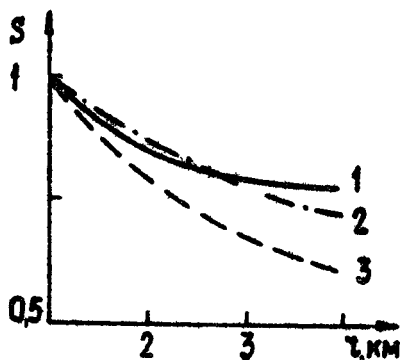
Интегрирование в уравнении (2.13) проводится, начиная с момента T_1 - прихода фронта волны, определяемого формулой (2.6). В выражении (2.13) можно перейти к интегриро-

*) Отметим, что сами авторы работы [48] объясняют этот результат погрешностью аппаратуры.

Ванню по координате $\xi = \tau + zV(z, \tau)$ [49]

$$b(\omega, z) = \int_{\xi_0}^{\bar{\xi}} \exp[-(i\omega + 1)\xi + i\omega z e^{-\xi}](1 + z e^{-\xi}) d\xi. \quad (2.14)$$

Здесь $\xi_0 = \xi(v_0) = -\ln v_0$, v_0 - пиковое значение давления на разрыве (см. (2.4)). Для анализа спектра проводилось численное интегрирование выражения (2.14). Результаты интегрирования сравнивались с экспериментальными значениями интенсивности спектральной компоненты частотой 3 кГц в волне от взрывного источника ТНТ весом 0,5 кг [48]. Нетрудно убедиться в хорошем согласии теоретических и экспериментальных данных (рис. 6). Выполненные расчеты и сравнение с экспериментальными данными показывают, что аномальное затухание спектральных составляющих с частотой несколько кГц вызвано нелинейными эффектами.



Р и с. 6. Изменение амплитуды спектральной компоненты 3 кГц вдоль трассы. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) кривые достаточно близки и резко отличаются от вычислений [47] (кривая 3)

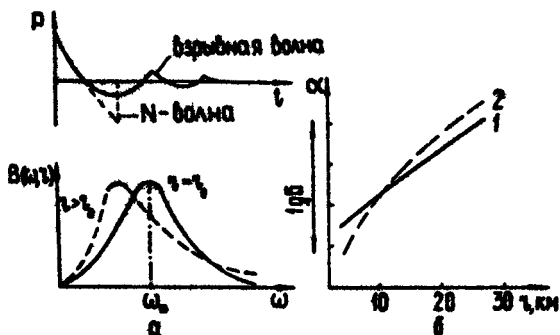
Для изучения участка спектра ниже 1 кГц необходимо выйти за рамки экспоненциального приближения и учесть, что полный импульс взрывной волны равен нулю, поскольку за головной ударной волной следуют пульсации давления, обусловленные колебаниями газовой полости, образованной продуктами детонации. Поэтому спектральная интенсивность реального взрывного сигнала нарастает с увеличением частоты (рис. 7); максимум интенсивности спектра приходится на частоты от сотен Гц до нескольких кГц для зарядов разного веса. Наиболее простой моделью описания спектра частотного интервала ниже 1 кГц может служить сигнал форме N - волны (подробнее см. [49]).

$$v = \begin{cases} -t/T(1+z), & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (2.15)$$

Величина T выбиралась из близости N -волны и реального сигнала. Такая модель взрывного сигнала может удовлетворительно описывать только низкочастотные составляющие спектра. Используя выражение (2.15), нетрудно получить спектр N -волны, где $\sigma(z) = \omega T(1+z)^{1/2}$,

$$\hat{b}(\omega, z) = \frac{2\pi}{\sigma^2} (\sin \sigma - \sigma \cos \sigma). \quad (2.16)$$

Для сравнения выражения (2.16) с экспериментальными данными [48] была рассчитана величина $\alpha = 20 \lg \hat{b}$ для спектральной компоненты частотой 300 Гц (рис.7).



Р и с. 7. а - осциллограмма взрывной волны и ее спектр. Для качественного сравнения взрывную волну можно аппроксимировать N -волной, у которой максимум спектральной интенсивности также приходится на некоторую частоту ω_0 . Очевидно, что при распространении сигнала значение этой частоты уменьшается из-за нелинейного растяжения импульса; б - нарастание амплитуды спектральной компоненты частоты 300 Гц. Эксперимент (кривая 1) хорошо объясняется нелинейной акустикой (кривая 2)

Нетрудно убедиться, что даже грубая модель N -волны дает примерно такое же нарастание интенсивности с расстоянием, как это имело место в эксперименте.

Из общих соображений можно сделать следующее заключение. Поскольку спектр реального взрывного сигнала имеет максимум при $\omega \neq 0$, то нелинейная перекачка энергии идет от него вниз и вверх по спектру. При этом наибольшее затухание проявляется в области максимума спектральной интенсивности.

3. Влияние диссипации на параметры сферической ударной волны

Трансформация профиля взрывной волны

Более строгие решения можно получить, учитывая диссипативное слагаемое в уравнении (1.4)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \beta_1 u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta_2 e^z \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (3.1)$$

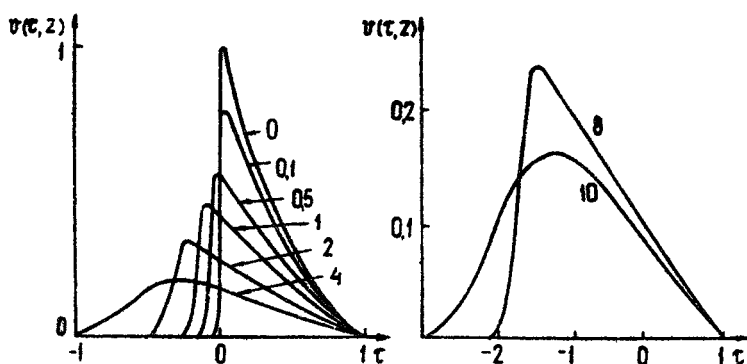
При численном решении уравнения (3.1) откажемся от экспоненциального приближения. Вместо этого граничное условие при $\tau = \tau_0$ (т.е. при $z = 0$) запишем в форме, которая достаточно точно описывает головную ударную волну и волну разгрузки от взрывного источника *)

$$u(0, \tau) = (1 - \tau) e^{-\tau}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) описывает совместное действие нелинейности, вязкости и сферической расходимости волны. Конкуренция вязкости и нелинейности приводит к формированию стационарной ударной волны. Однако в сферической волне (в отличие от плоской) стационарная ударная волна, начиная с некоторого расстояния, перестает существовать [36,

*) Возможен более полный учет пульсаций газового пузыря с помощью теории Кирквуда - Бете [8]. При этом также требуется применение численных методов.

30]. На рис.8 приведено численное решение, описывающее процесс трансформации головной части взрывной волны в стационарную ударную волну и затем в линейную акустическую волну. Уменьшение вязкости увеличивает область существования стационарной ударной волны, поскольку слабое размывание разрыва (вызываемое вязкостью) может достаточно долго сдерживаться нелинейностью (несмотря на ее уменьшение из-за сферической расходимости сигнала). При увеличении параметра нелинейности β_1 процесс размывания фронта идет медленнее и фронт остается ударным на больших расстояниях. Пропорциональное изменение параметра нелинейности и коэффициента вязкости мало меняет характер движения взрывной волны. На больших расстояниях ударная волна переходит в волну с почти симметричным профилем (рис.9).



Р и с. 8 Трансформация ударной волны при совместном действии вязкости и нелинейности: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 10^{-3}$, $\beta_3 = 0$

Р и с. 9. Профиль волны на разных расстояниях при значении коэффициента вязкости $\beta_2 = 10^{-5}$. Параметр нелинейности $\beta_1 = 1$

*) Цифры около кривых на графиках указывают величину безразмерной координаты z .

Условия существования стационарной ударной волны

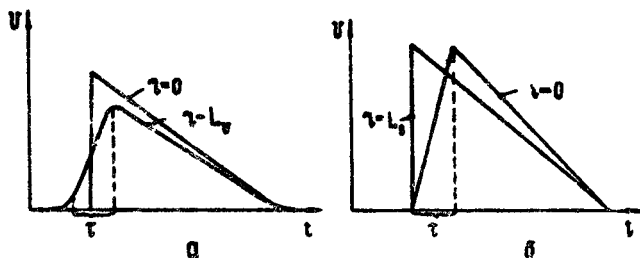
Уравнение (1.4) описывает распространение мощного гидроакустического сигнала в среде с квадратичной зависимостью коэффициента затухания от частоты. В реальном океане отличия от квадратичной зависимости весьма велики (см. (1.2)). Поэтому рассмотрим произвольный степенной закон изменения коэффициента затухания α от частоты f

$$\alpha = \alpha_0 f^{\nu} \quad (3.3)$$

Численный коэффициент α_0 , входящий в выражение (3.3), имеет размерность $\text{с}^{\nu}/\text{м}$. Укажем некоторые характерные значения этого коэффициента. Для высокочастотной области спектра, где имеют место потери, обусловленные молекулярной вязкостью ($\nu = 2$), $\alpha_2 \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{с}^2/\text{км}$ [51]. Эмпирический коэффициент затухания в низкочастотной области спектра [37] имеет показатель $\nu = 3/2$ и значение $\alpha_{3/2} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{с}^{3/2}/\text{км}$. При распространении ударной волны в среде с коэффициентом вязкости (3.3) длительность ее фронта меняется из-за совместного действия нелинейности и диссипации. Оценим вначале изменение длительности фронта τ_f слабой волны, которая определяется только диссипативными эффектами. В этом случае из (3.3) не трудно получить

$$\tau_f \approx (\alpha_0 \nu)^{1/\nu} \quad (3.4)$$

Определим теперь изменение с расстоянием длительности фронта τ_s стационарной ударной волны. Для этого введем два характерных масштаба: характерную длину диссипации L_f , на которой первоначально разрывный фронт расширяется только из-за диссипации до значения τ , и характерную длину нелинейности L_s , на которой нелинейные эффекты приводят к формированию разрыва в волне с первоначальной шириной τ (рис.10). Длину диссипации L_f легко определить из выражения (3.4): $L_f \approx \tau^{\nu} / \alpha_0$. Длина нелинейности равна, очевидно, характерному масштабу τ_s (1.5): $L_s \approx \tau_s \tau / \varepsilon M$ (рис.10). Поскольку длительность фронта стационарной ударной волны формируется совместным действием нелинейности и диссипации, то величины характерных



Р и с. 10. Трансформация профиля линейной и нелинейной волн. В линейном разрывном импульсе при распространении в диссипативной среде длительность фронта увеличивается с расстоянием (а). В нелинейном импульсе длительность фронта при распространении уменьшается (б)

масштабов должны быть одинаковы. Приравнивая L_T и L_s , получим выражение для длительности фронта стационарной ударной волны

$$\tau_s \approx (c_0 \alpha_n / \varepsilon M)^{1/(1-n)} \quad (3.5)$$

Если диссипативные эффекты обусловлены молекулярной вязкостью ($n = 2$), зависимость длительности τ_s от амплитуды переходит в известную $\tau_s \sim M^{-1}$, которую несложно получить, анализируя уравнение Бюргерса (3.1). При произвольной зависимости коэффициента затухания α от частоты из выражения (3.5) следует, что при $n < 1$ существование расходящейся стационарной ударной волны невозможно^{*}). Для сравнения длительностей τ_T и τ_s необходимо представить τ_s как функцию координаты. Такое выражение можно получить, если учесть изменение с расстоянием амплитуды ударной волны. Асимптотическую зависимость $M(\tau)$ для волны с произвольной геометрией фронта можно представить в степенном виде (подробнее см. [50]).

^{*}) Более строго отсутствие стационарной ударной волны в среде с $n < 1$ показано в [52, 53].

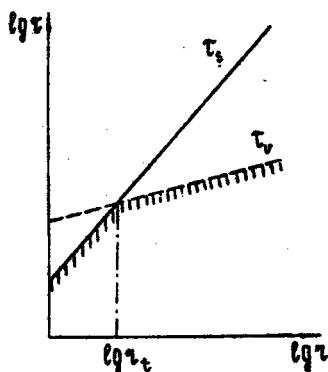
$$M = A \tau^{-k} \quad (3.6)$$

Используя (3.6), получим зависимость длительности фронта стационарной ударной волны τ_s от расстояния

$$\tau_s \approx (c_0 \alpha_n / \varepsilon A)^{1/(1-n)} \tau^{k(n-1)} \quad (3.7)$$

Из выражения (3.7) видно, что возможно существование сходящихся ($k < 0$) стационарных ударных волн при $n < 1$.

Сравним теперь изменение длительности фронта линейной волны τ_l с изменением длительности фронта стационарной ударной волны τ_s . Если первоначально импульс был ударный с малой длительностью фронта, то ее увеличение при распространении определяется совместным действием нелинейных и диссипативных эффектов. Волна является ударной, пока длительность фронта τ_s остается меньше τ_l (рис. 11). После того, как длительности τ_s и τ_l становятся одинаковыми, вязкость не может обеспечить прежний темп нарастания длительности фронта стационарной ударной волны. Другими словами, из-за уменьшения амплитуды должна установиться такая длительность, которую не в состоянии обеспечить малые диссипативные эффекты.



Р и с. 11. Изменение длительности фронта интенсивной волны. На малых расстояниях волна является стационарной ударной с длительностью фронта τ_s . Начиная с расстояний r_t (где $\tau_s = \tau_l$) волна переходит в линейную. Изменение длительности фронта волны происходит по отмеченным штриховкой участкам τ_s и τ_l

Стационарная ударная волна перестает существовать, и изменение длительности фронта с расстоянием начинает определяться только диссипативными эффектами. Следовательно, до расстояния r_t , на котором $\tau_l \approx \tau_s$, длительность фронта увеличивается как $\tau_s(r)$, а после этого

расстояния длительность фронта увеличивается как $\tau_T(\nu)$ (рис.11). Сравнивая формулы (3.4) и (3.7), получим, что координата перехода r_t от стационарной ударной волны к линейной существует при

$$k > (n-1)/n. \quad (3.8)$$

Отметим, что при распространении сферической волны ($k \approx 1,13$) в океане ($n = 3/2$ или $n = 2$) условие (3.8) выполняется, т.е., начиная с расстояния r_t , стационарная ударная волна перестает существовать. Расстояние перехода стационарной ударной волны в линейную нетрудно определить из условия $\tau_T \approx \tau_S$. Приравняв выражения (3.4) и (3.7), получим

$$\begin{aligned} r_t &= (\epsilon A / c_0 \alpha_n^{1/n})^{1/\mu}, \\ \mu &= k - \frac{n-1}{n} > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Область действия нелинейных эффектов при распространении взрывных волн в океане

Рассмотрим переход ударной волны от взрывного источника в звуковую линейную волну. Для использования выражения (3.9) определим численное значение коэффициента A из эмпирической формулы для амплитуды взрывной волны

$$A = 9,2 \cdot 10^{-5} Q^{0,48}. \quad (3.10)$$

Подставляя теперь зависимость (3.10) в выражение (3.9) и используя средние для океана значения параметра нелинейности ($\epsilon \approx 4$) и скорости звука ($c \approx 1,5$ км/с), получим

$$r_t \approx (2,5 \cdot 10^{-5} \alpha_n^{-1/n})^{1/\mu} Q^{0,48/\mu} \text{ (км)}. \quad (3.11)$$

Интерес представляют две частотные зависимости коэффициента затухания (3.3): $n = 2$ и $n = 3/2$. Ясно, что при распространении в океане интенсивного акустического сигнала изменение длительности фронта (пока она мала) определяется нелинейными эффектами и высокочастотной диссипа-

шей, ($n = 2$). Когда длительность фронта распространяющейся интенсивной волны достаточно велика, диссипация на фронте определяется коэффициентом затухания с показателем $n = 3/2$. Для этих двух предельных случаев получим из выражения (3.11) координату перехода стационарной ударной волны в линейную

$$\gamma_t = \begin{cases} 27 Q^{0.6} \text{ (км)} & (n=2) \\ 11 Q^{0.47} \text{ (км)} & (n=3/2) \end{cases} \quad (3.12)$$

В выражениях (3.12) использованы приведенные ранее значения α_n . Коэффициент α_2 описывает затухание акустического сигнала в океане при нормальных условиях в частотном диапазоне выше 100 кГц (т.е. затухание на фронте акустического импульса с длительностью фронта менее 10 мкс). Коэффициент $\alpha_{3/2}$ описывает затухание звука в океане в частотном диапазоне 5–60 кГц (т.е. затухание импульсного сигнала с длительностью фронта более 20 мкс). Отметим, что зависимость (3.12) $\gamma_t \sim Q^{0.47}$ для сигналов с малой длительностью фронта ($n = 2$) была впервые получена в [36]. Графики зависимостей (3.12) представлены на рис. 12. При малом весе заряда длительность фронта невелика и координата перехода нелинейной волны в линейную дается верхней кривой рис. 12. С ростом веса заряда Q длительность фронта увеличивается, частотная зависимость коэффициента затухания меняется и координата γ_t уменьшается в сторону нижней кривой рис. 12. Для определения координаты $\gamma_t(Q)$ в широком диапазоне изменения веса заряда введем простую аппроксимацию коэффициента затухания, заключающуюся в применении используемых величин α_2 и $\alpha_{3/2}$ в разных частотных диапазонах

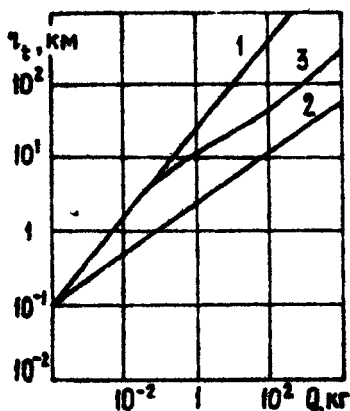
$$\alpha \text{ (дБ/км)} = \begin{cases} 1,47 \cdot 10^{-4} f^2 & (f > 10^2 \text{ кГц}) \\ 3,6 \cdot 10^{-2} f^{3/2} & (f < 10^2 \text{ кГц}) \end{cases} \quad (3.13)$$

Зависимость $\alpha(f)$ разрывна в точке $f = 10^2$ кГц, но можно показать, что сглаживание $\alpha(f)$ не вносит сколько-нибудь существенных отличий в результаты расчета (однако сильно его усложняет). Также можно показать, что получающаяся функция $\gamma_t(Q)$ практически не меняется при малом изменении

частоты вблизи значения 10^2 кгц. Приведем окончательное выражение для зависимости координаты r_t от веса заряда (рис.12)

$$r_t = \begin{cases} 27Q^{0.6} & (Q < 3 \cdot 10^{-2} \text{ кг}) \\ 10,8Q^{0.34} + 0,25Q^{0.55} & (Q > 3 \cdot 10^{-2} \text{ кг}) \end{cases} \quad (3.15)$$

Р и с. 12. Расстояние перехода ударной волны в линейную. Кривая 1 показывает расстояние r_t при квадратичной зависимости коэффициента затухания от частоты ($n = 2$). Кривая 2 - при показателе коэффициента затухания $n = 3/2$. В реальных условиях имеет место смена частотной зависимости коэффициента затухания при увеличении длительности фронта и соответствующее изменение $r_t(Q)$ (кривая 3)

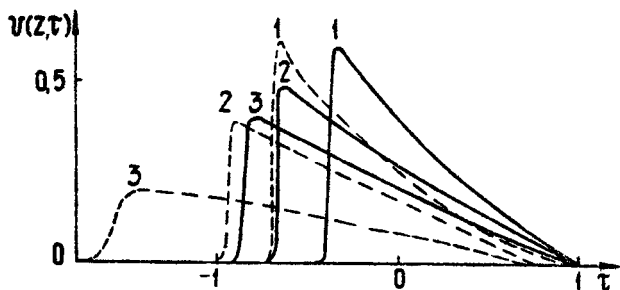


Полученное расстояние перехода стационарной ударной волны в волну линейную (см. подробнее [50]) позволяет теперь указать область применимости нелинейных решений (2.3), (2.4), (2.8), (2.9). Расчет параметров взрывных волн в океане необходимо проводить по этим формулам вплоть до расстояний $r = r_t(Q)$. Для каждого веса заряда на этом расстоянии можно определить амплитуду волны, ее длительность, форму и другие параметры. Затем, для больших расстояний можно использовать линейные методы расчета, для которых форма сигнала в точке r_t служит граничным условием.

4. Распространение сферической ударной волны в диссипативной релаксирующей среде

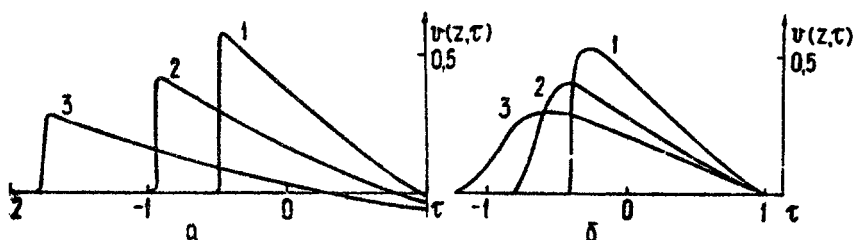
Трансформация профиля взрывной волны при совместном действии нелинейности, диссипации и релаксации

Рассмотрим результаты численного расчета полного уравнения (1.4) с граничным условием (3.2). Дисперсия, вызванная релаксационным процессом, приводит к искажению профиля взрывной волны. Низкочастотная дисперсия увеличивает скорость звука, поэтому импульс в сопровождающей системе координат сдвигается как целое (рис.13). Из сравнения графиков на этом рисунке видна роль релаксации при распространении акустического импульса. На малых расстояниях ($z=1$) релаксация приводит к сдвигу фронта волны из-за высокочастотной дисперсии. На большем расстоянии ($z=3$) из-за диссипации, обусловленной релаксационным интегралом, волна, оставаясь ударной, имеет меньшую амплитуду. Наличие релаксации привело к резкому затуханию поля и расширению фронта ударной волны. Отметим, что длительность импульса в релаксирующей среде существенно выше, чем в рассматриваемой вязкой среде



Р и с 13. Сравнение взрывного сигнала в вязкой среде (сплошные кривые) и в среде с вязкостью и релаксацией (пунктирные кривые). В обоих случаях параметр нелинейности $\beta_1 = 1$. Коэффициент вязкости $\beta_2 = 10^{-4}$, коэффициент релаксации $\beta_3 = 5 \cdot 10^{-2}$, время релаксации $Q = 1$

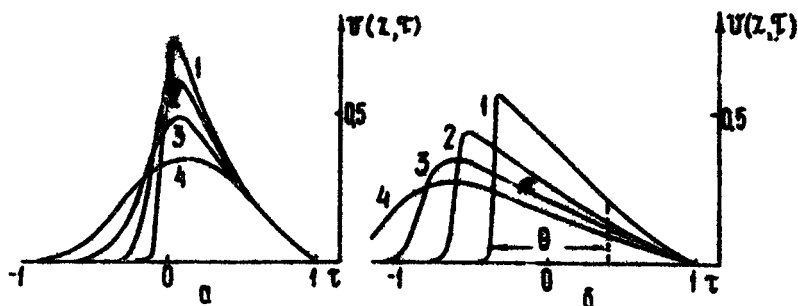
Рассмотрим теперь роль времени релаксации Ω при распространении мощной акустической волны в релаксирующей среде (рис.14). При большом времени релаксации ($\Omega=5$) основную роль играют низкочастотная дисперсия и нелинейность. При уменьшении времени релаксации дисперсия уменьшается, а диссипация возрастает. Это приводит к более сглаженной форме импульса, с меньшей амплитудой и меньшим сдвигом импульса в движущейся системе координат. Практически совсем отсутствует низкочастотная дисперсия при очень малом времени релаксации ($\Omega = 0,05$). Ширина фронта при малом времени релаксации становится больше, но амплитуда при этом уменьшается с расстоянием медленнее.



Р и с. 14 Форма импульса при разных временах релаксации: $\beta_1=1$, $\beta_2=10^{-4}$, $\beta_3=5 \cdot 10^{-2}$, $\Omega = 5$ (а), $\Omega = 0,05$ (б)

Многообразие форм акустических сигналов в релаксирующей среде определяется соотношением между временем релаксации и длительностью импульса. Если эти величины сравнимы, релаксационный эффект максимален; импульс сдвигается и резко меняет свою форму. При малых временах релаксации дисперсия проявляется лишь в узкой области вблизи разрыва.

Влияние нелинейности можно проследить, например, на трансформации сигнала при одинаковых коэффициентах вязкости и релаксации $\beta_2 = \beta_3 = 10^{-3}$ и одинаковом времени релаксации $\Omega = 0,1$ (рис.15). Слабая нелинейность ($\beta_1=0,1$, рис. 15,а) не препятствует расширению фронта и превращению ударной волны в импульс гауссова типа. Увеличение нелинейности до $\beta_1=1$ (рис. 15,б) приводит к нелинейному



Р и с. 15. Форма головной ударной волны при изменении параметра нелинейности:

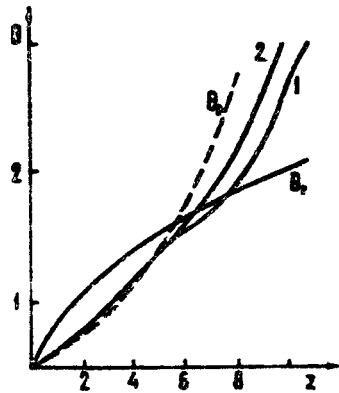
$$\beta_1 = 0,1 \text{ (а)}, \quad \beta_1 = 1 \text{ (б)}, \quad \beta_2 = \beta_3 = 10^{-3}, \\ \Omega = 0,01$$

удлинению импульса и сохранению ударного фронта вплоть до расстояния $z = 3$.

4. Изменение длительности взрывной волны в релаксирующей среде

Поскольку релаксация вносит дисперсию и меняет временные характеристики сигнала, то, вероятно, она ответственна за аномальное нарастание постоянной времени, которое отмечалось при сравнении эмпирических и теоретических законов. Для проверки этого предположения рассмотрим изменение длительности (по уровню θ^{-1}) взрывной волны, имеющей первоначальную форму (3.2) и следующие значения параметров: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 10^{-5}$, $\Omega = 1$ (кривая 1) и $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 10^{-5}$, $\beta_3 = 10^{-4}$, $\Omega = 0,2$ (кривая 2), характерные для подводного взрыва нескольких грамм ТНТ (рис. 16). Кривая изменения длительности имеет два характерных участка: вначале длительность нарастает в основном из-за нелинейности, затем включаются диссипативные и релаксационные эффекты. Сравним результаты расчетов с эмпирическим законом (1.3) в форме

$$\theta_3 \approx 0,47 \exp(0,22 z). \quad (4.1)$$



Р и с. 16. Изменение длительности ударной волны по уровню e^{-1}

Кроме того рассмотрим аналитическое соотношение (2.8), в котором сделаем соответствующую перенормировку:

$$\theta_T \approx 0,47 e^{-1} [1 + (e-1)(1 + 4,25 z)^{1/2}] \quad (4.2)$$

В соотношениях (4.1) и (4.2) учтено, что значение безразмерной постоянной времени в импульсе (3.2) при $z = 0$ составляет примерно 0,47. Из сравнения видно, что численные расчеты сигнала (3.2), имеющего нулевой импульс, дают значения длительности, достаточно близкие к средним экспериментальным данным.

Заклучение

Выделим основные результаты. Эмпирические соотношения описывают совместное действие диссипации, релаксации и нелинейности при распространении сферической взрывной волны в океане. Совместное действие отмеченных механизмов имеет место в ограниченной области; вне ее для расчета взрывных волн можно применять более простые линейные методы. Совпадение эмпирических и теоретических соотношений для однородного океана позволяет использовать теоретические формулы для расчета спектральных характеристик взрывного сигнала. Кроме того, полученные теоретические соотношения позволяют рассчитывать параметры

взрывных волн в реальном ограниченном неоднородном океане.

Л и т е р а т у р а

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973.
2. Лаврентьев Э.В., Кузян О.И. Взрывы в море. Л., Судостроение, 1977.
3. Lavergne M. - Geophysics, 1970, 35, N3, p.419-435.
4. Stickler D.C. - J.Acoust.Soc.Amer., 1977, 61, N3, p.707-710.
5. Levenson C., Dobbar R.A. - J.Acoust.Soc. Amer., 1976, 59, N5, p.1134-1141.
6. Bryan G.M., Truchan M., Ewing J.I. - J.Acoust.Soc.Amer., 1965, 35, N3, p.273-278.
7. Murty T.S., Polavarapu R.J. - Tsunami Res. Symp., 1974, Roy.Soc.N.Z., B.15, p.99-110.
8. Коул Р. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.
9. Weston D.E. - Proc.Phys.Soc., 1960, 76, N488, p.233.
10. Вестон Д. - В кн. Подводная акустика. М., Мир, 1965, с.63-80.
11. Урик Р.Дж. Основы гидроакустики. Л., Судостроение, 1978.
12. Spindel R.C., Heirtzler J.R. - J.Geophys.Res., 1972, 77, N35, p.7073-7078.
13. Orr M., Schoenberg M. - J.Acoust.Soc.Amer., 1976, 59, N5, p.1155-1159.
14. Mitchell S.K., Bedford N.R., Weinstein M.S. - J.Acoust.Soc.Amer., 1976, 60, N4, p.825-828.
15. Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводных взрывах. Л., Судостроение, 1967.
16. Chertock G. - J.Acoust.Soc.Amer., 1970, 48, N1(2), p.170.

17. Баум Ф.А., Станюкович К.П., Шехтер Б.И. Физика взрыва. М., Физматгиз, 1959.
18. Arons A.B. - J.Acoust.Soc.Amer., 1954, 26, N3, p.343-346.
19. Keller J.B. - J.Appl.Phys., 1954, 25, N8, p.938-948.
20. Губкин К.Е. - ПММ, 1958, 22, №4, с.561-564.
21. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.
22. Pelinovsky E.N., Soustova I.A., Fridman V.E. - Abstr.VIII Intern.Symp.Nonlinear Acoust. USA, Virginia, 1976, p.55-58.
23. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е. - Акуст. журн., 1979, 25, №1, с.103-107.
24. Островский Л.А. - ПММ, 1963, 27, №5, с.924-929.
25. Curlton T.W., Blackstock D.T. - J.Acoust. Soc.Amer., 1974, 56, Suppl. S42.
26. Фридман В.Е. - Акуст. журн. 1976, 22, №4, с.621-622.
27. Пелиновский Е.Н., Петухов Ю.В., Фридман В.Е. - Изв. АН СССР. Сер. Физ. атмос. и океана, 1979, 15, №4, с.436-444.
28. Островский Л.А., Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е. - Акуст. журн., 1976, 22, №6, с.914-921.
29. Петухов Ю.В., Фридман В.Е. - Изв. АН СССР. Сер. Физ. атмос. и океана, 1979, 15, №12, с.1307-1315.
30. Фридман В.Е. - Изв. АН СССР. Сер. Физ. атмос. и океана, 1980, 16, №4, с.397-402.
31. Rogers R.H. - J.Acoust.Soc.Amer., 1977, 62, N6, p.1412-1419.
32. Bjørnø L., Levin P. - Ultrasonics, 1976, 14, N6, p.263-267.
33. Fridman V.E. - J. de Physique, Collogue C8, 1979, 40, N11, p.62-67.

34. Blatstein I.M. - J.Acoust.Soc.Amer., 1971, 49, N5(2), p.1568-1579.
35. Пелиновский Е.Н., Степанянц Ю.А. - Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, №5, с.1706-1708.
36. Наугольных К.А. - Акуст. журн., 1972, 18, №4, с.579-583.
37. Sheehy M.J., Hally R. - J.Acoust.Soc.Amer., 1957, 29, N4, p.464-469.
38. March H.W., Mellen R.H., Conrad W.L. - J.Acoust.Soc.Amer., 1965, 38, N2, p.326-338.
39. Фридман В.Е. - Препринт № 117. Горький, НИРФИ, 1978.
40. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
41. Пелиновский Е.Н. - Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, №3, с.373-383.
42. Островский Л.А. - Акуст. журн., 1968, 14, №1, с.82-89.
43. Poche L.B. - J.Acoust.Soc.Amer., 1972, 51, N5(2), p.1733-1737.
44. Bjørnø L. - J.Eng.Industr., 1970, 92, B1, p.29-34.
45. Blaik M., Cristian E.A. - J.Acoust.Soc.Amer., 1965, 38, N1, p.50-62.
46. Lovett J.R. - J.Acoust.Soc.Amer., 1975, 58, N3, p.620-625.
47. March H.W. - J.Acoust.Soc.Amer., 1963, 35, N11, p.1837-1839.
48. Scretting A., Leroy C.C. - J.Acoust.Soc. Amer., 1971, 49, N1(11), p.276-282.

49. Петухов Ю.В., Фридман В.Е. - Препринт № 126. Горький, НИРФИ, 1979.
50. Fridman V.E. - Wave Motion, 1979, 1, N4, p.271-277.
51. Schulkin M., Marsh H.W. - J.Acoust.Soc. Amer., 1962, 34, N5, p.864-865.
52. Ott E., Sudan R.N. - Phys.Fluid, 1969, 12, N11, p.2388-2394.
53. Ott E., Sudan R.N. - Phys.Fluid, 1970, 13, N4, p.1432-1434.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

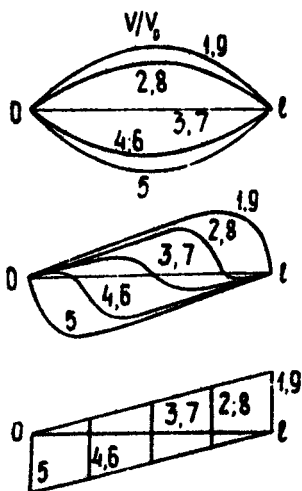
В.В.Канер, А.А.Карабутов, О.В.Руденко

Во многих экспериментах и в приложениях приходится иметь дело с нелинейными акустическими колебаниями в ограниченных объёмах. Отсутствие потерь на излучение в добротных системах позволяет накапливать энергию, что способствует проявлению нелинейности. Трудности анализа взаимодействия встречных волн в резонаторах связаны с несовершенством математического аппарата. В ранних работах использовался метод последовательных приближений [1-3], однако найденные малые поправки к линейным решениям теряют силу на интервалах времени, малых по сравнению со временем образования разрыва. Учёт взаимодействия небольшого числа мод [4-6] в акустике соответствует специальным ситуациям, так как обычно из-за слабой дисперсии эффективно взаимодействуют все гармонические или модовые составляющие. Перенесение на нелинейную акустику газодинамических методов возмущений характеристических координат [7] позволило получить ряд результатов для вынужденных колебаний резонатора с жесткой стенкой, возбуждаемых периодическим движением поршня [8-10].

Вместе с тем, представляет интерес исследование вынужденных колебаний резонаторов, возбуждаемых распределенными внешними силами. Такая ситуация встречается при электромагнитном воздействии на пьезоэлектрики, оптической генерации звука, объемном сгорании топлива в камерах различных двигателей и т.д. Эти колебания были исследованы [11, 12] методом, обобщающим метод медленно изменяющегося

профиля на случай взаимодействия периодических встречных волн .

Результаты использования этого метода для анализа собственных колебаний слоя с двумя жесткими стенками показаны на рис.1.



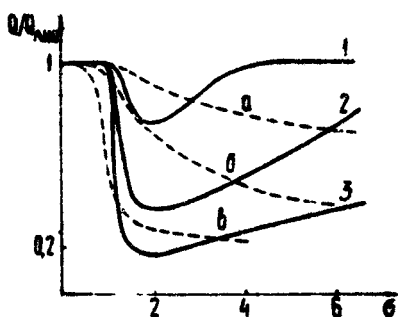
Р и с. 1. Стоячие волны скорости в нелинейном резонаторе через равные интервалы времени $\Delta t = T/8(1-9)$ при различных значениях параметра нелинейности $\sigma = \epsilon \omega v_0 t / 2 c_0 (\sigma \ll 1, \sigma \approx 1, \sigma \approx \pi/2)$

Рассмотрена эволюция начального гармонического возмущения на одной из собственных частот резонатора при больших числах Рейнольдса. В этом случае нелинейные стоячие волны перестают быть собственно "стоячими". Рост высоких гармоник приводит к образованию ударной волны пилообразной формы. В резонаторе узлы скорости остаются неподвижными, как в линейном случае, но узлы для плотности, а также пучности для плотности и скорости перемещаются между узлами скоростей. При этом у скорости появляется дополнительный "бегающий" узел, что в случае образования разрывной волны соответствует бегущему разрыву. По мере распространения разрыва вдоль резонатора уменьшается его положительная часть и соответственно увеличивается отрицательная - разрыв подходит к другому узлу скорости уже в противоположной полярности. Границы резонатора периодически подвергаются резким перепадам давлений. Граденты давле-

ний тем больше, чем круче фронт волны; определение ширины фронта требует учёта поглощения.

Учёт диссипации приводит к уравнениям Бюргерса (независимо для каждой из встречных волн), решение которых известно, и позволяет определить структуру фронта ударной волны [11]. Образовавшийся крутой (при больших числах Рейнольдса) ударный фронт с течением времени уширяется и занимает фазовый интервал порядка длины волны. Это означает, что стоячие волны опять становятся почти синусоидальными, но уже малой амплитуды.

Процесс формирования ударной волны в резонаторе сопровождается нелинейным преобразованием энергии волны основной частоты в энергию более высоких гармоник; как следствие этого, усиливаются диссипативные эффекты. Поэтому добротность, определяемая как отношение общей энергии в резонаторе к энергии, рассеиваемой за период, уже не остается константой резонатора, а изменяется во времени. Мало изменяющаяся (до начала образования разрыва) добротность быстро уменьшается, а затем растет, асимптотически приближаясь к линейному значению. Резкое уменьшение добротности в момент образования разрыва связано с лавинообразным нарастанием гармоник и их интенсивным поглощением (рис. 2).



Р и с. 2. Зависимость добротности от времени при собственных колебаниях для различных значений числа Рейнольдса (1 - $\epsilon Re = 5$, 2 - 10, 3 - 20) и при вынужденных колебаниях (штриховые линии) для различных значений приведенной силы (а - $A = 2$, б - 8, в - 20)

Для вынужденных колебаний нелинейного резонатора под действием распределенной внешней силы уравнения для прямой Φ_1 и обратной Φ_2 волны сводятся к неоднородному

уравнению Бюргерса :

$$\frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial z} - \Phi_{1,2} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \theta_{1,2}} - \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial \theta_{1,2}^2} = A \sin \theta_{1,2}, \quad (1)$$

где $z = \alpha c_0 t$ - приведенное время, $\theta_{1,2} = 2\omega(t \mp z/c_0)$ - приведенные сопровождающие координаты, $A = (\epsilon c_0^2 \rho_0 / \theta^2 \omega^2) F_0$ - приведенная сила, действующая на единицу объема, $\alpha = \theta \omega^2$; $2c_0^3 \rho_0$ - коэффициент поглощения. При этом колебательная скорость v и приращение плотности ρ выражаются через функции $\Phi_{1,2}$ следующим образом:

$$\frac{v}{c_0} = \Gamma(\Phi_1 - \Phi_2); \quad \rho/\rho_0 = \Gamma(\Phi_1 + \Phi_2); \quad \Gamma = \alpha c_0 / \omega \epsilon. \quad (2)$$

Решение (1) выражается через функции Матье: оно позволяет проследить за установлением вынужденных колебаний и определить их стационарную форму. Здесь нарастание гармоник идет иначе, чем при свободных колебаниях. Рост амплитуды колебаний замедляется, так как вклад энергии за период постоянен, а потери энергии, связанные с образованием крутых фронтов и генерацией высоких гармоник на нелинейности, увеличиваются. Это приводит к стабилизации профиля стоячих волн (рис.3); для больших A он дается выражением

$$v/c_0 = 4\Gamma A^{1/2} \cos[(\pi - kx)/2], \quad (3)$$

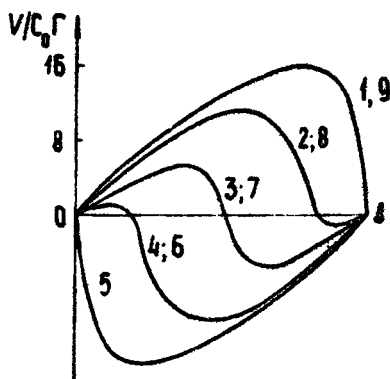
$$0 \leq kx \leq \pi.$$

Добротность при вынужденных нелинейных колебаниях также не является константой резонатора, а определяется амплитудой вынуждающей силы; она уменьшается с ростом амплитуды установившихся колебаний. В процессе установления добротность уменьшается от $Q_{\text{лин}}$ до $Q_{\text{нл}} = (3\pi/4A)Q_{\text{лин}}$ (рис.2).

Заметим, что аналогичная зависимость добротности от величины внешнего воздействия отмечалась в работе [10] при рассмотрении резонатора, возбуждаемого колеблющейся стенкой.

Таким образом, при возбуждении резонатора распределенной резонансной внешней силой в нем возникают вначале

синусоидальные колебания, которые по мере их нарастания превращаются в почти разрывные. Крутизна фронта стационарных колебаний, помимо амплитуды раскачивающей силы, зависит от соотношения нелинейных и диссипативных членов.



Р и с. 3. Профили установившихся вынужденных колебаний в нелинейном резонаторе при $A=20$ (кривые 1-9 построены через $\Delta t = T/8$)

Перейдем к нахождению резонансных кривых нелинейного резонатора. При воздействии на систему распределенной нерезонансной внешней силой уравнения для прямой и обратной волн сводятся к неоднородным уравнениям Бюргерса с расстройкой [13]:

$$\frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial z} + \frac{\Delta}{c_0} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \tilde{\theta}_{1,2}} - \Phi_{1,2} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \tilde{\theta}_{1,2}} - \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial \tilde{\theta}_{1,2}^2} = A \sin \tilde{\theta}_{1,2}, \quad (4)$$

где $\tilde{\theta}_{1,2} = \theta_{1,2} + \Delta t$, Δ - разность частоты внешнего воздействия (ω) и собственной частоты резонатора $c_0 k$: $\Delta = (\omega - c_0 k)$.

Уравнение для установившихся колебаний (рассматривается одна из встречных волн) удобно записать в виде

¹⁾ Очевидно, что условием медленности изменения профиля волны и, соответственно, справедливости уравнения (4) является выполнение соотношения $|1 - c_0 k / \omega| \ll 1$.

$$\delta \frac{\partial f}{\partial \theta} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} - D \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \sin 2\theta, \quad (5)$$

где $\theta = \tilde{\theta}/2$, $f = \Phi_1/b$, $\delta = \Delta/\omega \in b$,

$$b = (F_0/2\epsilon\omega c_p \rho_0)^{1/2}, \quad D = b\omega/4\epsilon c_p^2 \rho_0 b. \quad (6)$$

Уравнение (4) описывает динамику возбуждения нелинейного резонатора распределенной силой при наличии фазовой расстройки между колебаниями в пространстве и во времени. После преобразования уравнения (4) с помощью подстановки Хопфа-Коула

$$f = 2D u_\theta / u \quad (7)$$

можно прийти к уравнению

$$u_z + \delta u_\theta - D u_{\theta\theta} + \frac{u}{4D} \cos 2\theta = 0, \quad (8)$$

решение которого имеет вид

$$u = \sum \exp(-\lambda_i z) u_i(\theta), \quad (9)$$

где u_i — периодические собственные функции стационарного уравнения, а λ_i — соответствующие им собственные числа. Из сравнения (9) и (7) следует, что стационарное решение уравнения (8) описывается собственной функцией, соответствующей наименьшему собственному значению.

Из стационарного уравнения (5) следует, что

$$\delta f - \frac{1}{2} f^2 - D f_\theta = -\frac{1}{2} \cos 2\theta + C \quad (10)$$

и константа C пропорциональна полной акустической энергии I , запасенной в резонаторе:

$$C = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 d\theta = -\frac{I}{\rho_0 c_p^2 b}. \quad (11)$$

С другой стороны, подставляя (7) в (10), легко найти, что $C = 2D\lambda_0$, где λ_0 - наименьшее собственное значение стационарной задачи (8). Таким образом, окончательно имеем

$$I = -\rho_0 c_0^2 B 2D\lambda_0. \quad (12)$$

Определим величину λ_0 . Уравнение (8) заменой

$$w = \exp(-\delta/2D)u$$

приводится к уравнению Матье

$$w'' + w \left(\frac{\lambda}{D} - \frac{\delta^2}{4D^2} - \frac{1}{4D} \cos 2\theta \right) = 0. \quad (13)$$

Однако нас интересуют уже не периодические решения уравнения (13), а растущие с показателем $-\delta/2D$. При слабой нелинейности, т.е. при $\delta^2 + D^2 \gg 1$, имеется приближенное выражение для собственного значения такого решения (см. [14], формула (20.3.15)), которое позволяет найти

$$\frac{I}{2\rho_0 c_0^2 B} = \frac{1}{32(\delta^2 + 4D^2)} + \frac{5\delta^2 - 28D^2}{29(\delta^2 + 4D^2)^3(\delta^2 + 16D^2)} + \dots \quad (14)$$

Основным является первый член, соответствующий линейному решению, второй и последующие члены описывают нелинейные поправки. В том случае, когда нелинейность не мала, общие формулы для нахождения собственных значений отсутствуют. Необходимо использовать приближенные методы.

Разложим решение стационарного уравнения (8) в ряд по функциям Матье:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n} ce_{2n}(\theta) + b_{2n} se_{2n}(\theta)] \quad (15)$$

(в отличие от случая точного синхронизма необходимо учитывать также нечетные функции). Для определения коэффициентов a_i и b_i получаем следующую точную систему уравнений:

$$a_{2n} \left[(\lambda/D) - \lambda_{2n}^{(n)} \right] - (\delta/D) \sum_m b_{2m} ce_{2m, 2n} = 0,$$

$$B_{2m} \left[(\lambda/D) - \lambda_{2m}^{(2)} \right] + (\delta/D) \sum_K a_{2k} c_{2m, 2k} = 0, \quad (16)$$

где $\lambda_{2n}^{(1)}$ и $\lambda_{2m}^{(2)}$ — собственные числа четных и нечетных функций Матье соответственно, а

$$c_{2m, 2n} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{se}_{2m}(\theta) \text{ce}_{2n}(\theta) d\theta / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{ce}_{2m}^2(\theta) d\theta. \quad (17)$$

Для нахождения энергии колебаний в стационарном состоянии необходимо найти минимальное собственное число системы (16).

При сильной нелинейности решение системы (16) будет слабо отличаться от решения в случае точного синхронизма. Поэтому вектор стационарного решения близок к $a_{2n} = \delta_{n,0}$. Отсюда для определения λ получаем уравнение

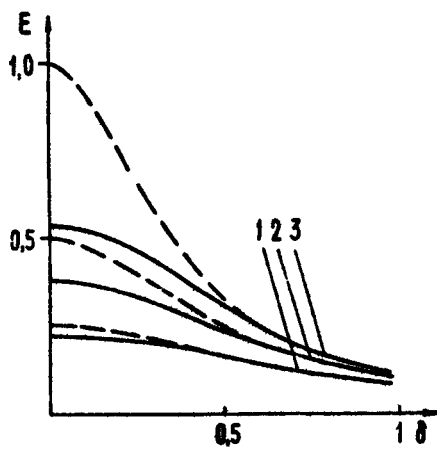
$$\frac{\lambda}{D} = \lambda_0^{(1)} + \frac{\delta^2}{D^2} \sum_n c_{2m,0}^2 \left(\lambda_{2m}^{(2)} - \frac{\lambda}{D} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Для умеренных чисел Рейнольдса коэффициент $c_{2,0}$ значительно больше всех других, поэтому уравнение (18) превращается в квадратное относительно λ , а его наименьший корень имеет вид

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda_2^{(2)} + \lambda_0^{(1)}}{2} - \left[\left(\frac{\lambda_2^{(2)} - \lambda_0^{(1)}}{2} \right)^2 - \frac{\delta^2}{D^2} c_{2,0}^2 \right]^{1/2}. \quad (19)$$

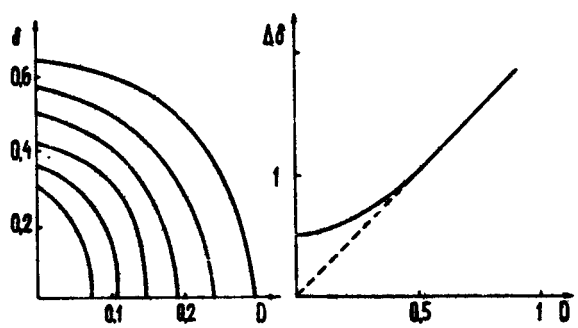
Используя таблицы собственных значений и коэффициентов Фурье функций Матье, можно построить резонансные кривые (рис.4) для нелинейных колебаний.

Видно, что при больших расстройках (когда амплитуда мала) резонансные кривые линейных и нелинейных колебаний близки друг к другу. При малых расстройках нелинейность приводит к понижению и сглаживанию максимумов резонансных кривых по сравнению с линейным случаем. Когда диссипация достаточно велика, эти явления выражены слабо.



Р и с. 4. Резонансные кривые нелинейного резонатора при различных числах Рейнольдса; для сравнения штриховыми линиями приведены кривые линейного резонатора. Кривая 1 - $D = 0,35$; 2 - $0,25$; 3 - $0,177$; $E = 2 I / \rho_0 c_0^2 V$

На рис. 5 приведены линии постоянной энергии в плоскости (D, δ) .



Р и с. 5. Линии уровня поверхности энергии, запасенной в резонаторе. Приведены кривые для $\xi = 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3$

Р и с. 6. Зависимость полуширины резонансной кривой от величины коэффициента диссипации. Штриховая линия - линейный случай

На рис.6 приведена зависимость ширины резонансной кривой $\Delta\delta$ (по уровню 1/2) в зависимости от величины диссипации. В линейном случае (в соответствии с формулой (14)) эта зависимость имеет вид $\Delta\delta \approx 2D$.

При большой диссипации ($D \sim 0,5$) полуширина резонансной кривой может быть найдена из линейной теории. С уменьшением диссипации ширина кривой стабилизируется и стремится к значению $\Delta\delta = 0,5$.

Л и т е р а т у р а

1. Эйкенвальд А.А. - УФН, 1934, 14, № 5, с.552.
2. Зарембо Л.К. - Акуст. журн., 1967, 13, № 2, с.298.
3. Горьков Л.П. - Инж. журн., 1963, 3, № 2 с.246.
4. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
5. Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин А.М. - Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Тезисы докл. М., изд-во МГУ, 1975, с.93.
6. Островский Л.А., Рабинович М.И. Препринт № 51. Горький, НИРФИ, 1974.
7. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М., Наука, 1969.
8. Chester W. - J.Fluid Mech., 1964, 18, N1, p.44.
9. Mortell M.P. - Int.J.Engng.Sci., 1971, 9, p.175.
10. Островский Л.А. - Акуст. журн., 1974, 20, №1, с.140.
11. Канер В.В., Руденко О.В., Хохлов Р.В. - Акуст. журн., 1977, 23, № 5, с.756.
12. Канер В.В., Руденко О.В., Хохлов Р.В. - Материалы симпоз. Нелинейные волны деформации. Т.2, Таллин, 1978, с. 82.
13. Карабутов А.А. - Канд.дис. [Рукопись]. М., изд-во МГУ, физ.фак., 1979.
14. Справочник по специальным функциям. Под.ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М., Наука, 1979, с.540.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

С.Н.Гурбатов, А.И.Саячев

Введение

При анализе распространения акустических волн часто необходимо учитывать флуктуационные явления. Это относится к акустическим волнам, генерируемым двигателями самолётов и кораблей, к генерации звука за счёт кавитации и т.д. Но даже гармонические волны, излучаемые реальными источниками ультразвука, обладают флуктуациями фазы и амплитуды. Если такие акустические волны достаточно интенсивны, их распространение сопровождается нелинейными искажениями, характер которых зависит от статистических свойств волны. Случайная немонохроматичность волны в большой степени определяет темп генерации высших гармоник, приводит к переносу части ее энергии в низкочастотную область спектра. Таким образом, изучение генерации и распространения случайных интенсивных акустических волн представляет задачу, имеющую как физический интерес, так и важную для приложений.

В статистической нелинейной акустике можно условно выделить два основных круга задач. Это, во-первых, задачи о генерации звука интенсивными шумовыми распределенными источниками, например, турбулентностью. Во-вторых, это анализ распространения интенсивного шумового излучения как в регулярных, так и случайно неоднородных средах. Данный обзор посвящен в основном отражению состояния теории распространения интенсивных шумовых волн.

В общем случае на характер распространения интенсивной акустической волны, помимо нелинейных искажений, влияют дифракция, высокочастотная диссипация, случайная рефракция на турбулентных неоднородностях среды и т.д. Совместный учёт всех этих эффектов представляет собой сложную математическую задачу, в результате чего при количественном описании распространения даже регулярных интенсивных пучков приходится применять, как правило, численные методы. Вместе с тем, в ряде случаев распространение интенсивных акустических сигналов удаётся описать аналитически, например, для плоских волн [1-6], интенсивного коротковолнового излучения, когда справедлива нелинейная геометрическая акустика (НГА) [7-10], а также когда нелинейные и дифракционные эффекты пространственно разнесены [11-13].

Трудности анализа распространения регулярных интенсивных акустических волн многократно увеличиваются при изучении статистических свойств случайных интенсивных волн. Это обусловлено совокупным действием двух главных причин. Нелинейность волн не позволяет получить замкнутые уравнения для их моментных функций, подобные уравнениям, известным в теории линейных волн, распространяющихся в случайно неоднородных средах (см., например, [14-16]). С другой стороны, случайные волны, с точки зрения теории колебаний, представляют собой случайные колебания с континуумом взаимодействующих между собой степеней свободы. Поэтому при анализе случайных волн не применим аппарат уравнений Лиувилля и уравнений Эйнштейна-Фоккера-Планка, с успехом используемый при статистическом анализе случайных процессов с конечным числом степеней свободы. Уравнения же в вариационных производных - континуальные аналоги уравнений Лиувилля и ЭФП в теории случайных волн - практически неразрешимы [15,17].

Все же при статистическом анализе ряда нелинейных случайных волн можно использовать методы, характерные для анализа случайных процессов. Так, в нелинейной оптике, из-за сильной дисперсии, можно ограничиться рассмотрением малого числа квазимонохроматических волн с медленно меняющимися амплитудами [18,19].

В нелинейной же акустике, где дисперсия отсутствует и происходит лавинообразный рост числа взаимодействующих

спектральных компонент, методы нелинейной статистической оптики, хорошо развитые к настоящему времени, неприменимы. Поэтому при анализе интенсивных шумовых волн приходится применять различные приближенные методы. Один из довольно распространенных методов заключается в замыкании тем или иным приближенным способом уравнений для моментных функций нелинейных случайных волн (см., например, [24-38]). Не говоря уже о том, что полученные так уравнения приходится решать численными методами, не всегда удается указать и пределы их применимости. Так, решение этих приближенных уравнений иногда приводит к физически неверным выводам, например, к отрицательным значениям энергетического спектра волны [26,32].

Другой подход к статистическому анализу нелинейных случайных волн, более распространенный в статистической нелинейной акустике, заключается в привлечении динамических решений уравнений нелинейной акустики, найденных в том или ином математически и физически достаточно обоснованном приближении. Именно обсуждению подобных методов статистической нелинейной акустики и полученных с их помощью физических результатов и посвящен в большой мере данный обзор.

1. Исходные уравнения

1. Одним из мощных математических методов, в рамках которого удастся описать распространение интенсивных акустических волн, является нелинейная геометрическая акустика (НГА), описывающая распространение как одномерных волн (плоских, сферических, цилиндрических), так и пучков в плавно неоднородных средах вне каустик [7-10]. Принципиальным результатом метода НГА является то, что решение для поля акустической волны выражается через решение Римана в эквивалентной однородной среде. Это позволяет переносить результаты, полученные для плоских волн, на достаточно широкий класс нелинейных задач акустики.

В НГА эволюцию возмущений акустического поля $p'(t, \vec{r})$ описывают в системе координат, связанной с геометрооптическим лучом в линейной неоднородной среде. Для перехода к такому описанию необходимо, во-первых, решить уравнение

геометрической акустики для эйконала $S(\vec{r})$: $(\nabla S)^2 c^2 = 1$ (здесь $c(\vec{r})$ — скорость звука) и локального сечения лучевой трубки $\Delta(\ell)$ вдоль геооптического луча, которое удовлетворяет известным уравнениям геометрической акустики [39,40]. После этого заменой переменных

$$t - t' = s(t), \quad x = \int_{t'}^t (\alpha^2 \Delta_0 c_0^5 \rho_0 / \alpha_0^2 \Delta c^5 \rho)^{1/2} d\ell', \quad (1.1)$$

$$\rho = \rho' (\Delta c_0 \rho_0 / \Delta_0 c \rho)^{1/2}, \quad (1.2)$$

где $c(\ell)$, $\rho(\ell)$ — равновесные значения скорости звука и плотности, $\alpha(\ell) = \Gamma + \rho c \{ \partial c / \partial \rho \}$ — параметр нелинейности, нулевой индекс указывает поверхность задания звукового поля, удаётся свести неоднородную задачу к решению уравнения Римана с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение Римана, дополненное условиями для координаты разрывов [10], описывает акустическую волну как до образования разрывов, так и на разрывной стадии.

2. Уравнения НГА могут быть использованы и для решения ряда дифракционных задач в случае, когда дифракция и нелинейное искажение волны пространственно разнесены и применим поэтапный подход [11-13]. При этом если на начальной стадии распространения более существенна дифракция, то её следует рассчитывать в рамках линейной теории, связав тем самым поле на излучающей поверхности с полем на сфере некоторого радиуса $r_0 = l_0$, находящейся в зоне Фраунгофера излучающей апертуры (r_0 в то же время должен быть много меньше характерной длины нелинейного искажения). Дальнейший анализ искажения поля может быть проведён с помощью нелинейной геометрической акустики сферически расходящихся волн.

3. Уравнение Римана описывает распространение нелинейных акустических волн в идеальной среде, где диссипация сказывается только на разрывах. Учёт конечной вязкости приводит к повышению порядка уравнения. Для плоских, цилиндрических и сферических волн распространение акустичес-

кого поля описывается уравнением Бюргера [2,3]

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \beta p \frac{\partial p}{\partial t} - \mu f(x) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где $\mu = \beta/2c^3\rho$, — коэффициент высокочастотной диссипации, а вид функции $f(x)$ определяется геометрией волны (для плоских волн $f=1$).

Уравнения (1.3), (1.4) имеют весьма простые (с динамической точки зрения) решения. Однако, несмотря на наличие аналитического решения, статистический анализ нелинейных акустических волн связан с большими математическими трудностями, обусловленными тем, что решение Римана задано в неявном виде (см., например, [41–43]), а решение уравнения Бюргера выражается через начальные условия с помощью ряда нелинейных и инерционных преобразований.

2. Статистика римановых волн до образования разрывов

1. Рассмотрим методы анализа случайных римановых волн в однородной среде. Перейдём от (1.3) к характеристическим уравнениям для $p(x, \theta) = p[T(x, \theta), x]$, $T(x, \theta)$ [23]

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = -\beta p; \quad p(0, \theta) = p_0(\theta), \quad T(0, \theta) = \theta. \quad (2.1)$$

Так как эволюция римановой волны вдоль характеристики описывается конечной системой обыкновенных уравнений (2.1) с условиями Коши, то и статистический анализ римановых волн вдоль заданных характеристик может быть проведён обычными методами анализа случайных процессов (см., например, [14,15]). Нас же интересует статистика $p(t, x)$ в заданной пространственно-временной точке (t, x) , что соответствует решению уравнений (2.1) с двухточечными краевыми условиями. Основной принцип статистического анализа двухточечных краевых задач заключается в сведении краевой задачи к некоторой вспомогательной задаче Коши [44–46]. Следуя ему, установим связи между статистикой $p(t, x)$ и статистическими свойствами реше-

ний уравнений (2.1). Рассмотрим равенство

$$\delta[\rho - \rho(t, x)] = \int I(x, \theta) \delta[\rho - \rho(x, \theta)] \delta[t - T(x, \theta)] d\theta, \quad (2.2)$$

$$I = \partial T / \partial \theta.$$

Последняя дельта-функция в этом интеграле выкалывает из всевозможных характеристик $T(x, \theta)$ нужную нам, удовлетворяющую равенству $T(x, \theta^*) = t$. Усреднив (2.2) по статистическому ансамблю граничных условий, будем иметь

$$\omega(\rho; t, x) = \int d_j \int d\theta_j W(\rho, t, j; x/\theta), \quad (2.3)$$

где $\omega(\rho; t, x) = \langle \delta[\rho - \rho(t, x)] \rangle$ - искомое вероятностное распределение случайной римановой волны $\rho(t, x)$, а $W(\rho, t, j; x/\theta) = \langle \delta[\rho - \rho(x, \theta)] \delta[t - T(x, \theta)] \delta[j - I(x, \theta)] \rangle$ - вероятностное распределение ρ, T, I на заданной характеристике. Входящая в (2.2), (2.3) $I(x, \theta)$ описывает влияние фокусировки и дефокусировки лучевых трубок на статистику римановой волны.

Из (2.3) видно, что для определения $\omega(\rho; t, x)$ нужно знать совместную статистику $\rho(x, \theta), T(x, \theta), I(x, \theta)$. Поэтому дополним (2.1) уравнениями для $I(x, \theta), U(x, \theta) = -\rho'_\theta(x, \theta)$ которые получим, продифференцировав (2.1) по θ :

$$\frac{dI}{dx} = -\beta U, \quad \frac{dU}{dx} = 0; \quad I(0, \theta) = 1, \quad U(0, \theta) = \rho'_\theta(\theta). \quad (2.4)$$

Введём вероятностное распределение ρ, T, I, U . Тогда искомое распределение римановой волны ω представимо в виде [47]

$$\omega(\rho; t, x) = \int d_j \int du \int d\theta_j W(\rho, t, j, u; x/\theta). \quad (2.5)$$

Дифференцируя (2.5) по x и используя уравнение для $W(\rho, t, j, u; x/\theta)$, получим [21]

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \int_{-\infty}^{\rho} \frac{\partial \omega(\rho'; t, x) d\rho'}{\partial t} \right]. \quad (2.6)$$

Решение этого уравнения имеет вид [21,47]

$$\psi(\rho; t, x) = \psi_0(\rho; t + \rho x) + \rho x \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\rho} \psi_0(\rho'; t + \rho \rho' x) d\rho'. \quad (2.7)$$

Отметим, что, в отличие от обычных уравнений Эйнштейна-Фоккера-Планка, уравнение для вероятностного распределения римановой волны (2.6) интегродифференциальное.

2. В практических приложениях наиболее важной, как правило, является информация о спектральном составе случайной акустической волны. Рассмотрим фурье-образ волны $\rho(t, x)$:

$$c(\omega, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t, x) e^{i\omega t} dt. \quad (2.8)$$

Производя в интеграле замену переменных $t = T(x, \theta)$, получим

$$c(\omega, x) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, \theta) \exp\{i\omega T(x, \theta)\} d\theta. \quad (2.9)$$

Эта формула выражает спектр через решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), (2.4) и позволяет пользоваться преимуществами статистического анализа случайных процессов при изучении спектральных характеристик поля. Так, на основе (2.9) для взаимного спектра мощности полей $\rho(t, x)$ и $\rho(t, x')$ имеем

$$S(\omega; x, x') = \int \langle \rho(x', t) \rho(x, t + \tau) \rangle \exp i\omega \tau d\tau, \quad (2.10)$$

$$S = \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle U(x', \theta) U(x, \theta + \tau) \exp\{i\omega [T(x, \theta + \tau) - T(x', \theta)]\} \rangle d\theta. \quad (2.11)$$

Отметим, что равенства типа (2.2), (2.3), (2.9), (2.11), при выводе которых не использовались конкретные уравнения римановой волны, справедливы для более широкого, чем римановы, класса нелинейных случайных волн (см. также [51-55]).

3. Обсудим теперь некоторые статистические свойства случайных римановых волн. Прежде всего отметим, что до образования разрывов плотность вероятности плоской ста-

нионарной римановой волны сохраняется $\psi(\rho; \tau) = \psi_0(\rho)$ [21]. С учётом расходимости волны вероятностное распределение поля, в соответствии с (1.1), (1.2), можно записать в виде

$$\psi(\rho; \tau) = (\tau/\tau_0)^{n/2} \psi_0[\rho(\tau/\tau_0)^{n/2}] \quad (2.12)$$

($n=1,2$ соответствует цилиндрической и сферической волнам).

Наибольший интерес обычно представляет анализ случайной акустической волны, являющейся смесью регулярного сигнала и шума. Пусть при $\tau=0$ волна равна сумме детерминированного сигнала $m(t)$ и стационарного шума $\xi(t)$ с вероятностным распределением $\psi_0(\xi)$. Тогда из (2.9) имеем [47,48]

$$\psi(\rho; t, \tau) = \psi_0[\rho - m(t + \beta \rho \tau)] \frac{d}{d\rho} [\rho - m(t + \beta \rho \tau)]. \quad (2.13)$$

Отсюда видно, что нелинейное взаимодействие сигнала с шумом приводит с ростом τ к изменению формы вероятностного распределения шума и зависимости сигнала $\langle \rho(t, \tau) \rangle$ от статистики шума. Так, если $m(t) = a \sin \omega_0 t$, то из (2.13) для $\langle \rho \rangle$ имеем

$$\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a I_k(kz)}{kz} [\sin k\omega_0 t \operatorname{Re} \theta_k(k\omega_0, \beta\tau) + \cos k\omega_0 t \operatorname{Im} \theta_k(k\omega_0, \beta\tau)].$$

Здесь $\theta_k(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle$, $z = a\beta\omega_0\tau$. В частности, при гауссовом шуме среднее поле k -й гармоники затухает как $\exp(-\sigma^2 \beta^2 k^2 \omega_0^2 \tau^2 / 2)$ [47,56]. Если же статистика шума не гауссова, то амплитуды гармоник среднего поля могут даже испытывать осцилляции, а при асимметричном распределении шума ($\operatorname{Im} \theta_k(n) \neq 0$) меняется и фаза гармоник среднего поля. При $\sigma \ll a$, т.е. при слабом шуме, форма распределения $\psi(\rho; t, \tau)$ приблизительно остается постоянной (это предположение справедливо при χ , не слишком близких к границе опрокидывания регулярной волны). При этом среднее поле совпадает с полем регулярной волны, а дисперсия шума возрастает на укрупшающихся участках профиля волны и убывает на

уширяющихся. В частности, при $\omega_0 t = 0, \pi$ имеем из (2.15)

$$\sigma^2(\omega_0 t = 0, \pi; x) = \sigma^2/(1 \mp x)^2.$$

4. Обсудим эволюцию спектра шумовой стационарной волны. Для римановой волны $U(x, \theta) = \rho_0'(\theta); T(x, \theta + \tau) - T(x, \theta) - \tau - \beta [T \rho_0(\theta + \tau) - T \rho_0'(\theta)]$ и, следовательно, в общем случае спектр ее выражается через двумерную характеристическую функцию начального поля [22]. При гауссовой статистике $\rho_0(t)$ с корреляционной функцией $\langle \rho_0(t) \rho_0(t + \tau) \rangle = \kappa(\tau)$, как видно из (2.11), взаимный спектр равен [50]

$$S(\omega; x, x') = \text{ePr}[-\sigma^2 \beta^2 \omega^2 (x^2 + x'^2)/2] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ePr}[\kappa(\tau) \beta^2 \omega^2 x x']}{\omega^2 \beta^2 x x'} e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2.14)$$

При $x = x'$ (2.14) описывает энергетический спектр случайной римановой волны. Разные способы вывода этой формулы приведены в [2, 20, 22, 49, 56-58], где исследованы также основные особенности преобразования акустического шума. Отметим лишь, что, согласно (2.14), происходит перекачка энергии вверх по спектру, что связано с укрупнением профиля волны, а когда начальный спектр имеет максимум не на нулевой частоте, происходит увеличение и низкочастотных компонент, что связано с эффектом автодетектирования шумовой волны в нелинейной среде. Формула (2.14) позволяет рассчитать также взаимную корреляцию и взаимный спектр падающего поля и поля в некотором сечении среды. При $x' \rightarrow 0$ из (2.14) имеем

$$S(\omega; x, 0) = S_0(\omega) \text{ePr}(-\sigma^2 \beta^2 \omega^2 x^2/2). \quad (2.15)$$

Таким образом, нелинейное взаимодействие уменьшает корреляцию спектральных компонент волны, причём она уменьшается с ростом частоты, расстояния от входа и дисперсии входного шума. Например, для корреляционного поля с гауссовой формой функции корреляции имеем из (2.15)

$$B(\tau; x, 0) = \sigma^2(\tau_0/\tau_1) \text{ePr}[-(\tau/\tau_1)^2]; \\ \tau_1 = \tau_0 (1 + 2\sigma^2 \beta^2 x^2/\tau_0^2)^{1/2}. \quad (2.16)$$

Вопрос о применимости риманового приближения при анализе статистики нелинейных акустических волн обсуждался в [55], где вычислялось $N(t, T)$ — количество ветвей римановой волны в данной пространственно-временной точке.

3. Влияние разрывов на статистику акустических волн

1. Разрывы, образующиеся в акустической волне, существенно меняют её статистические свойства. Наряду с такими традиционными для статистической теории волн понятиями, как вероятностное распределение и спектры поля, рассматриваются и статистические характеристики, связанные непосредственно с разрывами. Одной из них является среднее число разрывов поля в единицу времени — $\nu(T)$. Появление разрывов в первоначально непрерывной волне связано с появлением неоднозначностей риманова решения, которые образуются, если $u_s(t) > 1/\beta T$, где $u_s(t) = \rho'_s(t)$. Таким образом, за оценку $\nu(T)$ можно взять среднее число выбросов процесса $u_s(t)$ над уровнем $1/\beta T$: $\lambda(1/\beta T)$. При гауссовой статистике входного поля [59,60]

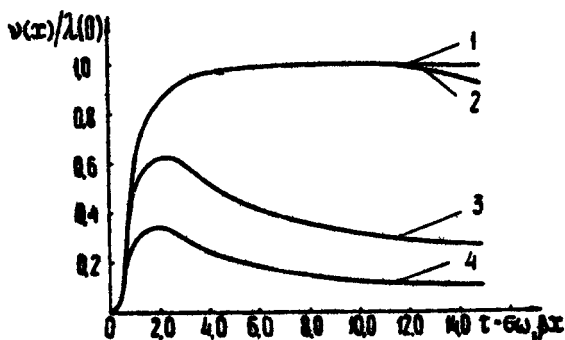
$$\lambda(1/\beta T) = \frac{\omega_2}{2\pi\omega_1} \exp(-1/2\tau^2); \quad \tau = \sigma\beta\omega_1 T, \quad (3.1)$$

где $\sigma^2 = \langle \rho_0^2 \rangle$, $\omega_k = (-1)^k R^{2k}(0)$, $R(\tau)$ — коэффициент корреляции. Для среднего числа разрывов справедливо неравенство

$$\nu(T) \leq \lambda(1/\beta T), \quad (3.2)$$

так как двум и более соседним выбросам $u_s(t)$ над уровнем $1/\beta T$ в общем случае может соответствовать один разрыв. Однако на начальной стадии, когда слияние разрывов можно пренебречь, эта оценка достаточно точна. Так, для квазимонохроматической волны с частотой ω_0 и шириной спектра γ характерное расстояние слияния разрывов равно $\tau_{cA} = \sigma\omega_0\beta T_{cA} \sim \omega_0^2/\gamma^2$, и, следовательно, вплоть до $T < T_{cA}$ ($\tau_{cA} \gg 1$) справедлива оценка (3.2) со знаком равенства. Для такой волны слияние разрывов начинается

лишь после того, как практически уже на всех периодах образовались разрывы. Уменьшение среднего числа разрывов из-за их слияния существенно зависит от значения спектра начального поля $S_1(\omega)$ при $\omega = 0$. Как будет показано ниже, при $I \rightarrow \infty$ и $S_1(0) \neq 0$ $\nu \sim I^{-2/3}$, а при $S_1(0) = 0$ $\nu \sim I^{-1/2}$. Качественный вид изменения $\nu(I)$ приведён на рис. 1.



Р и с. 1. Среднее число разрывов в единицу времени: 1 - среднее число выбросов $\rho_a(t)$ над уровнем $1/\beta I: \lambda(1/\beta I)$; 2 - среднее число разрывов первоначально квазимонохроматической волны; 3 - для широкополосного входного сигнала с $S_1(0) = 0: \nu \sim I^{-1/2}$; 4 - для широкополосного сигнала с $S_1(0) \neq 0: \nu \sim I^{-2/3}$

Для квазимонохроматических сигналов, в силу медленности изменения амплитуды $a(t)$ и частоты $\omega(t)$, можно рассматривать длину образования разрыва на каждом периоде волны и рассчитывать её по формулам квазистатистического приближения

$$L = F(a, \omega, \beta), \quad (3.3)$$

где функция F определяется в соответствии с (2.1), (2.2) неоднородностями среды и геометрией волны. Например, для плоской волны в однородной среде $F(I) = 1/I$, а для сферической $F(I) = R_0 \exp(1/R_0 I)$ [2]. Таким образом, нахождение вероятностного распределения длины образования

разрыва сводится к задаче о нелинейном безынерционном преобразовании (см., например, [59]). Для различных статистик входного поля этот вопрос был подробно исследован в работах [2, 58, 61-63], где отмечено, что разрывы у случайно модулированной волны могут появиться раньше, чем у детерминированной с той же энергией, за счёт чего шумовая волна затухает на начальной стадии более интенсивно, чем регулярная. В то же время, из-за особенностей нелинейного преобразования при $\rho \rightarrow 0$, вероятностное распределение $W(L)$ имеет медленно спадающие хвосты при $L \rightarrow \infty$, что может привести к расходимости моментов длины образования разрыва $\langle L^k \rangle$.

Обсудим теперь влияние разрывов на вероятностные распределения и спектры нелинейных акустических волн. В разд. 2 было показано, что для римановой волны плотность вероятности стационарной шумовой волны сохраняется $W(\rho; \tau) = W_0(\rho)$, соответственно сохраняется и энергия волны. Это легко понять, используя предположение об эргодичности поля $\rho(t, \tau)$. При этом $W(\rho; \tau)$ совпадает с относительным временем пребывания $\rho(t, \tau)$ в интервале $\rho, \rho + d\rho$ (рис. 2)

$$W(\rho; \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_n \frac{\Delta t_n}{|\Delta \rho|}, \quad \Delta \rho \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Из выражения для $\rho(t, \tau)$ в неявной форме $t = t_0(\rho) - \beta \rho \tau$, где $t_0(\rho)$ - обратная функция к $\rho = \rho_0(t)$, видно, что

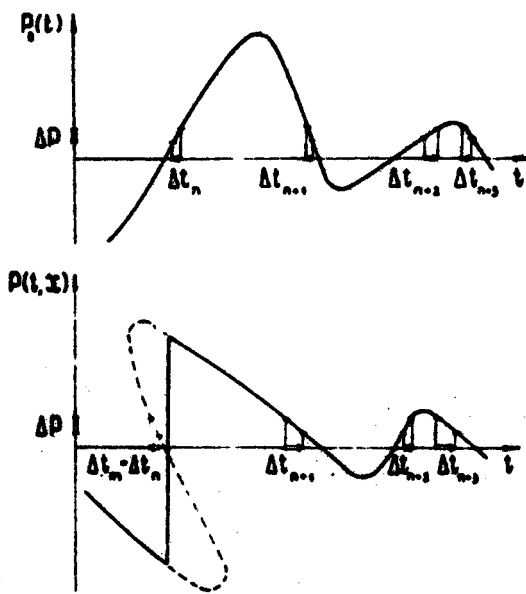
$$\frac{\Delta t_n}{|\Delta \rho|} = \frac{\Delta t_{n,0}}{|\Delta \rho|} \pm \beta \tau, \quad (3.5)$$

где знак плюс соответствует разрежению волны, а знак минус сжатию. При этом выполняется равенство $\Delta t_n + \Delta t_{n+1} = \text{const}$, следовательно, если пренебречь краевыми эффектами, а это можно делать при $\tau \rightarrow \infty$ (случай конечных τ был рассмотрен в работе [64], однако при этом относительное время пребывания уже нельзя отождествлять с плотностью вероятности), плотность вероятности римановой волны сохраняется.

После опрокидывания римановой волны часть интервалов Δt_n отсекается разрывом, что ведёт к изменению вероятностного распределения

$$W(\rho; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_n \frac{\Delta t_n}{|\Delta \rho|} - \sum_n \frac{\Delta t_m}{|\Delta \rho|} \right] = W_0(\rho) + \tilde{W}(\rho; \tau), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(\rho; \tau) d\rho = 0,$$

где суммирование по n распространяется на все интервалы Δt_n , а суммирование по m ведётся только по тем интервалам, которые отсекаются разрывом.



Р и с. 2. Эволюция римановой волны

Из рис.2 видно, что отдельный разрыв приводит к увеличению плотности вероятности вблизи центра разрыва и к её уменьшению на краях. Следовательно, плотность вероятности акустической волны $W(\rho; \tau)$ возрастает при тех значениях ρ , при которых появление разрыва наиболее вероятно. В частности, для гауссовой статистики входного поля $W(\rho; \tau)$ возрастает вблизи $\rho \sim 0$ и убывает при больших значениях ρ [65].

Количественный расчёт $W(\rho; \tau)$ на стадии образования разрывов затрудняется тем, что теперь вероятностное распределение волны определяется не конечномерной плотностью вероятности $\rho_0(t)$, а его бесконечномерными вероятностными характеристиками. Это связано с тем, что координата образования разрыва является функционалом $\rho_0(t)$. Тем не менее удаётся рассчитать $W(\rho; \tau)$ на начальной стадии образования разрывов, а также для квазимонохроматических волн [65-67].

Зная вероятностное распределение, нетрудно определить затухание энергии волны, связанное с поглощением на разрывах. На начальной стадии распространения при гауссовой статистике входного поля можно получить для $\Delta E(\tau) = E(0) - E(\tau)$ [65]

$$\Delta E(\tau) = \sqrt{54/\pi} \sigma^2 \tau_0^2 \tau^3 \cdot \exp(-1/2\tau^2); \quad \tau = \sigma \omega, \beta \tau, \quad \tau_0 = \omega_1^2 / \omega_2. \quad (3.6)$$

Уменьшение средней энергии волны обусловлено возникновением ударных фронтов и определяется как средним в единицу времени числом разрывов (сравним (3.6) с (3.1)), так и величиной энергии, поглощаемой на разрыве. Из (3.6) видно, что затухание тем сильнее, чем больше дисперсия производной давления. В частности, при одинаковой начальной энергии сильнее затухает волна с более широким спектром.

Разрывы приводят к универсальной степенной асимптотике спектра при $\omega \rightarrow \infty$. Учитывая, что отдельный разрыв имеет фурье-образ $(\Delta p_n / i\omega) \exp(i\omega \xi_n)$, где Δp_n - амплитуда разрыва, ξ_n - его координата, легко видеть, что $S(\omega; \tau) \sim \omega^{-2}$ при $\omega \rightarrow \infty$. В частности, при гауссовой статистике входного поля на начальной стадии распространения для асимптотики спектра $S(\omega; \tau)$, обусловленной появлением разрывов, справедлива формула [65]

$$S(\omega; \tau) = (12\sigma^2 \omega_1 \tau_0 / \omega^2 \tau) \exp(-1/2\tau^2). \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.7) с асимптотикой непрерывной части спектра, которую легко получить из (2.14) [22]

$$S(\omega; \tau) = (\sqrt{2\pi} \sigma^2 \omega_1^2 / \omega^3 \tau^2) \exp(-1/2\tau^2), \quad (3.8)$$

можно оценить граничную частоту $\omega_*(t) \approx \omega_1 / \gamma_0 t^3$, при которой происходит излом степенного спектра. При $\omega \gg \omega_*$ асимптотика спектра связана с появлением ударных фронтов и $S(\omega; t) \sim \omega^{-2}$ [68], а при $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_*$ асимптотика спектра определяется поведением поля вблизи разрыва, где $\rho(t, x) \sim (t - t_n)^{1/2}$ и, следовательно, $S(\omega; t) \sim \omega^{-3}$ [2, 20, 22, 43]. По мере распространения волны граница излома степенного спектра сдвигается в сторону более низких частот, что связано с увеличением в среднем амплитуды разрыва. Отметим, что появление медленно спадающих крыльев $S(\omega; t) \sim \omega^{-2}$ соответствует нарушению аналитичности корреляционной функции случайного поля.

4. Энергетические характеристики случайных акустических волн на стадии развитых разрывов

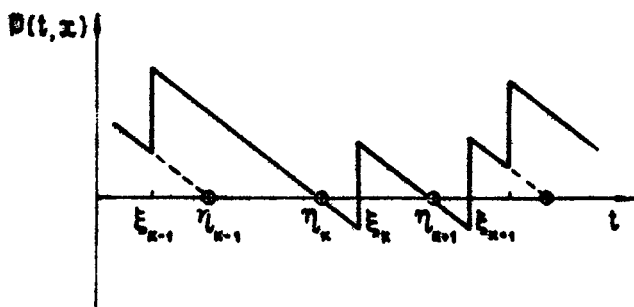
1. На достаточно больших расстояниях ($\sigma \beta \omega_1 t \gg 1$) и при больших числах Рейнольдса акустическая волна переходит в нерегулярную последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном $\gamma = 1/\beta t$ [69]:

$$\rho(t, x) = -\frac{1}{\beta t} [t - \eta(t, x)]; \quad \eta(t, x) = \eta_k, \quad \xi_{k-1} < t < \xi_k. \quad (4.1)$$

Полное описание динамики такой волны задаётся совокупностью "нулей" пилообразной волны $\{\eta_k\}$ и координат разрывов $\{\xi_k\}$ [69] (рис. 3). Величины разрывов при этом равны $\Delta \rho = \gamma(\eta_{k+1} - \eta_k) = \gamma \xi_k$.

Эволюция акустической волны на разрывной стадии описывается простыми законами; градиент γ уменьшается по мере распространения как $1/\beta t$, "нули" пилообразной волны η_k неподвижны, а ударные фронты ξ_k движутся с постоянной скоростью c_k . В момент столкновения число "нулей" уменьшается на единицу и из двух слившихся разрывов образуется один ударный фронт.

Рассмотрим, как связаны параметры пилообразной волны со статистикой начального поля $\rho_0(t)$. Множество "нулей" $\{\eta_k\}$ является некоторым подмножеством множества входов в нуль исходного поля $\{t_n\} - \rho_0(t_n) = 0, \rho'_0(t_n) < 0$.



Р и с. 3. Акустическая волна на стадии развитых разрывов

При фиксированном t из множества $\{t_k\}$ необходимо выбрать корень, дающий абсолютный минимум функции

$$A(t, t_i) = -\beta U(t_i) + \frac{1}{2\tau}(t - t_i)^2; \quad U(t_i) = \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \rho_0(t') dt'. \quad (4.2)$$

После выбора последовательности "нулей" $\{\eta_k\}$ координаты разрывов легко определяются из условия сохранения импульса [69]

$$\xi_k = \frac{\eta_{k+1} + \eta_k}{2} - v_k \beta \tau; \quad v_k = \frac{U(\eta_{k+1}) - U(\eta_k)}{\rho_k} = \frac{1}{\rho_k} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \rho_0(t') dt'. \quad (4.3)$$

2. Перейдём к анализу статистики пилообразной волны. Обсудим вначале вопрос о том, что требуется знать для определения тех или иных её статистических характеристик. Рассмотрим энергетический спектр волны. Для нахождения спектра удобно использовать вспомогательный процесс $\chi = \beta t'$, фурье-образ которого

$$e_z(\omega, \tau) = \frac{1}{\beta \tau} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_k l_k e^{i\tau(-i\omega \xi_k)} - \delta(\omega) \right]. \quad (4.4)$$

При статистически однородных начальных условиях из (4.6) получим следующее выражение для энергетического спектра волны:

$$S(\omega, \tau) = \frac{\nu(\tau)}{\pi \omega^2 \beta^2 \tau^2} \left[\frac{\langle l^2(\tau) \rangle}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \langle l_k l_{k+p} \cos(\omega \Delta \xi_p) \rangle - \delta(\omega) \right]. \quad (4.5)$$

Здесь $\chi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle N \rangle / T = 1 / \langle l \rangle$ — средняя частота разрывов, $\Delta \xi_p = \xi_{k+p} - \xi_k$. Таким образом, для определения энергетического спектра пилообразной волны необходимо знать трехмерную функцию распределения $\Delta \xi_p, l_k, l_{k+p}$. Если интересоваться асимптотикой спектра при $\omega \rightarrow \infty$, удастся обойтись существенно меньшей информацией. Слагаемые в бесконечной сумме (4.5) описывают интерференцию спектров различных разрывов. При $\omega \gg \nu(\tau)$ её можно пренебречь и спектр поля определится первым слагаемым в (4.5):

$$S(\omega; \tau) = \langle l^2(\tau) \rangle / \omega^2 \langle l(\tau) \rangle 2\pi \beta^2 \tau^2; \quad \omega \gg \chi(\tau). \quad (4.6)$$

3. Чтобы вычислить энергию волны, необходимо знать её спектральный состав на всем частотном интервале. Для определения средней энергии волны можно использовать также уравнение, вытекающее из условия поглощения энергии на разрывах [69]:

$$\frac{dE}{d\tau} = - \langle l^3(\tau) \rangle / 6 \beta^2 \tau^3 \langle l(\tau) \rangle. \quad (4.7)$$

Таким образом, для определения энергии волны и асимптотики её спектра достаточно ограничиться исследованием первых трёх моментов расстояния между "нулями" пилообразной волны.

Прежде всего, отметим, что если разрывы не сливаются (такая ситуация, в частности, реализуется, если на входе задан сигнал вида $p_0(t) = A(d/dt) \cos \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — монотонная функция), то статистика ξ_k, η_k не меняется по мере распространения волны, спектр пилообразной волны сохраняет свою форму, а её энергия уменьшается пропорционально $1/\beta^2 \tau^2$. При этом из (4.7) имеем

$$E(\tau) = \langle l^3 \rangle / \langle l \rangle 12 \beta^2 \tau^2 = l_*^2 / 12 \beta^2 \tau^2, \quad (4.8)$$

т.е. в этом случае энергия волны на разрывной стадии не зависит от падающей энергии, а определяется только временными характеристиками падающего поля.

Некоторые оценки удастся провести также для достаточно больших τ , когда изменение энергии и спектра стремится к некоторому универсальному закону. Для качествен-

вых оценок при больших \mathcal{I} можно положить $\langle l^k \rangle \approx \langle l \rangle^k = v^{-k}$. Тогда из (4.6), (4.7) имеем

$$S(\omega; \mathcal{I}) = 1/\omega^2 v 2\pi \beta^2 \mathcal{I}^2; \quad \frac{dE}{d\mathcal{I}} = -1/6 v^2 \beta^2 \mathcal{I}^3. \quad (4.9)$$

Следовательно, в этом приближении нужно знать лишь $\nu(\mathcal{I})$ - среднюю частоту следования разрывов в единицу времени. Для качественной оценки $\nu(\mathcal{I})$ запишем кинетическое уравнение для частоты столкновения. Из (4.3) видно, что когда характерное расстояние между нулями l много больше времени корреляции входного поля T_0 , скорости соседних разрывов практически некоррелированы. Рассмотрим интервал достаточно большой длительности T . Пусть $\langle N_T \rangle$ - среднее число разрывов на этом интервале. Уменьшение $\langle N_T \rangle$ за счёт слияния разрывов при увеличении \mathcal{I} на $\Delta \mathcal{I}$ пропорционально $\langle N_T \rangle$ и отношению среднего сдвига разрыва за $\Delta \mathcal{I} - \beta \sigma_v \Delta \mathcal{I}$ к средней длине интервалов между ними $\langle l \rangle = 1/\nu$:

$$\Delta \langle N_T \rangle \sim - \langle N_T \rangle \nu(\mathcal{I}) \beta \sigma_v \Delta \mathcal{I}; \quad \nu_k = (1/l_k) \int_0^{\mathcal{I}} \rho_0(t') dt' \quad (4.10)$$

здесь σ_v - стандарт отклонения $\nu_k = (1/l_k) \int_0^{\mathcal{I}} \rho_0(t') dt'$. Поделив обе части (4.12) на $T \Delta \mathcal{I}$, устремляя $T \rightarrow \infty$, $\Delta \mathcal{I} \rightarrow 0$ и учитывая, что $\lim \langle N_T \rangle / T = \nu$, получим окончательно

$$\frac{d\nu}{d\mathcal{I}} = -\nu^2 \beta \sigma_v. \quad (4.11)$$

Заменяя, наконец, в выражении для ν_k длительность интервала l_k на $\langle l \rangle = 1/\nu$, запишем явное выражение для σ_v :

$$\sigma_v = \left[2\nu \int_0^{1/\nu} (1-\tau\nu) B_0(\tau) d\tau \right]^{1/2}, \quad (4.12)$$

где $B_0(\tau)$ - корреляционная функция входного поля. Здесь следует различать две ситуации: $S_0(0) \neq 0$ и $S_0(0) = 0$. Соответственно средняя частота разрывов уменьшается, согласно (4.11), (4.12), как

$$\nu(\mathcal{I}) = 1/(\beta \mathcal{I} \sqrt{\sigma^2 \tau_0})^{2/3}, \quad \nu(\mathcal{I}) = 1/(\beta \mathcal{I} \sigma \tau_0)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в спектр, получим

$$S(\omega; \mathcal{I}) = (\sigma \tau_0)^{2/3} / \omega^2 (\beta \mathcal{I})^{1/3}; E(\mathcal{I}) = (\sqrt{\sigma^2 \tau_0} / \beta \mathcal{I})^{2/3}; S_0(0) \neq 0$$

$$S(\omega; \mathcal{I}) = (\sigma \tau_0)^{1/2} / \omega^2 (\beta \mathcal{I})^{3/2}; E(\mathcal{I}) = (\sigma \tau_0 / \beta \mathcal{I}); \quad (4.14)$$

$$S_0(0) = 0, \quad \sigma^2 = \langle \rho^2 \rangle \cdot \epsilon$$

Отметим, что если оценить энергию как интеграл по спектру от $\omega = \nu$ до $\omega = \infty$, то такая оценка совпадает с оценкой энергии, полученной из (4.9). Это говорит о том, что в области частот, где $S \sim \omega^{-2}$, сосредоточена весьма значительная часть энергии акустической волны.

Более последовательный подход к анализу статистики пилообразной волны заключается в выводе и анализе системы зацепляющихся кинетических уравнений для многомерных распределений l_k и $\Delta \xi_k$. Однако при таком подходе аналитические результаты удается получить лишь при дополнительном предположении об автомодельности функций распределения [69]. При этом оказывается, что степенной характер спада энергии турбулентности такой же, как и приведенный выше. Другой подход основан на статистическом анализе абсолютных максимумов функции (4.2) [80]. Однако используемая в [80] аппроксимация начальных условий рядом независимых случайных величин не позволяет связать статистику турбулентности с временными масштабами $\rho_1(t)$. Отметим, что степенное спадание энергии случайной пилообразной волны с $l \sim \mathcal{I}^{-1}$ наблюдалось в численных экспериментах [70, 71, 80].

При конечных, но достаточно больших числах Рейнольдса ударный фронт пилообразной волны совпадает с профилем стационарной ударной волны. Асимптотику спектра в этом случае можно записать в виде

$$S(\omega; \mathcal{I}) = \frac{2\pi}{\omega^2 \langle l(\mathcal{I}) \rangle} \left\langle \frac{\omega^2}{sh^2[2\pi \omega \beta \mu \mathcal{I} / l(\mathcal{I})]} \right\rangle. \quad (4.15)$$

Для качественных оценок здесь можно положить $l \approx 1/\nu$. В результате получим, что при $\omega \gg \omega^* \sim 1/\mu \beta \mathcal{I} \nu(\mathcal{I})$ спектр волны экспоненциально спадает:

$$S(\omega; \mathcal{I}) \sim \nu(\mathcal{I}) \exp[-\pi \mu \beta \mathcal{I} \nu(\mathcal{I}) \omega], \quad (4.16)$$

а при $\nu < \omega < \omega^*$ имеет степенную асимптотику $S \sim \omega^{-2}$, причём по мере распространения волны эта граница сдвигается в сторону более низких частот: $\omega^* \sim \tau^{-5/3}$ при $S_0(0) \neq 0$ и $\omega^* \sim \tau^{-5/2}$ при $S_0(0) = 0$.

Остановимся на асимптотическом поведении акустической волны при $\tau \rightarrow \infty$ с учётом конечной вязкости ($\mu \neq 0$). Физически ясно, что при этом волна выйдет, в конце концов, на линейный режим распространения. Анализ асимптотики при $\tau \rightarrow \infty$ может быть проведен здесь на основе решения Хопфа [5]. Для нелинейных волн, спектр которых удовлетворяет условию $S(\omega) \sim \omega^k$ ($k \geq 2$) при $\omega \rightarrow 0$, энергетический спектр $S(\omega; \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ приобретает универсальный вид [72]:

$$S(\omega; \tau) = \frac{4\mu^2}{\beta^2} \omega^2 S_0(0, 0) \exp(-2\mu\omega^2\tau), \quad (4.17)$$

где вся информация о начальном поле заключается в константе $S_0(0, 0)$, зависящей от числа Рейнольдса $Re = \epsilon^2 \tau_0 / \mu$ (здесь ϵ^2 и τ_0 - дисперсия и время корреляции начального поля). Для малых Re практически существенно лишь однократное взаимодействие спектральных компонент нелинейной волны, и происходит незначительное увеличение крутизны спектра при $\omega \rightarrow 0$ [73]. Для $Re \gg 1$ крутизна спектра при $\omega \rightarrow 0$ экспоненциально возрастает с ростом Re . Физически это соответствует тому, что при $Re \gg 1$ образуются ударные фронты, "время жизни" которых обратно пропорционально числу Рейнольдса, и успевает происходить многократное слияние ударных фронтов, приводящее к увеличению характерных масштабов поля.

5. Статистика интенсивных квазипериодических волн

Наличие амплитудных и фазовых флуктуаций у интенсивных источников ультразвука приводит к необходимости рассмотрения статистики нелинейных первоначально квазимонохроматических волн. Достаточно подробный анализ таких волн до образования разрывов имеется в монографии [2]

(см. также работы [56-58]), поэтому основное внимание уделим анализу их эволюции на разрывной стадии.

Узкополосный сигнал можно записать в виде

$$p_s(t) = a(t) \cos[\omega_s t + \psi(t)], \quad (5.1)$$

где $a(t)$ и $\psi(t)$ — медленные амплитуда и фаза волны. При распространении квазимонохроматических волн можно выделить две стадии: вначале, когда конечность ширины спектральной линии еще не сказывается на характере распространения волны, можно воспользоваться квазистатическим приближением, т.е. считать, что локально — (на каждом из периодов) модулированная волна меняется как гармоническая с соответствующими значениями амплитуды и частоты. На достаточно больших расстояниях квазистатическое приближение становится неприменимым. При этом появляется ряд новых эффектов, отсутствующих у гармонических сигналов, а именно, образование НЧ компоненты в спектре волны, уширение спектральных линий гармоник по мере распространения волны и т.д.

Рассмотрим вначале фазовые флуктуации входной волны, считая, что $a(t) = a_0$. Можно показать, что в квазистатическом приближении корреляционная функция k -й гармоники в случае гауссовой статистики фазы имеет вид [58, 74, 78]

$$B_k(\tau, \tau) = \frac{A_k^2(\tau)}{2} \cos k\omega_s \tau \exp[-k^2 D_\psi(\tau)], \quad (5.2)$$

где $D_\psi(\tau) = \frac{1}{2} \langle [\psi(t+\tau) - \psi(t)]^2 \rangle$, A_k — амплитуды гармоник регулярной волны. Из (5.2) видно, что с ростом номера гармоники происходит увеличение фазовых флуктуаций, приводящее к уменьшению интенсивности дискретной составляющей и уширению непрерывной линии спектра [58, 74, 75, 78].

Более строгий анализ показывает, что форма спектра гармоник сигнала с фазовой модуляцией несимметрична [58, 74, 78], однако эта асимметрия весьма мала. Следует также отметить, что на разрывной стадии в спектре акустической волны появляется низкочастотная компонента [87].

Обсудим теперь особенности распространения амплитудно-

модулированных сигналов. До появления разрывов вероятностное распределение акустической волны сохраняется (см. разд. 2,3). Эволюция вероятностного распределения квазимонохроматической волны на квазистатической стадии была исследована в работах [66,67,76]. Так, для входного гауссова сигнала было получено

$$W(\rho; \tau) = \exp(-\rho^2/2\sigma^2) (2\pi\sigma^2)^{-1/2} [\Phi(\rho/\sigma \sqrt{\tau} \rho \tau \omega_0) + \beta \omega_0 \tau (2\pi)^{1/2} \exp(-\rho^2/2\sigma^2 \sqrt{\tau} \rho \tau \omega_0)], |\rho| < \pi/\beta \tau \omega_0, \quad (5.3)$$

где $\Phi(z)$ - интегральная функция нормального распределения. Наиболее существенно здесь то, что в волне отсутствуют выбросы за уровень $\pm \pi/\beta \tau \omega_0$. Таким образом, для АМ сигнала нелинейная среда является ограничителем с уровнем ограничения, зависящим от расстояния. При $\sigma \beta \tau \omega_0 \gg 1$ начальное гауссово распределение переходит в равномерное $\rho \in [-\pi/\beta \tau \omega_0, \pi/\beta \tau \omega_0]$, что соответствует практически регулярной пилообразной волне. Если входной сигнал имеет флуктуации частоты $\Omega(t)$, то в пилообразной волне будет флуктуировать период, а соответственно, и амплитуда. При $\sigma \beta \omega_0 \tau \gg 1$ распределение $W(\rho; \tau)$ по-прежнему близко к равномерному, но теперь форма переходной области повторяет интегральную функцию распределения частоты [67].

Для более корректного анализа статистики акустической волны на разрывной стадии необходимо учитывать ещё движение разрывов. При $\sigma \beta \omega_0 \tau \gg 1$, когда первоначально непрерывная волна преобразуется в последовательность треугольных импульсов с одинаковым наклоном, описание её динамики задаётся совокупностью "нулей" η_k и координат разрывов (см. в разд.4). Для квазимонохроматического сигнала на достаточно широком интервале $(\omega_0/\gamma)^2 \gg \sigma \beta \omega_0 \tau \gg 1$ можно пренебречь слиянием ударных фронтов, и поэтому "нули" пилообразной волны η_k определяются условием

$$\omega_0 t_n + \psi(t_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad (5.4)$$

Согласно (4.3) для координат и амплитуд разрывов имеем [67,77,78]

$$\xi_n = \frac{t_{n+1} + t_n}{2} - v_n \beta \tau; \quad v_n = \left(\frac{b}{\omega_0} - \frac{a \varphi}{\omega_0^2} \right), \quad b = a'_i(t_n),$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \Omega'_t(t_n), a = a(t_n); \Delta p_n = (t_{n+1} - t_n) / \beta \tau = \\ &\approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right) / \beta \tau, \Omega = \Omega(t_n). \end{aligned} \quad (5.5)$$

На основе этих формул, связывающих статистику квазимонохроматической волны со статистикой пилообразной, можно провести детальный анализ статистических характеристик акустической волны на разрывной стадии распространения [67, 77, 78].

Рассмотрим основные эффекты, возникающие при распространении модулированной волны в нелинейной среде на разрывной стадии. Из (5.4), (5.5) видно, что пилообразная волна имеет как амплитудную модуляцию, связанную с флуктуациями амплитуды разрывов, так и фазовую, связанную с флуктуациями его координат. Амплитуды разрывов не зависят от входной амплитуды квазимонохроматической волны и, следовательно, в нелинейной среде происходит подавление входной амплитудной модуляции. Флуктуации амплитуды $\Delta p \approx (2\pi/\omega_0) [1 - (\Omega/\omega_0)] / \beta \tau$ обусловлены флуктуациями частоты входного сигнала и, в силу его квазимонохроматичности, они много меньше регулярной составляющей. Фазовые флуктуации обусловлены двумя причинами. Во-первых, это флуктуации, связанные с флуктуациями фазы входного сигнала, которые не зависят от расстояния и поэтому не вызывают дополнительного уширения спектра по мере распространения волны. Кроме того, к фазовой модуляции приводит также движение ударных фронтов, причём, как видно из (5.5), величина этих фазовых флуктуаций растёт по мере распространения волны, что приводит к уширению спектра гармоник разрывной волны. Как можно убедиться из (5.5), разрыв смещается по оси p на величину $u_H \approx u_H(t_n)$, что соответствует появлению в спектре акустической волны низкочастотной составляющей $u_H(t)$.

Обсудим более детально случай амплитудно-модулированной волны. Для $W(p; x)$ на разрывной стадии имеем [67, 76]

$$W(p; x) = \frac{\beta \omega_0 x}{2\pi} \left[F_0 \left(\omega_0 p + \frac{x}{\beta \tau} \right) - F_0 \left(\omega_0 p - \frac{x}{\beta \tau} \right) \right], \quad (5.6)$$

где $F_0(\beta)$ - интегральная функция распределения производной амплитуды. На расстояниях $(\sigma\omega_0)^{-1} \ll \beta\tau \ll \sigma_1^{-1}$ распределение близко к равномерному, но, в отличие от квазистатического приближения, форма переходной области при $|\rho| = \mathcal{X}/\beta\omega_0\tau$ определяется интегральной функцией распределения $F_0(\beta)$. При $\beta\tau \gg \sigma_1^{-1}$ распределение $W(\rho;\tau)$ повторяет форму $W_0(\beta)$:

$$W(\rho;\tau) = \omega_0 W_0(\omega_0, \rho). \quad (5.7)$$

В частности, для гауссовой статистики входного поля $W(\rho;\tau)$ имеет при этом вид гауссова распределения с дисперсией $\sigma_\rho^2 = \sigma_0^2 \gamma^2 / \omega_0^2 (\gamma^2 = -R^{(2)}(0))$.

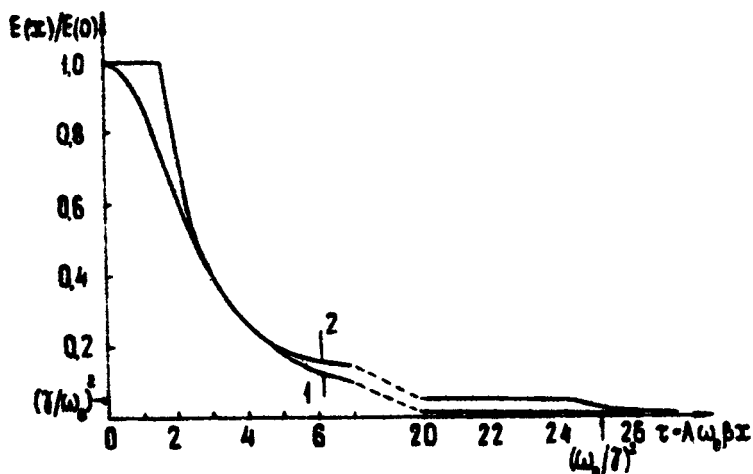
Сравним на основе формул (5.3), (5.6) затухание средней энергии гармонического сигнала и сигнала с шумовой амплитудной модуляцией. Для гармонического сигнала энергия сохраняется до точки образования разрыва $\tau_p = 1/\beta\Omega\omega_0$, а при $\tau \gg \tau_p$ равна $\mathcal{X}^2/3\omega_0^2\beta^2\tau^2$ и не зависит от начальной амплитуды. Для квазимонохроматической волны, из-за флуктуации амплитуды, разрывы начинаются уже при $\tau \ll \tau_p$, и вследствие этого случайная волна затухает более эффективно [62, 63, 66, 67]. На стадии развитых разрывов, но до их слияния, как видно из уравнения (4.7), темп затухания шумовой волны с АМ модуляцией и гармонического сигнала одинаков, для энергии шумового сигнала из (4.7) или же из (5.6) имеем

$$\dot{E}(\tau) = \Delta E_n + \alpha^2/\tau^2, \quad (5.8)$$

где $\alpha^2 = \mathcal{X}^2/3\omega_0^2\beta^2$. Появление в (5.11) постоянной составляющей ΔE_n обусловлено наличием в волне низкочастотных компонент, появившихся из-за автодетектирования исходной волны. При этом для АМ сигнала $\Delta E_n = \sigma_1^2/\omega_0^2$, а для ЧМ сигнала $\Delta E_n = \sigma_2^2\Omega_0^2/\omega_0^4$, где σ_1^2 и σ_2^2 - дисперсии производных амплитуды и частоты входного сигнала [67].

Формула (5.8) справедлива на расстояниях, где ещё не существенно слияние разрывов. Для квазимонохроматической волны с шириной спектра γ характерное расстояние τ_{cl} , где начинается слияние разрывов, равно $\tau_{cl} \sim \omega_0^2/\gamma^2\sigma\beta\omega_0$ и много больше как расстояния выхода волны на режим раз-

вытых разрывов $T_p \sim 1/\sigma\beta\omega_0$, так и расстояния выхода $W(p;x)$ на стационарный режим (5.10) $T_{ст} \sim \omega_0/\gamma\sigma\beta\omega_0$. Эволюция энергии волны показана на рис.4.



Р и с. 4. Изменение энергии акустической волны:
 1 - регулярная гармоническая волна на входе;
 2 - квазимонохроматическая волна (γ , ω_0 - ширина и несущая частота спектра); Начальные энергии волн равны

Из (4.5), (5.5) видно, что спектр определяется двумерным распределением U_H и Δp и, в частности, для АМ сигнала выражается через двумерную характеристическую функцию U_H . При гауссовой статистике $U_H = b/\omega_0$ имеем [77,78]

$$S(\omega; \tau) = \frac{1}{\beta^2 \omega^2 \tau^2} \left\{ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 1}}^{+\infty} \exp(-\kappa^2 \sigma_H^2 \beta^2 \omega_0^2 \tau^2) \delta(\omega - \kappa \omega_0) + \right. \\ \left. + \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma_H^2 \beta^2 \omega^2 \tau^2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(b_H(\tau) \beta^2 \omega^2 \tau^2) - 1] \exp[-i(\omega - \kappa \omega_0) \tau] d\tau \right\} \quad (5.9)$$

где $B_n(\tau) = \langle v_n(t+\tau)v_n(t) \rangle$ и для АМ сигнала на входе $B_n(\tau) = \langle b(t+\tau)b(t) \rangle / \omega_0^2 = -\sigma_n^2 R_n^{(2)}(\tau) / \omega_0^2$. Из (5.9) видно, что из-за перехода амплитудной модуляции в фазовую уменьшаются амплитуды дискретных гармоник и появляются pedestals вблизи дискретных линий. Уширение pedestals определяется параметром $K\mathcal{M} = K\sigma_n \beta \omega_0 \mathcal{T}$, имеющим смысл характерного смещения ударного фронта относительно периода волны. При $K\mathcal{M} \ll 1$ имеем из (5.9) $S_k(\omega; \mathcal{T}) =$

$$-S_n(\omega - k\omega_0) = \frac{S_b(\omega - k\omega_0)}{\omega_0^2} \frac{(\omega - k\omega_0)^2}{\omega_0^2} S_n(\omega - k\omega_0), \quad (5.10)$$

где $S_n(\omega)$ - спектр $v_n(t)$. Отметим, что в достаточно широких пределах спектр не зависит от номера гармоники и расстояния от входа. Обусловлено это тем, что увеличение индекса частотной модуляции по мере распространения волны компенсируется одновременным уменьшением амплитуд гармоник с ростом расстояния и номера гармоники.

При больших индексах частотной модуляции $\mathcal{M}K \gg 1$ спектр гармоники приобретает универсальный вид [78]

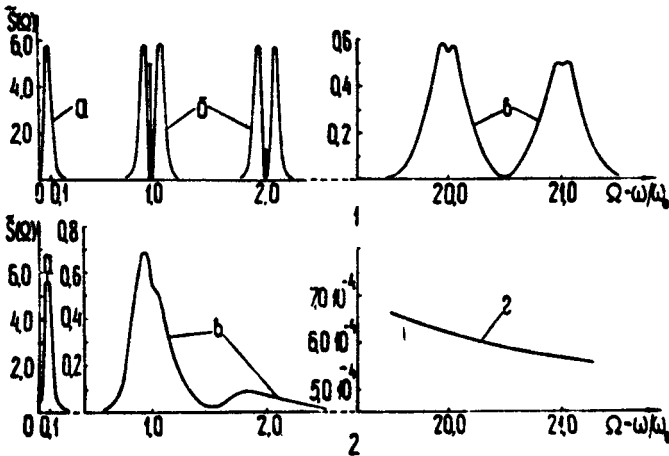
$$S_k(\omega; \mathcal{T}) = \frac{1}{\beta^3 \omega^3 \mathcal{T}^3} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n^2 \gamma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - k\omega_0}{\sigma_n \gamma \omega \beta \mathcal{T}}\right)^2\right], \quad (5.11)$$

где $\gamma^2 = -R_n''(0)$ - ширина спектра $v_n(t)$. Асимметрия pedestala обусловлена тем, что эффективность взаимодействия гармоник пропорциональна разности частот и, следовательно, уширение спектра гармоники при $\omega > k\omega_0$ из-за взаимодействия с НЧ волной происходит более эффективно. Из (5.11) видно, что характерная ширина спектра гармоники равна $\gamma K \sigma_n \beta \omega_0 \mathcal{T} = \gamma K \mathcal{M}$ и возрастает с ростом K и \mathcal{T} . При $\gamma K \sigma_n \beta \mathcal{T} \sim 1$ спектры соседних гармоник сливаются и спектр волн становится сплошным со степенным законом спада $S(\omega; \mathcal{T}) \sim \omega^{-2}$ (см. (4.6)).

При конечных числах Рейнольдса ($Re \gg 1$) форма ударных фронтов совпадает с формой стационарного ударного фронта, а их безразмерная ширина равна $\delta = 2\mu \omega_0^2 \mathcal{T} / \pi$. Учёт этого факта приводит к появлению в выражении для спектра множителя [78]

$$K(\omega, \tau) = \frac{(\omega \pi \delta / 2 \omega_0)^2}{\text{sh}^2(\omega \pi \delta / 2 \omega_0)} \sim \begin{cases} 1 & , \omega < \omega_0 / \delta \\ \exp(-\omega \pi \delta / \omega_0) & , \omega > \omega_0 / \delta \end{cases} \quad (5.12)$$

экспоненциально обрезаящего спектр волны на частотах $\omega > \omega_0 / \delta$. Эволюция спектра сигнала с АМ модуляцией приведена на рис.5.



Р и с. 5. Энергетический спектр акустической волны на разрывной стадии. На входе акустическая волна имела амплитудную модуляцию $u(t) = u_0 + u(t)$ со спектром $u/\omega_0: \sigma_u^2 \omega^2 \exp(-\omega^2 / 2\gamma^2) / \sqrt{2\pi} \gamma^3$. Графики построены для безразмерного спектра $\xi = S \omega_0 / \sigma_u^2$, $\xi = \gamma / \omega_0 = 0,05$, безразмерный параметр $m = \sigma_u \beta \omega_0 \tau \cdot 1 - m = 0,1$; 2 - $m = 2$: а - низкочастотная компонента, б - $m \ll 1$, в - $m \ll 1$, г - $m \ll 1$ - степенной спектр $S = 1/\omega^2 \omega_0 \beta^2 \tau^2$

Следует отметить, что приведенный выше анализ целиком переносится и на случай взаимодействия низкочастотного шума $\xi(t)$ с монохроматическим сигналом, если положить в (5.5) $U_H(t) = \xi(t)$ [74].

Заключение

Основное внимание в обзоре было уделено статистическому анализу одномерных нелинейных шумовых акустических волн. Однако, как уже отмечалось, результаты "одномерной" теории в рамках НГА применимы и к анализу распространения неодномерных ограниченных волн в неоднородных средах. Кроме того, использование одномерной статистической теории не вызывает принципиальных затруднений и в том случае, когда нелинейные искажения и дифракция пространственно разнесены и применим поэтапный подход. Тем не менее, и здесь до сих пор не решено множество конкретных задач, представляющих как физический интерес, так и важных с точки зрения приложений.

Перечисленные выше задачи далеко не исчерпывают предмет статистической нелинейной акустики. Так, в обзоре не были освещены задачи взаимодействия встречных акустических волн [49,71,79]. Не менее интересным является вопрос о взаимодействии регулярных и шумовых волн. Если одномерная теория взаимодействия достаточно развита [2,56,74,94], то в трехмерной теории на сегодняшний день получены лишь полукачественные результаты [2,56,94], а также результаты, основанные на использовании теории возмущений и не учитывающие эффектов самовоздействия [95,96]. Весьма важен для приложений статистический анализ параметрической генерации низкочастотных шумовых волн. Однако полученные к настоящему времени результаты [78,86-93] далеко не исчерпывают всего многообразия режимов работы параметрических излучателей и приемников [81-85]. Отметим еще задачу распространения и рассеяния акустических волн конечной амплитуды в случайно неоднородных средах. Хотя по этому вопросу и имеется ряд работ (см., например, [33-36], [97-99]), проблем здесь гораздо больше, чем достаточно обоснованных результатов [100, 101].

Остановимся ещё на сравнении теории с результатами экспериментов. Отметим, прежде всего, что численные эксперименты [70,71,80] хорошо согласуются с одномерной статистической теорией. В частности, теоретические выводы об асимптотике спектра $S(\omega) \sim \omega^{-2}$ и $S(\omega) \sim e^{-4\omega}$ затухания энергии $E \sim I^{-1}$ надежно подтверждаются численными экспериментами.

Сложнее дело обстоит при сравнении с физическими экспериментами. Несмотря на то, что теория качественно правильно предсказывает все эффекты, наблюдавшиеся в экспериментах, она ещё не может претендовать на количественное согласие. Так, в работах [102,103] экспериментально исследовалось распространение плоских нелинейных случайных и регулярных волн в трубах, где было обнаружено хорошее соответствие с результатами численного моделирования. Однако сравнение этих экспериментов с теорией затрудняется тем, что к настоящему времени статистическая теория развита лишь в некоторых предельных случаях: бесконечные числа Рейнольдса, до образования разрывов и на стадии развитых разрывов, для квазимонохроматических сигналов и т.д. и не работает в промежуточных областях. Таким образом, одним из направлений статистической нелинейной акустики, требующих дальнейшего развития, является теория одномерных случайных волн с учётом конечности числа Рейнольдса и предсказывающая поведение волны в произвольных сечениях. Тем более нельзя считать законченной статистическую теорию нелинейной дифракции, где имеется лишь качественное согласие с экспериментом [104,105,106].

В то же время обычно в экспериментах измеряются лишь простейшие характеристики случайных акустических волн. В теории же рассчитываются гораздо более подробные характеристики, например, вероятностное распределение, детальная структура спектра и т.д. Представляет несомненный интерес экспериментальная проверка и измерение предсказанных теорией эффектов.

Подводя итог, отметим, что ближайшая задача статистической нелинейной акустики состоит в приближении теоретических исследований к реальным физическим условиям, тем более, что во многих случаях это не вызывает принципиальных затруднений. С другой стороны, следует ожидать развития экспериментальных работ в области нелинейной статистической акустики.

Л и т е р а т у р а

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М., Наука, 1966.
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
3. Burgers L.M.-Trans.Neth.Acad.Sci., Amsterdam, 1939, 17, p.1.
4. Островский Л.А. - Изв.вузов, Радиофизика, 1976, 19 , № 5, -6, с.661.
5. Hopf E.-Comm.Pure Appl.Math., 1950, 3, p.201.
6. Benton E.R., Platzman G.W. - Quart.Appl.Math., 1972, 30, N1, p.195.
7. Keller J.B. - J.Appl.Phys., 1954, 25,N8, p.838.
8. Губкин К.Е. - ПММ, 1958, 22^о, № 4, с.561.
9. Островский Л.А. - ПММ, 1963, 27 , № 5, с.924.
0. Пелиновский Е.Н., Петухов Ю.А., Фридман В.Е. - Изв . АН СССР. Физ. атмос. и океана, 1979, 15 , №4, с.436.
1. Островский Л.А., Фридман В.Е. - Акуст журн., 1972 , 18 , №4, с.584 .
2. Островский Л.А., Сутин А.М. - Акуст. журн., 1976 , 22 , №1, с.93.
3. Сутин А.М. - Акуст. журн., 1978, 24 , №4, с.593.
4. Кляцкин В.И., Татарский В.И. - УФН, 1973, 110 , №4, с. 499.
5. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., Наука, 1975.
6. Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. М., Наука, 1975.
7. Хопф Э. Об описании турбулентности методами функционального анализа. - В сб.: Гидродинамическая неустойчивость. М., Мир, 1974.
8. Ахманов С.А., Чиркин А.С. Статистические явления в нелинейной оптике. М., изд-во МГУ, 1971.
9. Ахманов С.А. - Изв.вузов, Радиофизика, 1974, 17 , № 4, с.541.
0. Руденко О.В., Чиркин А.С. - ДАН СССР, 1974, 214 , № 5, с.1045 .
1. Малахов А.Н., Сагчев А.И. - Изв.вузов, Радиофизика , 1974, 17 ; № 5, с.699.

22. Саичев А.И. - Изв.вузов, Радиофизика, 1974, № 7 , с.1025 .
23. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д., Элементы математической физики (Среда из невзаимодействующих частиц) . М., Наука, 1973.
24. Sigel A., Jmamura T., Meecham W.C. - J. Math.Phys., 1965, 6, N5, p.07.
25. Meecham W.C., Sigel A. -Phys.Fluids, 1964, 7, p.1178.
26. Orszag S.A., Bissonete L.R. -Phys.Fluids, 1967, 10,N12, p.2603.
27. Meecham W.C., Jyer P., Clever W.C. -Phys. Fluids, 1975, 18, N12, p.1610.
28. Yano M., Jmamura T. - Phys.Fluids, 1972, 15, N4, p.408.
29. Kraichnan R.H. - Phys.Fluids, 1968, 11, N3, p.265.
30. Walron J.J. - Phys.Fluids, 1970, 13, N6, p. 1634.
31. Brissand A., Frisch U., Leorat J. - Ann.Geo-phys., 1973, 29, N4, p.539.
32. Jeng D.T., Foerster R., Haaland S., Meechan W.C. - Phys.Fluids, 1966, 9, N11, p.2114.
33. George A.R., Plotkin K.J. - Phys.Fluids, 1971, 14, N3, p.548.
34. Plotkin K.J., George A.R. - J.Fluid Mech., 1972, 54, N3, p.449.
35. Пелиновский Е.Н., Саичев А.И., Фридман В.Е. - Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17 , № 6, с.875.
36. Тамойкин В.В., Файнштейн - ЖЭТФ, 1973, 64 , № 2, с.505 .
37. Моисеев С.С., Тур А.В., Яновский В.В. - Изв. вузов . Радиофизика, 1977, 20 , № 7, с.1032 .
38. Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Яновский В.В. - В сб.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с.105.
39. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., Наука, 1970.
40. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., Наука, 1972.
41. Зарембо Л.К. - Акуст. журн., 1961, 7 , № 2, с.189.

42. Кузнецов В.П. - Акуст.журн., 1969, 15, №4, с.554.
43. Кузнецов В.П. - Акуст.журн., 1970, 16, №1, с.155.
44. Кляцкин В.И. - Изв. вузов, Радиофизика, 1977, 20, № 8, с. 116.
45. Саичев А.И. - Изв. вузов, Радиофизика, 1978, 21, № 7, с. 996.
46. Малахов А.Н., Саичев А.И. - Изв. вузов, Радиофизика, 1979, 22, № 5, с.577.
47. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. - Тр. IX Всесоюзн. акуст. конф. М., 1977, секц. Б, с. 79.
48. Гурбатов С.Н., Дубков А.А., Малахов А.Н., Саичев А.И. Докл. УП Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению радиоволн. Т.1. Ростов-на-Дону, 1977, с.162.
49. Саичев А.И. - ПММ, 1977, 41, №6, с.1107.
50. Гурбатов С.Н. - Изв.вузов. Радиофизика, 1980, 23, № 4, с.452.
51. Монин А.С. - ДАН СССР, 1960, 134, № 2, с.304.
52. Новиков Е.А. - ПММ, 1969, 33, № 5, с.887.
53. Любимов Б.Я. - ДАН СССР, 1969, 184, №5, с.1069.
54. Малахов А.Н., Саичев А.И. - Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, №10, с.1559.
55. Малахов А.Н., Саичев А.И. - ЖЭТФ, 1974, 67, №9, с. 940.
56. Руденко О.В., Чиркин А.С. - ЖЭТФ, 1974, 67, №5, с.1903.
57. Руденко О.В., Чиркин А.С. - Акуст.журн., 1974, 20, № 2, с.297.
58. Руденко О.В., Чиркин А.С. - Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 10, с.2172.
59. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.1. М., Сов.радио, 1974.
60. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М., Наука, 1970,
61. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е. - Акуст.журн, 1972, 18, № 4, с.590.
62. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е. - В сб.: Акустические методы и средства исследования океана. Ч. 1. Владивосток, 1974, с.35.

63. Пеллиновский Е.Н., Фридман В.Е. - В сб.: Прикладная акустика, Таганрог, 1976, с.26.
64. Webster D.A., Blackstock D.T. - J.A.S.A. 1979, 65, N4, p.1053.
65. Гурбатов С.Н. - Изв. вузов, Радиофизика, 1977, 20, № 1, с.112.
66. Руденко О.В., Чиркин А.С. - ДАН СССР, 1975, 225, № 3, с.520.
67. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н. - Акуст.журн., 1977, 23, № 4, с.669.
68. Кадомцев Б.Б., Петянашвили В.И. - ДАН СССР, 1973, 208, № 4, с.794.
69. Tatsumi T., Kida S. - J.Fluid Mech., 1972, 55, N4, p.659.
70. Crow S.C., Canavan G.H. - J.Fluid Mech., 1970, 41, N1, p.387.
71. Tokunaga H. - J.Phys.Soc.Japan, 1970, 41, N1, p.328.
72. Гурбатов С.Н., Дубков А.А., Малахов А.Н. - ЖЭТФ, 1977, 72, № 2, с.456.
73. Kaling W.H., Siegel A. - J.Fluid Mech., 1970, 41, N3, p.593.
74. Гурбатов С.Н. - Акуст.журн., 1980, 26, №4, с.551.
75. Малахов А.П. Флуктуации в автоколебательных системах. М., Наука, 1968.
76. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Санчев А.И.-Докл. УП Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению радиоволн. Т. 1, Ростов-на-Дону, 1977, с.177.
77. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Шепелевич Л.Г.-Докл. УП Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению радиоволн. Т.1. Ростов-на-Дону, 1977, с.180.
78. Гурбатов С.Н., Шепелевич Л.Г. - Изв.вузов. Радиофизика, 1978, 21, № 11, с.1627.
79. Tatsumi T., Tokunaga H. - J.Fluid Mech., 1974, 65, p.581.
80. Kida S. - J.Fluid Mech., 1979, 93, part 2, p.337.

81. Westerwelt P.J., J.A.S.A., 1963, 35, N4, p.535.
82. Наугольных К.А., Солуян С.А., Хохлов Р.В. - Акуст. журн., 1963, 19, № 2, с.192.
83. Зверев В.А., Калачев А.И. - Акуст. журн., 1968, 14, № 2, с.214.
84. Берктей Х.О. - В сб.: Подводная акустика, М., Мир, 1970, с.325.
85. Мюир Т.Дж. - В сб.: Акустика морских осадков, М., Мир, 1977, с.227.
86. Гурбатов С.Н., Дубков А.А. - Акуст.журн., 1977, 23, № 2, с.260.
87. Гурбатов С.Н. - Изв.вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 5, с.796.
88. Новиков Б.К. Прикладная акустика. Таганрог, 1974, 5, с.3.
89. Новиков Б.К., Руденко О.В., Чиркин А.С. - В сб.: Нелинейная гидроакустика - 76. Таганрог, с.15.
90. Новиков Б.К., Руденко О.В. - Акуст.журн., 1977, 23, № 5, с.797.
91. Foote K.J. - Proc.1973 Symp. Finite-amplitude wave effects in fluid, Copenhagen, Ed. L.Bjørnø, IPS, Business Press, Ltd, 1974, p.145.
92. Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Малахов А.Н. - Акуст. журн., 1980, 26, № 3, с.701.
93. Зарембо Л.К., Чунчузов И.П., Вестник МГУ, сер.Физика, 1980, 19, № 4, с.120.
94. Красильников В.А., Руденко О.В., Чиркин А.С. - Акуст. журн., 1975, 21, № 1, с.124.
95. Westervelt P.J., J.A.S.A., 1976, 59, N4, p.760.
96. Бреховских А.М., Гончаров В.В., Наугольных К.А., Рыбак С.А. - Изв.вузов, Радиофизика, 1976, 19, № 5-6, с.842.
97. Пелиновский Е.Н., Саичев А.И., Фридман В.Е. - Акуст. журн., 1972, 18, № 4, с.627.
98. Малахов А.Н., Пелиновский Е.Н., Саичев А.И., Фридман В.Е. - Тезисы докл. VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. Ч.1. М., 1975, с.125.
99. Малахов А.Н., Пелиновский Е.Н., Саичев А.И., Фридман В.Е. - Препринт № 85. Горький, НИРФИ, 1976.

100. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Пелиновский Е.Н. - Материалы IX Всесоюзн. акуст. конф. М., 1977, секд. Б, с. 83 .
101. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Пелиновский Е.Н. - Изв. вузов, Радиофизика, 1978, 21 , № 10, с.1082.
102. Pectorius F.M., Blackstock D.T. Proc. 1973 Symp. Finite-amplitude wave effects in fluid, Copenhagen, Ed. L.Bjørnø, Business Press, Ltd, 1974, p.24.
103. Webster D.A., Blackstock D.T. - J.A.S.A., 1978, 63, p.687.
104. Stanton T.K., Beyer R.T. - J.A.S.A., 1978, 64, p.1667.
105. Зорин В.А., Колотилов Н.Н., Руденко О.В., Черенецкая Е.Б., Чиркин А.С. - В сб. докладов симпозиума по физике акусто-гидродинамических явлений, М., Наука , 1975, с.264.
106. Webster D.A., Blackstock D.T. Experimental Investigation of Outdoor Propagation of Finite-Amplitude Noise, NASA Contractor Report 2992, NASA, 1978.

МОДЕЛИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ, КАК НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

Ю.А.Кобелев, Л.А.Островский

Введение

Одно из новых направлений нелинейной акустики, активно развиваемых в последние годы, связано с использованием сред и систем, обладающих повышенной нелинейностью в сочетании с дисперсией скорости звука. К таким средам относится и смесь жидкости с пузырьками газа. Нелинейная акустика подобных систем представляет собой чрезвычайно сложную как в теоретическом, так и в экспериментальном отношении область. Известно, что даже поведение отдельного пузыря газа в звуковом поле как нелинейного осциллятора представляет существенные трудности для исследования. Если же рассматривается коллективный отклик системы пузырьков на акустическое поле конечной амплитуды, то задача, как правило, может быть решена только при использовании сильно идеализированных моделей. Простейшая модель такого рода [1-4] - это система пузырьков одинаковых размеров. Изучение такой модели методами, характерными для современной теории нелинейных волн, дает ряд физически интересных результатов. Для нее было получено известное уравнение Бюргерса-Кортвега де-Вриза, рассмотрены стационарные волны произвольной амплитуды, найдены акустические солитоны и т.д.

К сожалению, однако, для реальных ситуаций такая классическая модель зачастую не является адекватной. Как

правило, существенную роль играют, по крайней мере, два фактора: а) теплообмен между воздухом в пузырьке и жидкостью; б) непрерывное распределение пузырьков по размерам, а, следовательно, и по резонансным частотам. Учет первого из этих факторов приводит, вообще говоря, к сложной формулировке уравнения состояния газожидкостной смеси, вид которого зависит от скорости сжатия и расширения пузырьков, т.е. от характерной частоты акустического воздействия. Эффекты теплопроводности рассматривались ранее в [4] на основе эмпирического описания, которое, как видно из дальнейшего, имеет очень ограниченные пределы применимости. Что касается второго фактора, то он особенно четко выражен для узкополосных (квазигармонических) акустических возмущений, поскольку в реальной системе практически всегда имеются резонансные пузырьки, которые часто оказывают определяющее влияние как на нелинейность, так и на диссипацию в акустических волнах.

В настоящей статье рассматривается уравнение состояния системы жидкость — газ и выводятся нелинейные модельные уравнения, описывающие распространение сравнительно низкочастотных акустических волн. Существенно, что такие модельные уравнения оказываются различными в зависимости от условий теплообмена между жидкостью и газом (в изотермическом и адиабатическом случаях). В работе рассмотрены также резонансные эффекты — генерация сигналов удвоенной и разностной частот в среде с непрерывно распределенными по размерам пузырьками. Приводятся некоторые результаты экспериментальных исследований, иллюстрирующие справедливость принятых моделей. Рассмотрение ведется в приближении гомогенной среды, когда количество пузырьков на интервале порядка длины акустической волны достаточно велико.

1. Уравнения нелинейной акустики для смеси жидкости с пузырьками газа

В гомогенном приближении такая смесь описывается уравнениями гидродинамики

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_c \bar{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = \frac{1}{\rho_c} \nabla p, \quad (1.1)$$

где ρ_c , \bar{v} — плотность и скорость движения частиц смеси, а p — акустическое давление. Предполагая сохранение массы газа в каждом пузырьке и пренебрегая движением пузырьков относительно жидкости, запишем также выражение для ρ_c :

$$\rho_c = \rho_{c0} [(1 - V_0)(\rho_{ж0}/\rho_{ж}) + V]^{-1}, \quad (1.2)$$

где $\rho_{c0} = \int \rho_{г0}(R_0) V_{00} n(R_0) dR_0 + (1 - V_0) \rho_{ж0}$,
 $\rho_{ж}$, $\rho_{г}(R_0)$ — плотности жидкости и газа в пузырьке радиуса R_0 ; V — объемное содержание газа в смеси, равное

$$V = \int V_0 n(R_0) dR_0, \quad (1.3)$$

где \int указывает на невозмущенные значения величин, V_0 — объем отдельного пузырька, $n(R_0)$ — функция распределения пузырьков по размерам ($n(R_0) dR_0$ — количество пузырьков с радиусом от R_0 до $R_0 + dR_0$ в единице объема среды).

Раскладывая выражения (1.2) в ряд с точностью до квадратичных членов по малым величинам $(\rho_{ж} - \rho_{ж0})/\rho_{ж0}$ и $\Delta V = V - V_0$, и подставляя (1.1), получим нелинейное волновое уравнение, которое принимает особенно простой вид при условии $10^{-9} \ll V_0 \ll 1$, когда нелинейность определяется в основном пузырьками

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Delta V}{\partial t^2} = 0, \quad (1.4)$$

где $c_0 = c_{ж0}$, $\rho_0 = \rho_{ж0}$.

Для нахождения связи между ΔV и p необходимо рассмотреть колебания отдельного пузырька под действием акустического давления. В пренебрежении поверхностным натяжением

жением, а также вязкостью и сжимаемостью жидкости, для характерных частот колебаний, много меньших резонансной частоты пузыря, уравнение его колебаний

$$p_r = p_0 + p + \frac{\gamma p_0}{\omega_0^2 V_{n0}} \ddot{V}_n, \quad (1.5)$$

где p_0 - невозмущенное давление в жидкости (пузыре), γ - постоянная адиабаты газа, ω_0 - резонансная частота адиабатических колебаний пузыря, p_r - давление в пузыре.

Для получения уравнения состояния пузыря, т.е. связи между p_r и V_n , проведем "нелинейное" обобщение теории, развитой в [5] для линейных колебаний. Для этого выделим в покоящемся пузыре объем воздуха dV_{n0} . В процессе колебаний этот объем будет изменяться (для идеального газа) по закону

$$dV_n = (p_{r0}/p_r) \frac{T}{T_0} dV_{n0}. \quad (1.6)$$

Считая давление в пузыре однородным, а колебания сферически симметричными ($dV_{n0} = 4\pi r^2 dr$) и интегрируя (1.6) по r , получим

$$V_n p_r - V_{n0} p_{r0} = 4\pi (p_{r0}/T_0) \int_0^{R_0} \theta r^2 dr, \quad (1.7)$$

где $\theta = T - T_0$; переменная θ удовлетворяет уравнению теплопроводности в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nu \theta) = D \frac{\partial^2(\nu \theta)}{\partial r^2} + \nu \frac{T_0(\gamma-1)V_n}{p_{r0} \gamma V_{n0}} \frac{d p_r}{d t}. \quad (1.8)$$

Здесь ν является переменной Лагранжа, поэтому в (1.8) отсутствует конвективный член; считается также, что коэффициент теплопроводности газа D постоянен. Будем решать уравнение (1.8) с граничными условиями

$$(\nu \theta)_{r=0} = (\nu \theta)_{r=R_0} = 0. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) с граничными условиями (1.9) образуют замкнутую систему.

Сделав, как и в [5], разложение в ряд Фурье по времени слагаемых в уравнениях (1.7), (1.8) и решая (1.8) с граничными условиями (1.9) для каждой фурье-компоненты величины (r, θ) , а затем подставив полученный результат в (1.7) и выполнив интегрирование по r , получим нелинейное уравнение состояния пузыря в фурье-представлении:

$$(V_n p_r - V_{n0} p_{r0})_\omega = \frac{r^{-1}}{i\omega\gamma} [1 - M(\omega)] (V_n \frac{d p_r}{d t})_\omega, \quad (1.10)$$

где индекс ω обозначает фурье-компоненту соответствующей величины, а

$$M(\omega) = \frac{3}{SR_0} \left(\text{cth } SR_0 - \frac{1}{SR_0} \right) = \frac{3}{2\lambda} \left[\frac{\text{sh } 2\lambda - \sin 2\lambda}{\text{ch } 2\lambda - \cos 2\lambda} + i \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\text{sh } 2\lambda + \sin 2\lambda}{\text{ch } 2\lambda - \cos 2\lambda} \right) \right], \quad (1.11)$$

где $S = \sqrt{i\omega/\rho}$, $\lambda = R_0 \sqrt{\omega/2D}$. Из (1.10), (1.11) видно, что при $\omega \rightarrow 0$ колебания пузыря являются изотермическими, а при $\omega \rightarrow \infty$ - адиабатическими. Переход от первого предельного случая ко второму определяется функцией M , которая зависит от ω через λ . Параметр λ представляет собой отношение радиуса пузыря R_0 к длине тепловой волны $L_T = \sqrt{2D/\omega}$, если $R_0 \ll L_T$ - колебания изотермические,

в противном случае - адиабатические. Мнимая часть $M(\lambda)$ определяет затухание колебаний пузыря за счет тепловых потерь; известно, что эти потери в большинстве случаев дают основной вклад в затухание [5]. Поэтому мы не рассматриваем других механизмов диссипации.

Выражение для $M(\lambda)$ можно упростить в указанных предельных случаях.

а) Изотермические колебания ($\lambda \ll 1$). Разложив в ряд функции $\text{sh } x, \text{ch } x, \sin x, \cos x$ вблизи точки $x = 0$ (до седьмого члена включительно) и подставив полученное выражение в (1.11), получим для M

$$M(\lambda) \approx \frac{45 + (6/7)\lambda^4 - 6i\lambda^2}{45 + 2\lambda^4}. \quad (1.12)$$

Сравнивая выражения (1.12) и (1.11), можно видеть, что они близки по величине при $0 < \lambda < 1$.

Подставив (1.12) в (1.10) и переходя к t -представлению, получим уравнение состояния

$$\left(1 - \frac{1}{\omega_T^2} \frac{d^2}{dt^2}\right) (V_n p_r - V_{n0} p_{r0}) = \left[2(\gamma-1)/\omega_T\right] \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{7\omega_T} \frac{d}{dt}\right) \left(V_n \frac{dp_r}{dt}\right), \quad (1.13)$$

где $\omega_T = \sqrt{90} D/R_0^2$. Из условия $\lambda < 1$ следует, что характерная частота ω колебаний пузыря должна удовлетворять условию

$$\omega/\omega_T < 0,2. \quad (1.14)$$

Оценки показывают, что этому условию удовлетворяют колебания пузырей в экспериментах, описанных в [6].

Используя условие (1.14) и линеаризуя малую правую часть (1.13), получим

$$V_n p_r - V_{n0} p_{r0} = \frac{2(\gamma-1)}{\sqrt{10} \gamma \omega_T} V_{n0} \frac{dp_r}{dt}. \quad (1.15)$$

б) Адиабатические колебания. Если $\lambda \gg 1$, то (1.10) принимает вид

$$M(\omega) \approx \frac{3\sqrt{D}}{R_0 \sqrt{i\omega}} + \frac{3D}{R_0^2 i\omega}. \quad (1.16)$$

Подставив (1.16) в (1.10) и переходя к t -представлению, получим уравнение состояния

$$\gamma \dot{V}_n p_r + V_n \dot{p}_r = 3(\gamma-1) \frac{D}{R_0^2} V_{n0} \left[p_r - p_{r0} - \frac{R_0}{\sqrt{D}} \times \int_0^t \frac{dp_r}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right]. \quad (1.17)$$

Выражение (2.21) справедливо при условии

$$\sqrt{\omega/\omega_T} \gg 1/\sqrt{5}. \quad (1.18)$$

Без правой части уравнение (1.17) описывает адиабатические колебания пузырей; оно справедливо только для периодических процессов или импульсов с длительностью τ_0 , удовлетворяющей условию

$$\tau_0 \ll 10\pi / \omega_T. \quad (1.19)$$

В общем случае, когда характерные частоты процессов не удовлетворяют условиям (1.14) и (1.19), также можно перейти к τ -представлению в (1.10), разложив функцию M в ряд по степеням комплексного аргумента SR_0 . После простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \gamma \dot{V}_n \rho_r + V_n \dot{\rho}_r = & - \frac{6(\gamma-1)}{\pi^2} \omega_T^* \int_0^t \frac{d\rho_r}{d\tau} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-n^2 \omega_T^* (t-\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $\omega_T^* = \pi^2 \rho / R_0^2$. Это интегродифференциальное нелинейное уравнение чрезвычайно сложно, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только два его предельных случая, описанных выше.

2. Длинноволновые акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками газа

Пользуясь полученными выше динамическими уравнениями состояния для газа в пузырьках, можно перейти к уравнениям, описывающим распространение акустических волн конечной амплитуды

Рассмотрение начнем с наиболее простого случая квазистатических колебаний. Для этого отбросим в (1.5) последний член, а в (1.15) — правую часть, тогда получим изотермическое уравнение состояния

$$\rho_2 / \rho_{20} = (\rho_0 + \rho) / \rho_0. \quad (2.1)$$

Подставив (1.4) и (2.1) в (1.2), получим уравнение состояния для смеси

$$\frac{\rho_c}{\rho_{c0}} = \left[(1 - V_0) \left(\frac{\rho_{ж0}}{\rho_{ж}} \right)^{\gamma_{ж}} + V_0 \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho} \right]^{-1}, \quad (2.2)$$

где $\gamma_{ж}$ — показатель адиабаты в уравнении состояния жидкости. Из (2.2) видно, что при некотором значении ρ производная $\partial \rho_c / \partial \rho^2$ в смеси резко возрастает по сравнению с ее значениями как в чистой жидкости, так и в воздухе, что и обуславливает резкое увеличение нелинейности.

Раскладывая (2.2) в ряд по малым параметрам $\rho / \rho_{ж0}$ и ρ / ρ_0 до квадратичных членов включительно, получаем уравнение состояния смеси

$$\rho_c \approx \rho_{c0} + \frac{\rho}{c_{c0}^2} - \frac{\gamma^* - 1}{2 \rho_{c0} c_{c0}^4} \rho^2, \quad (2.3)$$

где $c_{c0}^2 = c_{ж0}^2 \frac{\rho_{ж0}}{\rho_{c0}} \left(1 - V_0 + V_0 \frac{\rho_{ж0} c_{ж0}^2}{\rho_0} \right)^{-1}, \quad (2.4)$

c_{c0} — скорость звука в смеси,

$$\gamma^* = \left[\frac{V_0}{\rho_0^2} + \frac{(1 - V_0)(1 + \gamma_{ж})}{\rho_{ж0}^2 c_{ж0}^4} \right] \left(\frac{V_0}{\rho_0} + \frac{1 - V_0}{\rho_{ж0} c_{ж0}^2} \right)^{-2}, \quad (2.5)$$

γ^* — эффективный показатель адиабаты смеси (если $V_0 \approx 2 \cdot 10^{-4}$, то $\gamma^* \approx 5700$). Выражение (2.5) впервые было получено в [7]. Система уравнений (1.1) совместно с (2.3) имеет известное точное решение в виде простой волны, эволюция которой приводит к образованию ударной волны. Такая эволюция наблюдалась экспериментально в [6]. Для описания структуры ударной волны и других процессов, для которых сказывается инерционность пузырьков и существенно затухание, квазистатической модели недостаточно, поэтому вместо уравнения состояния (2.1) нужно использовать уравнения (1.5) совместно с (1.15) или (1.17).

Введем безразмерные переменные $\rho / \rho_0 = \Phi$, $\Delta V_n / V_{n0} = U$, а из уравнений (1.5), (1.15), (1.17) исключим ρ_r , тогда для пузырьков одинакового радиуса получим

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\rho_0 V_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$U + \varphi - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\gamma - 1}{\gamma \omega_\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varphi U, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\gamma}{\omega_0^2} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \\ & = 3(\gamma - 1) \frac{\rho}{R_0^2} \left[\varphi - \frac{R_0}{\sqrt{\rho}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) справедливо для изотермических колебаний, а (2.8) — для адиабатических.

Далее рассмотрим одномерные возмущения и сделаем в (2.6) — (2.8) замену переменных:

$$\tau = t - r/c; \quad r = r.$$

Считая, как обычно, что функции U и φ зависят от r медленно, для $c = c_{из} = c_0 (1 - V_0 c_0^2 \rho_0 / 2 \rho_0)$, где $c_{из}$ — изотермическая скорость звука. Из (2.6) и (2.7) получаем одно уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - 2z \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\gamma - 1}{\gamma \omega_\tau} z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2.9)$$

где $z = c \rho_0 V_0 / 2 \rho_0$. Это известное уравнение Бюргерса.

Для адиабатических колебаний пузырьков из (2.6) и (2.8) для $c = c_{ад} = c_0 [1 - (V_0 c_0 \rho_0 / 2 \gamma \rho_0)]$ получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\gamma + 1}{\gamma} z \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{z}{\omega_0^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^3} = 3(\gamma - 1) z \frac{\rho}{R_0^2} x$$

$$\cdot x \left[\rho - \frac{R_0}{\sqrt{\rho}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} \right] \right], \quad (2.10)$$

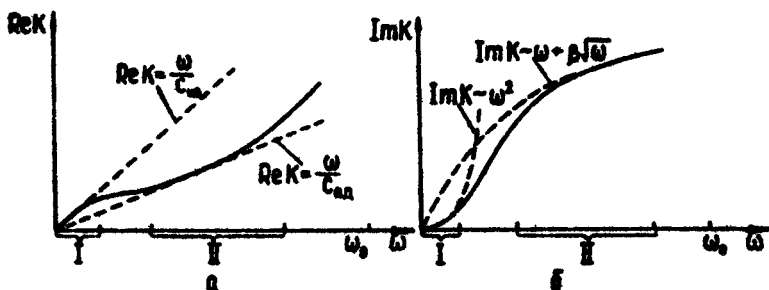
где $c_{\text{ад}}$ — адиабатическая скорость звука.

Левая часть (2.10) совпадает с известным уравнением Кортевега де-Вриза, первый член правой части характеризует низкочастотное затухание, а второй — релаксационные дисперсию и затухание. Отношение этого члена к третьему члену в левой части, характеризующему дисперсию, связанную с резонансными свойствами пузырьков, по порядку величины равно $3(\gamma-1)\omega_0^2 / 2\lambda\omega^2$, где ω — характерная частота процесса. Для экспериментов, описанных в [8], $\omega_0 \approx 2 \cdot 10^4 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, $\omega \approx 6 \cdot 10^3 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$; это отношение равно 0,2 для углекислого газа и 1 для гелия. Следовательно, для гелиевых пузырьков вклад релаксационных членов значителен; это препятствует процессу разделения начальных возмущений на солитоны, что и наблюдалось в экспериментах [8].

Чтобы нагляднее представить области применимости полученных модельных уравнений, рассмотрим дисперсионное уравнение системы (1.5), (2.6) в линейном приближении

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{3V_0 \omega^2 [1 + (\gamma-1)M(\omega)]}{R_0^2 [\omega_0^2 - \omega^2 - (\gamma-1)\omega^2 M(\omega)]}. \quad (2.11)$$

На рис. 1, а, б показано качественное поведение действительной и мнимой частей волнового числа K от частоты ω . При малых ω (область 1) $\text{Re } K$ близко к прямой $\omega/c_{\text{из}}$, а $\text{Im } K \sim \omega^2$. В этой области справедливо уравнение (2.9). Для больших ω (область 2) $\text{Re } K$ близко к прямой $c/\omega_{\text{ад}}$, а $\text{Im } K \sim \omega + \beta\sqrt{\omega}$, где $\beta = R_0/\sqrt{\rho}$. В этой области справедливо уравнение (2.10). Переход из области 1 к области 2 приводит к изменению нелинейных членов; в (2.9) и (2.10) они отличаются коэффициентами. В связи с этим интересно вернуться к уравнению (1.13), которое качественно описывает переход от изотермического случая к адиабатическому (правда, с другим $\gamma^* = 7\gamma/(4+3\gamma)$). При низких частотах ($\omega \ll \omega_T$) в левой части (1.13) можно пренебречь нелинейным членом вида $\frac{d^2}{dt^2} (V_n P_r)$, при этом получаем (1.15). При увеличении частот рассматриваемых процессов вклад отброшенных



Р и с. 1. Качественная зависимость действительной (а) и мнимой (б) частей волнового числа K от ω в области низких частот

членов увеличивается и при $\omega \gg \omega_T$ низкочастотный член $\beta_r V_n$ можно отбросить. В промежуточной области необходимо учитывать оба нелинейных члена.

Мы сравнительно подробно остановились на выводе уравнений (2.9), (2.10) потому, что до настоящего времени последовательного вывода модельных уравнений для низкочастотных волн в пузырьковой смеси с учётом тепловых эффектов, по-видимому, проведено не было.

3. Нелинейные акустические эффекты в среде с распределенными по размерам пузырьками

Здесь мы рассмотрим простейшие нелинейные процессы — образование волны с частотой второй гармоники и волны разностной частоты. Основное модельное предположение, принимаемое ниже, состоит в том, что на соответствующей частоте резонансные пузыри имеют добротность, достаточно большую для того, чтобы можно было учитывать только их влияние, отбрасывая нерезонансный фон. Поскольку колебания пузырьков вблизи резонанса до частот порядка мегагерца являются адиабатическими, воспользуемся уравнением нелинейных колебаний пузырька [9]

$$\Delta \ddot{V}_n + \omega_0^2 \Delta V_n - 3(\gamma + 1)\beta \omega_0^2 \Delta V_n^2 - \beta(2\Delta \ddot{V}_n \Delta \dot{V}_n +$$

$$+ \Delta \dot{V}^2) + \nu \Delta \dot{V}_n = -\alpha p. \quad (3.1)$$

Это уравнение определяет колебания пузырька с учетом квадратичной нелинейности. Здесь $\beta = (4\pi R_0^3)^{-1} \cdot \alpha = 4\pi R_0 / \rho_0$, ν — эмпирически введенный коэффициент потерь (для гармонических волн $\nu = Q/\omega$, где Q — добротность пузырька). До частот порядка сотен кГц величина Q определяется тепловыми потерями и может быть найдена из выражений (1.5), (1.10).

Для описания распространения волны в жидкости с воздушными пузырьками, распределенными по размерам, следует воспользоваться уравнениями (1.3), (1.4) и (3.1). В линейном приближении, положив в (3.1) $\beta = Q$, мы получим известное дисперсионное уравнение [13]

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c_{ж0}^2} + \int \frac{\rho_0 \alpha n(R_0) dR_0}{\xi^2 - 1 + (i/Q)}, \quad (3.2)$$

где $\xi = \omega_0 / \omega$. Волновое число K можно представить в виде

$$K = \frac{\omega}{c_{ж0} - \Delta c} + i\alpha, \quad (3.3)$$

где малая добавка к скорости звука Δc и коэффициент затухания α определяются из выражений

$$\Delta c = 2\pi c_{ж0}^3 \int \frac{n(\xi^2 - 1) R_0 dR_0}{\omega^2 [(\xi^2 - 1)^2 + Q^{-2}],} \quad (3.4)$$

$$\alpha = 2\pi c_{ж0} \int \frac{n R_0 dR_0}{\omega Q [(\xi^2 - 1)^2 + Q^{-2}]}.$$

Коэффициент затухания α вычислен в работе [10] для достаточно плавной функции распределения по размерам, т.е.

$$\frac{R}{nQ} \frac{dn}{dR} \ll 1. \quad (3.5)$$

При этом из (3.4) следует простое выражение для коэффициента затухания волны [10,11]:

$$\alpha = 725 n(R_\omega) R_\omega^3, \quad (3.6)$$

где R_ω — радиус пузырьков, резонансная частота которых равна ω . Из (3.6) видно, что, измеряя затухание в широкой полосе частот, можно определить функцию $n(\omega)$. На этом принципе и основан метод измерения функции распределения пузырьков по размерам [11].

Вычисление поправки к скорости звука при тех же приближениях дает $\Delta c = 0$ [9], что обусловлено изменением знака подынтегрального выражения (3.4) при прохождении резонанса (в отличие от смеси жидкости с пузырьками одного радиуса).

Рассмотрим процесс генерации сигнала разностной частоты в жидкости с пузырьками газа при взаимодействии двух волн с частотами ω_1 и ω_2 и амплитудами p_1 и p_2 . Будем считать, что амплитуда волн комбинационных частот мала, так что задача может решаться методом возмущений. Как известно [14], в этом приближении уравнения для давления p_2 волны разностной частоты имеют вид

$$\Delta p_2 + \frac{\Omega^2}{c_0^2} p_2 = - \frac{\epsilon_\Omega \Omega^2}{\rho_0 c_0^4} p_1 p_2^*, \quad (3.7)$$

где $\epsilon_\Omega = (\gamma + 1)/2$ — параметр нелинейности среды.

Система уравнений (1.3), (1.4), (3.1) также может быть сведена к уравнению (3.7), в котором ϵ_Ω определяется выражением

$$\epsilon_\Omega = \frac{2\alpha c_0^4 \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{3} \gamma \rho_0} \frac{\omega_0 [3(1+\gamma)\omega_0^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1\omega_2)] n R_0 d R_0}{[\omega_0^2 - \omega_1^2 + (i\omega_1^2/\Omega_0)] [\omega_0^2 - \omega_2^2 - (i\omega_2^2/\Omega_0)] [\omega_0^2 - \Omega^2 - (i\Omega^2/\Omega_0)]} \quad (3.8)$$

Приближенное значение этого интеграла может быть вычислено при тех же предположениях, при которых вычислялся интеграл (3.4). Нас интересует случай, когда разностная частота существенно меньше исходных, т.е. $\Omega \ll \omega_1, \omega_2$

и $n(R_{\omega_1}) \approx n(R_{\omega_2}) = n(R_{\omega})$. В этом случае

$$\epsilon_2 = i\pi^2 c_0^4 \left[\frac{(3\gamma+2)n(R_{\omega})}{\omega^3 [\Omega - (i\omega/Q_1)]} - \frac{n(R_{\omega})}{\Omega^2 \omega^2} \right]. \quad (3.9)$$

При условии $\Omega/\omega \ll Q^{-1}$ и малой концентрации пузырьков с резонансной частотой Ω (в реальных условиях концентрация обычно падает с увеличением размера пузырьков как R_0^{-3} , R_0^{-4} [11,12]) это выражение можно записать в виде

$$\epsilon_2 \approx 3,93 \cdot 10^{-2} n(R_{\omega}) Q \lambda^4, \quad (3.10)$$

где λ — длина волны на частоте ω .

Аналогичным образом рассчитывается эффективный параметр нелинейности при генерации волны удвоенной частоты. Интересно, что в этом случае параметр нелинейности существенно меньше, чем при генерации волны разностной частоты, и определяется соотношением

$$\epsilon_{2\omega} \approx \pi c_0^4 n(R_{2\omega}) / 3\omega^4. \quad (3.11)$$

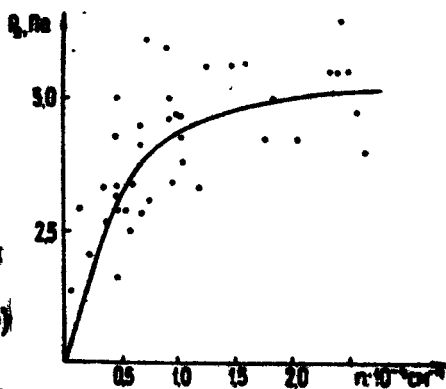
В это выражение не входит концентрация пузырьков с резонансной частотой ω . Дело в том, что пузырьки с резонансными частотами, большими и меньшими ω , переизлучают вторую гармонику в противофазе и в результате суммарный уровень ее падает.

Все рассмотренные в этой главе эффекты экспериментально наблюдались на установке, описанной в [15]. Результаты измерений показали, что в широком диапазоне частот (90 + 290 кГц) дисперсия скорости звука мала ($\Delta c/c_{x0} \sim 10^{-3}$, а $\alpha/K > 10^{-2}$, т.е. $\Delta c/c_{x0} \ll \alpha/K$). Это подтверждает справедливость предположения о доминирующем влиянии резонансных пузырьков. Сильный фон сигнала на второй гармонике от акустического излучателя (0,5% от амплитуды волны накачки) не позволил измерить зависимость $\epsilon_{2\omega}$ от $n(2\omega)$ (при амплитуде волны накачки 10^4 Па уровень волны второй гармоники, вычисленный с помощью (3.11), составил также 0,5% от ρ_{ω}). Можно лишь утверждать, что коэффициент нелинейности $\epsilon_{2\omega}$, реализуемый в эксперименте, не превышал значения, определяемого выражением (3.11).

На рис.2 показана зависимость амплитуды волны разностной частоты 14 кГц от концентрации пузырьков с резонансной частотой около 140 кГц. Теоретическая кривая (сплошная линия) вычислена с помощью соотношения (3.6) и соотношения, определяющего поле давления p_{Ω} на оси вдали от области взаимодействия двух плоских коллимированных пучков, проходящих через слой пузырей длиной L , которое легко получается аналогично соотношению для безграничной среды [14]:

$$p_{\Omega} = \frac{\epsilon_2 \Omega^2 p_{i0} p_{20} S}{8\pi p_0 c_0^4 \alpha \tau} (1 - e^{-2\alpha L}), \quad (3.12)$$

где S — площадь излучателя, τ — расстояние до приемника, p_{i0} — амплитуда давления первичных волн у излучателя. Хотя условие применимости (3.12) здесь не очень хорошо выполняется, налицо хорошее согласие теории с экспериментальными данными. Отметим, что для чистой воды поле на частоте Ω было бы в тысячу раз меньше.



Р и с. 2. Зависимость амплитуды давления $p(\Omega)$ волны разностной частоты от концентрации пузырьков $n(\omega)$ на частоте волны накачки ($\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$; $p_1 \approx p_2 \approx 10^4$ Па)

В табл.1 в качестве примера приведены значения эффективных параметров нелинейности для морской среды, рассчитанные по значениям, приведенным в литературе. Судя по этим оценкам, возрастание параметров нелинейности из-за наличия пузырьков возможно и в естественных условиях.

Т а б л и ц а 1

Автор, район	Глубина, м	Сила ветра, м.с ⁻¹	f, кгц	R, мкм	n, см ⁻⁴	ε _я
Medwin [16] (Тихий океан, залив Монтерей)	10	4,4	20 50 100 140	228 91 46 32,5	0,2 10 120 800	250 320 240 416
Løfvik [17] (Северное море)	7 8 8 12	6 15 6,6 22	12 38 120 120	353 115 36 40	10 ⁻² 10 10 200	96 960 9,6 197
Колобаев [18] (Субтропики, Атлантический океан)	1,5 1,5 4	11-13	32,5 65 77	100 50 38	3 2,7 0,4	540 30 2,2

Заключение

Выше мы рассмотрели лишь некоторые модельные задачи, возникающие при исследовании нелинейных акустических волн в жидкости с пузырьками газа. Многие вопросы остаются невыясненными; в частности, даже для пузырьков одного радиуса не удается получить достаточно простые для аналитического или численного исследования уравнения, описывающие распространение нелинейных волн с широким частотным спектром, охватывающим как изотермический, так и адиабатический случаи. Для пузырьков различных радиусов распространение широкополосных возмущений вообще не рассматривалось, если не считать квазистатического предела. В частности, не изучена структура ударных волн в та-

кой среде. Не рассматривались также задачи, связанные с изменением концентрации пузырьков под действием акустической волны. Интересным эффектом такого рода является самопросветление акустических волн в жидкости с пузырьками газа, обусловленное слиянием последних [15].

Л и т е р а т у р а

1. Накоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейбер И.Р. - Изв. АН СССР, МЖТ, 1972, №5.
2. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа. - В сб.: Реология суспензий. М., Мир, 1975.
3. Гончаров Г.В., Наугольных К.А., Рыбак С.А. - ПМТФ, 1976, №6, с.90.
4. Гасенко В.Г., Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. - В сб.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977.
5. Devin C. - J.A.S.A., 1959, 31, N12, p.1654.
6. Остроумов Г.А., Дружинин Г.А., Крячко В.М., Токман А.С. - В сб.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977.
7. Остроумов Г.А., Дружинин Г.А., Крячко В.М., Токман А.С. - Тезисы докладов VI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. М., изд-во МГУ, 1975, с.166.
8. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. - В сб.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977.
9. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
10. Физические основы подводной акустики. Под ред. В.И.Мясищева. М., Советское радио, 1955.
11. Гаврилов Л.Р. Содержание свободного газа в жидкости и методы его измерения. Физические основы ультразвуковой технологии. Под ред. Л.Р.Розенберга. М., Наука, 1970.

12. Капустина О.А. Дегазация жидкостей. Физические основы ультразвуковой технологии. Под ред. Л.Р.Резенберга. М., Наука, 1970.
13. Kedrinski V.K. - Proc.Int.Conference "Cavitation and inhomogeneities in underwater acoustics". Göttingen,FRG,1980.
14. Берктей Х.О. - В сб.: Подводная акустика. Пер. с англ. под ред. Л.М. Бреховских. М., Мир, 1970, с.325.
15. Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Сутин А.М. - Письма ЖЭТФ, 1979, 30, вып.7, с.423.
16. Medwin H. - J.Geophys,Research, 1977,82, N6,p.971.
17. Lvik A. - Proc.Int.Conference "Cavitation and inhomogeneities in underwater acoustics". Göttingen,FRG,1980.
18. Колобаев П.А. - Океанология, 1975, 15, №6, с.1013.

НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДВУХФАЗНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

К.А.Наугольных, С.А.Рыбак

1. Введение

Турбулентные потоки являются мощными источниками шумов как в естественных условиях (рев бури), так и при работе разнообразных технических устройств (шумы струй реактивных двигателей, турбулентных пограничных слоев, скоростных потоков в трубопроводах и т.д.).

Существенный прогресс в исследовании физики гидродинамической генерации звука и теоретического описания этого явления был достигнут в работах Лайтхилла [1], предложившего уравнение генерации звука потоками и проанализировавшего его решения.

Фундаментальным результатом теории Лайтхилла является вывод о квадрупольном характере излучения потока, причём интенсивность звука, порождаемого дозвуковым турбулентным потоком, оказалась пропорциональной восьмой степени скорости потока. Соответственно этому Лайтхиллом было получено выражение для полной мощности акустического излучения турбулентной струи в виде

$$W = K \rho^2 \bar{u}^8 d^2 / \rho_0 c^3,$$

где K - численный коэффициент, ρ, ρ_0 - плотность среды в струе и окружающем пространстве, \bar{u} - скорость истечения струи, d - диаметр сопла, c - скорость звука. Формула получила хорошее экспериментальное подтверждение, при этом было определено и значение коэффициента $K \approx 10^{-4}$.

Эффективность преобразования энергии турбулентного потока в звук сравнительно невелика, КПД процесса выражается соотношением

$$\eta \approx 10^{-4} M^5,$$

где M - число Маха, но при огромной мощности реактивных двигателей мощность акустического излучения оказывается весьма большой: на расстоянии 100 м шум струи мощных двигателей может превышать уровень 150 дБ.

Значительно более сложным оказался вопрос о шумах турбулентного пограничного слоя. Хотя уже в первых работах Лайтхилла было указано, что, в отличие от свободной струи, излучение звука пограничным слоем может носить дипольный характер, что приводит к шестой степени в зависимости интенсивности звука от скорости потока и, соответственно, к более интенсивному излучению, последующий строгий анализ решений уравнения Лайтхилла показал (обзор соответствующих работ см. [2]), что в рамках обычных приближений этой теории для случая плоской границы излучение звука должно быть квадрупольным ($\sim \omega^8$), а это, по-видимому, противоречит экспериментальным данным [3]. Между тем, при наличии у потока жесткой границы существует механизм, обусловленный влиянием вязких напряжений и приводящий к генерации дипольного акустического излучения, интенсивность которого для дозвуковых потоков существенно превосходит квадрупольное излучение [4]. Теория этого эффекта и некоторые оценки в сопоставлении с опытными данными приводятся в следующем разделе.

Процесс генерации звука турбулентным потоком приобретает новые черты в случае двухфазных пограничных слоев, представляющих собой поток жидкости с пузырьками газа, концентрация которых растет с увеличением скорости потока [5].

Присутствие пузырьков приводит к еще более эффективному преобразованию энергии потока в звук, так как в этом случае источниками акустического излучения являются монополи.

Теоретические сведения о генерации звука турбулентным потоком жидкости с пузырьками приведены в разд.3, там же отмечается, что наличие пузырьков приводит не только к

изменению характера генерации звука, но меняет условия его распространения и картину течения. Причина в том, что наличие пузырьков приводит к резкому снижению скорости звука в жидкости, что повышает значение числа Маха. В результате сравнительно слабые акустические возмущения становятся конечными, сильно изменяя плотность среды, и приобретают нелинейный характер. Более того, поток может стать локально сверхзвуковым [6], что приводит к возникновению характерных для сверхзвукового течения скачков уплотнения — ударных волн.

2. О влиянии границы на процесс генерации звука турбулентным потоком

Важным аспектом физики гидродинамических шумов является вопрос о влиянии границы на процесс генерации звука потоком. Обычно этот эффект рассматривается на основе анализа решений граничной задачи для уравнения Лайтхилла. Между тем, имеет место и другой механизм генерации звука турбулентным потоком в присутствии жесткой границы, обусловленный трансформацией энергии вихревых мод в энергию потенциального движения, который, по-видимому, и дает основной вклад в излучение звука потоком [4].

Произвольное движение сжимаемой жидкости можно разбить на две части: потенциальную и вихревую. Если возмущения среды малы, то две указанные компоненты движения не взаимодействуют друг с другом и полное возмущение среды можно рассматривать как суперпозицию этих двух мод. Математически это обстоятельство проявляется в том, что из уравнений движения сплошной среды можно выделить две группы уравнений, описывающих соответственно потенциальную и вихревую части, причём в линейном приближении эти группы оказываются независимыми. Учёт нелинейных членов приводит к зависимости уравнений одной группы от другой, что отражает факт взаимодействия наряду с самовоздействием мод возмущения. Соответствующие уравнения имеют вид [7]

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \rho v_i v_k, \quad p' = c^2 \rho', \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{rot} [\bar{v} \Phi] + \nu \Delta \Phi, \quad \Phi = \text{rot} \bar{v}, \quad (2)$$

где p' , ρ' - избыточное давление и плотность; c - скорость звука в среде.

Примером такого взаимодействия разных мод может служить явление генерации звука потоками, когда в результате нелинейного взаимодействия завихренностей друг с другом происходит излучение звука. Это явление интенсивно изучалось в последнее время применительно к процессам шумообразования турбулентными потоками и струями [1,2].

Между тем, и в этом заключается основная идея данной работы, при наличии у потока плоской границы существует механизм, приводящий к более интенсивной генерации звука турбулентным пограничным слоем.

Механизм этот связан с тем, что на жесткой плоской границе энергия вихревого поля трансформируется в энергию потенциального поля (волн сжатия).

Пусть пограничный слой образуется при обтекании плоской полубесконечной жесткой пластины. Будем считать, что ось x лежит в плоскости пластины и направлена по потоку, а ось y - перпендикулярна ей. Начало координат расположено на краю пластины. Скорость жидкости в каждой точке турбулентного пограничного слоя можно представить в виде суммы средней скорости \bar{u} , имеющей только x -составляющую, и пульсационной скорости v . Средняя скорость на толщине пограничного слоя нарастает от нуля до скорости потока u_0 . При рассмотрении зависимости $\bar{u}(y)$ можно выделить два участка. На первом из них, непосредственно прилегающем к пластине, скорость \bar{u} растет линейно с увеличением y . Этот участок называется вязким подслоем, так как характер течения здесь определяется силами вязкости. Толщина вязкого подслоя $y_0 \sim \nu / v^*$, где $v^* = \sqrt{v^*}$.

Второй участок характеризуется логарифмической зависимостью $\bar{u}(y)$ и называется поэтому "логарифмическим

профилем". Толщина этого участка определяется, по порядку величины, соотношением

$$\delta \sim U^* \tau / U_0, \quad (3)$$

т.е. она нарастает линейно с удалением от кромки пластины вдоль по потоку.

Общие соотношения, которые описывали бы распределение \bar{u} (ψ) в этой области, отсутствуют. Имеется лишь ряд эмпирических зависимостей, применимость которых весьма ограничена. Например, в области чисел Рейнольдса, не сильно превышающих критические, справедливо следующее уравнение:

$$\bar{u} = U^* (2,4 \ln \frac{\psi U^*}{\nu} + 5,84). \quad (4)$$

Что касается зависимости \bar{u} от ψ , то пульсационная скорость линейно нарастает от нуля до U^* на протяжении вязкого подслоя и остается неизменной в области логарифмического профиля. Величина U^* пропорциональна средней скорости потока

$$U^* = \alpha U_0, \quad (5)$$

коэффициент α характеризует степень турбулизации потока, обычно

$$\alpha = 0,1 \div 0,01.$$

Турбулентный пограничный слой можно рассматривать как движение вихрей разных размеров. При этом характерный размер вихря равен толщине пограничного слоя δ' (или, точнее, то шине вытеснения):

$$\delta = \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{5} \right) \delta'.$$

Энергетический пространственно-временной спектр пульсаций скорости является широкополосным. Подробные сведения о спектре в настоящее время отсутствуют. Известно, однако, что этот спектр характеризуется наличием широкого плато, в пределах которого находятся характерные частоты $\omega = U^* / \delta$ и U_0 / δ , первая из которых определя-

ется обратным временем распада вихря, а вторая — временем его переноса как целого.

Характерным масштабом пространственного спектра является величина $\kappa = \delta^{-1}$.

Рассмотрим отражение пространственно-временной поперечной компоненты вихревого поля вида $\psi \sim (u_x, u_y) \exp [i \cdot (\kappa r - \omega t)]$, имеющей частоту $\omega = \omega^*/\delta$ и пространственный масштаб

$$\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} = 2\pi\delta^{-1}.$$

При этом следует учесть наличие вязкого подслоя. Движение жидкости в области вязкого подслоя описывается уравнениями

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu \Delta \Phi, \quad (7)$$

которые получаются из уравнений исходной системы (1), (2) при пренебрежении нелинейными членами.

Нелинейный член первого уравнения вообще несуществен при описании рассматриваемого механизма. Пренебрежение нелинейностью второго уравнения основано на том, что в области вязкого подслоя

$$\frac{\text{rot } \bar{u} \cdot \bar{\Phi}}{\nu \Delta \Phi} \sim \frac{u \psi}{\nu} < 1 \quad \text{при } \psi < \psi_0,$$

так как $\bar{u} \psi_0 / \nu \sim 1$.

Из уравнений (6), (7) следует, что длина вязкой волны λ , соответствующая частоте ω , определяется соотношением

$$\lambda = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} (1+i) \sqrt{2}^{-1},$$

так что $\psi_0 / \lambda = \sqrt{\psi_0 / \delta} \ll 1$, т.е. толщина вязкого подслоя оказывается малой по сравнению с длиной вязкой волны.

Ввиду малости толщины вязкого подслоя его влияние незначительно. В самом деле, изменение величин $u_x(y)$ и $u_y(y)$ на толщине вязкого подслоя можно описать соотношением

$$u_i(y) = u_i(y_0) \cos \frac{y-y_0}{\lambda} + u'_i \sin \frac{y-y_0}{\lambda},$$

поскольку

$$y_0/\lambda \ll 1, \quad u_i(0) = u_i(y_0) + 0(y_0/\lambda).$$

В силу этого можно считать, что энергонесущие компоненты спектра масштаба K непосредственно удовлетворяют граничным условиям прилипания на стенке:

$$\begin{aligned} u_x + v_x &= -W_x, \\ u_y + v_y &= -W_y, \end{aligned} \quad (8)$$

где u_i, v_i — амплитуда колебательной скорости в падающей и отраженной поперечных вихревых компонентах, а W_i — амплитуда возникающей при отражении звуковой волны. Вытекают также соотношения

$$\begin{aligned} k_x v_x + k_y v_y &= 0, \\ k_x u_x - k_y u_y &= 0, \\ q_x W_y - q_y W_x &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

вытекающие из условия соленоидальности поперечных волн ($\operatorname{div} v = 0, \operatorname{div} u = 0$) и потенциальности продольных ($\operatorname{rot} W = 0$). Здесь q — волновое число продольной волны. Из уравнений (8), (9) следует

$$u_x + \frac{k_x}{q_y} W_y = -v_x, \quad (10)$$

так как $q_x = k_x$. Отсюда получим выражение для колебательной скорости отраженной волны

$$W_y = \frac{2k_x/k_y}{1 - (k_x^2/k_y q_y)} v_x. \quad (11)$$

Оценим теперь отношения K_x/K_y и K_x/Q_y . Для выполнения граничного условия необходимо, чтобы $K_x = Q_x = Q \cos \theta$, и потому

$$Q_y = \sqrt{(\omega/c)^2 - Q_x^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 - K_x^2}. \quad (12)$$

Отсюда ясно, что бегущие волны сжатия существуют лишь при $K_x \leq \omega/c$, при этом $Q_y \sim K_x$, т.е. $K_x/Q_y \approx 1$. Но, с другой стороны,

$$K \sim \delta^{-1} \sim \omega/\tau^* = \omega/\lambda u_0 \gg \omega/c,$$

поэтому $K_y \sim K \sim \omega/\lambda u_0$, $K_x/K_y = Q_x/K$, откуда

$$\frac{K_x}{K_y} = \lambda \frac{u_0 \cos \theta}{c} \sim \lambda M, \quad (13)$$

где $M = u_0/c$ — число Маха для потока. Поскольку $u_x \sim u^*$, из (11) получим, что колебательная скорость продольной волны на границе по порядку величины равна

$$w_y \sim \lambda M u_x \sim \lambda^2 M u_0. \quad (14)$$

Потенциал скорости, создаваемый распределением по поверхности нормальных скоростей поверхностной компоненты w_y , определяется формулой

$$\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int w_y \frac{e^{i\alpha r}}{r} dS \sim \frac{w_y \delta^2}{r}, \quad (15)$$

а возмущение плотности в волне равно

$$\rho' = \frac{i\omega \varphi \rho_0}{c^2} \sim \frac{\rho_0 \omega w_y \delta^2}{c^2 r} \sim \rho_0 \frac{\lambda^3 M^3 \delta}{r}. \quad (16)$$

Отсюда интенсивность излучаемого звука в расчёте на единицу площади границы есть

$$\frac{I}{\delta^2} = \frac{c^3 \rho'^2}{\rho_0 \delta^2} = \frac{\rho c^3}{r^2} \lambda^6 M^6. \quad (17)$$

В экспериментах Скучика и Хэддла [3] измерялись шумы, излучаемые всплывающим устройством. Интенсивный уровень шума, приведенный к поверхности всплывающего устройства, при скорости $U_0 = 30$ узлов составил $2,5 \cdot 10^3$ дин см^{-1} , что соответствует интенсивности звука, излучаемого с единичной площади поверхности всплывающего устройства $I/\delta^2 \sim 10^{-6}$ эрг $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Принимая для грубой оценки, на основании экспериментальных данных [1], что $\alpha \approx 0,1$, по формуле (17) для этого случая получим $I/\delta^2 \sim 10^{-6}$ эрг $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Важно отметить, что приведенная оценка свидетельствует о том, что описанный механизм генерации звука может объяснить наблюдаемые в эксперименте уровни гидродинамических шумов. В отличие от этого учёт вклада одних лишь объемных источников квадрупольного типа, действующих в толщине пограничного слоя, приводит к значениям $I/\delta^2 \sim 10^{-9}$ эрг $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$; эта величина оказывается на несколько порядков ниже наблюдаемых уровней шума.

Выясним теперь вопрос о направленности возникающего акустического излучения. Для этого выразим амплитуду продольной волны ψ как функцию угла θ , где $\theta = \arctg(q_x/q_z)$.

Записывая $\psi^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2$ и принимая во внимание, что из условия $\text{rot } \psi = 0$ вытекает соотношение $\psi_x = q_x \psi_y / q_y$, найдем

$$\psi^2 = \psi_y^2 \left(1 + \frac{q_x^2}{q_y^2} \right), \quad (18)$$

где ψ_y определяется формулой (11). Подставляя его значение из этой формулы, получим

$$I = \rho c v^{*2} \left[\frac{2\alpha M}{1 - (\text{ctg } \theta)\alpha M} \right]^2 (1 + \text{ctg}^2 \theta), \quad (19)$$

откуда следует, что при $\theta \rightarrow \pi/2$, $\text{ctg } \theta \rightarrow 0$, $I/\rho c v^{*2} \rightarrow 4\alpha^2 M^2$, при $\theta \rightarrow 0$, $\text{ctg } \theta \rightarrow \infty$ и $I/\rho c v^{*2} \rightarrow 4$, т.е. излучение направлено вдоль потока.

Таким образом, роль жесткой границы в процессе генерации звука пограничным слоем двояка: 1) она отражает звук, порожденный объемными источниками; 2) наличие границы обуславливает трансформацию энергии вихревого движения

в звук, что и дает основной вклад в акустическое излучение турбулентного пограничного слоя.

3. Акустическое излучение турбулентного пограничного слоя жидкости с пузырьками газа *

Интенсивность акустического излучения турбулентного пограничного слоя сильно возрастает, если в нем появляются пузырьки. При этом можно выделить два случая : а) слабо пульсирующие пузырьки, б) сильно пульсирующие (кавитационные) пузырьки.

Рассмотрим сначала первый режим.

Пусть в турбулентной области объема l^3 с пространственным масштабом когерентности l присутствуют пузырьки, слабо пульсирующие под действием флуктуаций давления. Определим обусловленное ими излучение звука. Пусть $\chi = (4/3)\pi n R^3$ - объемная концентрация пузырьков, n - число пузырьков в единице объема. В объеме l^3 , соответствующем области когерентности, все пузырьки пульсируют в фазу. Возмущение плотности, создаваемое излучаемой этими пузырьками волной в точке наблюдения на расстоянии r от турбулентной области, по порядку величины определяется выражением

$$p' \approx \rho \frac{\chi l^3}{4\pi c^2 r}. \quad (20)$$

Но $\chi = n (V + V_0)$, где $(V + V_0)$ - объем единичного пузырька, изменение которого в случае слабых пульсаций описывается уравнением

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V = 4\pi R_0 \rho / \rho, \quad (21)$$

где V - избыточный объем, $\omega_0^2 = 3\gamma p_0 / \rho_0 R_0^2$ - частота собственных пульсаций пузырька, R_0 - его равновесный радиус, p_0 - равновесное гидростатическое давление, ρ - амплитуда пульсаций давления. Ввиду того, что пространственные масштабы турбулентных пульсаций давления, соответствующих резонансной частоте пузырька, в ряде случаев

оказываются малыми по сравнению с его размерами, собственные колебания пузырьков не возбуждаются, а они пульсируют на более низкой частоте $\Omega = v^*/l$, являющейся характерной частотой пульсаций давления, (v^* — средне-квадратичная пульсационная скорость).

В этом случае из уравнения (21) следует

$$\ddot{V} \sim 4\pi R_0 \rho \Omega^2 / \rho \omega_0^2, \quad (22)$$

и тогда из формулы (20) получим

$$\rho' \approx n R_0 l \rho^2 / \gamma \rho c^2 \omega_0^2. \quad (23)$$

Отсюда найдем интенсивность звука, излучаемого объемом L^3 :

$$I = c^3 \rho'^2 / \rho = \rho \frac{R_0^2}{\gamma^2} \frac{n^2 l^6 \Omega^4 v^{*4}}{c \omega_0^4} \quad (24)$$

в точном согласии с результатами работы [8].

Заметим, что для дорезонансных частот пузырька приближенно выполняется соотношение

$$R_0^2 \omega_0^2 \sim 3 z_0 c_m^2 = 3 \gamma p_0 / \rho, \quad (25)$$

где z_0 — равновесная объемная концентрация пузырьков, а c_m — скорость звука в жидкости, содержащей пузырьки газа.

Полная интенсивность звука, излучаемого объемом L^3 , получается сложением интенсивностей излучения из объемов L^3 в силу некогерентности процесса. С учётом выражения (25) формула (24) принимает вид

$$I = \frac{\rho L^3}{\gamma^2 l} \frac{v^{*8}}{c^5} \frac{c^4}{c_m^4}. \quad (26)$$

Полученная формула (26) отличается от известного выражения Лайтхилла для интенсивности турбулентного шума множителем $(c/c_m)^4$, который может принимать весьма большие значения, так, например, при $z_0 = 10^{-2} (c/c_m)^4 \sim 10^3$.

Подчеркнем, что рассмотренный эффект обусловлен излучением дорезонансных слабопульсирующих пузырьков, присутствующих в турбулентной области, спектр излучаемого ими звука повторяет спектр вынуждающего поля пульсаций давления.

Перейдем теперь к расчёту излучения кавитационных пузырьков. Под действием турбулентных пульсаций давления в фазе разрежения пузырьки расширяются, а затем, в фазе повышенного давления, они захлопываются, излучая акустический импульс.

Импульсы, излучаемые пузырьками из области когерентности объема V^0 , складываются по амплитуде. Определим приближенно величину такого суммарного акустического сигнала, излучаемого областью V^0 , в которой находится n пузырьков, где n — число пузырьков в единице объема.

По порядку величины максимальный радиус пузырька R_m , достигаемый им за время $2\pi/\Omega$ под действием растягивающего напряжения p_T , определяется формулой

$$R_m = \sqrt{p_T/\rho} \frac{2\pi}{\Omega}, \quad (27)$$

где Ω — частота турбулентных пульсаций. Захлопываясь затем под действием повышенного давления, пузырек излучает импульс вида [9,10]

$$p = \frac{p_1 R_1}{r} e^{-r/\theta}, \quad \theta = R_1 / \sqrt{p_1/\rho}, \quad (28)$$

где p_1 — максимальное давление в пузырьке при его захлопывании, R_1 — минимальный радиус; эти величины выражаются через начальный максимальный радиус пузырька R_0 и давление газа в нем (газосодержание) Q формулами

$$p_1 = Q \left[\frac{p_T(\gamma-1)}{Q} \right]^{2/(\gamma-1)}, \quad R_0 = \left[\frac{p_T(\gamma-1)}{Q} \right]^{1/2(\gamma-1)}, \quad (29)$$

$\gamma = c_p/c_v$ для газа в пузырьке.

Амплитуда давления суммарного импульса, излучаемого всеми пузырьками из области когерентности, равна

$$p = \rho l^3 P_1 R_1 / \tau. \quad (30)$$

Излучение акустических импульсов из каждой области когерентности происходит с характерной частотой пульсаций давления Ω_1 , поэтому средняя по времени интенсивность акустического излучения из данной области будет выражаться формулой

$$I = \rho^2 \Omega \theta / \rho c. \quad (31)$$

Полная интенсивность акустического излучения получится энергетическим сложением вкладов отдельных областей:

$$I_k = \frac{L^3}{l^3} I = \frac{L^3}{l^3} \frac{\Omega \theta}{\rho c} \rho^2. \quad (32)$$

Подставляя в эту формулу написанные выше соотношения и принимая, что $\rho_T \sim \rho v^{*2}$ для $\gamma = 4/3$, получим следующую формулу для интенсивности звука, излучаемого кавитирующей областью объема L^3 :

$$I_k = \frac{L^3 l^3 \rho^2}{\tau^2} \frac{Q^{3/2} v^*}{\rho^{1/2} c}. \quad (33)$$

Как видно, в этом случае интенсивность излучения очень слабо (линейно) зависит от скорости потока $u = v_x^* / d$. Здесь $z_0 = (4/3)\pi R_0^3 n$ — объемная концентрация пузырьков в стадии расширения.

Поделив это выражение на величину интенсивности звука, излучаемого слабо пульсирующими пузырьками (формула (26)) получим

$$\frac{I_k}{I} = \frac{l^3 z_0^2}{R_0^3} \frac{Q^{3/2}}{\rho_T^{3/2}} \frac{c_m^4}{v^{*4}}. \quad (34)$$

Принимая во внимание, что скорость звука в жидкости с пузырьками газа приближенно выражается формулой $c_m^2 \approx \gamma p_0 / \rho z_0$, где p_0 — равновесное давление в среде, получим

$$I_k / I \approx (l / R_0)^3 (Q / \rho_T)^{3/2} (\gamma p_0 / \rho v^{*2})^2. \quad (35)$$

Если принять, что для развитых турбулентных потоков $\rho_s \sim \rho U^{*2}$, то это соотношение можно переписать в виде

$$I_x / I \approx (l/R_0)^3 (Q/\rho_T)^{3/2}.$$

Эта величина оказывается довольно значительной для типичных ситуаций, что отражает факт более интенсивного излучения звука кавитационными пузырьками [11].

Подчеркнем, что рассмотренный в данной работе эффект генерации звука, с математической точки зрения, обусловлен граничным условием обращения в нуль на жесткой границе полного вектора скорости, состоящей из вихревой и потенциальной компонент. Именно это условие и приводит к описанному выше механизму трансформации энергии вихревого движения в звук.

В отличие от этого в работах [12,13] рассматривалась, следуя Лайтхиллу, генерация звука заданным турбулентным потоком, удовлетворяющим граничному условию обращения в нуль вихревой компоненты скорости на жесткой границе. Такой подход позволяет описать квадрупольное излучение турбулентного потока.

Проведенный в данной работе расчёт показывает, что при записи граничного условия для полной скорости возникает, наряду с квадрупольным, и дипольное излучение турбулентного пограничного слоя. Более того, оно оказывается определяющим при числах Маха, меньших единицы.

Л и т е р а т у р а

1. Lighthill M.J.- Proc.Roy.Soc., 1952, A 211, p.564.
2. Миниович И.Я., Перник А.Д., Петровский В.С. Гидродинамические источники звука. Л., Судостроение, 1972.
3. Haddle G.P., Skudrzyk E.J.- J.Acoust.Soc. Am., 1969, 46, №1, (.2), p.130.
4. Наугольных К.А., Рыбак С.А.-Труды АКИН, 1972, вып. 16, с.129.
5. Ильичёв В.И.-Труды АКИН, 1967, №2,с.33.

6. Ackeret J. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Hohlraumbildung (Kavitation) im Wasser. Diss.ETH. Zürich, 1929.
7. Boa-Teh-Chu, Kovasznay L.S.G. - J.Fluid Mech., 1958, №3, p.94.
8. Grington D.G., Ffócs Williams J.E. - J.Fluid Mech., 1969, 36, №3, p.585.
9. Есипов И.Б., Наугольных К.А. - Акуст.журн., 1973, 19, №2, с.285.
10. Наугольных К.А. - Морское приборостроение, Сер.Акустика, 1972, вып.2, с.163.
11. Lyamshev L.M., Naugolnykh K.A. On the approximate theory of cavitation hydrodynamic noise. Seventh Int. Cong. on acoustics. UPU, Budapest, 1971.
12. Powell A. - J.Acoust.Soc.Amer., 1960, 32, p.982.
13. Howe M.S. - Sound.Vib., 1979, №65(2), p.159.

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

С.А.Рыбак

Как известно [1-3], в неравновесных средах возможно существование волн с отрицательной энергией. Энергия системы после возбуждения в ней такой волны меньше, чем до возбуждения. Следовательно, источник, возбуждавший волну отрицательной энергии, отбирает энергию от среды. Своеобразные черты волн с отрицательной энергией связаны с возможностью усиления или генерации вследствие потерь на диссипацию и излучение. в противоположность волнам с положительной энергией, которые из-за указанных процессов затухают. Нелинейное резонансное взаимодействие, в котором участвуют волны с отрицательной энергией, может иметь взрывной характер [2].

Настоящая работа посвящена анализу отмеченных явлений применительно к акустическим волнам [6-8]. Простейший пример волны с отрицательной энергией приведен в монографии [1]. Это плоская звуковая волна, потенциал которой в системе отсчёта, неподвижной относительно среды, имеет вид

$$\psi = \psi_0 e^{i\pi} [-i(\omega_0 t - kx)] . \quad (1)$$

В системе отсчёта, движущейся относительно среды со скоростью

$$|U| > c , \quad \xi = \omega_0 / k , \quad (2)$$

частота волны определяется из дисперсионного уравнения

$$\Sigma - (\omega - Uk)^2 - c^2 k^2 = 0 \quad (3)$$

и отрицательна

$$\omega = (c + U)k, \quad U < 0. \quad (4)$$

Среднюю за период плотность энергии $\langle E \rangle$ волны в указанной системе отсчёта проще всего определить из соотношения [4,5]

$$E = E_0 \omega / \omega_0, \quad (5)$$

причём для плоской волны в неподвижной системе отсчёта

$$E_0 = \rho k^2 \psi_0^2, \quad (6)$$

ρ - плотность среды.

Как показано в работе [5], величина

$$I = E / \omega,$$

которая является адиабатическим инвариантом, равна $\partial L / \partial \omega$, где L - плотность усредненного по периоду волны лагранжиана, причём в квадратичном по ψ_0 приближении

$$L(\omega, k) = \psi_0^2 \Sigma(\omega, k), \quad (7)$$

где $\Sigma(\omega, k) = 0$ - дисперсионное уравнение плоской волны.

Следовательно, для определения адиабатического инварианта I достаточно знать зависимость $\Sigma(\omega, k) = 0$, которая находится из решения линейной однородной задачи о распространении плоской волны в среде. В работе [6] сформулировано правило определения знака энергии волны $E = I\omega$ по знаку ее адиабатического инварианта. Энергия E , очевидно, не меняет знака при одновременной перемене знаков у характеризующей волну пары (ω, k) . Следовательно, величина $I = E / \omega$ должна изменять знак при такой замене. Нужно выбрать такой знак у пары (ω, k) , чтобы получить

$$I > 0. \quad (8)$$

Если при этом $\omega < 0$, то энергия E также отрицательна. Рассмотренная выше волна удовлетворяет указанному условию.

Выражение (5), разумеется, пригодно не только в простейшем случае (1), но и для весьма широкого класса волн, на неоднородных потоках, Лагранжиан для акустических волн в сжимаемой жидкости в присутствии неоднородного стационарного течения приводится в работе [8].

Усложним несколько рассмотренный выше пример, направив плоскую звуковую волну под углом к оси z :

$$\psi = \psi_0 \exp[-i(\omega t - k_x x - k_z z)], \quad \omega^2/c^2 = k_x^2 + k_z^2. \quad (9)$$

В системе отсчёта, неподвижной относительно среды, имеет место теорема вириала о равенстве плотности средней потенциальной энергии средней плотности средней кинетической энергии [9] для волны

$$E_s = E_k + E_p = 2 E_k.$$

При этом

$$E = \rho \omega_0^2 (\omega^2 + s^2)/2, \quad (10)$$

где ω_0 - частота гармонической волны в неподвижной системе отсчёта, $s = (-i\omega)^{-1} \partial\psi/\partial x$ - колебательное смещение в направлении оси x , $\omega = (-i\omega)^{-1} \partial\psi/\partial z$ - колебательное смещение в плоскости, нормальной к оси z . Относительно системы, движущейся со скоростью U вдоль оси x , имеем

$$\omega = \omega_0 + U k_x, \quad (11)$$

колебательная скорость в плоскости, нормальной к оси x ,

$$v_x = -i\omega_0 s,$$

а колебательная скорость вдоль оси x

$$v_z = -i\omega_0 s + U + v_{2z},$$

где v_{2z} - член второго порядка по ψ_0 . Средняя потенциальная энергия при переходе к движущейся системе отсчёта не изменяется и сохраняет вид (10), а средняя кинетическая энергия

$$E'_k = \frac{\rho \omega_0^2 \omega^2}{2} + \frac{\rho \omega_0^2 s^2}{2} + \rho v_{2z} U + \frac{\rho U^2}{2}. \quad (12)$$

Последний член в (12) не связан с волной, таким образом, средняя кинетическая энергия волнового движения, с точностью до членов второго порядка включительно, описывается первыми тремя членами в (12).

Подчеркнем, что для учёта всех членов второго порядка пришлось ввести в рассмотрение квадратичную добавку к скорости v_{2z} . Найдём ее из соотношений

$$v_{2z} = \frac{ds}{dt} + v_z \frac{ds}{dz} + v_z \frac{dw}{dz} + U \approx \left(\frac{ds}{dt} + U \right) \left(1 + \frac{ds}{dz} \right) + v_z \frac{dw}{dz}, \quad (13)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ds}{dz},$$

откуда
$$\bar{v}_{2z} = \omega_0 K (s^2 + w^2).$$

С учётом (10), (12) и (13) получим

$$E' = \rho \omega_0^2 (s^2 + w^2) + \rho \omega_0 U K (s^2 + w^2) - E_0 \omega / \omega_0 \quad (14)$$

в полном согласии с выражением (5), следующим из вариационного принципа. Как видно из последней формулы, энергия в движущейся системе отсчёта отрицательна, если

$$U < 0 \quad \text{и} \quad |\rho \bar{v}_{2z} U| > E_0. \quad (15)$$

Последнее соотношение эквивалентно условию

$$|U K| > \omega_0 \quad \text{или} \quad |U| > c, \quad (16)$$

где $c = \omega_0 / K$ — фазовая скорость волны в системе координат, неподвижной относительно среды.

В качестве второго примера рассмотрим волну в анизотропной мембране в системе координат, движущейся относительно нее вдоль оси z со скоростью U . Уравнение движения имеет вид

$$m \left(\frac{d}{dt} + U \frac{d}{dz} \right)^2 w - T_1 \frac{d^2}{dz^2} w - T_2 \frac{d^2}{dy^2} w = 0, \quad (17)$$

где T_1, T_2 — натяжения в направлениях z, y , m — масса на единицу поверхности, w — вертикальное колебательное смещение :

$$\psi = \psi_0 \exp[-i(\omega t - k_1 x - k_2 y)], \quad \omega = \omega_0 - U k_1.$$

Плотность средней потенциальной энергии равна

$$E_0 = (T_1 k_1^2 + T_2 k_2^2) \psi_0^2 / 2 = m \omega_0^2 \psi_0^2 / 2.$$

В движущейся системе отсчёта (помеченной штрихом)

$$E'_k = \frac{m \omega_0^2 \psi_0^2}{2} + m v_{2x} U + \frac{m U^2}{2},$$

где

$$\bar{v}_{2x} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega_0 k_1 \psi_0^2.$$

Подобно предыдущему примеру находим

$$E' = m \omega_0^2 \psi_0^2 + m \omega_0 k \psi^2 = E_0 \omega / \omega_0.$$

Справедливы также условия отрицательности энергии (15) и (16).

Рассмотренные выше примеры имеют чисто кинематическую природу: знак энергии меняется вследствие галилеева преобразования системы координат и не приводит к каким-либо физическим эффектам. Качественно новые явления возникают при наличии в среде слоисто-неоднородных потоков. Усложним предыдущую задачу: рассмотрим мембрану, движение которой описывается уравнением (17), соприкасающуюся с несжимаемой невязкой жидкостью, занимающей полупространство $z < 0$. Мембрана движется относительно жидкости со скоростью U вдоль оси x . Учтём давление со стороны жидкости на мембрану в правой части уравнения (17):

$$p = -\rho \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{z=0}. \quad (18)$$

Далее, учтём наличие вязкого трения в мембране. Для этого в левую часть уравнения (17) следует добавить член

$$\beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi, \quad (19)$$

где β — коэффициент вязкости. Потенциал волны в жидкости зададим в форме $\psi = \psi_0 \exp[-i(\omega t - k_1 x - k_2 y) - k z]$, $k_1^2 + k_2^2 = k^2$. Постоянную ψ_0 найдем из граничного условия при $z \approx 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (20)$$

В результате получим дисперсионное уравнение

$$m(\omega - U k_1)^2 - T_1 k_1^2 - T_2 k_2^2 + \frac{\rho \omega^2}{k} - i\beta(\omega - U k_1)^2 = 0. \quad (21)$$

Положим для простоты, что волна распространяется вдоль Γ , т.е. $k_2 = 0$. Подобная задача рассматривалась впервые в работе [10], в которой указывалось на уменьшение полной энергии системы при возбуждении в мембране волны определенного вида. Целесообразно вновь рассмотреть эту простую задачу на основе развитого в работах [6-8] метода, использующего для идентификации волн отрицательной энергии и для анализа устойчивости линейное дисперсионное уравнение $Z(\omega, k) = 0$. Рассмотрим также роль внутренних потерь в мембране и потерь на излучение в случае, если соприкасающаяся жидкость сжимаемая, что приводит к доп. отрицательной линейной неустойчивости.

Из соотношения (21) находим собственные частоты нормальных волн ($\beta = 0$)

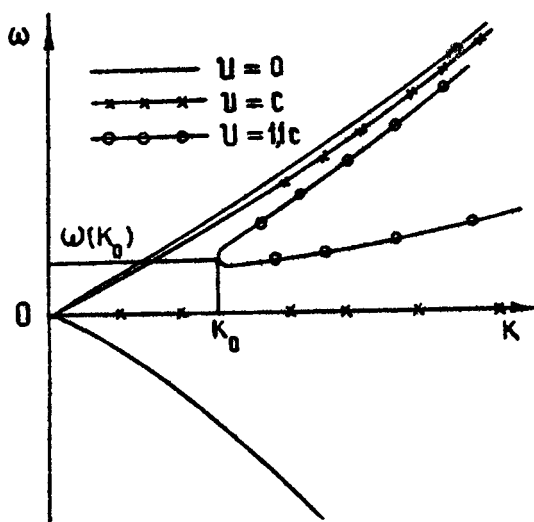
$$\omega_{1,2} = \frac{Uk}{1 + \rho/mk} \left\{ 1 \pm \left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{U^2} \right) \left(1 + \frac{\rho}{mk} \right) \right]^{1/2} \right\}, c^2 = \frac{T_1}{k}. \quad (22)$$

Частота со знаком минус перед корнем соответствует при $|U| > c$ волне с отрицательной энергией. Это нетрудно показать, проверив выполнение условий (16) для дисперсионного уравнения (21), подставив в соотношение $dZ/d\omega$ корни (22). Важно отметить, что смена знака адиабатического инварианта, т.е. переход к отрицательной ветви дисперсионной кривой, происходит в точке, где групповая скорость обращается в бесконечность:

$$c_{gr} = \frac{\partial Z}{\partial k} / \frac{\partial Z}{\partial \omega} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \frac{\partial Z}{\partial \omega} \rightarrow 0. \quad (23)$$

Как видно из соотношения (7), в точке, где $I = 0$ и $c_{gr} = \infty$, энергия волны E обращается в нуль. Этот результат не зависит от природы волны и согласуется с результатами, полученными ранее для гравитационных внутренних и поверхностных волн в работах [6, 7]. Заметим, что частота волны при приближении к точке перехода, вообще говоря, не стремится к нулю. При переходе с верхней на нижнюю ветвь

дисперсионной кривой (рис.1) через указанную точку частота меняет знак в соответствии с изложенным выше правилом о смене знака для сохранения положительности адиабатического инварианта, оставаясь конечной по модулю.



Р и с. 1

Неопределенность знака в точке перехода не существенна вследствие обращения энергии нормальной волны в этой точке в нуль. Частота волны обращается в нуль в точке перехода лишь при условии $U=c$, при этом нижняя ветвь дисперсионной кривой совпадает с осью абсцисс.

Координаты ω, K_0 точки перехода найдем из условия, при котором подкоренное выражение в (22) обращается в нуль:

$$K_0 = \frac{\rho}{m} \frac{U^2 - c^2}{c^2}, \quad \omega(K_0) = \frac{\rho}{m} \frac{(U^2 - c^2)^2}{U c^2}.$$

При $K < K_0$ имеем пару комплексно-сопряженных корней $\tilde{\omega}$, что соответствует линейной неустойчивости типа Кельвина-Гельмгольца. Таким образом, как и в работах [6,7], дис-

персионная ветвь, отвечающая волнам с отрицательной энергией, начинается от точки бифуркации, по одну сторону от которой находится область линейной неустойчивости волн.

Вязкие потери в мембране могут приводить к линейной неустойчивости нормальной волны с отрицательной энергией. Это можно понять из следующего рассуждения: в предположении, что член $-i(\omega - U_k)\beta$ мал, добавку к частоте $\omega = \omega(k)$ можно найти, давая приращение выражению $Z(\omega, k)$:

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} \delta \omega - i\beta(\omega - U_k) = 0,$$

откуда следует

$$\delta \omega = i\beta(\omega - U_k) / (\partial Z / \partial \omega). \quad (24)$$

Умножив и поделив это выражение на $(\omega - U_k)$, получим

$$\delta \omega = i\beta(\omega - U_k)^2 / e_s, \quad (25)$$

где величина $e_s = (\partial Z / \partial \omega)(\omega - U_k)$ имеет смысл средней плотности энергии волны в системе координат, неподвижной относительно мембраны (при единичной амплитуде колебаний). Если плотность энергии волны в указанной системе отсчёта отрицательна, то вязкие потери приводят к линейной неустойчивости системы. Величина $-i\delta\omega$ меняет знак при переходе к нормальной волне с отрицательной энергией через точку бифуркации. При этом декремент $i\delta\omega > 0$ сменяется инкрементом $i\delta\omega < 0$ и колебания раскачиваются экспоненциально. Мы видим, что наличие внутренних потерь может привести к линейной неустойчивости там, где неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца уже отсутствует.

Учёт сжимаемости жидкости, соприкасающейся с мембраной, приводит к изменению уравнения (21):

$$m(\omega - U_k)^2 - T_1 k^2 + i\rho\omega^2 / \sqrt{\omega^2 / c_0^2 - k^2} = 0, \quad (26)$$

где c_0 - скорость звука в жидкости. Это изменение при малых значениях параметра $\beta / m k$ даёт следующее значение комплексной частоты:

$$\tilde{\omega} = \omega - i \frac{\rho \omega^2}{2 m (\omega - U_k) k_z}. \quad (27)$$

Добавка $\delta\omega$ к частоте $\omega = ck(1 + \frac{U}{c})$ является мнимой, если $\omega/c_0 > k$, и ее знак определяется знаком x -компоненты волнового вектора нормальной волны: $k_x = \pm \sqrt{(\omega^2 - \sqrt{\epsilon} c_0^{-2}) - k^2}$. Указанный знак найдем из условия, что поток энергии звука, излучаемого мембраной, уходит на бесконечность:

$$q_x = \rho v_x^* + \rho^* v_x / 2 > 0.$$

Выразив величины давления p и x -компоненты колебательной скорости v_x через смещение мембраны $\psi = \psi_0 \exp[-i(\omega t - kx)]$, получим

$$p = i\rho\omega^2 \psi / k_x, \quad v_x = -i\omega\psi, \quad q_x = \rho\omega^3 |\psi_0^2| / k_x > 0.$$

При $\omega < 0$ следует выбирать $k_x < 0$, поэтому $\delta\omega$ при переходе через точку $\omega = 0$ меняет знак, т.е. излучение звука приводит в этом случае к раскачке мембраны. Этот результат согласуется с выводом монографии [1] (с. 89): "При аномальном доплер-эффекте осциллятор, излучающий волну, не теряет, а набирает энергию, поскольку волна в его системе координат имеет отрицательную энергию".

Отметим, что следует различать потоки q_x и q_n , последний нормален к деформированной поверхности мембраны:

$$q_n = q_x \sin \theta + q_z \cos \theta,$$

при этом

$$\sin \theta = \partial \psi / \partial x, \quad \cos \theta = 1, \quad v_x = U + \partial(\psi)$$

и, следовательно,

$$q_x \sin \theta = \operatorname{Re}(\rho^* U \partial \psi / \partial x) = -\rho \omega^2 U k \omega_0^2 / k_x, \\ q_n = (\rho / k_x)(\omega - Uk) \omega^2 \omega_0^2.$$

Именно поток q_n приводит к изменению механической энергии собственно мембраны (без учёта окружающей жидкости)

$$E_{\text{МЕМБРА}} = m(\omega - Uk)^2 \omega_0^2, \quad \frac{\partial E_{\text{МЕМБРА}}}{\partial t} = q_n = -2|\delta\omega| E_{\text{МЕМБРА}}.$$

Из последнего равенства следует для $\delta\omega$ выражение (27), полученное выше из дисперсионного уравнения (26).

Можно также трактовать раскачку волны отрицательной энергии из-за вязких потерь и потерь на излучение как следствие того факта, что потери, уменьшая энергию системы, увеличивают отрицательную энергию волны по абсолютной величине, т.е. амплитуда волны растет со временем.

Может иметь также место взрывная неустойчивость волн (см. [2,3]), подчиняющихся дисперсионной зависимости (21) вследствие механизма резонансного трехволнового взаимодействия при наличии слабой квадратичной нелинейности в среде.

Пусть анизотропия поверхностного натяжения в рассматриваемой мембране (мы вновь рассматриваем дисперсионное уравнение (21), полагая $\beta = 0$) такова, что

$$c(\psi = \pi/3) = \frac{1}{2} c(\psi = 0).$$

Для волны, распространяющейся под углом ψ к оси Γ , в дисперсионном уравнении (21) следует произвести замену $U_{k_1} \rightarrow U_k \cos \psi$, $T_1 k_1^2 + T_2 k_2^2 = m c^2(\psi) k^2$. В этих условиях можно образовать резонансный триплет из двух волн положительной энергии (ω_1, k_1) , (ω_2, k_2) и одной волны отрицательной энергии (ω_3, k_3) , волновые векторы которых образуют равносторонний треугольник (рис.2), при этом

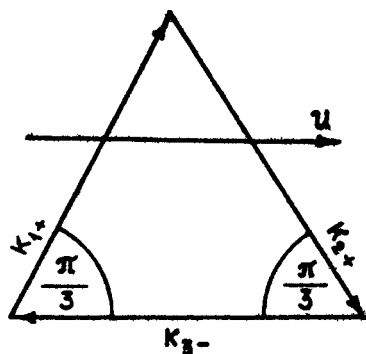
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 / 2, \quad |k_1| = |k_2| = |k_3| = k.$$

Используя выражение (22), найдем, что на резонансе выполняется соотношение

$$\frac{\rho}{mk} = \frac{c^2(0)/U^2}{1 - c^2(0)/U^2}.$$

Как известно [2,3], в этом случае взаимодействие приводит к одновременному росту амплитуд всех трех волн, образующих триплет, по "взрывному" закону

$$a(t) = a_0 / (1 - t/t_0).$$



Р и с. 2

Время, за которое амплитуда в данном приближении обращается в бесконечность, имеет порядок $t_s \sim 1/\omega \epsilon$, где ω - частота волны отрицательной энергии, ϵ - параметр нелинейности. Его можно определить, учтя в выражении для давления на мембрану со стороны соприкасающейся жидкости члены, квадратичные по ψ . Подставив в правую часть уравнения (17) выражение для ρ , найденное с помощью соотношений

$$\frac{d\rho}{dz} = -\rho \left(\frac{d v_z}{dt} + v_i \frac{d}{dx_i} v_z \right) \Big|_{z=w} \quad (i=1,2,3), \quad \frac{d w}{dt} + v_z \frac{d w}{dz} + v_y \left(\frac{d w}{dy} \right) = v_z, \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

и полагая, что амплитуда колебательного смещения является медленной функцией времени

$$\psi_n = a_n(t) \exp[-i(\omega t - \kappa_1 x - \kappa_2 y)], \quad n=1,2,3,$$

получим для a_n уравнения типа

$$\dot{a}_1 = \omega_1 \epsilon_1 a_1 a_2,$$

где коэффициент ϵ при нелинейном члене оказывается по порядку величины

$$\epsilon \sim \frac{\rho}{m} \left(\frac{U}{c_1} - 1 \right)^{-1/2}, \quad c_1 = \omega/k.$$

Резонансное взаимодействие взрывного типа протекает лишь при условии, когда для одной из дисперсионных ветвей выполняется неравенство

$$\frac{|U|}{c} > 1 \quad (\omega_s > \omega_{1,2}),$$

при котором возможно существование волны отрицательной энергии. При $|U/c| \rightarrow 1$ получим $\epsilon \rightarrow \infty$, время взаимодей-

ствия \uparrow , стремится к нулю. При этом, конечно, метод медленно меняющихся амплитуд становится неприменимым, тем не менее, можно утверждать, что в этой области рост амплитуд волн, образующих триплет, происходит наиболее интенсивно.

Аналогично мембране можно рассмотреть упругую пластину, соприкасающуюся с движущейся жидкостью. Заметим, что, вследствие дисперсии фазовой скорости изгибных волн, любая скорость потока оказывается сверхзвуковой для достаточно низкочастотной нормальной волны. Поэтому, в принципе, в этом случае неустойчивость должна возникнуть при любой скорости потока. Реальный пространственный масштаб нарастания неустойчивостей может, однако, оказаться слишком большим, чтобы неустойчивость смогла заметно проявиться.

Таким образом, мы показали, что если в системе, включающей потоки, имеются условия для образования волны отрицательной энергии, то в такой системе возможны линейные и нелинейные неустойчивости, приводящие к нарастанию указанной волны.

Л и т е р а т у р а

1. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М., Наука, 1976, с.88.
2. Захаров В.Е. - Изв.вузов, Радиофизика, 1974, 17, №4, с. 431.
3. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. - Изв.вузов, Радиофизика, 1976, 19, №5-6, с.721.
4. Островский Л.А., Степанов Н.С. - Изв.вузов, Радиофизика, 1971, 14, № 4, с.489.
5. Уизем Д.Б. - В сб.: Нелинейные волны. Под ред. С.Лейбовича и А.Сибасса. М., Мир, 1977, с.151.
6. Воронович А.Г., Рыбак С.А. - ДАН СССР, 1978, 239, №6, с.1457.
7. Воронович А.Г., Лобанов Е.В., Рыбак С.А. - Изв. АН СССР. Сер. физ. атмос. и океана, 1980, №3.

8. Рыбак С.А. - Акуст. журн., 1980, 26, №2.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., Физматгиз, 1958, с.35.
10. Brooke В. - Journ.of Fluid Mech.,1963,16, N3,p.436.

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА КРИСТАЛЛОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Л.К.Зарембо, В.А.Красильников, О.Ю.Сердобольская

1. Введение

За последнее десятилетие область исследования нелинейных акустических эффектов и нелинейных упругих свойств твердых тел значительно расширилась. Круг проблем и задач, которые можно отнести к нелинейной акустике твердых тел, сейчас настолько велик, что охватить их в кратком обзоре практически невозможно. В данном обзоре мы ограничились задачами, которые нам наиболее близки.

Акустические методы, чувствительность которых превосходит на несколько порядков чувствительность статических методов, как известно, позволяют исследовать отклонения от нелинейного закона Гука в упругой области. Определяемые при этом мод. ли упругости третьего порядка (МУТП) используются в нелинейной теории упругости. Значительная чувствительность МУТП к особенностям реальной структуры твердых тел может быть использована для ряда контрольно-измерительных применений, в частности, при решении таких важных технических задач, как неразрушающее определение концентрации напряжений, остаточных внутренних напряжений, контроля усталостного состояния конструкционных материалов. Знание этих модулей в горных породах существенно для сейсмологии.

Исследование нелинейных упругих свойств кристаллов

позволяет получить полезные сведения о кристалле; в частности, экспериментальные результаты здесь дают возможность оценить применимость различных моделей кристалла с существенно большей достоверностью, чем это можно было бы сделать на основании акустических измерений только линейных характеристик. МУТП диэлектрических кристаллов, если пренебречь их дисперсией, определяют эффективность взаимодействия упругих волн с тепловыми колебаниями решетки; на основании МУТП могут быть найдены постоянные Грюнайзена и ряд кинетических характеристик кристаллов, например, решеточное поглощение звука.

Исследования феноменологической нелинейности кристаллов за последнее десятилетие значительно продвинулись вперед. Это относится в первую очередь к нелинейности пьезоэлектриков. Термодинамический подход к описанию таких кристаллов показал, что помимо известной ранее электрической нелинейности, такой как электрострикция (присущей, кстати, не только пьезоэлектрикам), имеется ряд других электроупругих нелинейностей, таких как нелинейный пьезоэффект, нелинейная фотоупругость. Нелинейности этого типа, позволяющие "смешивать" акустические и электрические воздействия на кристалл, открывают дополнительные возможности акустики в области обработки радиосигналов. Если раньше акустические устройства использовались в этой области в основном в качестве линейных фильтрующих или задерживающих элементов, то с развитием работ по нелинейной электроупругости кристаллов появилась возможность получения корреляционных функций двух сигналов, их свертки, "обращения" времени, акустической памяти, неподвижных или медленно движущихся решеток в кристаллах. Эти методы, в частности, позволяют принципиально разрешить одну из сложных проблем акустической голографии — фиксацию голограммы. Следует сказать, что как чисто упругая нелинейность, так и электроупругие нелинейности в исследованных до сих пор пьезодиэлектриках (исключая, может быть, такие экзотические состояния, как области структурных фазовых переходов), к сожалению, малы. Это, естественно, приводит к большим потерям на нелинейное преобразование, что пока в определенной мере сдерживает широкое применение таких устройств.

Электроупругие взаимодействия по определению относятся к частотам электромагнитных волн радиодиапазона, что допускает рассмотрение взаимодействия квазистатического электромагнитного поля с полем упругих волн. Взаимодействие упругих волн с электромагнитными волнами оптического диапазона, когда электромагнитное поле нельзя уже считать квазистатическим, исследовалось уже давно. Это различные виды дифракции света на упругих волнах (дифракция Рамана-Натта, брэгговская дифракция, рассеяние Мандельштама-Бриллюэна). По всем этим видам взаимодействия фононов с фотонами имеются достаточно полные обзоры, в данном обзоре эти взаимодействия не будут рассматриваться.

В кристаллах полупроводников и металлов имеется всегда связь упругих возмущений с носителями заряда. Это приводит к возникновению электронной нелинейности. При связи носителей с акустической волной посредством деформационного потенциала эта нелинейность, как правило, достаточно мала. Иначе обстоит дело, когда связь осуществляется пьезоэффектом, что становится возможным в кристаллах пьезополупроводников. В этом случае под действием пьезоэлектрического поля упругой волны происходит группировка носителей заряда, и из-за ограниченной их концентрации этот процесс оказывается сильно нелинейным. Такая концентрационная нелинейность может на несколько порядков превосходить решеточную нелинейность кристалла. Использование этой нелинейности для получения указанных выше нелинейных электроупругих эффектов существенно снижает потери на преобразование и открывает широкие возможности для использования акустоэлектронных устройств.

В достаточной мере специфической является проблема магнитоупругих нелинейностей магнитострикционных материалов и ферритов. В этой области имеется значительное число монографий и обзоров, и здесь они рассматриваться не будут.

2. Элементы нелинейной теории упругости пьезоэлектриков

В настоящее время широкое распространение получило термодинамическое описание нелинейных кристаллов [1-3]. Выбор термодинамического потенциала определяется характером процесса и независимыми переменными, например, для адиабатического процесса - распространения звука в пьезоэлектрике - удобно рассматривать электрическую энтакпию Гиббса

$$H = 2^{-1} C_{ijkl} U_{ij} U_{kl} + 6^{-1} \tilde{C}_{ijklmn} U_{ij} U_{kl} U_{mn} - e_{mkl} E_m U_{kl} - 2^{-1} \tilde{e}_{ijkl} E_m U_{kl} E_n U_{ij} U_{kl} - 2^{-1} f_{mkl} E_m E_n U_{kl} - 2^{-1} \epsilon_{mnl} E_m E_n E_p - 6^{-1} \gamma_{mnp} E_m E_n E_p.$$

Здесь C_{ijkl} , \tilde{C}_{ijklmn} - упругие модули 2-го и 3-го порядков, e_{mkl} , \tilde{e}_{ijkl} - линейные и нелинейные пьезоэлектрические коэффициенты, ϵ_{mnl} , γ_{mnp} - коэффициенты линейной и нелинейной диэлектрической проницаемости, f_{mkl} - коэффициент электрострикции, U_{ij} - тензор деформации, E_n - компонента электрического поля.

Линейные упругие и пьезоэлектрические модули исследованы достаточно хорошо для большинства кристаллов, МУТП определены для сравнительно небольшого числа кристаллов в основном кубической симметрии [4,5], еще меньше данных об электрострикционных и нелинейных пьезоэлектрических коэффициентах. Значения известных МУТП для кристаллов приведены в табл. 1 (здесь, как обычно, приняты матричные обозначения $\tilde{C}_{ijklmn} \rightarrow \tilde{C}_{pqrs}$, где 11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 13→5, 12→6).

При совместном решении уравнения движения и уравнений Максвелла в квазистатическом приближении нелинейность считается малой. Это позволяет использовать метод последовательных приближений или медленно меняющихся амплитуд, что в первом приближении приводит к задаче о распространении линейной упругой волны, а во втором - генерация волны происходит под действием распределенной вынуждающей силы.

Упругие модули третьего порядка
некоторых монокристаллов (в 10^{10} Дин/см²)

Кубические кристаллы

Кристалл	\bar{C}_{111}	\bar{C}_{112}	\bar{C}_{123}	\bar{C}_{144}	\bar{C}_{166}	\bar{C}_{455}	\bar{C}_{113}	\bar{C}_{123}
Cu	-140	-83	-15	-7	-71	-5		
Ag	-84	-53	-19	5.6	-64	8.3		
Au	-170	-92	-23	-1.3	-65	-1.2		
Al	-110	-32	3.6	-2.3	-34	-3		
Ni	-240	-150	4.6	-21	-87	-4.4		
Fe	-280	-8.0	-61	-	-	-		
Pb	-43	-28	1.7	-	-	-		
Ca	-17	-10	0.7	-	-	-		
Sn	-12	-7.3	0.5	-	-	-		
Si	-78	-44	-5	1.9	-31	-7		
Ge	-67	-37	0.3	-0.2	-29	-5		
NaCl	-85	-3	4	2.6	-6.1	-0.7		

Кристалл	\bar{C}_{111}	\bar{C}_{112}	\bar{C}_{123}	\bar{C}_{144}	\bar{C}_{133}	\bar{C}_{131}	\bar{C}_{113}	\bar{C}_{132}
KCl	-71	-2.3	1.3	1.5	-2.5	1.3		
KBr	-46	-3.9	1.1	1.9	-3.3	1.9		
KI	-47	-3.1	0.7	1.4	-2.6	1.4		
RbCl	-67	-1.8	0.5	1.1	-1.7	1.4		
LiF	-190	-33	-4	10	-32	4.3		
NaF	-150	-27	-	-	-	-		
BaF ₂	-58	-30	-	-	-	-		
SrF ₂	-82	-31	-	-	-	-		
InSb	-31	-21	-4.8	0.02	0.9	-12		
GaAs	-67	-40	-0.4	-7.0	-32	-6.9		
GaF ₂	-130	-40	-	-	-	-		
GaSb	-48	-31	-4.4	5	-22	-2.5		
Nb	-290	-96	-79	-8	-30	-7		
MgO	-490	-9.5	-6.9	1.1	-66	15		
SrTiO ₃	-50	-	-	-	-	-		

Таблица 1 (продолжение)

Кристалл	$\bar{1}_{111}$	$\bar{1}_{112}$	$\bar{1}_{123}$	$\bar{1}_{144}$	$\bar{1}_{155}$	$\bar{1}_{156}$	$\bar{1}_{113}$	$\bar{1}_{133}$
YIG	-230	-720	-3.3	-15	-31	-9.7		
RbAg ₄ I ₅	-22	-5.6	-7	2.5	-4.6	-4.1		
CaF ₂	-130	-40	-	-	-	-		
K[Al(SO ₄) ₂ ·12H ₂ O]	-22	-7.1	-13	-2.3	-7.4	-2.0	-8.6	-8.0
NH ₄ [Al(SO ₄) ₂ ·12H ₂ O]	-7.5	-1.1	-1.9	-2.9	-4.9	-0.6	-2.0	-5.6
Ca[Al(SO ₄) ₂ ·12H ₂ O]	-21	-11	-9.0	-2.7	-5.4	-1.6	-13	-5.9
(NH ₄) ₂ [Al(SO ₄) ₂ ·12H ₂ O]	-24	-12	-10	-1.1	-2.9	-0.6	-12	-4.3
Bi ₁₂ BeO ₂₀	-58	17	8	-3.5	-8	3	-32	-16
Bi ₁₂ SiO ₂₀	-69	-11	7	-9	-30 ⁶	-0.3	-15	-7

Тетрагональные кристаллы

Кристалл	$\bar{1}_{111}$	$\bar{1}_{112}$	$\bar{1}_{123}$	$\bar{1}_{144}$	$\bar{1}_{155}$	$\bar{1}_{156}$	$\bar{1}_{133}$	$\bar{1}_{144}$	$\bar{1}_{155}$	$\bar{1}_{156}$			
KDP	-54	-29	-26	6.7	-18	-4	4	-3.5	-3	-91	-2.7	-1.9	0.8
TeO ₂	-16	-60	-14	-11	-18	-4	4	-64	-64	-210	-5	-26	-25

Таблица 1 (окончание)

Гексагональные кристаллы

Кристалл	$\tilde{\chi}_{111}$	$\tilde{\chi}_{112}$	$\tilde{\chi}_{113}$	$\tilde{\chi}_{116}$	$\tilde{\chi}_{123}$	$\tilde{\chi}_{133}$	$\tilde{\chi}_{144}$	$\tilde{\chi}_{145}$	$\tilde{\chi}_{155}$	$\tilde{\chi}_{222}$	$\tilde{\chi}_{333}$	$\tilde{\chi}_{444}$
$Pb_5(GeO_4)(VO_4)_2$	-90	-9.6	-21	10	-6.7	-18	-12	-0.1	-2.6	-89	-36	-1.6
$Pb_5(SiO_4)(VO_4)_2$	-110	-11	-33	19	-4.3	-7.1	-16	-0.3	-5.3	-110	-74	-8.2
$Pb_5Ge_3O_{11}$	-46	2.3	6.7	0.01	14	-8.2	1.9	0.02	-14	-46	-68	-8

Тригональные кристаллы

Кристалл	$\tilde{\chi}_{111}$	$\tilde{\chi}_{112}$	$\tilde{\chi}_{113}$	$\tilde{\chi}_{114}$	$\tilde{\chi}_{123}$	$\tilde{\chi}_{124}$	$\tilde{\chi}_{133}$	$\tilde{\chi}_{134}$	$\tilde{\chi}_{144}$	$\tilde{\chi}_{155}$	$\tilde{\chi}_{222}$	$\tilde{\chi}_{333}$	$\tilde{\chi}_{444}$
SiO_2	-21	-34	1.2	-16	-29	-1.5	-31	0.2	-13	-20	-33	-82	-11
$LiNbO_3$	-51	45	73	-41	72	5.5	-3.4	-0.1	-3.7	-60	-48	-36	-54

Примечание: приведенные в таблице модули, в основном, взяты из [4,5], где имеются ссылки на оригинальную литературу.

Взаимодействие упругой волны с электрическим полем в общем случае должно приводить к возбуждению упругой волны другой частоты; очевидно, что меняющееся электрическое поле модулирует параметры среды и тем самым модулирует упругую волну. Как результат модуляции должны возникать комбинационные частоты. Справедливо и обратное утверждение: взаимодействие двух упругих волн при определенных условиях, которые более детально будут рассмотрены ниже, приводит к возникновению переменной электрической индукции. Отметим, что как и в квазистатистике, скорость электромагнитной волны считается бесконечной, благодаря чему условия синхронизма здесь приобретают специфический вид. Условиям синхронизма, как известно, соответствует возбуждение "собственных волн" среды, т.е. волн, удовлетворяющих дисперсионному соотношению. Эти волны при малом затухании могут достаточно долго существовать и в том случае, когда источник возбуждения выключен. Однако иногда могут представлять интерес и "несобственные волны", существующие лишь тогда, когда в среде есть возмущения (упругие или электрические), поддерживающие этот, строго говоря, неволновой процесс.

Как известно, распространение упругих волн в кристаллах даже в линейном приближении в значительной мере отличается от распространения в изотропном твердом теле [6]. В произвольном направлении в кристалле, вообще говоря, распространяется квазипродольная и две квазипоперечные волны; вектор смещения не коллинеарен (для квазипродольной) и не ортогонален (для квазипоперечной волны) волновому вектору. Распространение "чистых" продольных и поперечных волн возможно лишь вдоль некоторых выделенных направлений, нелинейные эффекты в которых, если не принимать во внимание электрофизических свойств кристаллов, имеют много общего с нелинейными эффектами в изотропных твердых телах.

Для линейной кристаллоакустики характерен ряд поляризационных явлений [7]. Например, вызванный пространственной дисперсией поворот плоскости поляризации линейно-поляризованных поперечных волн, распространение которых происходит вдоль акустической оси кристалла. Это явление часто называют естественной акустической активностью. Другой

поляризационный эффект — внутренняя коническая рефракция, состоящая в отклонении потока энергии чисто поперечных звуковых волн от направления волновой нормали. Существенное значение имеет и эффект эллиптической поляризации, возникающий при распространении упругих волн в кристаллах либо под действием механических напряжений или электрического поля, приложенного к кристаллу, либо из-за небольшой разориентации кристалла относительно акустической оси.

В кристаллоакустике поляризационные явления имеют много общего с кристаллооптикой, хотя их математическое описание сложнее, сложнее и проведение экспериментальных исследований. Например, оптическая активность описывается тензором третьего ранга, акустическая активность — тензором пятого ранга. Этим объясняется тот факт, что изучение поляризационных акустических явлений в кристаллах получило большое развитие только в последние годы.

3. Экспериментальные методы нелинейной акустики

Для исследования нелинейных акустических эффектов разработан ряд экспериментальных методов, которые позволяют не только изучать физические свойства исследуемых материалов, но и реализовать устройства, в которых используется акустическая нелинейность кристаллов.

Мы будем рассматривать чисто акустические методы исследования упругой и электроупругой нелинейностей. Известно, что статический метод измерения зависимости деформации от напряжения также дает возможность определить по виду кривой $\sigma(\epsilon)$ упругие изотермические модули. Однако точность такого метода невелика и применяется он в основном для конструкционных материалов при больших внешних нагрузках.

В настоящее время одним из самых распространенных и, пожалуй, самым точным методом определения коэффициентов третьего порядка является измерение зависимости скорости звука v от внешнего электрического поля E или напряжения σ . Производные $\partial v / \partial \sigma$ и $\partial v / \partial E$ выражаются через комбинации нелинейных упругих, пьезо-

электрических, электрострикционных и электрооптических модулей^{*)}. Впервые вычисления были проделаны Браггером в [8] для диэлектрического кристалла произвольной симметрии и в дальнейшем распространены на кристаллы с пьезоэффектом [9].

В кристаллах низкой симметрии определение полной матрицы $\{\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma}, \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma}, \dots\}$ (где $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma}$ - нелинейные пьезоэлектрические коэффициенты [1 + 3]) требует большого количества измерений. При этом стараются использовать "чистые" волны, поскольку расчеты для квазипродольных и квазипоперечных волн достаточно сложны. Измеряя производные $\partial v/\partial \sigma$ и $\partial v/\partial E$ для различных акустических мод и различных направлений одноосных напряжений σ и электрических полей E , а также при гидростатическом сжатии, можно получить систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов третьего порядка (при условии, что упругие, пьезо- и диэлектрические константы второго порядка известны). Обычно при этом руководствуются следующими правилами.

а) Использовать как можно больше экспериментов с гидростатическим сжатием, которое дает однородное распределение давления по образцу и, как следствие этого, увеличивает точность измерений. При гидростатическом сжатии можно достигать больших значений давления и больших изменений скорости без риска разрушить образец.

б) Стараться создать однородные электрические поля и поля одноосных механических напряжений. В случае прозрачных материалов однородность последнего может контролироваться по двулучепреломлению света.

в) Получить переопределенную систему уравнений. Тогда, обрабатывая результаты с помощью метода наименьших квадратов, можно увеличить их точность.

При измерениях следует обращать внимание на то, чтобы изменения скорости звука носили обратимый характер и наложение полей не приводило к увеличению затухания звука, т.е. изменение происходило бы в упругой области. Для решеточной нелинейности зависимость $v(\sigma)$, если не учитывать электрострикционных поправок, должна оставаться линейной вплоть до сотен килобар. Зависимость v от электри-

^{*)} Модули третьего порядка, рассчитанные на основании этих измерений, являются смешанными.

ческого поля имеет более сложный характер, так как пьезоэффект зависит от поля линейно, а электрострикция квадратично. В реальных кристаллах изменение скорости звука может быть связана с дислокационным механизмом; с ростом давления происходит выгибание и отрыв дислокаций, а также появление новых дислокаций [10]. При этом зависимость скорости упругой волны от давления перестает быть линейной, наблюдаются гистерезисные явления и увеличение затухания. Даже на начальном линейном участке зависимости $v(\sigma)$ наклон кривой может определяться движением дислокаций.

Экспериментальные методы сейчас позволяют определить относительное изменение скорости звука порядка 10^{-6} + 10^{-7} . Такая точность требует уже учета нагрева образца в результате приложения внешних полей и стабилизации температуры. Погрешность в измерении модулей третьего порядка в настоящее время может составлять $\sim 1\%$, однако, как правило, она на порядок больше.

Наиболее распространенные методы нелинейной акустики основаны на изменении спектра акустического сигнала в процессе распространения звука в нелинейной среде. Сюда относятся многочисленные работы по измерению амплитуды второй и более высоких гармоник, комбинационных частот и детектированию акустических волн [11-19].

В простейшем варианте измерения амплитуды второй гармоники бегущей волны важными моментами являются следующие.

- 1) Нелинейные искажения в выходных цепях возбуждающего генератора.
- 2) Нелинейные искажения в приемном устройстве, куда попадает сильный сигнал основной частоты.
- 3) Нелинейность пьезопреобразователей, особенно излучающего.

Указанные нелинейности мешают наблюдению гармоник, генерируемых в процессе распространения волны в среде, особенно в тех случаях, когда эти гармоники невелики. Обычно для твердых тел, за исключением пьезополупроводников, внутренние потери на генерацию гармоник составляют ~ 40 дБ/м, а для запрещенных гармоник на 1-2 порядка меньше, это требует особых предосторожностей и тща-

тельной оценки всех возможных паразитных нелинейных эффектов, например, разориентации образца [11].

Известно, что амплитуда высших гармоник и комбинационных волн нарастает с расстоянием, достигает максимума и затем убывает. Отсюда следует, что серия отраженных импульсов 2-й гармоники должна быть промодулирована функцией $(e^{-\alpha_1 z} - e^{-\alpha_2 z})$, где α_1 и α_2 — коэффициенты затухания на основной и удвоенной частотах. Однако из-за фазовых сдвигов при отражении на границе образца [12] такую картину редко удается наблюдать, в большинстве случаев серия импульсов имеет вид, близкий к экспоненциальному, хотя и очень сильно зависящей от граничных условий (толщины склейки, согласования преобразователей с измерительными приборами и т.д.).

Перспективным методом индикации высших гармоник является оптический, использующий брэгговскую дифракцию света на ультразвуковой волне [13, 14]. Этот метод применяется для изучения распространения и взаимодействия звуковых волн на частотах, начиная с сотен мегагерц и выше в оптически прозрачных кристаллах. При падении света под брэгговским углом $\theta_B = \Lambda/2\lambda$, где Λ — длина волны света в среде, λ — длина звуковой волны, дифракция Брэгга на волне основной частоты наблюдается под углом θ_B . Для индикации n -й гармоники свет должен падать под углом $n\theta_B$, и под углом $n\theta_B$ наблюдается дифракция. При небольших θ_B (на не очень высоких частотах) паразитными эффектами являются брэгговская дифракция более высокого порядка, чем первый, а также эффекты, вызванные нелинейной фотоупругостью. Основной проверкой того, что дифракция происходит на гармонике, генерируемой в среде, является тот факт, что при передвижении светового луча вдоль кристалла от излучателя к приемнику сигнал, соответствующий первому прохождению звука вдоль кристалла, должен нарастать от нулевого значения.

Метод дифракции света позволяет определить амплитудные соотношения между 1-й и 2-й гармоникой и значения соответствующих МУТП. Однако абсолютные измерения интенсивности звука с помощью света пока еще недостаточно точны из-за поперечной неоднородности звуковой волны в кристалле.

Вообще говоря, определение упругих модулей высших порядков методом генерации гармоник наталкивается на необходимость абсолютных измерений амплитуды звукового смещения. Пока наилучшие результаты дает применение в качестве приемника звука широкополосных емкостных датчиков [15]. Точность определения модулей третьего порядка таким способом может достигать 5-10%.

Взаимодействие акустических волн в нелинейной среде может приводить к эффектам модуляции и детектирования. В [16,17] теоретически и экспериментально исследовалась модуляция звука звуком для объемных и поверхностных волн в изотропных телах. Показано, что для бегущих волн имеет место фазовая модуляция, а для стоячих волн, кроме фазовой, появляется и амплитудная. Исследование резонансного детектирования было проведено в [18-20]. Существует ряд особенностей модуляции и детектирования в твердом теле, связанные с тем, что при этих взаимодействиях, как правило, сильно проявляется "геометрическая" дисперсия скорости звука. Длина волны модулирующего упругого поля $\lambda_s \gg d$, где d - характерные поперечные размеры образца, а для высокочастотной упругой волны $\lambda_\omega < d$. Например, при резонансном детектировании в стержне волна частоты $\omega/2\pi \approx 10$ МГц может рассматриваться как плоская, а для частоты огибающей $\Omega/2\pi \approx 10$ кГц стержень считается тонким и скорости соответствующих акустических мод различаются на 20%. Однако даже при несинхронном взаимодействии в материалах с малым затуханием детектированный сигнал может достигать значительной амплитуды при двойном резонансе, когда обе частоты - и низкая и высокая - совпадают с собственными частотами стержня.

В пьезоэлектрическом резонаторе из-за линейной и нелинейной связи электрической и механической подсистем внешнее возмущение одной из них приводит к многообразию отклика: генерации электрических и механических сигналов, комбинационных частот, сдвигу резонансной частоты, эффекту выпрямления (появлению постоянной составляющей), зависимости резонансной частоты от амплитуды поляризующего поля [21,22].

4. Влияние реальной структуры твердых тел на нелинейные эффекты

Фонон-фононные взаимодействия в реальных твердых телах в значительной степени определяются несовершенством структуры - дефектами структуры кристалла, остаточными деформациями и напряжениями. Последние могут быть обусловлены суммарным полем дислокаций, точечных дефектов, статических искажений решетки, вызванных взаимодействием зерен в поликристаллах. В ядрах дефектов имеют место сильные искажения кристаллической решетки, для описания которых необходимы данные о нелинейных свойствах кристалла, о МУП и модулях более высоких порядков. Изучение влияния такого рода дефектов на нелинейное взаимодействие упругих волн принципиально позволяет получить сведения о реальной структуре твердого тела. Наиболее существенно несовершенства реальных твердых тел влияют на генерацию запрещенных по соображениям симметрии гармоник. Одним из примеров может быть генерация второй сдвиговой гармоники в сдвиговой волне. Для однородного изотропного твердого тела, а также для ряда направлений в кристаллах, в законе Гука для сдвиговой деформации должны отсутствовать члены с четными степенями деформации. При определенном соотношении между масштабом внутренних полей деформации и длиной звуковой волны в сдвиговой волне конечной амплитуды нарушается изотропия смещений и запрет на генерацию второй гармоники снимается. Впервые генерация запрещенных сдвиговых гармоник описана в [23].

Сигнал второй сдвиговой гармоники обычно на 20-40дБ ниже, чем при взаимодействии продольных волн. В чистых монокристаллах металлов (Al, Cu) и полимерах типа полистирола наблюдается изменение амплитуды гармоники при воздействии слабых внешних механических напряжений, в особенности, если направление внешней силы совпадает с направлением смещения в волне. Эффекты при нагружении имеют релаксационный характер с временами релаксации несколько минут [24]. Возможность генерации запрещенных гармоник объясняется на основании модели, учитывающей смещение дислокации в поле упругой волны [25]. Если скольжение дислокаций может вызываться небольшими упру-

Тимп полями, как это имеет место для чистых монокристаллов металлов, то приложение статического смещающего напряжения дополнительно к смещению в упругой волне может привести к тому, что перемещение дислокации из нового положения равновесия различно для отрицательных и положительных напряжений. Теоретический расчет взаимодействия и генерации гармоник поперечных и продольных упругих волн в среде с дислокациями проведен в [26]. Характерным для этих взаимодействий является наличие сильной дисперсии и нарушение синхронизации в $\Gamma_{\omega} + \Gamma_{\omega} \rightarrow \Gamma_{2\omega}$ процессе. В [27] были рассчитаны амплитуды сдвиговых гармоник в среде со случайными и периодическими изменениями внутренних напряжений. Если в выражении для упругой энергии учесть члены четвертого порядка по деформации и считать, что смещения, вызванные внутренними напряжениями и звуковой волной, аддитивны, то в законе Гука, содержащем кубический член $\tilde{C}^{\text{III}} (\partial u / \partial x)^3$, появятся члены вида $\tilde{C}^{\text{IV}} (\partial u / \partial x)_s (\partial u / \partial x)^2$, где $(\partial u / \partial x)_s$ — величина остаточной деформации. Эти квадратичные по смещению в звуковой волне члены делают возможной генерацию запрещенных сдвиговых гармоник. Остаточные внутренние напряжения могут приводить не только к генерации сдвиговых гармоник с поляризацией основной волны, но и с перпендикулярным направлением поляризации, как это имеет место для анизотропных сред (см. следующий раздел). В среде со случайным распределением остаточных внутренних напряжений интенсивность второй гармоники пропорциональна квадрату дисперсии и радиусу корреляции внутренних напряжений, нарастание ее происходит линейно с расстоянием, в то время как в однородной среде линейно нарастает амплитуда. Эффект генерации запрещенных гармоник может быть применен для контроля усталостных изменений материалов; сдвиговая гармоника значительно чувствительнее к внутренним деформациям, чем продольная, и изменение ее начиналось с числа циклов старения, составляющего 10% от числа циклов, приводящих к разрушению образца [28]. В то же время затухание "чувствует" усталостное изменение лишь ближе к области образования разрывов.

При значительных амплитудах звука дефектная структура твердых тел проявляется и в случае возбуждения продоль-

ных волн. Вероятно, с этим было связано снижение порога параметрической генерации звука в кольцевом резонаторе [29] с характерной релаксацией и остаточными явлениями. Естественно, что электроупругие нелинейности также должны зависеть от неоднородностей кристалла. В настоящее время, однако, этот вопрос исследовался лишь для неоднородных пьезополупроводников и только для линейных акустических эффектов.

5. Поляризационные явления и генерация сдвиговых гармоник в кристаллах

Выше кратко говорилось о линейных поляризационных явлениях. Еще более сложными оказываются нелинейные поляризационные явления. В [30,31] было теоретически показано, что для поперечных волн, распространяющихся вдоль акустической оси кристалла, поляризация основной волны ω и поляризации волны второй гармоники 2ω могут не совпадать; могут не совпадать также направления потоков энергии волн ω и 2ω .

В тригональных кристаллах класса $3m, \bar{3}2$, к числу которых принадлежит, например, кварц, для чисто сдвиговых волн, распространяющихся вдоль оси третьего порядка, I - и U - проекции вынуждающих сил N_x и N_y , вызывающих появление второй гармоники, в первом приближении оказываются равными

$$N_x = \tilde{C}_{444} \sin 2\psi, \quad N_y = \tilde{C}_{444} \cos 2\psi,$$

где ψ - угол между осью I и направлениями смещения в сдвиговой волне. Из этого соотношения следует, что при повороте вектора смещения исходной волны на угол ψ вектор смещения второй гармоники поворачивается на угол 2ψ . Для волны с поляризацией по оси I гармоника поляризована по оси U , а для волны с поляризацией по оси U поляризация сохраняется вдоль этой же оси. Эти выводы теории были экспериментально подтверждены в [32]. В этой же работе на примере кристалла кремния было показано, что такие же явления возникают для волн, распростра-

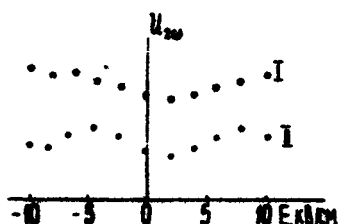
являющихся по направлению $[111]$ (эта ось также ось третьего порядка) в кубических кристаллах.

В [33] были продолжены эксперименты по генерации волны 2ω и волны комбинационной частоты $\omega_1 + \omega_2$ при распространении сдвиговых волн вдоль тригональной оси в кварце. Вдоль этого направления (ось симметрии третьего порядка) имеет место и коническая рефракция. При распространении в этом направлении двух сдвиговых волн с разными поляризациями направления их лучевых скоростей в общем случае несколько различаются. При конечной ширине звукового пучка это приводит к уменьшению объема взаимодействия, следовательно, к уменьшению амплитуды гармоники или волны комбинационной частоты.

Явление возникновения эллиптической поляризации при воздействии электрического внешнего поля в нелинейном случае было впервые рассмотрено (как теоретически, так и экспериментально) в [34]. В этой работе для кристаллов различных классов был рассчитан нелинейный параметр, характеризующий электрическую поляризацию при действии как постоянного электрического поля, так и однородного механического напряжения. Экспериментально "нелинейный" вариант эллиптической поляризации был исследован в работе [35]. В [36, 37] было показано, что гармоника эллиптически поляризованной волны имеет сложную поляризацию, зависящую от нелинейных коэффициентов и величины внешнего воздействия. На рис. 1 показаны результаты измерений амплитуд первых двух импульсов второй гармоники поперечной волны в LiNbO_3 при распространении этой волны на частоте $\omega/2\pi = 420 \text{ МГц}$ с вектором смещения под углом 45° к осям X и Y ; приемный резонатор имеет ту же поляризацию, электрическое поле направлено по оси X , а волна распространяется по оси Z . Обработка результатов измерений позволяет по изложенной в [37] теории определить нелинейный параметр, ответственный за поляризацию. Теми же авторами экспериментально исследовалось влияние разориентировки образца при генерации второй гармоники. Отметим, что при измерениях нелинейных эффектов, возникающих именно за счет эллиптической поляризации, необходимо было исключить влияние таких эффектов, как акустическая активность и отклонение потока энергии эллипти-

чески поляризованных поперечных волн. Здесь же исследовались поток энергии на частотах вторых гармоник и влияние поляризационных явлений на взаимодействии акустических волн.

Р и с. 1. Зависимости амплитуды первого и второго звуковых импульсов 2-й гармоники от напряжения поперечного электрического поля ($\omega/2\pi = 420$ МГц, $k \parallel Z$, поляризация 45° к X и Z) [37]



В диэлектрических, пьезоэлектрических и пьезополупроводниковых кристаллах имеется большое число разрешенных коллинеарных и неколлинеарных взаимодействий. Учёт поляризационных явлений в нелинейной кристаллоакустике ещё более усложняет задачу определения разрешенных взаимодействий, и мы не будем этого касаться.

6. Применение методов нелинейной акустики к исследованию фазовых переходов

Изучение особенностей генерации гармоник акустических волн в последние годы стало одним из методов исследования нелинейных свойств кристаллов в области фазовых переходов. В окрестности критических точек кристаллическая решетка становится существенно нелинейной, более того, фазовый переход сам является следствием ангармоничности решетки. Феноменологическая теория переходов 2-го рода Ландау (см., например, [38]) исходит из того, что существует количественная характеристика изменения симметрии в переходе — параметр порядка (далее речь пойдет о структурных фазовых периодах), равный тождественно нулю в высокосимметричной фазе и отличный от нуля в низкосимметричной фазе. Вблизи точки перехода термодинамический потенциал можно разложить по степеням параметра порядка η . Чтобы представить себе поведение МУП, запишем термодинамический потенциал вблизи перехода в виде

$$\Phi = \Phi_0 + (\alpha/2)\eta^2 + (\beta/4)\eta^4 + (\gamma/6)\eta^6 + 2^{-1}c_0^{\text{II}}\eta^2\epsilon^2 + \\ + b^{-1}\tilde{c}_0^{\text{III}}\eta^3\epsilon^3 - h\eta\epsilon + q\eta^2\epsilon,$$

где $\alpha = \alpha_0(T - T_0)$, остальные коэффициенты не зависят от температуры. Естественно, что в зависимости от свойств симметрии параметра порядка коэффициенты, стоящие при различных степенях η и ϵ , будут тензорами различных рангов. В простейшем случае собственного одноосного сегнетоэлектрика параметром порядка является спонтанная поляризация P_s , линейный перекрестный член отвечает пьезоэффекту, а квадратичный — электрострикции. Равновесное значение параметра порядка определяется из условия минимума термодинамического потенциала. Звуковая волна выводит систему из равновесия, и возвращение параметра порядка к равновесному значению носит релаксационный характер. Решая совместно волновое уравнение и уравнение релаксации для η , можно получить температурную зависимость эффективных МУТП и сигнала 2-й акустической гармоники [39-42].

Таким образом, например, для одноосного сегнетоэлектрика имеем $\eta = P_s$, система связанных уравнений для деформации и поляризации имеет вид

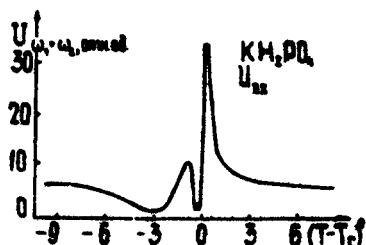
$$\frac{\partial P_s}{\partial t} = -L \frac{\partial \Phi}{\partial P_s}, \quad \rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

где L — кинетический коэффициент. Результаты существенно зависят от того, существует ли в высокосимметричной фазе линейная связь деформации с параметром порядка. Если $h \neq 0$, то упругие модули второго и третьего порядков, для которых существует линейная связь с η , обращаются в нуль в точке перехода $T_c = T_0 + (h^2/c_0^{\text{II}}\alpha)$, причём $c_0^{\text{II}} \approx c_0^{\text{II}}(T - T_c)/(T - T_0)$, а изменение \tilde{c}_0^{III} носит более сложный характер — при $T \gg T_c - T_0$ может наблюдаться нарастание \tilde{c}_0^{III} , а затем его значение уменьшается до нуля в точке T_c .

Для фазовых переходов 2-го рода в кристаллах, для которых симметрия допускает только квадратичную связь деформации с параметром порядка со стороны высокосиммет-

ричной фазы, модули второго порядка испытывают скачок, а для МУТП аномалии не должны наблюдаться.

Однако экспериментальное изучение поведения МУТП вблизи фазовых переходов показывает, что в этой области, как правило, наблюдается сильное нарастание 2-й гармоники акустических волн для тех направлений, где гармоника является разрешенной [39, 43-46]. Сигнал 2-й гармоники увеличивается несмотря на рост затухания звуковой волны, и только в непосредственной близости от точки перехода диссипация превалирует над нелинейностью, и сигнал гармоники уменьшается. На рис.2 показано поведение 2-й гармоники продольной волны вдоль оси z для KDP , фазовый переход в котором происходит при $T_c = -152^\circ\text{C}$ [38]. На -растание сигнала особенно заметно при $T > T_c$, где затухание мал.



Р и с. 2. Изменение амплитуды волны суммарной частоты с температурой в кристалле KDP для продольной волны вдоль оси z ($\omega_1/2\pi = 8,5$ МГц, $\omega_2/2\pi = 22$ МГц, $T_c = -151^\circ\text{C}$) [43]

Аномальное поведение можно объяснить, если учесть - взаимодействие звуковой волны с пространственно-неоднородными флуктуациями параметра порядка, нарастающими вблизи перехода [47,48]. Учёт флуктуаций означает добавление в выражении для термодинамического потенциала члена вида $(\text{grad } \eta)^2$

Основной вклад в температурные аномалии физических величин дают длинноволновые флуктуации, для которых волновой вектор $k \ll \sqrt{\alpha/\delta}$, где $\sqrt{\delta/\alpha}$ — радиус корреляции флуктуаций параметра порядка. Учет флуктуаций дает для МУП вблизи перехода критическое возрастание $(T - T_c)^{-\beta}$, где $\beta = (-1/2) + (-3/2)$, в зависимости от симметрии кристалла в высокотемпературной фазе и числа компонент параметра порядка. Однако для ряда кристаллов сигнал второй акустической гармоники имеет более сильное критическое поведение, т.е. величина β , называемая критическим показателем, по абсолютной величине больше, чем следует из флуктуационной теории. Исследование модулей третьего порядка в этом случае весьма перспективно, так как они имеют большие критические аномалии, чем модули второго порядка.

В реальных кристаллах существенный вклад в поведение физических величин могут внести дефекты. В [49] было рассмотрено влияние точечных не взаимодействующих дефектов на критическое поведение кристаллов в области фазовых переходов, когда расстояние между дефектами много больше радиуса корреляции флуктуаций параметра порядка. Искривляя решетку, дефект вызывает локальное изменение η ; область влияния дефекта растет вблизи перехода. Как показали расчеты, различные типы дефектов могут давать разные критические индексы для температурного поведения 2-й гармоники в окрестности фазового перехода; кроме того, во многих случаях дефектная структура и связанные с ней внутренние напряжения кристалла приводят к генерации 2-й гармоники, обусловленной нелинейностью четвертого порядка (см. разд. 4).

Критические индексы для модулей упругости второго и третьего порядков, обусловленные различными механизмами, приведены в табл. 2.

Особенно интересным представляется исследование нелинейных акустических эффектов при сегнетоэластических фазовых переходах, поскольку для этих переходов упругость является основным макроскопическим свойством, испытывающим существенные аномалии в критической области [50].

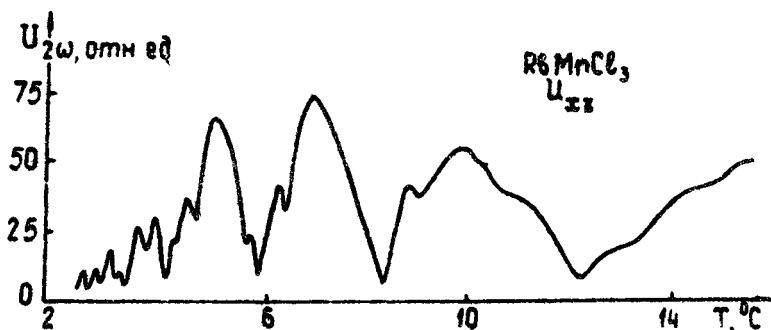
В области фазового перехода зависимость от температуры дисперсионной характеристики скорости звука может обуславливать температурные осцилляции 2-й гармоники звуковой

Таблица 2

Кристаллы	Релаксация		Флуктуация	Дефекты	Релаксация		Флуктуация	Дефекты
	$T < T_c$	$T > T_c$			$T < T_c$	$T > T_c$		
Многоосные сегнетоэлектрики $\eta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	—	—	-1/2	-3/2	—	—	-3/2	-5/2
Одноосные сегнетоэлектрики с пьезоэффектом в парафазе $\vec{h} \neq 0, \eta = \beta_1$	1 [*])	1 [*])	1/2	-1/2	3/2 [*])	1 [*])	-1/2	-3/2
Одноосные сегнетоэлектрики без пьезоэффекта в парафазе $\vec{h} = 0, \eta = \beta_N$	—	—	$0(l_n)$	-1	—	—	-1	-2
Сегнетоэластики с однокомпонентным параметром порядка $\eta = \beta_1$	1 [*])	1 [*])	1/2	-1/2	3/2 [*])	1 [*])	-1/2	-3/2
Сегнетоэластики с двухкомпонентным параметром порядка $\eta = (\beta_1, \beta_2)$	1 [*])	1 [*])	$0(l_n)$	-1	3/2 [*])	1 [*])	-1	-2

*) Критические индексы для тех модулей упругости, у которых существует линейная связь с параметром порядка.

волны. На рис. 3 показано изменение 2-й гармоники поперечной волны в парафазе в сегнетоэластике $RbMnCl_3$. Обращение в нуль сигнала гармоники соответствует условию $l = \Delta n$, где $n = 1, 2, \dots$, l — длина кристалла, а $\Delta = \pi / |k(2\omega) - 2k(\omega)|$ — период пространственных биений 2-й гармоники из-за дисперсии скорости звука. В $RbMnCl_3$ биения наблюдаются благодаря большой величине времени релаксации параметра порядка $\tau = (L/L_0)(T - T_0)^{-1}$ и малой скорости звука.



Р и с. 3. Осцилляции с температурой 2-й гармоники ($\omega/2\pi = 20$ МГц) в двухкомпонентном сегнетоэластике $RbMnCl_3$ для поперечной волны, деформация которой линейно связана с компонентой параметра порядка η_1 [51]

7. Акустоэлектрические взаимодействия в пьезоэлектриках

Одновременное воздействие деформаций и электрического поля на пьезоэлектрик приводит из-за нелинейности к возникновению электроупругих напряжений. По этой же причине взаимодействие двух упругих волн должно приводить к возбуждению в кристалле электрической индукции. Для низкосимметричных кристаллов расчет акустоэлектрического взаимодействия несколько громоздок. Мы ограничимся лишь качественной стороной этого эффекта. Если на кристалл дей-

ствует переменное электрическое поле и справедливо квази-статическое приближение, т.е. $E' = E_0 \cos \Omega t$ и одновременно распространяется упругая волна со смещениями $u' = u_0 \cos(\omega t - kx)$, то во втором приближении имеется вынуждающая сила

$$N \sim \tilde{\epsilon} E' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{\epsilon} E_0 u_0 k^2 \cos \Omega t \cos(\omega t - kx) = \tilde{\epsilon} E_0 u_0 k^2 2^{-1} \times \\ \times \left\{ \cos[(\omega - \Omega)t - kx] + \cos[(\omega + \Omega)t - kx] \right\} = \tilde{\epsilon} E_0 u_0 k^2 \times \\ \times 2^{-1} \varphi(x, t).$$

Решение волнового уравнения второго приближения также будет содержать член в фигурных скобках. При частотах $\Omega \ll \omega$ это выражение соответствует обычной амплитудной модуляции упругой волны во времени. Эффект модуляции достаточно очевиден, он может быть использован для определения коэффициентов нелинейного пьезоэффекта. Существенно больший интерес представляют случаи квазисинхронного электроупругого взаимодействия, на возможность которых было указано в работах [52-54].

1. Действительно, например, при $\Omega = 2\omega$

$$\varphi(x, t) = \cos(\omega t + kx) + \cos(3\omega t - kx).$$

Первый член здесь определяет обратную волну, которая является собственной в том смысле, что удовлетворяет дисперсионному соотношению; второй — несобственную волну, она не удовлетворяет дисперсионному уравнению и существует лишь в том случае, когда есть внешние воздействия. Такое обращение звуковой волны (или, как иногда говорят, обращение знака времени) можно наблюдать, послав упругий импульс в пьезоэлектрик и с некоторой задержкой подав на кристалл импульс электрического напряжения удвоенной частоты. Из-за малости нелинейного пьезоэффекта в пока что исследованных кристаллах потери на "обращение" достаточно велики. Как правило, обращение наблюдается на поверхностных волнах, где из-за концентрации звуковой энергии вблизи поверхности удается получить значительные амплитуды звука. Операция "обращения знака времени" может быть использована в ряде радиотехнических устройств для обработки радиосигналов. Из интересных физических приложений этого эффек-

та можно указать, например, на принципиальную возможность выделения из общего декремента затухания звука в кристалле части, обусловленной рассеянием. Если импульс звука после рассеяния обращается, то после "сбора" со всех направлений на рассеивателях в обратном направлении движется импульс, амплитуда которого изменилась только из-за диссипативных процессов в среде \mathbb{K} на границах рассеивателей. Это, во всяком случае принципиально, дает возможность разделить диссипативную и недиссипативную части затухания.

Для модулированных упругих волн и электрической накачки обратная волна дает сигнал корреляции. При облучении достаточно короткими импульсами "обращение волны" может использоваться для локального исследования нелинейного пьезоэффекта, однако здесь возникают технические проблемы значительного повышения чувствительности приема слабых обращенных волн.

2. Следует сказать, что с помощью одних лишь упругих волн невозможно создать в среде периодическую в пространстве и не меняющуюся во времени структуру. При нелинейном взаимодействии упругой волны с переменным электрическим полем в случае $\omega = 0$

$$\psi(x, t) = \cos kx + \cos(\omega t - kx)$$

Ни одна из этих двух волн не удовлетворяет дисперсионному соотношению для упругой волны, т.е. не является собственной, и поэтому существует лишь тогда, когда есть внешние возмущения. Наибольший интерес представляет случай, когда благодаря каким-либо свойствам среды удастся фиксировать эту структуру даже после того, как внешние воздействия выключены. Это может быть какой-либо относительно медленный релаксационный процесс или, в случае пьезополюс-проводника, группировка носителей заряда пьезополем с последующим захватом носителей ловушками. Создание таких медленно релаксирующих структур позволяет осуществить акустическую память. Если в кристалле создана периодическая решетка, в которой периодически изменяются упругие свойства, то последующая подача на кристалл акустического импульса с частотой заполнения ω (или более высоких частот Ω , где $\Omega = n\omega$, где n — целое число) приведет к брэгговскому

отражению от решетки в обратном направлении. Таким образом, можно "считывать" акустически ту информацию, которая была записана. Поскольку есть электроупругая связь, информация может "считываться" электрическим способом: подача на кристалл импульса электрического напряжения частоты ω приводит к генерации акустических импульсов на той же частоте. При Ω , близком к ω , в среде возбуждается медленно бегущая решетка упругих возмущений.

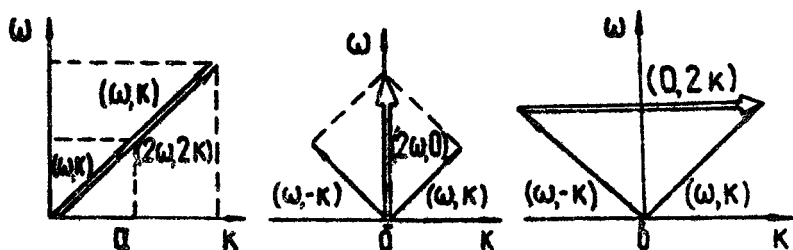
3. Обратимость линейного и нелинейного пьезоэффектов, которые определяют отмеченные выше электроупругие взаимодействия, допускает и обратные взаимодействия. Обратимость здесь следует понимать в том смысле, что из трех участвующих во взаимодействии возмущений можно в качестве первичных выбирать любую пару^{*}). Эффектом, обратным рассмотренному в разд. 1 (обращению волны), будет, очевидно, возбуждение электрического поля удвоенной частоты 2ω при взаимодействии двух встречных упругих волн одинаковых частот ω , которое возможно в кристалле из-за нелинейного пьезоэффекта. В случае модулированных сигналов этот эффект позволяет получить на электрической стороне свертку исходных сигналов; легко видеть, что при равных фазовых скоростях взаимодействующих упругих волн свертка получается со сжатием во времени в два раза.

В общем случае, в зависимости от различия фазовых скоростей взаимодействующих волн, свертка происходит с изменением масштаба времени, зависящего от скоростей.

С учетом возможности существования в кристаллах различных типов волн (квазипродольных, квазипоперечных, поверхностных, волн Лэмба, волн Гуляева-Блостейна и др.) картина попутных и встречных взаимодействий модулированных волн становится значительно сложнее и многообразнее. При этом для коллинеарных взаимодействий удобно пользоваться векторными диаграммами на дисперсионных кривых

*) Отметим здесь, что электроупругие взаимодействия, могут трактоваться и в терминах, используемых для описания параметрического усиления и параметрической генерации. При параметрической генерации в распадом процессе, естественно, участвует одно первичное возмущение.

$\omega = \omega(k)$ для различных типов волн (рис. 4); квази-стационарному электрическому полю, очевидно, соответствует ось ординат $k = 0$. Естественно, что векторные диаграммы позволяют определить лишь частоты и типы взаимодействующих волн; для определения эффективности такого взаимодействия необходим анализ уравнений с соответствующими граничными и начальными условиями.



Р и с. 4. Коллинеарные взаимодействия акустических волн одинаковых поляризаций: а - генерация акустической гармоники ($\omega + \omega = 2\omega, k + k = 2k$), б - вырожденная свертка ($\omega + \omega = 2\omega, k - k = 0$), в - запись акустического сигнала в устройствах памяти ($\omega - \omega = 0, k - (-k) = 2k$)

В заключение необходимо отметить, что многообразие типов волн в кристаллах и зачастую разнообразие сочетаний их физических свойств открывают широкие возможности для использования нелинейных электроупругих взаимодействий в области обработки и управления радиосигналами, преобразования оптических сигналов в электрические, в акустической голографии и других областях обработки информации.

Относительно малая эффективность нелинейного преобразования, вызванная небольшой величиной нелинейного пьезоэффекта в исследованных до настоящего времени кристаллах, может быть в определенной мере преодолена, например, использованием слоистых структур со слоями, в которых велики электрические нелинейности.

Л и т е р а т у р а

1. McMahon D.H. - J.Acoust.Soc.Am., 1968, 44, p.1007.
2. Mathur S.S., Gupta P.N. - Acustica, 1970, 23, p.160.
3. Ljajmov V.E. - J.Acoust.Soc.Amer., 1972, 52, N1, p.199.
4. Зарембо Л.К., Красильников В.А. - УФН., 1970, 102, №4, с.549.
5. Антоненко А.М. - Канд. дис. [Рукопись]. Ростов, Гос. ун-т, 1980.
6. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М., Наука, 1965.
7. Ермилин К.К., Лямов В.Е., Прахоров В.М. - Акуст. журн., 1979, 25, №2, с.161.
8. Brugger K. - J.Appl.Phys., 1965, 36, N3, p.759, p.768.
9. Коробов А.И., Лямов В.Е. - ФТТ, 1975, 17, №5, с.1448.
10. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., Мир, 1972.
11. Юшин Н.К., Леманов В.В. - ФТТ, 1972, 14, №8, с.2373.
12. Зарембо Л.К., Сердобольская О.Ю., Чернобай Н.П. - Акуст. журн., 1972, 18, №3, с.397.
13. Cohen M.G. - J.Quantum Electr., 1970, 6, N1, p.25.
14. Шакин О.В., Леманов В.В. - ФТТ, 1972, 4, с.1384.
15. Breaseale M.A., Bains J.A.Jr. - Phys.Rev., 1976, B13, N8, p.3623.
16. Гиц И.Д., Колюхов Б.А. - Акуст. журн., 1973, 19, №2, с.126.
17. Колюхов Б.А., Шалашов Г.М. - Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1976, вып.5, с.178.
18. Зарембо Л.К., Красильников В.А., Случ В.Н., Сухаревская О.Ю. - Акуст. журн., 1966, 12, №4, с.486.
19. Зарембо Л.К., Сердобольская О.Ю. - Вестник МГУ. Сер. Физ., астроф., 1970, №1, с.62.

20. Зарембо Л.К., Пиотух В.Б., Секоян С.С. - Акуст. журн., 1973, 19, №5, с.778.
21. Александров К.С., Кокорин Ю.И., Зайцева М.П., Сысо-ев А.М. - Препринт ИФ СО АН СССР. Красноярск, 1979.
22. Beige H., Schmidt G. - Exper.Tech.Phys., 1974, 22, р.393.
23. Гедройц А.А., Зарембо Л.К., Красильников В.А. - ДАН СССР, 1963, 150, с.515.
24. Зарембо Л.К., Шкловская-Корди В.В. - ФТТ, 1970, 12, с.3637.
25. Nikata A., Elbaum C. - Phys.Rev., 1966, 144 р.469.
26. Мирсаев И.Ф., Николаев В.В., Талуц Г.Г. - ФММ, 1971 31, с.1128.
27. Зарембо Л.К., Прохоров В.М. - Акуст. журн., 1975, 21, №2, с.198.
28. Ермилин К.К., Зарембо Л.К., Красильников В.А., Ме-зинцев Е.Д., Прохоров В.М., Хилков К.В. - ФММ, 1974, 38, №4, с.880.
29. Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин А.М. - Acustica, 1978, 39, р.298.
30. Holt A.C., Ford J. - J.Appl.Phys., 1967, 38, N1, р.42.
31. Wallace D.C. - Solid State Physics, 1970, 25, р.301.
32. Ермилин К.К., Красильников В.А., Лямов В.Е., Прохо-ров В.М. - ФТТ, 1973, 15, №7, с.2251.
33. Ермилин К.К., Красильников В.А., Лямов В.Е., Прохо-ров В.М. - ФТТ, 1976, 18, №10, с.3133.
34. Барышникова Л.Ф., Лямов В.Е. - Труды VIII Всесоюзн. акуст. конф. М., Акуст. ин-т, 1973, с.158.
35. Барышникова Л.Ф., Лямов В.Е., Грачев Г.С. - Труды II Всесоюзн. конф. по УЗ спектроскопии, Каунас, Политехн. ин-т., 1973, с.269.
36. Барышникова Л.Ф., Лямов В.Е. - Акуст. журн., 1978, 24, №4, с.465.
37. Барышникова Л.Ф. - Канд. дис. [Рукопись]. М., Акуст. ин-т, 1980.

38. Гарланд К. - В сб.: Физическая акустика. Под ред. У.Мэзона. М., Мир, 1974, 7, гл.2.
39. Mekks E.J., Arnold R.T. - Phys.Rev., 1970, 1, В982.
40. Сердобольская О.Ю., Сериков В.И. - ФТТ, 1975, 17, с.627.
41. Сандлер Ю.М., Сериков В.И. - ФТТ, 1977, 19, вып.4, с.1054.
42. Сандлер Ю.М. - Канд. дис. [Рукопись]. Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1979.
43. Зарембо Л.К., Красильников В.А., Сердобольская О.Ю., Сериков В.И. - ФТТ, 1974, 16, с.3578.
44. Байге Х., Шмидт Г. - Изв. АН СССР, 1975, вып.5, с.3121.
45. Александров К.С., Кокорин Ю.И., Зайцева М.П. - Материалы XI Междунар. симп. по нелинейн. акуст. М., 1975, с.92.
46. Самуленис В.И., Кунигелис В.Ф., Гиршковичус М.Н. - ЖЭТФ, 61, 1972, с.1941.
47. Леванюк А.П., Щедрина Н.В. - ФТТ, 1972, 14, с.3012.
48. Леванюк А.П., Минаева К.А., Струков Б.А. - ФТТ, 1968, 10, №8, с.2443.
49. Леванюк А.П., Осипов В.В., Сигов А.С., Собишин А.А. - ЖЭТФ, 1979, 76, №1, с.345.
50. Заграй Н.П., Зарембо Л.К., Сердобольская О.Ю. - ФТТ, 1977, 19, вып.5, с.1333.
51. Заграй Н.П., Сердобольская О.Ю. - Тезисы IX Всесоюз. совеш. по сегнетоэлектричеству. Ростов-на-Дону, 1979, гл.1, с.233.
52. Quate C.F., Thompson R.B. - Appl.Phys.Lett., 1970, 16, p.494.
53. Thompson R.B., Quate C.F. - J.Appl.Phys., 1971, 42, p.907.
54. White J.M., Winslow D.K., Shaw H.J. - Proc. IEEE, 1972, 60, N9, p.1102.

УДК 534.222.

Параметрические излучатели звука. Наугольных К.А., Островский Л.А. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 9.

Дается краткий обзор основных проблем, связанных с исследованием параметрических излучателей звука (ПИ), которые находят все более широкое применение ввиду их "бестелесности", узкой направленности и широкополосности на низких частотах. Рассматриваются различные режимы работы ПИ, включая предельные, когда существенны нелинейные искажения накачки, вопросы оптимизации параметров ПИ, влияние пузырьков газа на их работу. Приводятся данные о параметрах некоторых ПИ, используемых в настоящее время в лабораторных экспериментах и в гидроакустических системах. Табл.2, ил.4, список лит. 41 назв.

УДК 534.222.2

Исследования и разработки гидроакустических параметрических антенн и приборов.Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 31.

В статье приведены результаты экспериментальных исследований и технические характеристики параметрических гидролокаторов, прецизионных эхолотов, измерительных излучателей и приемников и др., созданных в Таганрогском радиотехническом институте.

Проводится сравнение результатов испытаний с теорией параметрических антенн, разработанной авторами. Табл. 2, ил. 10, список лит. 13 назв.

УДК 534.222

Дифракционные явления в интенсивных звуковых пучках. Сутин А. М. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с.45.

Рассмотрен поэтапный метод описания дифракционных и нелинейных явлений в звуковых пучках конечной амплитуды, который состоит в разделении областей линейной дифракции, нелинейных искажений вдоль лучевых трубок и сшивке решений, полученных в разных областях. Для выделения таких областей развиты критерии, основанные на сравнении влияния

нелинейных и дифракционных эффектов. В качестве примера применения поэтапного метода приводится описание поля при дифракции нелинейно искаженной волны на отверстии в плоском экране, дается описание дифракционных явлений в фокальной области интенсивного сходящегося пучка. Рассматривается влияние нелинейных эффектов на свойства мощных излучающих и фокусирующих систем. Табл.1, ил.9, список лит. 37 назв.

УДК 534.222.2

Нелинейная акустика взрывных волн. Ф р и д м а и В.Е.
- В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 68.

Исследуется совместное влияние диссипации, нелинейности и релаксации при распространении сферической ударной волны от взрывного источника. Обсуждаются теоретические соотношения для параметров взрывных волн и их сравнение с существующими эмпирическими соотношениями для взрывных волн в океане. Определяется область проявления нелинейных эффектов, за пределами которой расчет акустических полей можно проводить линейными методами. Ил. 16, список лит. 53 назв.

УДК 534.222

Нелинейные эффекты в акустических резонаторах.
К а н е р В. В., К а р а б у т о в А.А., Р у д е н к о О. В. - В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 98.

Исследуются собственные и вынужденные колебания нелинейных акустических резонаторов. Найдены форма стоячих собственных волн и зависимость добротности резонатора от времени для этих колебаний. Рассмотрено возбуждение основной моды акустического резонатора, распределенной внешней силой. Определен профиль колебаний при точном совпадении частоты внешней силы и собственной частоты моды. Получены резонансные кривые при наличии расстройки между этими частотами. Найдена зависимость полуширины резонансной кривой от числа Рейнольдса. Ил.6, список лит. 14 назв.

УДК 534.222

Статистические задачи нелинейной акустики.

Гурбатов С. Н., Сачев А. И. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 108.

Дан обзор методов статистического анализа случайных акустических волн конечной амплитуды. Описана эволюция шумовых интенсивных волн как до, так и после образования разрывов. Обсуждаются возможные направления дальнейшего развития статистической нелинейной акустики.

Рассматриваются возможности использования сравнительно хорошо развитой одномерной теории к неодномерным задачам статистической акустики с использованием нелинейной геометрической акустики и поэтапного учета дифракционных и нелинейных эффектов.

Приведен общий метод исследования статистических характеристик акустических шумов до образования разрывов и рассмотрены вероятностные распределения и спектры шумовых ринановых волн. Исследована статистика разрывов и их влияние на энергетические характеристики волн как на начальной стадии образования разрывов, так и на стадии развитых разрывов с учетом их взаимодействия. Обсуждено асимптотическое поведение акустических волн. Особое внимание уделено анализу вероятностных распределений и спектров интенсивных квазимонохроматических волн. Ил. 5, список лит. 106 назв.

УДК 534.222

Модели газожидкостной смеси, как нелинейной диспергирующей среды. К о б е л е в Ю. А., О с т р о в с к и й Л. А. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 143.

Рассматривается распространение звуковых волн конечной амплитуды в жидкости с пузырьками газа. Для пузырьков одного размера в длинноволновом приближении с учетом теплообмена между газом в пузырьке и жидкостью получены модельные нелинейные уравнения, описывающие распространение акустических возмущений в смеси. Для пузырьков различных размеров рассмотрены процессы генерации волн удвоенной и разностной частот. Приводится ряд экспериментальных результатов. Табл.1, ил.2, список лит.18 назв.

УДК 532.528

Нелинейные акустические явления в двухфазном пограничном слое. Н а у г о л ь н ы х К. А., Р ы б а к С. А.— В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 161.

Рассматриваются процессы генерации звука турбулентными пограничными слоями, возникающими при обтекании твердого тела потоком жидкости, движущейся с большой скоростью.

Отмечается, что наряду с квадрупольным излучением, присущим турбулентному потоку, в этом случае возникает более интенсивное дипольное излучение, обусловленное трансформацией энергии вихревого поля в звук, происходящей на жесткой границе.

Генерация звука турбулентным пограничным слоем становится еще более интенсивной, если в нем появляются пузырьки воздуха. Этот эффект рассматривается применительно к случаям слабопульсирующих и сильнопульсирующих пузырьков. Появление пузырьков изменяет также условия распространения возбуждаемого в пограничном слое звука. В связи с этим, рассмотрены некоторые аспекты задачи о распространении волн конечной амплитуды в жидкости с пузырьками газа. Список лит. 13 назв.

УДК 532.528

Акустические волны с отрицательной энергией.

Рыбак С. А. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 176.

Рассмотрены акустические волны с отрицательной энергией, возникающие в присутствии стационарных течений. Для системы, состоящей из мембраны, движущейся относительно соприкасающегося с ней жидкого полупространства, проанализированы случаи линейной неустойчивости и нелинейное взаимодействие волн. Показано, что наличие вязких потерь либо на излучение звука в жидкую среду является причиной линейной неустойчивости волн с отрицательной энергией. Условия появления волн с отрицательной энергией, инкременты неустойчивости, условия возникновения резонансных триплетов определяются путем анализа линейного дисперсионного уравнения. Ил. 2, список лит. 10 назв.

УДК 534. 222

Нелинейная акустика кристаллов и некоторые ее применения. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Сердобольская О. Ю. — В кн.: Нелинейная акустика. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 189.

Изложены основные результаты теоретических и экспериментальных работ по нелинейной акустике твердых тел, в основном, пьезодиэлектриков. Описываются экспериментальные методы нелинейной акустики кристаллов, и обсуждаются вопросы влияния реальной структуры на нелинейные свойства. Рассмотрены нелинейные поляризационные явления, нелинейные свойства кристаллов в области структурных фазовых переходов, акустоэлектрические взаимодействия в пьезодиэлектриках. Отмечены возможности использования нелинейных эффектов для различных приложений. Табл. 2, ил. 4, список лит. 54 назв.