В. А. Калягин
Ю. А. Степанянц

МЕТОД ЛЯПУНОВА–АРНОЛЬДА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Нижний Новгород
1995

Издано по решению Редакционно-издательского совета
Института прикладной физики РАН

УДК 551.465; 551.513; 532.51; 533.951

Калягин В. А., Степанянц Ю. А. Метод Ляпунова — Арнольда в гидродинамической теории устойчивости / ИПФ РАН. Н. Новгород, 1995. 68 с.

Представлен обзор результатов, полученных в нелинейной теории гидродинамической устойчивости после основополагающих работ В. И. Арнольда (1965). В существующем виде метод Арнольда, восходящий к идеям А. М. Ляпунова, применим к невязким потокам жидкости и плазмы, для которых удается получить набор интегральных инвариантов, выражающих законы сохранения энергии, энстрофии, спиральности и других физических величин. Эти интегральные инварианты необходимы для построения функции Ляпунова, с помощью которой можно в дальнейшем судить об устойчивости того или иного течения. Описаны приложения метода Ляпунова — Арнольда ко многим задачам гидродинамики однородной и стратифицированной жидкости на плоскости и в пространстве, при учете вращения и т. д. Указано на тонкие различия между истинной нелинейной устойчивостью, а также формальной и условной устойчивостью. Отмечается, что в ряде работ из-за неаккуратного обращения с функцией Ляпунова в бесконечномерном функциональном пространстве сделаны необоснованные (а в некоторых случаях и просто неверные) выводы об устойчивости течений.

Книга предназначена для специалистов в области гидродинамической теории устойчивости, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Рецензенты

кандидат физико-математических наук В. А. ГОРДИН,
кандидат физико-математических наук А. Д. ЮНАКОВСКИЙ

Ответственный редактор

Ю. А. СТЕПАНЯНЦ

ISBN 5-201-09289-6

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ГИДРОДИНАМИКЕ

Исследование нелинейных задач теории гидродинамической устойчивости идеальной жидкости основано на использовании фундаментальных работ В. И. Арнольда [1–3], которые тесно связаны со вторым методом Ляпунова, обычно применяемым для анализа устойчивости решения конечномерных динамических систем. Для дальнейшего изложения приведем вкратце основные сведения из теории устойчивости Ляпунова.

Пусть динамическая система описывается следующим эволюционным уравнением:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(\mathbf{u}). \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathbf{u}_e$ стационарное решение уравнения (1.1), при этом $F(\mathbf{u}_e) = 0$. Здесь $\mathbf{u}$ предполагается элементом некоторого метрического пространства, в котором имеет смысл операция дифференцирования, $F(\mathbf{u})$ – непрерывный, вообще говоря, нелинейный, функционал в этом пространстве. В соответствии с методом Ляпунова вопрос об устойчивости стационарного решения $\mathbf{u}_e$ при малых возмущениях начального условия $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}(0)$ сводится к построению функции $V(\mathbf{u})$ (функции Ляпунова), обладающей следующими свойствами:

1) $V(\mathbf{u})$ имеет строгий минимум (максимум) в точке $\mathbf{u}_e$,

2) производная функции V вдоль траектории решения $\mathbf{u}(t)$ неположительна (неотрицательна):

$$\frac{d\,V(\mathbf{u}(t))}{dt} \le 0\ (\ge 0).$$

В конечномерном случае, когда указанная функция существует, стационарное решение $\mathbf{u}_e$ оказывается устойчивым в смысле Ляпунова:

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что из неравенства* $\| \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_e \| < \delta$ *в начальный момент времени* $t = 0$ *следует неравенство* $\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_e \| < \varepsilon$ *в любой момент времени* t *для функции* $\mathbf{u}(t)$ *— решения уравнения* (1.1).

В общем случае построение функции Ляпунова является довольно трудной задачей, однако для систем вида (1.1) в качестве функции Ляпунова часто можно использовать известные интегралы движения, т. е. такие функционалы H, которые сохраняются вдоль траекторий движения: $H(\mathbf{u}(t)) = \text{const}$, если $\mathbf{u}(t)$ — решение (1.1). В этом случае $dH(\mathbf{u}(t)) / dt = 0$, условие 2 выполнено и остается подобрать функционал H так, чтобы он имел строгий минимум или максимум в точке стационарного решения $\mathbf{u}_e$. Обычно в качестве H выбирают линейную комбинацию простейших интегралов движения (так называемый метод связки интегралов Четаева — см. Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев [1]).

В конечномерном случае при условиях гладкости наличие строгого экстремума функционала H в точке u_e эквивалентно условиям:

$$\delta H(\mathbf{u}_e) = 0,$$

$$\delta^2 H(u_e) > 0 \quad (< 0). \tag{1.2}$$

Согласно теореме Ляпунова, эти условия обеспечивают устойчивость стационарного решения u_e.

Для бесконечномерных динамических систем ситуация значительно сложнее. Во-первых, условие минимума функционала более не эквивалентно условиям (1.2). J. M. Ball и J. E. Marsden [1] построили пример реальной системы в теории пластичности, в котором для функционала энергии H выполнены оба условия (1.2) для некоторого стационарного состояния $\mathbf{u}_e$, но при этом H не имеет минимума на этом состоянии. Во-вторых, в бесконечномерном случае наличие минимума функционала H или условий (1.2), вообще говоря, не гарантирует устойчивости стационарного решения (во всяком случае, подобного рода теорем до сих пор не известно).

Можно, однако, доказать (D. D. Holm et al. [2]), что в случае, когда в качестве функционала H используется связка интегралов движения, вторая вариация $\delta^2 H$ является в свою очередь интегралом движения линеаризованной системы. Тогда при условии ее знакоопределенности $\delta^2 H$ можно рассматривать в качестве квадрата нормы, в которой решение линеаризованной системы, очевидно, устойчиво. Это может быть весьма полезно в тех случаях, когда спектр линеаризованной системы имеет точки на мнимой оси (для возмущений вида $e^{i\omega t}$).

В задачах гидродинамики уравнения движения обычно можно привести к виду (1.1) (В. И. Арнольд [6]), где $\mathbf{u}$ есть элемент некоторого бесконечномерного функционального пространства. Течение жидкости, тем самым, есть в некотором смысле динамическая система, и для исследования устойчивости стационарных потоков может быть использован второй метод Ляпунова.

Первые результаты по применению второго метода Ляпунова к исследованию устойчивости стационарных течений для плоских потоков идеальной жидкости были получены в работах В. И. Арнольда [1], [3]. В исходной работе [1] формулировки теорем содержали знакоопределенность второй вариации $\delta^2 H$ в качестве достаточного условия устойчивости, однако в доказательстве основной теоремы (В. И. Арнольд [3]) использовался совсем другой метод, основанный на некоторых оценках выпуклости для функционала H. Этот метод получил в дальнейшем название метода Арнольда в нелинейной теории устойчивости (H. D. Abarbanel et al. [1]). В настоящее время получили развитие два направления в задачах по нелинейной устойчивости стационарных течений жидкости:

1) исследование устойчивости по Ляпунову на основе метода Арнольда с использованием некоторых оценок выпуклости для функционалов H;

2) исследование знакоопределенности второй вариации $\delta^2 H$ подходящего интеграла движения при условии, что $\delta H(\mathbf{u}_e) = 0$. Если форма $\delta^2 H$ оказывается знакоопределенной, то говорят, что имеет место **формальная устойчивость** (H. D. Abarbanel et al. [1]) соответствующего стационарного течения. Это несколько сильнее, чем спектральная устойчивость, но не означает, что данное течение устойчиво по Ляпунову в некоторой норме. С формальной устойчивостью связан так называемый вариационный принцип в гидродинамике, который используется для доказательства устойчивости изолированного стационарного решения системы, полученной из (1.1) линеаризацией на решении $\mathbf{u}_e$ (В. И. Арнольд [2]; В. А. Владимиров [1]; Л. А. Дикий [3]; В. И. Седенко, В. И. Юдович [1] и др.). В случае, когда в спектре линейной системы имеются точки на действительной

оси (что соответствует условию $c_l = 0$ для одной из мод возмущения), спектральный метод не позволяет сделать вывод об устойчивости или неустойчивости решения $\mathbf{u}_e$. В этом случае определенность формы $\delta^2 H$ (интеграл линеаризованной системы) позволяет утверждать, что решение $\mathbf{u}_e$ устойчиво по Ляпунову в линейном приближении в норме $\delta^2 H$. Для нелинейной системы (1.1) говорят в этом случае, что решение $\mathbf{u}_e$ устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям. В значительной части работ по "нелинейной теории устойчивости" исследуется именно знакоопределенность формы $\delta^2 H$, и тем самым доказана лишь *формальная устойчивость* соответствующих стационарных течений. Для получения условий истинной нелинейной устойчивости требуется, как правило, дополнительный анализ (см. об этом ниже).

В соответствии с определением, устойчивость по Ляпунову зависит от выбора нормы, в которой оценивается возмущение $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$. С физической точки зрения эта ситуация выглядит несколько парадоксально, так как имеются примеры (В. И. Юдович [1]; B. E. Farell [1]; J. P. Boyd [1]; T. G. Shepherd [1]), в которых для устойчивого (в некоторой норме) течения малые возмущения реальных физических величин, например энергии или завихренности, в начальный момент времени приводят к их неограниченному возрастанию впоследствии. С математической точки зрения этот факт объясняется тем, что в бесконечномерном пространстве (в отличие от конечномерного) различные нормы неэквивалентны между собой. Поясним, что разные нормы определяют и разные пространства функций, т. е. разные классы возмущений. Поэтому может оказаться, что исследуемое течение устойчиво относительно определенного класса возмущений, тогда как относительно других классов устойчивости нет. Эта ситуация довольно типична (см., например, С. Е. Фильченков, Г. М. Фрайман, А. Д. Юнаковский [1]).

Аналогом теоремы Ляпунова в бесконечномерном случае может служить следующее почти очевидное утверждение, доказательство которого в точности повторяет классическое для конечномерных динамических систем:

Теорема (устойчивость по Ляпунову в бесконечномерном случае). *Пусть для некоторой нормы $\|*\|$ и сохраняющегося функционала H выполнены условия*

$$c_1 \|\delta\mathbf{u}\|^2 \le |H(\mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}) - H(\mathbf{u}_e)| \le c_2 \|\delta\mathbf{u}\|^2.$$

Тогда стационарное решение $\mathbf{u}_e$ *системы* (1.1) *устойчиво по Ляпунову в этой норме* $\| * \|$.

Отметим, что из второго неравенства следует непрерывность функционала H в выбранной норме. Кроме того, в конечномерном пространстве первое неравенство вместе с условием $\delta H(\mathbf{u}_e) = 0$ эквивалентно знакоопределенности второй вариации $\delta^2 H(\mathbf{u}_e)$, что в свою очередь влечет за собой наличие строгого экстремума функционала H на решении $\mathbf{u}_e$.

Более общим условием нелинейной устойчивости является топологическое совпадение баз окрестностей "точки" $\mathbf{u}_e$, задаваемых выбранной нормой $\| * \|$ и функционалом H. Вопросы устойчивости стационарных решений динамических систем в бесконечномерном случае более подробно обсуждаются в книге В. П. Дымникова и А. Н. Филатова [1] (см. также В. И. Зубов [1]).

Для устойчивых в некоторой норме решений могут неограниченно изменяться и определенные локальные характеристики течения. Отметим попутно, что для широкого класса задач в гидродинамике не доказаны теоремы существования и единственности решения и, следовательно, все утверждения об устойчивости являются априорными, т. е. доказанными в предположении, что возмущенные решения существуют и единственным образом определяются по начальным условиям.

Далее опишем более подробно оба указанных направления в гидродинамической теории устойчивости. Изложение части этих исследований можно найти также в обзорах: D. D. Holm et al. [2], H. D. Abarbanel et al. [1]. Отметим, что в дальнейшем изложении для оценки устойчивости решений используется понятие нормы в функциональном пространстве. Однако, по существу, часто используются некоторые выпуклые функционалы, которые иногда называют полунормами. Мы не будем делать различия между этими понятиями (нормы и полунормы), которые в нашем случае не существенны.

Глава 2

МЕТОД АРНОЛЬДА

Рассмотрим плоские течения несжимаемой невязкой жидкости в некотором кольце D. Пусть $\psi(x, y)$ — функция тока, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — скорость частиц жидкости, так что

$$u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Как обычно, введем завихренность (точнее, ее z-компоненту) $\omega = (\operatorname{rot}\mathbf{u})_z = -\nabla^2\psi$; границу области будем полагать твердой, т. е. нормальную составляющую скорости жидкости на границе будем полагать равной нулю. Компоненты границы обозначим через Γ_1 и Γ_2.

С учетом сказанного уравнения гидродинамики могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -[\nabla\omega, \nabla\psi], \tag{2.2}$$

где $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = f_1 g_2 - f_2 g_1$. В пространстве функций $\psi(x, y)$ это уравнение определяет динамическую систему. Условие (2.2) означает, что завихренность ω сохраняется вдоль траекторий движения и, следовательно, первым интегралом системы будет любой функционал вида

$$C = \iint\limits_D \Phi(\omega)\, dx\, dy, \tag{2.3}$$

где $\Phi(\omega)$ — произвольная дифференцируемая функция. Другим интегралом системы является, очевидно, интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}\iint (\nabla\psi)^2 dx\, dy. \tag{2.4}$$

Стационарные течения выделяются условием $[\nabla\omega, \nabla\psi] = 0$, которое эквивалентно наличию функциональной зависимости между функцией тока $\psi(x, y)$ и завихренностью $\omega(x, y)$:

$$\psi = \Psi(\omega), \tag{2.5}$$

если только $\nabla\omega \not\equiv 0$. Дальнейшие рассуждения зависят от свойств функции Ψ, которая задает стационарное течение ψ_e. Фиксируем стационарное течение (функцию Ψ) и рассмотрим его возмущения из такого класса, в котором

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial\psi}{\partial n} ds = \text{const} = C_1, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial\psi}{\partial n} ds = \text{const} = C_2, \tag{2.6}$$

т. е. возмущенные течения имеют фиксированные значения циркуляции скорости на каждой компоненте границы. Функцию Ляпунова будем искать в виде $H = E + C$. Подберем функционал C так, чтобы выполнялось условие $\delta H(\psi_e) = 0$ на выбранном стационарном течении ψ_e. Используя формулу Грина и граничные условия (2.6), получаем соотношение, связывающее функции Φ и Ψ:

$$\Phi(\omega) = \int^{\omega} \Psi(\omega')\, d\omega'.$$

Вычисление второй вариации дает

$$2\delta^2 H = \iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + \frac{\nabla\psi_e}{\nabla\omega_e}(\delta\omega)^2\right] dx\, dy, \tag{2.7}$$

где $\delta\psi = \psi - \psi_e$ есть возмущение функции тока, а $\delta\omega = \omega - \omega_e$ — возмущение завихренности. Отметим, что в силу функциональной зависимости между ψ_e и ω_e векторы $\nabla\psi_e$ и $\nabla\omega_e$ пропорциональны друг другу и их отношение есть скалярная функция в области D. Из приведенных выше рассуждений сразу следует

1-я теорема Арнольда. *Стационарное течение ψ_e, определяемое соотношением* (2.5), *является **формально устойчивым** по отношению к возмущениям $\delta\psi$ с граничными условиями вида* (2.6), *если квадратичная форма* (2.7) *является положительно или отрицательно определенной.*

Однако, как было отмечено выше, формальная устойчивость не означает устойчивости течения в смысле Ляпунова по отношению к некоторой норме. Основная идея В. И. Арнольда в доказательстве устойчивости по Ляпунову опирается на следующее утверждение:

Лемма Арнольда. *Пусть* $\psi(x, y, t) = \psi_e(x, y) + \delta\psi(x, y, t)$. *Тогда функционал*

$$A(\delta\psi) = \iint \left[\frac{(\nabla\delta\psi)^2}{2} + \Phi(\omega_e + \delta\omega) - \Phi(\omega_e) - \Phi'(\omega_e)\,\delta\omega\right] dx\,dy$$

является интегралом движения системы (1.2) (доказательство будет дано ниже).

2-я теорема Арнольда (об устойчивости по Ляпунову). *Пусть для функции* $\Psi(\omega)$ *при малых* ω *выполняется неравенство*

$$0 < c \le \Psi'(\omega) \le C < \infty.$$

Тогда стационарное течение ψ_e *(соответствующее выбору функции* Ψ*) является устойчивым по Ляпунову в норме*

$$\|\delta\psi\| = \left\{\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + c(\delta\omega)^2\right] dx\,dy\right\}^{1/2}.$$

Этот случай соответствует положительно определенной квадратичной форме (2.7). Для доказательства теоремы 2 заметим, что при указанном условии для функции Ψ имеет место неравенство

$$c\frac{h^2}{2} \le \Phi(\omega + h) - \Phi(\omega) - \Phi'(\omega)\,h \le C\frac{h^2}{2},$$

из которого непосредственно вытекает оценка

$$\iint \left[(\nabla\delta\psi)^2 + c(\delta\omega)^2\right] dx\,dy \le 2A \le$$

$$\le \iint \left[(\nabla\delta\psi(0))^2 + C(\delta\omega(0))^2\right] dx\,dy.$$

Здесь $\delta\psi = \psi(x, y, t) - \psi_e(x, y)$ есть возмущение в момент времени t, а $\delta\psi(0) = \psi(x, y, 0) - \psi_e(x, y)$ обозначает возмущение в начальный момент времени. Из приведенной оценки, очевидно, следует неравенство $\|\delta\psi(t)\|_+^2 \le \frac{C}{c}\|\delta\psi(0)\|^2$, которое и означает устойчивость течения ψ_e в указанной норме.

Формальная устойчивость имеет место и при отрицательно определенной форме (2.7). Устойчивость по Ляпунову в этом случае существенно зависит от граничных условий на возмущения (2.6) и геометрии области D. Точнее говоря, имеет место

3-я теорема Арнольда (об устойчивости по Ляпунову). *Пусть функция* $\Psi(\omega)$ *при малых значениях* ω *удовлетворяет неравенству*

$$0 < c \le -\Psi'(\omega) \le C < \infty.$$

Если при этом квадратичная форма

$$\iint [\,c\,(\delta\,\omega)^2 - (\nabla\,\delta\,\psi)^2\,]\,dx\,dy \tag{2.8}$$

является положительно определенной, то стационарное течение ψ_e*, соответствующее функции* Ψ (см. (2.5)), *является устойчивым по Ляпунову относительно нормы* (2.8).

Для доказательства этого утверждения используется неравенство

$$\iint [\,c\,(\delta\,\omega)^2 - (\nabla\,\delta\,\psi)^2\,]\,dx\,dy \le -2A \le$$

$$\le \iint [\,C\,(\delta\,\omega\,(0))^2 - (\nabla\,\delta\,\psi\,(0))^2\,]\,dx\,dy,$$

которое следует, как и ранее, из оценки производной функции Ψ и леммы Арнольда. Выражение (2.8) может служить для определения нормы, в которой оценивается величина возмущения, если оно представляет собой положительно определенную квадратичную форму. В качестве нормы, в которой течение устойчиво, можно также взять **энстрофию** потока $\|\delta\,\psi\|_{L} = [\,\iint (\delta\,\psi)^2\,dx\,dy\,]^{1/2}$. Доказательство устойчивости в этой норме связано с исследованием геометрии области D. Чтобы пояснить это, положим

$$k_m^2\,(\delta\,\psi) = \frac{\iint (\delta\,\omega)^2\,dx\,dy}{\iint (\nabla\,\delta\,\psi)^2\,dx\,dy}.$$

Величина $1/k_m$ определяет характерный масштаб возмущения. Если возмущение $\delta\,\psi$ удовлетворяет краевым условиям (1.6) на границе (где $C_1 = C_2 = 0$ для возмущения), то, как известно, имеет место неравенство Пуанкаре $k_m \ge k_0$, в котором k_0 есть наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

с однородными граничными условиями (2.6), где $C_1 = C_2 = 0$. Тогда, очевидно,

$$\iint (\delta\,\omega)^2\, dx\, dy \geq k_0^2 \iint (\delta\,\omega)^2\, dx\, dy,$$

и форма (2.8) будет положительно определенной, если выполняется условие $c\, k_0^2 > 1$. В этом случае, как легко проверить, имеет место неравенство $\| \delta\, \psi \|_L \leq \dfrac{C\, k_0}{c\, k_0^2 - 1} \| \delta\, \psi\, (0) \|_L$, которое и означает устойчивость стационарного течения ψ_e в норме энстрофии.

Применение теорем 2 и 3 позволило доказать устойчивость некоторых плоскопараллельных течений, профиль скорости которых имеет точку перегиба, что является обобщением известной теоремы Рэлея (В. И. Арнольд [1]).

Сделаем теперь несколько комментариев к изложенному методу Арнольда.

Как легко проверить, функционал A в лемме Арнольда может быть представлен выражением

$$A\,(\delta\, \mathbf{u}) = H\,(\mathbf{u}_e + \delta\, \mathbf{u}) - H\,(\mathbf{u}_e) - dH\,(\mathbf{u}_e), \tag{2.9}$$

которое оценивает величину разности значений функционала H на возмущенном течении $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \delta\, \mathbf{u}$ и на стационарном течении $\mathbf{u}_e$ (здесь $\delta\, \mathbf{u}$ означает возмущение потока, а $dH\,(\mathbf{u}_e)$ есть полный дифференциал — главная, линейная часть приращения H в "точке" $\mathbf{u}_e$). Из выражения (2.9) сразу же следует утверждение леммы Арнольда. Поток будет устойчивым в норме, для которой $dH\,(\mathbf{u}_e) = 0$, справедлива оценка $A\,(v) \geq c_1 \| v \|$, а функционал H в этой норме непрерывен. Действительно, при выполнении первого из этих условий получим

$$\| \mathbf{u}\,(t) - \mathbf{u}_e \| \leq \frac{1}{c_1} A\,(\mathbf{u} - \mathbf{u}_e) = \frac{1}{c_1} A\,(\mathbf{u}\,(0) - \mathbf{u}_e) =$$

$$= \frac{1}{c_1} [\, H\,(\mathbf{u}\,(0)) - H\,(\mathbf{u}_e)\,]$$

(ср. с основной теоремой из введения). Если учесть теперь, что функционал H непрерывен в указанной норме, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что при всех начальных возмущениях $\mathbf{u}(0)$, таких, что $\|\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_e\| < \delta$, будет выполняться $|H(\mathbf{u}(0)) - H(\mathbf{u}_e)| < c_1 \varepsilon$. Но тогда, очевидно, при тех же начальных возмущениях $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_e\| < \varepsilon$, что и означает устойчивость по Ляпунову в выбранной норме.

Именно по такой схеме проведены доказательства теорем Арнольда, и она допускает обобщения для многих гидродинамических задач. Для успешного применения данной схемы необходимо иметь для начала достаточно большой набор сохраняющихся функционалов C. Часть из них может быть получена из соображений симметрии задачи (в соответствии с теоремой Э. Нетер), другие можно определить с помощью методов гамильтоновой динамики. Так, например, в работе В. И. Арнольда [4] было показано, что уравнения Эйлера могут быть записаны с помощью подходящей скобки Пуассона в гамильтоновой форме. Тем самым для исследования уравнений движения жидкости появляется возможность использования методов гамильтоновой механики (Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов [1]; P. J. Olver [1], [2]). Как известно, в гамильтоновой системе функционал P является первым интегралом тогда и только тогда, когда выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} = 0$, где H — гамильтониан системы, $\{\ ,\ \}$ означает скобку Пуассона (см. P. J. Olver [2]). Если система автономна и функционал P не зависит от t, то данное условие эквивалентно такому $\{P, H\} = 0$. И наоборот, из этого условия вытекает независимость P от t. В гамильтоновой механике часто используют так называемые **отмеченные функционалы** или **функционалы Казимира** C, обычно называемые просто **казимирами** (термин, предложенный в работе A. Weinstein [1]), которые характеризуются условием $\{C, F\} = 0$ при любом заданном функционале F. В частности, для любого казимира C имеем $\{C, H\} = 0$, и, следовательно, любой такой функционал является первым интегралом системы. Во многих гидродинамических задачах довольно легко определяется набор казимиров, который оказывается достаточно богатым для исследования устойчивости различных стационарных течений.

Один из методов получения интегралов движения в гидродинамических задачах предложен также В. А Гординым в его монографии [2].

Вторая проблема исследования нелинейной устойчивости связана с изучением функционала $H_c = H + C$. Для выполнения условий основной теоремы из введения достаточно подобрать такую норму $\|\cdot\|$, чтобы выполнялись неравенства

$$c_1\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_e\|\leq A(\mathbf{u}-\mathbf{u}_e)=|H_c(\mathbf{u})-H_c(\mathbf{u}_e)|\leq c_2\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_e\|.$$

Все дальнейшие результаты по нелинейной устойчивости используют описанный выше подход. Главное внимание при изложении будем обращать на построение функционала H_c и выбор нормы устойчивости $\|\cdot\|$, т. е. физических классов возмущений, а также на различие между результатами по нелинейной и формальной устойчивости.

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

3.1. Двумерные течения

Пусть область D имеет связанность m, ее внешняя граница Γ_0 и внутренние контуры границы Γ_i, $i = 1, 2, ..., m$, будем считать гладкими связными кривыми. Граница предполагается твердой, т. е. скорости частиц жидкости на границе могут быть направлены лишь по касательной к границе. Движения жидкости описываются обычными уравнениями гидродинамики несжимаемой жидкости (Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе [1]):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

с начальными условиями $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x)$. Сохраняющимися функционалами в этом случае являются

– энергия $H(\mathbf{u}) = \int |\mathbf{u}|^2\, dx$;

– циркуляции скорости на границах $Q_i(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Gamma_i} (\mathbf{u}, d\,\mathbf{l})$, $i = 0, 1, 2, ..., m$;

– набор казимиров вида $C(\mathbf{u}) = \int \Phi(\omega)\, dx$, где Φ – произвольная дифференцируемая функция; ω – скалярная функция – проекция завихренности на направление, перпендикулярное плоскости течения: $\omega = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_z$ ("скалярная завихренность"). Для стационарного потока из основных уравнений получаем

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla\, \omega_e) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{u}_e \cdot \nabla\, (p_e + \mathbf{u}_e^2/2)) = 0.$$

Отсюда следует **закон Бернулли** для установившихся течений: вдоль линии тока сохраняется величина $B(\omega_e) = \mathbf{u}_e^2/2 + p_e$, называемая **функцией Бернулли**. Вычисление первой вариации функционала H_c дает

$$\delta H_c(\mathbf{u}_e) = \int (\mathbf{u}_e + \operatorname{rot}[\Phi'(\omega_e) z])\, \delta \mathbf{u}\, dx\, dy +$$

$$+ \sum [a_i + \Phi'(\omega|_{\Gamma_i})] \cdot \int_{\Gamma_i} (\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{l}).$$

Положим $H_c = H + C + \sum a_i \Gamma_i$. Тогда, очевидно, стационарное течение $\mathbf{u}_e$ будет критической точкой функционала H_c, если выполняются два условия:

$$\mathbf{u}_e + \operatorname{rot}(\Phi'(\omega_e) z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_e \Phi''(\omega_e) = B'(\omega_e);$$

$$a_i = -\Phi'(\omega_e|_{\Gamma_i}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{3.1}$$

Условия (3.1) позволяют определить для заданного стационарного потока $B(\lambda)$ функционал H_c с необходимым условием экстремума в точке $\mathbf{u}_e$:

$$\Phi(\lambda) = \lambda \left(\int^{\lambda} \frac{B(t)}{t^2}\, dt + \text{const}\right).$$

Для доказательства устойчивости потока $B(\lambda)$ вычисляем функционал

$$A(\delta \mathbf{u}) = H_c(\mathbf{u}_e + \delta \mathbf{u}) - H_c(\mathbf{u}_e) - \delta H_c(\mathbf{u}_e)\, \delta \mathbf{u} =$$

$$= \int [(\delta \mathbf{u})^2/2 + (\Phi(\omega_e + \delta \omega) - \Phi(\omega_e) - \Phi'(\omega_e)\, \delta \omega)]\, dx\, dy.$$

Тогда, точно так же, как в разд. 1, доказывается

Теорема Рэлея – Арнольда (D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu [1]). *Стационарный поток* $\mathbf{u}_e$, *задаваемый функцией Бернулли* $B(\lambda)$, *устойчив по Ляпунову в норме*

$$\|\mathbf{v}\| = \int |\mathbf{v}|^2\, dx\, dy + c_2 \int \omega^2\, dx\, dy,$$

если выполняются условия

$$0 < c_2 \le B'(\omega_e)/\omega_e \le C_2 < \infty.$$

Легко видеть, что это утверждение есть просто иная форма 2-й теоремы Арнольда. Несколько сложнее формулируется аналог 3-й теоремы Арнольда.

Среди многочисленных примеров применения этих теорем укажем течение типа "кошачьи глаза" (J. T. Stuart [1]), которое задается в xy-плоскости следующей зависимостью между функцией тока ψ и завихренностью ω:

$$\omega_e = -\exp(-2\psi_e) = -\left[a \operatorname{ch} y + \sqrt{a^2-1}\cdot\cos x\right]^{-2}.$$

В этом случае $\omega_e < 0$ и $\Phi'(\omega_e) = (2\omega_e)^{-1} < 0$ и, следовательно, приходится использовать 3-ю теорему Арнольда. Область D предполагаем периодической по x с периодом 2π и ограниченной по оси y линиями тока стационарного течения. Условием устойчивости будет $\Phi''(\omega_e) > k_0^{-2}$, где k_0 — наименьшее собственное значение оператора Лапласа в указанной области D с нулевыми граничными условиями. Вычисления, проведенные в работе D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu [1], показывают, что данное течение устойчиво при условии $a < a_0$, где $a_0 = 1{,}175...$ — некоторое критическое значение. Отметим, что устойчивость в этом примере имеет место только для возмущений с той же циркуляцией скорости на границе, что и у основного течения и тоже 2π-периодических, что, естественно, сужает класс допустимых возмущений.

К рассматриваемому кругу задач относится и задача об устойчивости плоских стационарных течений жидкости со свободной границей (В. И. Седенко, В. И. Юдович [1]). Учет дополнительных степеней свободы, связанных с деформацией свободной границы, приводит к изменению интеграла энергии — добавляется поверхностный интеграл. В случае, когда твердая часть границы и потенциал внешних сил обладают специальной симметрией, уравнения движения допускают дополнительные интегралы, которые в соответствии с вариационным принципом можно использовать для доказательства формальной устойчивости некоторых стационарных течений. В частности, рассмотрим плоскопараллельный поток $\mathbf{u}_e = (u(y), 0)$ в горизонтальном слое $D = \{-\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le a\}$, в поле силы тяжести с потенциалом gy. Здесь свободной считается часть границы $y = a$. Для периодических, с периодом l, возмущений первым интегралом нелинейных уравнений движения является компонента импульса по оси y:

$$C = \int_0^l \left[\int_{D(x)} \mathbf{u}_y \, dy \right] dx,$$

где $D(x)$ обозначает сечение области течения прямой $x = \mathrm{const}$, как показано на рисунке. Тогда, с учетом выражения для энергии

$$H = \int_0^l \int_0^a \left(|\mathbf{u}|^2/2 + U \right) dy\, dx + \sigma \int_{\Gamma(t)} ds,$$

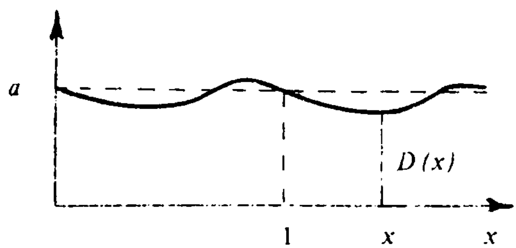
получаем для второй вариации функционала $H_c = 2H - u(\mathrm{a})\, C$:

$$\delta^2 H_c = \iint \left[(\delta \mathbf{u})^2 + \frac{u(y) - u(\mathrm{a})}{u''(y)} (\delta\omega)^2 \right] dx\, dy + \int_0^l \left[g f^2 + \sigma (f'_x)^2 \right] dx,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а f есть компонента некоторого векторного поля, построенного по основным параметрам задачи (ввиду громоздкости выражение для f мы здесь не приводим). Второе слагаемое в формуле для $\delta^2 H_c$ отвечает возмущению свободной границы. ***Формальная устойчивость*** стационарного течения $\delta^2 H_c > 0$, очевидно, имеет место при следующем условии: $[u(y) - u(\mathrm{a})]/u''(y) > 0$, которое, в свою очередь, выполняется, если

$$u''(y) \geq 0 \text{ и } u(y) \geq u(\mathrm{a}) \text{ или } u''(y) \leq 0 \text{ и } u(y) \leq u(\mathrm{a}).$$

Эти результаты можно рассматривать как вариант теоремы Рэлея для сдвиговых течений со свободной границей. Изложенный подход позволяет получить также условия формальной устойчивости для случая $a < 0$ (тяжелая жидкость над легкой — неустойчивость Рэлея — Тейлора) и для некоторых течений с круговой симметрией (В. И. Седенко, В. И. Юдович [1]).



3.2. Трехмерные течения

В трехмерном случае для идеальной, однородной несжимаемой жидкости известно немного сохраняющихся функционалов. Использование одного из них, **спиральности**, $\int (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u})\, dx\, dy\, dz$, позволяет исследовать устойчивость так называемых потоков Бельтрами (D. D. Holm [1]), характеризуемых свойством $\mathbf{u} \sim \operatorname{rot} \mathbf{u}$. В работе В. А. Владимирова [4] предложены некоторые сохраняющиеся функционалы и исследована формальная устойчивость соответствующих стационарных течений. Точнее, пусть течение жидкости описывается обычными уравнениями идеальной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} = -\nabla p, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

На границе области Г течения выполняются условия непротекания $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0$. Пусть, далее, $a\,(x, t)$ — произвольная скалярная функция, значения которой сохраняются в любой жидкой частице $da/dt = 0$. С помощью поля завихренности $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ вводится еще одна функция, сохраняющая свои значения в любой жидкой частице $\lambda\,(x, t) = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\, a$, так что $d\lambda/dt = 0$. Сохраняющиеся функционалы в таком случае имеют вид

— энергия $H = \int |\mathbf{u}|^2/2\, dx^3$;

— набор функционалов вида $C = \int \Phi\,(a, \lambda)\, dx^3$, где Φ — произвольная функция.

Для стационарного решения $\mathbf{u}_e$ имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e, \quad a = a_e(x), \quad \lambda = \lambda_e(x), \quad p = p_e(x),$$

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla)\, \mathbf{u}_e = -\nabla p_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_e = 0, \quad (\mathbf{u}_e \cdot \nabla)\, a_e = 0,$$

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla)\, \lambda_e = 0, \quad (\mathbf{u}_e \cdot n) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma.$$

Составляем функционал $H_c = H + C$. С помощью произвола в выборе функций a и Φ можно добиться того, что функционал H_c будет иметь в точке $\mathbf{u}_e$ первую вариацию равную нулю. Для этого достаточно выполнения следующих условий:

$$\Phi + \mathrm{H} - \Phi_\lambda \lambda_e = 0,$$

где положено $H = |\mathbf{u}_e|^2/2 + p_e = H(a_e, \lambda_e)$, а также $\Phi_\lambda = 0$ на границе области Γ (если область ограничена одной связной поверхностью), или другие подходящие граничные условия.

Вычисление второй вариации функционала H дает выражение

$$2\delta^2 H_c = \int [(\delta \mathbf{u})^2 + \Phi_{aa}(\delta a)^2 + \Phi_{\lambda\lambda}(\delta\lambda)^2 +$$

$$+ 2\Phi_{a\lambda}\,\delta a \delta\lambda + 2\Phi_\lambda \delta^2\lambda\,]\,dx^3,$$

которое в общем случае оказывается неопределенным по знаку, так как содержит слагаемые, пропорциональные $(\delta\mathbf{w} \cdot \nabla\delta a)$. Тем не менее для некоторых классов течений удается получить условия формальной и нелинейной устойчивости однородной жидкости. Сюда, в частности, относятся течения с винтовой симметрией (В. А. Владимиров [3]).

Пусть в цилиндрической системе координат φ, r, z рассматривается поле скоростей $\mathbf{u}$ и поле давления p. Винтовая симметрия означает, что эти поля являются функциями трех переменных: r, $\mu = a\varphi - bz$ и времени t. Через u_1, u_2, u_3 будем обозначать φ-, r-, z-компоненты поля скорости. При $a = 1$ все решения являются периодическими по μ с периодом 2π; при $a = 0$ имеем случай вращательной симметрии. Твердая граница области течения задается функцией $f(r, \mu)$. Введем обозначения

$$\alpha = au_1 - bru_3,\ \ \beta = bru_1 + au_3,\ \ R = a^2 + b^2r^2,$$

$$g = b^2r/R^2,\ \ K = 2ab/R^2.$$

Тогда обычные уравнения гидродинамики (1.1) можно привести к виду

$$\mathrm{D}(r\alpha/R) + K\beta r u_2 = -p_\mu,$$

$$\mathrm{D}u_2 - K\beta\alpha - (a\alpha/R)^2/r = -p_r + g\beta^2, \tag{3.2}$$

где обозначено $\mathrm{D} = \partial/\partial t + u_2\partial/\partial r + (\alpha/r)\,\partial/\partial\mu$; при этом $\mathrm{D}\beta = 0$ и $(u_2)_r + u_2/r + \alpha_\mu/r = 0$.

Условия непротекания на границе для истинных компонент скорости запишутся в новых обозначениях в виде

$$u_2 f_r + f_\mu \alpha/r = 0. \tag{3.3}$$

При $a = 1$ уравнения (3.2)–(3.3) удобно рассматривать в плоскости полярных координат r, μ, тогда полученные уравнения похожи на уравнения плоских движений неоднородной по плотности жидкости (В. А. Владимиров [1]). Величина α играет роль μ-компоненты скорости, β (или β^2) — поле плотности, поле массовых сил направлено по радиусу от центра и характеризуется величиной g. Аналогия является настолько полной, что позволяет записать интеграл энергии в виде суммы "кинетической" и "потенциальной" энергий:

$$E = T + \Pi, \quad 2T = \int (u_2^2 + \alpha^2/R)\, dr\, d\mu, \quad \Pi = \int \beta^2 U dr\, d\mu,$$

где $U = U(r) = \int\limits_0^r g(\xi)\, d\xi$; E является сохраняющимся функционалом системы (3.2)–(3.3). Большой набор первых интегралов дают также функционалы $I = \int \Phi(\beta)\, dr$. Решения системы вида $\alpha = u_2 = 0$, $\beta = \beta_0(r)$ выделяют стационарные течения исходной задачи, которые в исходных переменных определяются равенствами

$$u_1 = u_0(r), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = v_0(r), \quad au_0 = brv_0 \tag{3.4}$$

и зависят от одной произвольной функции u_0 (или v_0). Далее методом Арнольда доказывается

Теорема (В. А. Владимиров [3]). *Пусть во всей области течения выполняется неравенство*

$$0 < c \le g_e/(\beta_e^2)_r \le C < \infty. \tag{3.5}$$

Тогда стационарное течение (3.4) является устойчивым по отношению к возмущениям с заданной симметрией в норме

$$\|(\alpha, u_2, \sigma)\| = \int (\alpha^2/R + u_2^2 + c\sigma^2)\, dr\, d\mu,$$

где $\sigma^2 = \beta^2 - \beta_e^2$.

В частном случае $a = 0$ условия (3.5) имеют вид (для вращательно-симметричных течений в кольце $R_1 \le r \le R_2$)

$$c \le [r^3 (r^2 u_0^2)_r]^{-1} \le C,$$

что обобщает известный в линейной теории признак устойчивости Рэлея для вращательно-симметричных течений относительно таких же возмущений (подробнее см. В. А. Владимиров [3], [4]).

Несколько иной подход к исследованию устойчивости трехмерных течений предложен в работе С. В. Базденкова [1]. Здесь также используются интегралы, полученные из условия "вмороженности" некоторого векторного поля в течение с полем скорости u, но допускаются не все возможные возмущения, а лишь те, которые возникают под действием произвольных, но не сингулярных во времени сил, приложенных к жидкости. В этом случае квадратичная форма, полученная из второй вариации функционала энергии, спиральности и интеграла "вмороженности" может быть положительно определенной для некоторых стационарных течений. В частности показано, что при сделанных ограничениях на возмущения всякое плоское течение идеальной жидкости, устойчивое относительно плоских возмущений скорости, устойчиво также и по отношению к трехмерным возмущениям. Такого рода утверждения близки теоремам о так называемой **условной устойчивости** течений жидкости (H. D. Abarbanel, D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu [1]); о них речь пойдет ниже.

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. Двумерный баротропный поток

Будем рассматривать баротропные течения в двумерной области D с гладкой границей, для которых гидродинамическое давление p зависит только от плотности жидкости ρ. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla h(\rho), \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\mathbf{u}) = 0, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{u}(x, y, t)$ — вектор скорости потока, $\rho(x, y, t)$ — плотность. Вектор $\mathbf{u}$ предполагается параллельным границам области Γ вблизи них, функция $h(\rho)$ есть некоторая заданная функция, связанная с давлением равенством $p'(\rho) = \rho h'(\rho)$ и называемая **энтальпией**. При анализе устойчивости решения предполагаются гладкими (из класса C^1, что исключает разрывы плотности или скорости), а также имеют фиксированные границы изменения плотности:

$$0 < \rho_{\min} \le \rho \le \rho_{\max} < \infty.$$

Анализ стационарных течений, выбор сохраняющегося функционала и исследование его второй вариации проведены в работе М. А. Гринфельда [1], где получено условие *формальной устойчивости* стационарных потоков. Анализ *нелинейной устойчивости* выполнен в работе D. D. Holm et al. [2].

Сохраняющимися функционалами в данной задаче являются:

— энергия потока $H = \int [\rho u^2/2 + \varepsilon(\rho)]\,dx\,dy$, где $\varepsilon(\rho)$ есть внутренняя энергия на единицу площади, связанная с энтальпией h равенством $\varepsilon'(\rho) = h(\rho)$;

— циркуляции скорости на границах $Q_l = \int_{\Gamma_l} (\mathbf{u} \cdot d\,\mathbf{l})$;

— набор казимиров вида $C(\mathbf{u}, \rho) = \int \rho\Phi(\omega/\rho)\, dx\, dy$, где $\omega = (\mathrm{rot}\,\mathbf{u})_z$ означает "скалярную завихренность".

Образуем связку интегралов $H_c = H + C + \sum a_i Q_l$. Стационарные течения, как следует из (4.1), удовлетворяют условиям (ср. п. 3.1)

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla[\, \mathbf{u}_e^2/2 + h(\rho_e)\,]) = 0 \ \text{ и } \ (\mathbf{u}_e \cdot \nabla(\omega_e/\rho_e)) = 0.$$

Отсюда вытекает закон Бернулли в форме $\mathbf{u}_e^2/2 + h(\rho_e) = \mathrm{B}(\omega_e/\rho_e)$ с гладкой функцией Бернулли $\mathrm{B}(\lambda)$.

Вычисление вариации $\delta H_c(\mathbf{u}_e)$ показывает, что эта вариация обращается в нуль при следующем выборе функции $\Phi(\lambda)$ и констант a_i:

$$B(\lambda) + \Phi(\lambda) - \lambda\Phi'(\lambda) = 0, \quad a_i = -\Phi'(\omega_e/\rho_e)\big|_{\Gamma_i}.$$

Из этих условий находим $\Phi(\lambda) = \lambda\left(\int^{\lambda} \frac{\mathrm{B}(\lambda)}{t^2}\, dt + \mathrm{const}\right)$.

Для доказательства устойчивости вычисляем функционал

$$A(\delta\mathbf{u}, \delta\rho) = H_c(\mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}, \rho_e + \delta\rho) - H_c(\mathbf{u}_e, \rho_e) -$$

$$- \delta H_c(\mathbf{u}_e, \rho_e)(\delta\mathbf{u}, \delta\rho) = \int \Big\{ \frac{\delta(\rho\mathbf{u})^2}{2\rho} - \frac{\mathbf{u}_e^2}{2}\frac{(\delta\rho)^2}{\rho} + [\, \varepsilon(\rho_e + \delta\rho) -$$

$$- \varepsilon(\rho_e) - \varepsilon'(\rho_e)\delta\rho\,]\Big\}\, dx\, dy + \int \frac{1}{\omega_e} \mathrm{B}'(\omega_e/\rho_e)[\delta(\omega/\rho)]^2\, dx\, dy,$$

где положено

$$\delta(\rho\mathbf{u}) = (\rho_e + \delta\rho)(\mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}) - \rho_e\mathbf{u}_e,$$

$$\delta(\omega/\rho) = (\omega_e + \delta\omega)/(\rho_e + \delta\rho) - \omega_e/\rho_e.$$

Пусть, далее, для стационарного потока $(\mathbf{u}_e, \rho_e)$ выполнены условия

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq \rho_{\max} < \infty,$$

$$0 < a \leq \frac{B'(\lambda)}{\lambda} \leq A < \infty,$$

$$c^2_{\min}/\rho_{\max} \leq \varepsilon''(\tau) \leq c^2_{\max}/\rho_{\min}, \tag{4.2}$$

где c — скорость звуковых волн в рассматриваемой среде. Тогда, если для возмущения плотности будет сохраняться неравенство $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$, то справедливы оценки

$$A(\delta \mathrm{u}, \delta\rho) \geq \|(\delta\rho \mathrm{u}, \delta\rho)\| \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\int \Big\{ \frac{[\delta(\rho \mathrm{u})]^2}{\rho_{\max}} +$$

$$+ \Big[\frac{c^2_{\min}}{\rho_{\max}} - \frac{\mathrm{u}^2_e}{\rho_{\min}} \Big] (\delta\rho)^2 \Big\}\, dx\, dy + \frac{1}{2} a \rho_{\min} \int [\delta(\omega/\rho)]^2\, dx\, dy.$$

При тех же предположениях из выражения для функционала Арнольда A легко выводится его непрерывность в указанной норме. В соответствии с общей схемой разд. 2 получаем утверждение о *нелинейной устойчивости* исследуемого стационарного течения:

Теорема 4.1 (D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein [2]).

Стационарное решение (u_e, ρ_e) *уравнений (4.1), для которого выполняются условия (4.2) и при этом* $c^2_{\min}/\rho_{\max} > \mathrm{u}^2_e/\rho_{\min}$, *будет устойчивым в норме* $\|(\delta\rho \mathrm{u}, \rho)\|$, *определенной выше, до тех пор, пока возмущенное решение будет удовлетворять условию* $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$.

Эта теорема дает пример так называемой **условной устойчивости** стационарного решения (подробнее об этом понятии речь пойдет ниже). Отметим, что вычисление второй вариации $\delta^2 H_C(\mathrm{u}_e, \rho_e)$ показывает, что формальная устойчивость имеет место при следующих условиях на стационарный поток (теорема М. А. Гринфельда [1], см. также M. A. Grinfeld [1]):

$$\rho_e > 0, \quad \varepsilon''(\rho_e)\rho_e > 0, \quad B'(\omega_e/\rho_e)/\omega_e > 0.$$

Результаты этого раздела применимы, в частности, к плоскопараллельным течениям жидкости в полосе $\{Y_1 < y < Y_2\}$. В этом случае стационарными решениями являются течения с произвольными профилями скорости $\mathrm{u}_e(x, y) = (u(y), 0)$ и постоянной плотностью $\rho_e = 1$. Заметим, что для таких течений $(\omega_e/\rho_e)(x, y) = -u'(y)$. Если обозначить через c_e скорость звука в стационарном потоке ($c_e^2 = \min[\varepsilon''(\rho_e)\rho_e]$), то условие *формальной устойчивости* (в частности, линейной устойчивости), впервые полученное в работе М. А. Гринфельда [1], примет вид

$$c_e^2 - u(y)^2 > 0, \quad u(y)/u''(y) > 0,$$

что очень похоже на условие теоремы Арнольда 1 для несжимаемой жидкости. Для баротропных возмущений условие нелинейной устойчивости таких стационарных течений в духе теоремы этого раздела получено в работе D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein [2].

Приведенный анализ можно использовать при исследовании устойчивости течений с круговой симметрией в кольце. Здесь к описанным ранее сохраняющимся функционалам добавляются из соображений симметрии еще законы сохранения углового момента и момента инерции. Результат получается в виде, близком к теореме этого раздела (см.: D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein [2]). Для однородной жидкости устойчивость течений с круговой, эллиптической и кольцевой симметрией изучалась аналитически в работах J. H. Wan [1]; J. H. Wan, F. Pulvirent [1]. Полученные результаты имеют приложения в задачах метеорологии и океанологии.

4.2. Трехмерный адиабатический поток

Набор сохраняющихся функционалов в трехмерном случае существенно увеличится, если рассматривать трехмерные адиабатические течения и допускать вариации не только поля скорости δu, но и плотности жидкости $\delta\rho$, а также плотности энтропии $\delta\eta$. При этом возникает достаточно богатый набор казимиров и анализ устойчивости может быть проведен по изложенной выше схеме. Основные вычисления проведены в работе Л. А. Дикого [1]. Анализ формальной и нелинейной устойчивости, сделанный на основе этих вычислений, представлен в статье D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein [2].

Уравнения Эйлера для трехмерного адиабатического потока имеют вид

$$Du = -\nabla p(\rho, \eta), \quad D\rho = -\rho \operatorname{div} u, \quad D\eta = 0,$$

где $D = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$, Ω — область, в которой рассматривается поток, Γ — граница области, $\mathbf{u}$ — поле скорости жидкости, ρ — плотность жидкости, η — плотность энтропии. Давление $p = p(\rho, \eta)$ задается в терминах термодинамического уравнения состояния для внутренней энергии $\varepsilon(\rho, \eta)$ следующим образом: имея ε, зададим температуру T и плотность энтальпии h равенствами: $\rho T = \partial\varepsilon/\partial\eta$, $h = \partial\varepsilon/\partial\rho$. Давление p, определенное как $p = \rho^2 \partial(\varepsilon/\rho)/\partial\rho$, удовлетворяет соотношениям $\rho h = \varepsilon + p$ и $dh = [T + \rho\, \partial T/\partial\rho]\, d\eta + c^2\, d\rho/\rho = T\, d\eta + dp/\rho$, где $c^2 = \partial p/\partial\rho = \rho\, \partial h/\partial\rho$ — адиабатическая скорость звука. Сохраняющимися функционалами являются

— энергия $H(\mathbf{u}, \rho, \eta) = \int [\rho \mathbf{u}^2/2 + \varepsilon(\rho, \eta)]\, dx\, dy\, dz$,

— набор казимиров вида

$$C_\Phi(\eta, Q) = \int \rho\, \Phi(\eta, Q)\, dx\, dy\, dz, \qquad C_\mu = \mu \int \rho Q dx\, dy\, dz.$$

Здесь μ — произвольная постоянная, Φ — произвольная функция, $Q = -(\mathbf{w} \cdot \nabla\eta) = -\operatorname{div}(\eta\, \mathbf{u})$, где $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Как легко проверить, $D\,Q = \partial Q/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, Q = 0$. Для стационарного решения $\mathbf{u}_e$, ρ_e, η_e имеют место соотношения

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla\eta_e) = (\mathbf{u}_e \cdot \nabla Q_e) = (\mathbf{u}_e \cdot \nabla [\,|\mathbf{u}_e|^2/2 + h(\rho_e, \eta_e)\,]) = 0.$$

Это означает, что существуют две скалярные функции $K(\eta_e, Q_e)$ и $\lambda(x, y, z)$ такие, что

$$\mathbf{u}_e^2/2 + h(\rho_e, \eta_e) = K(\eta_e, Q_e) \quad \text{и} \quad \rho_e \mathbf{u}_e = [\nabla\eta_e \times \nabla Q_e]\, \lambda.$$

Две функции K и λ полностью описывают стационарное течение.

Составим функционал $H_c = H + C_\Phi + C_\mu$. Стационарное течение $(\mathbf{u}_e, \rho_e, \eta_e)$ является критической точкой функционала H_c при следующем выборе функции Φ и константы μ:

$$\mu = -\Phi'(\eta_e, \Omega_e)\,|_\Gamma,$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta\, \Big(\int^{\beta} \frac{K(\alpha, t)}{t^2}\, dt + \Psi(\alpha) \Big),$$

где $\Psi(\alpha)$ — произвольная функция. Этот результат получен в работе Л. А. Дикого [1] (при его выводе предполагается выполнение условий $Q_e \neq 0$ и $[\nabla Q_e \times \nabla\eta_e] \neq 0$).

Вычисление второй вариации дает некоторую квадратичную форму относительно возмущений δu, $\delta\rho$, $\delta\eta$, которая является неопределенной по знаку, что не позволяет сделать вывод даже о формальной устойчивости. Более подробный анализ второй вариации, проведенный в работе D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein [2], показывает, что в описываемой ситуации имеет место *условная формальная устойчивость*:

Теорема 4.2. *Положим* $\mathbf{k} = \nabla\delta\eta/\delta\eta$, *тогда при выполнении условий*

$$c_e^2 - \mathbf{u}_e^2 > 0, \quad (\mathbf{u}_e \cdot [\nabla\eta_e \times \nabla Q_e]) > 0, \quad (\mathbf{w}_e \cdot \nabla \Phi'(\eta_e, Q_e)) > 0$$

стационарное течение $\mathbf{u}_e, \rho_e, \eta_e$ *остается линейно устойчивым в норме* $\delta^2 H_c$ *до тех пор, пока сохраняется неравенство* $|\mathbf{k}| < k_+$, *где* k_+ *— некоторое критическое значение, определяемое через параметры стационарного течения (для* k_+ *имеется явная формула).*

Для оправдания подобной формы теоремы об устойчивости заметим, что если ограничение на рост градиента возмущения плотности энтропии (этой характеристикой служит вектор $\mathbf{k}$) не выполняется, то математическая модель течения не является адекватной и должна быть изменена с учетом того, что для $\nabla\delta\eta$ допускаются сколь угодно большие значения по сравнению с $\delta\eta$. Термин **условная устойчивость** впервые появился в работе D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein [2] и означает, что течение будет устойчивым лишь по отношению к некоторому классу возмущений, выделяемому тем или иным условием. Исследование нелинейной устойчивости требует более тонкого анализа. Соответствующие условия на функции $\varepsilon(\rho_e, \eta_e)$, $\Phi(\rho_e, Q_e)$, плотность потока ρ и градиент возмущения энтропии $\nabla\delta\eta$ приведены в работе D. D. Holm et al. [2] и напоминают утверждение об условной нелинейной устойчивости двумерного баротропного потока (теорема 4.1).

Глава 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Влияние изменения плотности на устойчивость стационарных течений имеет двойственный характер. С одной стороны, в большинстве случаев плотность оказывает стабилизирующее воздействие, что интуитивно выглядит вполне естественно. Вместе с тем, известны примеры, когда под действием устойчивой плотностной стратификации происходит дестабилизация сдвигового течения однородной жидкости. Первый такой пример был описан в работе S. A. Thorpe [1]. Интерпретация этого явления с помощью **концепции волн с отрицательной энергией** содержится в обзорах О. Р. Козырева и Ю. А. Степанянца [1] и Ю. А. Степанянца и А. Л. Фабриканта [1]. Как будет видно из дальнейшего, большие вариации градиента плотности вообще исключают возможность устойчивости течения по отношению к конечным возмущениям. С формальной точки зрения в этом случае можно говорить лишь об *условной устойчивости* соответствующих стационарных потоков. Для более определенных выводов можно попытаться наложить какие-нибудь физические ограничения, сдерживающие рост градиента плотности. Ниже приводятся основные результаты по нелинейной устойчивости стратифицированных потоков.

5.1. Двумерные течения

Исследование устойчивости плоских течений идеальной стратифицированной жидкости проводилось как в рамках приближения Буссинеска, традиционно используемого при решении задач геофизической гидродинамики, так и в рамках исходных уравнений Эйлера. Опишем вначале результаты, полученные в приближении Буссинеска. Напомним, что в этом приближении равновесная плотность жидкости всюду, где она не дифференцируется по вертикальной координате z, полагается постоянной и равной некоторому среднему значению ρ_*. Вместе с тем эффект плавучести, связанный с расслоением жидкости по вертикали, учитывается благодаря слагаемым, пропорциональным $g d\rho/dz$. Эти допущения оправданы в большинстве задач океанологии и физики атмосферы, где изменения плотности действительно невелики и составляют десятые и сотые доли процента от средних значений. Бывают, однако, ситуации, когда выход за рамки приближения Буссинеска принципиально важен.

Итак, рассмотрим плоскопараллельное сдвиговое течение вдоль горизонтальной оси x, изменяющееся по вертикали z. В качестве исходных уравнений примем систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p/\rho_* - (\rho g/\rho_*)\nabla z,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla\rho),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Введем функцию тока $\psi(x, z, t)$ и завихренность $\omega = \nabla^2\psi$. Предположение о наличии твердых границ позволяет заключить, что $\psi = \text{const}$ на каждой связной компоненте границы Г. Для неограниченной области предполагается, что ω и ψ достаточно быстро исчезают на бесконечности. В переменных ω и ψ уравнения движения имеют вид

$$\partial\omega/\partial t = J(\omega, \psi) + J(gz/\rho_*, \rho),$$

$$\partial\rho/\partial t = J(\rho, \psi),$$

где $J(g, h) = (\partial g/\partial x) \cdot (\partial h/\partial z) - (\partial g/\partial z) \cdot (\partial h/\partial x)$ — якобиан двух функций.

Для стационарного потока $\mathbf{u}_e$, ρ_e второе уравнение приводит к наличию функциональной зависимости $\psi_e = \tilde{\psi}(\rho_e)$, с некоторой функцией $\tilde{\psi}$. Тогда первое уравнение превращается в условие

$$J\left(\omega_e + \frac{1}{\rho_*}\frac{d\rho_e}{d\psi_e} gz;\ \psi_e\right) = 0,$$

которое, в свою очередь, означает наличие функциональной зависимости

$$\omega_e + \frac{1}{\rho_*}\frac{d\rho_e}{d\psi_e} gz = L(\psi_e)$$

для некоторой функции L, называемой **функцией Лонга** (R. R. Long [1]).

Сохраняющимися функционалами в этом случае являются

— энергия $H = \int (|\mathbf{u}|^2/2 + \rho gz/\rho_*)\, dx\, dz$,

— набор казимиров вида

$$C_{F,G} = \int_D [\omega F(\rho) + G(\rho)]\, dx\, dz,$$

где предполагается, что функция $F(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial x} F(\rho)\, dx\, dz = 0,$$

а функция $G(\rho)$ произвольна. Условие на F выполняется, например, если область D периодическая по x или ρ постоянна на всех компонентах границы.

Устойчивость стационарного потока, задаваемого функциями $\tilde{\psi}$ и L, исследуется, как обычно, с помощью функционала

$$H_c = H + C_{F,G} + \lambda \int_D \omega\, dx\, dz,$$

где λ — произвольная постоянная. Первая вариация этого функционала обращается в нуль при следующем выборе функций F, G и константы λ:

$$F(\xi) = \tilde{\psi}(\xi), \quad [\lambda + F(\rho_e)]\big|_\Gamma = 0, \quad G(\xi) = -\int^{\xi} L(s)\, ds.$$

Условия формальной устойчивости получаются из вычисления второй вариации функционала H_c:

$$\delta^2 H_c = \int_D [(\delta \mathbf{u})^2 + 2F'(\rho_e)\,\delta\rho\,\delta\omega + A(\delta\rho)^2]\, dx\, dz,$$

где $A = \omega_e F''(\rho_e) + G''(\rho_e) = -\dfrac{d\psi_e}{d\rho_e}\dfrac{d\omega_e}{d\rho_e} - \dfrac{g}{\rho_*}\dfrac{dz}{d\rho_e}$.

Рассмотрим возмущения, для которых $\delta\rho = 0$ на границе Г, преобразуем вторую вариацию с помощью формулы Грина и выделим полные квадраты. В результате получаем

$$\delta^2 H_c = \int \{ | \delta \mathbf{u} + [\nabla (F'(\rho_e)\delta\rho) \times \nabla y]|^2 + A(\delta\rho)^2 -$$

$$- \nabla [F'(\rho_e)\delta\rho]^2 \} \, dx\, dz.$$

Определим теперь величину τ, имеющую размерность времени, из соотношения

$$[\nabla (F'(\rho_e)\delta\rho)]^2 = (g\tau/\rho_*)^2 (\delta\rho)^2.$$

Очевидно, что $\delta^2 H_c$ будет положительно определенной (отметим, что если эта форма знакоопределенна, то она обязательно положительна), если выполнено условие

$$(g\tau/\rho_*)^2 < A.$$

Заметим, что τ есть функция координат x, z и вариации плотности $\delta\rho\,(x, z, t)$. Из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение о *формальной условной устойчивости*:

Теорема 5.1 (H. D. Abarbanel et al. [1]). *Стационарное течение* $\mathbf{u}_e$, ρ_e *линейно устойчиво в норме* $\delta^2 H_c$ *до тех пор, пока для вариации плотности* $\delta\rho$ *выполняется условие*

$$(g\tau/\rho_*)^2 < A.$$

Заметим также, что это возможно лишь, если стационарный поток устойчиво стратифицирован, т. е. $d\rho_e/dz < 0$.

Для плоского, параллельного оси x потока с условиями $\rho_e = \rho_e(z)$ и $\mathbf{u}_e = (U(z), 0)$ утверждение теоремы преобразуется следующим образом: положим $N^2 = -(g/\rho_e)(d\rho_e/dz)$ (квадрат частоты **Брента – Вяйсяля**). Тогда в соответствии с теоремой 5.1 стационарный поток остается устойчивым в норме $\delta^2 H_c$ до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\tau^2 < \frac{N^2 - U'(z)\,U''(z)}{N^4},$$

где $\tau = |\nabla (U(z)\,\delta\rho/N^2)|/|\delta\rho|$.

В работе В. А. Владимирова [4] получен следующий интеграл линейной задачи:

$$\int [|\delta u|^2 + \frac{g\rho'_e - UU''}{(\rho'_e)^2}(\delta\rho)^2 - \frac{2U}{\rho'_e}\delta\rho\,\delta\omega]\,dx\,dz,$$

который, очевидно, аналогичен интегралу $\delta^2 H_c$, приведенному выше. При условии $\rho'_e < 0$ (устойчивая стратификация) форма будет знакоопределенной лишь в случае постоянного течения $\mathbf{u}_e = \mathrm{const}$. Вариант *условной устойчивости* в работе В. А. Владимирова [4] не исследовался.

Анализ нелинейной устойчивости приводит к следующему результату: положим для любой функции $K(t)$

$$\hat{K}(\delta\rho) = K(\rho_e + \delta\rho) - K(\rho_e) - K'(\rho_e)\,\delta\rho.$$

Определим величину τ с размерностью времени равенством

$$\nabla(\delta F(\rho_e))^2 = (g\tau/\rho_e)^2(\delta\rho)^2.$$

Введем норму в пространстве $(\delta\mathbf{u}, \delta\rho)$:

$$\|(\delta\mathbf{u}, \delta\rho)\| =$$
$$= \int \{|(\delta\mathbf{u} + \nabla(\delta F(\rho_e)), \nabla y)|^2 + [\alpha - (g\tau/\rho_*)]^2(\delta\rho)^2\}\,dx\,dz.$$

Тогда имеет место

Теорема 5.2. *Стационарный поток* $\mathbf{u}_e, \rho_e$ *(с постоянной плотностью на каждой компоненте границы), для которого выполняются условия:*

$$0 < \alpha(\delta\rho)^2/2 < \hat{G}(\delta\rho) + \omega_e\hat{F}(\delta\rho) < \bar{\alpha}(\delta\rho)^2/2 < \infty,$$

остается устойчивым в определенной выше норме до тех пор, пока сохраняется неравенство

$$(g\tau/\rho_*)^2 < \alpha.$$

Этот результат получен в работе H. D. Abarbanel et al. [1].

Исследуем теперь устойчивость плоскопараллельных течений жидкости в рамках исходных уравнений гидродинамики без использования приближения Буссинеска. Обратимся к системе уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p / \rho - g \nabla z,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

которую будем рассматривать в фиксированной, ограниченной области D плоскости xz с условиями непротекания на границе: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0$. Введем, как и ранее, скалярную завихренность $\omega = (\operatorname{rot} \mathbf{u})_y$. Тогда уравнения Эйлера можно записать в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\omega, \psi) + J(p, 1/\rho), \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = J(\rho, \psi), \tag{5.2}$$

где $\psi(x, z, t)$ — функция тока. Исследование устойчивости может быть проведено по той же схеме. В частности, для стационарного течения ω_e, ρ_e уравнение неразрывности (5.2) приводит к функциональной зависимости

$$\psi_e = \psi_e(\rho_e) \quad \text{или} \quad \rho_e = \rho_e(\psi_e).$$

Уравнение Лонга имеет вид

$$\omega_e + \frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{d\psi_e}(|\mathbf{u}_e|^2/2 + gz) = L(\psi_e). \tag{5.3}$$

Сохраняющимися функционалами системы являются

— энергия $H(\mathbf{u}, \rho) = \int\limits_D (\rho |\mathbf{u}|^2/2 + \rho g z)\, dx\, dz,$

— набор казимиров вида

$$C_{F, G, \lambda} = \int\limits_D [\omega F(\rho) + G(\rho)]\, dz\, dx + \lambda \int\limits_\Gamma (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}).$$

Составляем связку интегралов $H_c = H + C$. Первая вариация этого функционала обращается в нуль на стационарном решении $\mathbf{u}_e$, ρ_e при следующем выборе функций F, G и константы λ (H. D. Abarbanel et al. [1]):

$$\rho_e \psi'_e(\rho_e) = F'(\rho_e), \quad \lambda + F(\rho_e)|_\Gamma = 0,$$

$$G'(\rho_e) = -\rho_e \psi_e'(\rho_e) L(\psi_e(\rho_e))$$

(ρ_e предполагается постоянным на границе). Выражение для второй вариации $\delta^2 H_c$ может быть преобразовано к виду (при условии $\delta\rho = 0$ на границе Г)

$$\delta^2 H_c = \int \{\rho_e |\nabla[\delta\psi - \psi'_e(\rho_e)\delta\rho]|^2 - \rho_e |\nabla(\psi'_e(\rho_e)\delta\rho)|^2 +$$

$$+ A(\delta\rho)^2\}\, dx\, dz,$$

где $A = \omega_e F''(\rho_e) + G''(\rho_e)$.

Простой анализ показывает, что $\delta^2 H_c$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от выбора вариаций $\delta\psi$ и $\delta\rho$ в окрестности нуля. Причиной является (как и для модели Буссинеска) возможность неограниченного роста отношения $|\nabla\delta\rho|/|\delta\rho|$ при малых значениях $|\delta\rho|$. Таким образом, устойчивость может быть доказана лишь при некоторых ограничениях на рост градиента плотности.

Определим величину τ из соотношения

$$|\nabla[\psi'_e(\rho_e)\delta\rho]|^2 = (g\tau/\rho_e)^2 (\delta\rho)^2.$$

Тогда, как следует из вышеизложенного, имеет место

Теорема 5.3 (H. D. Abarbanel et al. [1]). *Стационарное течение u_e, ρ_e, определенное функциями F, G и константой λ, формально устойчиво в норме $\delta^2 H_c$ для всех возмущений (δu, $\delta\rho$), для которых градиент вариации плотности ограничен условием $A > (g\tau)^2/\rho_e$. (Величина A при этом может быть выражена в терминах функций ψ_e, L).*

Анализ функционала Арнольда позволяет получить утверждение об условной нелинейной устойчивости в форме, близкой теореме 5.2.

Неустойчивость стратифицированных течений в отсутствие сдвига скорости: для состояния равновесия жидкости $u_e = \mathrm{const}$ условием формальной устойчивости течений стратифицированной жидкости в поле внешних сил с потенциалом $\Phi(x, y)$ является выполнение неравенства $\Phi' = d\Phi/d\rho_0 < 0$, где ρ_0 — начальное распределение плотности $\rho = \rho_0(\Phi)$ (это верно как в рамках исходных уравнений гидродинамики, так и в приближении Буссинеска). В работе В. А. Владимирова [5] проведен анализ неустойчивости в случае, когда это условие нарушается.

Пусть, например, в области D имеется гидростатическое равновесие двух жидкостей с постоянными плотностями: $\rho_0 = \rho_+$ в области D_+ и $\rho_0 = \rho_-$ в области D_-, $D = D_+ \cup D_-$, граница раздела жидкостей Γ совпадает с одной из линий $\Phi =$ const, а $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к Γ, направленная в сторону жидкости с плотностью ρ_-. На Γ определяется функция $g > 0$, такая, что $g\mathbf{n} = \nabla\Phi$ (это означает, что потенциал Φ растет от D_+ к D_-, а сила направлена в противоположную сторону). Будем предполагать, что возмущения скорости $\mathbf{u}$ потенциальны (т. е. $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ в областях D_+ и D_-), а также считаем, что жидкости не перемешиваются (меняется лишь граница раздела жидкостей, а плотности ρ_+ и ρ_- остаются неизменными). Сохраняющимися функционалами нелинейной системы являются, как обычно, кинетическая (T) и потенциальная (П) энергии возмущения:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int\limits_D \rho\,|\mathbf{u}|^2\,dx^2; \qquad \Pi = \int\limits_D \rho\Phi\,dx^2.$$

Очевидно, что в положении равновесия $\delta\mathrm{T} = 0$ и $\delta\Pi = 0$ для указанного класса возмущений. Для вторых вариаций этих функционалов получаем выражения

$$\delta^2\mathrm{T} = \rho_+\int\limits_{D_+} |\mathbf{u}|^2\,dx^2 + \rho_-\int\limits_{D_+} |\mathbf{u}|^2\,dx^2,$$

$$\delta^2\Pi = \frac{[\rho]}{2}\int\limits_{\partial\sigma} g\eta^2\,ds,$$

где η обозначает нормальное смещение границы контактов жидкостей, $[f] = f_+ - f_-$ — скачок функции на этой границе, при этом

$$\eta_t = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}), \qquad [\rho\varphi_t] = -[\rho]\,g\eta_t.$$

При условии $[\rho]\,g > 0$ (в D_- более легкая жидкость) потенциальная энергия имеет минимум в положении равновесия и, следовательно, равновесие *формально устойчиво* (устойчиво в норме $\delta^2\Pi$ для возмущений линеаризованной задачи).

Пусть $[\rho] g < 0$, тогда для функционала $W = \int\limits_{\Gamma} [\rho\Phi]\, ds$ получаем (Φ — потенциал решения линеаризованной системы)

$$\frac{dW}{dt} = 2(\delta^2 E - 2\delta^2 \Pi), \quad \text{где} \quad E = T + \Pi.$$

Отсюда следует $W \geq W_0 + 2Et$, но тогда

$$\int\limits_{\Gamma} ([\rho\Phi]^2 + \eta^2)\, ds \geq 2W_0 + 4Et. \tag{5.4}$$

С учетом равенства $\int\limits_{\Gamma} [\rho\Phi]/g\, ds = 0$ это означает нарастание η^2 или $[\rho\Phi]$, и в этом смысле положение равновесия неустойчиво (напомним, что возмущения в этих рассуждениях являются решениями линеаризованной на положении равновесия системы уравнений Эйлера).

Для непрерывно стратифицированной жидкости $\rho = \rho_0(\Phi)$ наиболее сложным является определение класса допустимых возмущений (вместо потенциальных в многослойной жидкости), в работе В. А. Владимирова [5] это сделано с помощью представления Клебша векторного поля ρu. Тогда для второй вариации потенциальной энергии имеем

$$\delta^2 \Pi = -\int\limits_{D} \Phi'(\rho_0)\, \rho^2\, dx^2,$$

и при условии $\Phi' > 0$ получается оценка, аналогичная (5.4), которая означает неустойчивость. Здесь возмущения также являются решениями линеаризованной системы уравнений Эйлера. Описанный подход, в принципе, допускает нелинейные обобщения, которые, однако, до сих пор, по-видимому, проделаны не были.

5.2. Трехмерные течения стратифицированной жидкости

В этом разделе опишем устойчивость сдвиговых течений идеальной жидкости, вращающейся как целое, используя приближение Буссинеска. Основная система уравнений в векторной форме имеет тот же вид, что и в предыдущем пункте, но с добавлением в правой части слагаемого $[\mathbf{u} \times \mathbf{f}]$, описывающего действие силы Кориолиса ($\mathbf{f}$ — параметр Кориолиса, равный удвоенной частоте вращения всей системы). Применяя операцию rot к уравнению движения, его можно преобразовать к виду (здесь $\mathbf{Q} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \mathbf{f}$)

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{u} \times \mathbf{Q}] + (g/\rho_*)[\nabla z \times \nabla \rho]. \qquad (5.5)$$

Это означает, что для **потенциальной завихренности** $q = (\mathbf{Q} \cdot \nabla \rho)$ выполняется равенство $\partial q/\partial t = -(\mathbf{u} \cdot \nabla q)$. Следовательно, плотность ρ и потенциальная завихренность q сохраняются вдоль линий тока.

Поскольку стационарное течение $\mathbf{u}_e$, ρ_e удовлетворяет уравнениям

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla \rho_e) = 0, \quad (\mathbf{u}_e \cdot \nabla q_e) = 0,$$

$$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla [\,|\mathbf{u}|^2/2 + p/\rho_* + \rho g z/\rho_*\,]) = 0,$$

то отсюда вытекает существование гладкой функции B (**функции Бернулли**) такой, что

$$|\mathbf{u}|^2/2 + p/\rho_* + \rho g z/\rho_* = B(\rho_e, q_e). \qquad (5.6)$$

Предположим, что $[\nabla \rho_e \times \nabla q_e] \neq 0$, т. е. что поверхности уровня функций ρ_e и q_e не касаются друг друга в области течения D. Сохраняющимися функционалами задачи являются

— энергия $H = \int (|\mathbf{u}|^2/2 + \rho g z/\rho_*)\, d^3x$,

— набор казимиров вида $C_{\Phi,\lambda} = \int_D [\Phi(\rho, q) + \lambda q]\, d^3x$, где Φ — произвольная функция, а λ — постоянная.

Стационарное течение $\mathbf{u}_e$, ρ_e будет критической точкой функционала $H_C = H + C_{\Phi,\lambda}$ при выполнении следующих условий:

$$B(\rho_e, q_e) = -\Phi(\rho_e, q_e) + q_e \Phi_q(\rho_e, q_e)$$

в области D и

$$\lambda = -\Phi_q(\rho_e, q_e)\big|_\Gamma \qquad (5.7)$$

на границе области, (для стационарного потока из условий

$(\mathbf{u}_e \cdot \nabla\rho_e) = 0$, $(\mathbf{u}_e \cdot \nabla q_e) = 0$ на границе следует $\Phi_q(\rho_e, q_e)|_\Gamma = \text{const}$). Из полученных соотношений можно записать выражение для функции Φ:

$$\Phi(\rho_e, q_e) = q_e \left\{ \int^{q_e} [B(\rho_e, s)/s^2]\, ds + b'(\rho_e) \right\},$$

где $b'(\rho_e)$ — произвольная функция от ρ_e. Вычисление второй вариации функционала H_C дает выражение (H. D. Abarbanel et al. [1])

$$\delta^2 H_C = \int \{|\delta\mathbf{u} + [\nabla\Phi_q \times \nabla\delta\rho]|^2 + (\nabla\Phi_q \cdot \nabla\delta\rho)^2\}\, d^3x +$$

$$+ \int (\delta q, \delta\rho) \cdot \begin{vmatrix} \Phi_{\rho\rho}^2 - |\mathbf{k}|\,|\nabla\Phi_q|^2 & \Phi_{q\rho} \\ \Phi_{q\rho} & \Phi_{qq} \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta q \end{bmatrix} d^3x,$$

где модуль вектора $\mathbf{k}$ определяется из условия $|\nabla\delta\rho|^2 = |\mathbf{k}|^2(\delta\rho)^2$. Достаточным условием того, что форма $\delta^2 H_c$ положительно определена, является требование положительности главных миноров матрицы во втором интеграле. Последнее выполнено при условии $|\mathbf{k}|^2 < k_+^2$, где

$$k_+^2 = \left. \frac{\Phi_{\rho\rho}^2 - \Phi_{\rho q}/\Phi_{qq}}{|\nabla\Phi_q|^2} \right|_e > 0 \tag{5.8}$$

и одновременно $\Phi_{qq}(\rho_e, q_e) > 0$. Из уравнений (5.7) и выражения для Φ получаем иную форму данного неравенства:

$$\delta_{qq} = B_q(\rho_e, q_e)/q_e = \frac{(\mathbf{u}_e \cdot [\nabla\rho_e \times \nabla q_e])}{|[\nabla\rho_e \times \nabla q_e]|^2} > 0. \tag{5.9}$$

Из этих рассуждений следует

Теорема 5.4 (H. D. Abarbanel et al. [1]). *Стационарное течение $\mathbf{u}_e$, ρ_e с условиями (5.8)–(5.9) остается формально устойчивым в норме $\delta^2 H_C$ до тех пор, пока для градиента вариации плотности выполняется ограничение $|\mathbf{k}|^2 < k_+^2$.*

Исследование нелинейной устойчивости начнем с вычисления функционала Арнольда:

$$A = H_C(\mathbf{u}_e + \delta\mathbf{u}, \rho_e + \delta\rho) - H_C(\mathbf{u}_e, \rho_e) - DH_C(\mathbf{u}_e, \rho_e)(\delta\mathbf{u}, \delta\rho),$$

который можно преобразовать к виду

$$A = \frac{1}{2}\int \{|\delta u + [\nabla\Phi_q \times \nabla\delta\rho]|^2 + (\nabla\Phi_q \cdot \nabla\delta\rho)^2 - |\nabla\varphi_q|^2|\nabla\delta\rho|^2 +$$

$$+ 2\hat{\Phi}(\delta\rho, \delta q)\}\, d^3x,$$

где положено

$$\delta q((\mathbf{Q}_e + \delta\mathbf{Q}) \cdot \nabla(\rho_e + \delta\rho)) - (\mathbf{Q}_e \cdot \nabla\rho_e),$$

$$\hat{\Phi}(\delta\rho, \delta q) = \Phi(\rho_e + \delta\rho,\ q_e + \delta q) - \Phi(\rho_e, q_e) -$$

$$- D\Phi(\rho_e,\ q_e) \cdot (\delta\rho, \delta q).$$

Следующий шаг состоит в подборе такой нормы в пространстве возмущений δu, $\delta\rho$, δq, в которой функционал A был бы непрерывным и обладал свойством

$$|A(\delta u, \delta\rho, \delta q)| \geq \|(\delta u, \delta\rho, \delta q)\|^2. \tag{5.10}$$

Анализ формальной устойчивости, проведенный выше, показывает, что неравенство (5.10) не может выполняться для произвольных (пусть и малых) возмущений плотности. Для выбора подходящего ограничения на вариацию плотности положим

$$|\nabla\delta\rho|^2 = |\mathbf{k}|^2(\delta\rho)^2 < k_+^2(\delta\rho)^2,$$

где граница возмущения k_+ будет определена позже. Введем новую функцию $\Psi(\rho, q) = \Phi(\rho, q) - |\nabla\Phi_q(\rho_e, q_e)|^2|\mathbf{k}|^2\rho^2/2$. Тогда, очевидно,

$$\Psi_{\rho\rho}(\rho_e, q_e) = \Phi_{\rho\rho} - |\nabla\varphi_q(\rho_e, q_e)|^2|\mathbf{k}|^2 > \Phi_{\rho\rho} - |\nabla\Phi_q(\rho_e, q_e)|^2 k_+^2,$$

$$\Psi_{qq}(\rho_e, q_e) = \Phi_{qq}(\rho_e, q_e), \quad \Psi_{\rho q}(\rho_e q_e) = \Phi_{\rho q}(\rho_e, q_e).$$

И, следовательно,

$$A(\delta u, \delta\rho, \delta q) \geq \frac{1}{2}\int \{|\delta u + [\nabla\Phi_q \times \nabla\delta\rho]|^2 +$$

$$+ (\nabla\Phi_q \cdot \nabla\delta\rho)^2 + 2\Psi(\delta\rho, \delta q)\}\, d^3x.$$

Для функции Ψ потребуем выполнения следующих условий выпуклости:

$$0 < \alpha < \Psi_{qq}(\rho_e, q_e),$$

$$0 < (\delta\rho, \delta q)\begin{pmatrix}\gamma & \beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta q\end{pmatrix} \le (\delta\rho, \delta q)\begin{pmatrix}\Psi_{\rho\rho} & \Psi_{\rho q} \\ \Psi_{\rho q} & \Psi_{qq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta q\end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

(где α, β, γ — некоторые константы, такие, что $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, вторые производные функции Ψ вычислены на стационарном потоке ρ_e, q_e).

Выберем для оценки возмущения норму

$$\|(\delta \mathbf{u}, \delta\rho, \delta q)\|^2 = \int \{|\delta\mathbf{u} + [\nabla\Phi_q \times \nabla\delta\rho]|^2 +$$

$$+ (\delta\rho, \delta q)\begin{pmatrix}\gamma & \beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta q\end{pmatrix}\} d^3x.$$

Тогда, при условиях (5.11), выполняется неравенство (5.10), и теорема об устойчивости будет доказана, если к условиям выпуклости (5.11) добавить еще условия, которые обеспечивают непрерывность функционала A в выбранной норме:

$$\Psi_{qq} \le \bar\alpha,$$

$$(\delta\rho, \delta q)\begin{pmatrix}\Psi_{\rho\rho} & \Psi_{\rho q} \\ \Psi_{\rho q} & \Psi_{qq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta q\end{pmatrix} \le (\delta\rho, \delta q)\begin{pmatrix}\bar\alpha & \bar\beta \\ \bar\beta & \bar\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\rho \\ \delta q\end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

где $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\gamma$ — некоторые новые константы.

Все вышеизложенное приводит к следующему утверждению:

Теорема 5.5 (H. D. Abarbanel et al. [1]). *Течение* $(\mathbf{u}_e, \rho_e)$, *определяемое функцией* Φ *с условиями (9.5), (9.6), остается устойчивым в определенной выше норме до тех пор, пока для градиента возмущения плотности* $\nabla\delta\rho$ *выполняется ограничение* $|\nabla\delta\rho|/|\delta\rho| < k_+$, *где*

$$k_+^2 = \frac{\Phi_{qq}\Phi_{\rho\rho} - (\Phi_{\rho q}^2 + \gamma\alpha - \beta^2)}{\Phi_{qq}|\nabla\Phi_q|^2}.$$

Доказанная теорема была использована для получения условий устойчивости конкретных стационарных потоков в цитированной выше работе H. D. Abarbanel et al. [1] (см. далее пп. 5.2.1 и 5.2.2).

5.2.1. Плоскопараллельные течения, зависящие от двух пространственных переменных

Рассмотрим класс течений вида

$$\mathbf{u}_e = (U(y, z), 0, 0)$$

в жидкости с плотностью $\rho_e(x, y, z) = \rho(z)$ (в дальнейшем, для простоты будем полагать $\rho_* = 1$). Давление определяется в этом случае формулой

$$p(z) = -g\int^{z} \rho(z)\, dz.$$

Функция Бернулли имеет вид

$$B(\rho_e, q_e) = U^2/2 + p + \rho g z,$$

при этом $q_e = -U_y \rho_z$. Если $\rho_z \neq 0$, то существует обратная функция $z = z(\rho)$, а при условии $U_{yy} \neq 0$ можно определить неявную функцию $y = y(q, z(\rho))$ из соотношения $q_e = -U_y \rho_z$. Тем самым B становится функцией двух переменных ρ_e и q_e, которые в дальнейшем будут обозначаться просто как ρ и q. Первое из условий устойчивости $0 < \alpha \leq \Phi_{qq} \leq \bar{\alpha} < \infty$ после вычисления неявных производных превращается в неравенство

$$0 < \alpha \leq U/(U_{yy}|\rho_z|^2) \leq \bar{\alpha} < \infty.$$

Для простоты дальнейших вычислений возьмем конкретные зависимости

$$\rho(z) = -rz, \quad U(y, z) = \lambda y^2/2 + \zeta z, \tag{5.13}$$

где λ, r, ζ — постоянные. После несложных вычислений получаем

$$\Phi(\rho, q) = \frac{q^4}{24\lambda^2 r^4} - \frac{\zeta\rho q^2}{2\lambda r^3} - \frac{\zeta^2 - qr}{2r^2}\rho^2 + qF(\rho),$$

где $F(\rho)$ — произвольная функция. Первое условие устойчивости эквивалентно неравенствам вида

$$0 < \alpha \leq U/\lambda r^2 \leq \bar{\alpha} < \infty,$$

которые верны, если $U_{yy} = \lambda > 0$, и функция $U(y, z)$ положительна в области $0 < a \leq y \leq b < \infty$, $0 < c \leq z \leq d < \infty$. Это заведомо выполнено, если $\zeta/\lambda > 0$. Выражение

$$\Phi_{qq} = \frac{y^2}{2r^2} + \frac{\zeta z}{\lambda r^2}$$

строго положительно в указанной области при том же условии $\zeta/\lambda > 0$. При достаточно малых, но не равных нулю значениях λ получаем

$$k_+^2 = \frac{gr/\zeta^2 - 1}{y^2 + z^2} + O(\lambda),$$

$$\Psi_{qq}\Psi_{\rho\rho} - (\Psi_{\rho q})^2 = -\frac{\zeta^2}{r^2}\left(1 - \frac{k^2}{k_+^2}\right)\left(\frac{gr}{\zeta^2} - 1\right),$$

что позволяет сделать следующий вывод (H. D. Abarbanel et al. [1]): стационарный поток (5.12), для которого $\zeta/\lambda > 0$ и $\mathrm{Ri} = gr/\zeta^2 > 1$, остается устойчивым в норме теоремы 5.5 до тех пор, пока выполняется неравенство $k^2 < k_+^2$. Это утверждение является трехмерным нелинейным вариантом известного условия Майлса — Ховарда (О. Р. Козырев, Ю. А. Степанянц [1]) устойчивости плоскопараллельных течений стратифицированной жидкости для плоских возмущений.

5.2.2. Устойчивость плоскопараллельных течений по отношению к трехмерным возмущениям

Модифицируем предыдущий пример и рассмотрим стационарное течение вида

$$\mathbf{u}_e(x, y, z) = (\gamma(y) + u(z), 0, 0), \quad \rho_e(x, y, z) = \rho(z). \tag{5.14}$$

Линейная устойчивость такого типа течений при $\gamma(y) = 0$ подробно изучалась в литературе (см., например, P. G. Drazin, W. H. Reid [1]; О. Р. Козырев, Ю. А. Степанянц [1]). Классический результат линейной теории устойчивости состоит в том, что достаточным условием устойчивости стационарных сдвиговых течений является выполнение неравенства

$$\mathrm{Ri} \equiv -\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}/(du/dz)^2 \geq 1/4.$$

В нелинейном случае для плоскопараллельных течений и плоских возмущений столь простого условия получить не удается. Если же в трехмерном случае положить $\gamma(y) = 0$, то получим $q_e = 0$. Это означает, что теоремы 5.4 и 5.5 применимы лишь в тривиальном случае $\mathbf{u}_e = 0$. Чтобы обойти это затруднение и получить аналог условия Майлса – Ховарда для нелинейной устойчивости плоскопараллельных течений с трехмерными возмущениями в работе H. D. Abarbanel et al. [1] предложена следующая схема: считаем, что изменение $\gamma(y)$ происходит очень медленно по y с масштабом L, много большим других характерных масштабов задачи. Предполагаем, что течение жидкости происходит в области

$$- L_1 \le x \le L_1, \quad - L_2 \le y \le L_2, \quad - D \le z \le 0$$

(L много больше L_1, L_2 и D). Как обычно, предполагаем выполнение граничных условий $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0$, $\rho = \mathrm{const}$ на всех участках границы. В дополнение будем считать решения периодическими по x и y, но L_1, L_2 считаем все же достаточно большими, чтобы периодичность слабо влияла на изменение потока в z-направлении. Положим

$$\gamma(y) = V_0 (1 + y/L + y^2/2L^2),$$

где дополнительно предположим, что $V_0 << |u(z)|$. Смысл всех сделанных предположений сводится к тому, что с физической точки зрения исследуемое течение близко к обычному плоскопараллельному потоку в полосе $- D \le z \le 0$. Используем для простоты приближение Буссинеска и положим $\rho_* = 1$. Считаем, что вращение отсутствует, т. е. $\mathbf{f} = 0$ (условие устойчивости при наличии вращения оказывается аналогичным – см. цитированную выше работу). Для вычисления $\Phi(\rho, q)$ необходимо выразить y и z как функции $\rho_e = \rho$ и $q_e = q$. Имеем

$$q = (\mathrm{rot}\, \mathbf{u}_e, \rho'_z \nabla z) = - \rho'_z (V_0/L)(1 + y/L)$$

и, следовательно,

$$B(\rho, q) = p + \rho z g + [u(z) + \gamma(y)]^2/2.$$

Тогда

$$\Phi(\rho, q) = - (p + \rho g z + u^2(z)/2) + \Phi_{qq}(\rho) q^2/2 + O(q^4).$$

При этом

$$\Phi_{qq} = \frac{\gamma(y) + u(z)}{\gamma_{yy}\rho_z^2}.$$

Для получения условий формальной устойчивости потока выразим $\delta^2 H_C$ через две независимые компоненты δu и $\delta\rho$. За независимые компоненты выберем $u_3 = (\delta u)_z$ и $\omega_3 = (\mathrm{rot}\,\delta u)_z$. Тогда

$$\delta^2 H_C = \int (u_3, \omega_3, \delta\rho) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \nabla^2/\nabla_\perp^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\nabla_\perp^2 + \rho_z^2\Phi_{qq} & \rho_z u_z \Phi_{qq}\partial_y \\ 0 & -\rho_z u_z \Phi_{qq}\partial_y & \Phi_{\rho\rho} - u_z^2\Phi_{qq}\partial_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ \omega_3 \\ \delta\rho \end{pmatrix} d^3x,$$

где $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\nabla^2 = \partial_z^2 + \nabla_\perp^2$, оператор обратный к $\nabla_\perp^2$ может быть выражен с помощью преобразования Фурье. Отметим, что в формуле остались только члены, существенные при сделанных предположениях. Так, например, слагаемое вида $(\delta u \cdot [\nabla\Phi_q \times \nabla\delta\rho])$, которое было причиной неустойчивости в теореме 5.4, вносит вклад только в элемент матрицы $(\omega_3, \delta\rho)$. Этот вклад по порядку величины меньше, чем от слагаемого Φ_{qq}, поэтому последнее оставлено в выражении для $\delta^2 H_C$, а первое отброшено. Далее, при выполнении граничных условий $u_3 = 0$, при $z = 0, -D$ собственные значения оператора $\nabla^2 / \nabla_\perp^2$ имеют вид

$$\lambda = \pi^2 n^2/k_\perp^2 D^2 + 1, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

и, очевидно, положительны. Для положительной определенности второй вариации достаточно, таким образом, чтобы матрица 2×2 в правом нижнем углу имела только положительные собственные значения. Для ее преобразования Фурье по переменным $(k_\perp, k_2)$ это означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1/k_\perp^2 + \rho_z^2\Phi_{qq} & ik_2\rho_z u_z\Phi_{qq} \\ -ik_2\rho_z u_z\Phi_{qq} & \Phi_{\rho\rho}^2 + k_2^2 u_z^2\Phi_{qq} \end{pmatrix}$$

должна иметь только положительные собственные значения при всех значениях $k_\perp$ и k_2. Условиями этого являются неравенства:

$$\Phi_{qq} = U/U_{yy}(\rho_z)^2 > 0$$

(напомним, что $U = \gamma(y) + u(z)$), а также

$$\Phi_{\rho\rho} > \max_{k_\perp k_2} \left\{ \frac{-k_2^2 u_z^2 \Phi_{qq}}{1 + k_\perp^2 \rho_z^2 \Phi_{qq}} \right\}.$$

Первое из этих условий дает обычный признак Рэлея, второе можно преобразовать, положив $N^2 = -\dfrac{g}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}$ и заметив, что

$$\Phi_{\rho\rho} = \frac{N^2(z)}{\rho_z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}u^2(z) + O(1/L^2).$$

Если $(u^2)_{\rho\rho}$ положительно, условие устойчивости примет вид $\mathrm{Ri}(z) > 1$, где $\mathrm{Ri}(z) = N^2(z)/\rho_z^2(u^2/2)_{\rho\rho}$. Такой же вид имеет условие нелинейной устойчивости. Из выражения для $\Phi_{\rho\rho}$ следует, в частности, что если производная $(u^2/2)_{\rho\rho}$ отрицательна и достаточно велика по модулю, то стационарный поток может быть устойчивым, даже при условии $\rho_z > 0$ (неустойчивая стратификация). Этот эффект не проявился в предыдущем примере, так как там функция u зависела линейно от z. Модель движения жидкости, в которой исключаются большие значения градиента вариации плотности и, следовательно, условия нелинейной и формальной устойчивости выглядят более естественно, построена и изучена в работе H. D. Abarbanel et al. [1], пункт 8.

Глава 6

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

6.1. Течения с разрывами завихренности

До сих пор во всех рассуждениях предполагалось, что основные физические величины (скорость, завихренность, давление) непрерывны. В работе В. А. Владимирова [6] результаты гл. 1–3 обобщены на случай течений с разрывами завихренности. Рассматривается плоское течение в криволинейном кольце D, разбитом на две части замкнутой кривой Г. Стационарное решение обычных уравнений гидродинамики обозначим $\mathbf{u}_e$ (жидкость предполагается однородной по плотности и несжимаемой). Как и ранее, ψ_e означает функцию тока, ω_e – завихренность. Предполагается, что функция $\mathbf{u}_e$ непрерывна, а ω_e терпит разрыв на кривой Г. Линия разрыва является одной из линий тока и разделяет область на два кольца D_+ и D_-. При наложении возмущения $\mathbf{u}$ линия разрыва перемещается в положение Γ^*. После линеаризации исходной системы уравнений из нее можно выделить следующий интеграл:

$$\delta^2 H_C = \int\limits_D E\, dx^2 - [\omega_e] \int\limits_{\partial\sigma} Q\, \eta^2\, ds, \tag{6.1}$$

где $E = |\mathbf{u}|^2 + \omega^2 d\psi_e/d\omega_e$, $[\omega_e]$ – скачок завихренности, $Q = |\mathbf{u}_e|^2$, η – нормальное смещение линии разрыва (см. п. 5.1). Выражение (6.1) модифицируется естественным образом, если ω_e кусочно-постоянна и интеграл (6.1) дает положительно определенную квадратичную форму, если $\omega'_e > 0$ в D_+ и D_-, а $[\omega_e] < 0$ (это значит, что $\omega_e(\psi_e)$ нарастает с увеличением ψ_e). Аналогично для кусочно-постоянной функции ω_e условием устойчивости является ее монотонное нарастание.

Для плоскопараллельного течения область D есть полоса $0 < y < L$, поле скорости имеет вид $u_e = (U(y, 0)$, на участках непрерывности $\omega_e = - U_y$, в конечном числе точек y_n завихренность ω_e имеет конечные скачки $[\omega_e]_n$. Обобщением условия устойчивости является, таким образом, условие того, что $\omega_e(y)$ есть монотонная функция от y.

Для течений с круговыми линиями тока область течения представляет собой кольцо $R_1 < r < R_2$, а u имеет компоненту по θ, зависящую от r: $u_e = (0, U(r))$, завихренность $\omega_e(r)$ есть кусочно-непрерывная функция. Условием устойчивости и в этом случае также является монотонность изменения функции $\omega_e(r)$. В частности, линейно устойчивым в метрике (6.1) является вихрь Рэнкина:

$$U(r) = \omega_0 \cdot \begin{cases} r & \text{при } 0 < r < a, \\ a^2/r & \text{при } a < r < \infty. \end{cases}$$

Для плоскопараллельных течений с кусочно-линейным профилем скорости $U(y)$, как показано в работе В. А. Владимирова [6], модифицированный интеграл (6.1) сохраняется и в силу нелинейных уравнений. Это означает нелинейную устойчивость такого потока при условии монотонности $\omega_e(y)$.

Монотонность $\omega_e(r)$ служит также условием нелинейной устойчивости течений с круговыми линиями тока и кусочно-постоянной завихренностью. Устойчивость имеет место в норме

$$\|u\| = \sum r_n^2 [\omega_e]_n \oint_{R_n} \eta^2 d\theta$$

в классе возмущений, для которых $\omega = 0$. Вихрь Рэнкина тем самым "*нелинейно*" *устойчив* (В. А. Владимиров [6]). Отметим попутно, что подобная же норма использовалась в более ранней работе В. А. Гордина и В. И. Петвиашвили [2] при исследовании другой задачи об устойчивости.

6.2. Квазигеострофический поток

Результаты В. И. Арнольда (гл. 1–3) могут быть обобщены различными способами также и на случай плоских движений на вращающейся сфере; такая работа была проделана многими авторами (Л. А. Дикий [1], [2], [3]; Л. А. Дикий и М. В. Курганский [1]; В. А. Гордин [1]; В. А. Гордин и В. И. Петвиашвили [1], [2]; D. G. Andrews [1]; H. D. Holm et al. [2]; M. E. McIntyre and T. G. Shepherd [1], G. E. Swaters [1], В. П. Дымников и А. Н. Филатов [1] и др.). Однако некоторые из перечисленных работ (о них речь пойдет ниже) впоследствии подвергались справедливой критике, ибо содержали либо необоснованные, либо вовсе неверные результаты.

Простейшая модель движения с учетом вращения приводит к уравнениям (ср. с уравнениями (1.2))

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0, \tag{6.2}$$

где ψ — функция тока плоского течения на сфере, q — обобщенная завихренность: $q = \Delta\psi + f(x, y)$, f представляет собой комбинацию из параметра Кориолиса и параметра, характеризующего топографию дна (жидкость предполагается однородной и несжимаемой). Подобный подход применим для описания движения воздушных масс в атмосфере и крупномасштабных течений в океане. Кроме того, аналогичные уравнения описывают динамику дрейфовых волн в плазме (см. В. И. Петвиашвили и О. А. Похотелов [1], [3]). В работе Л. А. Дикого [1] методом Арнольда доказана *формальная устойчивость* стацинарных течений (зональных потоков) воздуха в атмосфере Земли. Стационарный поток ψ_e задается функциональной зависимостью между функцией тока и обобщенной завихренностью $\psi_e = \Psi(q_e)$. Интегралы движения имеют вид

$$2H = \int |\nabla\psi|^2\, ds, \quad C = \int \Phi(q)\, ds,$$

где Φ — произвольная функция, интеграл берется по поверхности Земли. Для выбранного стационарного потока первая вариация функционала $H_C = H + C$ обращается в нуль при условии $\Phi' = \Psi$. Для второй вариации получим выражение

$$2\delta^2 H_C = \int \{(\nabla\delta\psi)^2 + \Phi''(q_e)(\nabla^2\delta\psi)^2\}\, ds,$$

из которого следует утверждение о формальной устойчивости. В разд. 6.3 описано обобщение этого результата на многослойный квазигеострофический поток и приведена его точная нелинейная формулировка. Условием нелинейной устойчивости является выполнение неравенств

$$0 < c_1 < \Psi' < c_2 < \infty,$$

что полностью аналогично теореме Арнольда 2.

Движение воздушных масс в атмосфере Земли в поле силы тяжести с учетом изменения плотности описывается в квазигеострофическом приближении на β-плоскости уравнением (6.1), в котором обобщенная завихренность q имеет следующее выражение:

$$q = \Delta\psi + \beta y + f_0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{6.3}$$

где $\rho(z)$ — распределение плотности, ψ — функция тока, которая задает зональную (x) и меридиональную (y) компоненты скорости (на каждом слое z функция ψ удовлетворяет обычным уравнениям (2.2)), $f = f_0 + \beta y$ — параметр Кориолиса, N — частота Брента — Вяйсяля. Анализ формальной устойчивости стационарных течений в этом случае был проведен в работе Л. А. Дикого и М. В. Курганского [1]). Соответствующее утверждение о нелинейной устойчивости доказано в работе M. E. McIntyre and T. G. Shepherd [1]. Для стационарного потока q_e на каждом слое $z =$ const имеет место функциональная зависимость $\psi_e = \Psi(q_e)$ (функция Ψ меняется с изменением z). К уравнениям движения добавляются граничные условия на нижнем $z = z_1$ и верхнем $z = z_2$ слоях. Условие нелинейной устойчивости, как и следовало ожидать, получается в виде

$$0 < c_1 < \Psi' < c_2 < \infty \quad \text{при} \quad z_1 \le z \le z_2$$

(плюс еще некоторые условия на граничных слоях). Это снова аналог 2-й теоремы Арнольда. В работе M. E. McIntyre and T. G. Shepherd [1] получен аналог 3-й теоремы Арнольда: стационарное течение устойчиво, если $0 < c_1 < -\Psi' < c_2 < \infty$ при $z_1 \le z \le z_2$, $\delta\psi = 0$ на слоях $z = z_1$, z_2 и имеет место неравенство $c_1 k_0^2 > 1$, где k_0 — наименьшее собственное значение краевой задачи

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -k^2\psi$$

с нулевыми граничными условиями.

Другая модель атмосферы, часто возникающая в задачах прогноза погоды, задается уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla(gH) + [\mathbf{u}\times\Omega\nabla z],$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}H) = 0, \tag{6.4}$$

где H — эффективная глубина атмосферы, $\Omega = 2\omega_0 \sin\alpha$, ω_0 — частота вращения Земли, α — широтный угол, скорость $\mathbf{u}$ считается параллельной поверхности Земли. В работе В. А. Гордина [1] вычислены простейшие стационарные решения уравнений типа (6.4) для мелкой воды и баротропной модели атмосферы и исследована их формальная устойчивость. Условие устойчивости получается из условия положительной определенности второй вариации функционала $H_C = H + C$ при подходящем выборе C.

В атмосфере Земли наблюдаются вихри, характерный размер которых много больше глубины атмосферы. В работе В. И. Петвиашвили и В. В. Янькова [1] для изучения подобных явлений предложена двухслойная модель атмосферы, в которой наблюдаемые вихри описываются системой уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -g\nabla(H_1 + H_2) + [\mathbf{u}_1\times\Omega\nabla z],$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_1 H_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -g\nabla(\rho_1 H_1/\rho_2 + H_2) + [\mathbf{u}_2\times\Omega\nabla z],$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}_2 H_2) = 0. \tag{6.5}$$

Здесь H_1, H_2 — толщины верхнего и нижнего слоев атмосферы; ρ_1, ρ_2 — их плотности, остальные параметры имеют тот же смысл, что и в (6.4). При дополнительных предположениях, упрощающих анализ, система (6.5) может быть приведена к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(l^2 h - r_i^2\nabla^2 h) - \frac{v_i}{R}\frac{\partial}{\partial\Phi}(h + h^2/2) =$$

$$= 2\omega_0 r_i^4([\nabla z\times\nabla h]\cdot\nabla\nabla^2 h)/l, \tag{6.6}$$

где $l = \sin\alpha$, h — относительное смещение поверхности раздела слоев; изменения толщин слоев выражаются через h по формуле

$$h_1 = - h_2 = hH \frac{\rho}{\delta\rho} \frac{H_2 + H_1}{H_2 - H_1},$$

где $H = \frac{\delta\rho}{\rho} \frac{H_{10}H_{20}}{H_{10} + H_{20}}$ и $r_i^2 = \frac{gH}{4\omega_0^2 l^2}$.

В работе В. И. Петвиашвили и В. В. Янькова [1] показано, что уравнение (6.6) имеет солитонное решение, которое представляет собой уединенную волну, распространяющуюся по широте против вращения планеты со скоростью, чуть большей скорости линейных волн. Это решение представимо в виде

$$h = h(\Phi + Vt/R, \alpha) \quad \text{и} \quad r_i^2 \nabla^2 h = A^2 h - h^2/2,$$

где $A^2 = l^2 - v_i/V$. Для исследования *формальной устойчивости* использовался интеграл

$$H_C = \int \{ h^2 + (\nabla h)^2 - \frac{l^2 h^3}{3r_i^2} \} d^2 r.$$

На солитонном решении этот функционал имеет минимум, что позволяет сделать вывод о формальной устойчивости такого решения. Для доказательства нелинейной устойчивости необходимо продолжить исследование функционала и выбрать норму, в которой будет оцениваться уклонение возмущения от солитонного решения. Отметим также, что утверждение о наличии минимума функционала на некотором стационарном решении в цитируемой работе выводится из его ограниченности снизу, при некотором условии связи. Подобное утверждение для бесконечномерных динамических систем представляется недостаточно обоснованным (подробнее об этом см. в гл. 7).

Волны Россби в атмосфере и океане описываются (в квазигеострофическом приближении) уравнением (6.2), в котором обобщенная завихренность q имеет вид $q = \nabla^2 \psi - \psi - \beta y$, где $\beta \ll 1$ — отношение дрейфовой скорости (скорости Россби) к скорости поверхностных гравитационных волн. В работе В. А. Гордина и В. И. Петвиашвили [1] для этого случая получены солитонные решения и исследована их *формальная устойчивость*. Функция тока ψ солитонного решения определяется из уравнения

$$\nabla^2 \psi - \psi - \beta y = h[\tilde{x}^2 + y^2],$$

где $h(\xi)$ — некоторая монотонно убывающая функция при $\xi \to \infty$, $\tilde{x} = x - \beta t$. Для исследования устойчивости строится функционал

$$H_C = \int_{R^2} \{[(x - \beta t)^2 + y^2] q + f(q)\} \, dx \, dy,$$

причем функция $f(q)$ выбрана так, чтобы $f'' < 0$, а h была обратной к f'. Тогда $\delta^2 H_C = \int f''(q) \, dx \, dy$, и условие формальной устойчивости эквивалентно возможности выбрать f так, чтобы $f'' < 0$. В описываемой ситуации обобщенная завихренность q считается непрерывной, однако в общем случае q может иметь разрыв на некоторой кривой. Ранее солитонные решения несколько иного типа, в том числе и с разрывами завихренности, были найдены в работах В. Д. Ларичева и Г. М. Резника [1], G. R. Flierl et al. [1]. В работе В. А. Гордина и В. И. Петвиашвили [2] исследована *формальная устойчивость* некоторых из них (солитонных вихревых течений с разрывами завихренности на движущейся окружности радиуса R). Уравнение (6.2) с $q = \nabla^2 \psi - \psi - \beta y$ допускает точные решения с непрерывной функцией тока ψ_s, которые представляют собой солитоны, передвигающиеся с постоянными скоростями на плоскости. Завихренность q солитона имеет разрыв на движущейся окружности радиуса R. Решение ψ_s выражается через функции Бесселя и Макдональда. Для исследования устойчивости такого солитона использовался функционал

$$H_C = \int_{D_i} f(q) \, dx \, dy + \int_{D_a} [h(q) - \tilde{h}(\beta y)] \, dx \, dy -$$

$$- \frac{1}{2} \int [(\nabla\psi)^2 + \psi^2 - y\psi] \, dx \, dy,$$

где D_i — внутренность, а D_a — внешность круга радиуса R,

$$f = \frac{q^2/2}{1 + k^2} + f_0, \quad h = \frac{Vq^2}{2\beta} + bq,$$

f_0, k, V, b — константы. Функции f и h подобраны таким образом, чтобы δH_C была равна нулю на найденном точном решении ψ_s. Заключение об устойчивости (в данном случае речь может идти о формальной устойчивости) авторы делают на основе исследования второй вариации $\delta^2 H$. Из этого исследования делается вывод: уединенный вихрь (так называемый райдер) устойчив, если

$u/\beta > 0$ и скачок завихренности Q на границе ядра вихря достаточно велик. Такой вывод противоречит известным физическим представлениям о том, что течения с плавными профилями скорости более устойчивы. В последующих работах С. В. Музылева и Г. М. Резника [1, 2], а также J. Nycander [1] показано строго математически, что эти выводы об устойчивости не верны. Причина ошибки обсуждается ниже в заключении. Таким образом, вопрос об устойчивости вихрей Ларичева – Резника остается открытым. (Отметим, что имеющиеся косвенные результаты работ В. Д. Ларичева и Г. М. Резника [2] и Ю. А. Степанянца и А. Л. Фабриканта [1] говорят в пользу того, что эти вихри неустойчивы. В первой из упомянутых работ с помощью численных расчетов рассматривалось столкновение двух вихрей с ненулевым прицельным параметром, после чего вихри разрушались. Во второй работе найдены радиационные силы, действующие на вихри, движущиеся под углом к параллели, и показано, что такое движение сопровождается "черенковским излучением" волн Россби.)

6.3. Многослойный квазигеострофический поток

Приведем точную формулировку теоремы об устойчивости многослойного квазигеострофического потока. Линейная и формальная устойчивость стационарных многослойных квазигеострофических потоков изучалась в работах Л. А. Дикого [1], W. Blumen [1], S. Pierini and F. Vulpiani [1], R. Benzi at al. [1], D. G. Andrews [1], где найден достаточный набор сохраняющихся функционалов, описаны стационарные течения, вычислены первая и вторая вариации основного функционала H_C. Эти исследования дополнены анализом нелинейной устойчивости в духе теоремы Рэлея – Арнольда в обзоре D. D. Holm et al. [2].

Рассматривается стратифицированная жидкость, состоящая из n однородных слоев с постоянными плотностями $\rho_1 < \rho_2 \ldots < \rho_n$, при этом наименьшую плотность имеет верхний слой. Поле скоростей имеет нулевую составляющую в вертикальном направлении, а в горизонтальном направлении движение удовлетворяет послойно согласованным уравнениям течения идеальной несжимаемой жидкости в поле внешних сил с вращением. Обозначим через ψ_i функцию тока i-го слоя и определим обобщенную завихренность этого слоя равенством

$$\omega_i = \nabla^2\psi_i + \sigma_i \sum T_{ij}\psi_j + f_i,$$

где $\sigma_i = f_0^2[(\rho_{i+1} - \rho_i)/\rho_0] D_i/g$, $\quad f_i = f_0 + \beta y$,

$$i = 1, 2, ..., n-1, \quad f_n = f_0 + \beta y + f_0 d(y)/D_N,$$

$$f_0 = 2\Omega \sin\alpha, \quad \beta = (2\Omega\cos\alpha)/R,$$

матрица T трехдиагональна и имеет вид

$$T = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ & & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

g — ускорение свободного падения, $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n)/n$ — средняя плотность, D_i — средняя ширина i-го слоя, R — радиус Земли, Ω — угловая скорость вращения среды, α — относительная широта и $d(y)$ есть функция, описывающая профиль дна. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + J(\psi_i, \omega_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{6.7}$$

Граничные условия: $\psi_i|_\Gamma = \text{const}$, $\nabla\psi_i \to 0$ при стремлении x, y к бесконечности. Пространство возмущений состоит из наборов $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ с условиями согласования, которые обеспечивают гладкость решения (из класса C^1).

Сохраняющиеся функционалы имеют следующий вид:

— энергия потока

$$H = \frac{1}{2}\int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i}(\nabla\psi_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \right\} dx\, dy,$$

— циркуляции скорости

$$\kappa_{ij} = -\int_{\Gamma_j} (\nabla\psi_i \cdot \mathbf{n})\, ds,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности;

— богатый набор казимиров

$$C_i(\omega_i) = \int \Phi_i(\omega_i)\, dx\, dy.$$

Положим, как обычно, $H_C = H + \sum C_i + \sum \lambda_{ij}\kappa_{ij}$. Для стационарного решения (6.7) получим

$$\psi_i^e = \Psi_i(\omega_i^e), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Это решение будет критической точкой H_C при выполнении следующих условий: $\Phi'_i = \Psi_i$, $\lambda_{ij} = (\psi_i^e/\sigma_i)/\partial D_j$. Так же, как в гл. 3, здесь имеет место

Теорема 6.1. *Стационарное течение* $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ *устойчиво по Ляпунову, если выполняется условие*

$$0 < c_2 \le \Psi'_i(\zeta) \le C_2 < \infty.$$

Норма, в которой течение получается устойчивым, определяется равенством

$$\|\delta\psi\| = \int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nabla\delta\psi_i)^2}{\sigma_i} + \sum_{i=1}^{n-1} (\delta\psi_i - \delta\psi_{i+1})^2 + c_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(\delta\omega_i)^2}{\sigma_i} \right\} dx\, dy.$$

Отметим, что условие формальной устойчивости в этом случае аналогично первой теореме Арнольда: $\Psi'_i(\omega_i^e) > 0$.

Глава 7

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Как следует из приведенных здесь результатов, простое перенесение второго метода Ляпунова на случай бесконечномерных динамических систем приводит к распространенным заблуждениям и ошибкам, поэтому подытожим еще раз основные выводы данной работы.

1. Как отмечалось во введении, наличие минимума функции Ляпунова в точке стационарного решения еще не является условием устойчивости. Достаточным условием устойчивости в норме пространства x (при правильном применении метода Ляпунова — Арнольда) является построение такой функции $V(u)$, чтобы:

1) множества $\{V(u) - V(u_e) < C\}$ образовывали базу окрестностей u_e в нормированном пространстве X;

2) $\dfrac{dV(u(t))}{dt} \leq 0$ вдоль решения $u(t)$ динамической системы.

При выборе в качестве V интеграла движения второе условие выполнено автоматически, а для выполнения первого достаточно потребовать, например, чтобы

$$c_1 \|\delta u\|^2 \leq |V(u_e + \delta u) - V(u_e)| \leq c_2 \|\delta u\|^2,$$

где c_1, c_2 — некоторые константы (см. В. П. Дымников, А. Н. Филатов [1]). Первое условие в бесконечномерном пространстве не вытекает, вообще говоря, из наличия строгого экстремума $V(u)$ в точке u_e. Действительно, нетрудно построить простой пример в пространстве $L_2[0, \pi]$, когда некоторый функционал $V(u)$ имеет строгий минимум в точке $u_e = 0$ и $V(0) = 0$, но множества $\{V(u) < C\}$ не образуют базу окрестностей нуля.

Пример: в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$ рассмотрим ортогональный базис $x_n(t) = \cos(nt)$ и для любого $u = \sum \alpha_n x_n$ из

$L_2[0, \pi]$ положим $V(u) = \sum \alpha_n^2/n$. Тогда $V(u)$ имеет строгий минимум в точке $u = 0$, но при этом в каждом множестве $\{u: V(u) < C\}$ имеются элементы из $L_2[0, \pi]$, для которых $\|u\| > 1$.

Тем не менее бытует распространенное заблуждение, что доказательство устойчивости гидродинамических течений сводится к исследованию второй вариации $\delta^2 H$ выбранного функционала. Но условие $\delta^2 H(u_e) > 0$ недостаточно даже для минимума, и уж тем более оно не может быть условием нелинейной устойчивости. Именно поэтому большая часть результатов по "нелинейной" устойчивости отнесена здесь к так называемой формальной устойчивости, которая в действительности является частью линейной теории устойчивости, поскольку $\delta^2 H(u_e)$ служит интегралом движения линеаризованной системы. Вместе с тем, условие $\delta^2 H(u_e) > 0$ означает, что можно в принципе подобрать некоторую норму, в которой течение будет устойчиво. Будет ли эта норма иметь какой-нибудь физический смысл, сказать трудно.

2. Исследование на минимум функционала H или $\delta^2 H$ нередко проводится недостаточно корректно, что приводит к результатам, противоречащим физическим представлениям о течении. Наиболее просты ситуации, в которых этот функционал H состоит из суммы положительных слагаемых или из разности двух слагаемых, одно из которых заведомо больше другого (теоремы Арнольда). Иной подход связан с попытками найти минимум этого функционала и показать, что он неотрицателен. При этом сразу же возникает вопрос о существовании минимума. В работе В. И. Петвиашвили и В. В. Янькова [1] это сделано на основе ограниченности функционала снизу (в духе работы В. Е. Захарова и Е. А. Кузнецова [1]). Однако хорошо известно, что ограниченная непрерывная функция может и не достигать минимума на замкнутом множестве, если это множество не является компактным. В бесконечномерных пространствах окрестность точки u_e (где исследуется функционал $\delta^2 H$) никогда не является компактной, и тем самым вопрос о существовании минимума остается открытым. Без решения этого вопроса повисают в воздухе дальнейшие рассуждения, связанные с проверкой значений функционала на его возможных точках экстремума. (Например, функция $f(x) = x^3/(8 - x^3)$ ограничена снизу на отрезке $[-1, 1]$, непрерывна на нем и имеет на этом отрезке лишь одну стационарную точку $x = 0$, в которой $f(x) \geq 0$. Но это вовсе не означает, что

$f(x) \geq 0$ при $x \in [-1, 1]$, так как очевидно, что $f(x) < 0$ при $x < 0$). Именно такого рода ошибка была совершена в работе В. А. Гордина и В. И. Петвиашвили [1], а также в некоторых других работах. Подробный обзор ошибок с конкретными контрпримерами можно найти в работах С. В. Музылева и Г. М. Резника [1, 2], а также J. Nycander [1].

В заключение скажем несколько слов об условной устойчивости. Приведенные в обзоре результаты, относящиеся к этой проблеме, можно разделить на две группы. Часть из них (теоремы Арнольда, а также теорема Владимирова о течениях с винтовой симметрией) получены в предположении, что рассматриваются не все возмущения, а лишь некоторые, фиксированные заранее из каких-либо соображений. Другая группа результатов (Abarbanel et al. [1]) относится к устойчивости течения (в заданной норме) до тех пор, пока одна из характеристик течения (например, градиент плотности для стратифицированной жидкости) остается в фиксированных заранее пределах. Представляет интерес попытка авторов таких утверждений изменить физическую модель таким образом, чтобы исключить неконтролируемый рост отмеченных параметров (Abarbanel et al. [1]). Однако конкретные результаты в этом направлении пока не известны.

Работа выполнена благодаря финансовой поддержке, полученной от Международного научного фонда (грант № R8T000), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94–05–16759–а), Госкомвуза России и от Европейского фонда INTAS (грант № 93–1373).

Авторы благодарят рецензентов В. А. Гордина и А. Д. Юнаковского за многочисленные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

Арнольд В. И. [1] Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 5. С. 975–978 (РЖМат, 1966, 3Б390).

Арнольд В. И. [2] Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, № 5. С. 846–851 (РЖМат, 1966, 5Б357).

Арнольд В. И. [3] Об одной априорной оценке гидродинамической теории устойчивости // Изв. вузов. Математика. 1966. № 5. С. 3–5 (РЖМат, 1967, 2Б354).

Арнольд В. И. [4] Гамильтонова природа эйлеровых уравнений динамики твердого тела и идеальной жидкости // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 3. С. 225–226 (РЖМат, 1969, 10Б234).

Арнольд В. И. [5] Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей // Прикл. мат. и мех. 1972. Т. 36, № 2. С. 255–262 (РЖМех, 1972, 8Б567).

Арнольд В. И. [6] Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с. (РЖМат, 1975, 6Б433).

Безденков С. В. [1] Интегралы вмороженности и устойчивость трехмерных течений // Ж. эксп. и теор. физ. 1990. Т. 98, № 6. С. 1921–1931.

Владимиров В. А. [1] О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1985. № 3. С. 58–68.

Владимиров В. А. [2] Вариационный принцип и априорная оценка устойчивости для состояния покоя непрерывно-стратифицированной жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1985. Вып. 72. С. 12–18 (РЖМех, 1986, 7Б21).

Владимиров В. А. [3] Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1986. № 3. С. 70–78 (РЖМех, 1986, 10Б23).

Владимиров В. А. [4] О приложениях законов сохранения к получению условий устойчивости стационарных течений идеальной жидкости // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1987. № 3. С. 36–45 (РЖМех, 1987, 10Б30).

Владимиров В. А. [5] О неустойчивости равновесия неоднородной жидкости в случаях, когда потенциальная энергия не является минимальной

// Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1988. Т. 52, № 3. С. 415–422 (РЖМех, 1988, 10Б17).

Владимиров В. А. [6] Условия устойчивости течений идеальной жидкости с разрывами вихря // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1988. № 1. С. 83–91 (РЖМех, 1988, 6Б18).

Гордин В. А. [1] Об устойчивости по Ляпунову простейших стационарных решений прогностических систем // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1984. Т. 20, № 5. С. 356–363 (РЖ Геофизика, 1984, 10Б246).

Гордин В. А. [2] Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. Т. 1, 2. (РЖ Геофизика, 1987, 5Б22К).

Гордин В. А., Петвиашвили В. И. [1] Устойчивые солитонные решения в резонансном зональном потоке // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1984. Т. 20, № 7. С. 645–648 (РЖМех, 1985, 3Г640).

Гордин В. А., Петвиашвили В. И. [2] Квазигеострофические вихри, устойчивые по Ляпунову // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. С. 857–859 (РЖМех, 1986, 5Г355).

Гринфельд М. А. [1] Устойчивость плоских криволинейных течений идеальной баротропной жидкости // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1981. № 5. С. 19–25 (РЖМех, 1982, 1Б5).

Гринфельд М. А. [2] *Grinfeld M. A.* Variational principles and stability of stationary flows of barotropic ideal fluid // Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1984. V. 28. P. 31–54.

Дикий Л. А. [1] К нелинейной теории гидродинамической устойчивости // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, № 5. С. 852–855 (РЖМех, 1966, 8Б585).

Дикий Л. А. [2] О нелинейной теории устойчивости зональных течений // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1965. Т. 1, № 11. С. 1117–1122 (РЖМат, 1966, 6Б810).

Дикий Л. А. [3] Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с. (РЖМех, 1976, 8Б902К).

Дикий Л. А., Курганский М. В. [1] Интегральный закон сохранения для возмущений зонального потока и его приложения к исследованию устойчивости // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1971. Т. 7, № 7. С. 939–945 (РЖ Геофизика, 1972, 1Б301).

Дымников В. П., Филатов А. Н. [1] Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 236 с.

Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. [1] О трехмерных солитонах // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, № 2. С. 594–596.

Зубов В. И. [1] Устойчивость движения (Методы Ляпунова и их применение). М.: Высшая школа, 1973. 270 с. (РЖМат, 1973, 12Б272К).

Козырев О. Р., Степанянц Ю. А. [1] Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа / ВИНИТИ. 1991. Т. 25. С. 3–89.

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. [1] Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963. Т. 1. 583 с. (РЖМех, 1963, 12Б348К).

Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. [1] *Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V.* On the topological meaning of canonical Clebsch variables // Phys. Rev. Lett. 1980, 77A. P. 37–38.

Ларичев В. Д., Резник Г. М. [1] О двумерных уединенных волнах Россби // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 5. С. 1077–1080 (РЖМех, 1977, 3Б41).

Ларичев В. Д., Резник Г. М. [2] О столкновении двумерных уединенных волн Россби // Океанология. 1983. Т. 23, № 5. С. 725–734.

Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. [1] Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с. (РЖМех, 1966, 11А154К).

Музылев С. В., Резник Г. М. [1] Об устойчивости двумерных уединенных волн Россби // Изв. РАН. ФАО. 1992. Т. 28, № 5. С. 522–528.

Музылев С. В., Резник Г. М. [2] *Muzylev S. V., Reznik G. M.* On proofs of stability of drift vortices in magnetized plasmas and rotating fluids // Phys. Fluids B. 1992. V. 4. P. 2841–2844.

Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. [1] Уединенные вихри в плазме // Физика плазмы. 1986. Т. 12, № 9. С. 1127–1144.

Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. [2] Уравнения мелкой бароклинной атмосферы // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 856–858 (РЖМех, 1988, 11Г269).

Петвиашвили В. И., Яньков В. В. [1] Двухслойные вихри во вращающейся стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 825–826 (РЖМех, 1983, 3Г421).

Седенко В. И., Юдович В. И. [1] Устойчивость стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей // Прикл. мат. и мех. 1977. Т. 42, № 6 (РЖМех, 1978, 11Б8).

Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л. [1] Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // УФН. 1989. Т. 159, № 1. С. 83–123.

Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л. [2] Особенности "черенковского" излучения дрейфовых волн в гидродинамике и в плазме // ЖЭТФ, 1992. Т. 102, № 5. С. 1047–1058.

Фильченков С. Е., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. [1] Неустойчивость периодических решений нелинейного уравнения Шредингера // Физика плазмы. 1987. Т. 13, № 8. С. 961–966.

Юдович В. И. [1] О потере гладкости решений уравнения Эйлера со временем // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1974. Вып. 16. С 71–78 (РЖМех, 1975, 1Б478).

Юдович В. И. [2] Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости // Издательство Ростовского университета, 1984. 186 с. (РЖМех, 1984, 8Б15К).

Abarbanel H. D. I, Holm D. D, Marsden J. E, Ratiu T. [1] Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1986. A318. P. 349–409.

Andrews D. G. [1] On the existence of non zonal flows satisfying sufficient conditions for stability // Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1983. V. 28. P. 243–256.

Ball J. M., Marsden J. E. [1] Quasiconvexity, second variations and nonlinear stability in elasticity // Arch. Rat. Mech. Ann. 1984. V. 86. P. 251–277.

Benzi R., Pierini S., Vulpiani A., Salusti E. [1] On nonlinear hydrodynamics stability of planetary vortices // Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn. 1982. V. 20. P. 293–306.

Blumen W. [1] On the stability of quasi-geostrophic flow // J. Atmos. Sci. 1968. V. 25. P. 929–931.

Blumen W. [2] Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // J. Fluid Mech. 1970. V. 40, № 4. P. 769–781.

Boyd J. P. [1] The continuous spectrum of linear Couette flow with the beta effect // J. Atmos. Sci. 1983. V. 40. P. 2304–2308.

Charney J. G. [1] The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current // J. Meteor. 1947. V. 4. P. 135–163.

Drazin P. G., Reid W. H. [1] Hydrodynamic stability // Cambridge Univ. Press. 1981. 525 p.

Farrell B. E. [1] The initial growth of disturbances in a baroclinic flow // J. Atmos. Sci. 1982. V. 39. P. 1663–1686.

Flieerl G. R., Larichev V. D., McWilliams J. C., Reznik G. M. [1] The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies // Dyn. Atmos. and Oceans. 1980. V: 5, P. 1–41.

Holm D. D. [1] Stability of planar multifluid plasma equilibria by Arnold's method // Cont. Math. AMS. 1984. V. 28. P. 25–50.

Holm D. D., Marsden J., Ratiu T. [1] Nonlinear stability of the Kelvin - Stuart cat's eyes // Proc. AMS-SIAM Summer Confer. Santa-Fe. 1984.

Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T., Weinstein A. [1] Nonlinear stability conditions and a priori estimates for barotropic hydrodynamics // Phys. Rev. Lett. 1983. 98A. P. 15–21.

Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T., Weinstein A. [2] Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys. Reports. 1985. V. 123. № 1–2. P. 3–113.

Long R. R. [1] Some aspects of the flow of stratified fluids. A theoretical investigation // Tellus, 1953. V. 5. P. 42–57.

McIntyre M. E., Shepherd T. G. [1] An exact local conservation theorem for finite-amplitude disturbances to nonparallel shear flows with remarks on Hamiltonian structure and on Arnold's stability theorem // J. Fluid Mech. 1987. V. 181. P. 527–565.

Nycander J. [1] Refutation of stability proofs for dipole vortices // Phys. Fluids A, 1992. V. 4. P. 467–476.

Olver P. J. [1] A nonlinear hamiltonian structure for the Euler equations // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 89. P. 233–250 (РЖМех, 1983, 3Б18).

Olver P. J. [2] Applications of Lie groups to differential equations. Перевод: Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

Pierini S., Vulpiani A. [1] Nonlinear stability analysis in multi-layer quasigeostrophic systems // J. Phys. A: Math. and Gen. 1981. V. 14. P. L203–L207.

Shepherd T. G. [1] Time development of small disturbances to plane Couette flow // J. Atmos. Sci. 1985. V. 42. P. 1868–1871 (РЖМех, 1986, 3Г253).

Stuart J. T. [1] On finite amplitude oscillations in laminar mixing lagers // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. P. 417–440.

Swaters G. E. [1] A nonlinear stability theorem for baroclinic quasigeostrophic flow // Phys. Fluids. A. 1986. V. 29. P. 5–6.

Thorpe S. A. [1] Neutral eigensolutions of the stability equation for stratified flow // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. № 4. P. 673–683 (РЖМех, 1069, 12Б464).

Wan Y. H. [1] On the nonlinear stability of circular vortex patches // Cont. Math. AMS. 1984. V. 28. P. 3–13.

Wan Y. H., Pulvirente F. [1] The nonlinear stability of circular vortex patches // Comm. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 435–450.

Weinstein A. [1] The local structure of Poisson manifolds // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 523–557.

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

V. A. Kalyagin, Yu. A. Stepanyants

LYAPUNOV-ARNOLD METHOD IN THE HYDRODYNAMIC THEORY OF STABILITY

The results obtained in the linear theory of hydrodynamic instability on the basis of the main papers by V. I. Arnold (1965) are reviewed. In its current form Arnold method, going back to the ideas of A. M. Lyapunov, is applicable to nonviscous flows of liquid and plasma for which a number of integral invariants (expressing the laws of energy conservation, enstrophy, helicity and other physical magnitudes) may be obtained. These integral invariants are necessary to construct Lyapunov function on the basis of which one may judge further about the stability of this or that flow. The applications of Lyapunov-Arnold method to other problems of hydrodynamics of homogeneous and stratified liquid on the plane and in space are described taking into account rotation and etc. Fine difference between the real nonlinear stability and the formal and conditional stability is shown. It is mentioned that in a number of papers, due to inaccurate use of Lyapunov function in infinite-dimensional functional space, groundless (and in some cases just incorrect) conclusions about the flow stability are made.

The book is intended for specialists in the field of the hydrodynamic theory of instability, aspirants and students of corresponding professions.