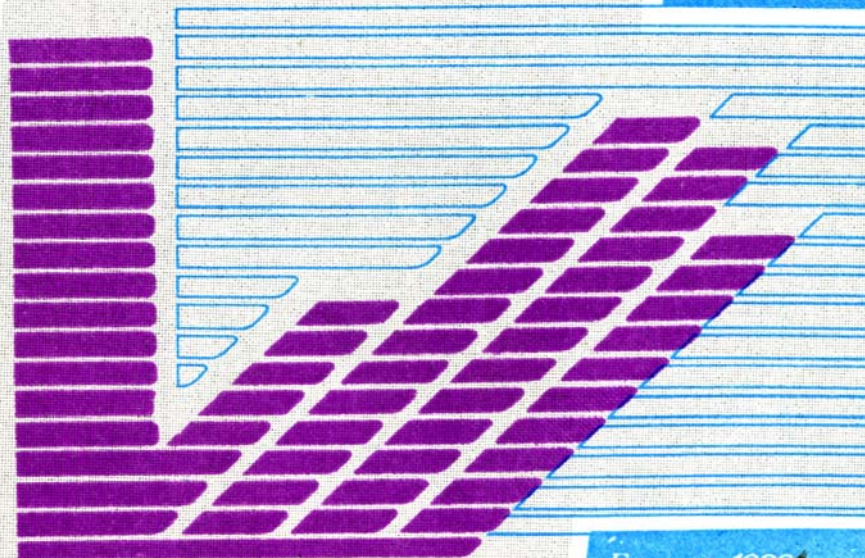




*В.С. Афраимович,  
В.И. Некоркин,  
Г.В. Осипов,  
В.Д. Шалфеев*

# **УСТОЙЧИВОСТЬ, СТРУКТУРЫ И ХАОС**

**В НЕЛИНЕЙНЫХ  
СЕТЯХ  
СИНХРОНИЗАЦИИ**



Горький-1989

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

*В.С.Абрамович,  
В.И.Некоркин  
Г.В.Осипов  
В.Д.Шалфеев*

# **УСТОЙЧИВОСТЬ, СТРУКТУРЫ И ХАОС**

**В НЕЛИНЕЙНЫХ  
СЕТЯХ  
СИНХРОНИЗАЦИИ**

Под общей редакцией

академика А.В.Гапонова-Грехова,  
доктора физико-математических наук М.И.Рабиновича

Горький - 1989

Издано по решению Редакционно-издательского совета  
Института прикладной физики АН СССР

УДК 534.1+537.86+621.396

Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.  
Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова, М.И.Рабиновича; ИФФ АН СССР. Горький, 1989. 256 с.

Рассматривается нелинейная динамика дискретных неравновесных сред – сетей автоматической синхронизации цепочечного и решеточного типа. Изучаются вопросы установления режима синхронизации, возможные пути потери синхронизации, в частности связанные с возникновением динамического хаоса, а также вопросы образования пространственных структур в сетях.

Книга предназначена для специалистов в области радиофизики, радиотехники, прикладной математики.

Ил. 112, табл. 3, библиограф. 98 назв.

Р е ц е н з е н т ы

доктор технических наук Г.М.УТКИН,  
доктор технических наук Д.А.КАБАНОВ

© Институт прикладной физики АН СССР, 1989 г.

Внедрение практически во все области физики (и не только физики) компьютерного эксперимента имело, может быть, несколько неожиданную, но сильную обратную связь — изменилось наше представление о характере решаемых задач. В первую очередь изменились, а точнее, еще меняются, наши модельные представления о многих явлениях, связанные с понятием непрерывного и бесконечно малого. Если на первых стадиях развития вычислительного эксперимента переход от непрерывных полей и сред к дискретным моделям казался зачастую грубым приближением, то спустя некоторое время возникло понимание, что имеется много задач в физике, которые по сути своей являются дискретными, и при их анализе, исследуя исходные явления на компьютере, имеет смысл исключить промежуточный этап формулирования модели, скажем, в виде уравнений в частных производных, а непосредственно анализировать модель "сеточную" или "решеточную".

Очень сильный толчок развитие и исследование решеточных моделей получило с появлением мощных вычислительных комплексов с матричными процессорами. Подобная вычислительная техника с параллельным принципом обработки оказалась по существу адекватной решеточным задачам. Несомненные успехи в этой области индуцировали и постановку совершенно новых и, как сейчас видно, перспективных задач, связанных с анализом однородных дискретных сетей из взаимодействующих динамических элементов. Подобные задачи оказались чрезвычайно актуальными для нужд современной радиофизики, радиотехники, энергетики и других областей. Именно этим проблемам посвящена настоящая книга. В ней представлены результаты исследования нелинейной динамики своеобразных дискретных "технических" сред, состоящих из связанных между собой систем фазовой синхронизации. Колебательно-волновая направленность исследований, существенное использование современного компьютерного эксперимента делают книгу интересной для специалистов разного профиля (физиков, радиотехников, биологов и др.), интересующихся проблемами нелинейной динамики; она будет полезна также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

А.В.Гапонов-Грехов  
М.И.Рабинович



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сегодня в самых разных областях науки наблюдается чрезвычайный интерес к пространственно-временным задачам. Достаточно указать, например, на проблемы изучения турбулентности, биологических возбудимых сред и целый ряд других [1, 2], среди которых есть и проблемы, выдвинутые современной радиофизикой, радиотехникой и радиосвязью. К их числу относится изучение пространственных сетей синхронизации – сложных ансамблей, состоящих из большого числа взаимосвязанных между собой систем фазовой синхронизации генераторов [3]. Удивительно, что до сих пор в достаточно хорошо развитой теории фазовой синхронизации [4, 5] проблема исследования динамики сетей синхронизации, по существу, не рассматривалась. Хотя практика настоятельно подталкивала к таким задачам, исследователи, тем не менее, от них уклонялись, по-видимому, в силу сложности математических моделей и сложившихся традиций, определяющихся, возможно, некоторой оторванностью специалистов по фазовой синхронизации от общефизических задач теории неравновесных сред.

Попытка разработать подход к исследованию динамики нелинейных сетей синхронизации и решить наиболее важные на данном этапе динамические задачи теории сетей, связав их с аналогичными задачами физики, биологии – т. е. с общей теорией нелинейных сред, и в частности двумерных решеток, которая интенсивно развивается сейчас, принята в настоящей монографии. Первая глава носит характер вступления, в ней обсуждаются постановка задачи и базовые модели. Главы 2 – 8 посвящены исследованию динамических процессов в сетях цепочечной и решеточной конфигураций с непрерывными системами синхронизации в качестве элементов сети. Главы 9 – 11 посвящены исследованию сетей с дискретными системами синхронизации в качестве элементов. Некоторые выводы и обсуждение нерешенных задач содержатся в заключительной 12-й главе.

Авторы глав и разделов: В.Д.Шалфеев (гл. 1 – 5, разд. 6.1 – 6.3, 7.1, гл. 8, 12), Г.В.Осипов (гл. 2, разд. 3.1 – 3.6, гл. 4 – 6), В.И.Некоркин (гл. 7, разд. 8.2, гл. 9 – 11), В.С.Афраймович (разд. 7.2, гл. 9, 10). Все вычислительные эксперименты проведены Г.В.Осиповым.

Авторы выражают глубокую благодарность А.В.Гапонову-Грехову и М.И.Рабиновичу, без постоянного внимания, поддержки и помощи которых формирование обсуждаемой научной тематики и написание книги не было бы возможным. Авторы признательны за благожелательную поддержку и обсуждение ряда проблем Г.М.Уткину, Д.А.Кабанову, М.В.Капранову, И.И.Минаковой, В.В.Мигулину, В.Н.Белых, М.А.Березовскому, В.В.Шахгильдяну.

Настоящая глава носит вводный характер. В ней описывается простейшая типовая система автоматической синхронизации и рассматриваются практические задачи, приводящие к объединению большого числа элементов – систем автоматической синхронизации – в единую сеть с помощью различных связей. Обсуждаются вопросы, на которые должна ответить теория таких сетей, и предлагается подход к изучению динамики однородных цепочечных и решеточных моделей сетей синхронизации на основе аналогий с нелинейной динамикой неравновесных сред.

### 1.1. Синхронизация в природе и технике

Явление синхронизации чрезвычайно распространено в природе и технике. Обычно под синхронизацией понимают приобретение объектами различной природы единого ритма работы. По-видимому, стремление к достижению упорядоченности и согласованности в поведении объектов, характерное для синхронизации, в той или иной степени отражает существующую в природе общую тенденцию к самоорганизации [6].

В биологии, химии, медицине явление синхронизации представляет интерес для тех, кто занимается ритмами, в частности электрическими ритмами мозга, сердечными ритмами, волновыми химическими реакциями и т. д. В энергетике явление синхронизации используется для обеспечения точного совпадения частот нескольких электрогенераторов переменного тока при их параллельной работе на общую нагрузку. В механике явление синхронизации нашло широкое применение при создании всевозможных вибротехнических устройств. В радиофизике, радиотехнике, радиолокации, радиоизмерениях, радиосвязи синхронизация используется для стабилизации частоты генераторов, синтеза частот, демодуляции сигналов, в доплеровских системах, в системах точного времени и т. д. По существу, без использования синхронизации невозможно создание современных радиосистем и комплексов.

Естественно, что процессы синхронизации в системах различной природы обладают большой общностью. Эти процессы относятся к существенно нелинейным, и в теории нелинейных колебаний проблема синхронизации всегда находится в ряду актуальных [7 - 10]. Несмотря на большое разнообразие возможных применений синхронизации и средств; с помощью которых она осуществляется, теория колебаний при изучении процессов синхронизации использует, как правило, две базовые модели [7]: а) непосредственная синхронизация автогенератора внешним опорным сигналом; б) синхронизация автогенератора опорным сигналом с помощью петли обратной связи, осуществляющей автоматическое управление по фазе или частоте. В последнем случае наличие специальной петли управления автогенератором делает получаемую систему автоматической синхронизации весьма гибкой и надежной, что обусловило ее широкое распространение в технике.

Далее будут рассматриваться только системы автоматической синхронизации. Прежде всего рассмотрим математическую модель такой системы.

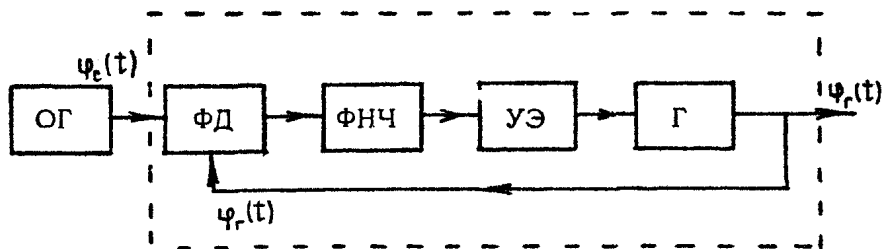
## 1.2. Системы автоматической синхронизации

При использовании фазового управления систему автоматической синхронизации обычно называют системой фазовой синхронизации (СФС)\*, а при использовании частотного управления - системой частотной автоподстройки (ЧАП). Теории этих систем посвящен ряд монографий [4, 5, 7, 8]. Не останавливаясь на результатах этих исследований, приведем лишь необходимые для дальнейшего сведения о типовых моделях СФС и систем ЧАП.

Типовая структурная схема непрерывной СФС дана на рис. 1.1. Здесь текущие фазы  $\varphi_r(t)$  - управляемого генератора ( $\Gamma$ ), и  $\varphi_c(t)$  - управляющего сигнала, например, сигнала опорного генератора (ОГ), сравниваются на фазовом дискриминаторе (ФД). Напряжение с выхода ФД, пройдя через фильтр нижних частот (ФНЧ), устраняющий из спектра паразитные составляющие верхних частот, поступает на управляющий элемент (УЭ), непосредственно изменяющий час-

---

\* В радиотехнической литературе для СФС применяется название - фазовая автоподстройка частоты (ФАП).



Р и с. 1.1

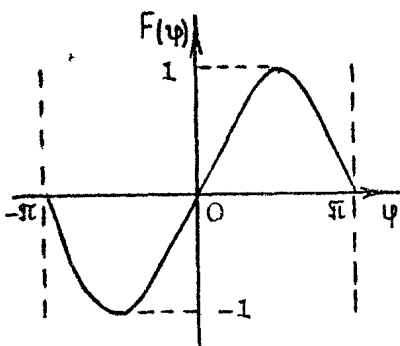
тому управляемого генератора в сторону приближения к частоте опорного сигнала. Вводя текущую разность фаз  $\varphi(t) = \varphi_r(t) - \varphi_c(t)$  из условия баланса частот в высокочастотном тракте СФС можно записать уравнения, описывающие динамику СФС, в виде [4, 7]

$$p\varphi + \Omega K(p)F(\varphi) = \omega_{св} - p\varphi_c, \quad (1.1)$$

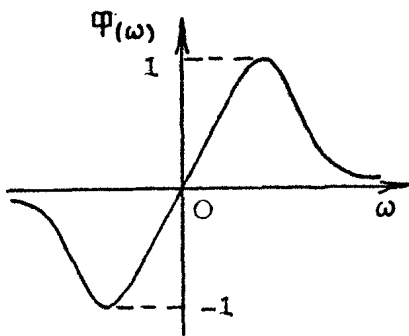
где оператор  $p = d/dt$ ,  $\omega_{св}$  - собственная частота свободного генератора  $\Gamma$ ,  $K(p)$  - коэффициент передачи ФНЧ,  $\Omega = SE$  - наибольшая расстройка, которую может скорректировать цепь управления ( $S$  - крутизна характеристики УЭ,  $E$  - максимальное напряжение с выхода ФД),  $F(\varphi)$  - безразмерная характеристика ФД, нормированная на единицу (рис. 1.2). При выводе (1.1) сделано предположение о безынерционности всех элементов, кроме ФНЧ, и линейности всех элементов, кроме ФД. Уравнение (1.1), описывающее процессы стабилизации частоты автогенераторов, слежения за фазой и частотой управляющего сигнала, является достаточно общим, справедливым для любых периодических нелинейностей  $F(\varphi)$ . Порядок уравнения определяется типом  $K(p)$ . Это уравнение хорошо известно в литературе в частных случаях  $K(p)$ , так, например, для  $K(p) = 1/(1+Tp)$  уравнение (1.1) становится базовым уравнением теории колебаний - уравнением нелинейного маятника с затуханием [11]. К уравнениям маятникового типа приводят задачи теории электрических машин, теории джозефсоновских контактов, теории движения частиц в циклических ускорителях и т. д.

В системе ЧАП в качестве элемента сравнения используется вместо фазового дискриминатора (см. рис. 1.1) частотный дискриминатор (ЧД), на котором происходит сравне-





Р и с. 1.2



Р и с. 1.3

ние текущих частот  $\omega_{\Gamma}(t)$  автогенератора  $\Gamma$  и  $\omega_c(t)$  опорного генератора. Аналогично (1.1) уравнение непрерывной системы ЧАП можно записать в виде [7]

$$\omega + \Omega K(p) \Phi(\omega) = \omega_{\text{св}} - \omega_n, \quad (1.2)$$

где  $\omega = \omega_{\Gamma} - \omega_n$  — текущее отклонение частоты  $\omega_{\Gamma}$  от некоторой номинальной\* частоты  $\omega_n$ ,  $\Phi(\omega)$  — безразмерная характеристика ЧД (рис. 1.3), остальные обозначения аналогичны (1.1).

Рассмотренные модели СФС и системы ЧАП являются типовыми непрерывными моделями систем автоматической синхронизации, широко применяемыми в теории синхронизации. Повышение эффективности функционирования систем автоматической синхронизации ведет к усложнению моделей, например усложнению, связанному с учетом одновременного действия как кольца управления по фазе, так и кольца управления по частоте, или нескольких колец управления.

Дальнейшее рассмотрение будет в основном опираться на типовые модели (1.1) и (1.2), поэтому приведем их к симметричной форме записи, введя безразмерное отклонение  $\omega_{\text{св}}$  от опорной частоты  $\gamma = (\omega_{\text{св}} - p\psi_c) / \Omega$  в (1.1) и от номинальной частоты  $\gamma = (\omega_{\text{св}} - \omega_n) / \Omega$  в (1.2). Получим уравнения

$$\text{для СФС} \quad \frac{p\psi}{\Omega} + K(p) F(\psi) = \gamma, \quad (1.3)$$

\* Номинальная частота определяется частотой  $\omega_c$  и средней частотой дискриминатора.

для ЧАП 
$$\frac{\omega}{\Omega} + K(\rho) \Phi\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = \gamma \quad (1.4)$$

На практике, кроме непрерывных, широко используются различные дискретные системы синхронизации [12]. Не останавливаясь на описании различных моделей дискретных СФС, приведем необходимые нам в дальнейшем разностные уравнения типовой импульсной СФС с идеальным запоминанием [12]:

$$\varphi(k+1) - \varphi(k) + \Omega \tau_0 \sum_{j=0}^k K(k-j) F(\varphi(j)) = \omega_{св} \tau_0, \quad (1.5)$$

где  $\varphi(k)$  – отсчеты разности фаз генератора  $\Gamma$  и опорного генератора,  $k = 1, 2 \dots$  соответствует моментам времени  $t = k\tau_0$ ,  $\tau_0$  – период дискретизации,  $K(k-j)$  – импульсная передаточная функция ФНЧ. Уравнение (1.5) связывает разности фаз  $\varphi$  в два смежных момента времени, разделенные промежутком времени, равным периоду дискретизации.

### 1.3. Коллективные системы

Системы автоматической синхронизации занимают сейчас ведущее место среди систем радиоавтоматики. Большая гибкость СФС и систем ЧАП, обусловленная наличием петли обратной связи, позволяет использовать их в самых разных устройствах. Практически неограниченная свобода в построении петли обратной связи дает возможность конструировать оптимальные структуры СФС и систем ЧАП.

В связи с разнообразием условий применения СФС и систем ЧАП возникает необходимость удовлетворения многочисленным высоким, часто противоречивым, требованиям к их динамическим характеристикам – полосе захвата, помехоустойчивости, быстродействию и т. д. Одним из эффективных путей решения этой проблемы является переход от одноконтурного варианта построения систем к многоконтурным, т. е. переход от одной системы автоматической синхронизации к ансамблю из двух или нескольких взаимосвязанных систем. Такие системы получили в литературе название коллективных систем синхронизации [8].

С другой стороны, существуют задачи, для решения которых в принципе требуется не две или несколько систем

синхронизации, объединенных в единый коллектив, а большое число таких систем, образующих целую пространственную сеть синхронизации [3].

Одной из таких задач, например, является задача создания синхронных сетей передачи данных или цифровых сетей связи [5, 13, 14]. Здесь для некоторого количества пространственного разнесенных генераторов, находящихся в узлах сети, требуется обеспечить взаимную синхронизацию. Известны различные способы обеспечения надежной синхронизации: с использованием общего задающего синхронизатора, с использованием направленной или взаимной синхронизации элементов сети.

В качестве другого примера можно привести задачу об управлении элементами фазированных антенных решеток [5, 15, 16]. Здесь для ансамбля генераторов требуется обеспечить не только синхронность работы, но и управление фазовыми сдвигами. Межканальные связи могут либо формироваться целенаправленно, например с помощью сравнения фаз сигналов в соседних каналах [17], либо осуществляться через общее поле излучения [18]. Заметим, что аналогичным образом может осуществляться фазировка элементов в фазированных лазерных решетках [19].

Остановимся еще на задаче синхронизации нескольких электрических генераторов переменного тока, работающих на общую нагрузку, т. е. на задаче о синхронизации в энергосетях. Это пример из другой области – электротехники, однако он вполне уместен здесь, поскольку динамика синхронного электрогенератора упрощенно может описываться теми же уравнениями маятникового типа, что и динамика СФС [20, 21]. Взаимодействие электрогенераторов позволяет достичь необходимой стабильности частоты в энергосети. Интересно отметить, что именно энергосети весьма эффективно продемонстрировали возможность существования в сетях синхронизации, наряду с режимом синхронизации, еще и сложных стохастических режимов: в ноябре 1966 г. на восточном побережье США и Канады внезапное падение нагрузки привело к непредсказуемому изменению состояния всей сети – генераторы стали неуправляемо выпадать из фазового синхронизма друг с другом, вызвав тем самым потерю устойчивости во всей сети [5, 22].

Приведенные примеры далеко не исчерпывают перечень тех практических задач, которые приводят к изучению сетей

синхронизации, однако уже этих примеров достаточно, чтобы убедиться насколько важна и своевременна сейчас постановка вопроса об изучении нелинейной динамики связанных коллективных систем синхронизации – сетей систем автоматической синхронизации. Далее для краткости такие сети будем называть просто сетями синхронизации.

#### 1.4. Решеточные модели

Общей теории динамического поведения нелинейных сетей синхронизации к настоящему времени не существует. Остаются неясными даже вопросы о принципиальной возможности существования режима глобальной синхронизации в сети. Существенная нелинейность парциальных систем синхронизации, из которых состоит сеть, нелинейность связей между ними и разнообразие вариантов соединения парциальных систем в сеть не оставляют надежды разобраться в динамике всей сети в целом, лишь суммируя знания о динамике парциальных систем [1], хотя, заметим, что и задача об изучении динамики отдельных парциальных систем синхронизации сама по себе трудна и решена далеко не полностью [4, 8]. Задача о динамике сети в принципе должна решаться как пространственно-временная задача.

Вопросы, на которые должна ответить теория динамического поведения сетей синхронизации, в первую очередь касаются:

- существования стационарного режима глобальной синхронизации;

- характеристик стационарного режима синхронизации (распределение в сети остаточных ошибок по фазе, частоте);

- характера и длительности переходных процессов к стационарному режиму синхронизации;

- изучения условий вхождения в режим синхронизации и условий его нарушения (во времени и пространстве);

- характеристик асинхронных режимов.

Эти вопросы и будут далее предметом рассмотрения.

Кроме этого, спектр вопросов естественно расширить в сторону изучения воздействия различных помех на сеть, в том числе специфических для сети пространственных помех типа локальных аварий, оптимизации параметров сети и, наконец, синтеза оптимальной структуры. Эти вопросы выходят за рамки книги.

Сделаем пояснения относительно применяемых терминов "синхронизация" и "асинхронизация". В силу того, что каждый элемент сети является автогенератором, частота которого управляется некоторым опорным генератором (сигналом) с помощью специальной цепи управления, т. е. цепи автоподстройки, естественно понимать, как это принято в теории систем автоматической синхронизации [4, 5], под режимом синхронизации для каждого данного автогенератора (элемента сети) режим совпадения его частоты с частотой соответствующего опорного сигнала (при постоянной разности фаз). Если частоты не совпадают, то имеет место асинхронный режим. Рассматривая теперь всю сеть в целом, будем считать, что если все элементы сети находятся в режиме синхронизации по отношению к опорным сигналам, то в сети имеет место глобальная синхронизация (или режим синхронизации в целом). Ясно, что для сети синхронизация может рассматриваться в ином смысле – не каждого элемента по отношению к опорному сигналу, а каждого элемента сети по отношению к соседним элементам сети, т. е. взаимная синхронизация. Конечно, наличие синхронизации в сети по отношению к опорным сигналам иногда может автоматически означать и наличие взаимной синхронизации элементов сети, например, если опорный сигнал для всех элементов сети одинаков. Однако, если опорные сигналы разные, то при наличии синхронизации в сети по отношению к опорным сигналам взаимной синхронизации элементов сети не будет. Естественно, мыслима и обратная ситуация, когда каждый из элементов сети работает в асинхронном режиме по отношению к своему опорному сигналу, и, следовательно, режима синхронизации в сети по отношению к опорным сигналам нет, однако при этом может иметь место взаимная синхронизация элементов сети.

Для определенности во всех случаях, когда это специально не оговаривается, термин синхронизация в сети будем понимать как синхронизацию по отношению к опорным сигналам.

Первый вопрос, который необходимо решить на пути построения теории динамического поведения сетей синхронизации, – выбор математической модели. С одной стороны, математическая модель должна учитывать специфику решаемой задачи и содержание вопросов, на которые надо получить ответ, с другой стороны, она должна быть сориентирована



на тот арсенал средств и методов, который может быть использован при ее изучении. Совершенно ясно, что исследование динамики коллективных систем синхронизации в большинстве случаев обязательно сведется к исследованию некоторого класса нелинейных систем дифференциальных уравнений высокого порядка. Перспективы решения такого сорта задач еще недавно были весьма неутешительными. И лишь появление сейчас суперкомпьютеров и связанной с этим реальной возможности проведения сложных вычислительных экспериментов позволяет сделать достаточно ощутимые шаги в решении поставленной задачи.

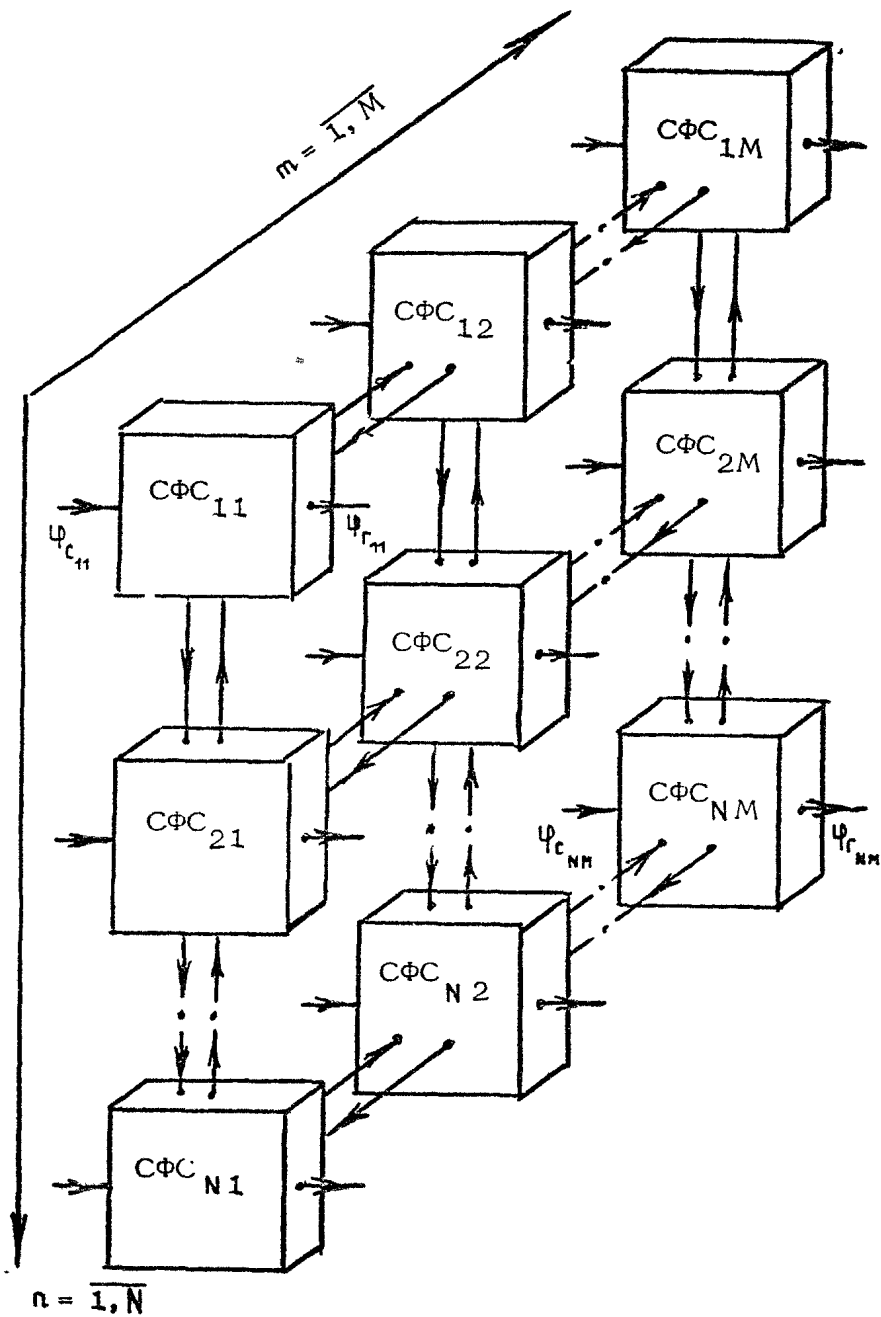
Однако даже с учетом возможностей современной вычислительной техники создание теории динамического поведения нелинейных сетей произвольной конфигурации вряд ли реально. Естественно поэтому в начале ограничиться вариантами правильных конфигураций сети. С учетом этих соображений в качестве основной, базовой модели сети синхронизации примем решеточную модель. Решеточная модель сети интересна для исследования не только как идеализированный вариант произвольной сети, но и представляет самостоятельный интерес в ряде приложений, таких, например, как фазированные антенные решетки. Заметим, что решеточная модель явилась весьма продуктивной в различных физических задачах, например в физике твердого тела [23].

На рис. 1.4 представлена решеточная модель сети синхронизации размером  $N \times M$  элементов. В узлах решетки расположены элементы сети – парциальные СФС (см. рис.1.1), связанные между собой некоторыми связями. Чтобы не усложнять рисунок, показаны только связи каждого элемента с соседними элементами по горизонтали и вертикали (без учета диагональных связей), хотя конечно могут учитываться более сложные связи элементов, например по типу "каждый с каждым".

Принимая во внимание (1.3) запишем систему уравнений, описывающую динамику решеточной сети систем фазовой синхронизации, в следующем виде:

$$\frac{P\psi_{n,m}}{\Omega_{n,m}} + K_{n,m}(\rho) F_{n,m}(\psi_{n,m}) - \mathcal{I}_{n,m} =$$

$$= \delta_{n-1,m} K_{n,m; n-1,m}(\rho) F_{n-1,m}(\psi_{n-1,m}; \psi_{n,m}) -$$



Р и с. 1.4

$$\begin{aligned}
 & - \delta_{n, m-1} K_{n, m; n, m-1}(\rho) F_{n, m-1}(\psi_{n, m-1}; \psi_{n, m}) - \\
 & - \varepsilon_{n+1, m} K_{n, m; n+1, m}(\rho) F_{n+1, m}(\psi_{n+1, m}; \psi_{n, m}) - (1.6)
 \end{aligned}$$

$$- \varepsilon_{n, m+1} K_{n, m; n, m+1}(\rho) F_{n, m+1}(\psi_{n, m+1}; \psi_{n, m}); \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Здесь в правой части уравнения (1.6) даны члены, учитывающие влияние на элемент  $(n, m)$  соседних элементов  $(n-1, m)$ ,  $(n, m-1)$ ,  $(n+1, m)$ ,  $(n, m+1)$  соответственно.

Принятая структура модели (1.6) аналогична сеточным моделям сплошных сред и решеточным моделям, принятым сейчас в задачах турбулентности, спиновых стекол, клеточных автоматов [24]. В этом смысле она обладает той общностью, которая позволяет отнести ее, вообще говоря, к дискретным моделям неравновесных диссипативных сред. С этой точки зрения ее исследование представляет интерес для понимания сложных явлений в сплошных неравновесных средах, таких, например, как турбулентность и формообразование.

Вместе с тем эта модель полностью отражает специфику задач теории фазовой синхронизации. Она отражена в конкретной модели одного элемента сети – парциальной СФС (левая часть уравнения (1.6) учитывает разные инерционности  $K_{n, m}(\rho)$ , нелинейности  $F_{n, m}$  и т. д.) и в конкретном виде связей между элементами сети (правая часть уравнения (1.6) учитывает коэффициенты связей  $\delta_{\alpha, \beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha, \beta}$ , инерционности связей  $K_{\alpha, \beta}(\rho)$ , нелинейности связей  $F_{\alpha, \beta}$ ).

Аналогичным образом можно записать и уравнения для решеточной модели сети систем ЧАП, сети дискретных СФС.

Следующие главы будут посвящены изучению динамики решеточных моделей различных систем автоматической синхронизации [25] на основе

использования аналогий с нелинейной динамикой неравновесных диссипативных сред [1, 2, 26 – 29];

детального анализа динамики отдельных парциальных СФС, [4, 8];

существенного использования компьютерного моделирования [24].

Компьютерные эксперименты с рассматриваемыми математическими моделями проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе: управляющая ЭВМ ЕС-1037 – набор матричных процессоров ЕС-2706 [30]. В этой машин

ной конфигурации в качестве основного вычислительного устройства использовался набор способных работать параллельно матричных процессоров, каждый из которых имеет пиковую производительность 12 миллионов операций с плавающей запятой в секунду.

Решаемые задачи имеют две характерные особенности:

- а) необходимость выполнения одних и тех же действий в течение длительного времени над длинными векторами;
- б) наличие связей лишь между ближайшими друг к другу элементами.

Учет этих особенностей позволил получить высокую производительность многопроцессорной системы как за счет эффективной векторизации численных алгоритмов, так и за счет параллелизма физической природы задач.

В качестве общего предположения везде ниже будем считать справедливым предположение об однородности решетки. Обратимся прежде всего к рассмотрению наиболее простого случая – одномерной решетки, т. е. цепочки систем синхронизации.

## ДИНАМИКА ЦЕПочки СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

В общей постановке изучение динамики двумерных решеток (СФС) представляет чрезвычайно сложную задачу. Естественно вначале рассмотреть вырожденный случай решетки: однородную одномерную цепочку нелинейных СФС. Связи между отдельными СФС будем считать однонаправленными.

### 2.1. Уравнение потоковой цепочки.

#### Динамика точечного элемента

Рассмотрим многоканальную систему, содержащую цепочку парциальных СФС, соединенных параллельно так, что для управления генератором  $\Gamma_n$  в  $n$ -й парциальной СФС  $\varphi_n$ , используется не только сигнал с выхода дискриминатора  $\Phi D_n$ , но и сигнал с выхода  $\Phi D_{n-1}$  предыдущей парциальной СФС  $\varphi_{n-1}$  [8, 13], т. е. связи парциальных СФС  $\varphi_n$  являются невзаимными, однонаправленными, и цепочка обладает свойствами цепочки потокового типа (рис. 2.1, отсутствующие связи, направленные вверх по цепочке, перечеркнуты).

Математической моделью такой потоковой цепочки СФС с учетом (1.3), (1.6) является система операторных уравнений:

$$\frac{p\varphi_n}{\Omega_n} + K_n(p)F_n(\varphi_n) + \delta_{n,n-1} K_{n,n-1}(p)F_{n-1}(\varphi_{n-1}) = \gamma_n, \quad n = \overline{1, N} \quad (2.1)$$

Для упрощения анализа будем считать цепочку однородной, т. е. для любого  $n$  выполняется  $\varphi_n \equiv \varphi$ ,  $\delta_{n,n-1} \equiv \delta$ ,  $F_n(\varphi) \equiv F(\varphi)$ ,  $K_n(p) \equiv K_{n,n-1}(p) \equiv K(p)$ ,  $\gamma_n \equiv \gamma$ ,  $\Omega_n \equiv \Omega$ . Тогда (2.1) принимает вид

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma - \delta K(p)F(\varphi_{n-1}), \quad n = \overline{1, N} \quad (2.2)$$

Рассмотрим наиболее простую ситуацию – наличие идеализированных фильтров  $K(p) = 1$  в цепях управления и в каналах связи [31, 32]. Для определенности пусть  $F(\varphi) =$



$\sin \varphi$ , хотя результаты дальнейшего анализа легко переносятся на другие виды типовых нелинейностей  $F(\varphi)$  [4].  
 Переходя в уравнении (2.2) к безразмерному времени  $\tau = t \Omega$ , имеем

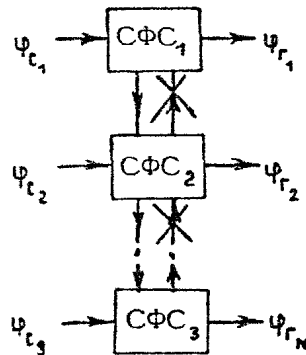
$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin \varphi_{n-1}; \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

где естественно рассматривать граничное условие  $\varphi_0(\tau) = 0$ . Параметр  $\gamma$  достаточно рассмотреть неотрицательным. Что касается пара метра  $\delta$ , то имеют смысл как положительные, так и отрицательные коэффициенты связи. Далее в основном будем рассматривать неотрицательные  $\delta$ , кроме специально оговариваемых случаев.

Система (2.3) является развивающейся не только во времени, но и в пространстве (с изменением  $n$ ). Поэтому нас будут интересовать как стационарные режимы, устанавливающиеся в различных парциальных СФС  $n$ , и в первую очередь режим синхронизации, так и процесс распространения вдоль цепочки режима синхронизации, а также возможные бифуркации, приводящие к его срыву. Поскольку связи между точечными элементами цепочки однонаправленные, модель (2.3) можно отнести к классу развивающихся "вниз по потоку", следовательно, изучение ее пространственных бифуркаций можно вести аналогично [27] на основании сведений о динамике отдельных парциальных СФС  $n$ .

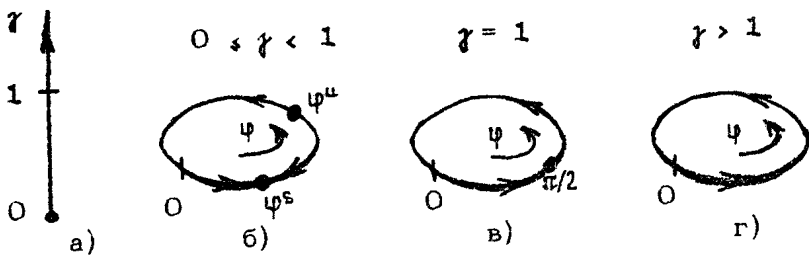
При отсутствии связей ( $\delta = 0$ ) динамика каждой парциальной СФС  $n$  предельно проста и описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin \varphi = \gamma. \quad (2.4)$$



Р и с. 2.1

На рис. 2.2 представлены [4, 11] разбиение пространства параметров (здесь оно вырожденное, одномерное) уравнения (2.4) на две области ( $0 < \gamma < 1$ ,  $\gamma > 1$ ) и соответствующие фазовые портреты. Уравнение (2.4) рассматривается на фа-



Р и с. 2.2

зовой окружности. Для  $\gamma < 1$  имеем два состояния равновесия: устойчивое с координатой  $\psi^s = \arcsin \gamma$  и неустойчивое  $\psi^u = \pi - \arcsin \gamma$ . При  $\gamma = 1$  имеет место бифуркация слияния состояний равновесия в точке с координатой  $\psi = \pi/2$ . В области  $\gamma > 1$  состояний равновесия нет.

Таким образом, в отсутствие связей при  $\gamma < 1$  во всей цепочке СФС устанавливается пространственно однородный режим синхронизации, при котором в каждой СФС  $n$  генератор синхронизован опорным сигналом, а разность фаз постоянна и равна  $\psi_n^s = \arcsin \gamma$ . Аналогичным образом при  $\gamma > 1$  во всей цепочке устанавливается пространственно однородный асинхронный вращательный режим, при котором координаты  $\psi_n(\tau)$  неограниченно растут.

Здесь - далее режим синхронизации в сети - это стационарный режим, при котором в каждой парциальной СФС  $n$  устанавливается постоянная остаточная разность фаз  $\psi_n^s$ , причем если синхронизация наступает во всех без исключения элементах, то будем называть его режимом глобальной синхронизации цепочки, а если только в части элементов - то режимом частичной синхронизации. Будем называть асинхронным установившийся режим, при котором разность фаз  $\psi_n(\tau)$  изменяется во времени, причем если  $\psi_n(\tau)$  нарастает (более чем на  $2\pi$ ), то режим будет асинхронным вращательным, если  $\psi_n(\tau)$  изменяется около некоторого среднего значения  $\bar{\psi}_n$ , то асинхронным колебательным, если имеют место как участки колебаний, так и вращений - асинхронным смешанным. Надо отметить, что, вообще говоря, асинхронные колебательный и вращательный режимы могут иметь характер как регулярных движений, так и хаотических.

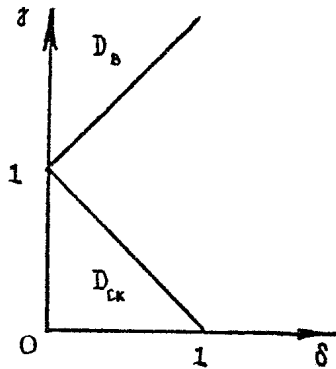
## 2.2. Режим синхронизации

Введение связи ( $\delta \neq 0$ ) ведет к нарушению пространственной однородности стационарных режимов вдоль цепочки. Прежде всего обратим внимание на то, что структура уравнений (2.3) такова, что из информации о режимах точечной СФС<sub>n</sub> (уравнение (2.4)) непосредственно следует оценка на параметры  $\gamma, \delta$ , для которых в цепочке СФС заведомо реализуется тот или иной режим. Действительно, каждый  $n$ -й элемент в цепочке описывается уравнением (2.3), отличающимся от уравнения (2.4) для отдельной СФС лишь добавочным членом  $\delta \sin \varphi_{n-1}$  в правой части. Поскольку  $|\delta \sin \varphi_{n-1}| \leq \delta$ , то, опираясь на анализ уравнения (2.4), следует сделать вывод о том, что для значений параметров  $\gamma < 1 - \delta$  в каждом элементе цепочки заведомо должен установиться либо режим синхронизации с постоянной координатой  $\varphi_n^s$ , либо режим колебаний. На рис. 2.3 эта область параметров обозначена  $D_{ск}$ . Если же  $\gamma > 1 + \delta$ , то в каждом элементе цепочки должен устанавливаться асинхронный вращательный режим. На рис. 2.3 эта область обозначена  $D_B$ .

Перейдем к рассмотрению стационарных режимов в цепочке. Детальный анализ стационарных режимов при достаточно общих предположениях дан в гл. 7. Здесь ограничимся только замечаниями, непосредственно относящимися к уравнению (2.3).

В ходе рассуждений о потоковых системах для упрощения предполагается, что включение сигналов связей происходит после окончания собственных переходных процессов в отдельных СФС<sub>n</sub>, однако при проведении вычислительных экспериментов такого предположения не делается.

Пусть вначале  $\gamma < 1$ . В этом случае изменение режимов "вниз по потоку" происходит следующим образом. В первом элементе устанавливается режим синхронизации со значением  $\varphi_1^s = \arcsin \gamma$ , а во втором элементе — стационарный режим, при котором  $\sin \varphi_2 = \gamma_2$ , где  $\gamma_2 = \gamma - \delta \sin \varphi_1^s =$



Р и с. 2.3

$= \gamma(1-\delta)$ . Если  $|\gamma_2| < 1$ , то этот стационарный режим явится режимом синхронизации, для которого  $\varphi_2^s = \arcsin \gamma_2$ . Несмотря на положительность параметра  $\gamma$ , величина  $\varphi_2^s$  может быть как положительной – при слабой связи ( $\delta < 1$ ), так и отрицательной – при сильной связи ( $\delta > 1$ ).

Иная картина, если  $|\gamma_2| > 1$ . В этом случае во втором элементе устанавливается асинхронный режим с неограниченно нарастающей фазовой переменной  $\varphi_2(\tau)$ . Вследствие этого в третьем элементе и во всех последующих также будут устанавливаться асинхронные режимы с различными законами изменения  $\varphi_n(\tau)$ . Смена с ростом  $n$  установившегося режима синхронизации для элемента  $n = 1$  на асинхронный при  $n \geq 2$  означает, что здесь имеет место пространственная бифуркация потери синхронизации. Проводя аналогичные рассуждения для произвольной СФС  $n$ , заключаем, что в общем случае режим синхронизации устанавливается во всех СФС  $n$  с номерами  $n = 1, 2, \dots, n^*$ , если для них выполняется условие

$$|\gamma_n| = \left| \gamma \left[ \sum_{i=0}^{n^*-1} \delta^i (-1)^i \right] \right| < 1, \quad (2.5)$$

а для всех  $n = n^* + 1, n^* + 2, \dots, N$  имеет место асинхронный режим.

Прослеживая изменение с ростом  $n$  поведения изображающих точек на соответствующих каждому элементу фазовых прямых  $\varphi$ , отмечаем, что пространственная бифуркация потери режима синхронизации, осуществляющаяся при переходе от  $n = n^*$  к  $n = n^* + 1$ , имеет тот же характер, что и бифуркация в точечной системе, осуществляющаяся с ростом параметра  $\gamma$  при достижении значения  $\gamma = 1$ , – бифуркация слияния и исчезновения устойчивого и неустойчивого состояний равновесия и возникновения вращательного периодического движения. Однако в силу того, что  $n$  – дискретная пространственная переменная, непосредственно фаза слияния состояний равновесия может быть пропущена.

За исчезновением режима синхронизации можно следить не только при изменении пространственной переменной  $n$ , но и параметров  $\gamma, \delta$ . При заданной величине параметра связи  $\delta$  для любого номера  $n^*$  можно определить бифуркационное значение параметра  $\gamma_{\text{синхр}}(n^*, \delta)$ , соответствующее исчезновению режима синхронизации из соотношения

$$\left| \gamma \left[ \sum_{i=0}^{n^*-1} \delta^i (-1)^i \right] \right| = 1 \quad (2.6)$$

Диапазон величин  $\gamma_{\text{синхр}}(n^*, \delta)$ , определяемый условием (2.6), назовем пространственной полосой синхронизации, поскольку для гочечных элементов с номерами  $n = 1, 2, \dots, n^*$  обеспечивается достижение синхронизма в полосе начальных расстройек по частоте  $0 < \gamma < \gamma_{\text{синхр}}(n^*, \delta)$ . На рис. 2.4 представлены вычисленные по формулам (2.6) графики зависимости  $\gamma = \gamma_{\text{синхр}}(n^*, \delta)$  (для удобства пользования графиком точки для дискретных значений  $n^*$  соединены прямыми).

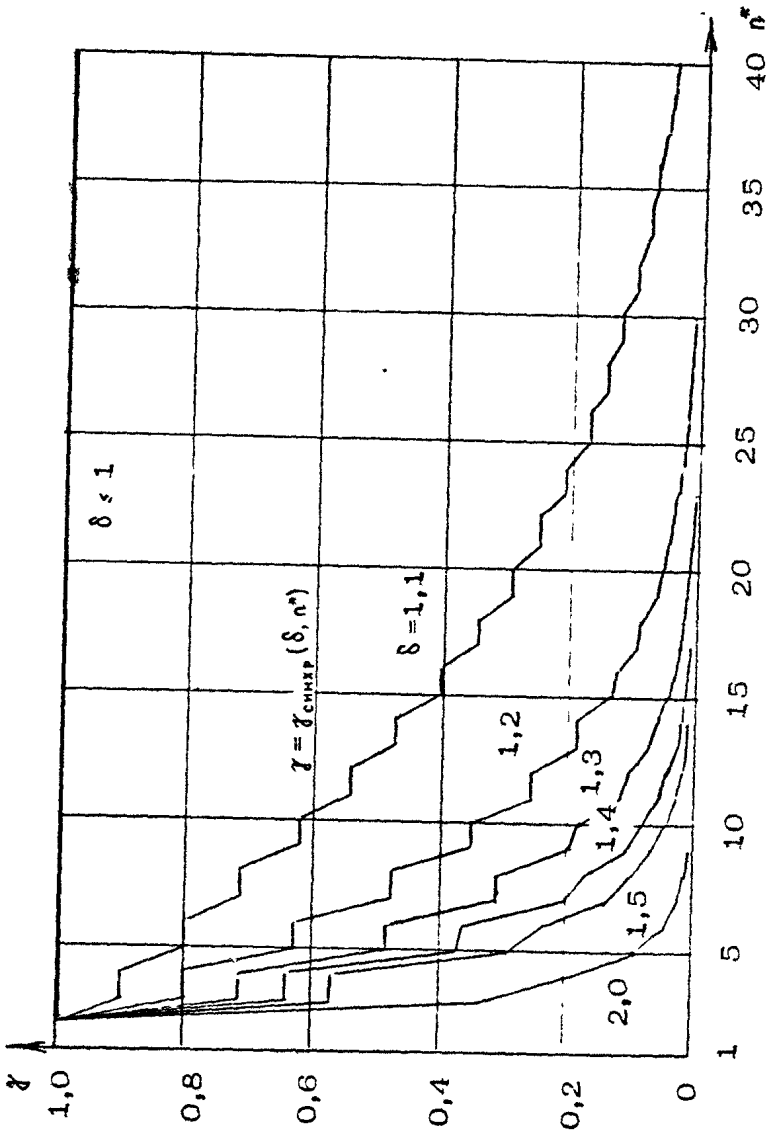
В режиме синхронизации установившиеся значения фазовых ошибок определяются соотношением  $\psi_n^s = \arcsin \gamma_n$ . На рис. 2.5 - 2.7 даны графики зависимостей  $\psi_n^s$  от  $n$  для разных  $\gamma$  и  $\delta$  (точки для разных  $n$  соединены прямыми).

При  $\gamma < 1$ ,  $\delta < 1$  все элементы цепочки синхронизируются. Изменение установившихся значений  $\psi_n^s$  с ростом пространственной координаты имеет характер устойчивого процесса (см. рис. 2.5), стремящегося к некоторому значению  $\bar{\psi}^s = \arcsin \gamma / (1 + \delta)$ . Это значение соответствует устойчивой при  $\delta < 1$  неподвижной точке отображения:  $\gamma - \sin \psi_n - \delta \sin \psi_{n-1} = 0$ . Для иллюстрации на рис. 2.6 приведена диаграмма Ламерея, соответствующая этому отображению при  $0 < \delta < 1$ . Таким образом, при  $\delta < 1$  можно считать с некоторой точностью, что в цепочке СФС начиная с некоторого номера  $n$  устанавливается пространственно квазиоднородный режим синхронизации.

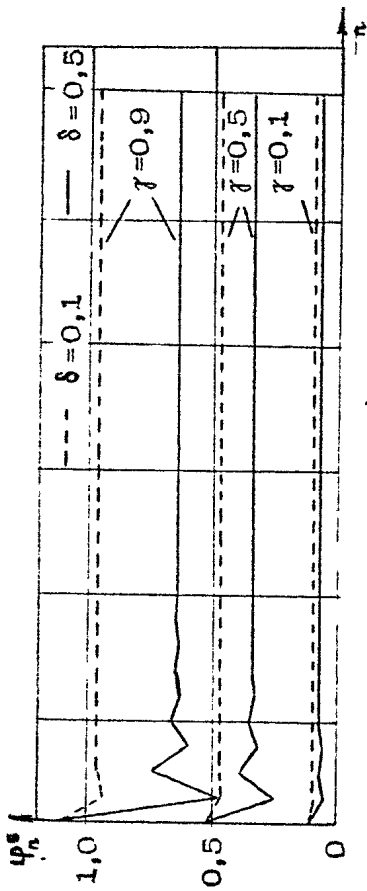
При  $\gamma < 1$ ,  $\delta > 1$  синхронизируются только элементы цепочки с номерами  $1 \leq n \leq n^*$ . При этом изменение  $\psi_n^s$  с ростом  $n$  имеет характер неустойчивого процесса (см. рис. 2.7). Для элементов с номерами  $n > n^*$  в цепочке устанавливаются асинхронные режимы вращательного, колебательного и смешанного типов. На рис. 2.8 представлены полученные в ходе моделирования на ЭВМ системы (2.3) осциллограммы установившихся процессов  $\psi_n(\tau)$  при  $\gamma = 0,5$ ,  $\delta = 2$  (значения  $\psi_n(\tau)$  даны по  $\text{mod } 2\pi$  для  $\tau > 200$ ; величина  $n^* = 2$ ).

Обратимся теперь к случаю  $\gamma > 1$ . В первом элементе цепочки в этом случае устанавливается (см. рис. 2.2) асин-

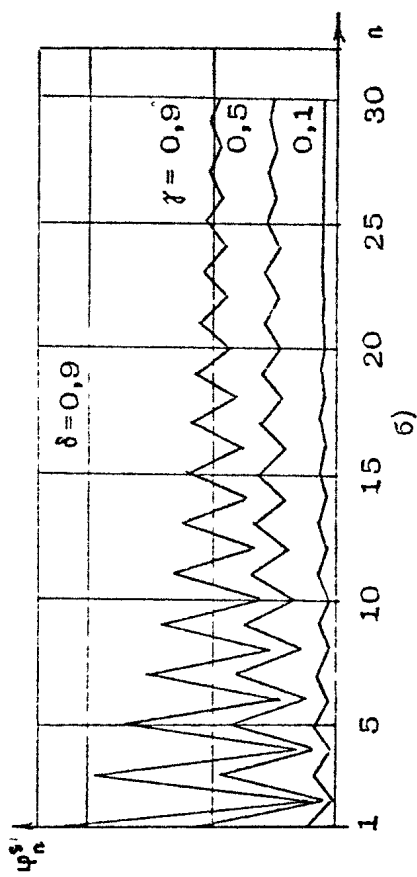




Р и с. 2.4

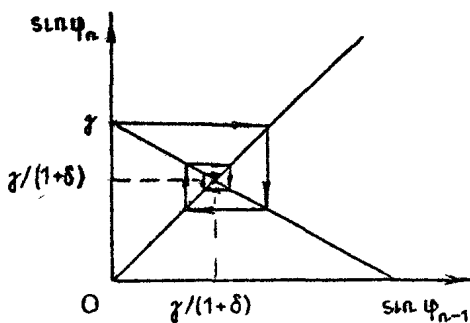


a)



б)

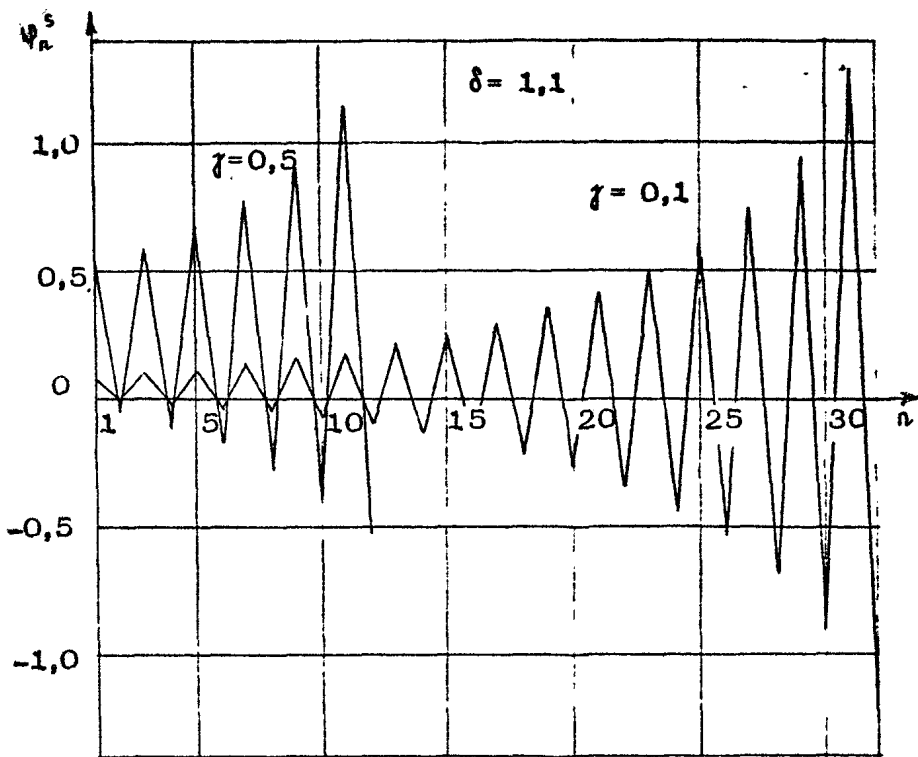
Р и с. 2.5



Р и с. 2.6

хронный режим с постоянно растущей разностью фаз  $\varphi_n(t)$ . В зависимости от величины параметра связи  $\delta$  эволюция движений с ростом координаты  $n$  может осуществляться разными путями. С помощью моделирования на ЭВМ установлено, что при  $\delta < 1$  и значениях  $\gamma$ , мало превышающих единицу, в цепочке существует возможность подавления асинхронного режима с ростом  $n$ , т. е. "вниз по потоку". В этом случае асинхронный вращательный режим в первом элементе переходит в асинхронно колебательный (колебания  $\varphi_2(t)$  около некоторого среднего значения) во втором элементе. Аналогичные колебательные режимы появляются в третьем и последующих элементах, причем амплитуда колебаний уменьшается с ростом  $n$ . Начиная с некоторого номера  $n^0$  амплитуда колебаний становится пренебрежимо малой, поэтому можно считать, что для всех элементов с номером  $n > n^0$  устанавливается режим синхронизации. Осциллограммы, полученные в численном эксперименте с цепочкой из 50 элементов при  $\gamma = 1,1$ ,  $\delta = 0,1$ , демонстрирующие описанный эффект подавления асинхронного режима вдоль по цепочке, даны на рис. 2.9.

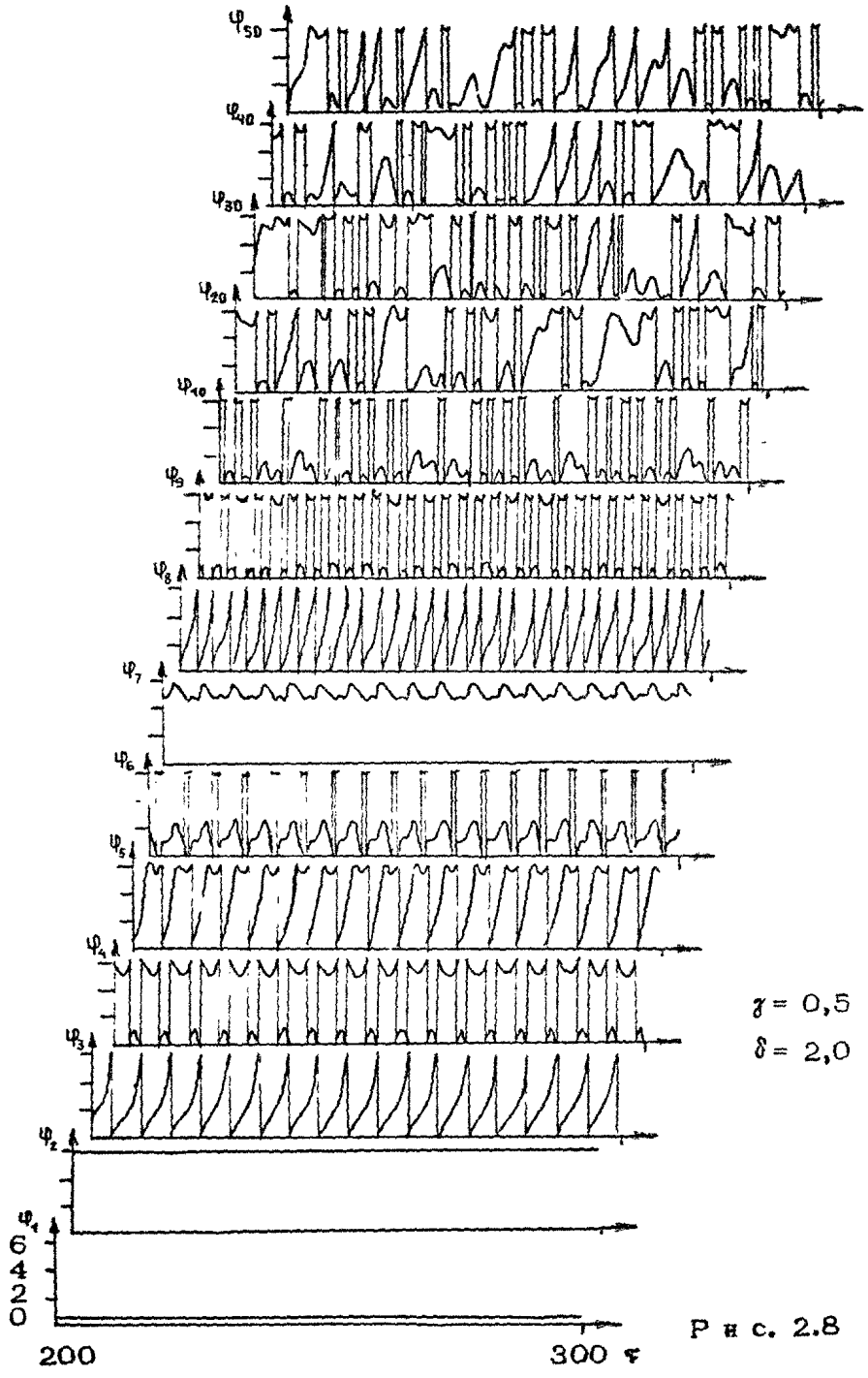
Объясним возможный механизм такого эффекта. При  $\gamma \geq 1$  вращательное движение в первом элементе обладает тем свойством, что большую часть времени изображающая точка находится вблизи значения  $\varphi = \pi/2$ . Это связано с тем, что периодическое движение, рождающееся при  $\gamma = 1$  через слияние состояний равновесий в бифуркационной точке  $\varphi = \pi/2$ , "помнит" о своей предыстории и изображающая точка суще-

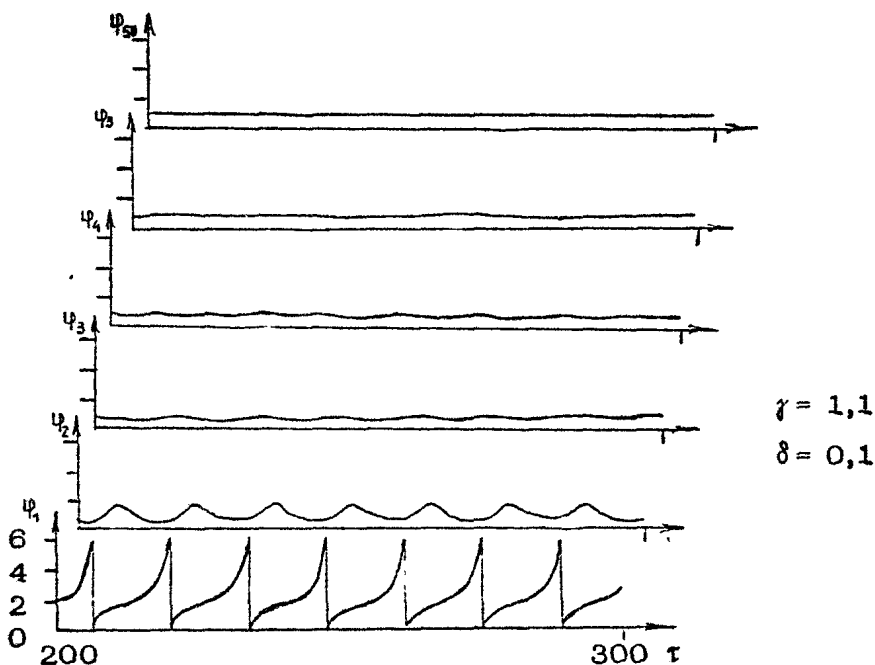


Р и с. 2.7

ственно замедляется вблизи  $\varphi = \pi / 2$ , в результате чего во втором элементе может появиться не вращательное, а колебательное движение  $\varphi_2(\tau)$ . Поскольку  $\delta < 1$ , то колебательные движения в последующих элементах будут иметь уменьшающиеся с ростом  $n$  амплитуды. При  $n \rightarrow \infty$  происходит уменьшение амплитуды колебаний до нуля и, следовательно, реализуется в пространстве бифуркация Андронова – Хопфа в “обратном направлении” – устойчивое колебательное движение вырождается в устойчивое состояние равновесия.

Совсем иная эволюция асинхронного вращения в первом элементе обнаруживается с ростом  $n$  при  $\gamma > 1$ ,  $\delta > 1$ . Однако синхронизация в этом случае отсутствует, поэтому рассмотрим этот вопрос отдельно.





Р и с. 2.9

### 2.3. Развитие пространственных неустойчивостей.

Модель развития турбулентности по Ландау

Вычислительный эксперимент, проведенный на цепочке из 20 элементов, показал, что для значений параметров  $\gamma > 1$ ,  $\delta > 1$  вдоль цепочки происходит постепенное усложнение асинхронного вращательного движения за счет появления новых, несоизмеримых с предыдущими, частот и нарастание таким образом размерности квазипериодического движения. Тем самым найден пример, демонстрирующий сценарий развития турбулентности по Ландау - Хопфу в пространстве [33].

Изучению природы и механизмов пространственного развития турбулентности в потоковых диссипативных системах посвящен ряд работ [27, 34 - 39]. Первые результаты по этому вопросу получены в работе [27], где численно обнаружены пространственные бифуркации развития хаоса в цепочке однонаправленно связанных генераторов. Периодичес-

кий в начале цепочки режим с ростом номера генератора сменялся квазипериодическим, который, в свою очередь, переходил в режим хаотических колебаний. В работе [34] этому механизму пространственного развития турбулентности дано аналитическое подтверждение. В [34, 35] приведены примеры и построена модельная теория пространственного развития турбулентности на основе универсального закона Фейгенбаума. Таким образом, оказалось, что два из нескольких известных сценариев возникновения стохастичности при изменении управляющего параметра в сосредоточенных системах [40, 41] реализуются и при пространственном развитии турбулентности (здесь роль управляющего параметра играет пространственная координата вдоль цепочки).

Отметим, что возникновение хаоса в цепочках, рассматривавшихся в работах [27, 34 - 38], связано с тем, что в испытываемом воздействии со стороны соседа точечном элементе существуют стохастические движения. Специфика цепочки, динамика которой подчиняется системе (2.3), состоит в том, что точечные элементы, описываемые (2.3) при фиксированных  $n$  ( $n \neq 1$ ), имеют одномерное неавтономное фазовое пространство, в котором, по-видимому, невозможно существование стохастических движений. Учитывая этот факт и то, что в силу однонаправленности связи добавление новой координаты  $n$  в системе (2.3) не ведет к изменению аттракторов в фазовом пространстве  $(n - 1)$ -мерной системы, можно ожидать, что хаос в рассматриваемой цепочечной структуре не возникает.

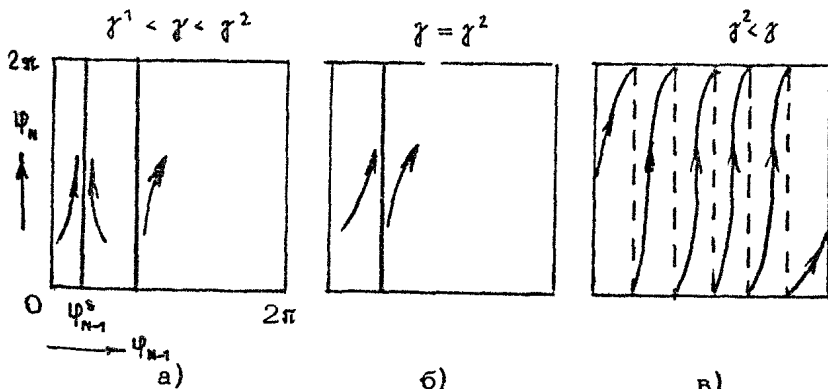
Для того чтобы понять, что представляют собой установившиеся движения в системе (2.3) и как они изменяются с увеличением номера  $n$ , выясним, как изменяются движения в цепочке из  $N$  элементов при изменении параметров  $\gamma$  или  $\delta$

Пусть значения  $\gamma$  и  $\delta$  таковы, что  $|\gamma_n| \equiv |\gamma - \delta \sin \varphi_{n-1}| < 1$ ,  $n = 1, N$  и значения  $\delta$  достаточно малы. Тогда во всех  $N$  элементах цепочки наступает стационарный режим синхронизации, которому в  $N$ -мерном фазовом пространстве  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  соответствует единственное устойчивое состояние равновесия  $Q_1(\varphi_n^s)$  (где  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma_n$  для всех  $n = 1, N$ ). Кроме  $Q_1$ , существует  $(2^N - 2)$  седловых состояний равновесия и одно неустойчивое. Пусть с увеличением  $\gamma$ , при некотором  $\gamma = \gamma^*$ , величина  $\gamma_N$  для последнего элемента в цепочке становится больше единицы,

тогда как остальные  $\gamma_n < 1$ ,  $n = 1, N - 1$ . При этом по координате  $\varphi_N$  происходит слияние и исчезновение состояний равновесия и рождение  $2^{N-1}$  периодических движений, одно из которых устойчиво, одно неустойчиво и остальные седлового типа. В фазовом пространстве  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  им соответствуют прямые линии, проходящие параллельно оси  $\varphi_N$  через точки, имеющие координаты состояний равновесия  $(N - 1)$ -мерной системы. Аттрактор здесь – предельный цикл. В последнем элементе цепочки реализуется асинхронный вращательный режим, в остальных – режим синхронизации.

При дальнейшем увеличении  $\gamma = \gamma^2 > \gamma^1$  величина  $\gamma_{N-1}$  становится больше единицы, остальные  $\gamma_n < 1$ ,  $n = 1, N - 2$ . Теперь по координате  $\varphi_{N-1}$  происходит слияние и исчезновение периодических движений и образование  $2^{N-2}$  квазипериодических движений по  $\varphi_{N-1}, \varphi_N$ . В фазовом пространстве  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  аттрактор – двумерный тор с квазипериодическим движением. На рис. 2.10 показан путь образования квазипериодического движения в плоскости  $(\varphi_{N-1}, \varphi_N)$  при постоянных  $\varphi_n^s$ ,  $n = 1, N - 2$ .

Снова увеличим  $\gamma$ . При  $\gamma = \gamma^3 > \gamma^2$ , т. е. когда  $\gamma_{N-2}$  становится больше единицы, приближаются друг к другу и исчезают двумерные торы с квазипериодическими движениями на них и образуются  $2^{N-3}$  трехмерных торов с квазипериодическими изменениями координат  $\varphi_{N-2}, \varphi_{N-1}, \varphi_N$ . Рассуждая аналогичным образом и далее, можно сказать, что в общем случае при  $\gamma = \gamma^k$ ,  $k = 4, N$  происходит рождение  $2^{N-k}$  торов размерности  $k$ . Таким образом, существует конечное множество значений  $k$ , при переходе через кото-



Р и с. 2.10

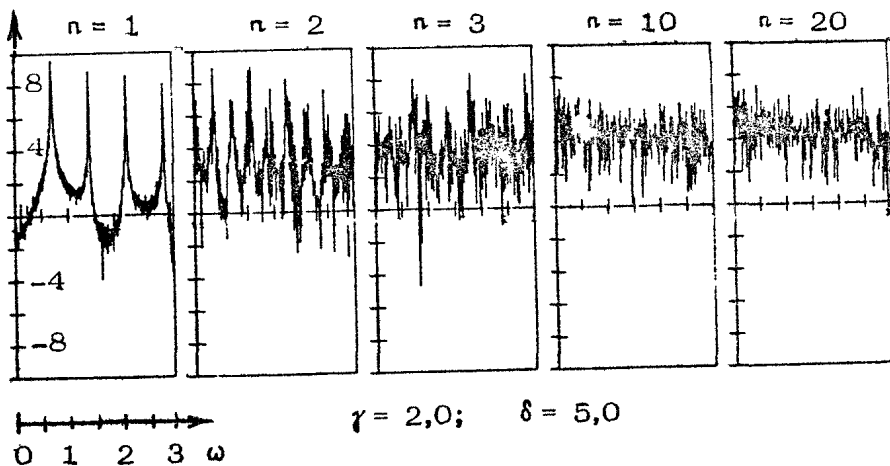


рые в сторону увеличения  $\gamma$  размерность аттрактора системы (2.3) увеличивается на единицу. Наконец, при  $\gamma > \gamma^N$  в  $N$ -мерном фазовом пространстве  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  аттрактором служит  $N$ -мерный тор с незамкнутой намоткой на нем. Это означает, что в цепочке в каждой СФС<sub>n</sub> устанавливаются вращательные движения с отличной от других, рационально несоизмеримой с остальными частотой. Следует отметить, что показанный путь развития аттракторов в системе (2.3) при фиксированном числе элементов цепочки с изменением параметра  $\gamma$  не является единственным.

Из приведенного анализа ясно, что в цепочке из  $N$  элементов переход от элемента с номером  $n-1$  к  $n$ -му элементу может приводить к возникновению новой, рационально несоизмеримой с предыдущими частоты периодического изменения координаты  $\varphi_n$ , т. е. может происходить нарастание размерности квазипериодического движения. Если бы  $N \rightarrow \infty$ , то образом установившегося в такой полубезграничной системе режима явилось бы бесконечномерное "квазипериодическое движение".

Численное моделирование системы (2.3) при  $\gamma = 2$ ,  $\delta = 5$ ,  $N = 5, 10, 20$  показало существование в фазовом пространстве квазипериодических движений размерности  $N$ . Определение размерности проводилось с помощью метода Грассбергера - Прокачиа [42].

Фиг. 2.11



Р и с. 2.11

Для системы (2.3) при  $N = 20$  для получения величины корреляционной размерности с точностью  $\pm 0,2$  потребовалась временная реализация переменной  $\psi_{20}(\tau)$  длиной 200 000 точек. Усложнение движений в цепочке, описываемой (2.3), с ростом числа взаимодействующих СФС четко прослеживается на рис. 2.11, где представлены спектры аттракторов в элементах цепочки для возрастающих значений  $\nu$  ( $\gamma = 2, \delta = 5$ ). Как видно из рис. 2.11, аттракторы в элементах, начиная с третьего, имеют практически сплошной спектр, что характерно для "геометрических странных аттракторов" [43].

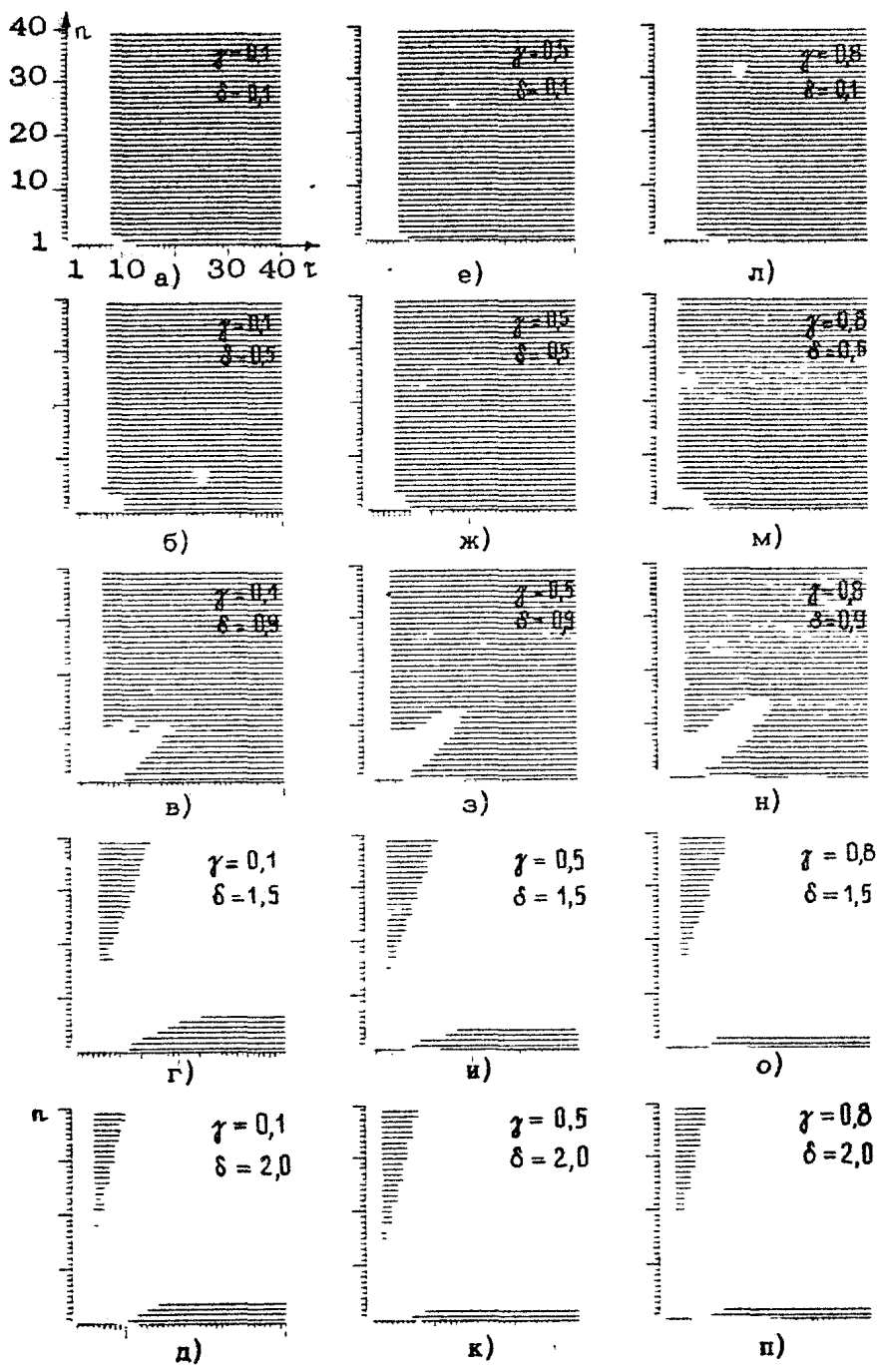
Заметим, что в численном эксперименте было установлено и существование таких квазипериодических движений, размерность которых была меньше размерности фазового пространства. Например, такая ситуация имела место при  $\gamma = 2, \delta = 7$ . Возможность существования аналогичной ситуации можно пояснить, рассмотрев, например, случай  $\gamma \gg 1$ , при котором движения в первом элементе приближенно описываются уравнением  $d\varphi_1/d\tau = \gamma$ , т. е.  $\varphi_1 = \gamma\tau$ . Тогда уравнение для второго элемента имеет вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_2 - \delta \sin \gamma\tau \quad (2.7)$$

Как известно [44], у этого уравнения существуют как рациональные, так и иррациональные числа вращения. В первом случае имеет место периодическое движение, т. е. аттрактор имеет размерность меньшую, чем размерность фазового пространства.

#### 2.4. Переходные процессы

В ходе численного эксперимента при  $N = 40$ , при начальных условиях  $(\varphi_n)_0 = \pi$  проводилось интегрирование системы (2.3) с целью изучения характеристик процесса установления статического режима синхронизации с постоянными значениями  $\varphi_n^s$  в каждом элементе СФС  $n$ . За критерий наличия синхронизации точечного элемента принималось условие зануления  $d\varphi_n/d\tau$  с некоторой точностью  $\epsilon = 0,01$ . На рис. 2.12 представлены пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие динамику процессов, происходящих в цепочке для различных  $\gamma$  и  $\delta$ . Для каждого элемента СФС  $n$  фиксировалось наличие или отсутствие синхронизации



Р и с. 2.12

в дискретные моменты времени, начиная с  $\tau_{нач} = 1$  (с шагом  $\Delta\tau = 1$ ). Это состояние отмечалось на диаграмме точкой. Затем все соседние точки, соответствующие наличию состояния синхронизации, соединялись прямыми (для каждого  $n$ ).

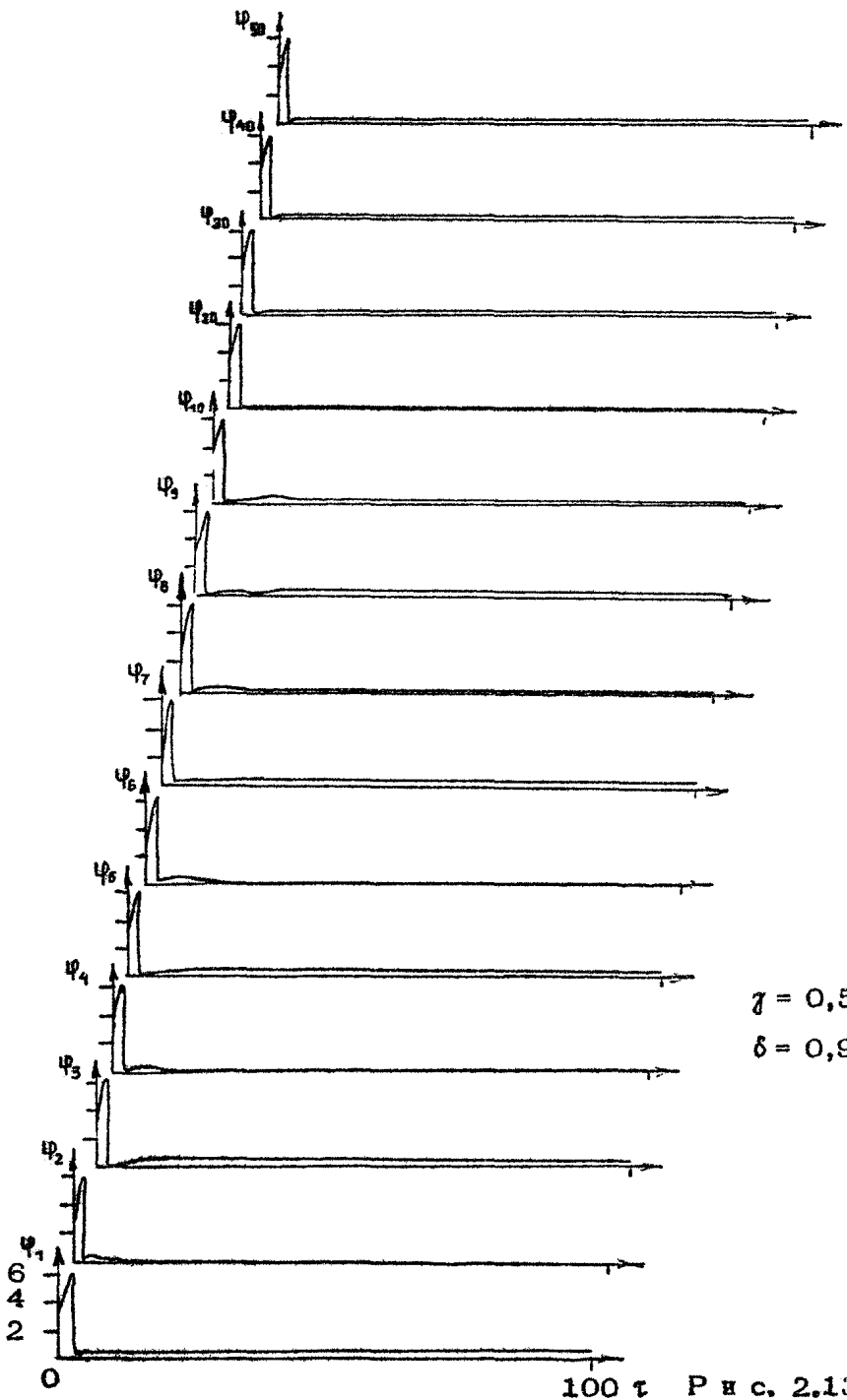
Анализ пространственно-временных диаграмм, полученных при  $\gamma < 1$  позволяет сделать заключение о том, что при слабой связи  $\delta < 1$  вдоль всей цепочки всегда устанавливается режим синхронизации. В этом случае в начальный период времени точечные элементы с достаточно большими номерами практически ведут себя независимо друг от друга и по окончании некоторого переходного процесса в них устанавливается режим синхронизации. Что касается точечных элементов в начале цепочки, здесь сразу начинает сказываться влияние соседних элементов, и синхронизация не устанавливается достаточно долго. При этом в начале цепочки возникают волны переходов "асинхронизация - синхронизация" и "синхронизация - асинхронизация", распространяющиеся вдоль цепочки так, что после окончания переходных процессов во всей цепочке устанавливается режим синхронизации.

При сильной связи ( $\delta > 1$ ), ( $\gamma < 1$ ), как было установлено раньше, режим синхронизации устанавливается только в начале цепочки, а затем он сменяется асинхронным режимом.

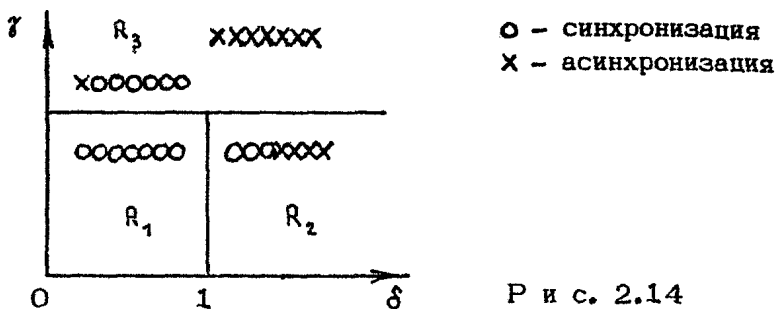
Из анализа пространственно-временных диаграмм для различных  $\gamma$  и  $\delta$  следует, что длительность переходных процессов при установлении режима синхронизации во всей цепочке при  $\delta \approx 1$  примерно в 4 - 5 раз превышает время переходных процессов в цепочке без связей ( $\delta = 0$ ). На рис. 2.13 представлены осциллограммы  $\varphi_n(\tau)$ , иллюстрирующие характер переходного процесса в парциальных СФС $_n$  при установлении режима глобальной синхронизации в цепочке ( $\gamma = 0,5$ ,  $\delta = 0,9$ ).

---

Заключая, можно отметить, что проведенный анализ цепочки (2.3) основывался в основном не на изучении поведения траекторий в  $N$ -мерном фазовом пространстве  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ , а на изучении фазовых портретов парциальных СФС $_n$ . Использование этой идеи [27] позволило не только получить качественное описание динамики цепочки, но и организовать



Р и с. 2.18



Р и с. 2.14

эффективное моделирование динамики на ЭВМ и получить количественные данные.

Обычно в теории колебаний итогом исследования любой динамической системы является разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным режимам работы [11]. Применительно к цепочке (2.3) такое разбиение можно представить условно в виде, показанном на рис. 2.14. Здесь  $R_1$  - область глобальной синхронизации. В цепочке устанавливается режим синхронизации с постоянными во времени значениями разностей фаз  $\varphi_n^S$ , изменяющимися вдоль цепочки. Область  $R_2$  - соответствует частичной синхронизации, которая имеет место для всех элементов  $1 \leq n \leq n^*$ . В области  $R_3$  может быть подавление асинхронного режима и установление квазисинхронизации вдоль цепочки, однако в основном реализуется асинхронный режим во всех элементах цепочки, причем вдоль цепочки происходит последовательное усложнение асинхронных движений за счет появления новых частот, несоизмеримых с предыдущими.

## ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ НА ДИНАМИКУ ЦЕПОЧКИ ПОТОКОВОГО ТИПА

Обратимся к исследованию однородной цепочки, элементами которой являются СФС с инерционными цепями управления. Такие парциальные СФС, естественно, обладают более сложной динамикой, и влияние усложнения динамики точечного элемента на поведение цепочки СФС станет предметом изучения в этой главе. Основное внимание обратим на случай типового интегрирующего фильтра в цепях управления СФС, а затем сделаем замечания, связанные с некоторыми другими возможными усложнениями динамики точечного элемента.

### 3.1. Динамика парциальной системы с фильтром

Рассмотрим наличие в системе (2.2) интегрирующих фильтров  $K(p) = 1/(1 + Tp)$  в цепях управления СФС  $n$ . Нелинейность, как и ранее, принимаем синусоидальной  $F(\varphi) = \sin \varphi$ . После введения безразмерного времени  $\tau = t\sqrt{\Omega/T}$  система уравнений (2.2) принимает вид

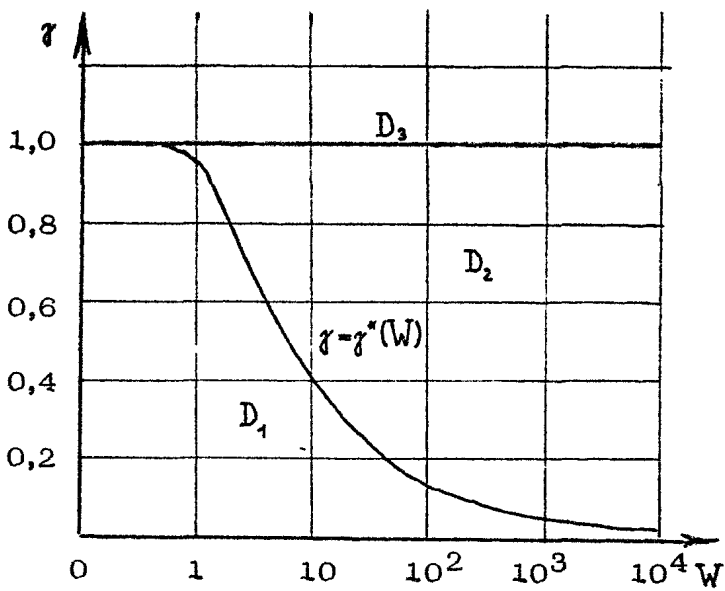
$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin \varphi_{n-1}, \quad n = \overline{1, N} \quad (3.1)$$

Здесь введено безразмерное затухание  $\lambda = (\Omega T)^{-1/2}$ . В литературе по фазовой синхронизации [4, 5, 7, 8] часто употребляется вместо  $\lambda$  параметр  $W = \Omega T$ , связанный с  $\lambda$  соотношением  $\lambda = 1/\sqrt{W}$ . Поэтому ниже будем использовать как параметр  $\lambda$ , так и параметр  $W$ . Как и ранее, будем предполагать параметры  $\gamma, \lambda, \delta > 0$ , а условие на границе  $\varphi_0(\tau) = 0$ .

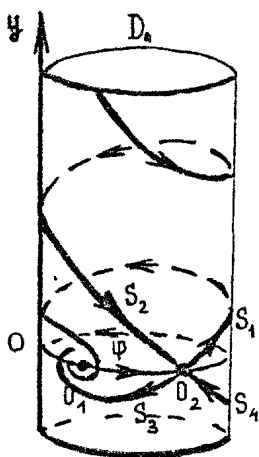
При отсутствии связей ( $\delta = 0$ ) динамика каждого точечного элемента цепочки описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = y, \\ \frac{dy}{d\tau} = \gamma - \lambda y - \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.2)$$

Исследование (3.2) методами нелинейной теории колебаний [11] позволяет получить представленное на рис. 3.1, а раз-



а)



б)



в)



г)

Р и с. 3.1



биение плоскости параметров  $(\gamma, W)$  на области  $D_1, D_2, D_3$ , соответствующие различным режимам работы. Расположение фазовых траекторий на фазовой поверхности  $(\varphi, \psi)$  для значений параметров, удовлетворяющих областям  $D_1, D_2, D_3$ , представлено на рис. 3.1, б, в, г соответственно. На фазовой плоскости при  $\gamma < 1$  есть два состояния равновесия с координатами  $\varphi^s = \alpha \gamma \sin \gamma, \psi^s = 0$  и  $\varphi^u = \pi - \alpha \gamma \sin \gamma, \psi^u = 0$ . Для параметров, принадлежащих области  $D_1$ , при любых начальных условиях на фазовом цилиндре изображающая точка с ростом времени приходит в устойчивое состояние равновесия  $U_1(\varphi^s, 0)$  (за исключением сепаратрис  $S_2, S_4$ , входящих в седло  $U_2(\varphi^u, 0)$ ).

Для параметров, принадлежащих области  $D_2$ , в зависимости от начальных условий, изображающая точка на поверхности  $(\varphi, \psi)$  с ростом времени либо стремится к устойчивому состоянию равновесия, либо к устойчивому предельному циклу (рис. 3.1, в). Области  $D_1$  и  $D_2$  разделяет кривая  $\gamma^*(W)$ . Значения параметров, удовлетворяющие кривой  $\gamma^*(W)$ , являются бифуркационными, соответствующими петле сепаратрисы седла  $U_2(\varphi^u, 0)$ , образующейся от слияния сепаратрис  $S_4$  и  $S_2$ . Вычисление бифуркационных значений и построение кривой  $\gamma = \gamma^*(W)$  на ЭВМ [45] может быть выполнено различными способами [46, 47].

Прямая  $\gamma = 1$  на плоскости  $(\gamma, W)$  также является бифуркационной, соответствующей образованию седло-узла от слияния устойчивого  $U_1$  и неустойчивого  $U_2$  состояний равновесия. Часть прямой  $\gamma = 1$ , прилегающая к оси  $W = 0$ , отвечает бифуркации петли сепаратрис седло-узла.

### 3.2. О возможных режимах в цепочке

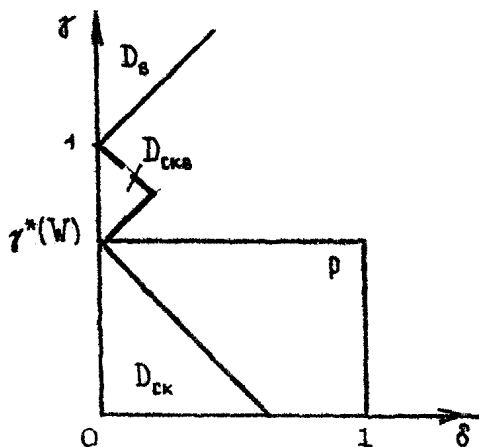
Цепочка (3.1) имеет однонаправленные связи, поэтому поведение каждого элемента определяется тем воздействием, которое оказывается на данный  $n$ -й элемент со стороны предыдущего  $(n-1)$ -го элемента. Как следует из фазовых портретов, приведенных в предыдущем разделе, это воздействие в установившемся режиме может быть либо постоянным во времени (в этом случае в  $(n-1)$ -м элементе устанавливается режим синхронизации), либо периодически изменяющимся во времени (в этом случае в  $(n-1)$ -м элементе устанавливается асинхронный режим). И в том и в другом

случае уравнение для  $n$ -го элемента можно записать в виде

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma_n, \quad (3.3)$$

$\gamma_n = \gamma - \alpha$ , где  $\alpha = \delta \sin \varphi_{n-1}^s$ , если  $(n-1)$ -й элемент - в режиме синхронизации, или  $\alpha = \delta \sin \varphi_{n-1}(\tau)$ , если  $(n-1)$ -й элемент - в асинхронном режиме. Уравнение (3.3)  $n$ -го элемента можно рассматривать как уравнение отдельного элемента (3.2) с добавочным членом  $\alpha$  в правой части, т.е. в данной постановке рассматриваемая задача о нелинейной динамике цепочки СФС сводится к исследованию уравнения неавтономного нелинейного маятника с затуханием (3.3) при наличии ограниченного по амплитуде возмущения, проводившемуся в целом ряде работ [48-51]. Важно отметить, что наряду с возможностью установления различных регулярных колебательных и вращательных движений в системе (3.3) в широком диапазоне параметров получено также существование хаотических движений. Следовательно, наряду с режимом синхронизации, асинхронными регулярными колебательными и вращательными режимами в цепочке (3.1) следует ожидать и появления асинхронных хаотических режимов.

Сделаем некоторые предварительные оценки областей существования различных режимов в цепочке (3.1). Принимая во внимание, что в уравнении (3.3)  $|\alpha| \leq \delta$ , и, опираясь на известное разбиение плоскости параметров  $(\gamma, W)$  для уравнения (3.2) на области, соответствующие различным режимам работы (см. рис. 3.1), можно аналогично [50] получить и для уравнения (3.3) некоторые оценки областей в пространстве  $(\gamma, W, \delta)$  для синхронизации и асинхронных режимов. Для области  $D_{ск}$   $\gamma < \gamma^*(W) - \delta$  в каждом элементе цепочки заведомо устанавливается режим синхронизации или асинхронный колебательный режим (рис. 3.2). Для области  $D_\delta$   $\gamma > 1 + \delta$  во всех элементах цепочки устанавливается асинхронный вращательный режим. Что касается области  $D_{ск\delta}$   $\gamma^*(W) + \delta < \gamma < 1 - \delta$ , то здесь возможно установление разных режимов в зависимости от начальных условий  $(\varphi_n)_n$ ,  $(d\varphi_n / d\tau)_n$  - либо во всех элементах устанавливается режим синхронизации или асинхронный колебательный режим, либо во всех элементах асинхронный вращательный режим, либо в части элементов асинхронный колебательный, а в другой части - асинхронный вращательный режим. На рис. 3.2 области  $D_{ск}$ ,  $D_\delta$ ,  $D_{ск\delta}$  представлены в сечении  $\lambda = 0,4$  ( $W = 6,25$ ,  $\gamma^*(W) = 0,489$ ).



Р и с. 3.2

### 3.3. Глобальная синхронизация

Перейдем к выяснению условий установления режима глобальной синхронизации в цепочке (3.1). Как и ранее, воспользуемся потоковыми свойствами цепочки СФС. Рассмотрим вначале поведение цепочки для параметров из области  $D_{ск}$ . Поскольку здесь  $\gamma < \gamma^*(W)$ , то в первом элементе — СФС<sub>1</sub> — установится режим синхронизации, при котором  $\varphi_1^s = \arcsin \gamma$ ,  $(d\varphi_1/d\tau)^s = 0$ . Поведение СФС<sub>2</sub> описывается уравнением (3.3), в котором  $\gamma_2 = \gamma - \delta \sin \varphi_1^s$ . Так как параметры  $\gamma, W, \delta \in D_{ск}$ , то  $\gamma_2 < \gamma^*(W)$ , следовательно, в СФС<sub>2</sub> также устанавливается режим синхронизации, при котором  $\varphi_2^s = \arcsin \gamma_2$ ,  $(d\varphi_2/d\tau)^s = 0$ . Аналогично, для любого последующего элемента цепочки будет справедливо уравнение (3.3), где

$$\gamma_n = |\gamma (1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots + (-1)^{n-1} \delta^{n-1})| \quad (3.4)$$

Так как  $\gamma, W, \delta \in D_{ск}$ , то  $\gamma_n < \gamma^*(W)$  и в любой СФС<sub>n</sub> будет устанавливаться режим синхронизации, при котором  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma_n$ ,  $(d\varphi_n/d\tau)^s = 0$ . Заметим, что условие  $\gamma_n < \gamma^*(W)$  удовлетворяется не только для параметров, принадлежащих области  $D_{ск}$ , но и в более широкой области  $\rho \{ 0 \leq \gamma < \gamma^*(W), 0 \leq \delta \leq 1 \}$ . Таким образом, для параметров, принадлежащих области  $\rho$  во всех элементах цепочки устанавливается

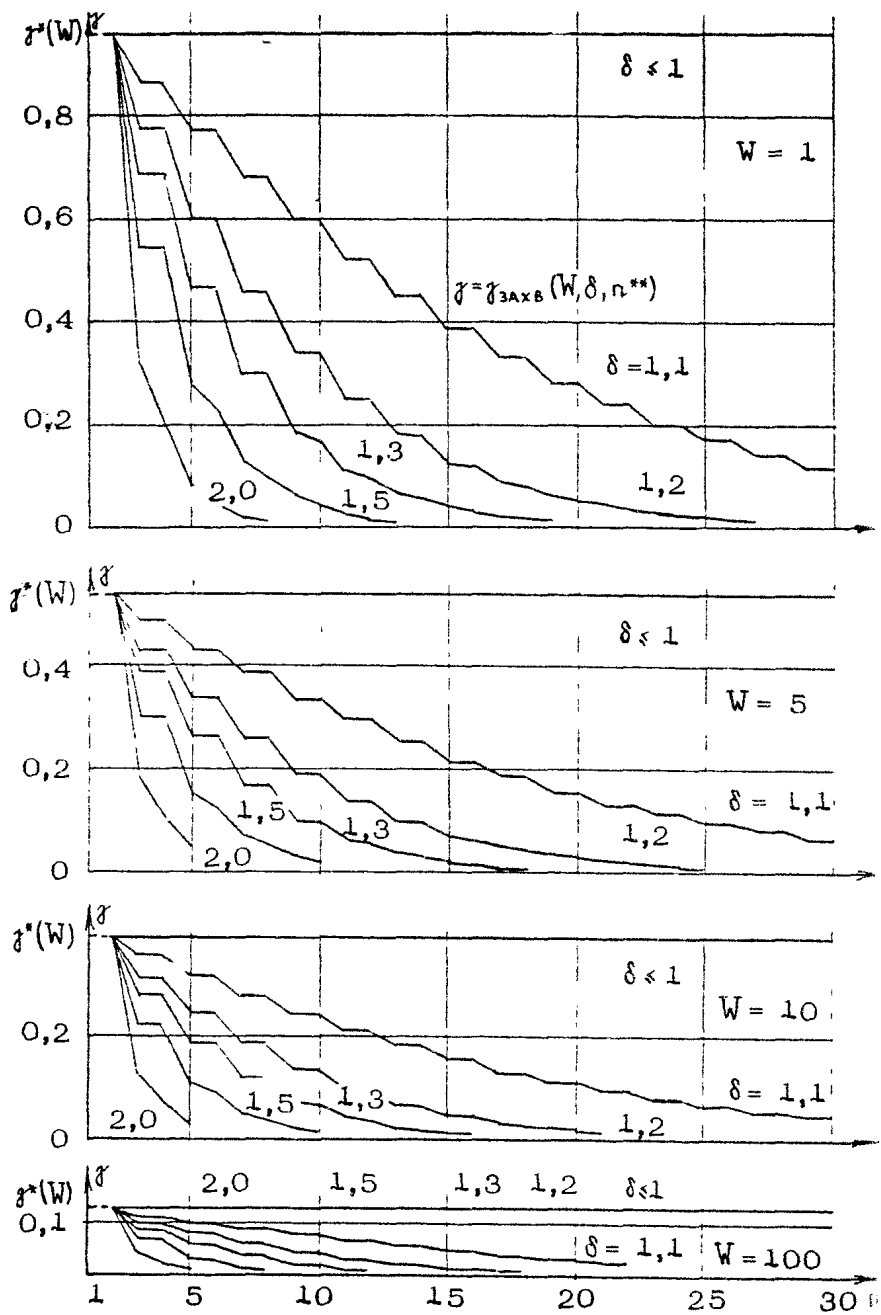
режим синхронизации. Установившиеся значения  $\varphi_n^s$  определяются так же, как и для системы (2.3), поэтому здесь справедливы графики рис. 2.5 - 2.7.

Выясним, как изменится поведение цепочки СФС вне области  $\rho$ . При  $0 < \gamma < \delta^*(W)$ ,  $\delta > 1$  из уравнения (3.4) следует, что в этом случае с ростом  $n$  растет величина  $\gamma_n$ , поэтому в достаточно длинной цепочке всегда найдется такой номер  $n = n^{**}$ , что  $\gamma_{n^{**}} < \delta^*(W)$ , а  $\gamma_{n^{**}+1} > \delta^*(W)$ . Это означает, что во всех элементах с начала цепочки до  $n = n^{**}$  устанавливается режим синхронизации при любых начальных условиях  $(\varphi_n)_n$ ,  $(d\varphi_n/dt)_n$ , а в следующем элементе  $n = n^{**}+1$  в зависимости от начальных условий может установиться либо режим синхронизации, либо асинхронный вращательный режим. В первом случае в следующем элементе  $n = n^{**}+2$ , снова в зависимости от начальных условий, устанавливается либо режим синхронизации, либо асинхронный вращательный режим, а во втором случае в элементе  $n = n^{**}+2$  можно ожидать установления более сложного асинхронного вращательного режима вплоть до хаотического. Аналогичные рассуждения можно распространить и на следующие элементы  $n = n^{**}+3$  и т.д. Таким образом, при переходе через значение  $n = n^{**}$  происходит пространственная бифуркация потери синхронизации, связанная с рождением периодического движения при разрушении петли сепаратрисы седлового состояния равновесия.

При дальнейшем увеличении  $n$ , как следует из уравнения (3.4), найдется такой элемент  $n = n^*$ , что  $\gamma_{n^*} \leq 1$ , а  $\gamma_{n^*+1} > 1$ . При этом, если в предыдущих СФС $_n$  номерами  $n^{**} < n < n^*$  сохраняется установление режима синхронизации, то в СФС $_n$  номером  $n = n^*+1$  обязательно устанавливается асинхронный вращательный режим, усложняющийся с дальнейшим ростом  $n$ , т.е. при  $n = n^*$  происходит пространственная бифуркация потери синхронизации, связанная со слиянием устойчивого и седлового состояний равновесия.

Заметим, что дискретность пространственной переменной  $n$  ведет к тому, что непосредственно момент бифуркации слияния состояний равновесия и появления петли сепаратрисы седла может быть пропущен.

Понятие пространственной полосы синхронизации, введенное соотношением (2.6) для цепочек (2.3), справедливо и в рассматриваемом случае цепочек (3.1). Наряду с этим целесообразно ввести пространственную полосу захвата,



Р и с. 3.3

определяемую бифуркационным значением параметра  $\gamma = \gamma_{\text{закв}}(W, \delta, n^{**})$ , удовлетворяющим соотношению

$$\left| \gamma \left[ \sum_{k=0}^{n^{**}-1} (-1)^k \delta^k \right] \right| = \gamma^*(W) \quad (3.5)$$

В полосе расстройек по частоте  $0 < \gamma < \gamma_{\text{закв}}(W, \delta, n^{**})$  для всех СФС  $n$  в цепочке с номерами  $n = 1, 2, \dots, n^{**}$  при любых начальных условиях  $(\varphi_n)_n, (d\varphi_n/dt)_n$  устанавливается режим синхронизации. В полосе расстройек  $\gamma_{\text{закв}}(W, \delta, n^{**}) < \gamma < \gamma_{\text{синхр}}(W, \delta, n^{**})$  устанавливается режим синхронизации или асинхронный режим в зависимости от начальных условий. На рис. 3.3 даны графики зависимости  $\gamma = \gamma_{\text{закв}}(W, \delta, n^{**})$ . Для удобства пользования графиками точки, вычисленные для дискретных  $n^{**}$ , соединены прямыми.

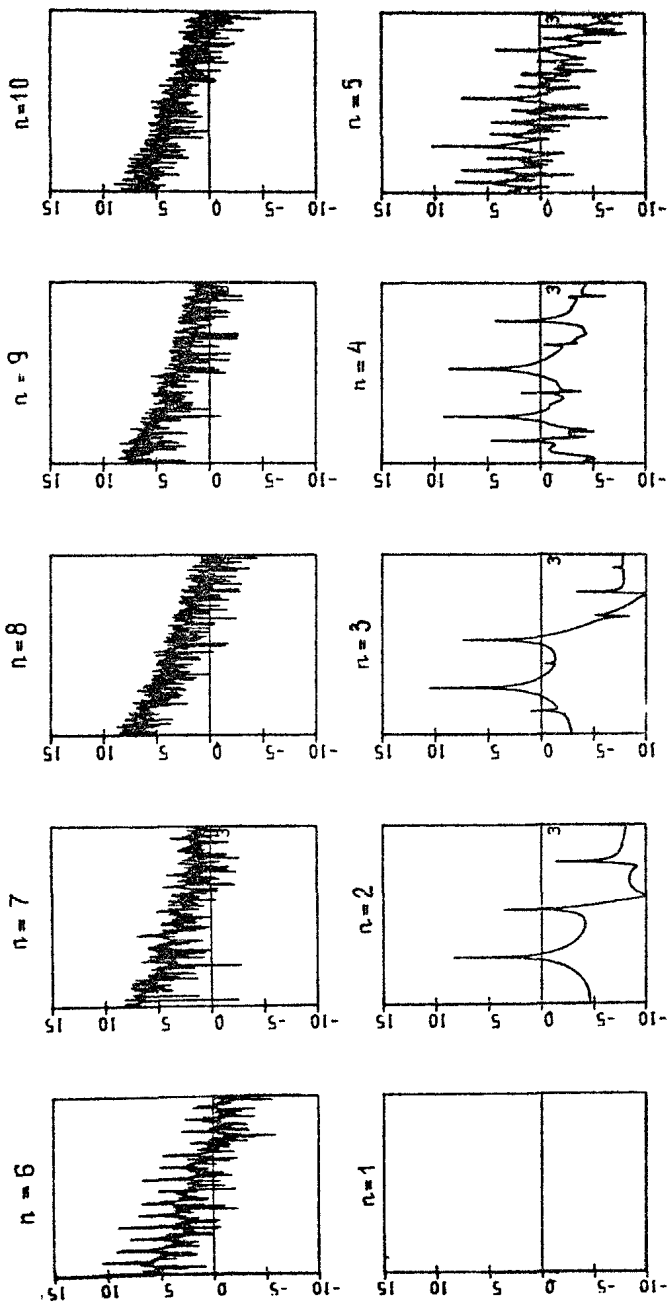
Сделаем несколько замечаний относительно возможного поведения цепочки СФС для значений параметров из области  $D_{\text{закв}}$  (а также при выходе из нее с ростом  $\delta$ ). Здесь в элементах цепочки в зависимости от начальных условий может установиться либо режим синхронизации (или асинхронных колебаний), либо асинхронный вращательный режим. Очевидно, что произвол в выборе начальных условий обуславливает возможность установления разнообразных режимов в этих элементах цепочки.

Характерным для областей  $D_{\text{закв}}$  и  $D_{\delta}$ , а также вне этих областей при увеличении  $\delta$  является установление в начале цепочки асинхронных вращательных движений, поэтому естественно ожидать, что с ростом  $n$ , т.е. вниз по потоку, эти вращательные движения будут усложняться вплоть до хаотических режимов ( $\delta > 1$ ). Однако наряду с этим возможно с ростом  $n$  при  $\delta < 1$  ожидать и перехода вращательных движений в колебательные с последующим уменьшением амплитуды колебаний (аналогично эффекту подавления асинхронных вращений вниз по потоку в цепочке (2.3) — см. рис. 2.8). Такая ситуация может сохраниться и для цепочки (3.1) для значений  $\gamma$ , несколько превышающих значения  $\gamma^*(W)$  и единицу (см. далее рис. 3.24,6).

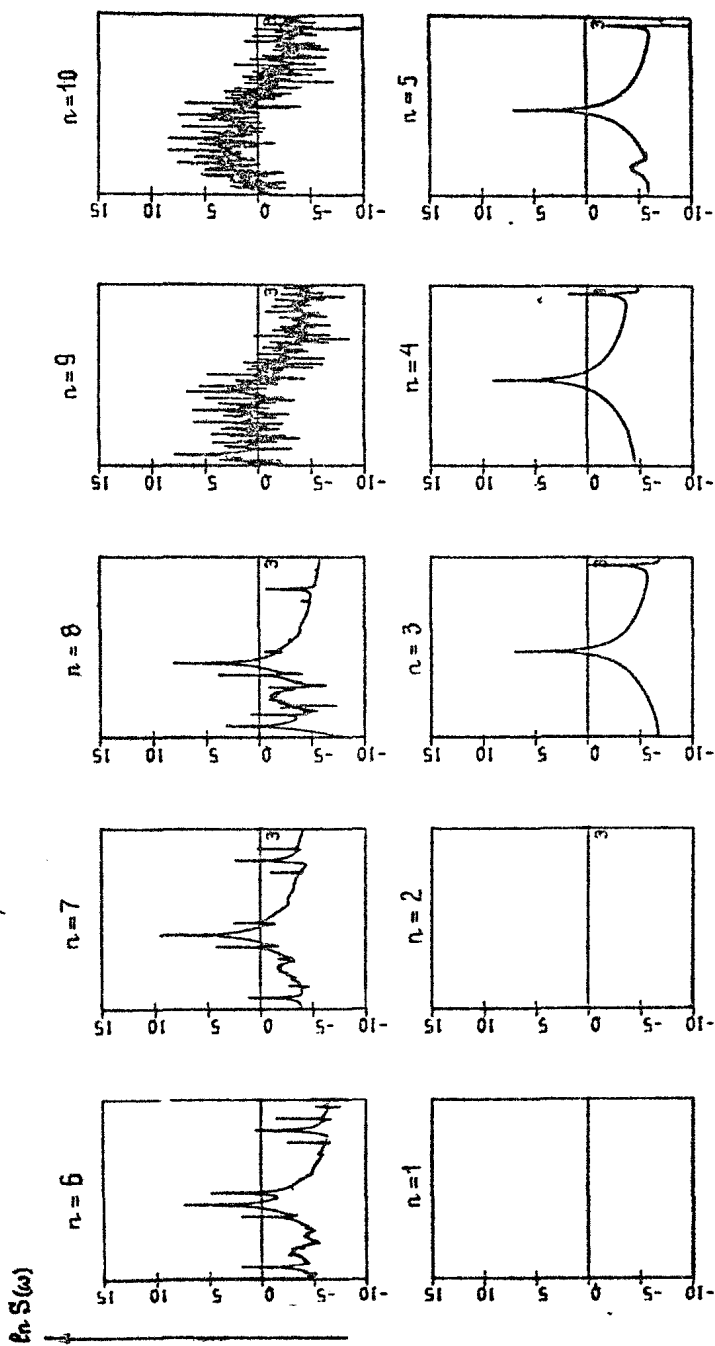
### 3.4. Сценарии развития хаоса

Остановимся на возможных путях эволюции асинхронных движений вдоль по цепочке, приводящих к возникновению

$\rho_n S(\omega)$

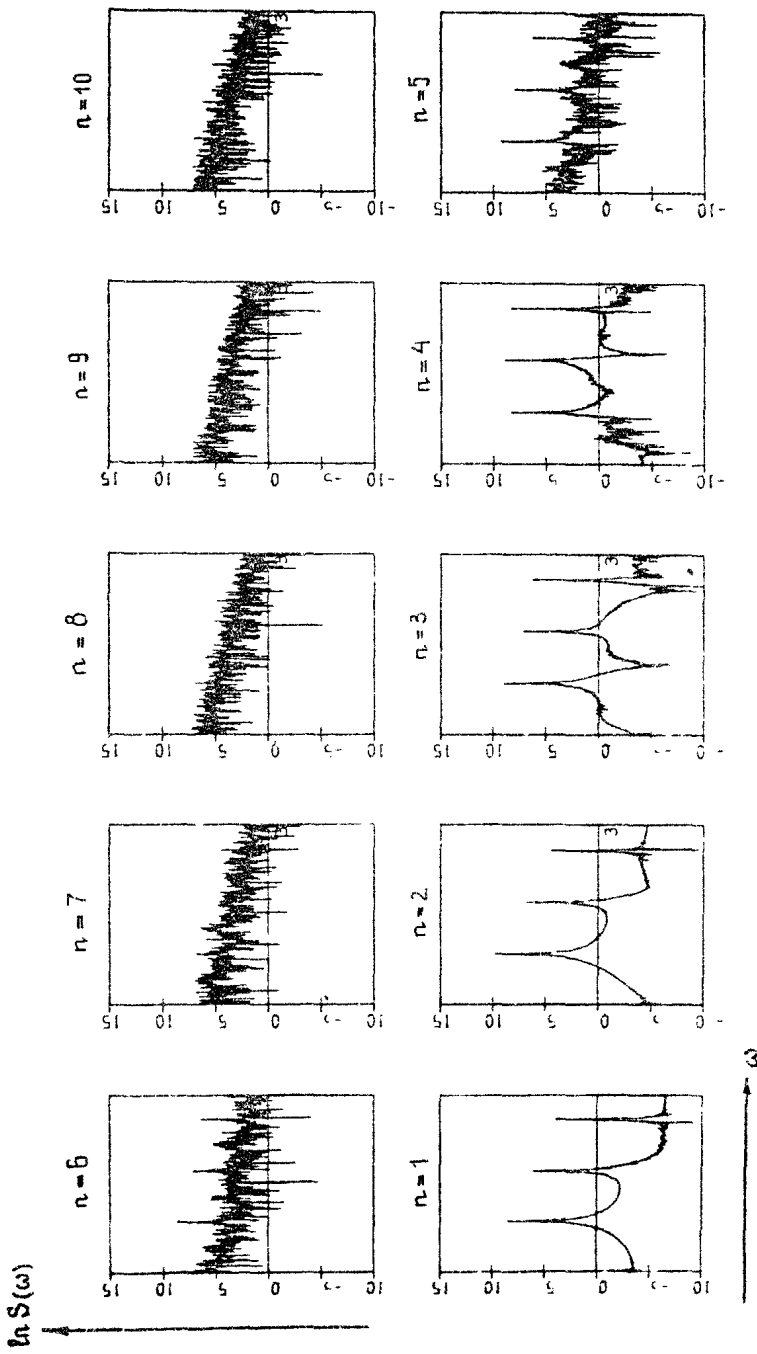


Р и с. 3.4

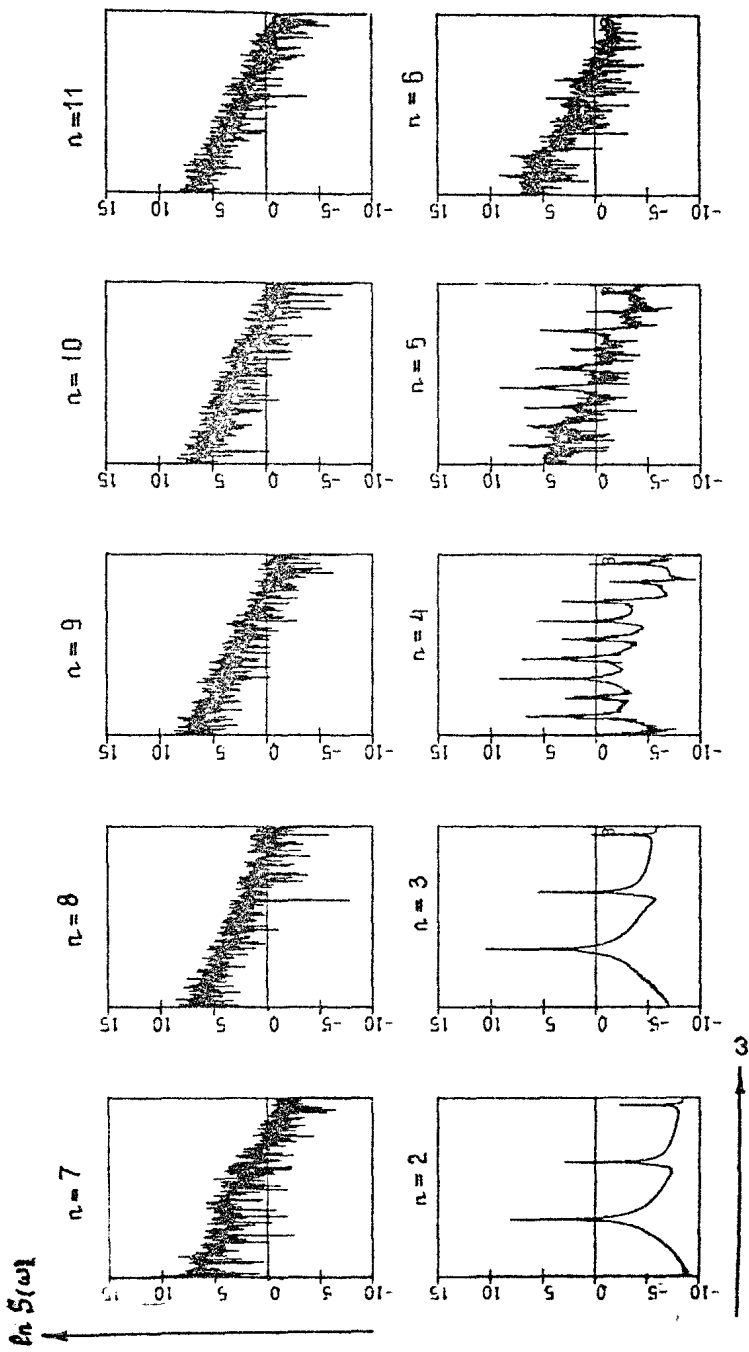


Р и с. 3.5





Р и с. 3.6



Р и с. 3.7

динамического хаоса. Полезную ориентировочную информацию в этом отношении дают известные из литературы [43-51] результаты по анализу уравнения типа (3.3) с линейно изменяющейся фазовой переменной  $\psi_{n-1}(\tau)$ . Проведенный численный эксперимент по моделированию динамики цепочки (3.1) показал, что с ростом  $n$  в цепочке реализуются разные сценарии перехода к хаосу. На рис. 3.4 - 3.7 приведены спектры установившихся движений в нескольких первых элементах цепочки. Из анализа спектров следует, что:

а) при  $\gamma = 0,3$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 3,6$  (рис. 3.4) вдоль цепочки возникает хаос через бифуркации удвоения периода периодического движения: в первом элементе аттрактор - состояние равновесия, во втором - периодическое движение с периодом  $T$ , в третьем и четвертом - периодические движения с периодом  $2T$ , в пятом и шестом - периодические движения с периодом  $4T$  (наличие в шестом элементе периодического движения проверено вычислением первого ляпуновского показателя  $L^1$ , который оказался нулевым), в седьмом и всех последующих элементах - странные аттракторы с возрастающей с ростом  $n$  корреляционной размерностью,

б) при  $\gamma = 0,3$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 2,4$  (рис. 3.5) вдоль цепочки хаос возникает через бифуркацию разрушения двумерного инвариантного тора: в первом и втором элементах аттракторы - состояния равновесия, в третьем, четвертом и пятом - периодические движения, в элементах с шестого по восьмой - двумерные торы с квазипериодической обмоткой, в девятом (для него  $L^1 > 0$ ) и всех последующих - странные аттракторы,

в) при  $\gamma = 0,6$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 2,2$  (рис. 3.6) вдоль цепочки хаос возникает через перемежаемость: в первых четырех элементах аттракторы - периодические движения (для всех  $L^1 = 0$ ) во всех элементах начиная с пятого (для него  $L^1 > 0$ ) - странные аттрактора,

г) при  $\gamma = 0,488$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 2,8$  (рис. 3.7) вдоль цепочки происходит возникновение хаоса через бифуркацию разрушения трехмерного инвариантного тора: в первом элементе аттрактор - состояние равновесия, во втором и третьем - периодические движения, в четвертом - трехмерный тор с квазипериодической обмоткой, в пятом (для него  $L^1 > 0$ ) и во всех последующих - странные аттракторы.

В приведенных сценариях возникновения стохастичности в связи с дискретностью переменной  $\eta$  некоторые промежуточные бифуркации отсутствуют.

### 3.5. Характеристики переходных процессов

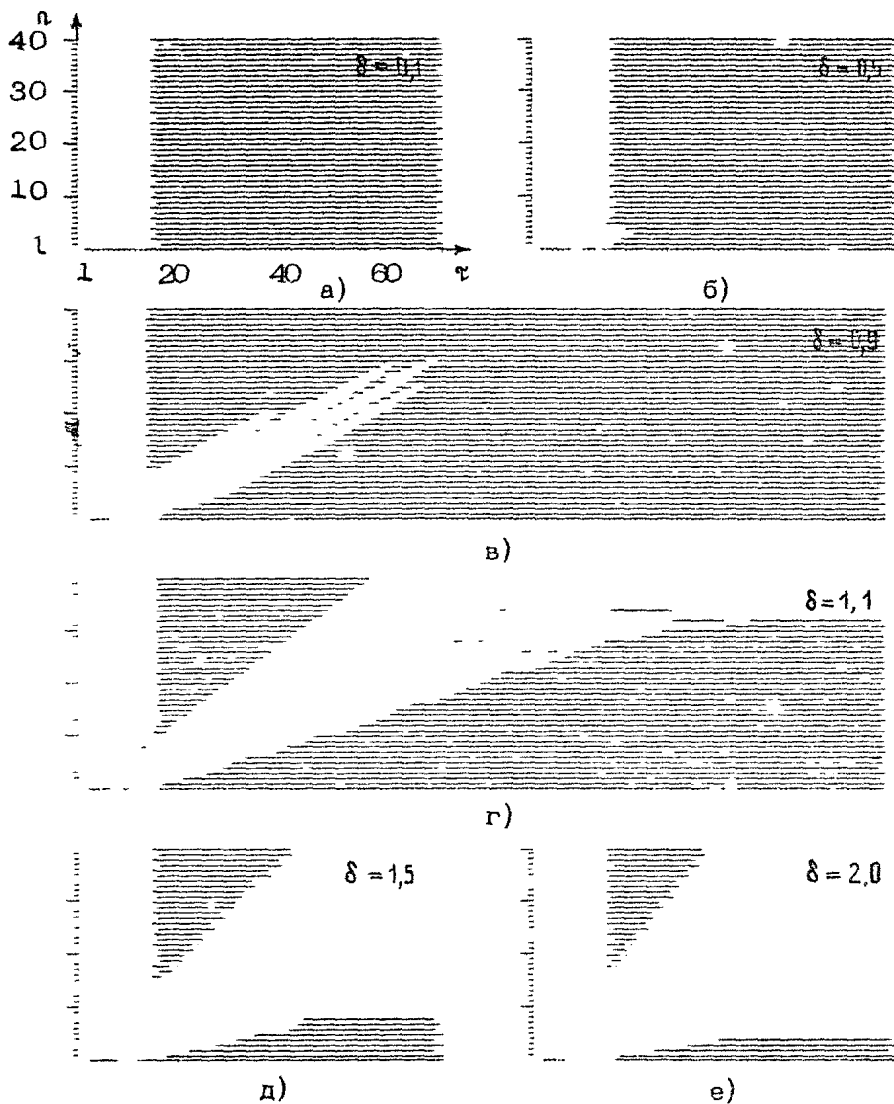
Для изучения характера и длительности переходных процессов система (3.1) моделировалась при  $N = 40$ . На рис. 3.8–3.10 представлены пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие динамику процессов в цепочке СФС при  $W = 1$ ,  $\gamma = 0,1, 0,5, 0,8$  для различных значений  $\delta$ . Выбранные значения параметров обеспечивают синхронизацию отдельных СФС $_{\eta}$  при любых начальных условиях, так как  $\gamma < \gamma^*(W)$  (см. рис. 3.1). Критерий установления режима синхронизации и обозначения приняты такими же, как и в гл.2. Начальные условия при интегрировании  $(\varphi_{\eta})_{\eta} = \pi$ ,  $(d\varphi_{\eta}/dt)_{\eta} = \gamma/\lambda$ ,  $\eta = \overline{1, N}$  выбраны наихудшими с точки зрения синхронизации парциальной СФС $_{\eta}$ . В этом случае, если в парциальной СФС $_{\eta}$  устанавливается режим синхронизации, то он заведомо будет устанавливаться и при любых других начальных условиях [32,47].

Анализ пространственно-временных диаграмм и их сравнение с рис. 2.12 показывают, что учет инерционности цепи управления в каждой СФС $_{\eta}$ , включенной в цепочку привел к некоторому усложнению переходных процессов. В начале цепочки появляются и бегут вдоль цепочки несколько волн переходов "синхронизация–асинхронизация" и "асинхронизация–синхронизация". Время установления режима синхронизации в каждом элементе и в цепочке в целом затягивается (при выбранных параметрах в 2 – 3 раза).

Характер переходных процессов иллюстрируется оциллограммами  $d\varphi_{\eta}/dt$ , приведенными на рис. 3.11 и 3.12 для цепочки из 50 элементов при  $\gamma = 0,5$ ,  $\lambda = 0,6$ ,  $\delta = 0,9$  и  $\delta = 2$  соответственно. Если рис. 3.11 иллюстрирует типичную картину установления режима синхронизации, то рис. 3.12 – пространственную бифуркацию срыва режима синхронизации и развитие хаоса вниз по потоку с ростом  $\delta$ .

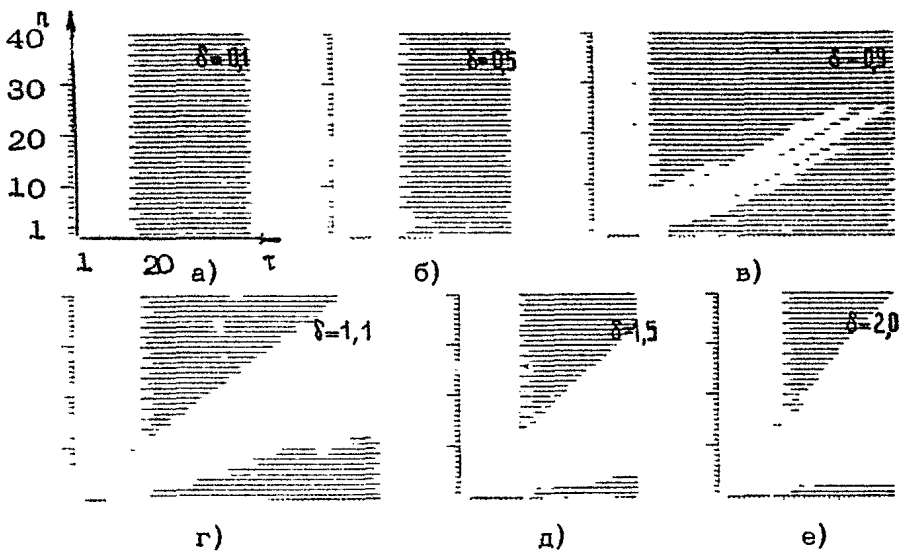
### 3.6. Структурообразование

В элементах потоковой цепочки (3.1) для разных значений параметров происходит установление различных стационарных



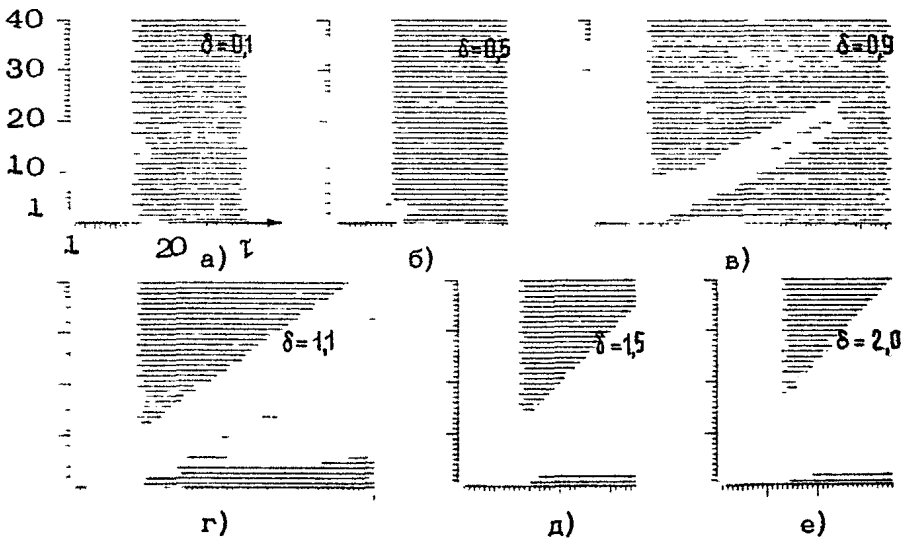
$$K(\rho) = 1 / (1 + I_\rho), W = 1, \gamma = 0,1, \varepsilon = 0$$

Р и с. 3.8



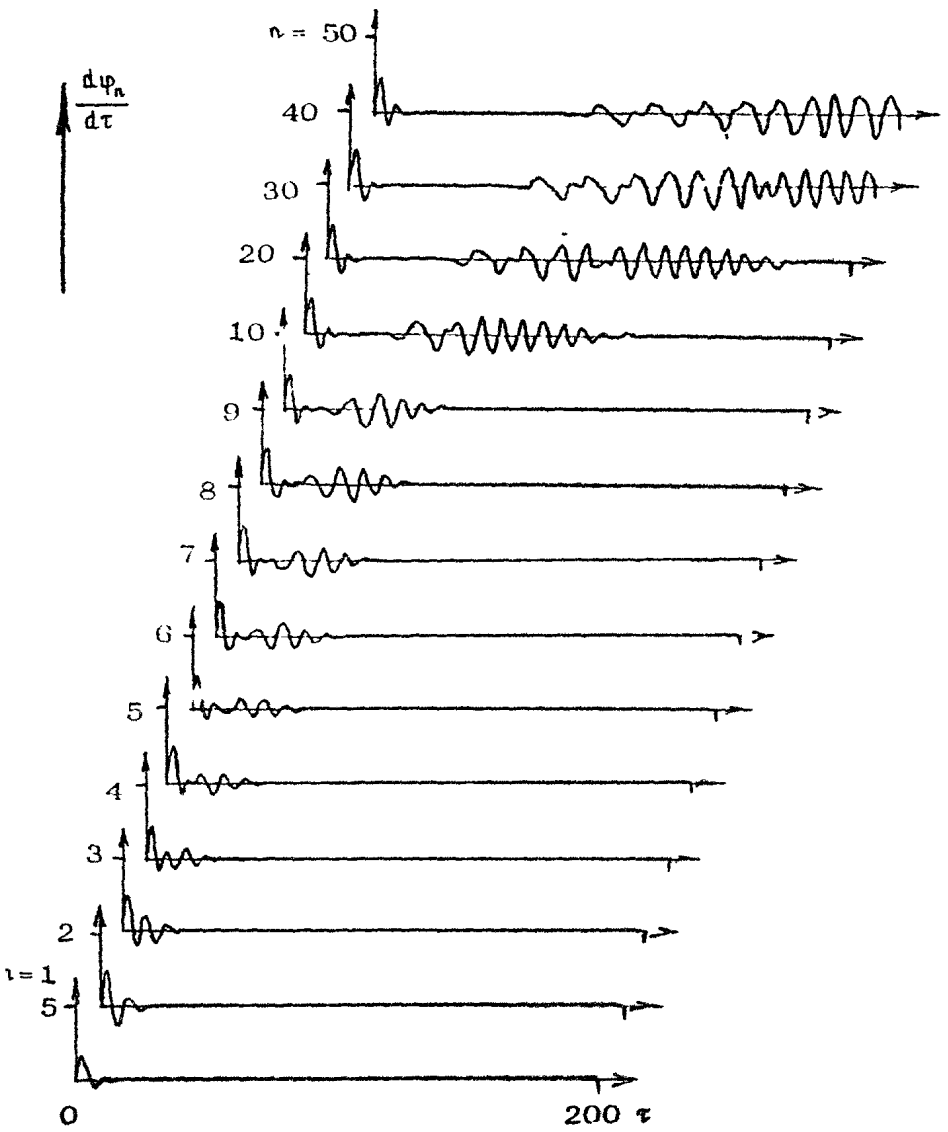
$$K(p) = 1/(1+T_p), W = 1, \gamma = 0,5, z = 0$$

Р и с. 3.9

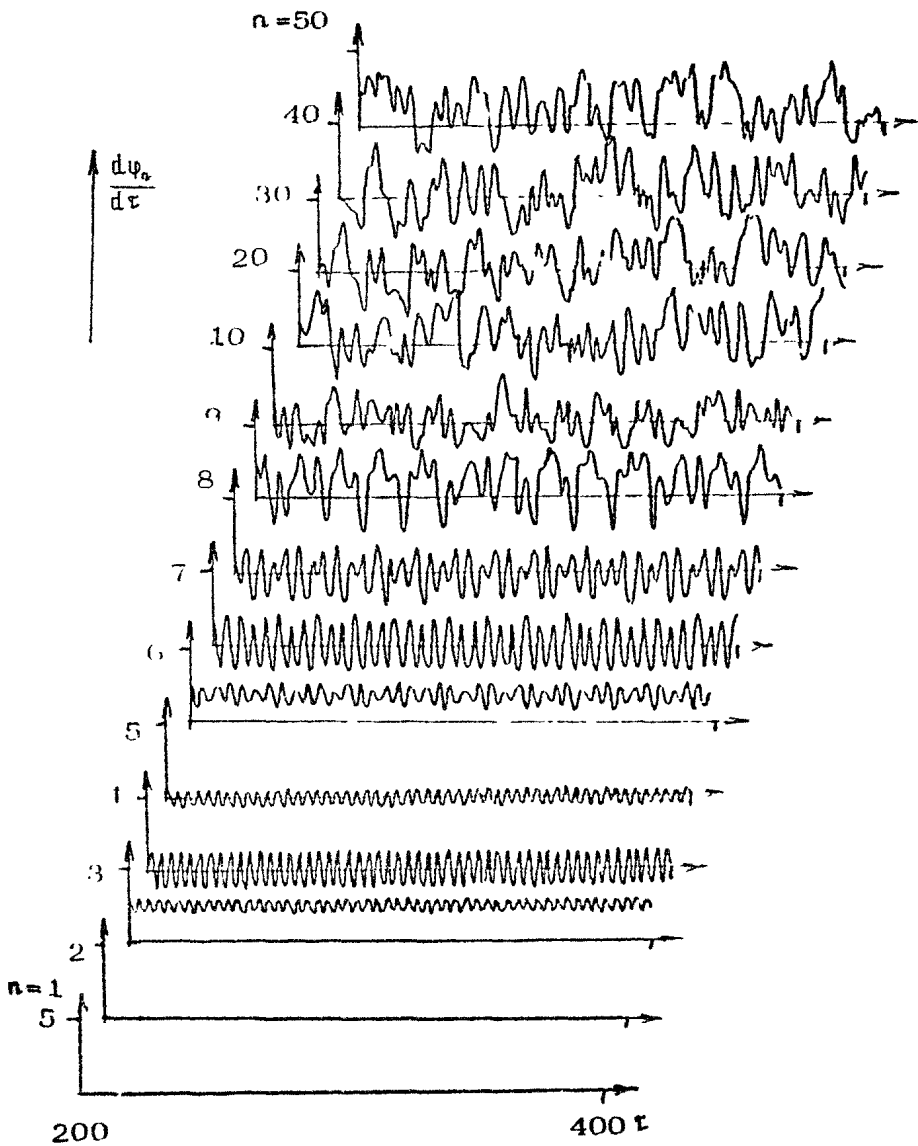


$$K(p) = 1/(1+T_p), W = 1, \gamma = 0,8, z = 0$$

Р и с. 3.10



Р и с. 3.11



Р и с . 3.12



режимов: синхронизации, асинхронных вращательного, колебательного ( в том числе хаотического). Отвлечемся от деталей и огрубленно будем различать установившееся состояние каждого элемента цепочки только по одному признаку: синхронизация–асинхронизация. В этом случае элементы, находящиеся в том или ином установившемся состоянии могут образовывать некоторые упорядоченные группы элементов – структуры. Образование таких групп можно рассматривать как элемент самоорганизации в цепочечных потоковых системах [1,2].

В цепочке СФС (3.1) простейшей стационарной структурой является фронт перехода "синхронизация–асинхронизация" (см. рис. 2.12, 2.14 при  $\gamma < 1$ ,  $\delta > 1$  и рис.3.8–3.10 при  $\gamma < \gamma^*(W)$ ,  $\delta > 1$ ) Реализуется также и фронт обратного перехода "асинхронизация–синхронизация" (см.рис.2.8 при  $\gamma > 1$ ).

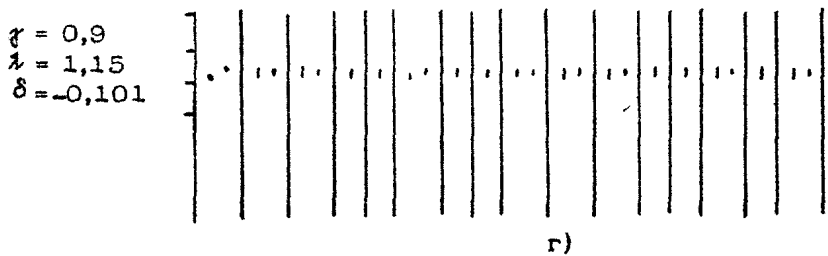
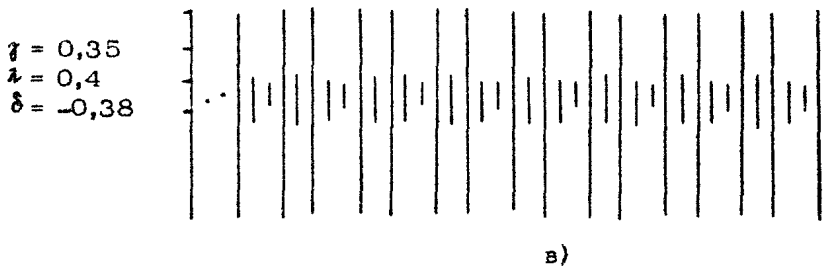
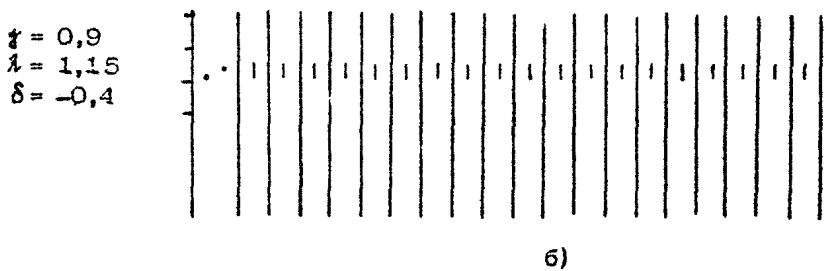
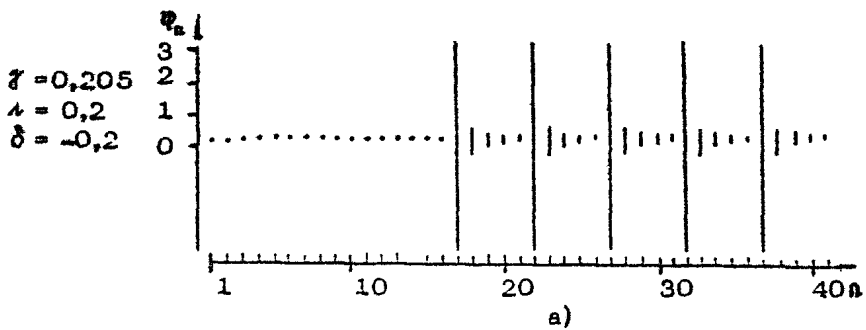
Естественно, что если ввести более детальное описание состояния каждого элемента цепочки, например, различать асинхронные режимы вращательный и колебательный, то такая стационарная структура, как фронт перехода, растягивается по координате  $n$ , становясь "сглаженной". Например, стационарная структура, представленная на рис. 2.8, демонстрирует переход от асинхронного вращательного режима к асинхронному колебательному с уменьшающейся амплитудой при увеличении  $n$  и далее переход к режиму синхронизации.

Интересным вариантом усложнения стационарных структур может явиться совокупное существование фронтов переходов "синхронизация–асинхронизация" и "асинхронизация–синхронизация", т.е. образование стационарных структур типа одного или нескольких импульсов [52] (импульс синхронизации или импульс асинхронизации). Структуры, близкие к структурам такого типа, могут существовать и в рассматриваемой цепочке (3.1).

На рис. 3.13 представлены результаты численного эксперимента, проведенного на цепочке из 40 элементов для значений параметров  $\gamma < \gamma^*(W)$ ,  $-1 < \delta < 0$ , т.е. при отрицательных параметрах связи  $*$ . На графиках даны изменения

---

\* Заметим, что изучение динамики для отрицательных коэффициентов связи может иметь самостоятельный интерес, например, в моделях активных сред [52].



Р и с. 3.13

координат  $\varphi_n$  в установившемся режиме (величина отрезка по  $\varphi$  для данного  $n$  соответствует диапазону изменения  $\varphi_n$ ). Для вращательного периодического установившегося движения длина соответствующего отрезка равна  $2\pi$ . На рис. 3.13, а, б даны примеры, демонстрирующие для начальных элементов цепочки установление режима синхронизации, а затем установление периодически повторяющихся стационарных структур типа импульсов, для которых характерно установление вращательных и колебательных движений (амплитуда которых уменьшается с ростом  $n$ ). На рис. 3.13, в дан пример установления более сложных структур, когда имеет место периодическое повторение не одного импульса, а группы, состоящей из двух различных импульсов. Наконец, на рис. 3.13, г дан пример, показывающий возможность существования сложных структур, для которых характерно непериодическое повторение импульсов (по-видимому, по хаотическому закону).

### 3.7. О цепочках с более сложной динамикой элементов

Рассмотренный подход к исследованию нелинейной динамики простейших потоковых цепочек СФС естественно распространить на случаи цепочек, в которых парциальные СФС обладают более сложной динамикой. В качестве такой системы выберем достаточно широко известную в теории фазовой синхронизации [4] СФС с пропорционально-интегрирующим фильтром в цепи управления. Не приводя полного исследования (поскольку в принципе полном плане подход к исследованию цепочки СФС сохраняется таким же, как и в ранее рассмотренных простейших случаях, однако трудоемкость изучения существенно возрастает), остановимся сейчас на некоторых особенностях динамического поведения такой цепочки СФС.

При наличии пропорционально-интегрирующих фильтров  $K(p) = (1 + \tau p) / (1 + T p)$  в цепях уравнения СФС<sub>n</sub> систему уравнений (2.2) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \left( \lambda + \frac{\gamma}{\lambda} \cos \varphi_n \right) \frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin \varphi_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (3.6)$$

где  $\tau = t \sqrt{\Omega/T}$ ,  $\lambda = W^{-1/2}$ ,  $W = \Omega T$ , граничные условия  $\varphi_0(\tau) \equiv 0$

При отсутствии связей ( $\delta = 0$ ), динамику отдельной парциальной СФС, описываемой уравнениями

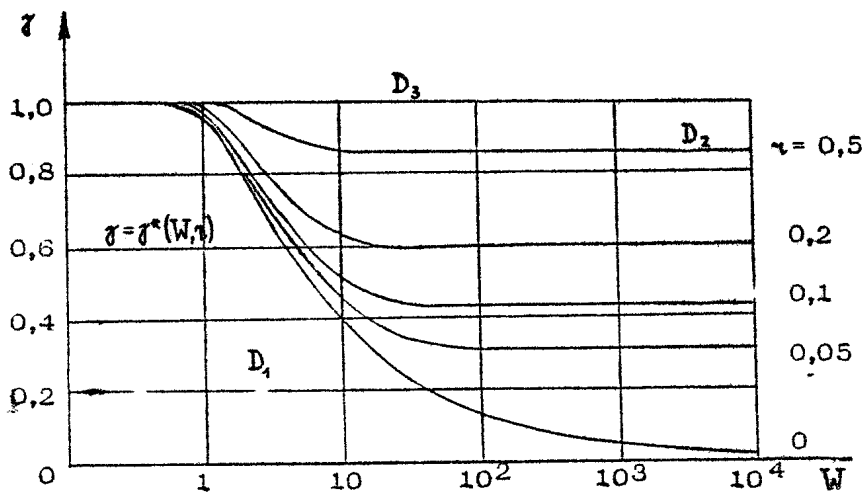
$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} = \gamma - \left( \lambda + \frac{\nu}{\lambda} \cos \varphi \right) \psi - \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.7)$$

характеризует возможность появления асинхронных вращательных периодических движений не только через бифуркацию петли сепаратрисы седла, как это имело место в системе (3.2), но и бифуркацию двойного цикла [53]. На рис. 3.14 даны графики полосы захвата [45]  $\gamma = \gamma^*(W, \nu)$  для различных значений параметра  $\nu$ , выделяющие на плоскости параметров  $(\gamma, W)$  область  $D_1$ , соответствующую установлению режима синхронизации при любых начальных условиях (ниже кривых  $\gamma = \gamma^*(W, \nu)$ ) Фазовый портрет дан на рис. 3.15,а.

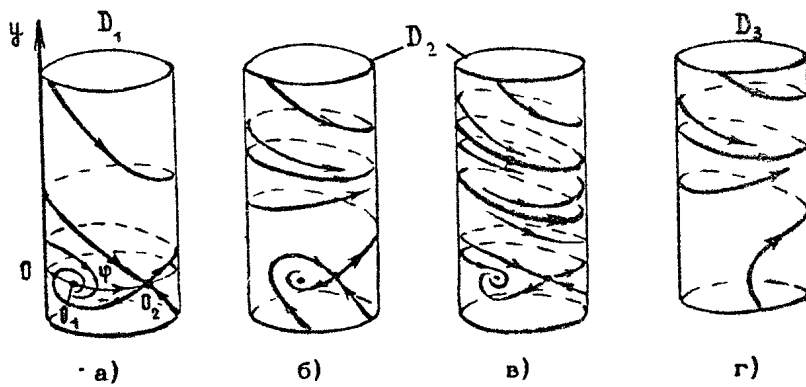
В области параметров  $D_3$  всегда устанавливается асинхронный вращательный периодический режим (рис. 3.15,г). В области параметров  $D_2$  возможно установление либо режима синхронизации, либо асинхронного режима периодических вращений — в зависимости от начальных условий (возможные фазовые портреты даны на рис. 3.15,б,в).

При введении однонаправленных связей ( $\delta \neq 0$ ) для значений параметров  $0 < \gamma < \gamma^*(W, \nu)$ ,  $0 < \delta < 1$  во всех элементах цепочки устанавливается режим синхронизации. Установившиеся значения  $\varphi_n^s$  определяются графиками рис. 2.5 — 2.7. Для  $\delta > 1$  можно ввести, в соответствии с соотношением (3.5) пространственную полосу захвата  $\gamma = \gamma_{\text{захв}}(W, \delta, \nu, n^{**})$  Соответствующие графики зависимости  $\gamma = \gamma_{\text{захв}}(W, \delta, \nu, n^{**})$  даны на рис. 3.16 для  $\nu = 0,05$ , на рис. 3.17 для  $\nu = 0,1$ , на рис. 3.18 для  $\nu = 0,2$ . Пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие переходные процессы в цепочке для различных значений параметров даны на рис. 3.19 — 3.23. Критерии установления режима синхронизации, начальные условия при интегрировании аналогичны принятым ранее в разд. 3.5.

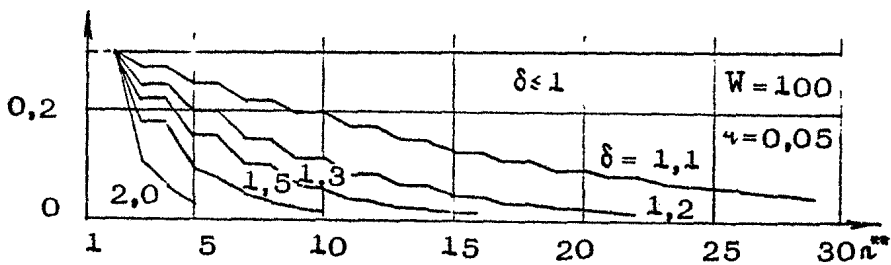
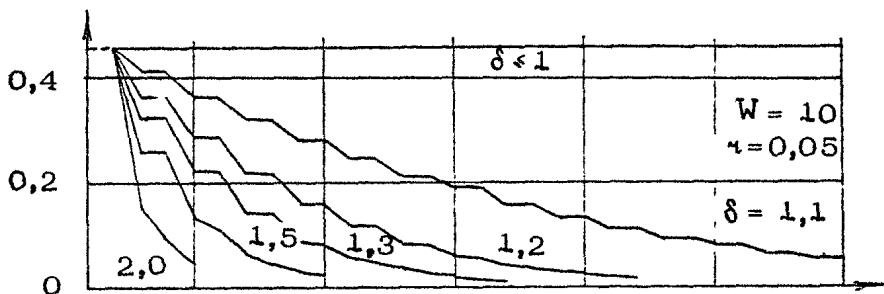
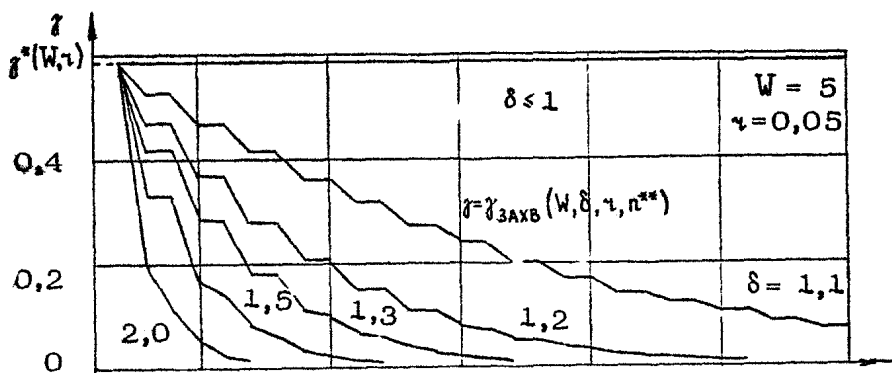
На рис. 3.24 даны пространственно-временные диаграммы, показывающие динамику подавления биений вдоль цепочки в случае выбора параметров  $\gamma > \gamma^*(W, \nu)$ , т.е. когда в каждой парциальной СФС<sub>n</sub> без связей не обеспечивается гарантированного для любых начальных условий установления режима синхронизации, однако за счет малых связей асинхронные вращательные режимы биений подавляются во



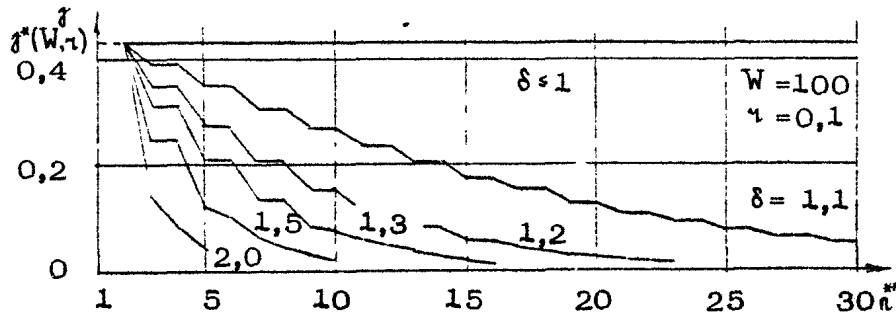
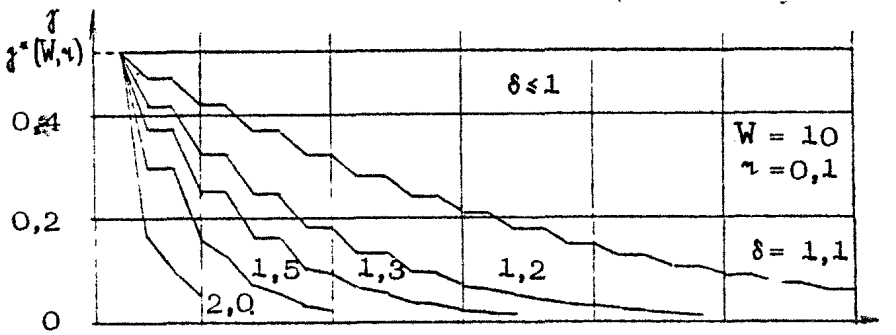
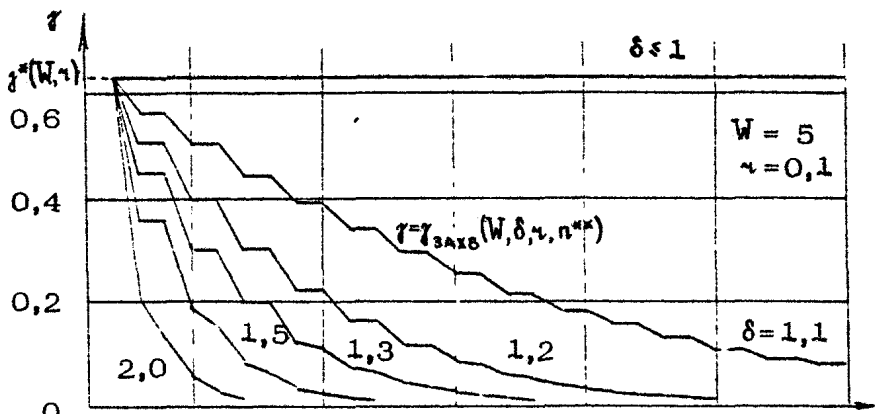
Р и с. 3.14



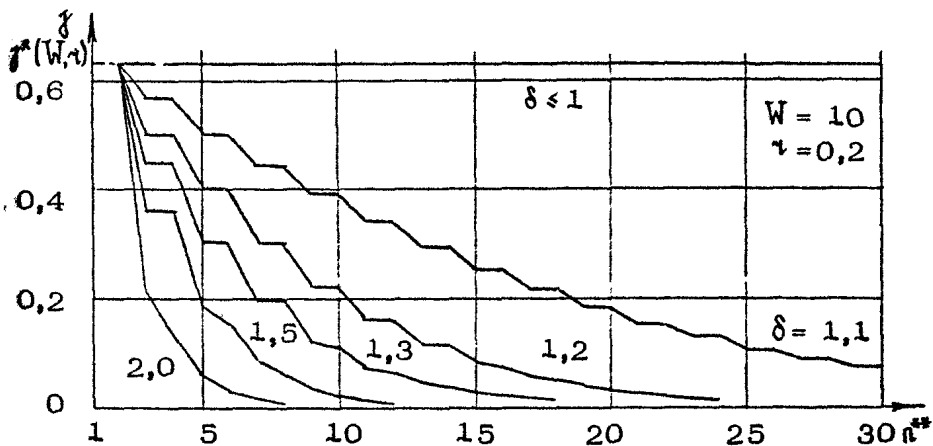
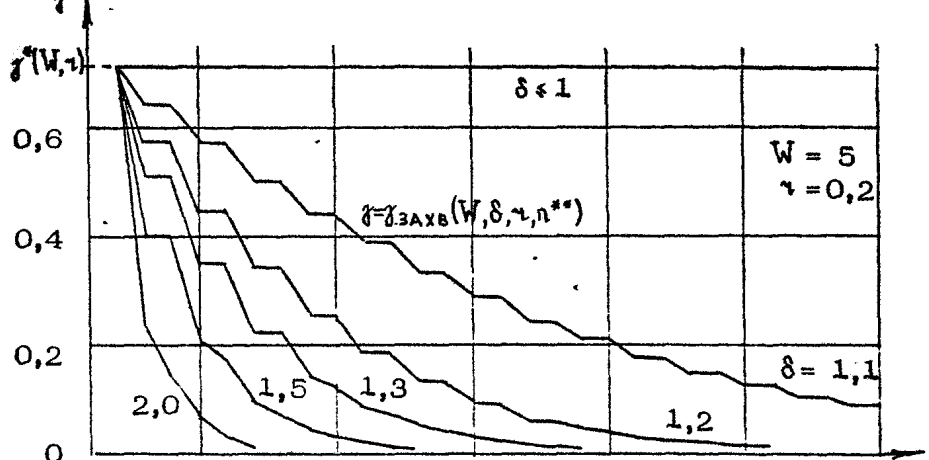
Р и с. 3.15



Р и с. 3.16

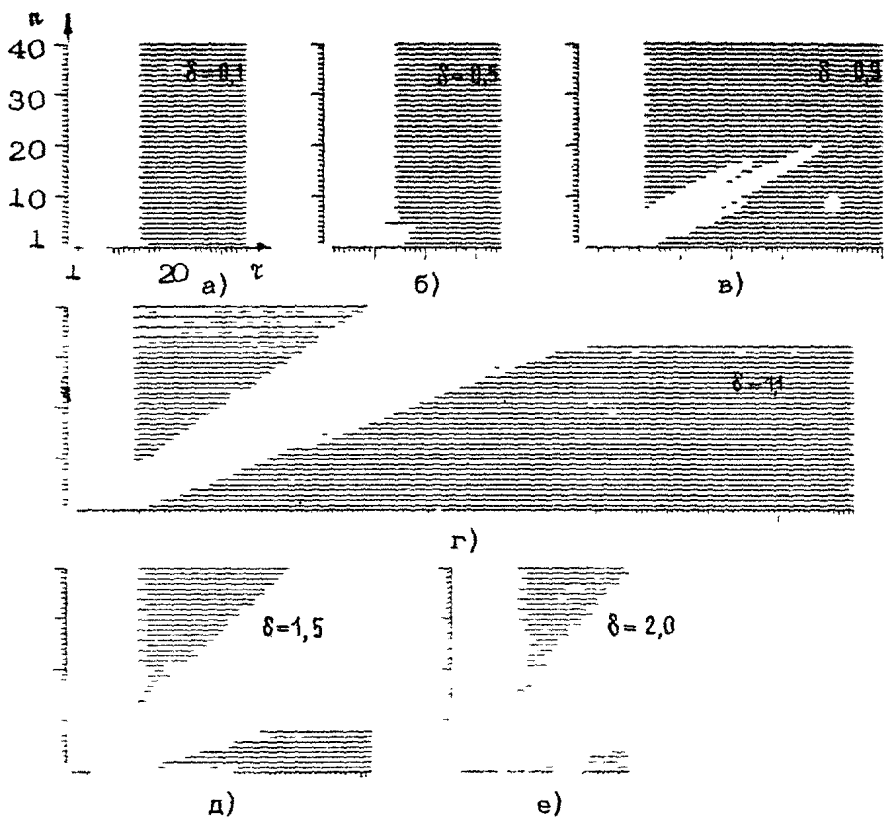


Р и с. 3.17



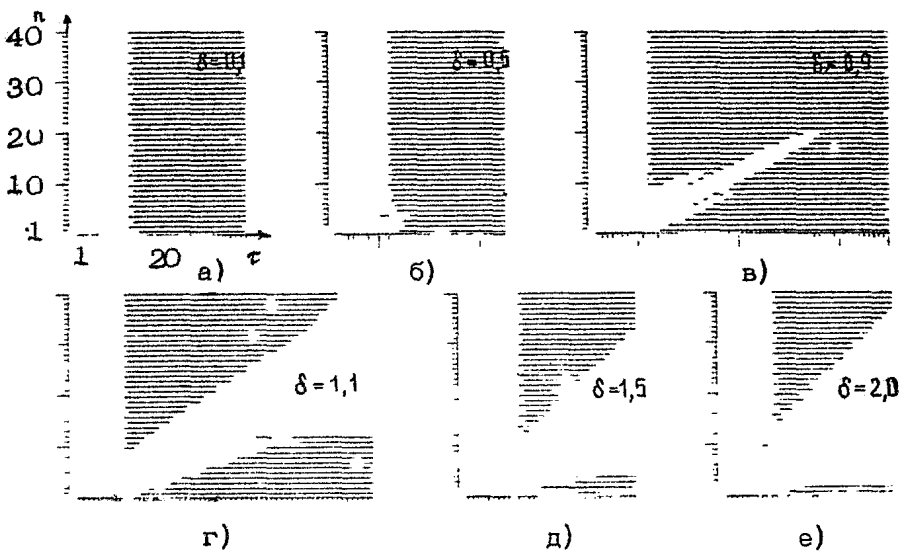
Р и с. 3,18





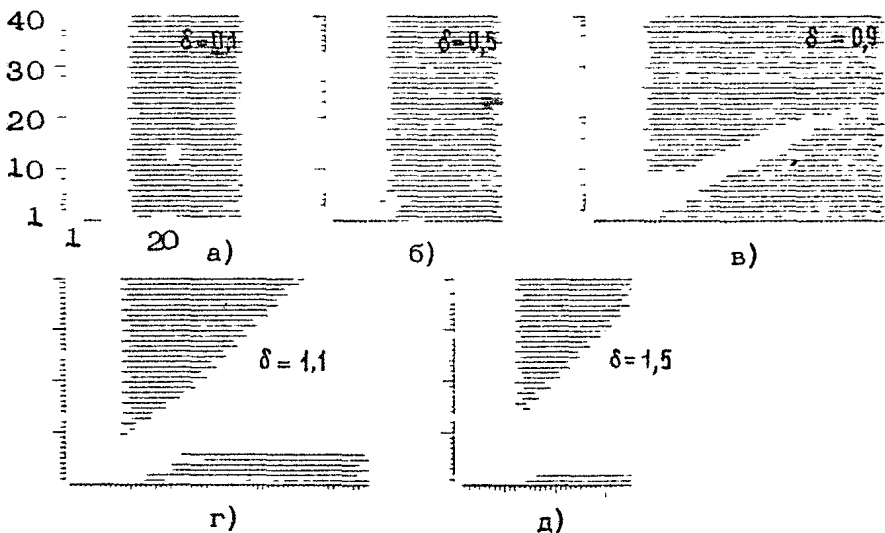
$$K(\rho) = (1 + \tau T_\rho) / (1 + T_\rho), \quad W = 1, \quad \tau = 0,2, \quad \chi = 0,1, \quad \varepsilon = 0$$

Р и с. 3.19



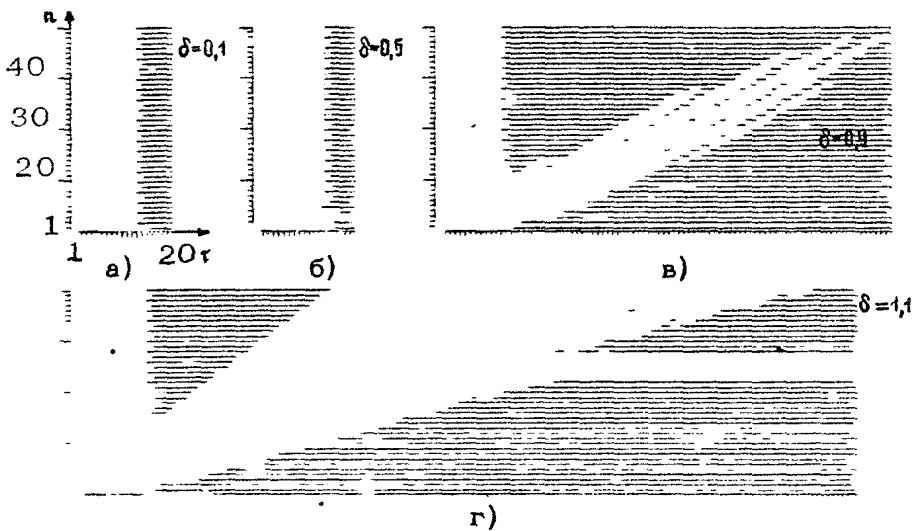
$$K(\rho) = (1 + \nu T_p) / (1 + T_p), \quad W = 1, \quad \nu = 0,2, \quad \gamma = 0,5, \quad \alpha = 0$$

Р и с. 3.20



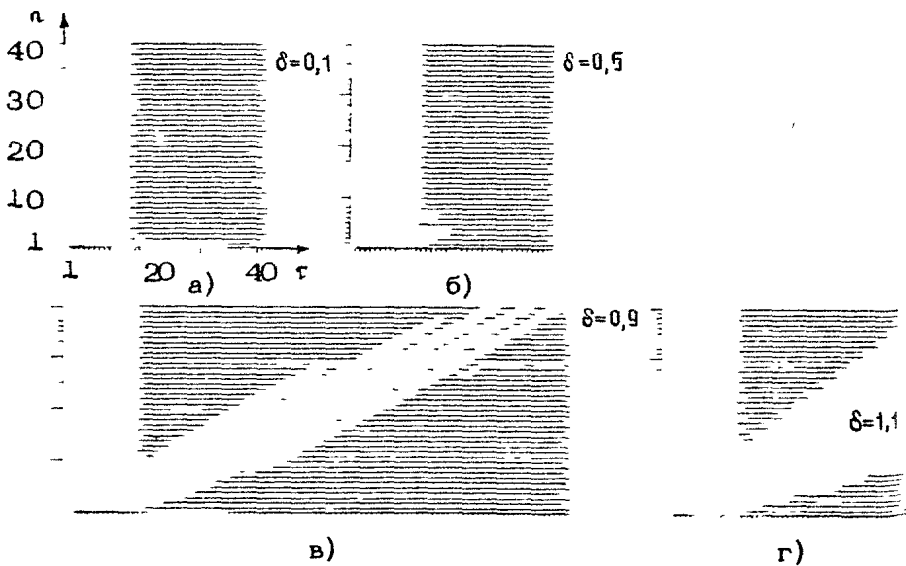
$$K(\rho) = (1 + \nu T_p) / (1 + T_p), \quad W = 1, \quad \nu = 0,2, \quad \gamma = 0,8, \quad \alpha = 0$$

Р и с. 3.21



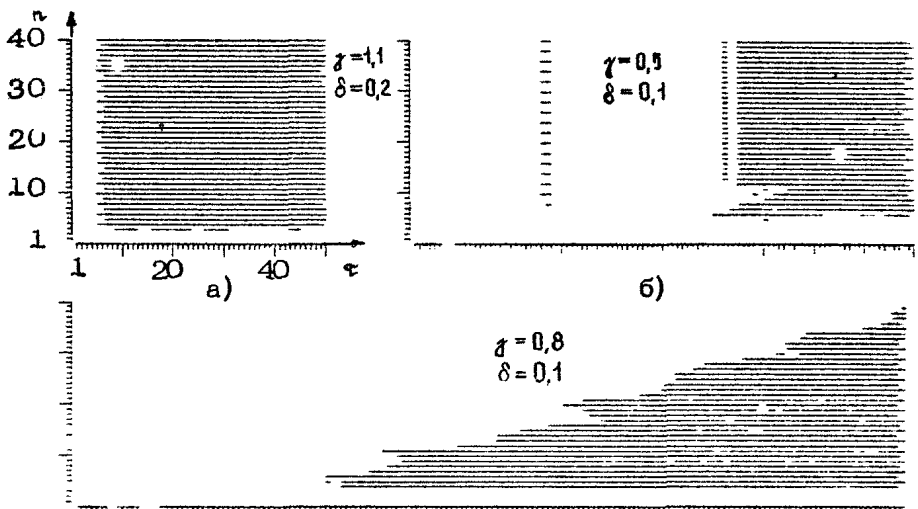
$$K(\rho) = (1 + \gamma T \rho) / (1 - T \rho), \quad W = 10, \quad \gamma = 0,2, \quad \beta = 0,2, \quad \alpha = 0$$

Р и с. 3.22



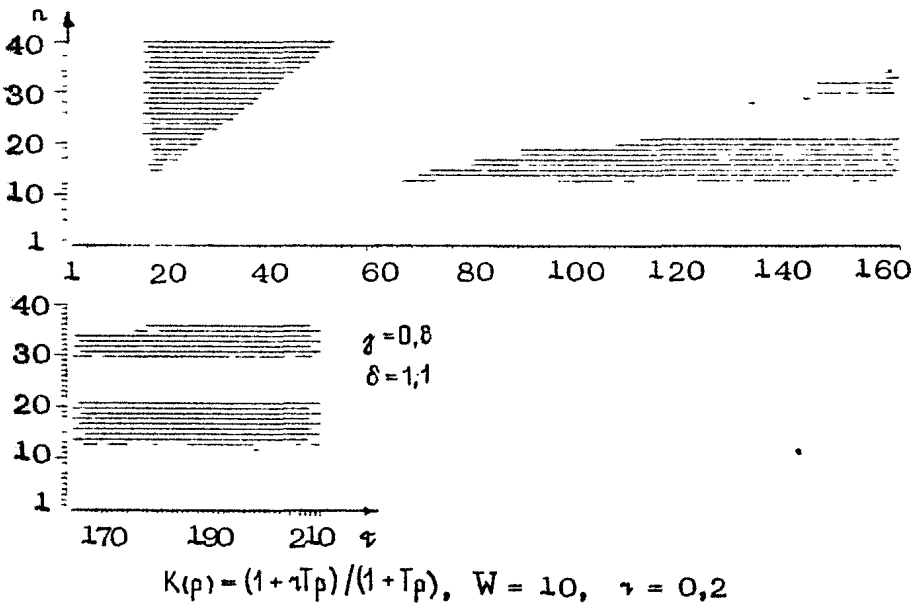
$$K(\rho) = (1 + \gamma T \rho) / (1 + T \rho), \quad W = 10, \quad \gamma = 0,2, \quad \beta = 0,5, \quad \alpha = 0$$

Р и с. 3.23



- а)  $K(\rho) = 1, \alpha = 0, \delta) K(\rho) = 1/(1+\tau\rho), W = 10,$   
 б)  $K(\rho) = (1 + \tau\rho)/(1+\tau\rho); W = 10, \tau = 0,2$

Р и с. 3.24



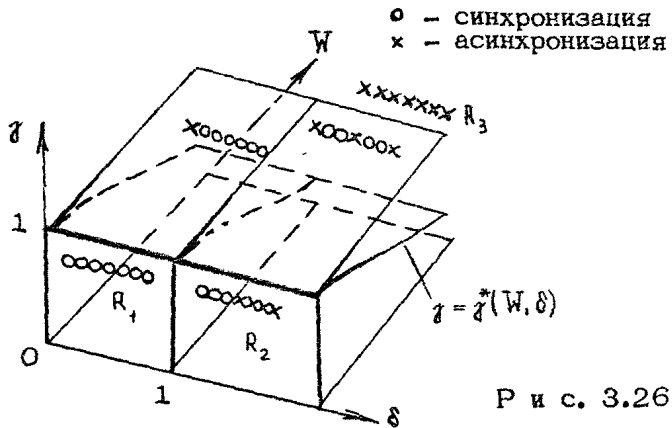
$K(\rho) = (1 + \tau\rho)/(1+\tau\rho), W = 10, \tau = 0,2$

Р и с. 3.25

всех элементах цепочки, за исключением начальных. Сравнивая варианты  $K(p)=1$  (рис. 3.24,а),  $K(p)=1/(1+Tp)$  (рис. 3.24,б) и  $K(p)=(1+\alpha Tp)/(1+Tp)$  (рис. 3.24,в), можно сделать заключение о существенном увеличении длительности переходных процессов в цепочке СФС при введении фильтров.

Интересна пространственно-временная диаграмма рис. 3.25. Здесь  $\gamma > \gamma^*(W, \delta)$ ,  $\delta > 1$ , график разрезан по оси  $\tau$  и нижняя часть графика является продолжением верхней. Здесь четко наблюдается чередование фронтов переходов "асинхронизация-синхронизация" и "синхронизация-асинхронизация". В качестве стационарных установившихся структур образуется два импульса синхронизации.

Подводя итоги исследования динамики однонаправленных цепочек СФС с учетом инерционности фильтров, с некоторой долей условности можно представить разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным режимам работы, в виде, показанном на рис. 3.26. В области  $R_1$  - глобальная синхронизация. В области  $R_2$  - частич-



Р и с. 3.26

ная синхронизация для элементов  $1 \leq n \leq n^{**}$ , находящихся в пределах пространственной полосы захвата. В области  $R_3$  возможно подавление асинхронных режимов вдоль цепочки, установление стационарных структур с чередованием фронтов переходов "синхронизация-асинхронизация" и "асинхронизация-синхронизация" или установление полностью асинхронного режима во всех элементах. Для цепочки характерно усложнение асинхронных режимов и развитие в результате этого хаоса.

## ЦЕПОЧКИ С ВЗАИМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассмотрим поведение цепочки СФС в предположении взаимности связей. Для случая анизотропных цепочек, т. е. случая значительно отличающихся по величине коэффициентов связи между элементами цепочки (в направлении увеличения номеров элементов и в противоположном направлении), изучение поведения цепочки естественно основывать на результатах, полученных для цепочки СФС с однонаправленными связями. По-видимому, в значительно меньшей степени это относится к изотропным цепочкам, т. е. цепочкам с одинаковыми коэффициентами связи в том и другом направлениях.

#### 4.1. Синхронизация в изотропных и анизотропных цепочках

Математическую модель однородной цепочки СФС с взаимными связями, исходя из формул (1.6), (2.2), (2.3), можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin \varphi_{n-1} - \varepsilon \sin \varphi_{n+1}, \quad n = \overline{1, N} \quad (4.1)$$

с граничными условиями  $\varphi_0(\tau) = \varphi_{N+1}(\tau) \equiv 0$ . Здесь параметры  $\delta$  и  $\varepsilon$  — коэффициенты связи парциальной СФС  $n$  с СФС  $n-1$  и СФС  $n+1$  соответственно. Остальные обозначения аналогичны введенным в гл. 2. Фильтры в цепях управления СФС  $n$  — идеализированные,  $K(\rho) = 1$ .

Рассматривая, как и ранее, каждый  $n$ -й элемент цепочки как находящийся под ограниченным по амплитуде внешним воздействием соседних элементов [50], из анализа (4.1) получаем очевидные оценки на параметры, отвечающие установлению следующих режимов в цепочке. Для значений параметров, удовлетворяющих условию

$$\gamma < 1 - \delta - \varepsilon, \quad (4.2)$$

во всех элементах цепочки может устанавливаться либо режим синхронизации с постоянными во времени значениями  $\varphi_n^s$ , либо асинхронный режим колебательных движений  $\varphi_n(\tau)$

около некоторого среднего значения  $\overline{\varphi}_n$ . Для значений параметров

$$\gamma > 1 + \delta + \varepsilon \quad (4.3)$$

в каждом элементе цепочки СФС заведомо должен устанавливаться асинхронный вращательный режим.

Рассмотрим режим синхронизации. Детальный анализ стационарных режимов синхронизации в случае произвольных нелинейностей дан в гл. 7. Здесь ограничимся некоторыми необходимыми замечаниями для синусоидальной нелинейности.

Координаты состояний равновесия системы (4.1) определяются уравнениями

$$\begin{cases} \sin \varphi_1 + \varepsilon \sin \varphi_2 = \gamma \\ \delta \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \varepsilon \sin \varphi_3 = \gamma \\ \delta \sin \varphi_{N-2} + \sin \varphi_{N-1} + \varepsilon \sin \varphi_N = \gamma \\ \delta \sin \varphi_{N-1} + \sin \varphi_N = \gamma \end{cases} \quad (4.4)$$

Решение системы (4.4) можно найти с помощью следующих соотношений:

а) при  $-1 + \delta C_{n-1} \neq 0$  для всех  $n = \overline{2, N}$  . (4.5)

$$\sin \varphi_n = d_n - C_n \sin \varphi_{n+1}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad \sin \varphi_N = d_N, \quad (4.6)$$

$$C_1 = \varepsilon, \quad d_1 = -\gamma, \quad C_n = \frac{-\varepsilon}{-1 + \delta C_{n-1}}, \quad d_n = \frac{\gamma + \delta d_{n-1}}{-1 + \delta C_{n-1}},$$

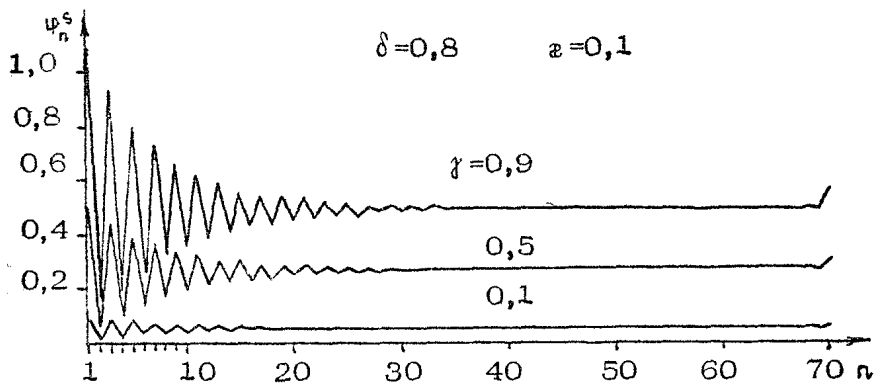
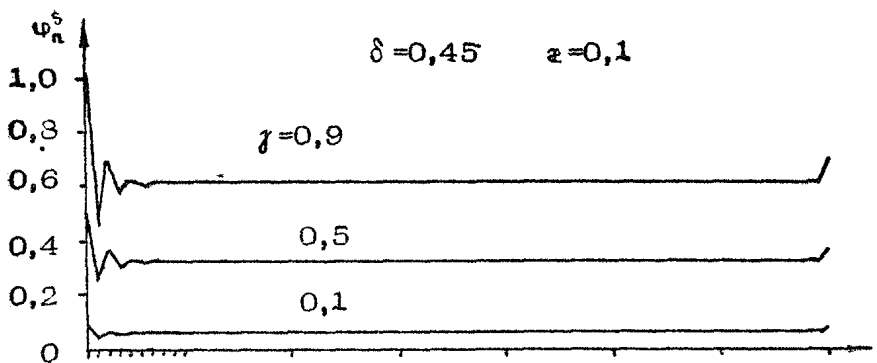
б) при  $-1 + \delta C_{n-1} = 0$  для некоторого  $n = \overline{2, N}$  (4.7)

$$\sin \varphi_{n-1} = \frac{\gamma + \delta d_{n-1}}{-\varepsilon}, \quad n = \overline{2, N} \quad (4.8)$$

Каждое из уравнений (4.6), (4.8) для  $n = \overline{1, N}$  имеет два решения для  $\varphi_n$ :  $\varphi_n^s \in (-\pi/2, \pi/2)$  и  $\varphi_n^u \in (\pi/2, 3\pi/2)$ , следовательно, система (4.1) имеет  $2^N$  состояний равновесия. Можно показать, что состояние равновесия  $0_1(\varphi_n^s, n = \overline{1, N})$  устойчиво (см. гл. 7).

На рис. 4.1 даны полученные исходя из (4.6), (4.8) при  $N = 70$  графики зависимостей установившихся значений  $\varphi_n^s$  от  $n$  для анизотропной цепочки ( $\delta \neq \varepsilon$ )

На рис. 4.2 даны соответствующие графики для изотропной цепочки ( $\varepsilon = \delta$ ). Дискретные значения  $\varphi_n^s$  для разных  $n$  соединены отрезками прямых. Из анализа графика



Р и с. 4.1

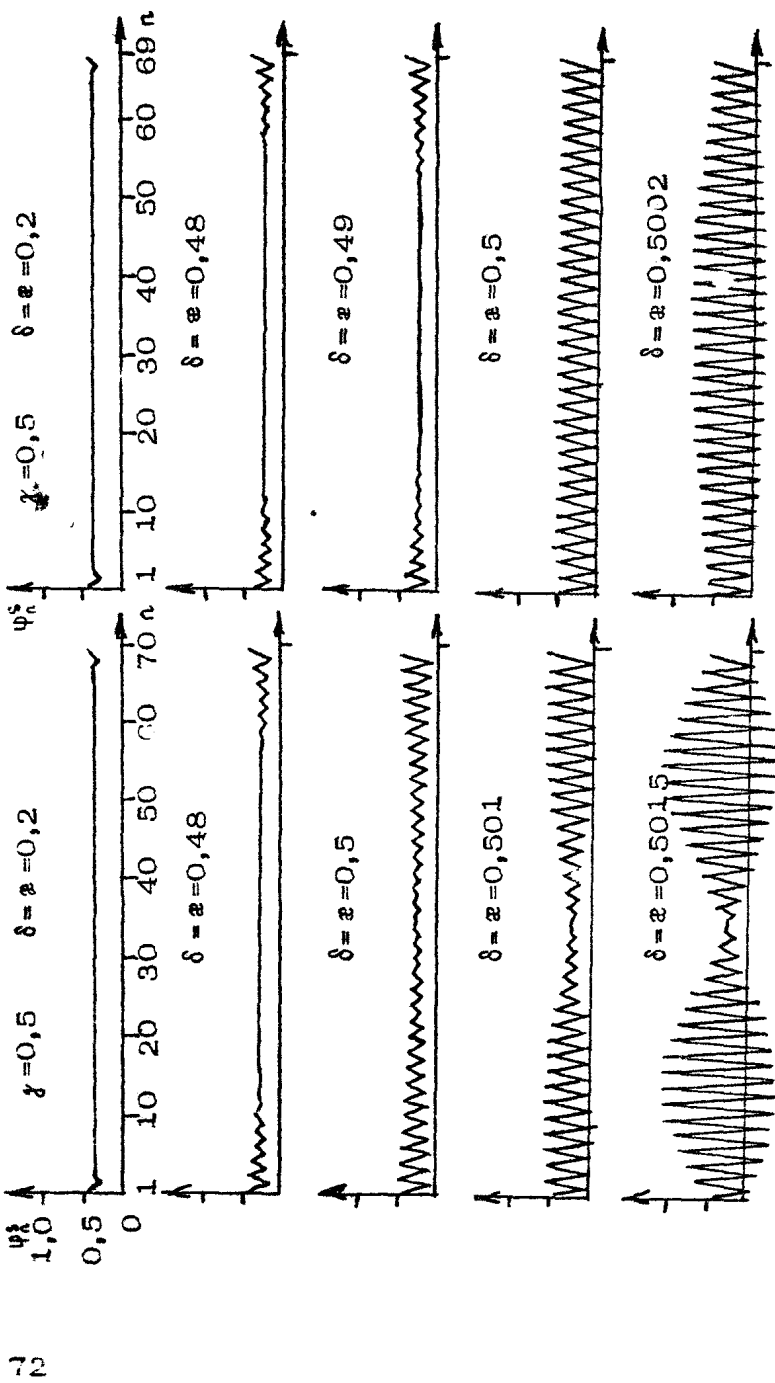
Из этого следует, что в достаточно широком диапазоне изменения параметров распределение  $\psi_n^s$  в цепочке имеет характер пространственно затухающего процесса (от начала и конца цепочки к центральной части). Затухание происходит к значению  $\bar{\psi}^s = \arcsin \frac{\gamma}{1+\delta+\alpha}$ , определяемому из общего уравнения для состояний равновесия

$$\sin \psi_n^s = \gamma - \delta \sin \psi_{n-1}^s - \alpha \sin \psi_{n+1}^s, \quad n = \overline{1, N}$$

при условии  $\psi_{n-1}^s = \psi_n^s = \psi_{n+1}^s \equiv \bar{\psi}^s$ . Таким образом, при соответствующем выборе параметров можно обеспечить во всей центральной части цепочки установление режима синхронизации с почти одинаковой остаточной разностью фаз  $\psi_n^s \approx \bar{\psi}^s$ .

Область существования в пространстве параметров состояний равновесия системы (4.1), при выполнении (4.5), определяется из условий





Р и с. 4.2

$$\begin{aligned}
 & |d_N| \leq 1, \\
 & |d_{N-1} - c_{N-1} d_N| \leq 1, \\
 & |d_{N-2} - c_{N-2} (d_{N-1} - c_{N-1} d_N)| \leq 1;
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

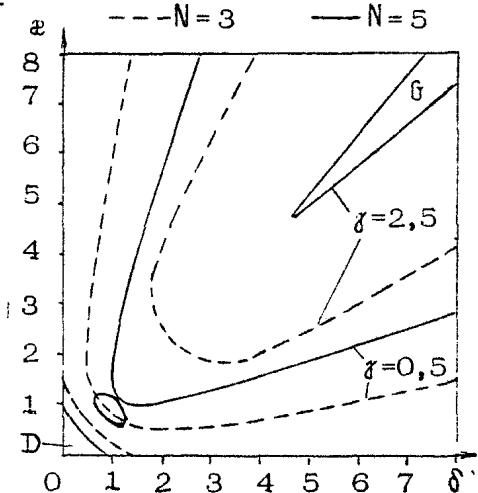
а при выполнении (4.7) - из условий

$$\left| \frac{\gamma + \delta d_{n-1}}{-\varphi} \right| \leq 1
 \tag{4.10}$$

Вычисления, проведенные для ряда значений  $N$  (на рис. 4.3 представлены области существования, полученные при  $N = 3, N = 5$ ), показали, что состояния равновесия системы (4.1) могут существовать в области  $D$ , удовлетворяющей условиям  $\gamma < 1, \varphi + \delta < 1 + \varepsilon(N)$ . Величина  $\varepsilon(N)$  для достаточно больших  $N$  мала, например, при  $\delta = \varphi$  для  $N = 70$   $\varepsilon = 0,0016$ . При  $N \rightarrow \infty$  граница области  $D$  вырождается в плоскость  $\varphi + \delta = 1$ .

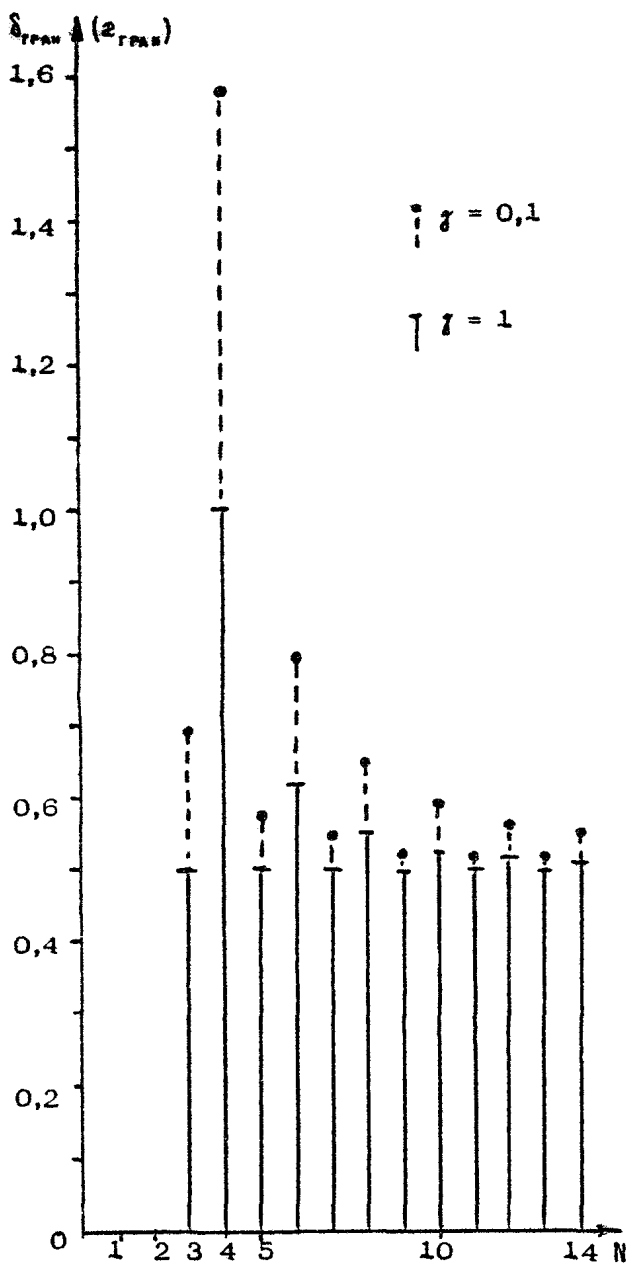
Кроме области  $D$ , состояния равновесия системы (4.1) могут существовать и в некоторой области  $\Gamma$ , расположенной в пространстве параметров симметрично около плоскости  $\varphi = \delta$  (при этом  $\gamma$  могут быть не только меньше единицы, но и существенно превышать единицу).

Вычислительный эксперимент, проведенный с цепочками СФС при  $N = 4, 10, 20, 40$  с изменением  $\gamma$  от 0,1 до 3 с шагом 0,2, позволил установить, что для области параметров  $\Gamma$  в фазовом пространстве системы (4.1) на-



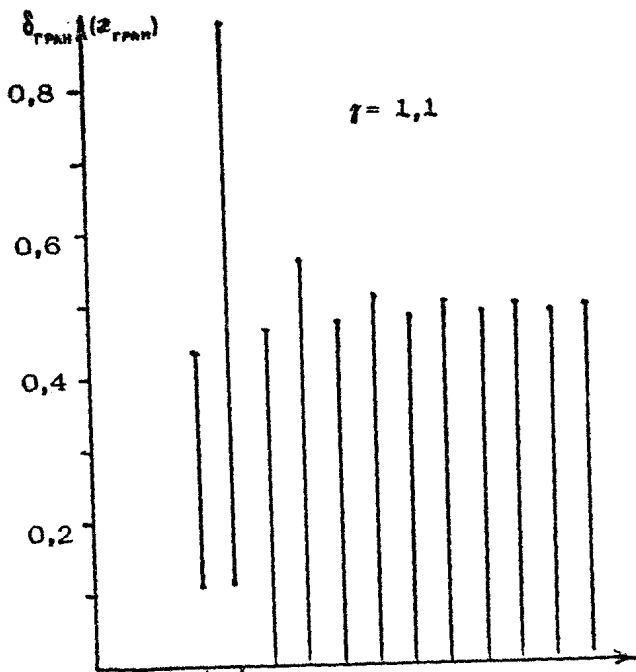
Р и с. 4.3

ряду с состояниями равновесия существуют другие устойчивые аттракторы; следовательно, для параметров, принадлежащих области  $\Gamma$ , не обеспечивается глобальная устойчивость режима синхронизации. Это, по-видимому, является следствием нелинейного типа связей между элементами цепочки, поскольку вычислительный эксперимент (проведенный при замене в системе (4.1) нелинейностей  $\delta \sin \varphi_{n-1}$  и  $\varphi \sin \varphi_{n+1}$  соответственно на  $\delta \varphi_{n-1}$  и  $\varphi \varphi_{n+1}$ )

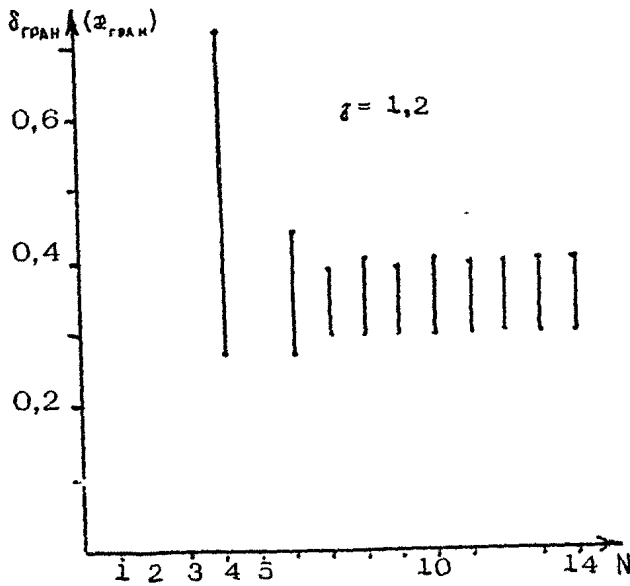


a)

Р и с. 4.4



б)



в)

Р и с. 4.4

показал, что стационарный режим синхронизации, устанавливающийся в этом случае во всех элементах цепочки для параметров, принадлежащих области  $B$ , является глобально устойчивым.

Что касается области  $D$ , то для параметров, принадлежащих этой области, не обнаружено аттракторов, отличных от состояний равновесия системы (4.1), поэтому в цепочке СФС в этом случае при любых начальных условиях устанавливается режим синхронизации (состояние равновесия  $U_n(\varphi_n^s, n=1, N)$ ). Это показал вычислительный эксперимент, проведенный для изотропной цепочки ( $\delta = \alpha$ ), в ходе которого в зависимости от длины цепочки  $N$  оценивалась величина интервала  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{min}} \leq \delta \leq \delta_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$  ( $\alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{min}} \leq \alpha \leq \alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$ ), внутри которого реализуется режим синхронизации во всех элементах цепочки.

На рис. 4.4,а для разных  $N$  от 3 до 14 даны полученные аналитически и проверенные в эксперименте граничные значения  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$  ( $\alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$ ) для  $\gamma = 0,1$  и  $\gamma = 1$ . Здесь получено, что  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{min}} = 0$ . Поэтому интервал  $0 \leq \delta \leq \delta_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$  ( $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$ ), отмеченный на рис. 4.4,а для каждого  $N$  отрезком прямой, выделяет область значений коэффициентов связей  $\delta(\alpha)$ , обеспечивающих установление во всех элементах цепочки СФС режима синхронизации. Как следует из рис. 4.4,а, при увеличении  $N$  значение  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$  ( $\alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$ ) стремится к 0,5, следовательно, полученная ранее область существования состояний равновесия системы (4.1)  $\delta + \alpha \leq 1$  (область  $D$  для больших  $N$ ) является и областью глобальной синхронизации цепочки СФС.

На рис. 4.4,б,в даны результаты вычисления  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$  ( $\alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$ ) и  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{min}}$  ( $\alpha_{\text{ГРАН}}^{\text{min}}$ ) для  $\gamma > 1$ , т. е. случая, когда парциальные несвязанные СФС  $n$  не могут синхронизоваться и в них устанавливается асинхронный вращательный режим. За счет связей появляется возможность подавления асинхронного вращательного режима и установления режима синхронизации во всей цепочке. С ростом  $\gamma$  интервалы синхронизации  $\delta_{\text{ГРАН}}^{\text{min}} \leq \delta \leq \delta_{\text{ГРАН}}^{\text{max}}$  уменьшаются и исчезают.

## 4.2. Стационарные структуры. Хаос

Обратимся теперь к изучению процессов, происходящих в цепочке СФС с взаимными связями при увеличении коэффициентов связи и выходе из области параметров  $D$ , гаранти-

рующей глобальную синхронизацию цепочки. В этом случае нарушение режима глобальной синхронизации цепочки СФС происходит следующим образом. Когда установившееся значение  $\varphi_{n*}^s$  в какой-либо парциальной СФС  $n^*$  становится равным  $\pi/2$ , происходит слияние состояний равновесия и рождение периодического по координате  $\varphi_{n*}$  движения, соответствующего асинхронному режиму вращений. Поскольку все элементы цепочки имеют взаимные связи, то появление в СФС  $n^*$  вращательного периодического режима неизбежно приводит к переходу стационарного режима синхронизации с постоянными значениями  $\varphi_n^s$  во всех других СФС  $n$  ( $n \neq n^*$ ) в асинхронный периодический режим колебательного типа, с колебаниями  $\varphi_n(\tau)$  около некоторого значения  $\bar{\varphi}_n$  с амплитудой, зависящей от  $n$  (амплитуда уменьшается по мере удаления от элементов с движениями вращательного типа).

При дальнейшем увеличении коэффициентов связи  $\delta$  и  $\mathfrak{A}$  изменения средних по периоду значений  $\bar{\varphi}_n$  колебательных периодических движений в элементах цепочки приводят к новым бифуркациям, связанным с появлением вращательных движений. Смена колебательных движений вращательными происходит в тех элементах цепочки, в которых значения  $\bar{\varphi}_n$  выходят за пределы интервала  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Таким образом, при выходе из области  $D$  пространства параметров с ростом  $\delta$  и  $\mathfrak{A}$  следует ожидать потери синхронизации в цепочке СФС, сопровождающейся развитием неустойчивостей, усложнением колебательных и вращательных движений.

Динамика бифуркаций, происходящих при изменении  $\delta$  и  $\mathfrak{A}$  изучалась в ходе численных экспериментов. При различных параметрах  $\gamma, \delta, \mathfrak{A}$  и одинаковом начальном распределении  $(\varphi_n)_n$  проводилось интегрирование системы (4.1) на достаточно большом интервале времени порядка  $\tau_n \approx 4000$ . По окончании этого переходного процесса фиксировался режим, установившийся в каждом элементе СФС  $n$ . Считалось, что если на некотором  $\Delta\tau_n$  изменение  $|\varphi_n(\tau_n + \Delta\tau_n) - \varphi_n(\tau_n)| < 2\pi$ , то установился колебательный режим, если же это изменение больше  $2\pi$  - то вращательный режим. На рис. 4.5,а-г представлены установившиеся пространственные структуры для изотропной цепочки ( $N = 25$  и  $N = 30$ ). Точками обозначены колебательные режимы (за исключением первой строки в каждой серии рисунков, где точки соответствуют установлению режима синхронизации), а крестиками обозначены асинхронные вращательные режимы.

- 1 5 10 15 20 25 n						1 5 10 15 20 25 30 n					
$\delta = z$						$\delta = z$					
.....0,502						.....0,505					
.....x.....0,505						.....y.....x.....0,510					
.....x.....x.....x.....0,510						.....y.....x.....x.....0,520					
.....x.....x.....x.....x.....0,515						.....x.....x.....x.....x.....x.....0,523					
.....xxxx.....xxx.....xxxx.....0,517						.....x.....y.....x.....x.....x.....x.....0,533					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,518						.....y.....x.....x.....x.....x.....x.....0,535					
.....xxxxxxxxxxxxxxxx.....0,519						.....x.....y.....x.....x.....y.....y.....x.....0,546					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,520						.....xxxxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxxxx.....0,5465					
.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx.....0,522						.....x.....x.....x.....x.....x.....0,5472					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,525						.....xxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxx.....0,550					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,526						.....xxxxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxxxx.....0,555					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,528						.....xxxxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxxxx.....0,580					
.....xyxxxxxxxxxxxxxxxx.....0,530						.....xxxxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxxxx.....0,650					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,540						.....xxxxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxxxx.....0,800					
.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx.....0,545						xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxI,000					
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxI,000						b) $\delta = 0,2$ $\delta = z$ .....0,505					
a) $\delta = 0,2$ $\delta = z$ .....0,502						.....x.....x.....x.....x.....0,515					
.....0,505						.....x.....x.....x.....x.....0,522					
.....0,517						.....x.....x.....x.....x.....0,527					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,525						.....x.....x.....x.....x.....x.....0,533					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,526						.....x.....x.....x.....x.....x.....0,546					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,528						.....x.....x.....x.....x.....x.....0,547					
.....x.....x.....x.....x.....x.....0,540						.....x.....x.....x.....x.....x.....0,555					
.....xxxxxxxxxxxxxxxx.....0,550						.....xxxxxxxxxxxx.....xxxxxxxxxxxx.....0,565					
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxI,000						xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx3,000					
b) $\delta = 0,3$						r) $\delta = 0,3$ $z$ .....0,333					
I,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx.....0,667						I,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxI,000					
I,500.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx.....I,333						2,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx2,667					
2,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx3,333						4,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000					
3,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000						d) $\delta = 0,05$ $z$ .....0,333					
4,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000						I,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx0,667					
5,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000						3,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx2,000					
6,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000						4,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx2,667					
.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000						6,000.....xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx4,000					

Р и с. 4.5

e)  $\delta = 0,5$

Характерным для структур рис. 4.5,а-г является существенная разница в развитии неустойчивостей для четного и нечетного числа элементов в цепочке СФС. При нечетном  $N$  режим глобальной синхронизации с увеличением  $\delta, \varphi$  нарушается в одном элементе СФС <sub>$n$</sub>  в середине цепочки, а при четном  $N$  это происходит в двух элементах, находящихся в середине первой половины цепочки и в середине второй (см. также рис. 4.2). Анализ стационарных структур рис. 4.5 показывает также, что изотропная цепочка ведет себя как пространственно негрубая, т. е. малые изменения параметров  $\delta, \varphi$  существенно меняют устанавливающиеся при фиксированных начальных условиях стационарные структуры.

Установлено, что свойство негрубости сохраняется в достаточно широкой области параметров вблизи прямой  $\delta = \varphi$ , однако по мере удаления от значений  $\delta \approx \varphi$  свойства изотропии теряются. Для анизотропной цепочки естественно ожидать наличия качественных аналогий с поведением цепочки с однонаправленными связями, и следовательно отсутствия упомянутой негрубости динамического поведения, что подтверждают структуры рис. 4.5,д,е, вычисленные для разных  $\delta$  и  $\varphi$ , удовлетворяющих соотношению  $\delta = 0,667 \varphi$ .

Развитие неустойчивостей в системе (4.1) при потере синхронизации ведет к усложнению асинхронных колебательных и вращательных движений с ростом коэффициентов связи  $\delta, \varphi$ . В результате этого усложнения естественно ожидать появления динамического хаоса, т. е. хаотических колебательных, вращательных или смешанных движений. На рис. 4.6 приведены спектры мощности аттракторов для трех соседних элементов ( $n = 7, 8, 9$ ) в случае изотропной цепочки СФС. Вычисления проводились при  $\gamma = 0,1$ ;  $N = 30$ . Анализ спектров показывает, что при  $\delta = \varphi = 0,528$  имеет место сложное периодическое движение с очень большим периодом. При  $\delta = \varphi = 0,55$  существует странный аттрактор (первый ляпуновский показатель  $L^1 > 0$ ).

### 4.3. Переходные процессы

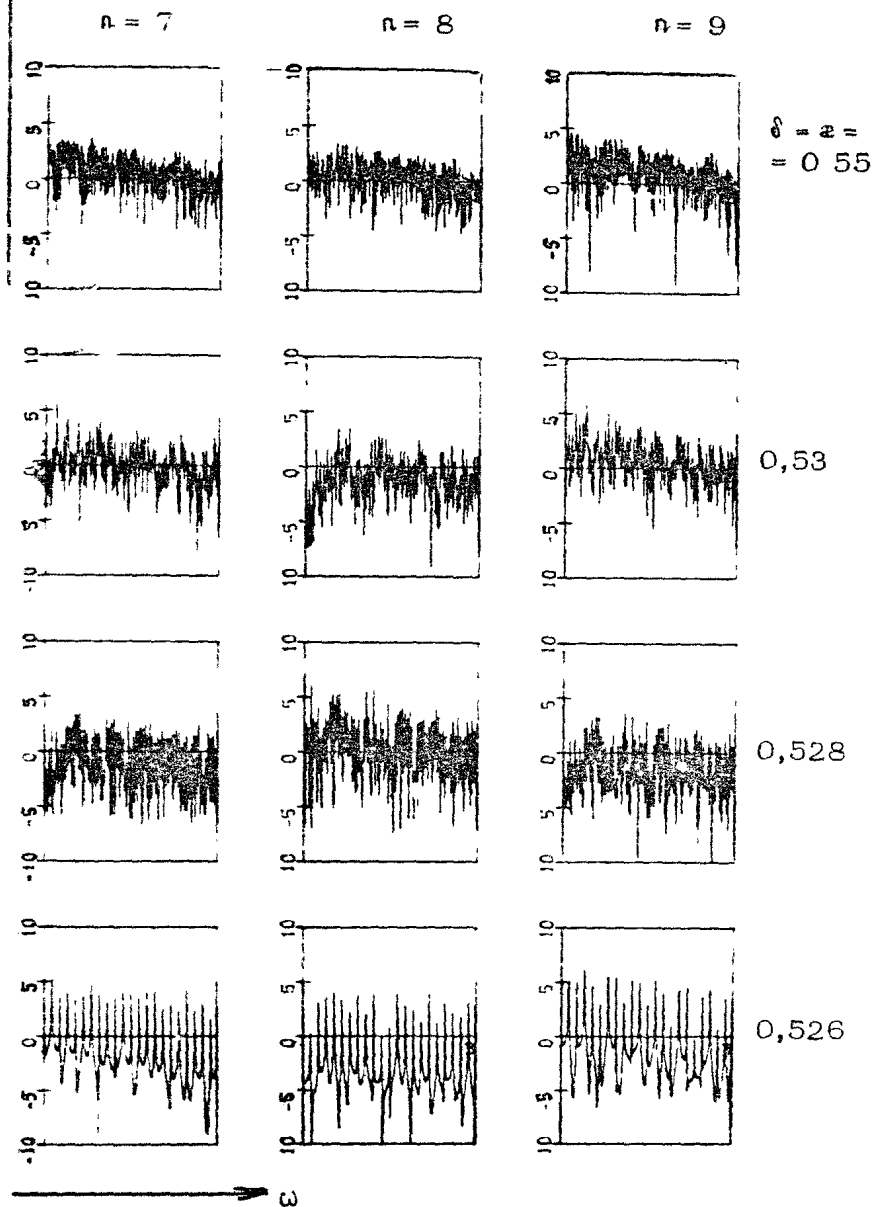
В ходе численного эксперимента изучался также характер переходных процессов в цепочке (4.1). Система (4.1) моделировалась для  $N = 69, N = 70$  при начальных условиях  $(\varphi_n)_n = \pi$ . Результаты моделирования для  $N = 69$



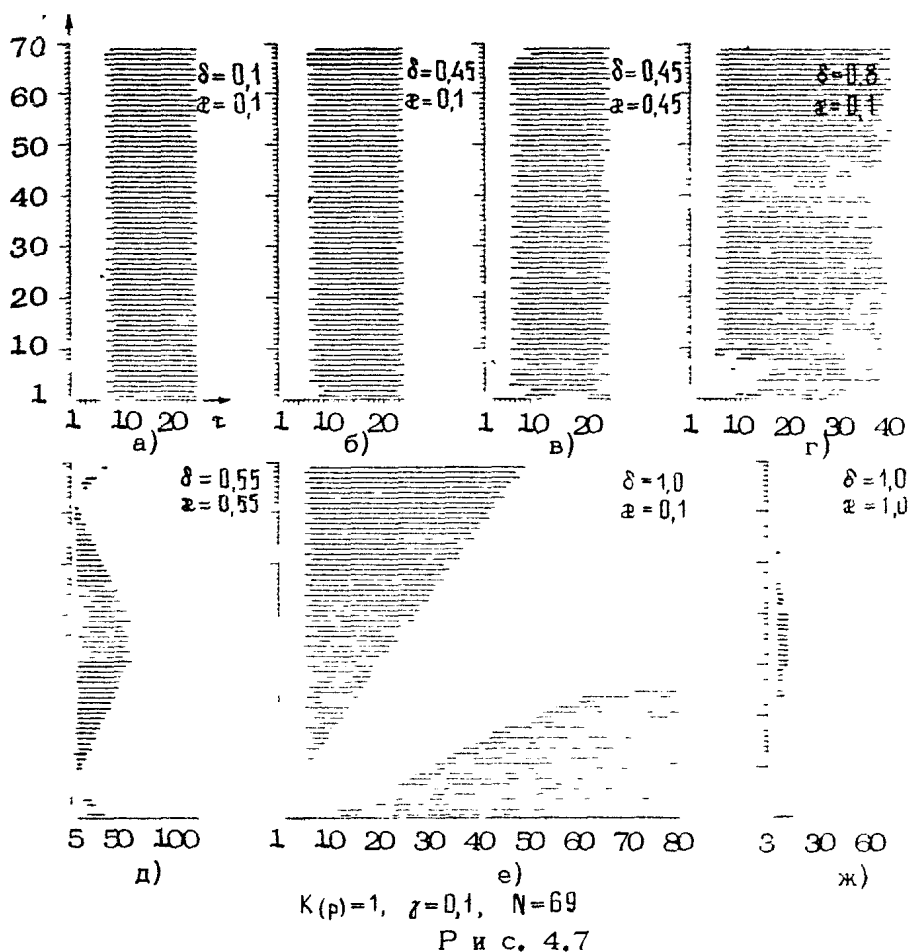
$\log S(\omega)$

$\tau = 0,1$

$N = 30$

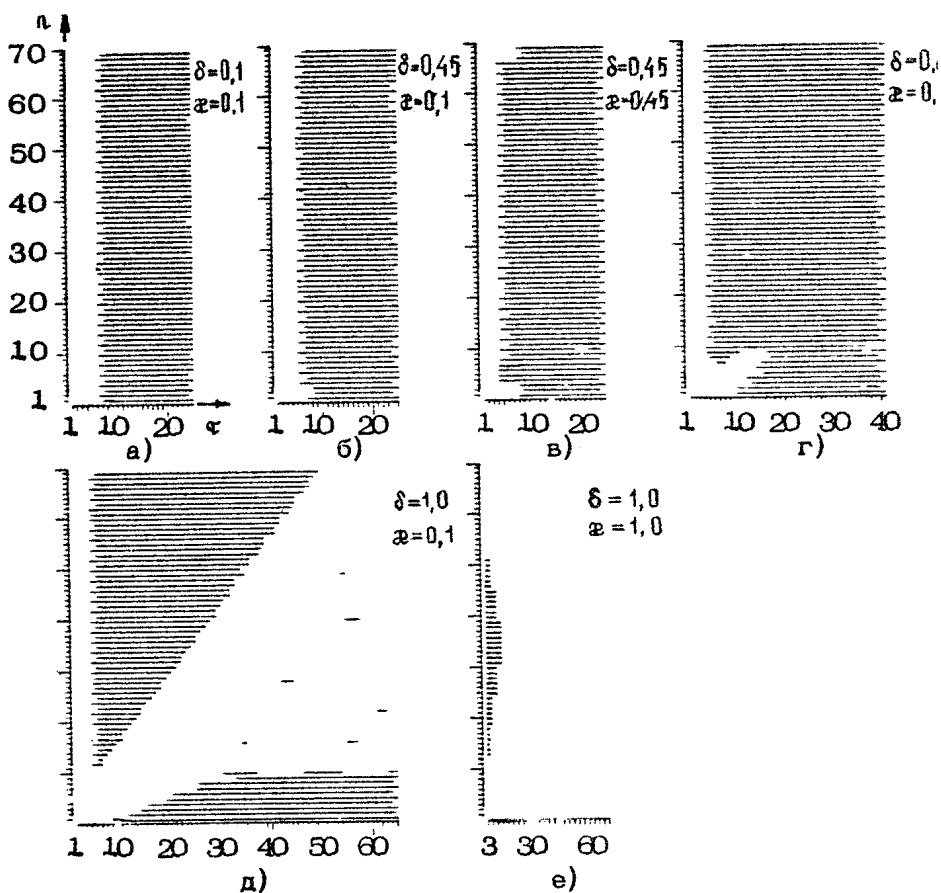


Р и с. 4.6



Р и с. 4.7

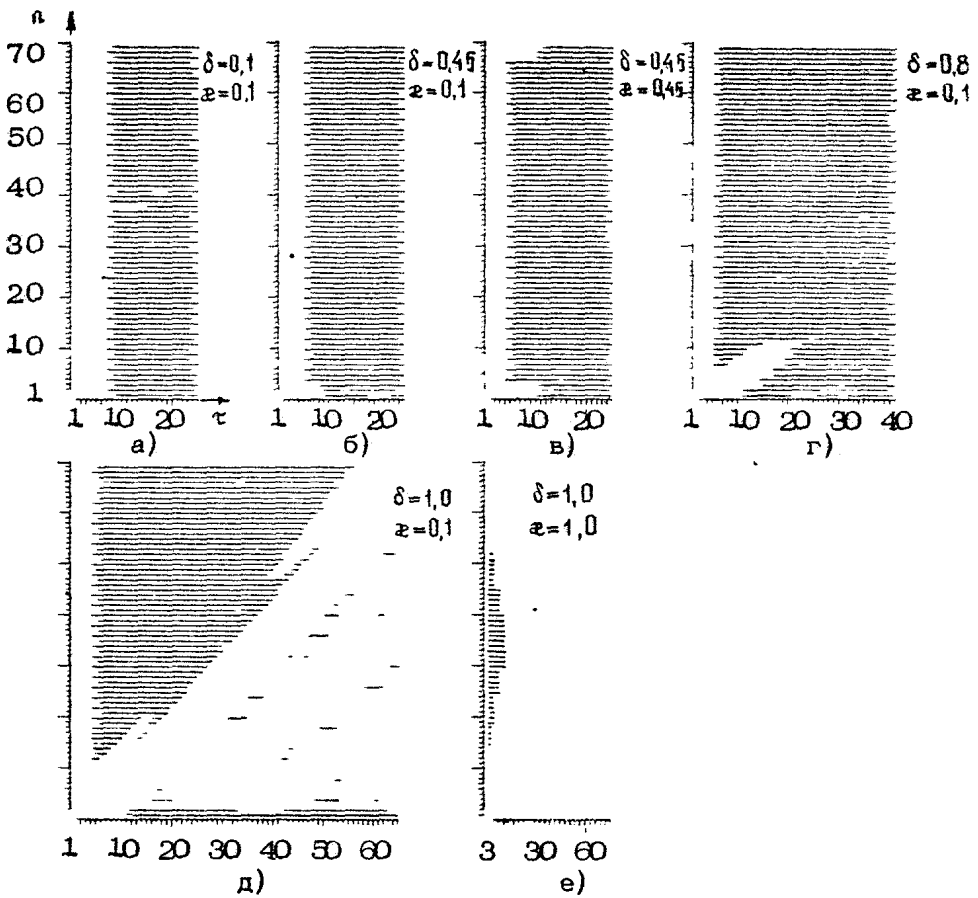
представлены на пространственно-временных диаграммах рис. 4.7, 4.8, 4.9 соответственно для  $\gamma = 0,1; 0,5; 0,9$ . (Результаты для  $N = 70$  практически очень близки для выбранных значений параметров, поэтому не приводятся). В каждый дискретный момент времени  $\tau$  для каждого элемента определялось наличие состояния синхронизации. За критерий наличия режима синхронизации принималось выполнение условия  $|d\varphi_n/d\tau| < 0,01$ . Эти состояния отмечались на диаграммах точками, затем соседние точки для каждого элемента СФС<sub>n</sub> соединялись прямыми. Анализ полученных диаграмм показывает, что волны переходов "асинхронизация - синхронизация" и "синхронизация - асинхронизация"



$K(p)=1$ ,  $\gamma=0,5$ ,  $N=69$

Р и с. 4.8

возникают и распространяются здесь по цепочке как в направлении увеличения номеров  $n$ , так и в обратном направлении. Качественно пространственно-временная динамика для цепочки СФС с взаимными связями сравнительно просто интерпретируется как результат суммирования динамики СФС с однонаправленными связями в направлении увеличения  $n$  и в обратном направлении (см. рис. 2.12). Этот вывод не вызывает сомнений для анизотропных цепочек  $\delta \neq \alpha$ , особенно в случае установления после окончания переходных процессов режима синхронизации в цепочке. Для изотропных цепочек  $\delta = \alpha$ , учитывая результаты раз. 4.2, можно ожидать более "богатой" динамики, по крайней мере вблизи па-

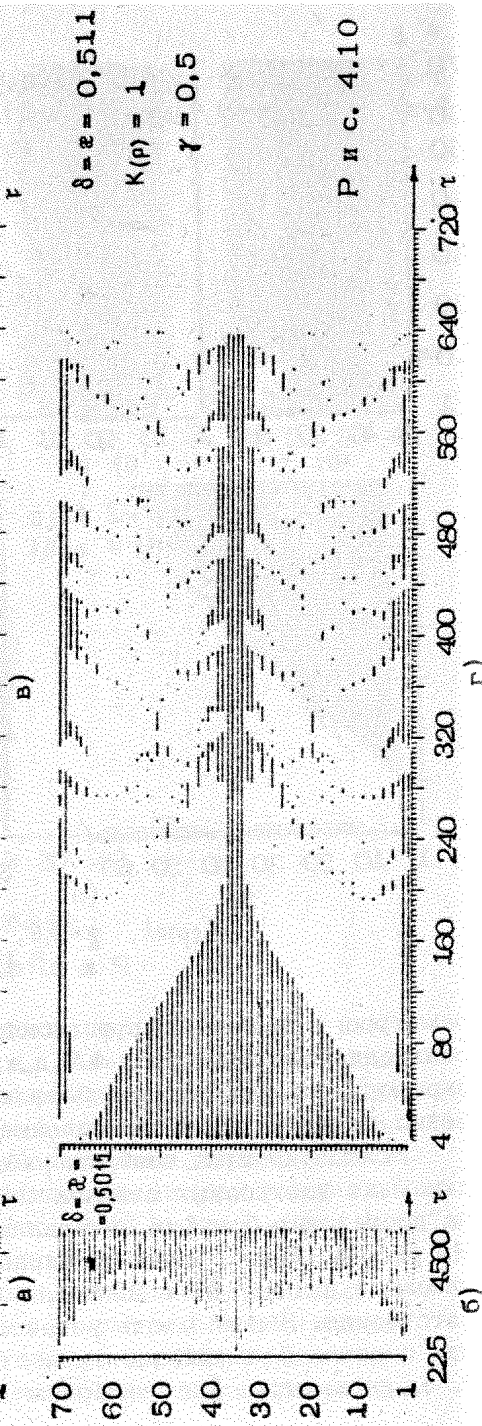
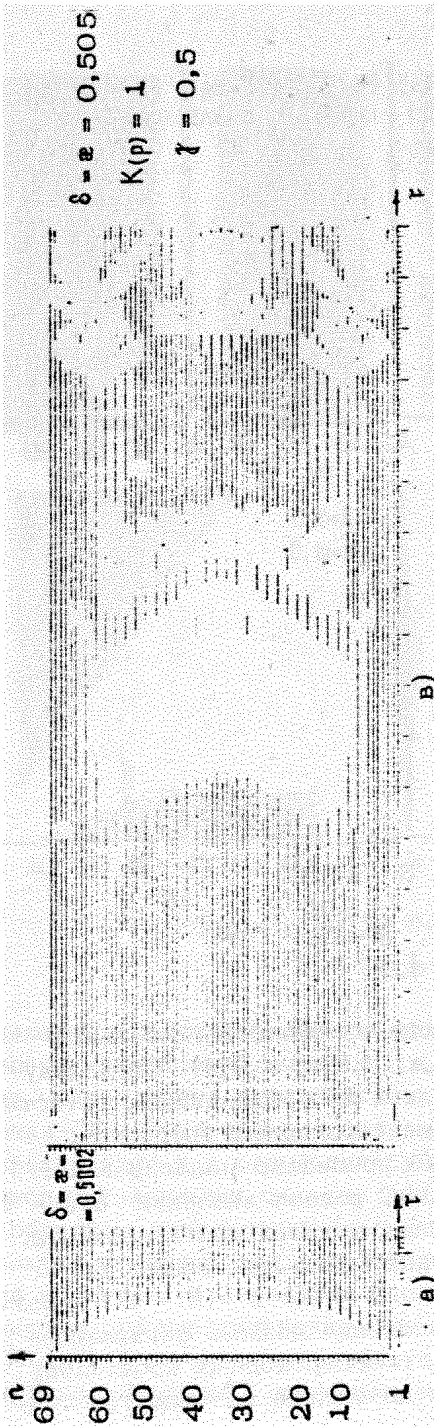


$K(\rho)=1, \gamma=0,9, N=69$

Р и с. 4.9

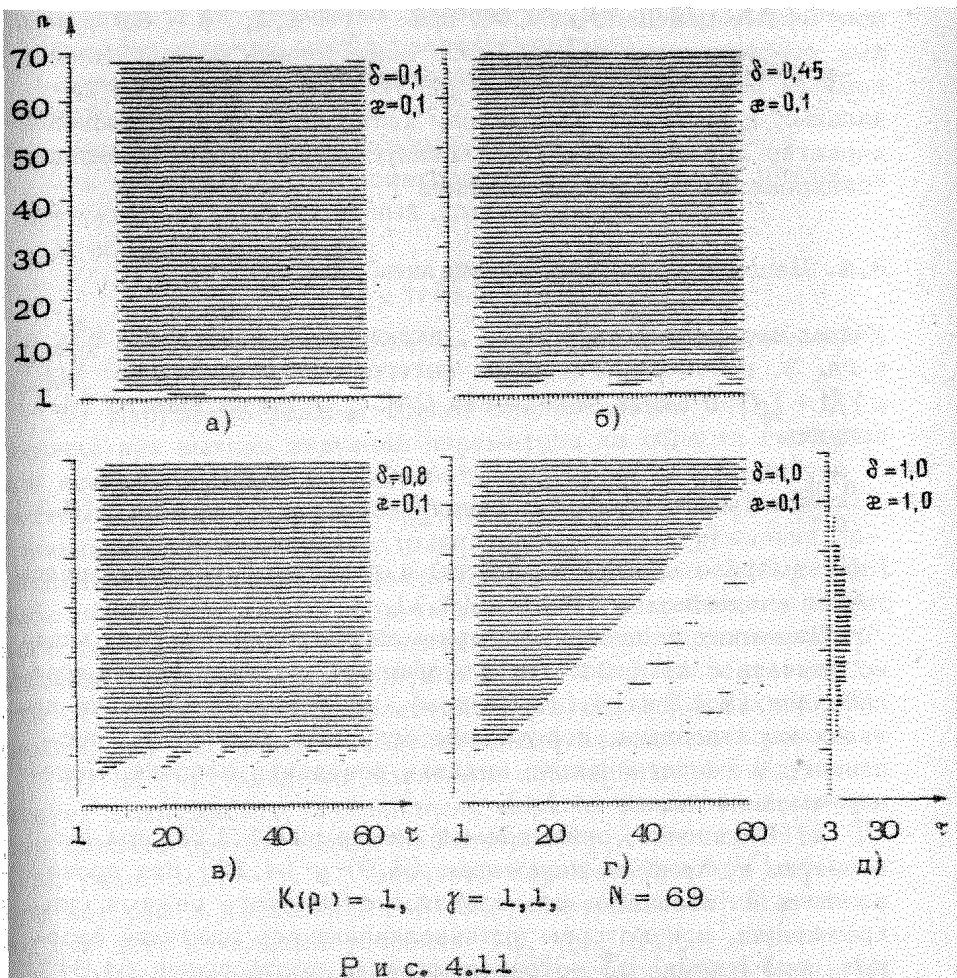
параметров  $\delta + \varepsilon = 1$  при выходе из области глобальной синхронизации (см. рис. 4.7, д, ж; 4.8, е; 4.9, е). Поскольку параметры в этом случае близки к бифуркационным, естественно ожидать также замедление переходных процессов.

Исходя из этих соображений проведено моделирование динамики изотропных цепочек СФС вблизи значений  $\delta + \varepsilon = 1$  на достаточно больших интервалах времени интегрирования. На рис. 4.10, а, б даны пространственно-временные диаграммы с шагом  $\Delta\tau = 225$  для  $N = 69$  и  $N = 70$  соответственно. Имеет место установление режима синхронизации с очень большой длительностью переходных процессов, т. е. параметры  $\delta, \varepsilon$  выбраны до выхода из областей син-



Р и с. 4.10

в)



Р и с. 4.11

хронизации. Две другие пространственно-временные диаграммы рис. 4.10, в, г даны с шагом  $\Delta\tau = 4$ . Они иллюстрируют достаточно длинный (и, по-видимому, неоконченный) переходный процесс формирования структур при выходе параметров  $\delta, \alpha$  из области синхронизации ( $N = 69$  и  $N = 70$  соответственно).

В однонаправленных цепочках СФС ранее (гл. 2) отмечалась возможность подавления биений вдоль цепочки за счет связей при  $\gamma > 1$ , т. е. когда в каждой парциальной СФС<sub>n</sub> без связей синхронизация невозможна. Аналогичное явление имеет место и в цепочке СФС с взаимными связями. На рис. 4.11 даны пространственно-временные диаграммы,

полученные для цепочки СФС при  $\gamma = 1,1$ ;  $N = 69$  и разных коэффициентах связи. Здесь асинхронные вращательные режимы подавляются во всей цепочке за исключением начальных и конечных элементов. Четко наблюдается волновой характер движений фронтов "асинхронизация - синхронизация", "синхронизация - асинхронизация".

#### 4.4. Цепочка связанных инерционных систем

Учтем инерционность СФС  $n$ , включенных в цепочку. Как и в гл. 3, рассмотрим наличие интегрирующих фильтров  $K(p) = 1/(1+T_p)$  в цепях управления СФС  $n$ . Тогда вместо (4.1) получим

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin \varphi_{n-1} - \varkappa \sin \varphi_{n+1}, \quad n = \overline{1, N} \quad (4.11)$$

Безразмерное время, параметры и граничные условия аналогичны введенным в (3.1) и (4.1).

Динамику цепочки, описываемой системой (4.11), можно изучать с помощью тех же приемов, которые использовались для (3.1) и (4.1). Поэтому, не останавливаясь на деталях исследования, перечислим основные результаты численного и теоретического анализа поведения цепочки, моделируемой системой (4.11).

1) В цепочке, описываемой системой (4.11), при выполнении условий на параметры (4.9) и (4.10) при произвольных  $\lambda$  возможна реализация статического режима синхронизации, при котором устанавливающиеся значения фазовых переменных  $\varphi_n^s$  определяются из соотношений (4.6) - (4.8) (см. рис. 4.1, 4.2).

2) Этот режим глобально устойчив при значениях параметров  $\gamma, \lambda$  из области  $D_1$  (см. разд. 3.1) - т. е. внутри полосы захвата  $\gamma < \gamma^*(W)$  для несвязанных СФС  $n$  и выполнении условия на коэффициенты связей  $\delta + \varkappa \leq 1$  в цепочке произвольной длины.

3) Для СФС  $n$  вблизи центра длинной цепочки при слабых связях устанавливающиеся в режиме синхронизации значения фазовых переменных  $\varphi_n^s$  приближенно одинаковы и равны  $\bar{\varphi}^s = \arcsin \gamma / (1 + \delta + \varkappa)$

4) В области параметров

$$\gamma^*(W) + \delta + \varkappa < \gamma < 1 - \delta - \varkappa$$

в зависимости от начальных условий  $(\varphi_n, d\varphi_n/d\tau)_n$ ,  $n = \overline{1, N}$  в элементах цепочки могут реализовываться:

- режим полной синхронизации или асинхронный колебательный режим во всех СФС  $_n$ ;
- асинхронный вращательный режим во всех СФС  $_n$ ;
- в части СФС  $_n$  - асинхронный колебательный режим, в другой части - асинхронный вращательный режим.

В области параметров

$$\gamma > 1 + \delta + \varepsilon$$

во всех СФС  $_n$  устанавливается асинхронный вращательный режим.

5) Нарушение режима полной синхронизации СФС  $_n$  в цепочке при выходе значений параметров из области глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия в системе (4.11) может происходить либо через бифуркацию слияния и исчезновения состояний равновесия и рождения периодического движения в каких-либо парциальных СФС  $_n$ , либо через бифуркацию разрушения петли сепаратрисы седлового состояния равновесия и также рождения периодического движения. При этом в одной или двух СФС  $_n$  (в зависимости от четности  $N$ ) появляется вращательный асинхронный режим, а в остальных - колебательный асинхронный режим.

6) За счет введения взаимных связей в цепочке существует возможность установления режима полной синхронизации цепочки при значениях параметров  $\gamma, \lambda$  из области  $D_2$  (см. разд. 3.1) - т. е. значений параметров  $\gamma^*(W) < \gamma < 1$ , при которых в несвязанных СФС  $_n$  синхронизация наступает не при всех начальных условиях  $(\varphi_n, d\varphi_n/d\tau)_n$ .

7) При больших значениях параметров связей ( $\delta + \varepsilon > 1$ ) могут существовать асинхронные стохастические режимы.

8) В цепочках СФС с взаимными связями переходные процессы установления режима синхронизации в целом осуществляются быстрее, чем в цепочке СФС с однонаправленными связями (при одинаковых параметрах и начальных условиях).

Аналогичные рассмотрения можно провести и в случае более сложных фильтров в цепях СФС  $_n$ . Естественно, что оно будет более трудоемким, что динамика цепочки приобретает новые черты, обусловленные усложнением динамики парциальных СФС  $_n$ , входящих в цепочку, однако основные черты нелинейной динамики сохраняются. Для иллюстрации на



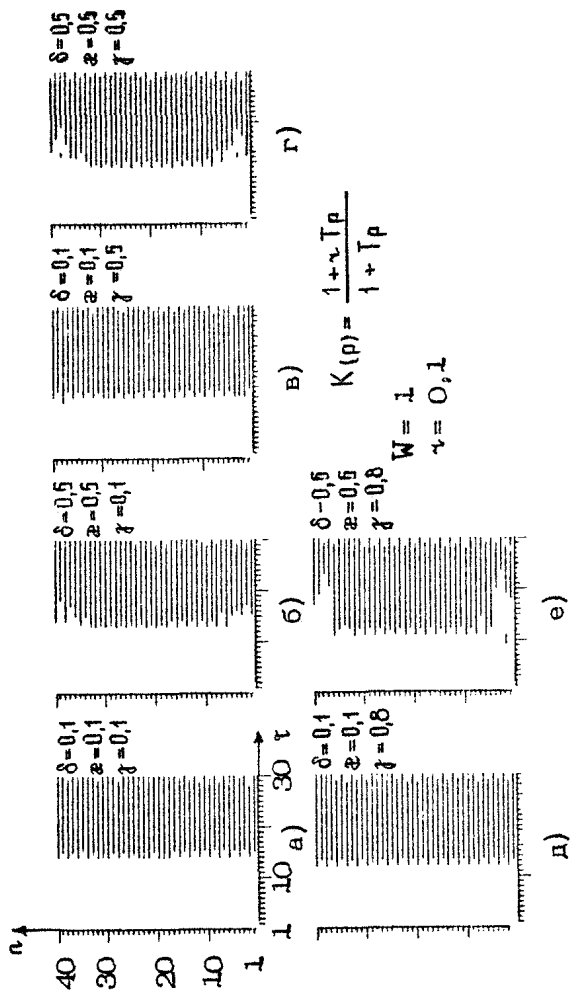
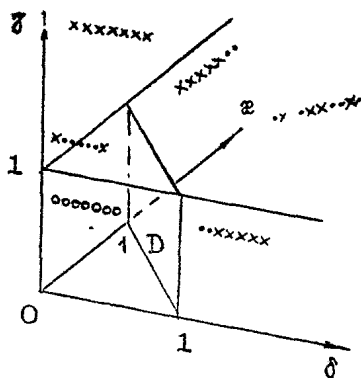


Рис. 4.1.2



- - синхронизация  $\delta$
- x - вращательный режим
- - колебательный режим

Р и с. 4.13

рис. 4.12 приведены пространственно-временные диаграммы для цепочки с взаимными связями в случае использования пропорционально-интегрирующего фильтра  $K(p) = (1 + \tau_i p) / (1 + T_p p)$  в СФС  $n$ .

Включая анализ однородных цепочек СФС с взаимными связями, качественно представим разбиение пространства параметров на области различных режимов (рис. 4.13). Для СФС с идеализированными фильтрами  $K(p) = 1$  в цепях управления в области параметров  $D (\gamma < 1, \delta + \zeta \leq 1)$  при любых начальных условиях устанавливается режим глобальной синхронизации. Вне этой области возможны различные асинхронные режимы, образуются стационарные структуры различной сложности. Эти режимы вне области  $D$  на рис. 4.13 представлены достаточно условно, поскольку колебательные и вращательные режимы здесь могут быть различной сложности, в частности хаотическими; могут существовать смешанные режимы: колебательные режимы могут иметь малые амплитуды, т.е. в цепочке может существовать квазисинхронизм, и т.д. Граница области  $D: \delta + \zeta \approx 1$  условна, так как она зависит от  $N$  и лишь для больших  $N$  приближается к плоскости  $\delta + \zeta = 1$ .

Для СФС с интегрирующими фильтрами  $K(p)=1/(1+Tp)$  область  $D$  становится меньше ( $\gamma < \gamma^*(W)$ ,  $\delta + \varepsilon \leq 1$ , где  $\gamma^*(W)$  – полоса захвата отдельной парциальной СФС  $n$  без связей). Для значений параметров  $\gamma^*(W) < \gamma < 1$ ,  $\delta + \varepsilon \leq 1$  режимы в цепочке существенно зависят от начальных условий в каждой СФС  $n$ , поэтому режим синхронизации негарантирован и, видимо, обеспечивается только при специальном выборе начальных условий.

## ЦЕПОЧКИ СО СВЯЗЯМИ ЧЕРЕЗ СИГНАЛЫ ФАЗОВЫХ РАССОГЛАСОВАНИЙ

В предыдущих главах рассматривались цепочки СФС со связями через сигналы управления. Был рассмотрен наиболее простой вариант осуществления таких связей – путем прямого обмена управляющими сигналами соседних парциальных СФС  $n$ . Ниже рассмотрим динамику цепочки СФС с другим типом связей – через сигналы взаимных фазовых рассогласований.

### 5.1. Погоковая цепочка

Рассмотрим многоканальную цепочку парциальных СФС  $n$ , соединенных параллельно (см. рис. 2.1) через сигналы фазовых рассогласований. Введение такого типа связей вполне естественно при решении задачи о взаимной синхронизации элементов цепочки (в отличие от задачи синхронизации по опорному сигналу, как отмечено в гл. 1). Для осуществления таких связей в цепочке в наиболее простом варианте потребуется сравнить на отдельном фазовом дискриминаторе выходные сигналы генераторов двух соседних СФС  $n$ , а затем использовать полученный сигнал фазового рассогласования для управления частотой обоих генераторов. Сделаем, как и ранее, предположение об однородности цепочки, наличии интегрирующих фильтров  $K(p) = 1/(1+Tp)$  в цепях управления СФС  $n$ . В этом случае с учетом (1.6) после введения безразмерного времени  $\tau = t \sqrt{\Omega/T}$  и параметров  $\lambda = W^{-1/2}$ ,  $W = \Omega T$  математическую модель цепочки СФС можно представить в виде ( $\gamma, \lambda, \delta, \alpha$  считаем неотрицательными)

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \alpha \sin(\varphi_n - \varphi_{n+1}), \quad (5.1)$$

$n = 1, N$

Заметим, что модель типа (5.1) представляет интерес для целого ряда приложений: динамики коллективных систем фазовой синхронизации [8], фазированных антенных решеток [17], связанных джозефсоновских контактов [54], энергосетей [21], ряда биологических объектов [52, 55] и др.

Система (5.1) практически не изучалась в литературе, однако весьма полезную информацию для ее исследования можно получить из результатов по анализу возмущенного диссипативного уравнения  $\sin$  -Гордона [51, 56 - 59], решения которого при определенных условиях близки к решениям рассматриваемой системы.

Структуры уравнений (5.1) и (4.11) совпадают. Поэтому сразу можно сделать некоторые очевидные оценки областей параметров, соответствующих различному поведению цепочки СФС (5.1). Область установления режима синхронизации или колебательных движений  $\gamma < \gamma^*(W) - \delta - \varphi$  ( $\gamma^*(W)$  - полоса захвата парциальной СФС<sub>n</sub>). Область установления вращательных движений  $\gamma > 1 + \delta + \varphi$ . Область колебательных и вращательных движений  $\gamma^*(W) + \delta + \varphi < \gamma < 1 - \delta - \varphi$ , при этом установление того или иного движения зависит от начальных условий  $(\varphi_n, d\varphi_n/d\tau)_n$ : а) во всех СФС<sub>n</sub> устанавливается либо стационарный режим синхронизации, либо асинхронный колебательный режим; б) в одной части парциальных СФС<sub>n</sub> устанавливается асинхронный режим колебаний, в другой - вращений; в) во всех СФС<sub>n</sub> устанавливается асинхронный вращательный режим.

Специфика межэлементных связей в цепочке (5.1) обуславливает существование при произвольных значениях  $\delta, \varphi$  пространственно однородного стационарного режима синхронизации с остаточными разностями фаз  $\varphi_n^s = \alpha \tau \sin \gamma$  для параметров  $\gamma, W$ , удовлетворяющих областям  $D_1$  и  $D_2$  (см. рис. 3.1, а); пространственно-однородного асинхронного вращательного режима для параметров  $\gamma, W$ , принадлежащих областям  $D_2, D_3$ . Это связано с тем, что указанные режимы реализуются при пространственно однородных начальных условиях  $(\varphi_n, d\varphi_n/d\tau)_n$ , т. е. когда система (5.1) распадается на  $N$  независимых одинаковых уравнений, в каждом из которых изменение переменных  $\varphi_n(\tau), d\varphi_n(\tau)/d\tau$  происходит одинаково вдоль цепочки.

Рассмотрим теперь процессы в цепочке в частном случае "погоковой" связи. Система (5.1) в случае  $\varphi = 0$  примет вид

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_n}{d\tau} + \sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \quad n = \overline{1, N} \quad (5.2)$$

Граничные условия  $\varphi_0(\tau) \equiv \varphi_1(\tau)$

Поведение цепочки СФС, описываемой (5.2), будем изучать для значений параметров  $\gamma$  и  $W$  из трех областей  $D_{1,2,3}$ , соответствующих различному поведению траекторий в фазовом пространстве уравнения для парциальной СФС  $n$  (см. рис. 3.1).

Пусть параметры каждой СФС  $n$  принадлежат области  $D_1$ . Устанавливающийся в первой СФС  $1$  стационарный режим синхронизации имеет координаты  $\varphi_1^s = \arcsin \gamma$ ,  $(d\varphi_1/d\tau)^s = 0$ . Тогда уравнение, описывающее динамику СФС  $2$ , примет вид

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_2}{d\tau} + \sin \varphi_2 = \gamma - \delta \left( \sqrt{1-\gamma^2} \sin \varphi_2 - \gamma \cos \varphi_2 \right) \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) имеет два состояния равновесия:  $0_1$  ( $\varphi_2^s = \arcsin \gamma$ ,  $(d\varphi_2/d\tau)^s = 0$ ) и

$$0_2 \left( \varphi_2^u = \arcsin \frac{\gamma - \gamma \delta^2}{1 + 2\delta \sqrt{1-\gamma^2} + \delta^2}, \left( \frac{d\varphi_2}{d\tau} \right)^u = 0 \right).$$

Они существуют при любых  $\lambda, \delta$  и  $\gamma < 1$ .

Анализируя корни характеристического уравнения для (5.3), приходим к выводу, что при  $\delta > 0$  состояние равновесия  $0_1$  всегда устойчиво, а состояние равновесия  $0_2$  — седловое.

Определим в пространстве параметров  $\gamma, \lambda, \delta$  область глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия  $0_1$  уравнения (5.3). Для этого исследуем уравнение (5.3) на предмет существования периодических движений аналогично [47]. Преобразуем (5.3) к виду

$$\frac{dy_2}{d\varphi_2} = \frac{\gamma - \lambda y_2 - \sin \varphi_2 - \delta \sqrt{1-\gamma^2} \sin \varphi_2 + \delta \gamma \cos \varphi_2}{y_2}, \quad (5.4)$$

где  $y_2 = d\varphi_2/d\tau$

Предположим, что уравнение (5.4) имеет вращательное периодическое движение  $y_2 = y_2^*(\varphi_2)$ . Тогда, проинтегрировав уравнение (5.4) вдоль этого движения на периоде по  $\varphi_2$  от 0 до  $2\pi$ , получим условие на среднее за период значение координаты  $y_2^*$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_2^*(\varphi) d\varphi = \frac{\gamma}{\lambda}. \quad (5.5)$$

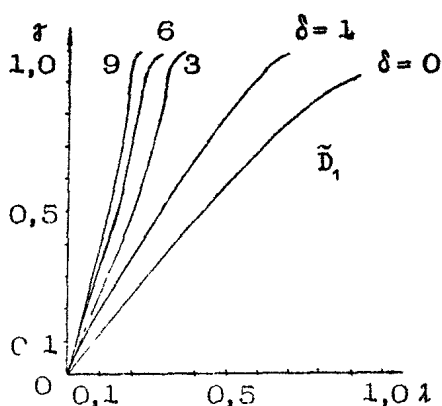
Так как фазовое пространство  $(\psi_2, \varphi_2)$  уравнения (5.4) двумерное, то из (5.5) следует, что если уравнение (5.4) имеет одно вращательное периодическое движение, то такое движение должно дважды пересекать прямую  $\varphi_2 = \gamma/\lambda$ . Найдем на этой прямой значения  $\tilde{\varphi}_2^{1,2}$ , при которых знак векторного поля  $\left. \frac{d\varphi_2}{d\psi_2} \right|_{\varphi_2 = \gamma/\lambda}$  обращается в нуль. Они равны  $\tilde{\varphi}_2^1 = \arctg(\gamma\delta/\delta\sqrt{1-\gamma^2}-1)$  и  $\tilde{\varphi}_2^2 = \pi - \tilde{\varphi}_2^1$ . Слева от  $\tilde{\varphi}_2^1$  и справа от  $\tilde{\varphi}_2^2$  наклон векторного поля  $\left. \frac{d\varphi_2}{d\psi_2} \right|_{\varphi_2 = \gamma/\lambda}$  положительный, а между ними отрицательный. Следовательно, если периодическое движение существует, то оно должно находиться на фазовой поверхности  $(\psi_2, \varphi_2)$  ниже точки с координатами  $\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2^2$  и  $\psi_2 = \gamma/\lambda$ . Тогда фазовая траектория, "выпущенная" из этой точки, обязательно "наматывается" на периодическое движение. Таким образом, изучая поведение одной траектории, проходящей через точку  $\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2^2, \psi_2 = \gamma/\lambda$  фазовой поверхности  $(\psi_2, \varphi_2)$ , можно однозначно сделать вывод об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия  $\theta_1$  на всей фазовой поверхности и на этой основе провести вычисление в пространстве параметров области глобальной устойчивости. Бифуркационные кривые  $\gamma = \gamma^*(\lambda, \delta)$ , построенные таким образом, даны для различных  $\delta$  на рис. 5.1. Они выделяют область глобальной устойчивости  $\tilde{D}_1$  состояния равновесия  $\theta_1$  для уравнения (5.3).

Уравнение (5.3) после замены индекса 2 на индекс  $n$  описывает динамику произвольной парциальной СФС  $n$ , следующей за СФС  $n-1$ , в которой установился стационарный режим синхронизации. Тогда рассуждения, относящиеся к определению координат и устойчивости состояний равновесия, приведенные для СФС  $2$ , справедливы и для произвольной СФС  $n$ . Следовательно, в системе (5.2) единственное устойчивое состояние равновесия при  $\gamma < 1, \delta > 0$  имеет координаты  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma, (d\varphi_n/d\tau)^s = 0$  ( $n = \overline{1, N}$ ). Таким образом, при любом значении параметра связи  $\delta > 0$  в цепочке, описываемой (5.2), установится стационарный пространственно однородный режим синхронизации с постоянными значениями остаточных разностей фаз  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma$ . Численный эксперимент подтвердил установление такого режима.

Так как такая же ситуация имеет место в цепочке несвязанных парциальных СФС  $n$ , то естественен вопрос: какую

же роль играет при  $\gamma, \lambda \in D_1$ , включение связи между СФС $_n$ ? Для ответа обратимся к определению характеристик переходного процесса к режиму синхронизации.

В численном эксперименте с системой (5.2) при  $N = 40$  определялись точечные (для каждой СФС $_n$ ) и максимальные времена переходного процесса (во всей цепочке СФС) для разных распределений начальных условий  $(\psi_n, \frac{d\psi_n}{d\tau})_n$



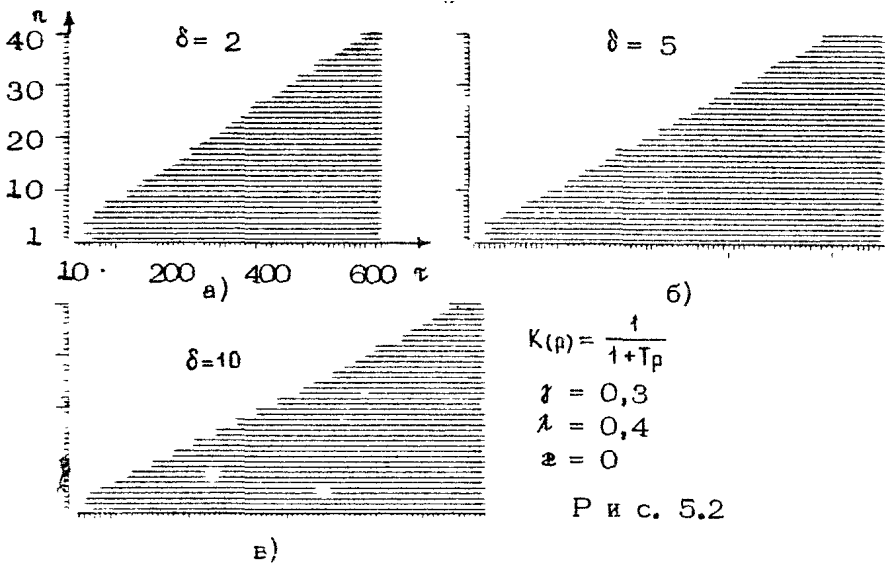
Р и с. 5.1

Очевидно, что для пространственно однородных начальных условий точечные времена переходного процесса равны максимальным временам для цепочек, причем результаты для цепочек со связями между парциальными СФС $_n$  и без связей совпадают. Проведены эксперименты при следующих начальных условиях: а)  $(\frac{d\psi_n}{d\tau})_n = \frac{\gamma}{\lambda}$ , а  $(\psi_n)_n$  распределены по закону  $(\psi_n)_n = (\frac{n - N}{2})^{-2}$ ; б)  $(\frac{d\psi_n}{d\tau})_n = \frac{\gamma}{\lambda}$ , а  $(\psi_n)_n$  распределены случайно в интервале  $(0, 2\pi]$ . Установлено, что в обоих случаях при увеличении параметра связи время переходного процесса возрастает. На рис. 5.2 представлены пространственно-временные диаграммы, иллюстрирующие характер переходных процессов к режиму синхронизации (начальные условия - случайные по  $\psi_n$ ).

В итоге можно сделать вывод, что для значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_1$  (см. рис. 3.1), т. е. когда в каждой несвязанной СФС $_n$  устанавливается стационарный режим синхронизации, введение однонаправленной связи в цепочке (5.2) не приводит к его нарушению, а влияет лишь на время его установления, причем в сторону увеличения.

Рассмотрим теперь динамику системы (5.2) при значениях параметров  $\gamma, W$  из области  $D_2$  (см. рис. 3.1). Здесь существенную роль играют начальные условия для уравнения, описывающего поведение СФС $_1$ : а) когда начальные условия  $(\psi_1, \frac{d\psi_1}{d\tau})_n$  принадлежат области притяжения состояния равновесия  $0_1$  ( $\psi_1^s = \arcsin \gamma, (\frac{d\psi_1}{d\tau})^s = 0$ ); б) когда





начальные условия  $(\varphi_1, d\varphi_1/d\tau)_n$  принадлежат области притяжения вращательного периодического движения.

В случае а динамика СФС<sub>2</sub> описывается уравнением (5.3). Так как область глобальной асимптотической устойчивости  $\tilde{D}_1$  состояния равновесия  $0_1$  уравнения (5.3) при увеличении параметра  $\delta$  расширяется (см. рис. 5.1), то может оказаться, что  $\gamma, W$  из области  $D_2$  будут принадлежать области  $\tilde{D}_1$ . Тогда во второй и во всех последующих парциальных СФС  $n$  состояния равновесия  $0_1$  ( $\varphi_n^s = \alpha r \sin \gamma$ ,  $(\frac{d\varphi_n}{d\tau})^s = 0$ ,  $n = 2, N$ ) будут глобально асимптотически устойчивы. Таким образом, за счет введения однонаправленной связи между парциальными СФС  $n$  область параметров  $\gamma, W$ , для которой реализуется стационарный режим синхронизации, с ростом  $n$  может быть существенно (вплоть до  $\gamma \leq 1$  при всех  $W$ ) расширена.

В случае б в зависимости от начальных условий  $(\varphi_n, \frac{d\varphi_n}{d\tau})_n$ ,  $n = 2, N$  и от величины параметра связи  $\delta$  возможны следующие ситуации:

- во всех парциальных СФС  $n$  устанавливается пространственно однородный асинхронный вращательный режим;
- происходит регулярное или случайное чередование номеров парциальных СФС  $n$ , в которых реализуются асинхронные колебательный или вращательный режимы;

- начиная с некоторой СФС  $n^*$  во всех последующих СФС  $n$  устанавливаются асинхронные колебательные режимы с уменьшающейся с ростом  $n$  амплитудой колебаний (необходимое условие для этого  $\delta < 1$ );

- развитие вдоль цепочки стохастических режимов.

На рис. 5.3 приведены спектры реализаций в первых пяти уравнениях системы (5.2). Рис. 5.3,а иллюстрирует возникновение стохастических движений уже для СФС<sub>2</sub> через перемежаемость при  $\gamma = 0,6$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 0,8$ . Рис. 5.3,б иллюстрирует возникновение хаоса через пространный бифуркации удвоения при  $\gamma = 0,6$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 0,9$ .

Рассмотрим динамику цепочки (5.2) при  $\gamma, W \in D_3$  (см. рис. 3.1). Состояния равновесия при этом отсутствуют. Так как в уравнении для СФС<sub>1</sub> существует только одно притягивающее множество - периодическое движение  $\varphi_1 = \varphi_1^*(\tau)$ ,  $\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{d\varphi_1^*(\tau)}{d\tau}$ , а система (5.2) имеет тривиальное решение  $\varphi_N(\tau) = \varphi_{N-1}(\tau) = \dots = \varphi_1(\tau)$ , то в ней существует пространственно однородный вращательный периодический режим:

$$\varphi_N(\tau) = \varphi_{N-1}(\tau) = \dots = \varphi_2(\tau) = \varphi_1^*(\tau),$$

$$\frac{d\varphi_N(\tau)}{d\tau} = \frac{d\varphi_{N-1}(\tau)}{d\tau} = \dots = \frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = \frac{d\varphi_1^*(\tau)}{d\tau}$$

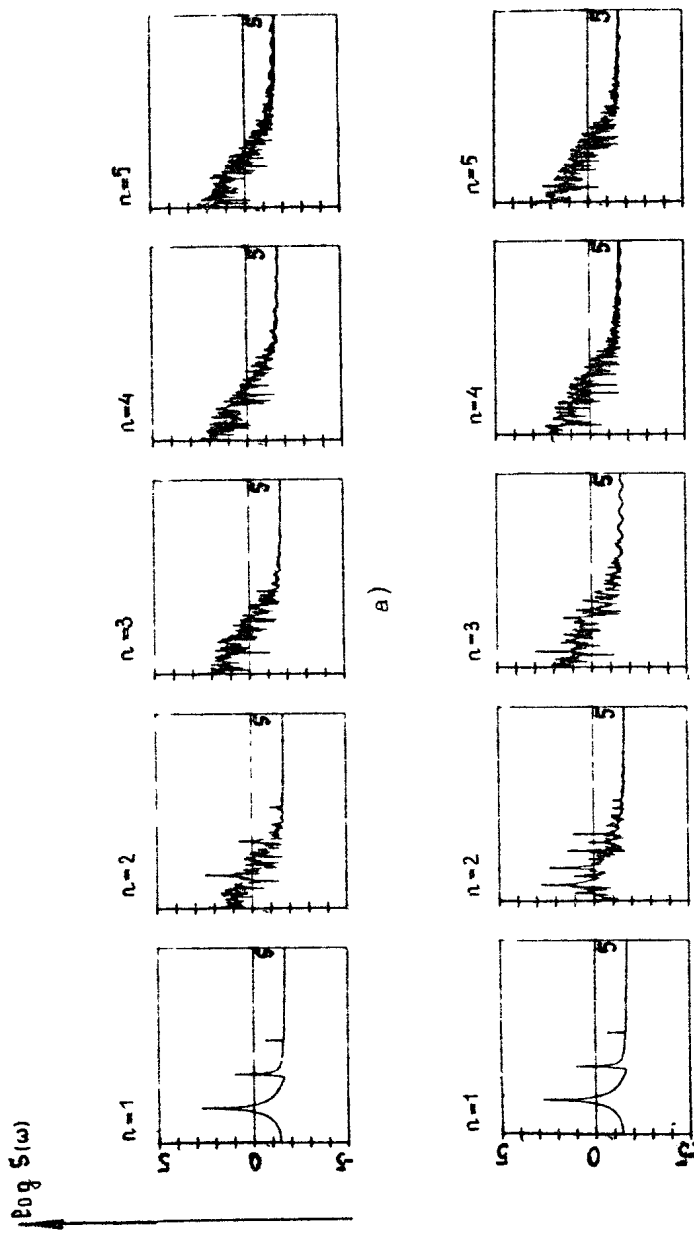
Величина параметра связи  $\delta$  влияет, как установлено в численном эксперименте, лишь на время переходного процесса к стационарному режиму.

Таким образом, моделирование цепочки (5.2) показало, что при  $\gamma > 1$  имеет место полная динамическая взаимная синхронизация парциальных СФС  $n$  (как по частоте, так и по фазе). В то же время по отношению к опорному сигналу во всех парциальных СФС  $n$  реализуется асинхронный вращательный режим.

## 5.2. Случай взаимных связей

Рассмотрим цепочку (5.1) при  $\delta, \alpha > 0$ , граничные условия возьмем двух типов [60, 61]:

- а) периодические.  $\varphi_0(\tau) = \varphi_N(\tau)$ ,  $\varphi_{N+1}(\tau) = \varphi_1(\tau)$ ;
- б) отражающие:  $\varphi_0(\tau) = \varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_{N+1}(\tau) = \varphi_N(\tau)$



Р и с. 5.3

Состояние равновесия системы (5.1) определяется уравнениями

$$\sin \varphi_n = \gamma - \delta \sin(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \alpha \sin(\varphi_n - \varphi_{n+1}), \quad \frac{d\varphi_n}{d\tau} = 0, \quad n = \overline{1, N} \quad (5.6)$$

В общем случае решение системы (5.6) не найдено, однако некоторые ее решения получить нетрудно. Так, система (5.6) имеет тривиальное решение  $(d\varphi_n/d\tau)^0 = 0$ ,  $\varphi_n^0 = \varphi_{n-1}^0$ , где каждое  $\varphi_n^0$  определяется из уравнения

$$\sin \varphi_n^0 = \gamma \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) при  $\gamma < 1$  для каждого  $n$  имеет два решения:  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma$ ,  $\varphi_n^u = \pi - \arcsin \gamma$ . Следовательно, система (5.1) размерности  $N$  имеет, как минимум,  $2^N$  состояний равновесия.

Как было сказано выше, для значений параметров  $\gamma, W$  из областей  $D_1$  и  $D_2$  при одинаковых начальных условиях  $(\varphi_n, d\varphi_n/d\tau)_n$  в цепочке устанавливается пространственно однородный стационарный режим синхронизации. В фазовом пространстве системы (5.1) ему соответствует состояние равновесия  $U_1$  с координатами  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma$ ,  $(d\varphi_n/d\tau)^s = 0$ , которое может быть как устойчивым, так и седловым. При больших  $N$  локальная устойчивость этого и других состояний равновесия с координатами  $\varphi_n = \varphi_n^s$ ,  $d\varphi_n/d\tau = 0$  определим из знаков собственных значений соответствующих характеристических уравнений. Для этого линеаризуем систему (5.1) в окрестности решений  $\varphi_n^s$ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_n + \lambda \xi_n + \cos \varphi_n^s &= -\delta (\cos \varphi_{n-1}^s \cos \varphi_n^s + \sin \varphi_{n-1}^s \sin \varphi_n^s) \xi_{n-1} - \\ &- \alpha (\cos \varphi_{n+1}^s \cos \varphi_n^s + \sin \varphi_{n+1}^s \sin \varphi_n^s) \xi_{n+1} + \\ &+ \delta (\cos \varphi_{n-1}^s \cos \varphi_n^s + \sin \varphi_{n-1}^s \sin \varphi_n^s) \xi_{n-1} + \\ &+ \alpha (\cos \varphi_{n+1}^s \cos \varphi_n^s + \sin \varphi_{n+1}^s \sin \varphi_n^s) \xi_{n+1} = \\ &= \delta \xi_{n-1} - (\alpha + \delta) \xi_n + \alpha \xi_{n+1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $\xi_n = \varphi_n - \varphi_n^s$ . Решение системы (5.8) ищем в виде

$$\xi_n = A \exp(\omega_p \tau + i n \theta_p), \quad (5.9)$$

где  $\theta_p = \pi p / N$ ,  $p = 0, 1, \dots, N$  для цепочки с отражающими концами и  $\theta_p = 2\pi p / N$ ,  $p = 0, 1, \dots, N$  для закольцованной

цепочки. Подставив (5.9) в (5.8), после преобразований получим выражение для собственных значений:

$$\omega_p^{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \cos \varphi_n^s - (\alpha + \delta)(1 - \cos \theta_p)},$$

$$p = 0, 1, \dots, N$$

Для пространственно однородного состояния равновесия  $U_1$  с координатами  $\varphi_n^s = \alpha \tau \sin \gamma$ ,  $(d\varphi_n/d\tau)^s = 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ , в силу принадлежности  $\varphi_n^s$  интервалу  $[0, \pi/2)$  величина  $\cos \varphi_n^s > 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Следовательно, для  $U_1$   $\operatorname{Re} \omega_p^{1,2} < 0$  и поэтому среди  $2^N$  состояний равновесия, определяемых (5.7),  $U_1$  является устойчивым. Таким образом, пространственно однородный режим синхронизма со значениями остаточных разностей фаз  $\varphi_n^s = \alpha \tau \sin \gamma$  устойчив.

Система (5.6) может иметь и другие состояния равновесия. Чтобы убедиться в этом, сделаем линеаризацию связей. При  $\delta = \alpha$  и выполнении условия

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| < \varepsilon, \quad n = \overline{1, N} \quad (5.10)$$

$\sin(\varphi_n - \varphi_{n-1})$  можно приближенно заменить на  $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ , и тогда система (5.6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n}{d\tau} &= 0, & \text{а)} \\ \sin \varphi_n &= \gamma - \delta(\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}) & \text{б)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Переходим от дискретного описания стационарных состояний рассматриваемой цепочки к непрерывному (т. е. к приближенному описанию цепочки как одномерной сплошной среды) с учетом замен

$$\varphi_n \rightarrow \varphi(x),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &\rightarrow \varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{d\varphi}{dx} h - \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} h^2 + \dots, \\ \varphi_{n-1} &\rightarrow \varphi(x-h) = \varphi(x) - \frac{d\varphi}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} h^2 - \dots, \end{aligned} \quad (5.12)$$

(где  $h$  — шаг дискретизации по новой пространственной переменной  $x$ ). Вместо уравнения (5.11 б) для  $\varphi$ -координат состояний равновесия получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\delta \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \gamma - \sin \varphi, \quad (5.13)$$

решая которое, можно получить приближенное распределение по  $\tau$ -пространству  $\varphi$ -координат состояний равновесия (5.1). Среди множества состояний равновесия системы (5.1), определяемых из (5.13) с учетом граничных условий, при  $\gamma = 0$  и больших  $\delta$  устойчивы состояния равновесия, распределение которых  $\varphi(\tau)$  соответствует петле сепаратрисы седлового состояния равновесия уравнения (5.13), для которой есть точное решение:

$$\varphi(\tau) = \pm 4 \operatorname{arctg} [\epsilon \operatorname{tr}(-\tau)], \quad (5.14)$$

где знак плюс соответствует верхней петле, знак минус — нижней. Так как в  $\epsilon_1$ -окрестности седлового состояния равновесия  $0_\tau$  ( $\varphi = 0$ ;  $d\varphi/d\tau = 0$ ) уравнения (5.13) фазовая траектория может находиться сколь угодно долго, то состояний равновесия исходной системы (5.1), распределенных по  $n$  аналогично закону (5.14) при больших  $N$ , может существовать очень много (при этом для состояний равновесия меняется количество нулевых координат  $\varphi_n$  с одного конца цепочки и координат  $\varphi_n = 2\pi$  с другого конца).

В вычислительном эксперименте, проведенном с системой (5.1), установлены устойчивые состояния равновесия, распределенные аналогично (5.14), при  $\gamma = 0$ ,  $N \geq 11$  и  $\epsilon \leq 2$ . При  $\gamma$  отличном от нуля пространственно неоднородных устойчивых состояний равновесия не обнаружено.

Заметим, что так как разложение  $d^2\varphi/d\tau^2$  через центральную разность второго порядка требует малости шага дискретизации по переменной  $\tau$ , то необходимым условием для возможности получения координат состояний равновесия системы (5.1) через решения уравнения (5.13) является большая величина параметров связи  $\delta = \epsilon$ . В данном случае  $\delta$  есть величина пропорциональная  $h^{-2}$ , а для того чтобы разложение  $d^2\varphi/d\tau^2$  через центральную разность  $\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}$  было справедливым, необходимо выполнение условия (5.10), что достигается при малом  $h$ .

Глобальная устойчивость пространственно однородного режима синхронизации проверялась при численном моделировании системы (5.1) с отражающими граничными условиями. Для всех значений параметров  $\lambda$  из интервала  $[0, 1; 10]$  с шагом 0,5,  $\gamma$  из интервала  $[0; \gamma^*(\lambda)]$  с шагом 0,1,  $\epsilon$  и  $\delta$  из интервала  $[0, 1; 20]$  с шагом 1 при различных регулярно и случайно выбранных начальных условиях  $(\varphi_n, d\varphi_n/d\tau)_n$  для  $N = 10, 40, 80$  и 100 единствен-

ным притягивающим множеством было состояние равновесия  $D_1 \left( \varphi_n^s = \arcsin \gamma, \left( \frac{d\varphi_n}{dt} \right)^s = 0, n = \overline{1, N} \right)$ .

При  $\delta = \varepsilon$  для анализа движений в системе (5.1), удовлетворяющих условиям (5.10) в случае меняющихся во времени переменных  $\varphi_n(\tau)$  и  $d\varphi_n(\tau)/d\tau$ , может быть полезен, так же как и при изучении состояний равновесия системы (5.1), переход к непрерывному описанию динамики рассматриваемой цепочки, но уже с помощью дифференциального уравнения в частных производных. Так, сделав замены аналогичные (5.12), получим вместо (5.1) диссипативное возмущенное уравнение  $\sin$ -Гордона [56]:

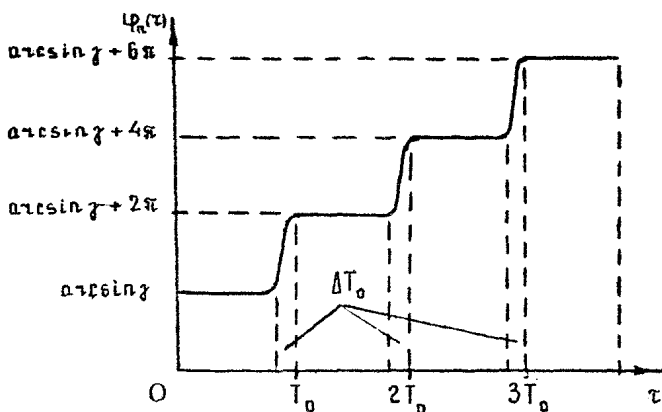
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \sin \varphi = \gamma + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}, \quad (5.15)$$

исследованию которого посвящено значительное число работ [56 - 59, 62 - 65]. В работе [62] приведена область в плоскости параметров  $(\gamma, \lambda)$ , для которой устанавливается лишь пространственно однородное стационарное состояние. Она полностью покрывает область  $D_1$  (см. рис. 3.1).

Основываясь на результатах подробного численного эксперимента с системой (5.1), результатах моделирования уравнения (5.15), оценке области существования лишь колебательных движений и факте отсутствия притягивающих множеств, отличных от состояния равновесия  $D_1$ , в системе, описывающей цепочку однонаправленно связанных СФС<sub>n</sub> (см. разд. 5.1) можно сделать вывод, что в системе (5.1) при  $\gamma, W \in D_1$  и при любых  $\delta$  и  $\varepsilon$ , по-видимому, единственным притягивающим множеством является состояние равновесия  $D_1$ . Следовательно, в цепочке парциальных СФС<sub>n</sub> при любых начальных условиях реализуется пространственно однородный стационарный режим синхронизации с остаточными значениями разности фаз  $\varphi_n^s = \arcsin \gamma$  для  $n = \overline{1, N}$ .

Для системы (5.1) с периодическими граничными условиями при  $\gamma, W \in D_1$  в численном эксперименте установлено существование периодических движений.

Большое разнообразие реализующихся в системе (5.1) режимов имеет место при  $\gamma, W \in D_2$ . Кроме пространственно однородных состояний равновесия и вращательного периодического движения, здесь имеются также специфические пространственно-временные движения: волны синхронизации, когерентные структуры, хаос.

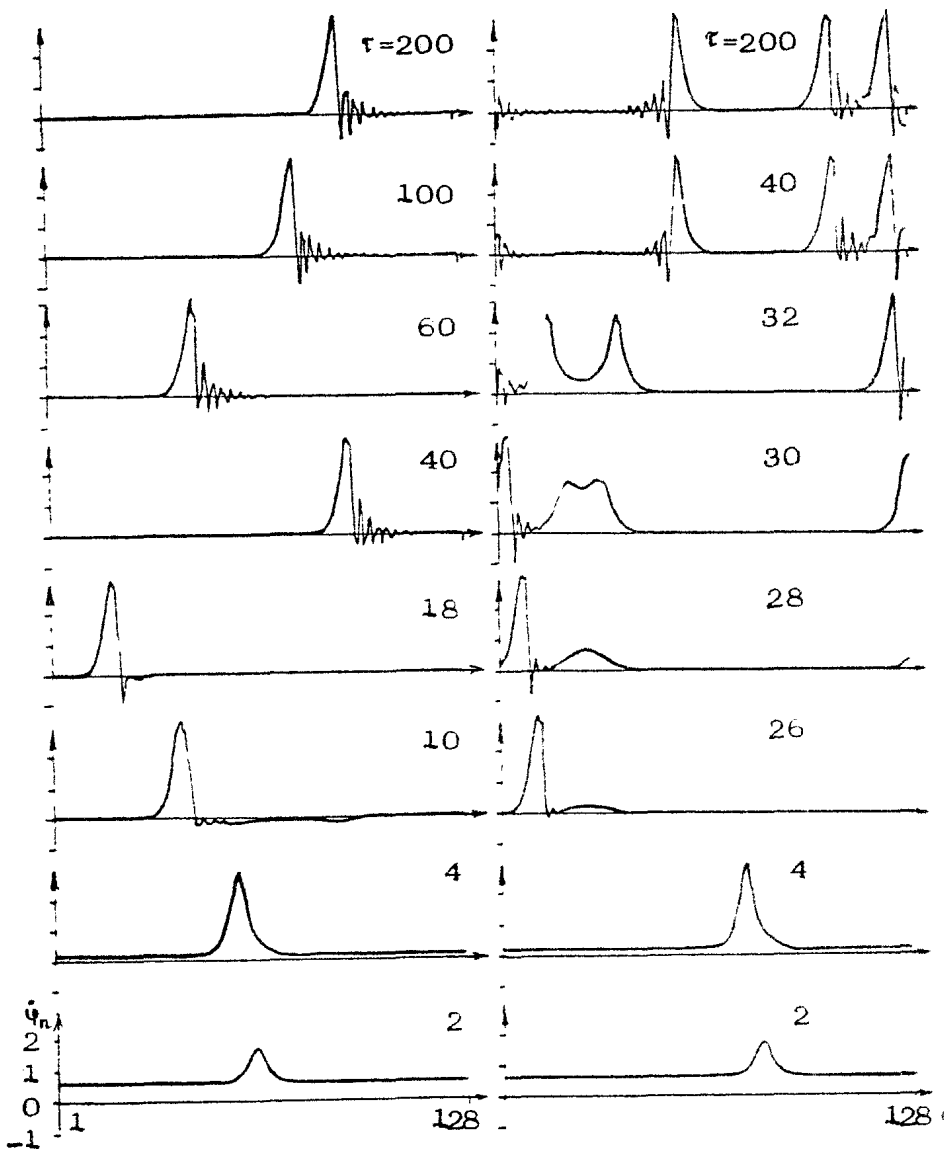


Р и с. 5.4

Для значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_2$  и частично из области  $D_3$  при немалых  $\delta = \alpha$  вычислительный эксперимент, проведенный с системой (5.1) при  $N = 128$ , показал значительное совпадение как количественных, так и качественных свойств различного рода стационарных движений и их бифуркаций для непрерывного уравнения (5.15) и его дискретного аналога при  $\delta = \alpha \gg 1$  — системы (5.1). Так, для системы (5.1) обнаружено существование бегущих одно- и многоимпульсных движений, причем среди них могут быть как двигающиеся влево (в сторону уменьшения  $n$  — солитоны \*), так и вправо (в сторону увеличения  $n$  — антисолитоны) импульсы. Временная реализация  $\psi_n(\tau)$  имеет вид, представленный на рис. 5.4. В каждом элементе цепочки имеют место вращательные периодические движения, причем большую часть периода  $T_0$  величина  $\psi_n(\tau)$  находится в  $\epsilon$ -окрестности точки, имеющей координату состояния равновесия  $\psi_n^s = 2\pi k + \arcsin \gamma$ . Далее за время  $\Delta T_0 \ll T_0$  происходит перескок  $\psi_n(\tau)$  в  $\epsilon$ -окрестность точки с координатой  $\psi_n^s = 2\pi(k+1) + \arcsin \gamma$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Такой характер поведения обусловлен тем, что периодическое во времени движение рождается через бифуркацию разрушения петли сепаратрисы седлового состояния равновесия, координаты

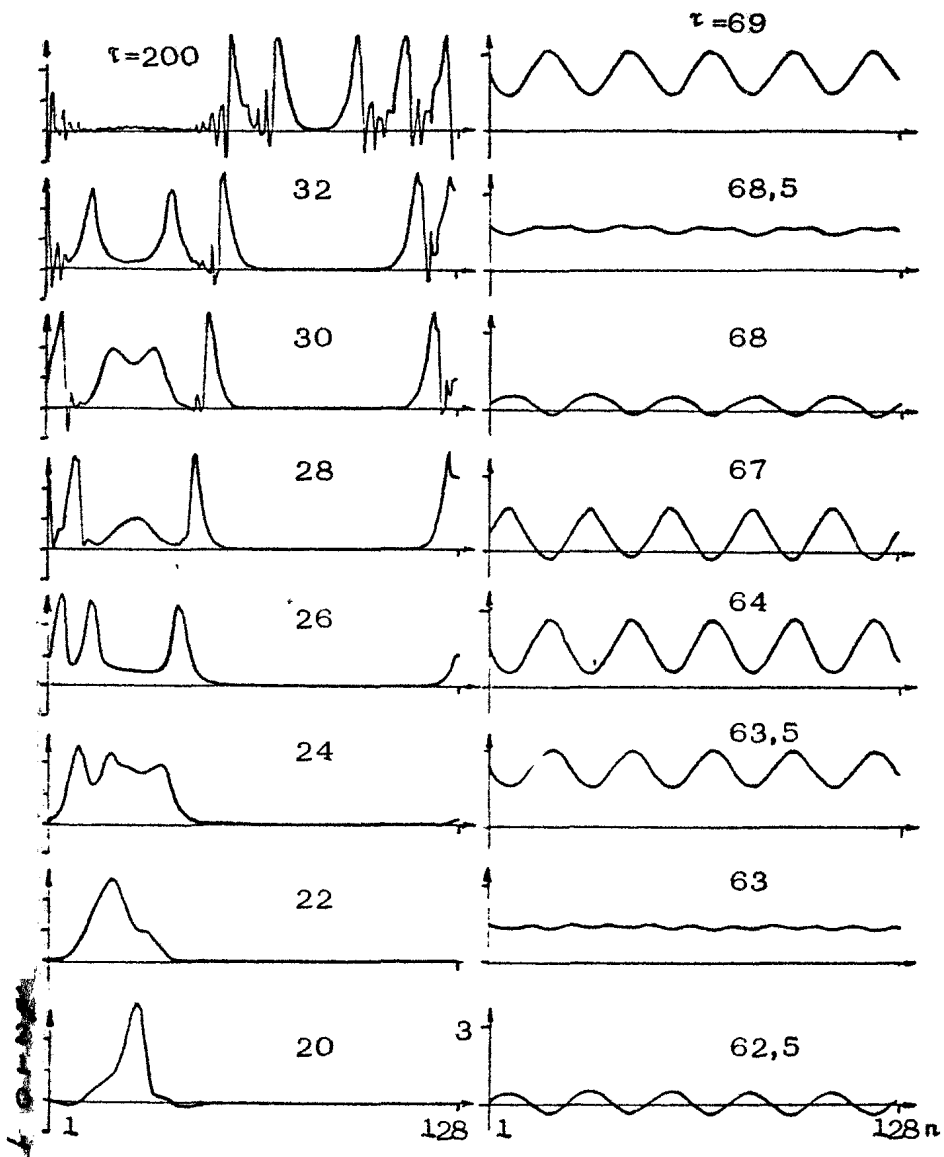
\* Употребление здесь для импульсов терминов солитон и антисолитон, вообще говоря, нестрогое, однако, поскольку такая терминология используется в литературе для уравнений типа  $\sin$ -Гордона, [56], авторы сочли целесообразным сохранить ее здесь.





Р и с. 5.5

Р и с. 5.6



Р и с. 5.7

Р и с. 5.8

наты которого определяются из (5.7). Если  $\gamma$  и  $W$  близки к бифуркационным значениям, то изображающая точка на родившемся периодическом движении большую часть периода проводит в малой окрестности седлового состояния равновесия.

Обнаружено большое число солитонных движений с разнобразной формой. Причина этого в том, что существует  $2^{N-1}$  седловых состояний равновесия и, следовательно, есть большое число логических возможностей замыкания сепаратрис этих состояний и рождения периодических движений через бифуркации разрушения петель сепаратрис. Приведем результаты численных расчетов, демонстрирующих вышесказанное. В экспериментах 1 – 3 фиксированы параметр диссипации  $\lambda \approx 0,4$ , параметры связи  $\delta = \varphi = 8,86$ , число элементов в цепочке  $N = 128$ , варьируется параметр  $\gamma$ . Граничные условия периодические. Начальные условия – невозмущенный солитон

$$(\varphi_n)_n = 4 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{erf} \left( n - \frac{N}{2} \right) h \right]; \quad \left( \frac{d\varphi_n}{dt} \right)_n = 0, \quad n = \overline{1, N}$$

Э к с п е р и м е н т 1.  $\gamma = 0,901$ . Солитон, немного изменив свою форму, остается единственной пространственной структурой (рис. 5.5).

Э к с п е р и м е н т 2.  $\gamma = 0,902$ . Некоторое время отличных от солитона пространственных структур не существует. Потом возникает локальная бризероподобная структура, которая разваливается на пару солитон и антисолитон. В дальнейшем новые пространственные структуры не возникают (рис. 5.6).

Э к с п е р и м е н т 3.  $\gamma = 0,90205$ . Так же, как и в предыдущем эксперименте, возникающая локализованная структура разваливается на солитон и антисолитон. Вслед за этим возникает еще одна бризероподобная структура, которая также разрушается на солитон и антисолитон. Далее новые структуры не возникают (рис. 5.7).

Развал бризероподобной структуры можно интерпретировать как происходящую при изменении времени бифуркацию удвоения.

Солитонные движения, реализующиеся в системе (5.1), можно интерпретировать как распространяющиеся вдоль цепочки стационарные волны синхронизации.

Для некоторых значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_2$  обнаружено существование когерентных структур, осциллирующих во времени. Их количество может изменяться при варьировании параметров системы (5.1). Для таких структур характерно синхронное изменение переменных  $\varphi_n(\tau)$  и  $d\varphi_n(\tau)/d\tau$  для центральных в структурах и симметричных относительно центральных элементов. На рис. 5.8 приведены результаты эксперимента при  $\gamma = 0,95$ ;  $\lambda = 0,4$ ;  $\delta = \varpi = 24,610916$ ;  $N = 128$ , в котором подобные структуры меняют свою форму. В указанном эксперименте имеет место структурная перемежаемость: большую часть временного периода существуют пять структур, меньшую – десять структур. Переход от пяти структур к десяти происходит через бифуркацию удвоения, обратный переход – через бифуркацию попарного слияния. При этом время может рассматриваться как управляющий параметр. Как и в случае существования стационарного режима в системе (5.1) при  $\gamma = 0$ , так и для реализаций движений в виде бегущих импульсов, необходимо, чтобы величина  $\delta, \varpi$  не была малой.

Свойства существования пространственно-временных движений типа бегущих импульсов и когерентных структур при равных значениях параметров связей в системе (5.1) имеют место и при  $\delta \neq \varpi$ . Существование бегущего импульса – солитона – наблюдалось в системе (5.1) при малом числе элементов цепочки ( $N = 7$ ).

При малых  $\delta$  и  $\varpi$  система (5.1) обладает рядом свойств, отличающих ее от уравнений (5.15). При  $\delta = \varpi \ll 1$  для закона пространственного распределения  $\varphi(n)$ , который, вообще говоря, при фиксированном  $\tau$  близок к закону

$$\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1} = k \sin \varphi_n + f_n, \quad (5.16)$$

где  $f_n$  зависит от пространственного распределения  $\varphi(n)$  в предыдущий момент времени, определяющим моментом поведения является большое значение параметра  $k = \delta^{-1}$ . При  $f_n = 0$  (5.16) есть отображение Чирикова – Тейлора [66], которое при больших  $k$  описывает стохастическое распределение  $\varphi_n$  по пространственной координате  $n$ . Можно ожидать, что при переходе к отличной от нуля пространственно-неоднородной функции  $f_n$  подавления стохастичности распределения  $\varphi_n$  не произойдет. Численный эксперимент подтвердил это. Полученное при  $\gamma = 0,8$ ;  $\lambda = 0,4$ ;  $\delta = \varpi = 2,72$ ;  $N = 128$  возникновение пространственного и, как

следствие, временного хаоса проиллюстрировано на рис. 5.9. Заданная при  $\tau = 0$  бризероподобная структура распалась на две структуры: солитон и антисолитон, которые через некоторое время встретились; при их взаимодействии возникла новая пара: солитон и антисолитон; при следующем взаимодействии пары солитонов и пары антисолитонов пространственная регулярность нарушается – по-видимому, возникает пространственная стохастичность\*. При этом временные реализации  $\psi_n(\tau)$  также стохастические.

Обратимся к взаимной синхронизации. Для значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_3$  (см. рис. 3.1) состояния равновесия отсутствуют. В зависимости от начальных условий  $(\psi_n, d\psi_n/d\tau)_n$ , как следует из результатов моделирования, возможно установление:

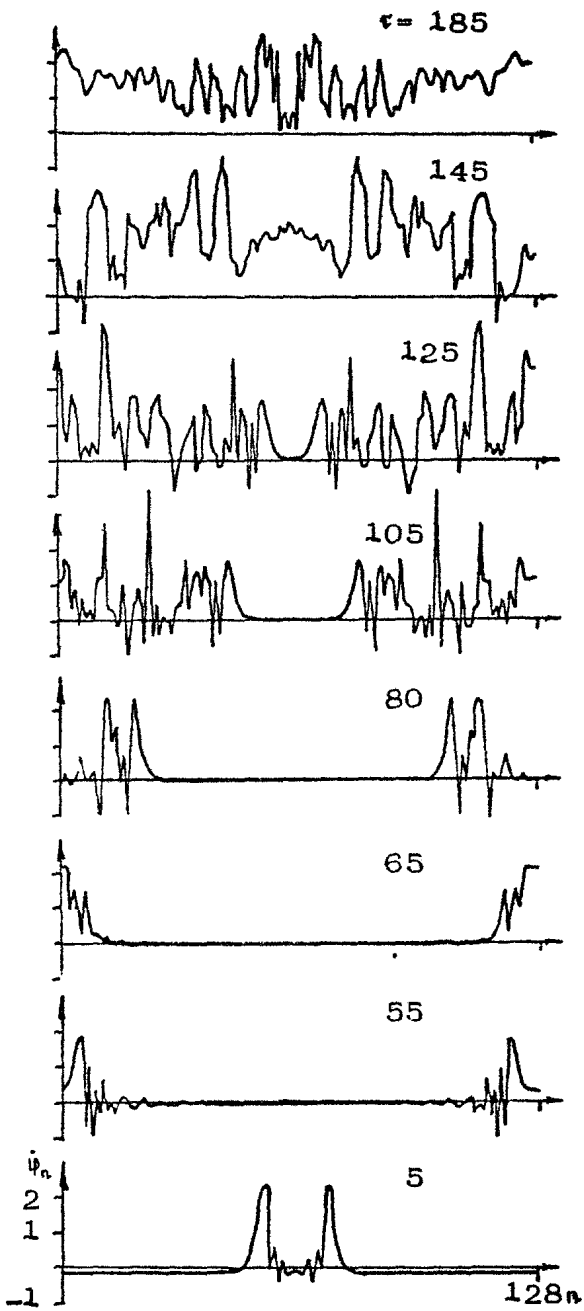
- а) пространственно однородного периодического движения вращательного типа, для которого изменение координат  $\psi_n(\tau)$ ,  $d\psi_n(\tau)/d\tau$  то же самое, что и для точечного несвязанного элемента,
- б) бегущих вдоль цепочки импульсов,
- в) когерентных осциллирующих структур.

Установление двух последних типов пространственно-временных движений имеет место в малой области параметров  $\gamma$  и  $W$ , близких к прямой  $\gamma = 1$ . В случае а) в цепочке реализуется режим взаимной синхронизации парциальных СФС (по фазе и частоте).

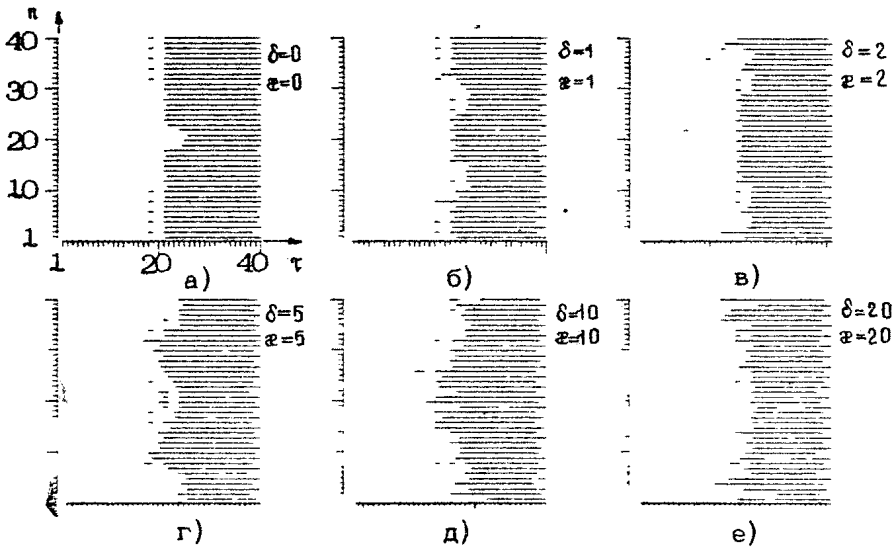
С целью определения времени установления стационарного режима синхронизации в цепочке СФС проводилось интегрирование системы (5.1) с отражающими граничными условиями при  $N = 40$ . За критерий наличия синхронизации в парциальной СФС  $n$  принималось условие зануления  $d\psi_n/d\tau$  с некоторой точностью  $\varepsilon = 0,01$ .

При  $\gamma = 0,3$ ;  $\lambda = 0,4$  для различных начальных условий были проведены серии численных экспериментов. В первой серии начальные условия распределены по закону  $(\psi_n)_n = 1 / \left( n - \frac{N}{2} \right)^2$ ,  $\left( \frac{d\psi_n}{d\tau} \right)_n = 0$ ;  $n = \overline{1, N}$ . Величина параметра  $\delta$  изменялась в пределах от 1 до 20. Оказалось, что увеличение коэффициентов связи практически не влияет на длительность переходного процесса (рис. 5.10). Такой же

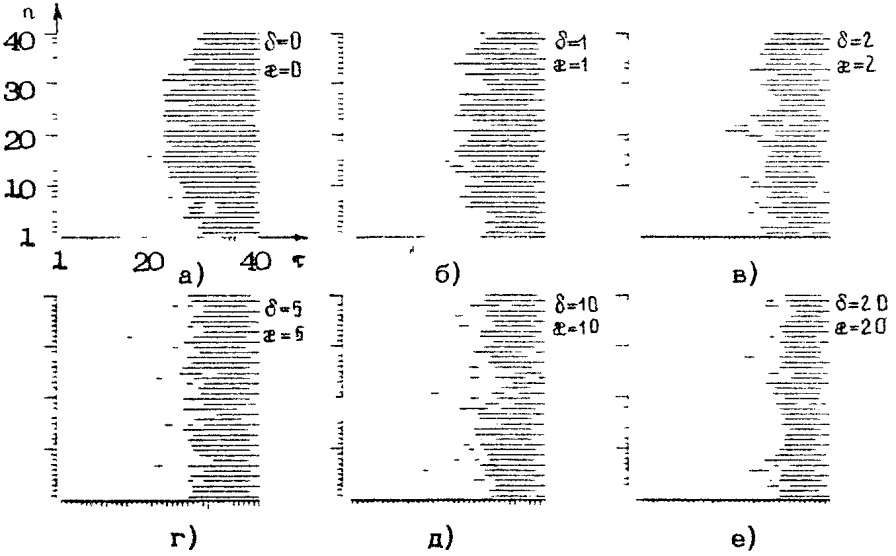
\* Следует учесть, что пространственная стохастичность в строгом смысле возможна лишь в безграничной или полуограниченной цепочке.



Р и с. 5.9



Р и с. 5.10



Р и с. 5.11

результат был получен во второй серии экспериментов при случайном распределении  $(\varphi_n)_n$  и  $(d\varphi_n/dt)_n = \gamma/\lambda$  для тех же  $\delta = \alpha$  (рис. 5.11).

---

В заключение можно отметить, что коллективную динамику цепочек систем синхронизации, имеющих взаимные связи через сигналы фазовых рассогласований, как это следует из результатов теоретического анализа и моделирования, отличается тенденция к согласованности поведения всех элементов и их взаимной синхронизации.

Для всех начальных условий при  $\gamma, W \in D_1$ , произвольных значениях коэффициентов связи  $\delta, \alpha$  во всех парциальных СФС  $n$  устанавливается стационарный пространственно однородный режим синхронизации с остаточными значениями разностей фаз  $\varphi_n^s = \Delta \tau \sin \gamma$ . Изменение величины параметров  $\delta \approx \alpha$  слабо влияет на длительность переходных процессов к режиму синхронизации.

Для значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_2$  при сильных связях ( $\delta \approx \alpha > 1$ ) возможно.

- а) пробегание вдоль цепочки волн синхронизации;
- б) существование динамического режима взаимной синхронизации групп парциальных СФС  $n$ . При слабых связях ( $\delta \approx \alpha < 1$ ) для  $\gamma, W$  из области  $D_2$  в цепочке реализуется стохастический режим. В области  $D_3$  ( $\gamma > 1$ ) для цепочки характерно установление динамического режима полной взаимной синхронизации парциальных СФС  $n$  и по частоте и по фазе.

Существование перечисленных режимов характерно для цепочки парциальных СФС как с периодическими, так и с отражающими граничными условиями.



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РЕШЕТОК

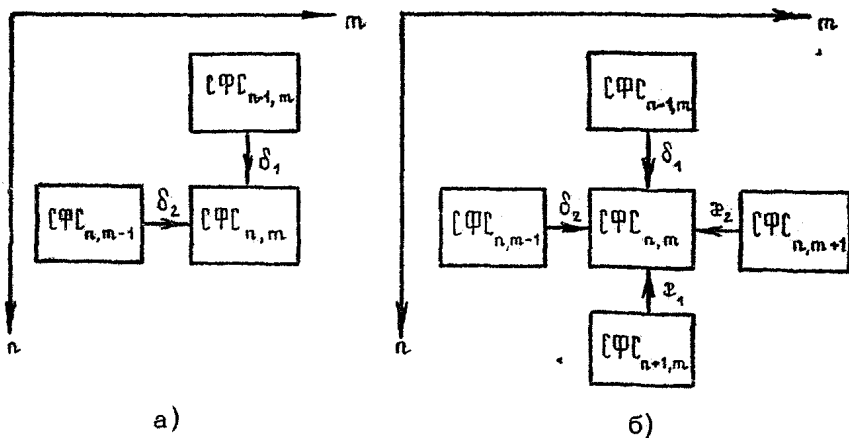
Настоящая глава посвящена изучению решеточной модели сети синхронизации. Сохраняются основные предположения и идеализации, которые были приняты при изучении цепочечных моделей, поэтому результаты для решеток являются естественным обобщением результатов, полученных в предыдущих главах. Авторы ни в коей мере не претендуют здесь на полную изложения. Скорее, приведенный материал – это первый взгляд на динамику решеток, содержащий предварительные, но весьма интересные результаты.

### 6.1. Процессы синхронизации в решетке с однонаправленными связями

Динамика решетки СФС с однонаправленными связями в предположении однородности решетки, наличия интегрирующих фильтров в цепях СФС<sub>n,m</sub> описывается системой уравнений (см. (1.6))

$$\frac{d^2\varphi_{n,m}}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_{n,m}}{d\tau} + \sin \varphi_{n,m} = \gamma - \delta_1 \sin \varphi_{n-1,m} - \delta_2 \sin \varphi_{n,m-1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad (6.1)$$

где  $\delta_1, \delta_2$  – коэффициенты связей по управляющим сигналам между точечными элементами в направлении сверху – вниз (с ростом  $n$ ) и слева – направо (с ростом  $m$ ). Структуру связей СФС<sub>n,m</sub> с соседними элементами иллюстрирует рис. 6.1,а. Граничное условие:  $\varphi_{0,m}(\tau) = \varphi_{n,0}(\tau) \equiv 0$ . Структура уравнения (6.1) аналогична структуре уравнений (2.3) и (3.1) с той лишь разницей, что каждая парциальная СФС<sub>n,m</sub> испытывает суммарное действие не только предыдущего элемента по координате  $n$ , но и по координате  $m$ , поэтому методика исследования динамики потоковой решетки полностью аналогична методике, использованной для цепочек. Исходя из результатов аналитического и численного исследования системы (6.1) приведем основные свойства решетки с однонаправленными связями.



Р и с. 6.1

Для параметров  $\gamma, W \in D_1$  (см. рис. 3.1) во всех элементах решетки  $N \times M$  устанавливается режим синхронизации при связях  $\delta_1 + \delta_2 < 1$ . Остаточная разность фаз  $\psi_{n,m}^s$  с ростом  $n$  и  $m$  испытывает затухающие осцилляции, стремясь при достаточно больших размерах решетки к значению  $\bar{\psi}^s = \arcsin [\gamma / (1 + \delta_1 + \delta_2)]$

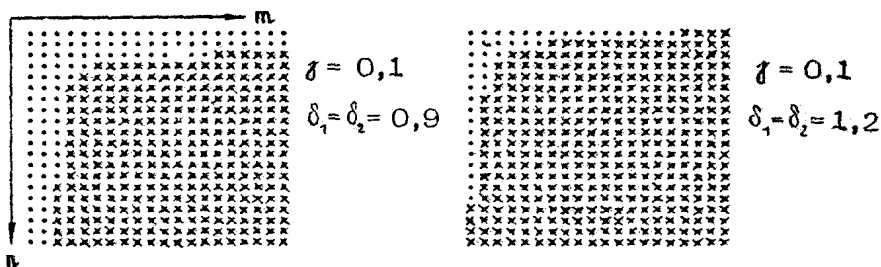
С ростом параметров  $\delta_1$  и  $\delta_2$  и при выполнении условия  $\delta_1 + \delta_2 > 1$  в части элементов решетки синхронизация нарушается. Можно вычислить пространственную полосу захвата для решетки по координатам  $n$  и  $m$ , если учесть, что при фиксированном  $W$  для любых начальных условий  $(\psi_{n,m}, d\psi_{n,m}/d\tau)_n$  режим синхронизации устанавливается для тех  $1, 2, \dots, m^{**}$  элементов в  $n^{**}$ -й строке и  $1, 2, \dots, n^{**}$  элементов в  $m^{**}$ -м столбце, для которых выполняется

$$\gamma_{n^{**}, m^{**}} \equiv \gamma - \delta_1 \sin \psi_{n^{**}-1, m^{**}} - \delta_2 \sin \psi_{n^{**}, m^{**}-1} \leq \gamma^*(N)$$

и одно из условий

$$\gamma_{n^{**}, m^{**}+1} > \gamma^*(N); \quad \gamma_{n^{**}+1, m^{**}} > \gamma^*(W)$$

При дальнейшем увеличении  $n$  и  $m$  найдется такой элемент  $n^* m^*$ , что  $\gamma_{n^*, m^*} < 1$ , а  $\gamma_{n^*, m^*+1} > 1$ , или  $\gamma_{n^*+1, m^*} > 1$ . Эти условия определяют пространственную полосу синхронизации для решетки.



Р и с. 6.2

На рис. 6.2 для примера приведено полученное моделированием системы (6.1) установившееся состояние в решетке  $20 \times 20$  элементов с однонаправленными связями (для идеализированных фильтров  $K(\rho) = 1$  в парциальных СФС  $_{n,m}$ ). Точками отмечены элементы, находящиеся в режиме синхронизации (внутри пространственной полосы синхронизации), крестиками – элементы, совершающие асинхронные колебания или вращения (вне пространственной полосы синхронизации).

В области параметров

$$\gamma^*(W) + \delta_1 + \delta_2 < \gamma < 1 - \delta_1 - \delta_2$$

в зависимости от начальных условий  $(\varphi_{n,m}, d\varphi_{n,m}/dt)_{n,m}$  реализуется одна из следующих ситуаций:

- во всех элементах устанавливается асинхронный колебательный режим;
- во всех элементах устанавливается асинхронный вращательный режим,
- в одних элементах устанавливается асинхронный колебательный режим, в других – асинхронный вращательный режим.

В области параметров

$$\gamma > 1 + \delta_1 + \delta_2$$

во всех элементах реализуется асинхронный вращательный режим.

При значениях параметров  $\gamma, W$ , принадлежащих областям  $D_2$  или  $D_3$  (см. рис. 3.1) и находящихся вблизи бифуркационной кривой  $\gamma = \gamma^*(W)$  при  $\delta_{1,2} < 1$ , возможно подавление вниз и вправо по решетке (с ростом  $n$  и  $m$ )

асинхронного вращательного режима, существующего в крайнем элементе ( $n = 1, m = 1$ ), и установление, начиная с некоторых номеров  $n$  и  $m$  статического режима синхронизации.

С ростом  $n$  и  $m$  при значениях параметров  $\gamma, W$  из областей  $D_2$  или  $D_3$  при сильных связях ( $\delta_{1,2} > 1$ ) возможно появление стохастических движений.

## 6.2. Изотропные решетки

Основные результаты изучения динамики цепочки взаимосвязанных СФС, описываемой системами (4.1), (4.11), можно перенести на решеточную структуру с тем же типом связей (через управляющие сигналы), моделируемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{n,m}}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_{n,m}}{d\tau} + \sin \varphi_{n,m} &= \gamma - \delta_1 \sin \varphi_{n-1,m} - \delta_2 \sin \varphi_{n,m-1} - \\ &- \alpha_1 \sin \varphi_{n+1,m} - \alpha_2 \sin \varphi_{n,m+1}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M}$$

Структуру связей СФС  $\varphi_{n,m}$  с соседними элементами иллюстрирует рис. 6.1, б. Система (6.2) изучалась при выполнении граничных условий  $\varphi_{0,m}(\tau) = \varphi_{N+1,m}(\tau) = \varphi_{n,0}(\tau) = \varphi_{n,M+1}(\tau) \equiv 0$

Для нелинейной динамики решеток (в основном рассматривались изотропные решетки) будут характерны следующие свойства.

При произвольном числе элементов в решетке, произвольных  $\gamma, W \in D_1$  и значениях параметров связи из области

$$\delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

в решетке, описываемой системой (6.2), устанавливается режим полной синхронизации. В этом случае при малых значениях параметров связей для СФС  $\varphi_{n,m}$  вблизи центра решетки установившиеся значения фазовых переменных  $\varphi_{n,m}^s$  близки к значению

$$\bar{\varphi}^s = \arcsin \left[ \gamma / (1 + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \right].$$

В области параметров

$$\gamma^*(W) + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 < \gamma < 1 - \delta_1 - \delta_2 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

в зависимости от начальных условий  $(\varphi_{n,m}, d\varphi_{n,m}/dt)_{n=1, \overline{N}, m=1, \overline{M}}$  в элементах решетки следует ожидать реализации:

- режима полной синхронизации и асинхронного колебательного режима во всех СФС  $n, m$ ;
- асинхронного вращательного режима во всех СФС  $n, m$ ;
- в части СФС  $n, m$  - асинхронного колебательного режима, в другой части - асинхронного вращательного режима.

В области параметров

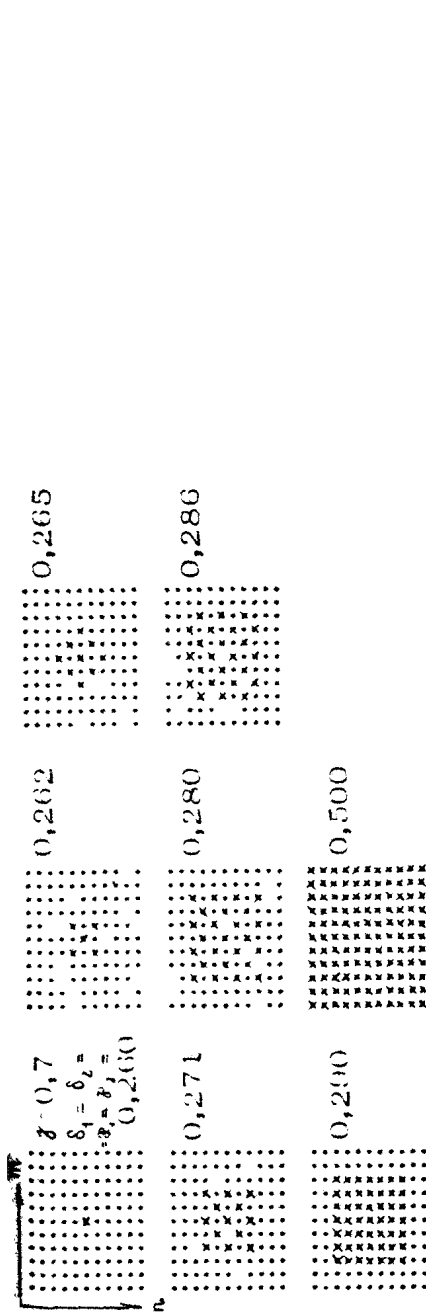
$$\gamma > 1 + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2$$

во всех элементах будет устанавливаться асинхронный вращательный режим.

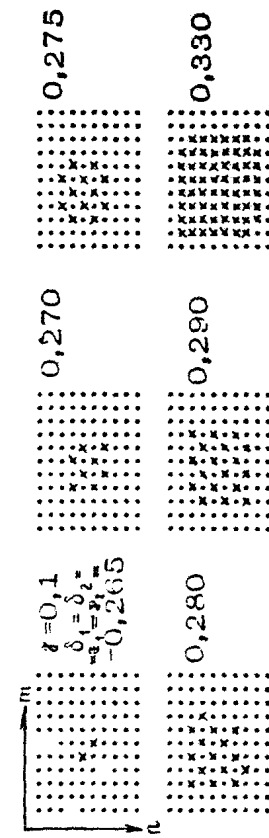
Исчезновение режима полной синхронизации элементов в решетке соответствует выход значений параметров из области глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия в системе (6.2). Это происходит либо через бифуркацию слияния и исчезновения состояний равновесия, сопровождающуюся рождением периодического движения в какой-либо парциальной системе, либо через бифуркацию разрушения петли сепаратрисы седлового состояния равновесия, также сопровождающуюся рождением периодического движения. Для изотропной решетки при  $\delta_1 = \delta_2 = \alpha_1 = \alpha_2$ , в зависимости от четности числа элементов по каждому измерению решетки, вращательный асинхронный режим может возникнуть.

- если  $N$  и  $M$  - четные - в четырех элементах, симметрично расположенных относительно средних линий решетки
- если  $N$  и  $M$  нечетные - в центральном элементе;
- если  $N$  ( $M$ ) - нечетное, а  $M$  ( $N$ ) - четное - в двух элементах, расположенных на линии  $n(m) = [N(M)+1]/2$  симметрично относительно середины решетки.

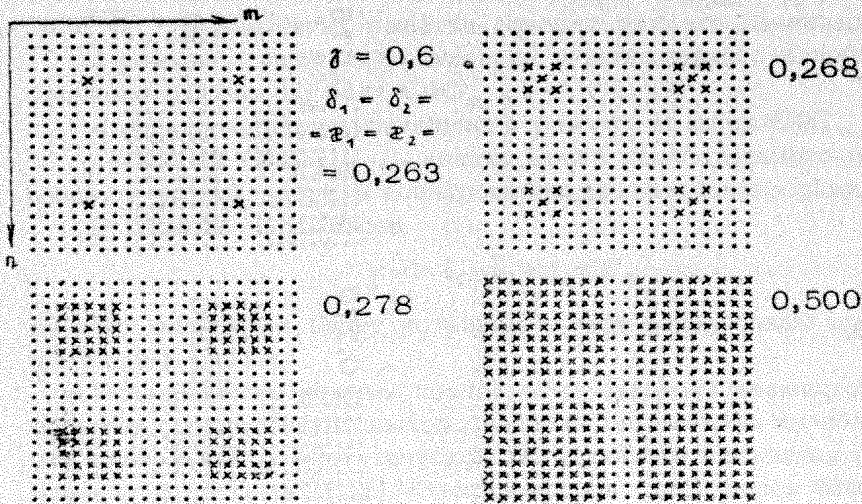
После выхода из области полной синхронизации при незначительном увеличении параметров связей  $\delta_1 \approx \delta_2 \approx \alpha_1 \approx \alpha_2$  происходит существенное изменение общей картины установившихся в каждом элементе режимов, т. е. система ведет себя как пространственно негрубая. На рис. 6.3 - 6.5 для решетки СФС (при  $K(\rho) = 1$ ) приведены последовательности смены стационарных пространственных структур при четном и нечетном числе элементов по каждому измерению решетки. Звездочками помечены элементы, в которых реализуются асинхронные вращательные режимы, точками - асинхронные колебательные. Рис. 6.3 демонстрирует случай нечетных  $N$  и  $M$  (11 x 11), рис. 6.4 - случай четного  $N$  и нечетного  $M$  (10 x 11) и рис. 6.5 - случай четных  $N$  и  $M$  (20 x 20).



Р и с. 6.3



Р и с. 6.4



Р и с. 6.5

За счет введения взаимных связей в цепочке существует возможность установления режима полной синхронизации элементов при таких значениях параметров  $\gamma, W \in D_1$ , при которых в индивидуальном элементе синхронизация наступает не при всех начальных условиях  $(\varphi_{n,m}, d\varphi_{n,m}/d\tau)_n$ .

При больших значениях параметров связей  $(\delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 > 1)$  в системе (6.1) существуют стохастические режимы.

### 6.3. Когерентные периодические структуры

Рассмотрим математическую модель решеточной структуры парциальных СФС  $n, m$ , взаимосвязанных через сигналы фазовых рассогласований

$$\frac{d^2 \varphi_{n,m}}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_{n,m}}{d\tau} + \sin \varphi_{n,m} = \gamma - \delta_1 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n-1,m}) - \alpha_1 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n+1,m}) - \delta_2 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n,m-1}) - \alpha_2 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n,m+1}), \quad (6.3)$$

где  $\gamma, \lambda$  — параметры парциальной СФС  $n, m$  ( $W = \lambda^{-2}$ ),  $\delta_{1,2}, \alpha_{1,2}$  — параметры связей;  $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$

Рассмотрим систему (6.3) при граничных условиях двух типов:

б) периодических

$$\varphi_{0,m}(\tau) = \varphi_{N,m}(\tau), \quad \varphi_{N+1,m}(\tau) = \varphi_{1,m}(\tau),$$

$$\varphi_{n,0}(\tau) = \varphi_{n,M}(\tau), \quad \varphi_{n,M+1}(\tau) = \varphi_{n,1}(\tau);$$

в) отражающих

$$\varphi_{0,m}(\tau) = \varphi_{1,m}(\tau), \quad \varphi_{n+1,m}(\tau) = \varphi_{N,m}(\tau),$$

$$\varphi_{n,0}(\tau) = \varphi_{n,1}(\tau), \quad \varphi_{n,M+1}(\tau) = \varphi_{n,M}(\tau)$$

Приведем результаты для решетки, описываемой системой (6.3), полученные аналитически и численно аналогично тому, как сделано в главе 5.

Для значений параметров из области

$$-\gamma^*(W) + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 < \gamma < \gamma^*(W) - \delta_1 - \delta_2 - \alpha_1 - \alpha_2$$

во всех парциальных СФС  $n, m$  устанавливается либо стационарный режим синхронизации, либо асинхронный колебательный режим. Для значений параметров из области

$$\gamma^*(W) + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2 < \gamma < 1 - \delta_1 - \delta_2 - \alpha_1 - \alpha_2$$

зависимости от начальных условий  $(\varphi_{n,m}, d\varphi_{n,m}/dt)_n, n=1, \overline{N}; m=1, \overline{M}$  возможно установление: а) во всех СФС  $n, m$  асинхронного колебательного режима; б) в одной части СФС  $n, m$  асинхронного колебательного режима, в другой — асинхронного вращательного режима; в) во всех СФС  $n, m$  асинхронного вращательного режима. Для значений параметров из области

$$\gamma > 1 + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 + \alpha_2$$

во всех СФС  $n, m$  устанавливается асинхронный вращательный режим.

При пространственно однородных начальных условиях  $(\varphi_{n,m}, d\varphi_{n,m}/dt)_n$ , произвольных значениях параметров  $\delta_{1,2}, \alpha_{1,2}$  для значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_1$  реализуется пространственно однородный стационарный режим синхронизации с остаточными разностями фаз  $\varphi_{n,m}^s = \arctg \sin \gamma$ ; для значений параметров из области  $D_2$  в зависимости от значений  $(\varphi_{n,m}, d\varphi_{n,m}/dt)_n$  реализуется либо тот же, что и в предыдущем случае, стационарный режим синхронизации, либо пространственно однородный асинхронный вращательный режим; для значений параметров из области  $D_3$  реализуется пространственно однородный асинхронный вращательный режим.

Для системы (6.3) при больших одинаковых значениях параметров связей  $\delta_1 = \delta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = \delta$  существуют решения, удовлетворяющие условиям



$$|\varphi_{n,m}(\tau) - \varphi_{n,m+1}(\tau)| < \varepsilon, \quad |\varphi_{n,m}(\tau) - \varphi_{n+1,m}(\tau)| < \varepsilon;$$

$$n = \overline{0, N}, \quad m = \overline{0, M} \quad (6.4)$$

и близкие к решениям дискретного аналога

$$\frac{d^2 \varphi_{n,m}}{d\tau^2} + \lambda \frac{d\varphi_{n,m}}{d\tau} + \sin \varphi_{n,m} = \gamma - \delta(\varphi_{n,m-1} + \varphi_{n,m+1} + \varphi_{n-1,m} + \varphi_{n+1,m} - 4\varphi_{n,m}); \quad n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M} \quad (6.5)$$

двумерного диссипативного возмущенного уравнения  $\sin$  - Гордона [56]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \sin \varphi = \gamma - \delta \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

Возможность компьютерного моделирования системы (6.5) вместо системы (6.3) позволяет значительно сократить время на вычислительные эксперименты.

При произвольных значениях параметров  $\delta_{1,2}, \varepsilon_{1,2}, N, M$  при  $\gamma < 1$  и любых  $W$  для обоих типов граничных условий в решетке парциальных СФС существует и устойчив в малом, а при  $\gamma, W$  из области  $D_1$ , по-видимому, глобально устойчив, пространственно однородный стационарный режим синхронизации с остаточными разностями фаз  $\varphi_{n,m}^s = \arcsin \gamma$ ,  $n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}$

Так же, как и для цепочки, для решетки парциальных СФС  $\varphi_{n,m}$  при выборе параметров  $\gamma, W$  из области  $D_2$  получено большое число разнообразных устанавливающихся режимов. Кроме пространственно однородного стационарного режима синхронизации и асинхронного вращательного режима, в решетке имеют место режим взаимной синхронизации групп парциальных СФС  $\varphi_{n,m}$ , стационарные волны синхронизации и стохастический режим. Приведем результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих вышесказанное. В экспериментах 2, 3 моделировалась система (6.5), в экспериментах 1, 4 - система (6.3). Во всех случаях размеры решетки  $N = M = 80$ , начальные условия:

$$(\varphi_{n,m})_n = 4 \arctg \left\{ \exp \left[ \left( n - \frac{N}{2} \right) h + \left( m - \frac{M}{2} \right) h \right] \right\}, \quad \left( \frac{d\varphi_{n,m}}{d\tau} \right)_n = 0, \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M} \quad (6.6)$$

На рис. 6.6 представлены полученные в вычислительных экспериментах 1 - 4 картины поля  $\sin(\varphi_{n,m}/2)$ , зафиксированные в различные моменты времени. На фотографиях

полученных с экрана видеотерминала, более темные участки картины соответствуют большим значениям  $\sin(\varphi_{n,m}/2)$ .

Э к с п е р и м е н т 1.  $\gamma = 0,7$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 44,44$ . Периодические граничные условия. Заданная при  $\tau = 0$  структура (6.6) (рис. 6.6,а) вначале изменяет свою форму, с течением времени она двигается поперек одной из главных диагоналей решетки (рис. 6.6,б), оставаясь единственной пространственной структурой. Ее скорость движения и форма не меняются. Устанавливающуюся пространственно-временную реализацию можно интерпретировать как двумерный солитон.

Э к с п е р и м е н т 2.  $\gamma = 0,8$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 44,44$ . Отражающие граничные условия. Заданная при  $\tau = 0$  структура (6.6) (рис. 6.6,а) через некоторое время разрушается, картина поля принимает случайный вид. Затем образуются четыре когерентные структуры (из-за отражающих граничных условий – разорванные по краям решетки) (рис. 6.6,в).

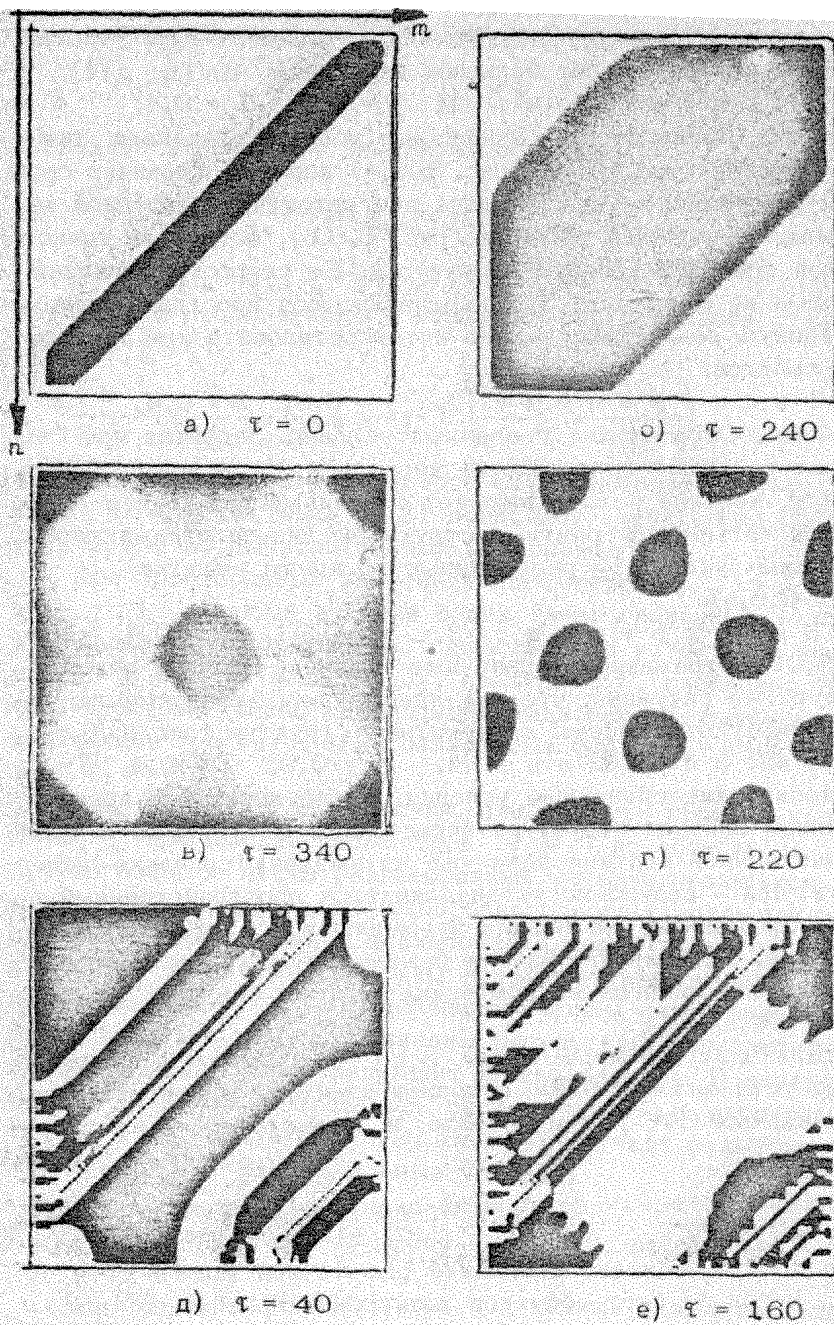
Э к с п е р и м е н т 3.  $\gamma = 0,91$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 25,00$ . Отражающие граничные условия. Вначале реализуется та же ситуация, что и в предыдущем эксперименте. Затем образуются восемь когерентных структур (рис. 6.6,г).

Э к с п е р и м е н т 4.  $\gamma = 0,9$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\delta = 1$ . Периодические граничные условия. Через некоторое время заданная вначале структура перестает существовать. В пространственной картине поля уже не выделяются какие-либо структуры – визуально устанавливается пространственный хаос. Временные реализации переменных  $\varphi_{n,m}(\tau)$  также хаотические. Устанавливающийся режим выглядит как последовательность никогда не повторяющихся картин поля (рис. 6.6,д,е).

Для значений параметров  $\gamma, W$  из области  $D_3$  характерно установление режима полной взаимной синхронизации парциальных СФС  $n, m$  и по фазе, и по частоте.

#### 6.4. Влияние внешнего поля на динамику решетки

В разд. 6.3 описано поведение решеточной модели сети СФС, когда за счет эффектов конкуренции различных пространственно-временных колебаний образуются пространственные структуры, периодически осциллирующие во времени. При этом парциальные СФС  $n, m$ , принадлежащие таким структурам, взаимно синхронизованы и по частоте, и по фазе.



Р и с. 6.6

Обсудим теперь некоторые проблемы, связанные с искусственным формированием когерентных структур с помощью неоднородных внешних полей.

Поведение решетки парциальных СФС  $\varphi_{n,m}$ , находящихся во внешнем неоднородном периодическом поле, описывается системой

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{n,m} + \lambda \dot{\varphi}_{n,m} + \sin \varphi_{n,m} = \gamma - \delta_1 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n-1,m}) - \delta_2 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n,m-1}) - \\ - \alpha_1 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n,m+1}) - \alpha_2 \sin(\varphi_{n,m} - \varphi_{n+1,m}) + \\ + A \sin(\pi n) \sin(\pi m) \sin \omega \tau, \quad n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

с периодическими и отражающими граничными условиями.

В системе (6.7)  $\varphi_{n,m}$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_{1,2}$ ,  $\alpha_{1,2}$  имеют тот же смысл, что и в разд. 6.3;  $A$ ,  $\omega$ ,  $\pi$  — соответственно амплитуда, частота, параметр пространственной неоднородности внешнего воздействия. При сильных межэлементных связях  $\delta_1 = \delta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 \gg 1$ , когда справедливы условия (6.4), вместо уравнений (6.7) можно приближенно моделировать уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{n,m} + \lambda \dot{\varphi}_{n,m} + \sin \varphi_{n,m} = \gamma - \delta_1 (\varphi_{n-1,m} + \varphi_{n+1,m} + \varphi_{n,m-1} + \varphi_{n,m+1} - 4\varphi_{n,m}) + \\ + A \sin(\pi n) \sin(\pi m) \sin \omega \tau; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M},$$

являющиеся дискретным аналогом двумерного диссипативного уравнения  $\sin$ -Гордона с пространственно неоднородным гармоническим членом

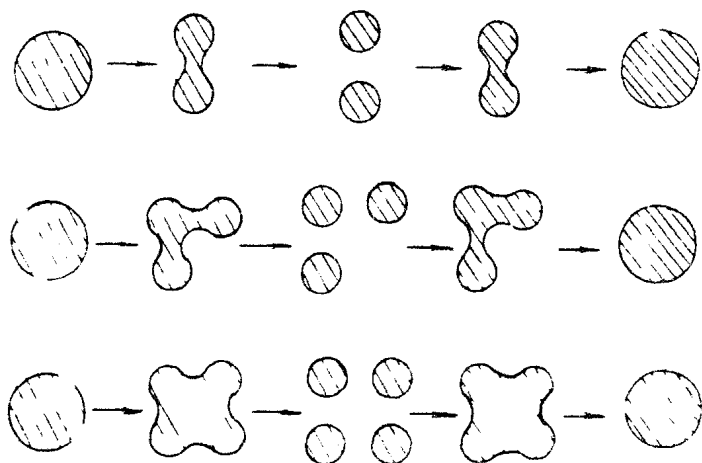
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \sin \varphi = \gamma + \delta \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] + A \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin \omega \tau$$

Использование этого приближения существенно уменьшает время вычислений.

Управление пространственным структурированием проводится с помощью изменения амплитуды  $A$  внешнего воздействия. В зависимости от величины  $A$  возможно несколько различных ситуаций реализации пространственных распределений поля  $\varphi_{n,m}(\tau)$ . Приведем результаты численного эксперимента.

При малых значениях  $A$  ( $A < 1$ ) возникающие пространственные структуры повторяют структуру внешнего поля. Для элементов, центральных в структурах, и элементов, симметричных относительно их, изменение переменных  $\varphi_{n,m}(\tau)$  и  $\dot{\varphi}_{n,m}(\tau)$  происходит синхронно. Для значений  $A$  из интервала  $[1, 10]$  обнаруживается хорошо известный переход "соизмеримость -

несоизмеримость" [24], когда период возникшей структуры не кратен пространственному периоду приложенного поля. Несмотря на то что пространственная картина поля  $\psi_{n,m}(\tau)$  не повторяет структуру внешнего поля, поведение во времени отдельных элементов остается полностью взаимно синхронизованным. Обнаруживаемые при этом перестройки пространственной картины поля, как правило, представляют собой удвоения, утроения или учетверения элементарных структур, что демонстрирует рис. 6.7. Добавим, что в области парам



Р и с. 6.7

тров, где реализуется режим взаимной синхронизации во времени, возможна не только регулярная, но и случайная пространственная картина поля. При этом наблюдаются переходы "несоизмеримость - пространственный хаос" и "соизмеримость - пространственный хаос". Соответствующие режимы удалось, в частности, наблюдать при компьютерном моделировании неавтономного уравнения  $\sin$ -Гордона с периодически неоднородными параметрами

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \sin(\tau \pi) \sin(\tau \psi) \sin \psi = \gamma + \delta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + A \sin \omega \tau$$

Обсуждаемые "несимметричные" режимы, однако, являются весьма экзотическими. Гораздо более типичными оказывались ситуации, для которых пространственный хаос наблюдае

ся в той же области параметров, что и временной хаос, а временная регулярность влечет за собой пространственную. На рис. 6.8 дана последовательность структур, характеризующая регулярную пространственно-временную динамику на одном временном периоде.

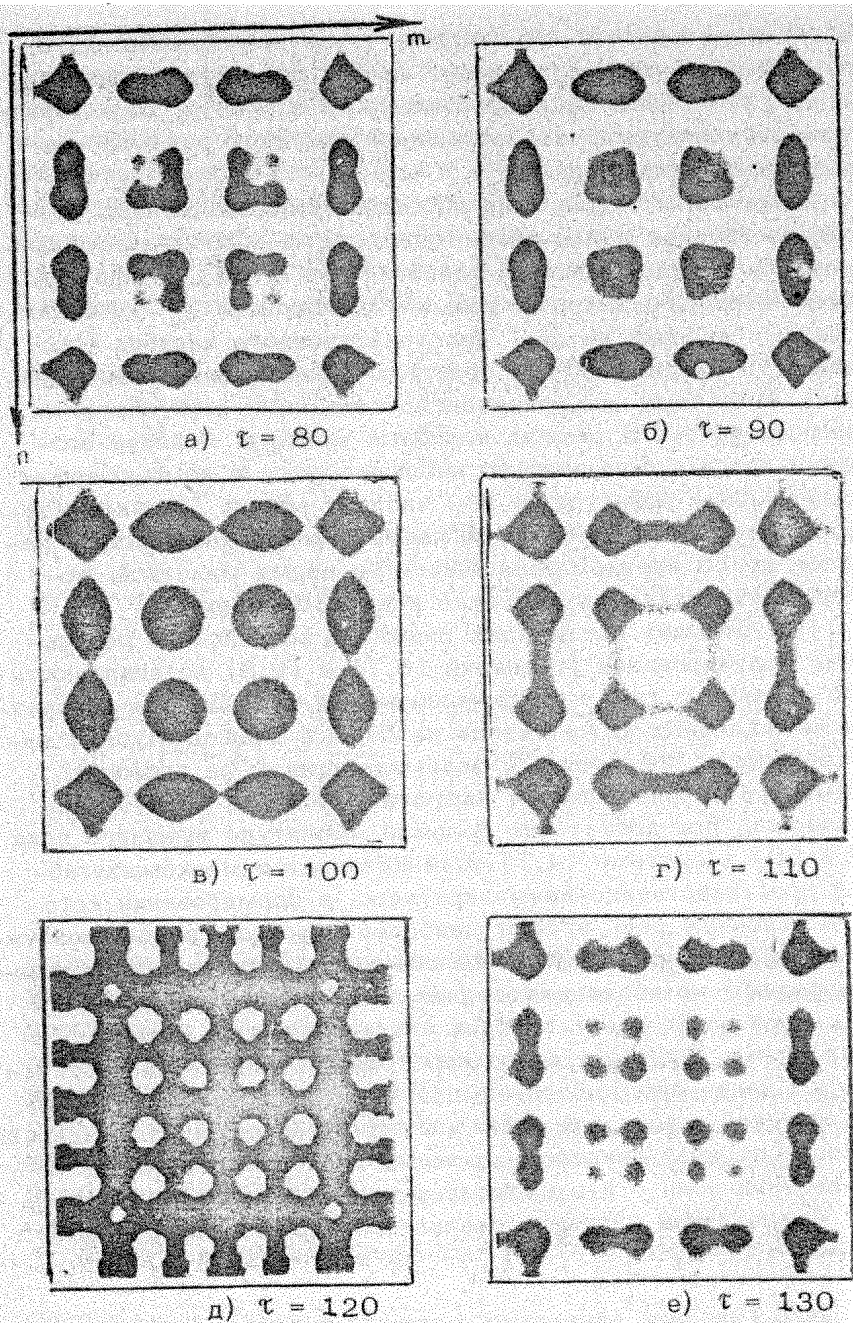
Заметим, что динамику простых пространственных распределений (как и для автономных систем) естественно описывать в рамках модовых моделей\* [67, 68]. Например, режим периодического во времени с периодом  $T_0$  удвоения и затем "деления на два" пространственного периода (см. рис. 6.7) предполагает в простейшей постановке взаимодействие лишь двух мод, резонансно связанных друг с другом внешним полем. В рамках подобных модовых моделей возможно описать большинство наблюдавшихся в компьютерном эксперименте эффектов, в том числе и эффект "структурной перемежаемости" — основную часть периода наблюдается решетка из 16 ячеек, сменяющихся на время решеткой, повторяющей структуру внешнего поля (36 ячеек).

При больших амплитудах внешнего воздействия результаты моделирования уравнений (6.7) и (6.8) не совпадают. Это связано с тем, что принципиальной оказывается дискретность численных сеток, когда на первый план выступают неустойчивости, связанные с взаимодействием ее соседних элементов и приводящие к нарушению условий (6.4). Как оказалось, при достаточно большой амплитуде внешнего поля ( $A \geq 50$ ) в системе (4.7) устанавливается мелкомасштабный пространственно-временной хаос, в формировании которого основную роль играют наиболее коротковолновые возбуждения, в частности, "π-π-колебания", соответствующие противофазным колебаниям соседних элементов. Размерность хаоса при этом имеет порядок числа элементов решетки (аналогично [69]), а в его пространственной картине отсутствуют какие-либо выделенные элементы. Установившийся хаотический режим при этом выглядит как последовательность никогда не повторяющихся сложных пространственных распределений поля — это иллюстрирует рис. 6.9.

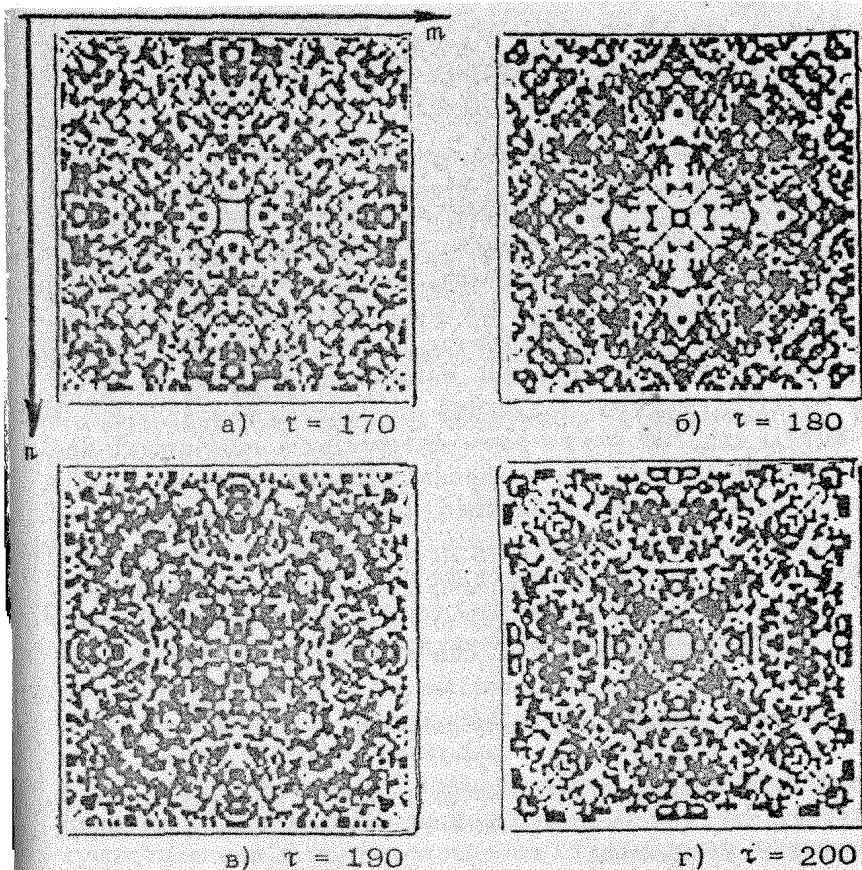
Аналогичная ситуация реализуется при слабых связях

$$(\delta_1 = \delta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1)$$

Такое описание оправдано, когда амплитуда невелика и фл.  $\varphi_{n,m}$  можно разложить в ряд, учитывая лишь основную нелинейность  $\varphi_{n,m}^2$



Р и с. 6.8



Р и с. 6.9

Качественно решетки сохраняют основные черты динамического поведения цепочек, в отношении условий синхронизации, характера пространственных распределений остаточных разностей фаз в режиме синхронизации, появления структур при нарушении режима глобальной синхронизации. По-видимому, этого следовало ожидать, поскольку в рассматриваемой решеточной модели влияние соседних элементов по координатам  $n$  и  $m$  аддитивное.

Отметим, кроме того, что за счет введения внешнего воздействия на решетку установлена возможность целенаправленного управления распределением пространственных структур из синхронно осциллирующих во времени парциальных СФС  $n, m$ .



## АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ СИНХРОНИЗАЦИИ

В данной главе рассматриваются отображения, к которым сводится задача о нахождении стационарных режимов синхронизации в цепочках и решетках, объединяющих системы синхронизации разного типа – непрерывные системы фазовой синхронизации (их рассмотрение проводилось в гл. 2 – 6), импульсные системы фазовой синхронизации (см. далее гл. 9, 10), системы частотной автоподстройки (гл. 8). Результаты анализа могут быть интересны и для других приложений, например, при изучении моделей активных сред (гл. 11). С учетом сказанного, рассмотрение ведется в достаточно общем случае – для произвольного вида нелинейности  $F(u)$ , учета неоднородности цепочки, связанной с распределением начальной расстройки  $\gamma_n$  вдоль цепочки, и произвольных знаков и величин коэффициентов связи.

### 7.1. Стационарные режимы в цепочке

Задача нахождения стационарных режимов синхронизации в цепочках систем синхронизации сводится в конечном счете к решению уравнения

$$F(u_n) + \delta F(u_{n-1}) + \alpha F(u_{n+1}) = \gamma_n, \quad n = \overline{1, N} \quad (7.1)$$

с некоторыми граничными условиями. Здесь  $u_n$  – координата, определяющая состояние  $n$ -го элемента цепочки,  $\gamma_n$  – начальная расстройка,  $F(u_n)$  – статическая, нормированная ( $|F(u_n)| \leq 1$ ) характеристика дискриминатора в  $n$ -й парциальной системе синхронизации, а  $\delta, \alpha$  – коэффициенты связи между парциальными системами. Будем рассматривать уравнение (7.1) при  $\gamma_n = \gamma + \gamma_0 n$ , где  $\gamma_0, \gamma = \text{const}$ ,  $\gamma \geq 0$  и граничных условиях следующего вида \*

$$F(u_0) = 0, \quad F(u_{N+1}) = 0 \quad (7.2)$$

Положив в (7.1), (7.2)  $\tau_n \equiv F(u_n)$ , получим

\* В случае других видов распределения  $\gamma_n$  стационарные состояния находятся аналогично.

$$\tau_n + \delta \tau_{n-1} + \alpha \tau_{n+1} = \gamma + \gamma_0 n, \quad n = \overline{1, N}; \quad (7.3)$$

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_{N+1} = 0 \quad (7.4)$$

Уравнение (7.3) – линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами второго ( $\delta \alpha \neq 0$ ) или первого порядка ( $\delta \alpha = 0$ ), а (7.3), (7.4) – его краевая задача. Находя обычным образом (см., например, [70, 71]) общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения (7.1), нетрудно выписать общее решение последнего и решить искомую краевую задачу (7.3), (7.4) (см. табл. 7.1).

В табл. 7.1 приняты следующие обозначения:

$$\mu_1 = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{\sqrt{1-4\delta\alpha}}{2\alpha}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\sqrt{1-4\delta\alpha}}{2\alpha}.$$

После того как краевая задача (7.3), (7.4) решена, нахождение стационарных режимов синхронизации в цепочке сводится к решению уравнения  $F(u_n) = \tau_n^0$ . Решение этого уравнения, в случае типичных для теории синхронизации видов функции  $F(u_n)$ , не вызывает затруднений. Число стационарных режимов синхронизации зависит от конкретного вида  $F(u_n)$ . Однако, поскольку  $F(u_n) \leq 1$ , то для цепочки (7.1), (7.2) с любым видом функции  $F(u_n)$  характерно наличие в пространстве параметров  $(\alpha, \delta, \gamma, \gamma_0)$  областей существования и несуществования стационарных режимов синхронизации. Поэтому, не конкретизируя вид функции  $F(u_n)$ , выделим лишь условия существования по крайней мере одного стационарного режима синхронизации. Очевидно, что искомые условия имеют вид

$$\tau_{\max}^0 < 1, \quad \text{где} \quad \tau_{\max}^0 = \max_{1 \leq n \leq N} |\tau_n^0|. \quad (7.5)$$

Из табл. 7.1 следует, что при  $\gamma = \gamma_0 = 0$  и любых  $\delta, \alpha$  краевая задача (7.3), (7.4) имеет решение  $\tau_n^0 = 0$ , которое удовлетворяет (7.5). Поэтому при  $\gamma = \gamma_0 = 0$  в цепочке (7.1), (7.2) существует хотя бы один стационарный пространственно однородный режим синхронизации с координатой  $u^0$  являющейся корнем уравнения  $F(u_n) = 0$ . Кроме того, в случае  $\gamma = \gamma_0 = 0$  и  $1 - 4\delta\alpha < 0$ ,  $1 + \delta + \alpha \neq 0$ ,  $\delta\alpha \neq 0$  при  $\sin(N+1)\omega = 0$  краевая задача (7.3), (7.4) имеет также однопараметрическое семейство решений:

Условия на коэффициенты связей	Общее решение уравнения (7.3)	Решение краевой задачи (7.3), (7.4)
$1-4\delta x > 0$ $1+\delta+x \neq 0$ $\delta x \neq 0$	$x_n = C_1 \frac{\rho_2 \rho_1^n - \rho_1 \rho_2^n}{\rho_2 \rho_1} +$ $+ C_2 \frac{\rho_2^n - \rho_1^n}{\rho_2 - \rho_1} +$ $+ \frac{\gamma_0 (\delta - x + n)}{1+x+\delta}$	$x_n^0 = \frac{\gamma_0 (\delta - x)}{1+x+\delta} \left[ 1 - \frac{\rho_2 \rho_1^n - \rho_1 \rho_2^n}{\rho_2 - \rho_1} - \right.$ $- \frac{\rho_2 - \rho_1 - (\rho_2 \rho_1^{N+1} - \rho_1 \rho_2^{N+1})}{\rho_2^{N+1} - \rho_1^{N+1}} \frac{\rho_2^n - \rho_1^n}{\rho_2 - \rho_1} \left. + \right.$ $+ \frac{\gamma_0}{1+x+\delta} \left[ n - (1+N) \frac{\rho_2^n - \rho_1^n}{\rho_2^{N+1} - \rho_1^{N+1}} \right]$
$1-4\delta x < 0$ $1+\delta+x \neq 0$ $\delta x \neq 0$	$x_n = -C_1  \rho_1 ^n \frac{\sin(n-1)\omega}{\sin\omega} +$ $+ C_2  \rho_1 ^{n-1} \frac{\sin n\omega}{\sin\omega} +$ $+ \frac{\gamma_0 (\delta - x + n)}{1+x+\delta}$	$x_n^0 = \frac{\gamma_0 (\delta - x)}{1+\delta+x} \left[ 1 +  \rho_1 ^n \frac{\sin(n-1)\omega}{\sin\omega} - \right.$ $- \frac{\sin\omega +  \rho_1 ^{N+1} \sin N\omega}{ \rho_1 ^N \sin(N+1)\omega} \cdot \frac{ \rho_1 ^{n-1} \sin n\omega}{\sin\omega} \left. + \right.$ $+ \frac{\gamma_0}{1+\delta+x} \left[ n - \frac{(N+1) \rho_1 ^{n-1} \sin n\omega}{ \rho_1 ^N \sin(N+1)\omega} \right]$ $\sin(N+1)\omega \neq 0, \quad x_n^0 = \varepsilon  \rho_1 ^{n-1} \frac{\sin n\omega}{\sin\omega},$ $\sin(N+1)\omega = 0$

Условия на коэффициенты связей	Общее решение уравнения (7.3)	Решение краевой задачи (7.3), (7.4)
$\alpha = -1/2$ $\delta = -1/2$	$x_n = [c_1 + c_2 n - \gamma_0 n^2 - \frac{\gamma_0 n^3}{3}]$	$x_n^0 = (N+1) \left[ \gamma + \frac{\gamma_0(N+1)}{3} \right] n - \gamma n^2 - (\gamma_0/3) n^3$
$\alpha \neq -1/2$ $1 + \delta + \alpha = 0$ $\delta \neq 0$	$x_n = c_1 + c_2 \mu^n + \left[ \gamma n / (1+2\alpha) \right] + \frac{\gamma_0 n [1 + (1+2\alpha)n]}{2(1+2\alpha)^2}$	$x_n^0 = \frac{(N+1)(\mu^{N+1})}{(1-\mu^{N+1})} \left\{ \frac{\gamma}{1+2\alpha} + \frac{\gamma_0 [1+(1+2\alpha)(N+1)]}{2(1+2\alpha)^2} \right\} + \frac{\gamma n}{1+2\alpha} + \frac{\gamma_0 [1+(1+2\alpha)n] n}{2(1+2\alpha)^2}$
$\alpha \neq -1/2$ $1 - 4\delta \alpha = 0$	$x_n = (c_1 + c_2 n) \mu^n + \frac{4\alpha (\gamma + \gamma_0 n)}{(1+2\alpha)^2} - \frac{4\gamma_0 \alpha (2\alpha - 1)}{(1+2\alpha)^3}$	$x_n^0 = \frac{4\alpha [\gamma (2\alpha + 1) - \gamma_0 (2\alpha - 1)]}{(2\alpha + 1)^3} \left\{ 1 + \left[ \frac{\mu^{N+1} - 1}{\mu^{N+1} (N+1)} n - 1 \right] \mu^n \right\} + \frac{4\alpha \gamma_0 n}{(2\alpha + 1)^2} \left( 1 - \frac{\mu^n}{\mu^{N+1}} \right)$
$\delta = 0$ $\alpha \neq -1$	$x_n = c_1 \left( -\frac{1}{\alpha} \right)^n + \frac{\gamma_0 n}{1+\alpha} + \frac{\gamma (1+\alpha) - \gamma_0 \alpha}{(1+\alpha)^2}$	$x_n^0 = \frac{\gamma (1+\alpha) - \gamma_0 \alpha}{(1+\alpha)^2} \left[ 1 - \frac{(-\alpha)^{N+1}}{(-\alpha)^n} \right] - \frac{(-\alpha)^{N+1}}{(-\alpha)^n} \frac{\gamma_0 (N+1)}{1+\alpha} + \frac{\gamma_0 n}{1+\alpha}$

Условия на коэффициенты связей	Общее решение уравнения (7.3)	Решение краевой задачи (7.3), (7.4)
$\delta = 0, \alpha = -1$	$x_n = C_1 + \left(\frac{\beta_0}{2} - \beta\right)n - \frac{\beta_0}{2}n^2$	$x_n^0 = (N+1) \left[ \frac{\beta_0}{2} N + \beta \right] + \left(\frac{\beta_0}{2} - \beta\right)n - \frac{\beta_0}{2}n^2$
$\alpha = 0, \delta \neq -1$	$x_n = C_1 (-\delta)^n + \frac{\beta(1+\delta) + \delta\beta_0}{(1+\delta)^2} + \frac{\beta_0}{1+\delta}n$	$x_n^0 = \frac{\beta(1+\delta) + \delta\beta_0}{(1+\delta)^2} [1 - (-\delta)^n] + \frac{\beta_0 n}{1+\delta}$
$\alpha = 0, \delta = -1$	$x_n = C_1 + \left(\frac{\beta_0}{2} + \beta\right)n + \frac{\beta_0}{2}n^2$	$x_n^0 = \left(\frac{\beta_0}{2} + \beta\right)n + \frac{\beta_0}{2}n^2$

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{4\delta\alpha - 1}}{2\alpha|\mu|}, \quad \cos \omega = -\frac{1}{2\alpha|\mu|}$$

$$\mu = \begin{cases} \frac{\sqrt{\delta/\alpha}}{1+\alpha}, & \text{если } 1 - 4\delta\alpha < 0 \\ -\frac{1+\alpha}{\alpha}, & \text{если } 1 + \delta + \alpha = 0, \alpha \neq -1/2, \delta\alpha \neq 0 \\ -\frac{1}{2\alpha}, & \text{если } \alpha \neq -1/2, 1 - 4\delta\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\tau_n^0 = \epsilon |\mu|^{n-1} \frac{\sin n\omega}{\sin \omega}, \quad \epsilon \neq 0. \quad (7.6)$$

На плоскости  $(\alpha, \delta)$  условие  $\sin(N+1)\omega = 0$  определяет семейство гипербол:

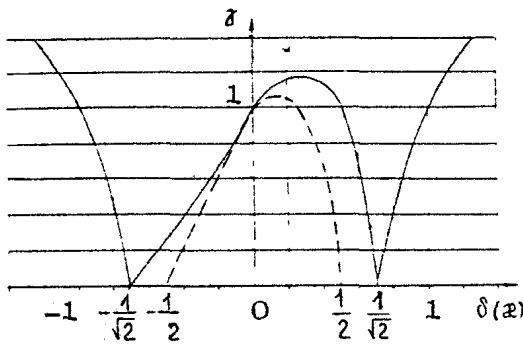
$$\delta = \frac{1}{4\alpha \cos^2 \frac{\pi(\epsilon+1)}{N+1}}, \quad (7.7)$$

где

$$\epsilon = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \frac{N-3}{2}, & \text{если } N - \text{нечетное число,} \\ 0, 1, 2, \dots, \frac{N-2}{2}, & \text{если } N - \text{четное число.} \end{cases}$$

Таким образом, при  $\gamma = \gamma_0 = 0$  и выполнении (7.7) существует континуум стационарных пространственно неоднородных режимов синхронизации. Но если  $\gamma$  или  $\gamma_0$  не равны нулю, то при выполнении (7.7) стационарные режимы не существуют (см. табл. 7.1). Другими словами, при  $\gamma, \gamma_0 \neq 0$  неравенство (7.5) может выполняться только в случае  $\sin(N+1)\omega \neq 0$ , и тогда условия (7.5) можно разрешить относительно  $\gamma$ :  $\gamma < \gamma^0(\alpha, \delta, \gamma_0, n, N)$  (см. вид решения  $\tau_n^0$  в табл. 7.1). Отсюда вытекает, что при  $\gamma_0 = \text{const}$  в пространстве параметров  $(\delta, \alpha, \gamma)$  имеется конечное число областей, граница которых состоит из плоскости  $\{\gamma = 0\}$  и поверхности  $\Gamma: \{\gamma = \gamma^0(\alpha, \delta, \gamma_0, n, N)\}$ , примыкающей к  $\{\gamma = 0\}$  на гиперболах (7.7). При значениях параметров из этих областей в цепочке (7.1), (7.2) существует некоторое конечное число стационарных режимов синхронизации, причем только пространственно неоднородного типа. Для примера на рис. 7.1 в плоскости  $(\delta(\alpha), \gamma)$  представлены области (ниже кривой) существования стационарных режимов синхронизации цепочки (7.1), (7.2) в случае  $\gamma_0 = 0, \delta = \alpha, N = 3$  для  $F(u_n) = \sin u_n$ . Заметим, что число областей синхронизации увеличивается с увеличением  $N$  (при  $N = 3$  есть три области, при  $N = 4$  есть пять областей и т. д. - см. (7.7), ср. с результатами гл. 4).

С точки зрения приложений важно знать, как в режиме синхронизации распределены вдоль цепочки координаты  $\tau_n^0$ , т. е. как они зависят от номера  $n$ . Конечно, ответ на этот вопрос можно получить из формул для  $\tau_n^0$  табл. 7.1,



Р и с. 7.1

построив набор  $\tau_n^0$  для заданных значений параметров и номера  $N$ . Однако при  $\gamma_0 = 0$  характер распределения вдоль цепочки можно понять и не вычисляя  $\tau_n^0$ . Поясним это в случае  $\delta a \neq 0^*$ . Вводя новую переменную  $y_n \equiv \tau_{n-1}$ , перепишем уравнение (7.3) в виде системы

$$\begin{cases} y_{n+1} = \tau_n, \\ \tau_{n+1} = \frac{\gamma}{a} - \frac{\delta}{a} y_n - \frac{1}{a} \tau_n \end{cases} \quad (7.8)$$

Систему (7.8) можно рассматривать как динамическую на плоскости, порождаемую диффеоморфизмом  $\varphi$ :

$$(\tau, y) \rightarrow \left( \frac{\gamma}{a} - \frac{\delta}{a} y - \frac{1}{a} \tau, \tau \right)$$

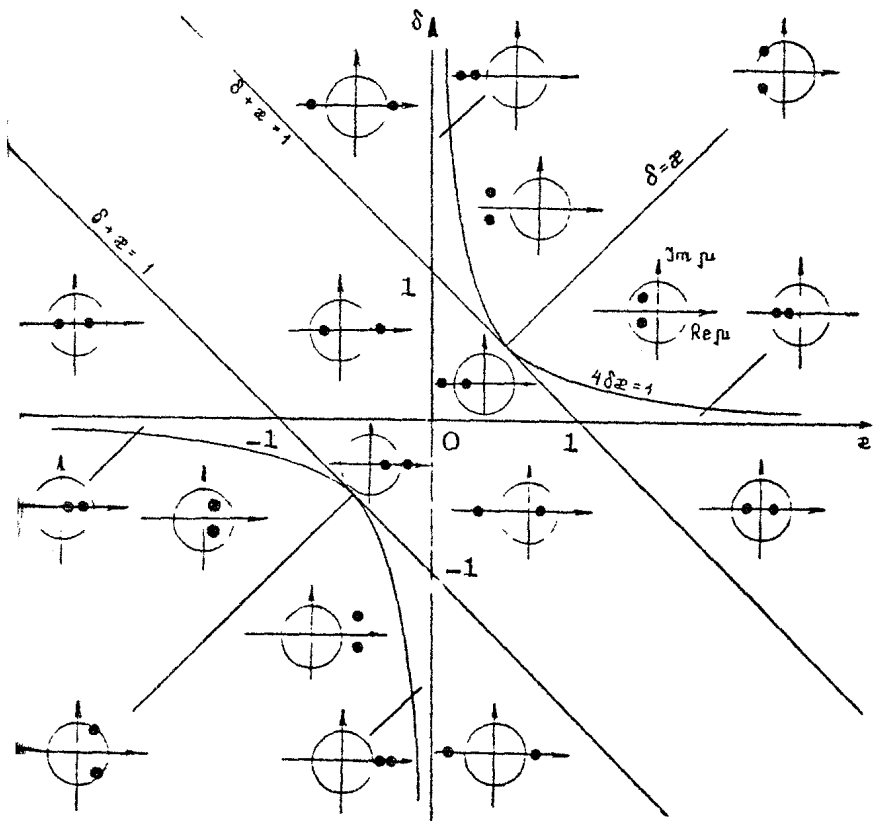
На фазовой плоскости системы (7.8) набор  $\{\tau_n^0, y_n^0\}$ ,  $n = \overline{2, N}$  представляет собой кусок дискретной траектории  $L$ , соединяющий прямые\*\*

$$L_2 \cdot \left\{ y = \gamma - a\tau \right\}, \quad L_N \left\{ y = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1}{\delta} \tau \right\}$$

\* Случай  $\delta a = 0$  более простой и здесь не рассматривается

\*\* Заметим, что в такой постановке можно рассматривать и исходную краевую задачу (7.3), (7.4), т. е. искать кусок дискретной траектории диффеоморфизма  $\varphi$ , соединяющий за  $(N - 2)$  итерации прямые  $L_2$  и  $L_N$ , и по нему находить  $\tau_n^0$ . Этот подход решения краевой задачи (7.3), (7.4) изложен в гл. 9.

Поскольку  $q$  – линейный диффеоморфизм, то структура разбиения фазовой плоскости, а следовательно и вид куска траектории  $L$ , определяются типом неподвижной точки этого отображения. При  $1 + \delta + \alpha \neq 0$  система (7.8) имеет единственную неподвижную точку  $O(x^*, y^*)$ ,  $x^* = y^* = \gamma(1 + \alpha + \delta)^{-1}$ , тип которой зависит от параметров  $\alpha$  и  $\delta$ . На рис. 7.2 представлено разбиение плоскости  $(\alpha, \delta)$  на области, соответствующие различным типам точки  $O$ , т. е. в каждой из областей указано расположение мультипликаторов этой неподвижной точки относительно единичной окружности на комплексной плоскости. Если параметры  $\delta$  и  $\alpha$  таковы, что мультипликаторы лежат внутри единичной окружности, т. е. неподвижная точка устойчива, то координаты  $x_n^0$  вдоль це-



Р и с. 7.2



почки с увеличением  $n$  "затухают" к значению  $\tau^*$ . Причем в случае комплексных мультипликаторов это "затухание" осцилляционного типа, а в случае действительных – аperiodического. Для областей параметров, которым отвечают мультипликаторы вне единичной окружности, неподвижная точка неустойчива. В этом случае координаты  $x_n^0$  с увеличением  $n$  не "затухают". При этом, если хотя бы один из мультипликаторов является отрицательным, то  $\tau_n^0$  вдоль цепочки распределены так, что из любых двух соседних координат одна всегда больше, а другая меньше, чем  $\tau^*$ . Другими словами, в этом случае изменение  $\tau_n^0$  вдоль цепочки сопровождается "перескоками" относительно  $\tau^*$  (см. гл. 4). При  $\delta = \alpha$ ,  $1 - 4\delta\alpha < 0$  (точка  $0$  – центр) и достаточно большом значении числа  $N$  вдоль цепочки возможно периодическое распределение координат  $\tau_n^0$ .

Рассмотрим устойчивость стационарных режимов синхронизации на примере цепочки уравнений

$$u_n + F(u_n) = \gamma - \delta F(u_{n-1}) - \alpha F(u_{n+1}) \quad (7.9)$$

с граничными условиями (7.2). Будем изучать устойчивость стационарных пространственно однородных состояний, которые существуют при  $\gamma = \gamma_0 = 0$ . Пусть  $u_n = u^0$  – корень уравнения  $F(u_n) = 0$ . Запишем характеристический определитель

$$B_N = \begin{vmatrix} -F'(u^0) - \rho & -\alpha F'(u^0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\delta F'(u^0) & -F'(u^0) - \rho & -\alpha F'(u^0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\delta F'(u^0) & -F'(u^0) - \rho & -\alpha F'(u^0) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\delta F'(u^0) & -F'(u^0) - \rho & -\alpha F'(u^0) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta F'(u^0) & -F'(u^0) - \rho & \end{vmatrix}$$

Найдем корни характеристического уравнения, отвечающего определителю  $B_N$ , используя методику, изложенную далее в гл. 9:

$$\rho_s = \begin{cases} -F'(u^0) - 2|F'(u^0)|\sqrt{\delta\alpha} \cos \frac{s\pi}{N+1}, & \text{если } \delta\alpha \geq 0 \\ -F'(u^0) - 2|F'(u^0)|\sqrt{-\delta\alpha} \cos \frac{s\pi}{N+1}, & \text{если } \delta\alpha < 0, \\ & s = \overline{1, N} \end{cases} \quad (7.10)$$

Здесь  $i$  — мнимая единица. Предположим, что  $F'(u^0) < 0$ . Покажем, что в этом случае пространственно однородное состояние  $\{u_n = u^0\}$  неустойчиво. Действительно, при  $\delta z < 0$  это очевидно так (см. (7.10)), а при  $\delta z \geq 0$  имеется, по крайней мере, один положительный корень:  $\rho_N > 0$ .

Пусть теперь  $F'(u^0) > 0$ . В этом случае при  $\delta z < 0$  из уравнений (7.10) имеем  $\operatorname{Re} \rho_s < 0$ ,  $s = \overline{1, N}$  и, следовательно, состояние  $\{u_n = u^0\}$  устойчиво. При  $\delta z > 0$  из (7.10) получаем следующие условия устойчивости:

$$0 < \delta z < \left( 4 \cos^2 \frac{\pi s}{N+1} \right)^{-1} \quad (7.11)$$

Таким образом, если  $F'(u^0) > 0$ , то пространственно однородное состояние  $\{u_n = u^0\}$  устойчиво при значениях параметров из области, заключенной на плоскости  $(z, \delta)$  между гиперболами (7.7) при  $\epsilon = 0$  (ср. (7.7) и (7.11)), т. е. устойчиво только в одной из всех областей его существования. На рис. 7.1 это значения параметра  $z$ , удовлетворяющие неравенству  $|z| < 1/\sqrt{2}$  ( $\gamma = \gamma_0 = 0$ ).

В качестве примера рассмотрим уравнение (7.9) при  $F(u_n) = \sin u_n$ , которое описывает динамические процессы в цепочке систем фазовой синхронизации. Не трудно видеть, что в этом случае при  $\gamma = \gamma_0 = 0$  существуют два пространственно однородных состояния  $\{u_n = 0\}$  и  $\{u_n = \pi\}$ . Из проведенного исследования вытекает, что устойчиво лишь первое и область устойчивости задается неравенствами (7.11) и  $\delta z < 0$ .

Рассмотрим теперь устойчивость любого пространственно неоднородного состояния  $\{u_n = u_n^0\}$ . Исследование его устойчивости сводится к нахождению собственных чисел матрицы следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} -F'(u_1^0) & -zF'(u_2^0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\delta F'(u_1^0) & -F'(u_2^0) & -zF'(u_3^0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\delta F'(u_2^0) & -F'(u_3^0) & -zF'(u_4^0) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\delta F'(u_{N-2}^0) & -F'(u_{N-1}^0) & -zF'(u_N^0) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -\delta F'(u_{N-1}^0) & -F'(u_N^0) \end{pmatrix}$$

При  $\delta z = 0$  искомый набор собственных чисел легко находится:

$$\rho_s = -F'(u_s^0), \quad s = \overline{1, N}$$

Отсюда вытекает, что среди всего множества пространственно неоднородных режимов устойчивы только те, у которых при всех  $s$  выполняется  $F'(u_s^0) > 0$ . Например, для системы фазовой синхронизации (7.9)  $F(u_n) = \sin u_n$  устойчивым является лишь состояние  $\{u_n = \arcsin \tau_n\}$ ,  $n = \overline{1, N}$

При  $\delta z \neq 0$  найти спектр собственных чисел матрицы  $A$  не удается. Однако можно получить достаточные условия устойчивости пространственно неоднородных состояний, для которых  $F'(u_n^0) > 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ , не находя  $\rho_s$ . Действительно, воспользуемся оценкой (см. [72]) спектра собственных значений матрицы  $A = [a_{\ell n}]$  размера  $N \times N$ .

$$\operatorname{Re} \rho_s \leq \max_{1 \leq \ell \leq N} Q_\ell,$$

где

$$Q_\ell = \operatorname{Re} a_{\ell \ell} + P_\ell, \quad P_\ell = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \ell}}^N |a_{\ell n}|$$

В случае матрицы  $A$  получим

$$\begin{aligned} P_1 &= |-\alpha F'(u_2^0)|, & P_2 &= |-\delta F'(u_1^0)| + |-\alpha F'(u_3^0)|, \\ P_{n-1} &= |-\delta F'(u_{n-2}^0)| + |\alpha F'(u_n^0)|, & P_n &= |-\delta F'(u_{n-1}^0)|, \\ Q_\ell &= -F'(u_\ell^0) + P_\ell, & \ell &= \overline{1, N} \end{aligned}$$

Тогда искомые достаточные условия устойчивости задаются неравенством

$$Q_{\max} < 0, \quad \text{где } Q_{\max} = \max_{1 \leq \ell \leq N} Q_\ell$$

Рассмотрим в качестве примера устойчивость пространственно неоднородного режима цепочки систем фазовой синхронизации. В этом случае

$$Q_{\max} \leq |\delta| + |\alpha| - \sqrt{1 - (\tau_{\max}^0)^2}$$

Следовательно, стационарный режим синхронизации  $\left\{ u_n = \alpha \tau \sin \tau_n \right\}$  в цепочке систем фазовой синхронизации (7.9) устойчив при значениях параметров из области, выделяемой неравенством

$$|\delta| + |\alpha| < \sqrt{1 - (\tau_{m \alpha \tau}^0)^2}. \quad (7.12)$$

Для  $N = 3$  и  $\delta = \alpha$  неравенство (7.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma < \frac{1-2\alpha^2}{1-\alpha} \sqrt{1-4\alpha^2}, & \quad \text{если } 0 \leq \alpha \leq 1/2, \\ \gamma < \frac{1-2\alpha^2}{1-2\alpha} \sqrt{1-4\alpha^2}, & \quad \text{если } -1/2 \leq \alpha \leq 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Область параметров, выделяемая неравенством (7.13), отмечена на рис. 7.1 пунктирной линией.

## 7.2. Стационарные режимы в решетке

Рассмотрим вопрос о существовании стационарных состояний. Для решеток систем синхронизации с периодическими граничными условиями стационарные состояния определяются системой уравнений (см. гл. 4)

$$F(u_{n,m}) + \delta_1 F(u_{n-1,m}) + \alpha_1 F(u_{n+1,m}) + \delta_2 F(u_{n,m-1}) + \alpha_2 F(u_{n,m+1}) = \gamma. \quad (7.14)$$

$$u_{n+N,n} = u_{n,m}, \quad u_{n,m+N} = u_{n,m}, \quad n, m = \overline{1, N} \quad (7.15)$$

Полагая  $F(u_{n,m}) = \tau_{n,m}$ , приходим к системе

$$\tau_{n,m} + \delta_1 \tau_{n-1,m} + \alpha_1 \tau_{n+1,m} + \delta_2 \tau_{n,m-1} + \alpha_2 \tau_{n,m+1} = \gamma, \quad (7.16)$$

$$\tau_{n+N,m} = \tau_{n,m}, \quad \tau_{n,m+N} = \tau_{n,m}. \quad (7.17)$$

В силу периодичности граничных условий будем искать решение (7.16) в виде ряда Фурье

$$\tau_{n,m} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} C_{\tau,t} \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \tau n + i t m\right), \quad \tau, t \in \mathbb{Z}. \quad (7.18)$$

где  $C_{\tau,t} = C_{-\tau,-t}^*$  Подставляя (7.18) в (7.16), получим

$$\sum_{\tau, t = -\infty}^{\infty} C_{\tau, t} \left[ 1 + \delta_1 \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \tau\right) + \alpha_1 \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \tau\right) + \delta_2 \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} t\right) + \alpha_2 \exp\left(i \frac{2\pi}{N} t\right) \right] \cdot \exp\left[i \frac{2\pi}{N} (\tau n + t m)\right] = g \quad (7.19)$$

Отсюда вытекает

$$C_{00} = g, \quad g = g(1 + \delta_1 + \alpha_1 + \delta_2 + \alpha_2)^{-1}, \quad 1 + \delta_1 + \alpha_1 + \delta_2 + \alpha_2 \neq 0 \quad (7.20)$$

и при  $\tau, t \neq 0, \quad \tau^2 + t^2 \neq 0$

$$1 + \delta_1 \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \tau\right) + \alpha_1 \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \tau\right) + \delta_2 \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} t\right) + \alpha_2 \exp\left(i \frac{2\pi}{N} t\right) = 0 \quad (7.21)$$

Из уравнения (7.21) непосредственно следует, что в пространстве  $\{\delta_1, \alpha_1, \delta_2, \alpha_2\}$  на двумерной плоскости

$$\begin{cases} 1 + (\delta_1 + \alpha_1) \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_0\right) + (\delta_2 + \alpha_2) \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) = 0, \\ (\alpha_1 - \delta_1) \sin\left(\frac{2\pi}{N} \tau_0\right) + (\alpha_2 - \delta_2) \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) = 0, \end{cases} \quad (7.22)$$

где  $t_0, \tau_0$  - любые числа,  $t_0^2 + \tau_0^2 \neq 0$ , существует семейство решений системы (7.16), (7.17) следующего вида.

$$C_{n, m} = g + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} (\tau_0 n + t_0 m) + \theta\right], \quad (7.23)$$

где  $\varepsilon, \theta$  - произвольные действительные числа.

Найдем условия, при которых система (7.16), (7.17) допускает решения более сложной формы:

$$C_{n, m} = g + \varepsilon_1 \cos\left[\frac{2\pi}{N} (\tau_0 n + t_0 m) + \theta_1\right] + \varepsilon_2 \cos\left[\frac{2\pi}{N} (\tau_1 n + t_1 m) + \theta_2\right], \quad (\tau_1 - \tau_0)^2 + (t_1 - t_0)^2 \neq 0 \quad (7.24)$$

В силу (7.21) для существования таких решений требуется, чтобы параметры удовлетворяли системе четырех уравнений

$$\begin{aligned} \delta_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right) + \delta_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) &= -1, \\ \delta_2 \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right) - \delta_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) + \alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где  $\ell = 0, 1$ . Легко показать, что определитель этой линейной системы не равен нулю, если

$$[\vec{a}_0, \vec{a}_1] \neq 0 \quad \text{и} \quad [\vec{b}_0, \vec{b}_1] \neq 0, \quad (7.26)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{a}_\ell &= \left\{ 0, \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right), \sin\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) \right\}, \\ \vec{b}_\ell &= \left\{ 0, \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right), \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) \right\}. \end{aligned}$$

При выполнении (7.26) для каждой двух пар  $(t_0, \tau_0)$ ,  $(t_1, \tau_1)$  в пространстве параметров  $(\delta_1, \alpha_1, \delta_2, \alpha_2)$  существует единственная точка, для которой система (7.16), (7.17) имеет двухпараметрическое семейство решений (7.24).

Покажем, что решения (7.23), (7.24), вообще говоря, исчерпывают класс возможных решений системы (7.16), (7.17) (тем самым класс стационарных режимов решетки систем синхронизации).

Предположим противное. Пусть в системе уравнений (7.25)  $\ell$  может принимать больше двух значений, т. е.  $\ell = 0, 1, 2 \dots$

Введем в рассмотрение векторы

$$\begin{aligned} \vec{A}_\ell &= \left\{ -\sin\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right), \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right), -\sin\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right), \sin\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) \right\}, \\ \vec{B}_\ell &= \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right), \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_\ell\right), \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right), \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_\ell\right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\vec{Y} = \left\{ \delta_2, \alpha_2, \delta_1, \alpha_1 \right\}$$

$$\bar{A}_p \bar{Y} = 0, \quad \bar{B}_p \bar{Y} = -1, \quad p = 0, 1, 2 \dots \quad (7.27)$$

Заметим также, что

$$\bar{A}_p \bar{B}_p = 0, \quad p = 0, 1, 2 \quad (7.28)$$

и, по предположению, ищется решение, для которого  $\bar{A}_p \neq \bar{A}_{p'}$  при  $p \neq p'$ . Поэтому векторы  $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{Y}$  образуют базис в четырехмерном евклидовом пространстве. Разложим векторы  $\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2$  по этому базису. Учитывая (7.28), получим:

$$\begin{aligned} \bar{B}_0 &= \alpha_{01} \bar{A}_1 + \alpha_{02} \bar{A}_2 + \alpha_{03} \bar{Y}, \\ \bar{B}_1 &= \alpha_{10} \bar{A}_0 + \alpha_{12} \bar{A}_2 + \alpha_{13} \bar{Y}, \\ \bar{B}_2 &= \alpha_{20} \bar{A}_0 + \alpha_{21} \bar{A}_1 + \alpha_{23} \bar{Y}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Умножая скалярно равенства (7.29) на вектор  $\bar{Y}$  и принимая во внимание (7.27), получим

$$\alpha_{03} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = -(\bar{Y} \bar{Y})^{-1} = \rho = -(\delta_1^2 + \alpha_1^2 + \delta_2^2 + \alpha_2^2)^{-1}$$

Распишем векторные равенства (7.29) по первым двум координатам:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) &= -\alpha_{01} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) - \alpha_{02} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_2\right) + \rho \delta_2, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) &= \alpha_{10} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) + \alpha_{12} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_2\right) + \rho \alpha_2, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) &= -\alpha_{10} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) - \alpha_{12} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_2\right) + \rho \delta_1, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) &= \alpha_{20} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) + \alpha_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) + \rho \alpha_2, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_2\right) &= -\alpha_{20} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) - \alpha_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) + \rho \delta_2, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_2\right) &= \alpha_{01} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) + \alpha_{02} \sin\left(\frac{2\pi}{N} t_2\right) + \rho \alpha_2. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Сложив попарно первое равенство со вторым, третье - с четвертым, а пятое - с шестым, получим

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_p\right) = (\delta_2 + \alpha_2) \rho, \quad p = 0, 1, 2$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}t_0\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}t_1\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}t_2\right) \quad (7.31)$$

Следовательно,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N}t_0\right) = \pm \sin\left(\frac{2\pi}{N}t_1\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi}{N}t_0\right) = \pm \sin\left(\frac{2\pi}{N}t_2\right) \quad (7.32)$$

Соотношения (7.31), (7.32) ведут к одному из следующих равенств:

$$t_0 = t_1, \quad t_0 = t_2, \quad t_1 \neq t_2,$$

что противоречит исходному предположению.

Таким образом, система (7.16), (7.17) имеет решение лишь типов (7.23) и (7.24) (при значениях параметров, определяемых (7.22) и (7.25) соответственно).

Стационарные состояния решетки систем синхронизации, описываемой (7.14), (7.15), определяются теперь из равенств

$$F(u_{n,m}) = T_{n,m}, \quad (7.33)$$

где  $T_{n,m}$  задаются формулами (7.23) или (7.24).

Поскольку у систем синхронизации функция  $F(u_{n,m})$  нормирована (на единицу), то уравнение (7.33) разрешимо лишь в том случае, когда  $\Gamma < 1$ .

В заключение отметим, что при  $\Gamma < 1$  всегда существует пространственно однородное стационарное состояние, определяемое (7.33) при  $T_{n,m} = \Gamma$ .

Рассмотрим теперь устойчивость стационарных режимов системы

$$u_{n,m}(k+1) - u_{n,m}(k) + F(u_{n,m}(k)) = \gamma - \delta_1 F(u_{n-1,m}(k)) - \alpha_1 F(u_{n+1,m}(k)) - \delta_2 F(u_{n,m-1}(k)) - \alpha_2 F(u_{n,m+1}(k)). \quad (7.34)$$

Граничные условия периодические:  $u_{n+N,m}(k) = u_{n,m}(k)$ ,  $u_{n,m+N}(k) = u_{n,m}(k)$ . Система (7.34) описывает решетку из взаимодействующих простейших импульсных СФС (см. гл. 9, 10). Очевидно, что стационарные состояния этой системы являются также решениями задачи (7.14), (7.15).

Пусть  $u_{n,m} = u_{n,m}^0$  — решение уравнения (7.33). Для исследования устойчивости состояния  $\{u_{n,m}^0\}$  линеаризуем (7.34) на этом решении:  $u_{n,m}(k) = u_{n,m}^0 + \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta}(k)$  Ниже



предположим, что  $F'(u_{n,m}^0) \equiv \alpha$  ( $\alpha = \text{const}$ ). Это условие имеет место в одной из следующих ситуаций:

1)  $\{u_{n,m}^0\} \equiv \text{const}$  - пространственно однородное состояние;

2) функция  $F(u)$  - кусочно-линейная функция с всюду постоянным дифференциалом.

При сделанном предположении линеаризованная система (7.34) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{n,m}(k+1) = & \mathfrak{E}_{n,m}(k) - \alpha \mathfrak{E}_{n,m}(k) - \alpha \delta_2 \mathfrak{E}_{n,m-1}(k) - \\ & - \alpha \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_{n,m+1}(k) - \alpha \delta_1 \mathfrak{E}_{n-1,m}(k) - \alpha \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_{n+1,m}(k), \end{aligned} \quad (7.35)$$

где  $\mathfrak{E}_{n,m}(k)$  периодичны с периодом  $N$  по  $n$  и  $m$ . Соотношение (7.35) определяет линейный оператор  $\mathcal{L}$ , переводящий пространство  $N \times N$  матриц  $(\mathfrak{E}_{n,m})$  в себя. Пусть  $(\mathfrak{E}_{n,m})$  - собственный вектор оператора  $\mathcal{L}$ . В силу периодичности по пространственным переменным  $n, m$  его можно представить в виде

$$\mathfrak{E}_{n,m} = \sum_{\tau, t = -\infty}^{\infty} C_{\tau,t} \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (\tau n + t m) \right] \quad (7.36)$$

Подставляя (7.36) в систему (7.35) и учитывая, что  $(\mathfrak{E}_{n,m})$  - собственный вектор оператора  $\mathcal{L}$ , отвечающий собственному значению  $\rho$ , для нахождения последнего получим

$$\begin{aligned} \sum_{\tau, t = -\infty}^{\infty} C_{\tau,t} \left[ \rho - (1-\alpha) + \alpha \delta_2 \exp \left( -i \frac{2\pi}{N} t \right) + \alpha \mathfrak{E}_2 \exp \left( i \frac{2\pi}{N} t \right) + \right. \\ \left. + \alpha \delta_1 \exp \left( -i \frac{2\pi}{N} \tau \right) + \alpha \mathfrak{E}_1 \exp \left( i \frac{2\pi}{N} \tau \right) \right] \times \\ \times \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (\tau n + t m) \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

Отсюда находим спектр оператора  $\mathcal{L}$

$$\rho_{\tau t} = 1 - \alpha - \alpha \delta_2 \exp \left( -i \frac{2\pi}{N} t \right) - \alpha \mathfrak{E}_2 \exp \left( i \frac{2\pi}{N} t \right) -$$

$$-\alpha \delta_1 \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} t\right) - \alpha \varepsilon_1 \exp\left(i \frac{2\pi}{N} t\right), \quad \tau, t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.37)$$

Если все  $p_{\tau, t}$  на комплексной плоскости  $(\xi, \eta)$  лежат внутри единичной окружности, то состояние  $\{u_{n,m}^0\}$  устойчиво. Выведем условия устойчивости. Из формулы (7.37) получаем, что каждое  $p_{\tau, t}$  лежит на своей окружности:

$$\left[ \alpha - (1 - \alpha) \right]^2 + \eta^2 = \alpha^2 r_{\tau, t}^2, \quad (7.38)$$

где

$$r_{\tau, t}^2 = (\delta_2 - \varepsilon_2)^2 + (\delta_1 - \varepsilon_1)^2 + 4\delta_1 \varepsilon_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{N} t\right) + 4\delta_2 \varepsilon_2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{N} \tau\right) + 2(\delta_1 \delta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) \cos\left[\frac{2\pi}{N} (\tau - t)\right] + 2(\delta_1 \varepsilon_2 + \delta_2 \varepsilon_1) \cos\left[\frac{2\pi}{N} (\tau + t)\right] \quad (7.39)$$

Обратим внимание на то, что при  $\alpha > 2$  или  $\alpha < 0$  центр окружности (7.38) лежит вне единичной окружности, т. е. существуют  $|p_{\tau, t}| > 1$ . Последнее означает неустойчивость стационарного состояния и хаотическую динамику системы (7.34). Из выражения (7.39) вытекает, что максимальный радиус этих окружностей в зависимости от параметров достигается при следующих значениях  $\tau$  и  $t$ .

$$\begin{aligned} r_{\max}^2 &= (\delta_2 - \varepsilon_2 + \delta_1 - \varepsilon_1)^2 & \text{при } t = \tau = \frac{N}{4} & \text{ или } t = \tau = \frac{3N}{4}, \\ r_{\max}^2 &= (\delta_2 - \varepsilon_2 - \delta_1 + \varepsilon_1)^2 & \text{при } \tau = \frac{N}{4}, t = \frac{3N}{4} & \text{ или } \tau = \frac{3N}{4}, t = \frac{N}{4}, \\ r_{\max}^2 &= (\delta_1 + \varepsilon_2 + \delta_1 + \varepsilon_1)^2 & \text{при } \tau = t \stackrel{!}{=} 0 & \text{ или } \tau = t = \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$r_{\max}^2 = (\delta_2 + \varepsilon_2 - \delta_1 - \varepsilon_1)^2 \quad \text{при } \tau = 0, t = \frac{N}{2} \quad \text{или } \tau = \frac{N}{2}, t = 0$$

Отсюда следует, что окружность максимального радиуса, а следовательно все окружности (7.38), будет лежать на плоскости  $(\xi, \eta)$  внутри единичной окружности, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} R_{\max} &< 1 & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ R_{\max} &< \frac{2 - \alpha}{\alpha} & \text{при } 1 < \alpha < 2, \end{aligned} \quad (7.41)$$

где

$$R_{\max} = \max \left\{ |\delta_2 - \alpha_2 + \delta_1 - \alpha_1|, |\delta_2 - \alpha_2 - \delta_1 + \alpha_1|, \right. \\ \left. |\delta_2 + \alpha_2 - \delta_1 - \alpha_1|, |\delta_2 + \alpha_2 + \delta_1 + \alpha_1| \right\}$$

Неравенства (7.41) представляют собой достаточные условия устойчивости пространственно однородного состояния.

Заметим, что в случае  $\alpha_1 \delta_1 > 0$ ,  $\alpha_2 \delta_2 > 0$  нарушение неравенств (7.41) сопровождается попаданием действительного мультипликатора  $\rho_{\pi, \pm}$  на единичную окружность, а в случае  $\alpha_1 \delta_1 < 0$ ,  $\alpha_2 \delta_2 < 0$  на единичную окружность попадает мультипликатор с не равной нулю мнимой частью.

Обратимся теперь к устойчивости пространственно неоднородных состояний системы синхронизации, определяемых (7.23), (7.33). Принимая во внимание (7.37) и условия существования (7.22), заключаем, что  $\rho_{\tau_0, t_0} = 1$ . С другой стороны, окружность (7.38) с  $t_0$  и  $\tau_0$ , не совпадающими со значениями  $\varrho$  и  $\varepsilon$  из условий (7.40), лежит внутри окружности максимального радиуса  $\propto R_{\max}$ . Поэтому последняя имеет точку на вещественной оси вне единичного круга из плоскости  $(\xi, \eta)$ . Это означает, что все решения типа (7.22), (7.33) неустойчивы, кроме тех, для которых радиус  $\propto \tau_0, t_0 = \propto R_{\max}$ . Рассмотрим последний случай (т. е.  $t_0, \tau_0 \in \{0, N/2\}$ ). Из выражений (7.22), (7.41) следует, что условия устойчивости семейства (7.22), (7.33) при  $t_0 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$  и  $t_0 = N/2$ ,  $\tau_0 = N/2$  имеют вид

$$|\delta_1 + \alpha_1 + \delta_2 + \alpha_2| > |\delta_2 + \alpha_2 - \delta_1 - \alpha_1|, \quad (7.42)$$

а при  $t_0 = 0$ ,  $\tau_0 = N/2$  и  $t_0 = N/2$ ,  $\tau_0 = 0$  -

$$|\delta_1 + \alpha_1 + \delta_2 + \alpha_2| < |\delta_2 + \alpha_2 - \delta_1 - \alpha_1| \quad (7.43)$$

Рассмотрим устойчивость состояний (7.24), (7.33). Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что в уравнениях (7.25) следует выбирать лишь значения  $t_0, \tau_0, t_1, \tau_1 \in \{0, N/2\}$  (другим совокупностям этих чисел соответствуют неустойчивые состояния (7.24), (7.33)). Тогда (7.25) примет вид

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_0\right) (\delta_2 + \alpha_2) + \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_0\right) (\delta_1 + \alpha_1) = -1, \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N} t_1\right) (\delta_2 + \alpha_2) + \cos\left(\frac{2\pi}{N} \tau_1\right) (\delta_1 + \alpha_1) = -1. \end{cases} \quad (7.44)$$

Ясно, что система (7.44) совместна, если

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}t_0\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}t_1\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{N}t_1\right) \cos\left(\frac{2\pi}{N}t_0\right) \neq 0 \quad (7.45)$$

При этих условиях  $\alpha_{\tau_0, t_0} = \alpha_{\tau_1, t_1} = \alpha R_{\text{max}}$ , и состояния (7.24), (7.33) будут устойчивы для следующих наборов чисел  $(t_0, \tau_0, t_1, \tau_1)$

$$(0, 0, N/2, 0), (0, 0, 0, N/2), (0, N/2, 0, 0), (0, N/2, N/2, N/2),$$

$$(N/2, 0, 0, 0), (N/2, 0, N/2, N/2), (N/2, N/2, N/2, 0), (N/2, N/2, 0, N/2)$$

В заключение отметим, что возникновение пространственно неоднородных состояний (7.23), (7.24), (7.33) можно считать связанным с потерей устойчивости пространственно однородного состояния. Конечно, оно может терять устойчивость и другими, не рассмотренными здесь способами, однако стационарных состояний при этом не возникает.

---

Показано, что изучение стационарных режимов в цепочках и решетках сводится к анализу некоторых типов линейных отображений. Это позволяет при достаточно общих предположениях о параметрах и нелинейностях получить аналитическое решение задачи о существовании и локальной устойчивости режимов синхронизации. Для цепочки с нулевыми граничными условиями при  $\gamma = 0$  установлено существование пространственно однородного режима синхронизации, а при  $\gamma \neq 0$  — пространственно неоднородного режима. Характерным для решетки с периодическими граничными условиями является наличие одного пространственно однородного режима и двух пространственно неоднородных режимов синхронизации.

## ЗАМЕЧАНИЯ О ДРУГИХ ЦЕПОЧКАХ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ

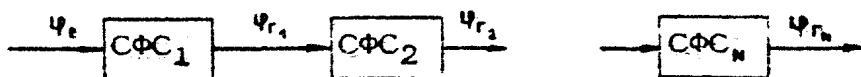
В предыдущих главах рассматривались разные варианты соединения в цепочки и решетки параллельно включенных СФС. Цель настоящей главы – обратить внимание на некоторые другие цепочки систем синхронизации, в частности образованные параллельно включенными системами ЧАП или последовательно включенными СФС. Анализ таких моделей хорошо вписывается в развиваемую идеологию исследования цепочечных моделей. В этой связи, не проводя полного исследования моделей, ограничимся краткими замечаниями об изучении таких цепочек.

### 8.1. Каскадные цепочки

Рассмотрим цепочку, образующуюся при каскадном (последовательном) включении систем фазовой синхронизации (рис.8.1). Структура соединения элементов в каскадной цепочке отличается от структуры, принятой в гл. 1 (см. рис. 1.4). Каскадное включение СФС позволяет существенно улучшить фильтрующие свойства в цепочке по сравнению с одиночной парциальной СФС [73], поэтому использование каскадных цепочек представляет практический интерес. В этой связи естественна постановка задачи об исследовании их динамических свойств. Изучение динамики каскадных цепочек интересно еще и потому, что такие цепочки являются примером принципиально "поточковых" радиотехнических систем.

Запишем, учитывая (1.3), уравнения каскадной цепочки из  $N$  элементов в предположении однородности цепочки [73]

$$\left\{ \begin{array}{l} p\varphi_1/\Omega + K(p)\sin\varphi_1 = \zeta, \\ p\varphi_2/\Omega + K(p)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \zeta, \\ \dots \\ p\varphi_N/\Omega + K(p)\sin(\varphi_N - \varphi_{N-1}) = \zeta \end{array} \right. \quad (8.1)$$



Р и с. 8.1

Здесь  $\psi_n = \psi_{r_n} - \psi_e$ . Полагая для простоты  $K(p) = 1$ , преобразуем (8.1), попарно вычитая из второго уравнения первое, из третьего - второе и т. д.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_1}{d\tau} + \sin \psi_1 = \gamma, \\ \frac{d(\psi_2 - \psi_1)}{d\tau} + \sin(\psi_2 - \psi_1) = \sin \psi_1, \\ \frac{d(\psi_3 - \psi_2)}{d\tau} + \sin(\psi_3 - \psi_2) = \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dots \\ \frac{d(\psi_N - \psi_{N-1})}{d\tau} + \sin(\psi_N - \psi_{N-1}) = \sin(\psi_{N-1} - \psi_{N-2}) \end{array} \right. \quad (8.2)$$

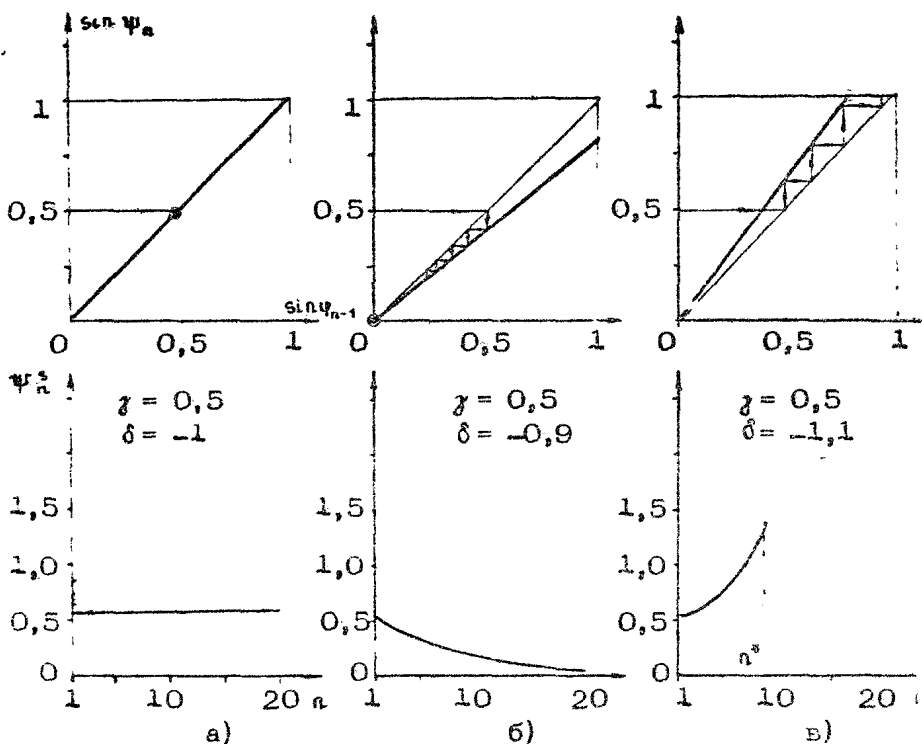
Вводя теперь в качестве переменной межкаскадную разность фаз  $\psi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$  и граничное условие  $\psi_0 = 0$ , получаем

$$\frac{d\psi_n}{d\tau} + \sin \psi_n = \gamma_n + \sin \psi_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (8.3)$$

$$\gamma_n = \begin{cases} \gamma, & n = 1, \\ 0, & n = \overline{2, N}, \end{cases} \quad \psi_0 = 0$$

Полученная модель (8.3) является частным случаем рассмотренной ранее модели потоковой цепочки (2.3) (при коэффициенте связи  $\delta = -1$  и неоднородном распределении  $\gamma_n$ ).

Стационарные решения (8.3) находятся достаточно просто. Режим синхронизации всей цепочки существует при  $\gamma < 1$ , при этом устанавливается постоянное значение межкаскадной разности фаз  $\psi_n^s = \arcsin \gamma$  (т. е.  $\psi_n^s = n \arcsin \gamma$ ) (рис. 8.2, а). Таким образом, в каскадной цепочке СФС устанавливается режим полной синхронизации всех элементов с постоянным сдвигом по фазе вдоль цепочки. По существу, за счет того, что коэффициент связи  $\delta = -1$ , в выражении (8.3) стационарное распределение  $\psi_n$  описывается вырожденным отображением  $f \left\{ \sin \psi_n = \sin \psi_{n-1} \right\}$ , приво-



Р и с. 8.2

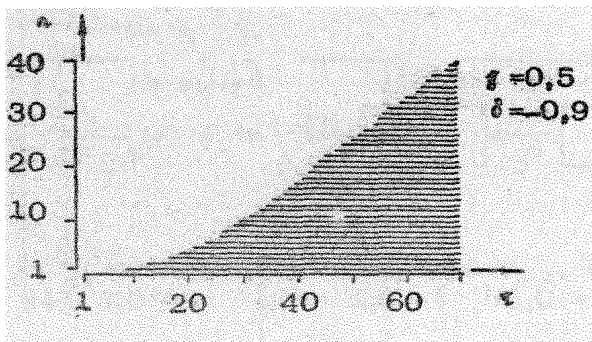
дходим к пространственно однородному решению  $\psi_n^s = \cos \alpha \tau$  (конкретное значение константы определяется величиной  $\gamma$ ).

Обратим внимание на то, что значение параметра  $\delta = -1$  является бифуркационным и при  $\delta \neq -1$  пространственная однородность распределения  $\psi_n^s$  отсутствует. Действительно, для иллюстрации рассмотрим систему, отличающуюся от (8.3) наличием коэффициента связи  $\delta = -0,9$ :

$$\frac{d\psi_n}{d\tau} + \sin \psi_n = \gamma_n + 0,9 \sin \psi_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (8.4)$$

$$\gamma_n = \begin{cases} \gamma, & n = 1, \\ 0, & n = \overline{2, N}, \end{cases} \quad \psi_0 \equiv 0$$

Здесь стационарный режим синхронизации определяется отображением  $f: \{\sin \psi_n = 0,9 \sin \psi_{n-1}\}$  (рис. 8.2, б), и, следовательно, распределение  $\psi_n^s$  вдоль цепочки носит затухающий характер при стремлении к значению  $\overline{\psi^s} = 0$ . Если же



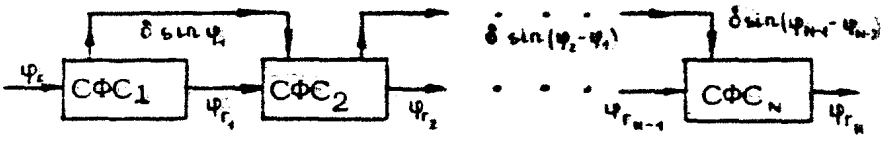
Р и с. 8.3

взять коэффициент связи  $|\delta| > 1$  (например,  $\delta = 1,1$  - рис. 8.2,в), то распределение  $\psi_n^*$  вдоль цепочки нарастает, и при достаточно длинной цепочке всегда найдется номер  $n^*$  такой, что при  $n > n^*$  произойдет срыв синхронизации, и во всех последующих элементах будет асинхронный режим, усложняющийся с ростом  $n$ . Вычисление пространственной полосы синхронизации  $\tau = \tau_{\text{синхр}}(n^*, \delta)$  можно сделать так же, как в гл. 2.

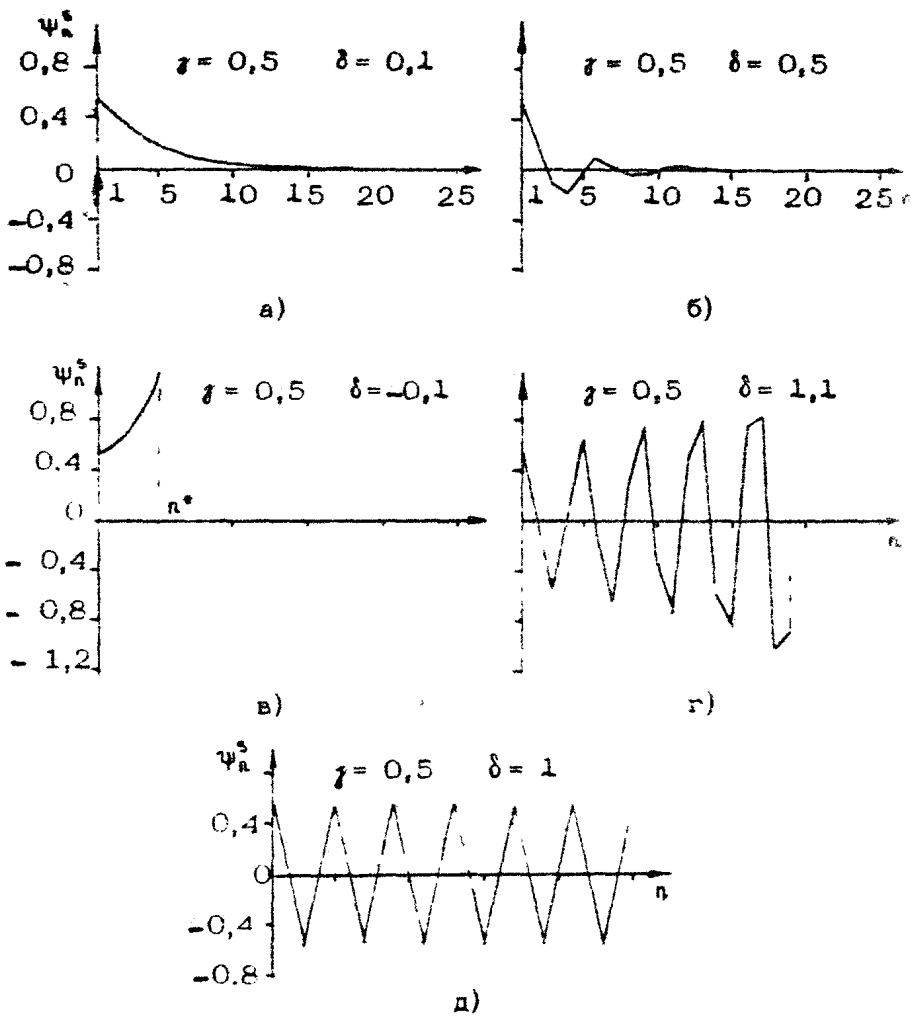
Анализ характера и длительности переходных процессов в цепочке можно вести по пространственно-временным диаграммам. Для примера на рис. 8.3 дана пространственно-временная диаграмма, иллюстрирующая динамику процесса установления стационарного режима синхронизации для системы (8.4) при  $\tau = 0,5$  (как и ранее, состояние синхронизации для каждой СФС  $n$  фиксировалось по критерию  $\psi_n = 0$  и отмечалось в фиксированные моменты времени  $\tau$  точкой на диаграмме, соседние точки соединялись отрезками прямых). Из рис. 8.3 следует, что длительность переходных процессов в цепочке, в силу погоковых свойств, существенно превышает длительность переходных процессов в одиночной парциальной СФС.

С точки зрения управления динамическими свойствами каскадной цепочки может оказаться интересным введение дополнительных межкаскадных связей. Следуя [74], рассмотрим вариант каскадной цепочки с дополнительными связями "вперед" по цепочке через управляющие сигналы (рис. 8.4). Уравнение такой цепочки при сохранении сделанных ранее предположений можно записать в виде





Р и с. 8.4



Р и с. 8.5



автоподстройки, т. е. системы автоматической синхронизации с управлением по частоте.

## 8.2. Волновые свойства цепочки систем синхронизации с управлением по частоте

Рассмотрим особенности нелинейной динамики цепочек синхронизации, элементами которых являются системы ЧАП (см. гл. 1). Интерес к изучению коллективной динамики таких систем связан не только с радиотехническими приложениями, но, по-видимому, и с возможностью использования таких цепочек для моделирования процессов возбуждения нейрноподобных сред [75].

Будем считать, что цепочку образуют системы ЧАП, соединенные параллельно так, что связи между соседними элементами осуществляются путем обмена управляющими сигналами. В этом случае, учитывая (1.4) и (1.6) и полагая цепочку однородной, можно записать ее уравнения в виде

$$\dot{\tau}_n + K(\rho)\Phi(\tau_n) = \gamma - \delta K(\rho)\Phi(\tau_{n-1}) - \varepsilon K(\rho)\Phi(\tau_{n+1}), \quad (8.6)$$

где  $\tau_n = \omega_n / \Omega$  — безразмерное текущее отклонение частоты генератора в  $n$ -й парциальной системе ЧАП от некоторой номинальной частоты,  $\delta$  и  $\varepsilon$  — коэффициенты связей между элементами цепочки, остальные обозначения аналогичны обозначениям в уравнении (1.4). В простейшем случае интегрирующих фильтров  $K(\rho) = 1/(1+\rho)$ , вводя безразмерное время  $\tau = t/T$ , вместо (8.6) имеем

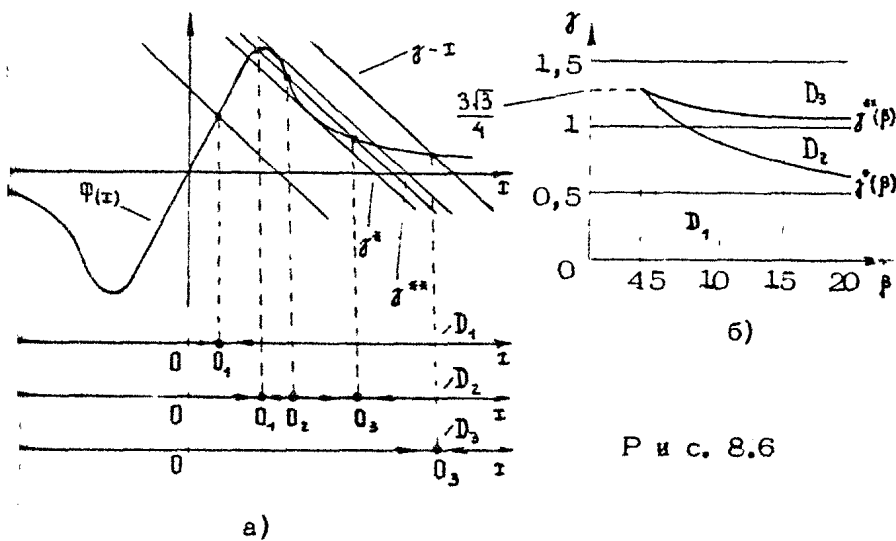
$$\frac{d\tau_n}{d\tau} + \tau_n + \Phi(\tau_n) = \gamma - \delta\Phi(\tau_{n-1}) - \varepsilon\Phi(\tau_{n+1}) \quad (8.7)$$

Анализ цепочки (8.7) системы ЧАП можно осуществить с помощью методики, применяемой в гл. 2 — 4 для цепочки фазовой синхронизации.

Прежде всего рассмотрим случай отсутствия связей ( $\delta, \varepsilon = 0$ ). Динамика каждой парциальной системы ЧАП описывается хорошо известным в теории колебаний [7, 11] уравнением

$$\frac{d\tau}{d\tau} + \varepsilon + \Phi(\tau) = \gamma. \quad (8.8)$$

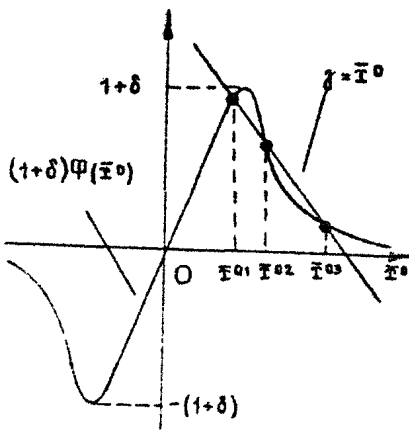
На рис. 8.6,а представлены фазовые портреты для уравнения (8.3) и на рис. 8.6,б – разбиение плоскости параметров  $(\beta, \gamma)$  на области  $D_1, D_2, D_3$  соответствующие различным режимам работы [76]. Заметим, что хотя фазовые портреты для областей  $D_1$  и  $D_3$  качественно одинаковы (одно устойчивое состояние равновесия  $0_1$  или  $0_3$ ), имеет смысл различать эти области, поскольку фазовый портрет для  $D_1$  соответствует эффективному режиму подстройки частоты (с малой остаточной расстройкой по частоте), а для области  $D_3$  – неэффективному (остаточная расстройка по частоте близка к расстройке в разомкнутой системе). Приведенные на рис. 8.6,б графики даны для конкретного вида нелинейности  $\Phi(x) = 2\beta x / (1 + \beta^2 x^2)$ , где  $\beta$  – положительный параметр, регулирующий ширину линейного участка характеристики  $\Phi(x)$ . Бифуркационные кривые  $\gamma = \gamma^*(\beta)$  и  $\gamma = \gamma^{**}(\beta)$  соответствуют слиянию неустойчивого состояния равновесия  $0_2$  с устойчивыми  $0_1$  и  $0_3$  соответственно.



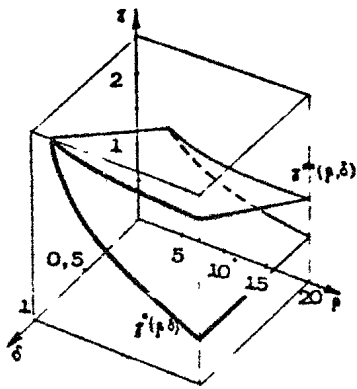
Р и с. 8.6

Рассмотрим частный случай погодовой цепочки, т. е.  $\neq 0, \alpha = 0$ . Граничные условия  $x_0(t) \equiv 0$ . Стационарное состояние цепочки (8.7) в этом случае будет определяться уравнениями

$$x_n + \Phi(x_n) = \gamma - \delta \Phi(x_{n-1}) \quad (8.9)$$



Р и с. 8.7



Р и с. 8.8

Отображение (8.9) не всегда однозначно, и, в общем случае, может иметь три неподвижные точки  $\bar{\tau}^{01}, \bar{\tau}^{02}, \bar{\tau}^{03}$ , определяемые из условия

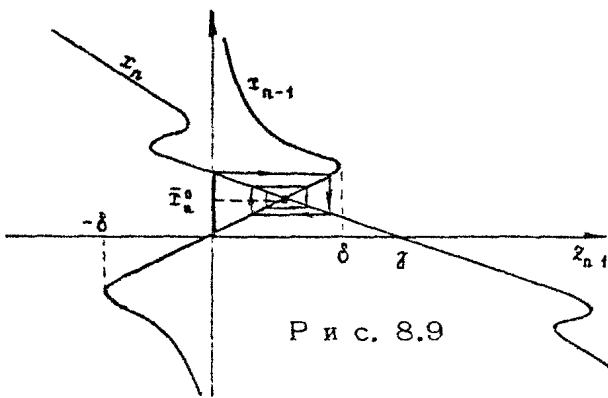
$$\gamma - \bar{\tau}^0 = (1+\delta)\Phi(\bar{\tau}^0) \quad (8.10)$$

Получение координат неподвижных точек поясняет рис. 8.7. Анализируя количество корней уравнения (8.10), можно получить, что условием на параметры  $\gamma, \beta, \delta$ , при котором существуют три неподвижные точки, является неравенство

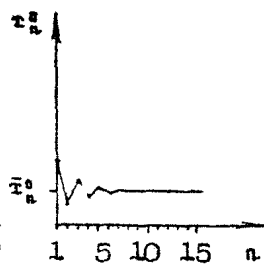
$\gamma^*(\beta, \delta) < \gamma < \gamma^{**}(\beta, \delta)$ . Для параметров  $\gamma < \gamma^*(\beta, \delta)$  и  $\gamma > \gamma^{**}(\beta, \delta)$  существует одна неподвижная точка. Уравнения поверхностей  $\gamma^*(\beta, \delta)$  и  $\gamma^{**}(\beta, \delta)$  имеют вид

$$\gamma^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta(1+\delta) - 1 + \sqrt{\beta(1+\delta)[\beta(1+\delta) - 4]}} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\beta(1+\delta)}{\beta(1+\delta) + \sqrt{\beta(1+\delta)[\beta(1+\delta) - 4]}} \right\}, \quad (8.11)$$

$$\gamma^{**} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta(1+\delta) - 1 - \sqrt{\beta(1+\delta)[\beta(1+\delta) - 4]}} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\beta(1+\delta)}{\beta(1+\delta) - \sqrt{\beta(1+\delta)[\beta(1+\delta) - 4]}} \right\}. \quad (8.12)$$



Р и с. 8.9

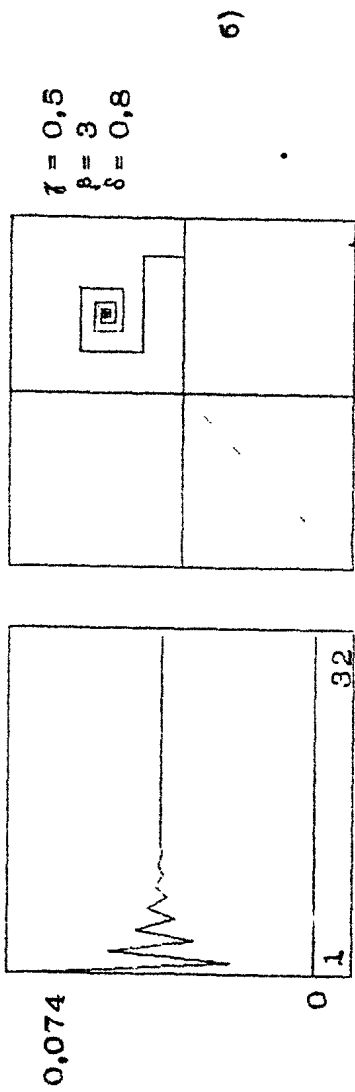
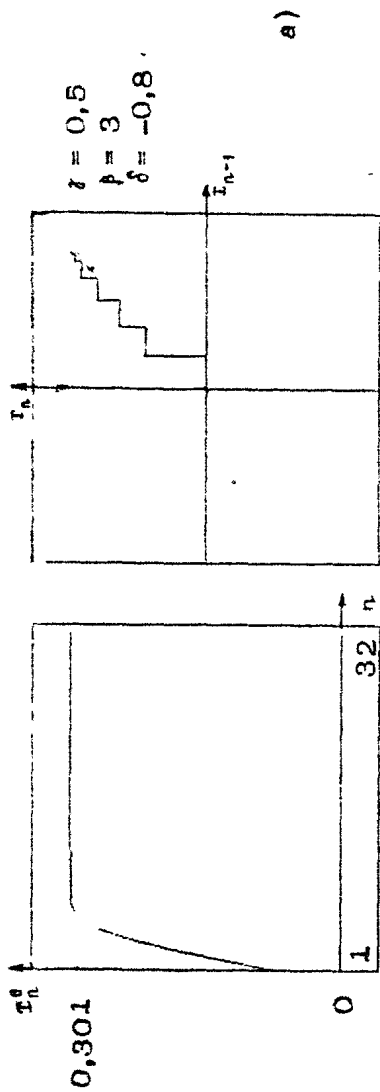


Р и с. 8.10

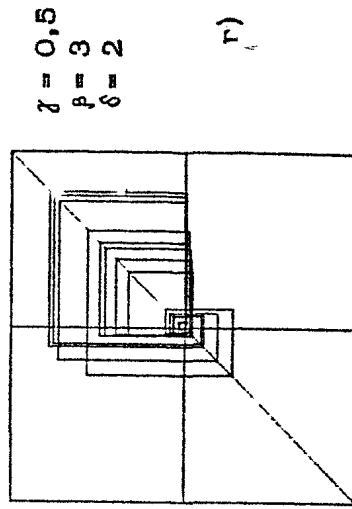
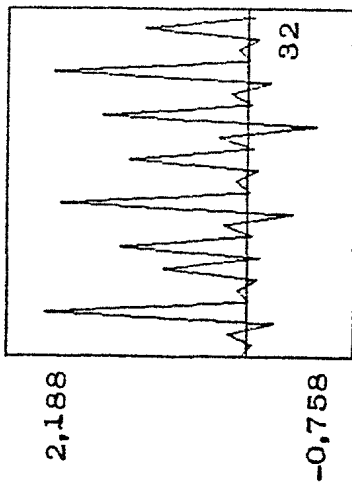
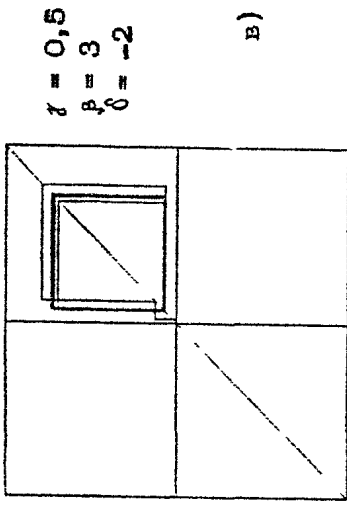
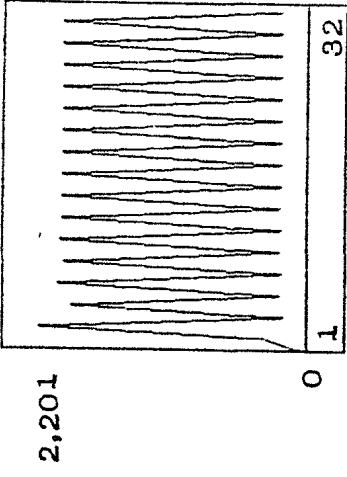
Расположение этих поверхностей в пространстве  $\delta, \beta, \gamma$  иллюстрирует рис. 8.8.

Для получения стационарного распределения остаточных расстройек по частоте  $\tau_n^0$  вдоль цепочки необходимо проанализировать возможные траектории отображения (8.9). Представим (8.9) в виде произведения  $f = f_1 \cdot f_2$  двух отображений  $f = \{z_{n-1} = \delta \Phi(\tau_{n-1})\}$  и  $f_2 = \{\gamma - \tau_n - \Phi(\tau_n) = z_{n-1}\}$ . Выполняя построение  $f_1$  и  $f_2$  на одной плоскости  $(\tau_n, z_{n-1})$ , можно получить и траектории отображения (8.9). На рис. 8.9 дан пример построения траектории отображения (8.9) для случая, когда имеется одна неподвижная точка (при начальном условии  $\tau_n = 0$ ). Соответствующее такой траектории отображения (8.9) стационарное распределение разностей частот  $\tau_n^0$  вдоль цепочки показано качественно на рис. 8.10.

Аналогичным образом можно провести построение траекторий отображения (8.9) и в других возможных случаях (в том числе случая трех неподвижных точек). При этом в силу неоднозначности отображения (8.9) траектории, вообще говоря, определяются неоднозначно. Однако следует учесть то обстоятельство, что параметр  $\gamma$  в системе ЧАП по физическому смыслу представляет собой начальное значение переменной  $\tau_n$ . Это позволяет однозначно определить устанавливаемое состояние парциальных систем ЧАП без связей (при  $\gamma < \gamma^*$  - состояние  $0_1$ , см. рис. 8.6,а; при  $\gamma > \gamma^*$  - состояние  $0_3$ ), а затем учесть влияние связей и однозначно построить отображение (8.9). На рис. 8.11 представлены результаты построения на ЭВМ для цепочки  $N = 30$  стационарных распределений частотных расстройек  $\tau_n^0$  вдоль

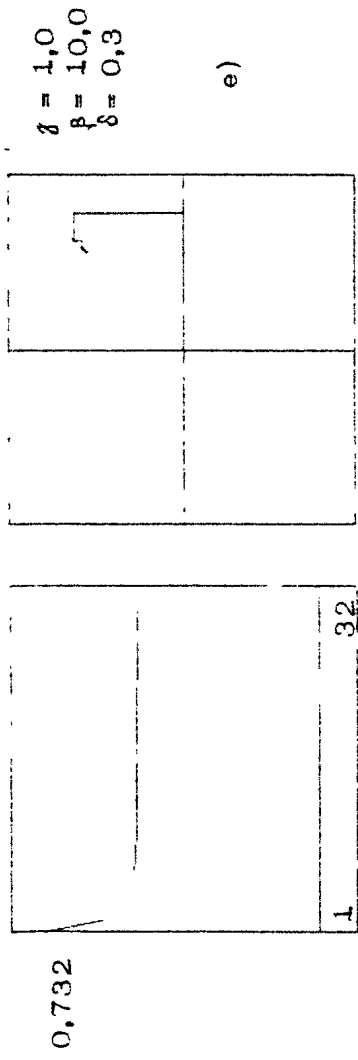
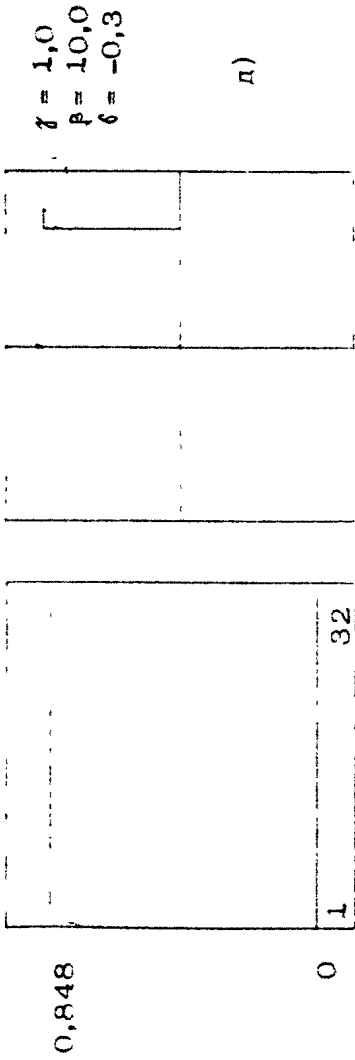


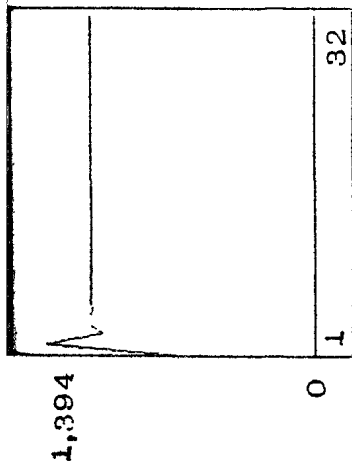
Р и с 8.11.



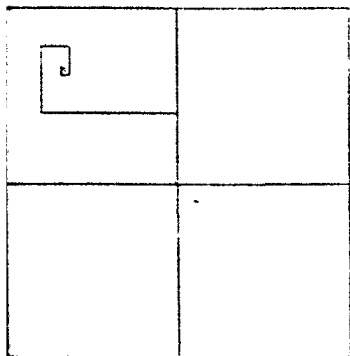
Р и с. 8.11 Начало.



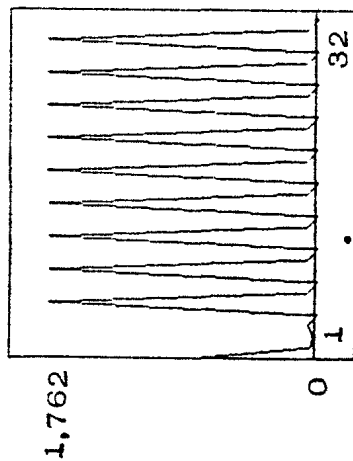




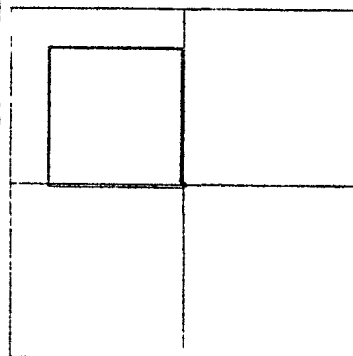
$$\begin{aligned} \gamma &= 1,0 \\ \rho &= 10,0 \\ \delta &= -2 \end{aligned}$$



ж)

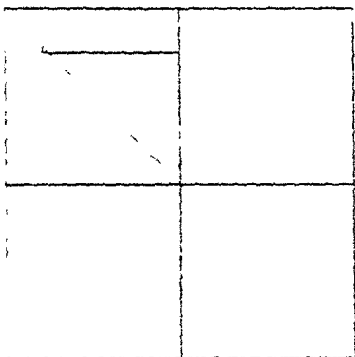


$$\begin{aligned} \gamma &= 1,0 \\ \rho &= 10 \\ \delta &= 2 \end{aligned}$$



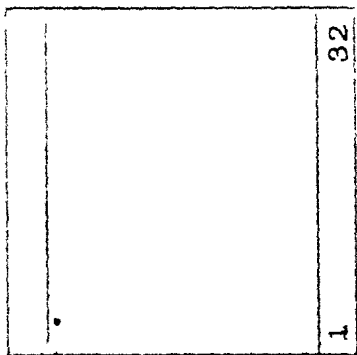
з)

Р и с. 8.1.1. Продолжение.

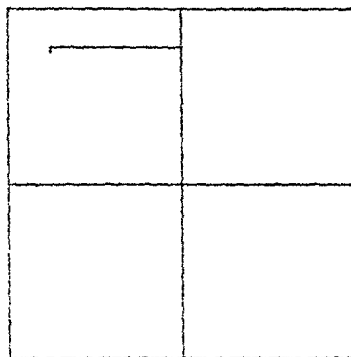


$\gamma = 1,5$   
 $\beta = 10$   
 $\delta = -0,3$

к)

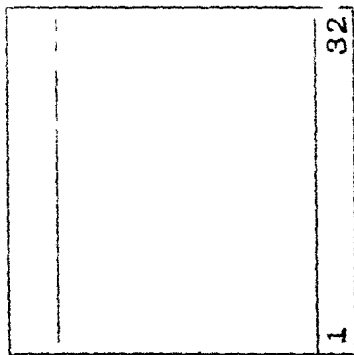


1,402

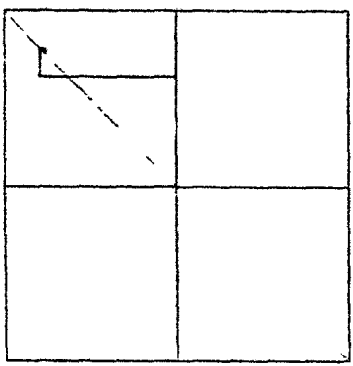
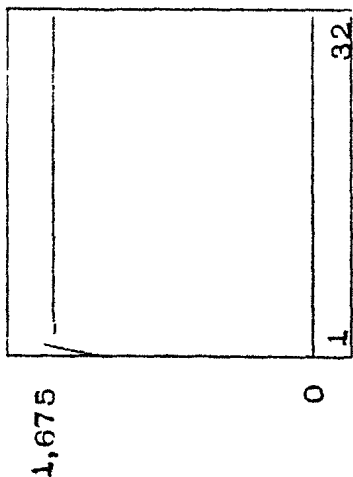


$\gamma = 1,5$   
 $\beta = 10$   
 $\delta = 0,3$

к)



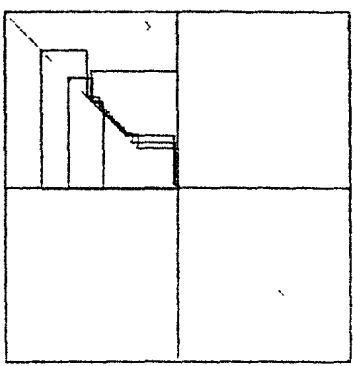
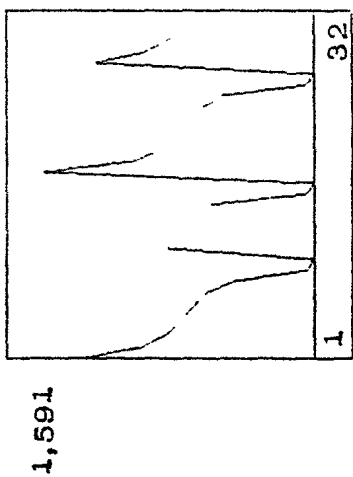
1,353



$\gamma = 1,5$   
 $\beta = 10$   
 $\delta = -2$

л)

0



$\gamma = 1,5$   
 $\beta = 10,0$   
 $\delta = 2,0$

м)

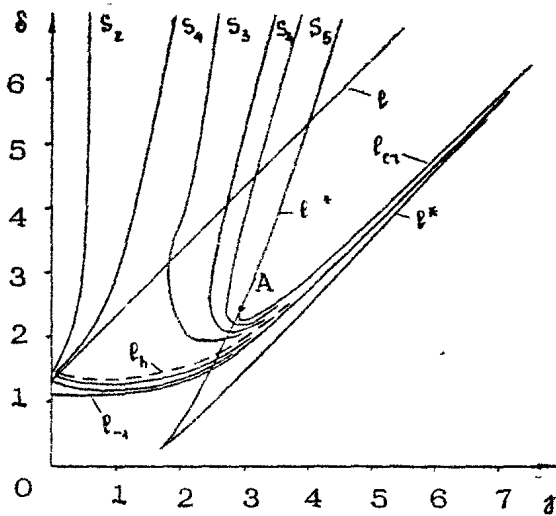
Р и с. 8.11. Окончание.

цепочки при разных значениях параметров и соответствующих им отображений (8.9). (Здесь отображения построены непосредственно на плоскости  $(\tau_{n-1}, \tau_n)$ ). Анализ рис. 8.11 показывает, что кроме стационарного режима эффективной синхронизации с устанавливающейся вдоль цепочки разностью частот  $\tau_n^0$ , стремящейся с ростом  $n$  к значению  $\bar{\tau}^{01}$ , в цепочке систем ЧАП может существовать как режим неэффективной синхронизации с разностью частот  $\tau_n^0$ , стремящейся к  $\bar{\tau}^{03}$ , так и режим сложного распределения разности частот  $\tau_n^0$  вдоль цепочки, которое при некоторых значениях параметров является пространственно хаотическим.

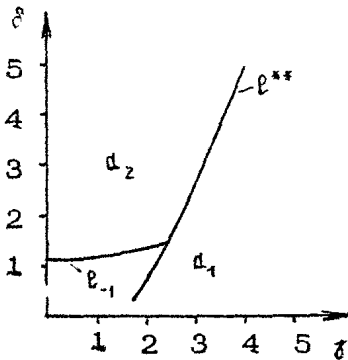
Поясним этот момент более детально. На рис. 8.12,а для  $\beta = 3$  на плоскости  $(\gamma, \delta)$  представлена бифуркационная диаграмма отображения (8.9)\*. Линии  $\rho^*$  и  $\rho^{**}$ , определяемые выражениями (8.11), выделяют на плоскости  $(\gamma, \delta)$  область в виде "клюва". Вне этой области отображение (8.9) имеет одну, а внутри — три неподвижные точки:

$\tau = \bar{\tau}^{01}$ ,  $\bar{\tau}^{02}$ ,  $\bar{\tau}^{03}$  ( $\bar{\tau}^{01} < \bar{\tau}^{02} < \bar{\tau}^{03}$ ). Точка  $\tau = \bar{\tau}^{03}$  устойчива, а  $\tau = \bar{\tau}^{02}$  неустойчива при всех значениях параметров. Неподвижная точка  $\tau = \bar{\tau}^{01}$  в зависимости от параметров может быть как устойчивой (область ниже линии  $\rho_{-1}$ ), так и неустойчивой (область выше линии  $\rho_{-1}$ ). Причем в области параметров ниже  $\rho_{-1}$  и вне "клюва" точка  $\tau = \bar{\tau}^{01}$  является глобально асимптотически устойчивой. Смена устойчивости точки  $\tau = \bar{\tau}^{01}$  сопровождается рождением устойчивого 2-периодического движения  $L$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\delta$  происходит каскад бифуркаций удвоения периода движения  $L$ , в результате которых динамика отображения (8.9) становится нерегулярной (линия  $\rho_h$  на рис. 8.12,а). При значениях параметров из области, ограниченной линиями  $\rho_h$ ,  $\rho_{c^*}$  и  $\rho^{**}$ , отображение (8.9) демонстрирует стохастическую динамику. При этом на части  $\rho^{**}$ , выделяющей эту область, происходит внутренняя бифуркация странного аттрактора. Точкам линии  $\rho^*$  отвечает ситуация, когда внутри области начальных условий, принадлежащих странному аттрактору, рождается пара неподвижных точек  $\tau = \bar{\tau}^{02}$  и  $\tau = \bar{\tau}^{03}$ ; одна из этих точек —  $\tau = \bar{\tau}^{03}$  — устойчива, и после бифуркации притягивает большинство траекторий отображения (8.9). На линии же  $\rho_{c^*}$  образуется поглощающая область, определяемая критической и неподвижной точками отображения:

\* Диаграмма получена совместно с Н.Ф.Рульковым.



а)



$d_1$  - область устойчивой неподвижной точки  
 $d_2$  - область периодических и стохастических движений

б)

Р и с. 8.12

критическая точка итерируется в неустойчивую неподвижную точку  $\tau = \bar{\tau}^{02}$  (при выходе из области хаоса происходит кризис странного аттрактора). В области параметров, ограниченной линиями  $l_{c1}$  и  $l^{**}$  (выше точки  $A$ ), точка  $\tau = \bar{\tau}^{03}$  притягивает почти все траектории отображения (8.9). В области параметров, ограниченной осью  $\tau = 0$ , линиями  $l_h$  и  $l^{**}$ , отображение (8.9) может демонстрировать как регулярную, так и хаотическую динамику. Для этой области характерно наличие чередующихся между собой "слоев", отвечающих регулярным (периодическим) и хаотическим колебаниям. Область

содержит линии  $S_i$ , точкам которых соответствуют суперустойчивые циклы (циклы с мультипликаторами равными нулю). Причем линии  $S_i$  отвечает цикл периода  $i$ . Прямая  $\ell: \{\delta = 1 + \gamma + \beta^{-1}\}$  делит эту область на две части. Для точек ниже прямой  $\ell$  характерно то, что максимум функции последования не принадлежит области аттрактора и за развитие хаоса "отвечает" только минимум. Выше  $\ell$  линии  $S_i$  пересекаются с линиями суперциклов (они на рис. 8.12,а не изображены), "сформированными" максимумом функции последования. Заметим, что перечисленные бифуркационные линии не исчерпывают всего бифуркационного множества отображения (8.9), которое может содержать и другие элементы.

Вернемся теперь к исходной задаче о распределении вдоль цепочки стационарной разности частот  $\tau_n^0$ . Поскольку выполняется граничное условие  $\tau_0 = 0$ , то искомое распределение задается куском дискретной траектории длиной  $N$  с нулевым начальным условием. Поэтому не все бифуркационные линии важны в этом случае. Нетрудно видеть, что плоскость  $(\gamma, \delta)$  линиями  $\ell_{-1}$  и  $\ell^{**}$  делится на две основные области (см. рис. 8.12,б). Для точек области  $d_1$  характер распределения  $\tau_n^0$  качественно такой, как на рис. 8.10. При значениях же параметров из области  $d_2$  распределение  $\tau_n^0$  имеет либо хаотический, либо периодический характер.

Изучение устойчивости стационарных режимов  $\tau_n^0$  сводится к нахождению корней характеристического уравнения, отвечающего определителю:

$$\begin{vmatrix} -1 - \Phi'(\tau_1^0) - \rho & 0 & 0 & 0 \\ -\delta \Phi'(\tau_1^0) & -1 - \Phi'(\tau_2^0) - \rho & 0 & 0 \\ 0 & -\delta \Phi'(\tau_2^0) & -1 - \Phi'(\tau_3^0) - \rho & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\delta \Phi'(\tau_{N-1}^0) & -1 - \Phi'(\tau_N^0) - \rho \end{vmatrix} \quad (8.10)$$

Отсюда  $\rho_1 = -1 - \Phi'(\tau_1^0)$ ,  $\rho_N = -1 - \Phi'(\tau_N^0)$ . Следовательно, устойчивость стационарных режимов имеет место при условии  $1 + \Phi'(\tau_n^0) > 0$ .

Перейдем теперь к рассмотрению цепочки систем ЧАП с связями через сигналы частотных рассогласований. В этом случае между соседними каналами должны быть включены дополнительные частотные дискриминаторы, вырабатывающие сигналы, зависящие от разности частот соседних каналов,

г. е. от частотных рассогласований. Уравнение такой цепочки запишем в виде

$$\frac{d\tau_n}{d\tau} + \tau_n + \Phi(\tau_n) = \gamma - \delta \Phi_p(\tau_n - \tau_{n-1}) - \varepsilon \Phi_p(\tau_n - \tau_{n+1}), \quad (8.14)$$

где  $\Phi_p \{ \}$  - нормированная характеристика дискриминаторов рассогласований в каналах связи. Предположим, что коэффициенты связи равны ( $\delta = \varepsilon$ ) и дискриминаторы в каналах связи имеют достаточно широкую линейную часть. Принимая приближенно  $\Phi_p(\tau_n - \tau_{n-1}) = \alpha(\tau_n - \tau_{n-1})$  и  $\Phi_p(\tau_n - \tau_{n+1}) = \alpha(\tau_n - \tau_{n+1})$ , запишем (8.14) в виде

$$\frac{d\tau_n}{d\tau} + \tau_n + \Phi(\tau_n) = \gamma + \kappa(\tau_{n+1} + \tau_{n-1} - 2\tau_n), \quad (8.15)$$

где  $\kappa = \alpha\delta = \alpha\varepsilon$

Система уравнений (8.15) представляет интерес для исследования не только как приближенная модель цепочки систем ЧАП, но еще и как модель одномерной нейрородной среды [75].

Введем обозначение  $F(\tau_n) = \gamma - \tau_n - \Phi(\tau_n)$ . Нелинейность  $F(\tau_n)$  имеет N-образную форму (рис. 8.13). Система (8.15) принимает вид

$$\frac{d\tau_n}{d\tau} = \kappa(\tau_{n+1} - \tau_{n-1} - 2\tau_n) + F(\tau_n) \quad (8.16)$$

Модель (8.16) в предположении безграничности цепочки совпадает с моделями, описывающими одномерную нейрородную среду с диффузией [52]. Проанализируем динамику цепочки (8.16).

Как известно [52], основными решениями непрерывной модели одномерной, однокомпонентной, безграничной, возбудимой среды с диффузией являются решения, соответствующие бегущим фронтам (БФ) и стационарным пространственно однородным состояниям (в такой модели существуют также пространственно неоднородные состояния, но они неустойчивы). Рассмотрим вопрос о существовании аналогичных решений в дискретной модели (8.16).

Будем искать решение системы (8.16) в виде бегущей волны:



$$x_n = \Psi(\xi_n), \quad \xi_n = \alpha a - c\tau + l_0, \quad (8.17)$$

где  $c$  – скорость искомой волны;  $l_0$  – произвольная постоянная, а  $\Psi(\xi_n)$  – произвольная достаточно гладкая функция. Подставляя (8.17) в систему (8.16), получим

$$-c \frac{d\Psi(\xi_n)}{d\xi_n} = \kappa \left[ \Psi(\xi_n + a) + \Psi(\xi_n - a) - 2\Psi(\xi_n) \right] + F[\Psi(\xi_n)] \quad (8.18)$$

Считая  $a$  малым параметром, положим в уравнении (8.18)

$$\frac{d\Psi(\xi_n)}{d\xi_n} \sim \frac{\Psi(\xi_n + a) - \Psi(\xi_n)}{a}, \quad \Psi(\xi_n) = \psi_n \quad (8.19)$$

Тогда уравнение (8.18) примет вид

$$(\kappa a + c)\psi_{n+1} + \kappa a \psi_{n-1} - (2\kappa a + c)\psi_n + a F(\psi_n) = 0 \quad (8.20)$$

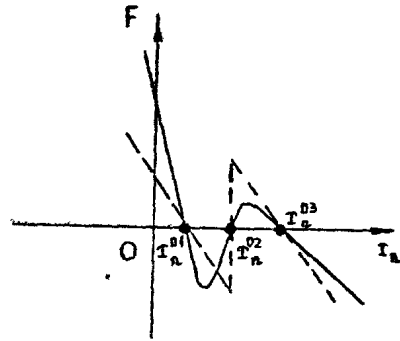
Вводя новую переменную  $z_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ , представим уравнение (8.20) в виде точечного отображения:

$$f \begin{cases} \psi_{n+1} = \psi_n + \frac{a}{\kappa a + c} [\kappa z_n - F(\psi_n)], \\ z_{n+1} = \frac{a}{\kappa a + c} [\kappa z_n - F(\psi_n)] \end{cases} \quad (8.21)$$

Отображение  $f$  порождает динамическую систему, некоторые дискретные траектории которой определяют искомые волновые движения системы (8.16). Стационарным пространственно однородным состояниям соответствуют неподвижные точки  $f$ , а пространственно неоднородным – траектории  $f$  в случае  $c = 0$ . Бегущему фронту модели (8.16) отвечает дискретная траектория отображения  $f$ , “соединяющая” неподвижные точки. Заметим, что в силу перехода (8.19) построенное ниже с помощью отображения  $f$  решение системы (8.16), соответствующее БФ, является приближенным, а решения, отвечающие стационарным состояниям, являются точными, поскольку при их нахождении (8.19) не используется.

Отображение  $f$  имеет три неподвижные точки:  $U_1(\bar{x}^{01}, 0)$ ,  $U_2(\bar{x}^{02}, 0)$  и  $U_3(\bar{x}^{03}, 0)$ . Следовательно, в дискретной модели (8.16) существуют три стационарных пространственно однородных состояния, отвечающих этим точкам. Точки  $U_1$  и  $U_3$  – седла с положительными собственными числами, а  $U_2$ , в зависимости от параметров, – либо устойчивый фокус

(узел), либо обратное седло. Бегущему фронту модели (8.16) соответствует гетероклиническая траектория отображения  $f$ , "соединяющая"  $Q_1$  и  $Q_3$ . Далее рассмотрим существование таких траекторий в предположении кусочно-линейной аппроксимации функции  $F(y_n)$  (см. пунктирную линию на рис. 8.13):



Р и с. 8.13

$$F(y_n) = \begin{cases} -2y_n - \beta, & y_n < 1/2, \\ -2(y_n - 1) - \beta, & y_n > 1/2 \end{cases}$$

Заметим, что отображение  $f$  в этом случае становится разрывным. Ниже будут изучаться только те дискретные траектории этого отображения, которые не попадают в множество разрыва  $\{y_n = 1/2\}$ . Поэтому доопределение  $f$  на множестве разрыва здесь не производится.

Множество разрыва  $\{y_n = 1/2\}$  делит плоскость  $(y_n, z_n)$  на две части:

$$P_1 : \{y_n < 1/2, z_n \in \mathbb{R}\}, \quad P_2 : \{y_n > 1/2, z_n \in \mathbb{R}\}.$$

Отображение  $f$  на  $P_1$  обозначим через  $f_1$ , а на  $P_2$  — через  $f_2$ . Запишем уравнения выходящих  $W^u$  и входящих  $W^s$  сепаратрисных инвариантных прямых неподвижных точек

$$W_1^u : \{z = s_1(y + \beta/2)\}, \quad W_1^s : \{z = s_2(y + \beta/2)\}, \quad (8.22)$$

$$W_3^u : \{z = s_1(y + \beta/2 - 1)\}, \quad W_3^s : \{z = s_2(y + \beta/2 - 1)\},$$

где

$$s_{1,2} = (2\alpha\kappa)^{-1} [-(c+2\alpha) \pm \sqrt{(c+2\alpha)^2 + 8\alpha^2\kappa}].$$

Обозначим через  $Q_0$  точку, имеющую координаты  $y_0 = 1/2, z_0 = (\beta/2)(1 + \beta)$ , а через  $y_0^{-1}, z_0^{-1}$  — координаты точки  $Q_0^{-1} = f_1^{-1}(Q_0)$  (рис. 8.14). Кроме того, введем интервал  $I \subset W_1^u$ .

$$I^u : \{z = s_1(y + \beta/2); \quad y_0^{-1} < y < 1/2\}$$

Непосредственной подстановкой в формулу (8.21) устанавливаем, что  $P_2 = P_1^u = f_1(P^u)$ . Для точек области параметров

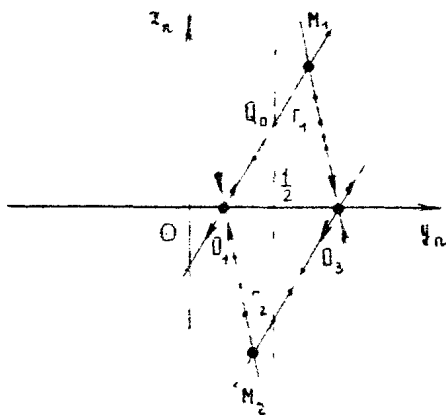
$$d_1 = \left\{ \beta_1(c, a, \kappa) \leq \beta \leq \beta_2(c, a, \kappa), c \geq 0 \right\},$$

$$\beta_1(c, a, \kappa) = (c + 2a) \left[ (c + 2a)^2 + 8\kappa a^2 \right]^{-1/2},$$

$$\beta_2(c, a, \kappa) = \frac{2(\kappa a + c) \left[ (c + 2a) + \sqrt{(c + 2a)^2 + 8\kappa a^2} \right]}{\sqrt{(c + 2a)^2 + 8\kappa a^2} \left[ (c + 2a) + \sqrt{(c + 2a)^2 + 8\kappa a^2} + 2\kappa a \right]}^{-1},$$

сепаратриса  $W_3^s$  точки  $O_3$  пересекается трансверсально с интервалом  $P_1^u$  в точке  $M_1 \in P_2$  (см. рис. 8.14). Следовательно, для этих значений параметров на плоскости  $(y_n, z_n)$  существует грубая гетероклиническая траектория  $\Gamma_1$  отображения  $\tau$ , соединяющая точки  $O_1$  и  $O_3$ . Качественный вид

области  $d_1$  в плоскости  $(\beta, c)$  представлен на рис. 8.15.



Р и с. 8.14

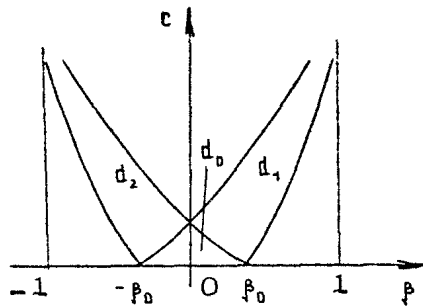
Обратим внимание на то, что траектория  $\Gamma_1$  существует как при  $c > 0$ , так и при  $c = 0$ . Существование траектории  $\Gamma_1$  при  $c > 0$  означает, что в дискретной модели (8.16) вдоль цепочки с постоянной скоростью  $c$  распространяется БФ, профиль которого качественно представлен на рис. 8.16,а. При  $c = 0$  точки траектории  $\Gamma_1$  задают профиль стационарного пространственно неоднородного состояния модели (8.16).

Аналогичная ситуация имеет место и в отношении сепаратрисных инвариантных прямых  $W_1^s$  точки  $O_1$  и  $W_3^u$  точки  $O_3$ , выходящих в область  $z_n < 0$ . При значениях параметров из области  $d_2 = \left\{ -\beta_1(c, a, \kappa) \leq \beta \leq -\beta_2(c, a, \kappa), c \geq 0 \right\}$  они пересекаются трансверсально в точке  $M_2$  (см. рис. 8.14), образуя гетероклиническую траекторию  $\Gamma_2$ . Этой траектории соответствует БФ дискретной модели (8.16), имеющий профиль, представленный на рис. 8.16,б.

Заметим, что переход в плоскости параметров  $(\beta, c)$  внутри областей  $d_1, d_2$  ( $\beta = \text{const}$ ) сопровождается изменением профиля

БФ. При этом из выражения (8.22) следует, что увеличение параметра  $c$  приводит к его укручению.

На плоскости  $(\beta, c)$  области  $d_1$  и  $d_2$  пересекаются по односвязной области  $d_0 = d_1 \cap d_2$ . Для точек этой области одновременно существуют траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , т. е. существует грубый гетероклинический контур  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Контур  $\Gamma$  соот-

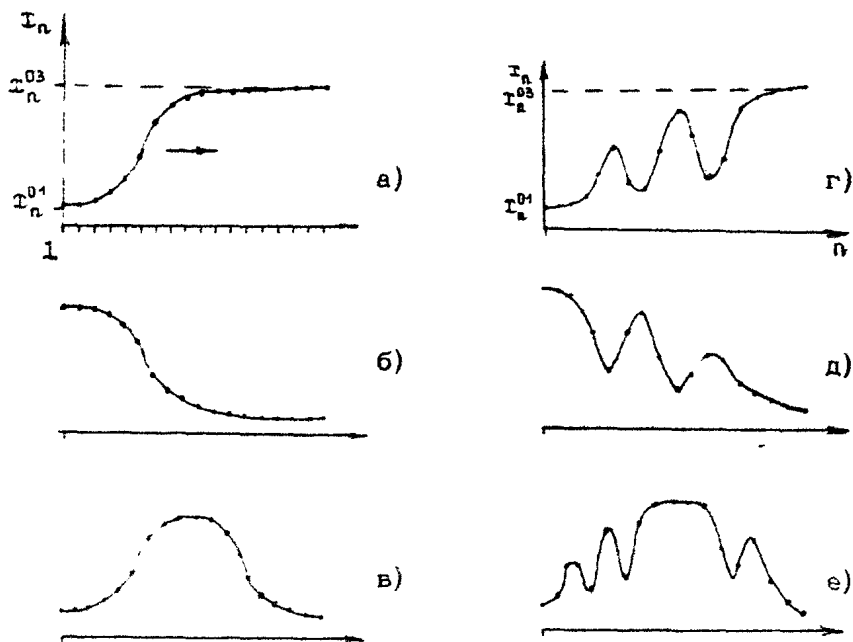


Р и с. 8.15

ветствует БФ, имеющий "импульсный" профиль (рис. 8.16, в). Кроме того, из общей теории (см., например, [77 - 79]) систем с гомоклиническими структурами следует, что в окрестности контура  $\Gamma$  существует счетное число  $\Gamma^n$  грубых гетероклинических траекторий, "соединяющих" точки  $D_1$  и  $D_3$ . При этом траектории  $\Gamma^n$  произвольное число раз обходят окрестность контура  $\Gamma$ . Следовательно, для точек области  $d_0$  в дискретной модели (8.16) могут распространяться БФ, профиль которых содержит произвольное число экстремумов — многогорбые БФ или БФ хаотического профиля. На рис. 8.16, г, д, е качественно представлен вид трех основных типов БФ хаотического профиля. Обратим внимание еще на один существенный момент, отличающий дискретную и непрерывную модели. В дискретной модели спектр скоростей БФ является сплошным, а не дискретным, как в непрерывном случае. Другими словами, если при фиксированном значении  $\beta$  в непрерывной модели имеется единственное значение скорости  $c$  распространения БФ, то в случае дискретной модели (8.16) — целый отрезок скоростей распространения (см. рис. 8.15).

Область параметров  $d_0$  на плоскости  $(\beta, c)$  примыкает к прямой  $c = 0$  на отрезке  $[-\beta_0, \beta_0]$ , где  $\beta_0 = (1 + 2\kappa)^{-1/2}$ . Поэтому при  $c = 0$  и  $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$  на плоскости  $(y_n, z_n)$  существует грубый гетероклинический контур  $\Gamma$ , в окрестности которого имеет место описанное выше поведение траекторий\*. Это означает, что при  $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$  распределение

\* Наличие при значениях параметров из области  $d_0$  грубого гетероклинического контура  $\Gamma$  подтверждает и объясняет обнаруженный [52] в численном эксперименте эффект, состоя-



Р и с. 8.16

вдоль цепочки (8.16) стационарных пространственно неоднородных состояний носит хаотический характер.

При всей общности в поведении дискретной модели возбудимой среды и коллективной системы ЧАП, тем не менее, имеются и некоторые особенности, проявляющиеся в асимптотическом случае  $q \rightarrow 0$ . Это связано с тем, что для первой из них параметр  $k = q^{-2}$ , т. е. зависит от шага дискретизации, а для второй —  $k = \infty$  и является независимым параметром. В случае возбудимой среды при  $q \rightarrow 0$  кривые  $\beta = \pm \beta_1(q, c, k)$  асимптотически сближаются и переходят в кривые  $\beta = \pm c(c^2 + 8)^{-1/2}$ , совпадающие с соответствующей

ший в том, что в дискретной модели (8.16) при  $c = 0$  имеется отрезок значений параметра среды (в нашем случае  $\beta$ ), для точек которого существует неподвижный волновой перепад. Кроме того, из существования контура  $\Gamma$  вытекает, что таких волновых перепадов континуум. (В работе [52], по-видимому, построен один из них).

формулой [52] для БС непрерывной модели. При этом  $\beta_0 = \alpha(\alpha^2 + \gamma^{-1/2})$  и отрезок  $[-\beta_0; \beta_0]$  при  $\alpha \rightarrow 0$  стягивается в точку. В случае модели коллективной системы ЧАП при  $\alpha \rightarrow 0$  кривые  $\beta = \beta_1(t, \sigma, \kappa)$  трансформируются в прямую  $\beta = 1$ , а отрезок  $[-\beta_0; \beta_0]$  в точку не стягивается.

Интерпретируем полученные результаты. Пространственно однородным состояниям модел (8.16) соответствует стационарный режим эффективной или неэффективной синхронизации с одинаковой частотной расстройкой во всех парциальных системах ЧАП. Стационарным пространственно неоднородным состояниям системы (8.16) отвечает стационарный режим синхронизации, но с частотной расстройкой, изменяющейся вдоль цепочки, причем это изменение может носить хаотический характер (смена режимов эффективной и неэффективной синхронизации). При определенных условиях, о которых говорилось выше, вдоль цепочки парциальных систем ЧАП в зависимости от параметров в ту или иную сторону может распространяться с постоянной скоростью БФ. Он приводит все парциальные системы ЧАП в одно и то же пространственно однородное состояние.

Заметим, что реальное моделирование активной среды в виде цепочки систем частотной автоподстройки, безусловно, потребует изучения вопроса о влиянии на динамику конечной длины цепочки. Однако можно надеяться, что при достаточно длинной цепочке элементов основные черты динамики сохранятся.

---

Несмотря на существенные различия рассмотренных здесь цепочек, их динамика, несомненно, обладает весьма схожими чертами – способностью к полной синхронизации цепочек и способностью к нарушению полной синхронизации путем перехода к сложному, в частности, хаотическому режиму. Однако в каскадной цепочке СФС этот процесс качественно аналогичен процессам в цепочках СФС, рассмотренных ранее, и ведет к хаотическому во времени поведению отдельных элементов или всей цепочки. В цепочках систем ЧАП нарушение полной синхронизации может привести к пространственному хаосу. Стационарное, пространственно хаотическое состояние, устанавливающееся в цепочке систем ЧАП, наводит на размышления о возможных аналогиях с "хаотическими кристаллами".

## УСТОЙЧИВОСТЬ И ХАОС В ЦЕПОЧКАХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Модели цепочечных и решеточных сетей синхронизации, рассмотренные в предыдущих главах, представляют собой модели неравновесных сред, характеризующиеся дискретностью по пространственной координате и непрерывностью по времени. Настоящая глава посвящена изучению коллективной динамики однородной цепочки импульсных систем фазовой синхронизации. В этом случае модель среды становится дискретной не только по пространственной координате, но и по времени.

### 9.1. О динамике парциальной системы

Типовая импульсная СФС с идеальным запоминанием в простейшем случае отсутствия фильтра в цепи управления описывается разностным уравнением [12, 50] – см. (1.5):

$$\varphi(k+1) - \varphi(k) + \alpha F(\varphi(k)) = \beta \quad (9.1)$$

Уравнение (9.1) связывает разность фаз  $\varphi$  сигнала подстраиваемого генератора и опорного сигнала в соседние моменты времени  $k$  и  $k+1$ . Здесь  $k = 1, 2, \dots$  соответствует моментам времени  $t = k\tau_0$ ,  $\tau_0$  – период дискретизации;  $F(\varphi)$  – характеристика фазового дискриминатора, нормированная на единицу;  $\beta = \omega_{св} \tau_0$  – начальная расстройка;  $\alpha = \Omega \tau_0$  – параметр цепи управления ( $\alpha, \beta \geq 0$ ). Так как имеет место периодичность по координате  $\varphi$ , то уравнение (9.1) является отображением фазовой окружности на себя.

Дальнейшее исследование проведем для пилообразной характеристики  $F(\varphi)$ , т. е. случая, когда  $F(\varphi) - 2\pi$  – периодическая функция, имеющая на интервале  $[\pi, \pi)$  вид  $F(\varphi) = \varphi/\pi$ . (Для непрерывной  $F(\varphi)$  динамика (9.1) исследовалась в работе [50]). В этом случае отображение (9.1) есть отображение окружности с одной точкой разрыва  $\varphi = \pi$  и его динамика определяется числом вращения  $\beta$ . Сводя (9.1) путем искусственного разрыва окружности по внутренней точке

к отображению отрезка, переходим к известному в литературе классу отображений. Приведем полученные в [80, 81] утверждения относительно (9.1), необходимые в дальнейшем.

Выделим три случая.

1-й с л у ч а й:

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right| < 1 \quad (9.2)$$

Здесь производная отображения меньше единицы – отображение локально сжимающее. Возможны три варианта.

1) При каждом значении  $\beta$  отображение (9.1) имеет единственное притягивающее множество  $\Omega$ , причем для рационального числа вращения  $\beta = p/q$  это множество  $\Omega$  совпадает с единственной притягивающей периодической траекторией периода  $q$ ; для иррационального числа вращения  $\beta$  множество  $\Omega$  – это канторовское притягивающее множество, на котором отображение (9.1) действует подобно повороту (в смысле отношения порядка).

2) При изменении  $\beta$  число вращения  $p$  зависит непрерывно от  $\beta$  и монотонно не убывает.

3) Каждому  $\beta = p/q$  отвечает не сводящийся к точке интервал значений  $\beta$ . Зависимость  $p$  от  $\beta$ , представляющая собой при  $1 - \alpha/\pi > 0$  так называемую канторовскую функцию, приведена на рис. 9.1. Отметим, что интервал  $(-\alpha, \alpha)$  отвечает области синхронизации СФС, конечно при выполнении (9.2).

2-й с л у ч а й:

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right| = 1 \quad (9.3)$$

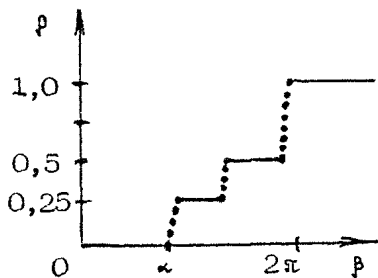
Если  $1 - \alpha/\pi = 1$ , то (9.3) становится непрерывным отображением окружности – поворотом на угол  $\beta$ .

Если  $1 - \alpha/\pi = -1$ , то (9.1) – по-прежнему непре-

рывное отображение окружности, все точки окружности периодичны с периодом два, а две из них неподвижны.

3-й с л у ч а й:

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right| > 1 \quad (9.4)$$



Р и с. 9.1



Здесь отображение обладает стохастическими свойствами. Его неблуждающее множество состоит из конечного числа отрезков, на которых всюду плотны отгалкивающие периодические точки, и конечного числа отгалкивающих периодических точек. Для почти всех значений параметра  $\beta$  это множество является нетривиальным аттрактором. Число отрезков в аттракторе определяется так называемыми интервалом вращения или норм-последовательностью вращения [81].

Таким образом, поскольку динамика индивидуальных парциальных СФС может быть в зависимости от параметров как простой, так и хаотической, то при объединении таких СФС в цепочки следует ожидать, что и коллективной динамике будут присущи черты как регулярной динамики, так и хаотической.

## 9.2. Хаотическое и регулярное поведение цепочки

Рассмотрим цепочку импульсных СФС, представляющую собой многоканальную систему из  $N$  параллельных импульсных СФС соединенных параллельно (см. рис. 2.1) так что для управления генератором в кольце СФС  $n$  используется как сигнал с собственного фазового дискриминатора, так и сигналы с фазовых дискриминаторов соседних СФС  $n-1$  и СФС  $n+1$ . Коллективную динамику цепочки описывает система, заданной

$$\begin{aligned} \varphi_n(k+1) - \varphi_n(k) - \alpha F(\varphi_n(k)) = \beta_n - \delta \alpha F(\varphi_{n-1}(k)) - \\ - \lambda \alpha F(\varphi_{n+1}(k)), \quad n = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (9.5)$$

с граничными условиями  $\varphi_0(k) = \varphi_{N+1}(k) = 0$ . Здесь, как ранее,  $\beta$  и  $\alpha$  — коэффициенты связи между СФС  $n$  включенными в цепочку.

Рассмотрим вопрос о коллективной динамике цепочки (9.5). Для ответа на него далее будем использовать понятие ляпуновского показателя траекторий [40], характеризующего экспоненциальную сходимость (расходимость) близких траекторий в фазовом пространстве. Фазовое пространство системы (9.5) — это  $N$ -мерный тор. Тогда, если дифференциал  $Df$  отображения  $f$  — постоянная матрица (как для (9.5)), то ляпуновские показатели  $\lambda_s = \ln |\rho_s|$ , где  $\rho_s$  — собственные числа этой матрицы. Положительность ляпуновского показателя свидетельствует о локальной неустойчивости

траектории, вдоль которой вычисляется показатель (а в нашем случае о неустойчивости произвольной траектории), т. е. о стохастическом поведении системы.

Вычислим ляпуновские показатели системы (9.5), опираясь на технику работы [82]. Дифференциал отображения, определяемого системой (9.5), имеет вид

$$D_f \equiv D_N = \begin{pmatrix} 1-\alpha/\pi & -\alpha/\pi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\delta\alpha/\pi & 1-\alpha/\pi & -\alpha/\pi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\delta\alpha/\pi & 1-\alpha/\pi & -\alpha/\pi & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\delta\alpha/\pi & 1-\alpha/\pi & -\alpha/\pi \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\delta\alpha/\pi & 1-\alpha/\pi \end{pmatrix}$$

Введем обозначение  $B_N = \det(D_N - pE)$ . Разлагая этот определитель по первой строке, получим следующее рекуррентное соотношение

$$B_N = 2z\epsilon B_{N-1} - \epsilon^2 B_{N-2}, \quad (9.6)$$

где

$$2z\epsilon = 1 - \frac{\alpha}{\pi} - p, \quad \epsilon^2 = \frac{\alpha^2 \delta}{\pi^2} \quad (9.7)$$

Обратим внимание, что в случае  $\delta\alpha < 0$  величина  $\epsilon$  — чисто мнимая). Соотношение (9.6) можно интерпретировать как разностное уравнение с начальными условиями

$$B_1 = 1 - \frac{\alpha}{\pi} - p = 2z\epsilon, \quad B_2 = \epsilon^2 (4z^2 - 1)$$

Решая разностное уравнение (9.6) обычным способом, получим

$$B_N = \epsilon^N U_N(z),$$

где  $U_N(z)$  — полином Чебышева второго рода. Его корни записываются в следующем виде:

$$z_s = \cos \frac{s\pi}{N+1}, \quad s = \overline{1, N} \quad (9.8)$$

Из соотношений (9.7), (9.8) получаем

$$\rho_s = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\pi} - 2 \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{x\delta} \cos \frac{s\pi}{N+1}, & \text{если } x\delta \geq 0, \\ 1 - \frac{\alpha}{\pi} - 2 \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{-x\delta} \cos \frac{s\pi}{N+1}, & \text{если } x\delta < 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

Следовательно, ляпуновские показатели  $\lambda_s$  имеют вид

$$\lambda_s = \begin{cases} \ln \left| 1 - \frac{\alpha}{\pi} - 2 \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{x\delta} \cos \frac{s\pi}{N+1} \right|, & \text{если } x\delta \geq 0, \\ \ln \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)^2 - 4 \frac{\alpha^2}{\pi^2} x\delta \cos^2 \frac{s\pi}{N+1}}, & \text{если } x\delta < 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

Для анализа роем спектр показателей  $\lambda_s$  в зависимости от параметров системы.

1) Если  $|1 - \alpha/\pi| \geq 1$ , в этом случае индивидуальная СФС<sub>N</sub> обладает стохастическими свойствами (см. разд. 9.1 и независимо от знака величины  $x\delta$  в спектре (9.10) имеются положительные показатели. Отсюда вытекает наличие хаотической динамики у системы (9.5).

2) Если  $|1 - \alpha/\pi| < 1$ , то, несмотря на регулярную динамику каждой парциальной СФС<sub>N</sub>, их объединение в цепочку приведет при соответствующих значениях параметров к хаотической динамике цепочки. Действительно, в этом случае при  $x\delta \geq 0$

$$\lambda_s^{\max} = \begin{cases} \ln \left| 1 - \frac{\alpha}{\pi} - 2 \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{x\delta} \cos \left( \frac{N\pi}{N+1} \right) \right|, & \text{если } 1 - \frac{\alpha}{\pi} \geq 0, \\ \ln \left| 1 - \frac{\alpha}{\pi} - 2 \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{x\delta} \cos \left( \frac{\pi}{N+1} \right) \right|, & \text{если } 1 - \frac{\alpha}{\pi} < 0, \end{cases}$$

а при  $x\delta < 0$

$$\lambda_s^{\max} = \ln \left[ \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)^2 - 4 \frac{\alpha^2}{\pi^2} x\delta \cos \left( \frac{\pi}{N+1} \right)} \right]$$

Отсюда следует, что в области параметров  $\sqrt{x\delta} > \Psi_1(\alpha)$  при  $x\delta > 0$ , и  $x\delta < \Psi_2(\alpha)$  при  $x\delta < 0$  величина  $\lambda_s^{\max}$  положительна, где

$$\Psi_{1,2}(\alpha) = \begin{cases} -\left(\cos \frac{\pi N}{N+1}\right)^{-1}, & \text{при } 1 - \frac{\alpha}{\pi} \geq 0, \\ (2\pi - \alpha) \left(2\alpha \cos \frac{\pi}{N+1}\right)^{-1}, & \text{при } 1 - \frac{\alpha}{\pi} < 0, \end{cases}$$

$$\Psi_2(\alpha) = (\alpha - 2\pi) \left( 4\alpha \cos \frac{\pi}{N+1} \right)^{-1}. \quad (9.11)$$

Следовательно, в этой области параметров система (9.5) обладает хаотической динамикой. Если цепочка СФС состоит из большого числа элементов ( $N \gg 1$ ), условия хаотичности (9.11) принимают вид

$$\sqrt{\alpha\delta} > \tilde{\Psi}_1(\alpha) = \begin{cases} 1/2, & \text{при } 1 - \frac{\alpha}{\pi} \geq 0, \\ \pi - \frac{\alpha}{2}, & \text{при } 1 - \frac{\alpha}{\pi} < 0, \end{cases} \quad (9.12)$$

если  $\alpha\delta \geq 0$ , и  $\alpha\delta < \tilde{\Psi}_2(\alpha) \equiv (4\alpha)^{-1}(\alpha - 2\pi)$ , если  $\alpha\delta < 0$ .

При невыполнении условий (9.11), (9.12) все ляпуновские показатели  $\lambda_s$  остаются отрицательными, что свидетельствует о сохранении регулярной динамики при объединении СФС<sub>n</sub> в цепочку. Граница между областями регулярной и стохастической динамики задается уравнениями

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha\delta} &= \Psi_1(\alpha), \text{ при } \alpha\delta \geq 0, \\ \alpha\delta &= \Psi_2(\alpha), \text{ при } \alpha\delta < 0 \end{aligned}$$

В случае  $N \gg 1$  приближенные уравнения этих областей следующие:  $\sqrt{\alpha\delta} = \tilde{\Psi}_1(\alpha)$ , если  $\alpha\delta \geq 0$ , и  $\alpha\delta = \tilde{\Psi}_2(\alpha)$ , если  $\alpha\delta < 0$ . Таким образом, неравенства

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha\delta} &< \Psi_1(\alpha), \text{ при } \alpha\delta \geq 0, \\ \alpha\delta &< \Psi_2(\alpha), \text{ при } \alpha\delta < 0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

выделяют в пространстве параметров системы (9.1) область регулярной динамики.

Отметим, что в области хаотической динамики можно найти ляпуновскую размерность странного аттрактора и более детально выяснить характер неустойчивых колебаний.

Далее в этой главе будем рассматривать лишь случай одинаковых неотрицательных  $\beta_n \equiv \beta$ . Случай  $\beta < 0$  рассматривается полностью аналогично.

### 9.3. Условия существования устойчивого стационарного режима

В цепочке СФС режиму синхронизации отвечает глобально асимптотическое устойчивое стационарное движение. Найдем

параметры, при которых существует устойчивый стационарный режим. Ясно, что такая область параметров может иметь место только при выполнении условий регулярной динамики (9.1).

Фазовое пространство системы (9.5) представляет собой прямое произведение  $T^N$  окружностей  $S_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , а сама система порождается отображением  $f: T^N \rightarrow T^N$ . Неподвижная точка  $f$  (с числом вращения нуль) находится из уравнений

$$\alpha \tau_n + \delta \tau_{n-1} + \alpha \varepsilon \tau_{n+1} = \beta, \quad n = 2, \dots, N-1, \quad (9.14)$$

$$\alpha \tau_1 + \varepsilon \alpha \tau_2 = \beta, \quad \alpha \tau_N + \delta \alpha \tau_{N-1} = \beta, \quad (9.15)$$

где  $\tau_n = F(\varphi_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Вводя обозначение  $\tau_{n-1} = \varphi_n$ , получим систему\*

$$\varphi_{n+1} = \tau_n, \quad \tau_{n+1} = \frac{\beta}{\varepsilon \alpha} - \frac{\delta}{\varepsilon} \varphi_n - \frac{1}{\varepsilon} \varphi_n \quad (9.16)$$

Систему (9.16) можно рассматривать как динамическую систему на плоскости, определяемую диффеоморфизмом  $g$ :

$$(\tau, \varphi) \rightarrow \left( \frac{\beta}{\varepsilon \alpha} - \frac{\delta}{\varepsilon} \varphi - \frac{1}{\varepsilon} \tau, \tau \right)$$

При этом кусок дискретной траектории  $L = \{(\tau_2, \varphi_2), \dots, (\tau_N, \varphi_N)\}$ , удовлетворяющий краевым условиям (9.15), т. е.

$$\alpha \varphi_2 + \varepsilon \alpha \tau_2 = \beta, \quad \alpha \tau_N + \delta \alpha \varphi_N = \beta, \quad (9.17)$$

определяет координаты искомой неподвижной точки в том случае, если  $|\tau_n| < 1$ ,  $|\varphi_n| < 1$ ,  $n = 2, 3, \dots, N$

Система (9.16) имеет единственную неподвижную точку  $Q(\tau^*, \varphi^*)$ ,  $\tau^* = \varphi^* = \beta \alpha^{-1} (1 + \delta + \varepsilon)^{-1}$

При дальнейшем изложении возникает необходимость в случае  $\varepsilon \delta < 0$  конкретизировать знаки этих параметров. Для определенности положим  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta < 0$ .

В области параметров

$$D_1 = \begin{cases} 0 < \delta + \varepsilon < 1, & \text{если } \delta \varepsilon > 0, \\ -1 < \delta + \varepsilon < 1, & \text{если } \delta \varepsilon < 0 \end{cases}$$

точка  $Q$  является седловой с мультипликаторами

\* Вырожденные случаи  $\varepsilon = 0$  или  $\delta = 0$  будут рассмотрены ниже.

$$\mu_1 = \begin{cases} -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\sqrt{1+4\delta\alpha}}{2\alpha}, & \text{если } \delta\alpha > 0, \\ -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\sqrt{1-4\delta\alpha}}{2\alpha}, & \text{если } \delta\alpha < 0, \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2\alpha} + \frac{\sqrt{1+4\delta\alpha}}{2\alpha}, & \text{если } \delta\alpha > 0, \\ -\frac{1}{2\alpha} + \frac{\sqrt{1-4\delta\alpha}}{2\alpha}, & \text{если } \delta\alpha < 0 \end{cases}$$

Уравнения сепаратрис следующие:

$$W^u = \left\{ y = y^* + \frac{1}{\mu_1} (x - x^*) \right\}, \quad W^s = \left\{ y = y^* + \frac{1}{\mu_2} (x - x^*) \right\}$$

Введем в рассмотрение две прямые:

$$L_2 = \left\{ y = \frac{\beta}{\alpha} - \alpha x \right\}, \quad L_N = \left\{ y = \frac{\beta}{\delta\alpha} - \frac{1}{\delta} x \right\}$$

Эти прямые представляют собой геометрические места точек, удовлетворяющих (9.17). Если имеется кусок траектории  $L$  с начальной точкой на  $L_2$  и конечной точкой на  $L_N$  и  $L \subset \Pi = \{ |x| < 1, |y| < 1 \}$ , то неподвижная точка системы (9.5) существует.

Дальнейшее рассмотрение следует проводить отдельно для четных и нечетных  $N$ . Подробно исследуем случай четного  $N$ , а для  $N = 2\ell + 1$  приведем лишь конечный результат, поскольку все выкладки аналогичны.

Пусть  $N = 2\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_+$ . Обозначим через  $d_2$  область параметров, определяемую неравенствами

$$\beta < \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } \delta > \alpha, \quad \delta\alpha > 0, \\ \omega, & \text{если } \delta < \alpha, \quad \delta\alpha > 0, \end{cases}$$

и

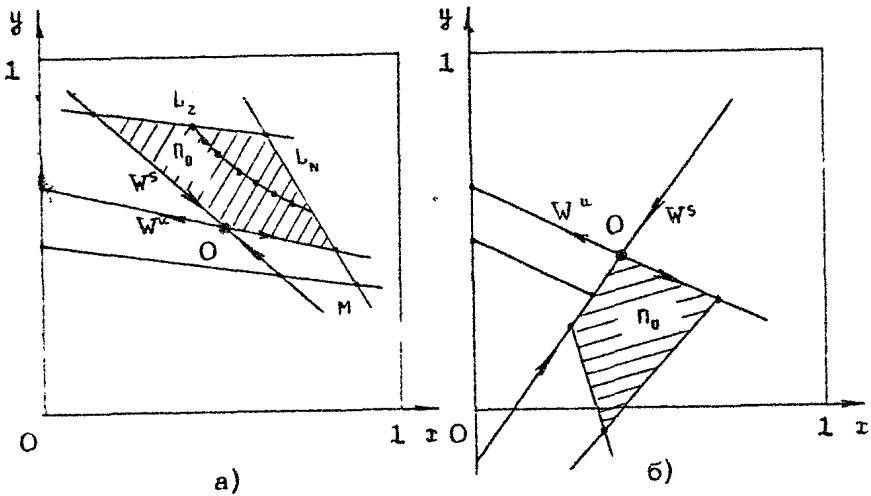
$$\beta < \begin{cases} \tilde{\varepsilon}, & \text{если } \alpha > 1, \quad \delta\alpha < 0, \\ \tilde{\omega}, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \quad \delta\alpha < 0, \end{cases}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\alpha\alpha|\mu_1|(1+\alpha+\delta)}{\alpha|\mu_1|+\delta}, \quad \omega = \frac{\alpha(|\mu_1|-\delta)(1+\alpha+\delta)}{(1+\alpha)|\mu_1|-\delta}$$

$$\tilde{\varepsilon} \equiv \frac{\alpha(-\delta + |\mu_1|)(1 + \varepsilon + \delta)}{|\mu_1|(1 + \varepsilon - \delta|\mu_1|)}, \quad \tilde{\omega} \equiv \min\{\tilde{\varepsilon}, \alpha(1 - \varepsilon\delta)(\varepsilon - 1)^{-1}\}$$

Покажем, что для каждой точки области  $d = d_1 \cap d_2$  для любого  $N = 2\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_+$  отображение  $f$  имеет единственную неподвижную точку (с числом вращения нуль).



Р и с. 9.2

Доказательство проведем для случая  $\varepsilon\delta > 0$  (случай  $\varepsilon\delta < 0$  рассматривается аналогично). Для точек области  $d$  и четного  $N$  четырехугольник  $\Pi_0$ , стороны которого образованы  $W^u$ ,  $W^s$ ,  $L_2$  и  $L_N$ , содержится в области  $\Pi$  (рис. 9.2, а). Нетрудно показать также, что  $\varphi(\Pi_0) \subset \Pi$ . Для отображения  $\varphi^2$  мультипликаторы седла  $O$  положительны, поэтому в области  $\Pi_0$  отображение  $\varphi^2$  вкладывается в поток\*. Следовательно, для любого  $\tau > 0$  (и в частности,  $\tau = 2\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_+$ ) существует кусок траектории этого потока, соединяющий точки  $L_2$  и  $L_N$  и целиком лежащий в обла-

\* С помощью линейного преобразования отображение  $\varphi^2$  в  $\Pi_0$  приводится к виду  $(u, v) \rightarrow (\mu_1^2 u, \mu_2^2 v)$ , для которого искомая система дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:  $\dot{u} = \ell \mu_1^2 u$ ,  $\dot{v} = \ell \mu_2^2 v$ .

сти  $\Pi_0$ . Отсюда сразу следует, что для любого  $N = 2\ell$  существует траектория отображения  $q^2$ , "соединяющая" точку на  $L_2$  с точкой на  $L_N$  и целиком лежащая в области  $\Pi_0$ . Следовательно, для такого  $N$  существует кусок траектории отображения  $q$ , соединяющий точку на  $L_2$  с точкой на  $L_N$  и целиком лежащий в  $(\Pi_0 \cup q(\Pi_0) \subset \Pi)$ . Координаты точек этого куска траектории и определяют координаты неподвижной точки отображения  $f$  из уравнений  $x_n = F(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Сделаем следующие замечания.

1) Пусть  $N = 2\ell + 1$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}_+$ , а  $\tilde{d}_2$  — область параметров, определяемая неравенствами

$$\beta < \begin{cases} \epsilon, & \text{если } \delta < \alpha, \\ \min\{\epsilon, \epsilon\}, & \text{если } \delta > \alpha, \end{cases}$$

где  $\epsilon = \alpha(1 - 2\alpha\delta)[(1 - \alpha\delta) - \delta(1 - \delta)]^{-1}$ . Для точек области  $\tilde{d} = \tilde{d}_2 \cap d_1$  отображение  $f$  имеет единственную неподвижную точку. Это устанавливается с использованием того обстоятельства, что в области  $\tilde{d}$  точка  $M = q(L_2) \cap L_N \in \Pi$ .

2) В случае  $\alpha\delta < 0$  один мультипликатор точки  $\emptyset$  положителен, а другой отрицателен; поэтому области  $\Pi_0$  и  $q(\Pi_0)$  расположены в  $\Pi$  иначе, чем в случае  $\alpha\delta > 0$  (рис. 9.2, б). Это единственное отличие, которое нужно учитывать в этом случае.

Доказанное утверждение устанавливает факт существования неподвижных точек отображения  $f$  и позволяет, в принципе, найти их координаты. При этом основная трудность состоит в нахождении начальной точки полутраектории отображения  $q$  на прямой  $L_2$ . Подход, изложенный в разд. 9.2, позволяет найти ее сравнительно просто. Систему (9.14), (9.15) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений. Определитель этой системы  $\delta_N = \det A_N$  является произведением собственных значений матрицы

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta\alpha & \alpha & \alpha\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\alpha & \alpha & \alpha\alpha & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \delta\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$



Находим

$$\rho_s = \begin{cases} \alpha - 2\alpha \sqrt{\alpha\delta} \cos \frac{s\pi}{N+1} & \text{если } \alpha\delta \geq 0, \\ \alpha - i2\alpha \sqrt{(-\alpha\delta)} \cos \frac{s\pi}{N+1}, & \text{если } \alpha\delta < 0, s=\overline{1, N} \end{cases}$$

Следовательно,

$$b_N = \det A_N = \begin{cases} \prod_{s=1}^N \alpha \left(1 - 2\sqrt{\alpha\delta} \cos \frac{s\pi}{N+1}\right), & \text{если } \alpha\delta \geq 0, \\ \prod_{s=1}^N \alpha \left(1 - i2\sqrt{(-\alpha\delta)} \cos \frac{s\pi}{N+1}\right), & \text{если } \alpha\delta < 0 \end{cases} \quad (9.18)$$

Обозначим через  $b_N^{(1)}$  определитель, полученный из  $b_N$  заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$b_N^{(1)} = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \delta\alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

Раскрывая этот определитель, получим

$$b_N^{(1)} = \beta \left[ \sum_{\ell=0}^{N-3} (-\alpha\ell)^{\ell} b_{N-\ell} + (-\alpha\ell)^{N-2} \alpha (1-\alpha) \right],$$

где  $b_{N-\ell}$  определяется по формулам (9.18) и  $N$  следует заменить на  $N-\ell$ . Таким образом,

$$\tau_2 = \beta (b_N)^{-1} \left\{ \sum_{\ell=0}^{N-3} (-\alpha\ell) b_{N-\ell} + (-\alpha\ell)^{N-2} \alpha (1-\alpha) \right\},$$

а координата  $y_2$  находится из условий принадлежности точки  $(x_2, y_2)$  прямой  $L_2$ . Координаты остальных  $N$  точек установим, последовательно применяя отображение  $Q$  к точке  $(x_2, y_2)$

При  $N \gg 1$  определитель  $b_N$  можно вычислить по приближенной формуле. Например, при  $\alpha\delta \gg 0$ , заменяя

$$\rho_N \det A_N = \sum_{s=1}^N \rho_N \alpha + \sum_{s=1}^N \rho_N (1 - 2\sqrt{\alpha\delta} \cos z) dz$$

интегралом, как в работе [82], получим

$$\begin{aligned} \rho_N b_N &= N \rho_N \alpha + \frac{N+1}{\pi} \int_0^\pi \rho_N (1 - 2\sqrt{\alpha\delta} \cos z) dz = N \rho_N \alpha + \\ &+ (N+1) \rho_N \left( \frac{1 - \sqrt{1-4\delta\alpha}}{2} \right) \approx \rho_N \left[ \frac{\alpha (1 + \sqrt{1-4\delta\alpha})}{2} \right]^N \end{aligned}$$

Тогда

$$b_N \approx \left[ \frac{\alpha (1 + \sqrt{1-4\delta\alpha})}{2} \right]^N$$

Выше предполагалось, что  $\alpha\delta \neq 0$ . Рассмотрим случай "потоковой" системы  $\alpha\delta = 0$ . Пусть  $\alpha = 0$ ,  $\delta \neq 0$ . В этом случае уравнения (9.14), (9.15) примут вид

$$\tau_n = -\delta \tau_{n-1} + \beta/\alpha, \quad (9.19)$$

$$\tau_1 = \beta/\alpha, \quad \tau_N + \delta \tau_{N-1} = \beta/\alpha$$

Напомним, что координаты неподвижной точки  $\varphi = \varphi^*$  отображения  $f$  определяются отрезком траектории временной длины  $N-1$  отображения (9.19) с начальным условием  $\tau_1 = \beta/\alpha$  в том случае, когда этот отрезок не имеет точек с координатами  $\tau_n = \pm 1$ . Эта траектория отображения задается уравнениями

$$\tau_n^0 = \frac{\beta [1 - (-1)^n \delta^n]}{\alpha(1+\delta)}, \quad \text{если } \delta \neq -1, \quad (9.20)$$

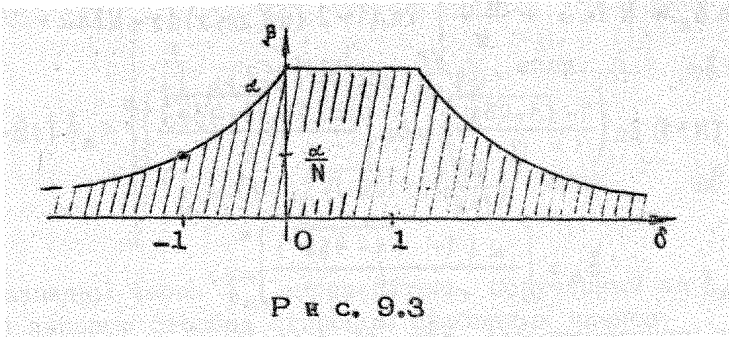
$\tau_n^0 = n\beta/\alpha$ , если  $\delta = -1$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ . Отсюда вытекает, что в случае  $\alpha > 0^*$  при выполнении неравенств

$$\beta < \min \left\{ \frac{\alpha |1+\delta|}{|1 - (-\delta)^N|}, \alpha \right\}, \quad \text{если } \delta \neq -1 \quad (9.21)$$

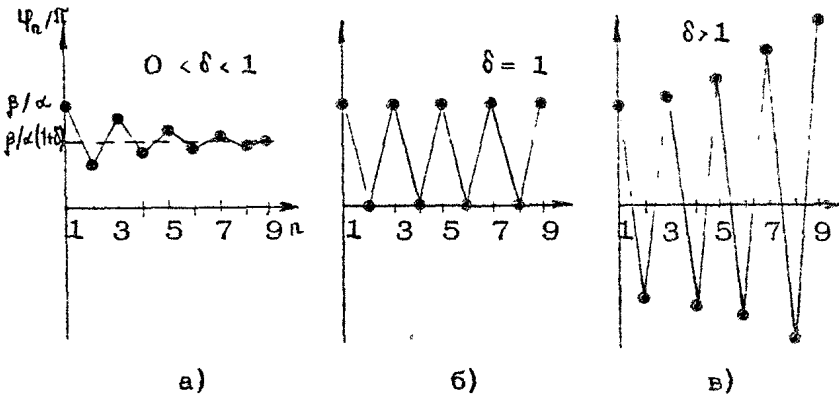
\* Случай  $\alpha < 0$  рассматривается аналогично и здесь не приводится.

$$\beta < \alpha / N, \text{ если } \delta = -1,$$

отображение  $f$  имеет неподвижную точку  $\varphi = \varphi^*$ . На рис. 9.3 представлена область параметров, определяемая (9.21). Из уравнений (9.20) вытекает, что распределение координат неподвижной точки  $\varphi_n = \pi T_n^0$  вдоль системы имеет вид, изображенный на рис. 9.4.



Р и с. 9.3



Р и с. 9.4

Рассмотрение случая  $\alpha \neq 0$ ,  $\delta = 0$  проводится полностью аналогично. При этом координаты неподвижной точки определяются выражениями

$$T_n^0 = \frac{\beta [1 - (-1)^{N-n+1} \alpha^{N-n+1}]}{\alpha (1 + \alpha)}, \text{ если } \alpha \neq -1, \quad (9.22)$$

$$T_n^0 = \frac{(N-n+1)\beta}{\alpha}, \text{ если } \alpha = -1, n=1, 2, \dots, N,$$

а условия ее существования записываются так же, как в выражениях (9.21), в которых  $\delta$  заменено на  $\varepsilon$ .

В заключение отметим, что при выполнении условий (9.13) неподвижная точка  $\varphi = \varphi^*$  будет устойчивой, поскольку ее мультипликаторы  $\rho_s$  (см. (9.9)) по модулю меньше единицы (ляпуновские показатели всех траекторий одни и те же в силу кусочной линейности  $f$ ).

#### 9.4. Условия синхронизации

Наличие устойчивой неподвижной точки  $\varphi = \varphi^*$  отображения  $f$  в совокупности с достаточно сильными условиями сжимаемости  $Df$ , как будет показано ниже, приводит к глобальной устойчивости этой точки. Область параметров, при которых точка  $\varphi^*$  глобально устойчива, является областью синхронизации системы (9.5). Получим оценку этой области.

Рассмотрим фазовое пространство  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$  системы (9.5). Каждая окружность  $S_n$  точкой разрыва  $\varphi_n = \pi$  и точкой  $\varphi_n = \varphi_n^*$  разбивается на две части  $S_n^1$  и  $S_n^2$ . Рассмотрим произвольную начальную точку  $\varphi = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_N^0)$ . Она однозначно определяет область

$$P_{k_1, \dots, k_N} = S_1^{k_1} \times S_2^{k_2} \times \dots \times S_N^{k_N}, \quad k_n \in \{1, 2\}, \quad n = \overline{1, N}$$

Нетрудно показать, что  $\|D_N\| \leq \alpha \equiv |1 - \alpha/\pi| + (\alpha/\pi)(|\varepsilon| + |\delta|)$

Если  $\alpha < 1$ , то  $Df$  — сжимающее отображение. При этом, если две точки лежат в одной и той же области  $P_{k_1, \dots, k_N}$ , то расстояние между их образами при отображении  $f$  уменьшается не менее, чем в  $\alpha$  раз. Посредством табл. 9.1 введем в рассмотрение величины  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$ . Здесь

$$\tilde{\varepsilon}(\delta) = \frac{|1 - (-\delta)^N|}{\alpha |1 + \delta|}, \quad \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{|1 - (-\varepsilon)^N|}{\alpha |1 + \varepsilon|}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Величина  $r_{\min}$  ( $r_{\max}$ ) оценивает минимальное (максимальное) расстояние от точек траектории отображения  $f$ , соответствующих координатам точки  $\varphi^*$  до линий разрыва.

Например, в случае  $\varepsilon\delta > 0$  величина  $r_{\min}$  ( $r_{\max}$ ) оценивает минимальное (максимальное) расстояние от точек, принадлежащих  $\tilde{\Pi} \equiv \Pi_0 \cup f(\Pi_0) \cup I$  (где  $I$  — отрезок  $L_N$ , заключенный между точками  $M$  и  $L_N \cap W^u$ ) до границы множества  $\Pi$ . Поскольку кусок дискретной траектории  $L$ , определяющий координаты неподвижной точки  $f$ , лежит в  $\tilde{\Pi}$ , то для любого  $n = 2, \dots, N$

Условия на параметры		$\Gamma$	$m_{\min}$	$\tau_{\max}$
$\delta > \alpha$	$N = 2k$	$\varepsilon (1 - \alpha \sqrt{N}) (1 + \alpha \sqrt{N})^{-1}$	$1 - \beta/\varepsilon$	$1 + \beta/\varepsilon$
	$N = 2k+1$	$\alpha \leq \varepsilon$	$1 - \beta/\alpha$	
		$\alpha \geq \varepsilon$	$\varepsilon (1 - \alpha \sqrt{N})$	
$\delta \leq \alpha$	$N = 2k$	$\omega (1 - \alpha \sqrt{N}) (1 + \alpha \sqrt{N})^{-1}$	$1 - \beta/\omega$	$1 + \beta/\omega$
	$N = 2k+1$	$\varepsilon \omega (1 - \alpha \sqrt{N}) (\omega + \varepsilon \alpha \sqrt{N})^{-1}$	$1 - \beta/\varepsilon$	
		$\alpha \geq 1$	$(1 - \alpha \sqrt{N}) (\varepsilon + \varepsilon \alpha \sqrt{N})^{-1}$	
$\delta < 0$	$\alpha < 1$	$(1 - \alpha \sqrt{N}) (\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \alpha \sqrt{N})^{-1}$	$1 - \beta \tilde{\omega}$	$1 + \beta \tilde{\omega}$
$\alpha = 0$	$0 < \delta \leq 1$	$\tilde{\alpha} (1 - \alpha \sqrt{N}) (1 + \alpha \sqrt{N})^{-1}$	$1 - \beta/\tilde{\alpha}$	$1 + \beta/\tilde{\alpha}$
	$\delta = -1$	$\frac{\tilde{\alpha} (1 - \alpha \sqrt{N})}{(N+1) (1 + \alpha \sqrt{N})}$	$1 - \beta (N+1)/\tilde{\alpha}$	$1 + \beta (N+1)/\tilde{\alpha}$
		$\delta \neq -1, \delta \notin (0, 1]$	$\frac{1 - \alpha \sqrt{N}}{\tilde{\varepsilon}(\delta) (1 + \alpha \sqrt{N})}$	$1 - \tilde{\varepsilon}(\delta)\beta$
$\delta = 0$	$0 < \alpha \leq 1$	$\tilde{\omega} (1 - \alpha \sqrt{N}) (1 + \alpha \sqrt{N})^{-1}$	$1 - \beta/\tilde{\omega}$	$1 + \beta/\tilde{\omega}$
	$\alpha = -1$	$\frac{\tilde{\omega} (1 - \alpha \sqrt{N})}{(N+1) (1 + \alpha \sqrt{N})}$	$1 - \beta (N+1)/\tilde{\omega}$	$1 + \beta (N+1)/\tilde{\omega}$
		$\alpha \neq -1, \alpha \notin (0, 1]$	$\frac{1 - \alpha \sqrt{N}}{\tilde{\varepsilon}(\alpha) (1 + \alpha \sqrt{N})}$	$1 - \tilde{\varepsilon}(\alpha)\beta$

$$r_{\min} \leq \text{dist}_{R^2} \left( (x_n, y_n), \partial \Pi \right) \leq r_{\max}.$$

Поэтому

$$r_{\min} \leq |x_n - 1| \leq r_{\max} \quad (9.23)$$

Покажем, что для точек области  $\Pi$  при выполнении условия

$$\alpha r_{\max} \sqrt{N} < r_{\min} \quad (9.24)$$

неподвижная точка  $\varphi^*$  глобально асимптотически устойчива.

Доказательство проведем для случая  $\delta x > 0$ ; во всех остальных случаях оно производится совершенно аналогично.

Пусть  $\varphi^0$  — произвольная начальная точка в  $T^N$ . Как следует из выражения (9.23), максимальное расстояние от  $\varphi^*$  до множества разрыва отображения  $f$  не превосходит

$\pi r_{\max} \sqrt{N}$  (рис. 9.5). Следовательно,  $\text{dist}_{R^N}(\varphi^*, \varphi^0) \leq \pi r_{\max} \sqrt{N}$ . Кроме того, отметим, что шар радиусом

$\pi r_{\min}$  с центром в  $\varphi^*$  вообще не содержит точек разрыва.

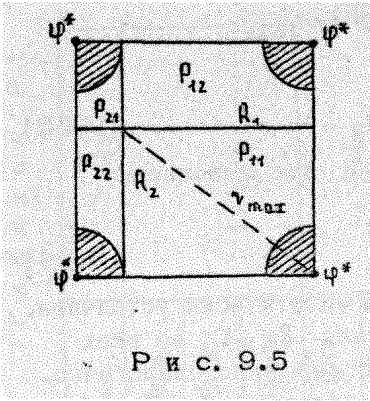
Соединим  $\varphi^*$  с  $\varphi^0$  вектором (отрезком прямой)  $\xi$ : если  $\varphi^0 \in \text{int } P_{k_1 \dots k_N}$ , то и вектор  $\xi$  выберем целиком лежащим в области  $P_{k_1 \dots k_N}$ , если же  $\varphi^0$  лежит в множестве разрыва, то за  $\xi$  выберем отрезок, не содержащий других, кроме  $\varphi^0$ , точек разрыва (так как  $P_{k_1 \dots k_N}$  — параллелепипед с гранями параллельными координатным плоскостям, то такой  $\xi$  всегда существует). Так как на  $P_{k_1 \dots k_N}$  отображение  $f$  непрерывно, то

$$|f(\xi)| \equiv |Df \xi| \leq \|Df\|_{R^N} |\xi| \leq \alpha |\xi| \leq \pi \alpha r_{\max} \sqrt{N}$$

Из условия (9.24) следует: отрезок  $f(\xi)$  попадает в область непрерывности отображения  $f$  и при дальнейших итерациях  $f$  из нее не выходит, экспоненциально уменьшаясь до нуля.

Из доказанного утверждения следует, что область синхронизации цепочки СФС определяется пересечением области  $\Pi$  с областью, определяемой неравенством (9.24). Разрешая эти неравенства относительно расстройки  $\beta$ , получим следующую оценку области синхронизации.  $\beta < \Gamma$ , где  $\Gamma$  определяется в табл. 9.1. На рис. 9.6 изображены области син-

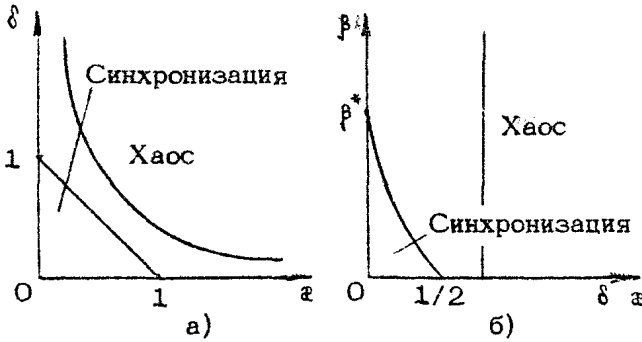
\* Из вида области  $\Pi_0$  (рис. 9.2, а) нетрудно показать, что  $r_n \geq 0$ .



хронизации и хаоса цепочки СФС, определяемые полученными в системе неравенствами (здесь

$$\beta^* = \frac{\alpha \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \sqrt{N} \right]}{\beta \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \sqrt{N} \right]}$$

При переходе из области синхронизации в область хаотической динамики осуществляются различные бифуркации. Здесь они не изучались, тем не менее можно утверждать, что среди них имеется бифуркация исчезновения



Р и с. 9.6

неподвижной точки на поверхности разрыва, поскольку нарушение неравенств, полученных в разд. 9.3, сопровождается именно такой бифуркацией. Кроме того, по-видимому, происходит бифуркация рождения устойчивых периодических точек из множества разрыва.

Основные выводы о динамике цепочки СФС, вытекающие из проведенного исследования, состоят в следующем.

1. Если индивидуальные СФС  $\pi$ , входящие в цепочку, обладают хаотической динамикой, то и связанные в цепочку, они сохраняют это свойство. (Такая ситуация имеет место

при  $\alpha \leq 0$  и  $\alpha \geq 2$ ). Другими словами, объединение парциальных СФС  $n$  в цепочку, описываемую системой (9.1), не приводит к устранению хаотических колебаний, существующих в парциальных системах.

При  $0 < \alpha < 2$  (условие регулярной динамики парциальной СФС  $n$ ) объединение СФС  $n$  в цепочку может приводить как к регулярной коллективной динамике (при выполнении условий (9.13)), так и к наличию хаотических колебаний всей цепочки (см. формулы (9.11), (9.12) и рис. 9.6)

2. Регулярная динамика цепочки СФС может быть разнообразной. Выделены значения параметров, отвечающие установлению стационарного режима синхронизма при любых начальных условиях, т. е. дана аналитическая оценка области синхронизации цепочки СФС. Характер распределения стационарной разности фаз генераторов вдоль цепочки зависит от параметров системы. Он может быть как монотонным, так и осциллирующим – см. рис. 9.4.

3. Отметим, что сравнение полученных здесь результатов для цепочки импульсных СФС с результатами гл. 2 – 4 для цепочки непрерывных СФС позволяет установить качественное сходство возможных режимов, существующих в цепочке в том и другом случае, условий синхронизации и хаотизации цепочки, а также характера зависимости установившегося распределения разности фаз вдоль цепочки.



ДИНАМИКА КОЛЬЦЕВОЙ ЦЕПОЧКИ  
ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

В предыдущей главе была изучена динамика импульсных СФС при условии, что крайние элементы в цепочке взаимодействуют лишь с соседними – соответственно справа и слева. Однако с технической и общезначимой точек зрения представляют интерес процессы в подобных цепочках с периодическими граничными условиями, т. е. в цепочках, объединенных в "кольцо" так, что "последний" элемент взаимодействует с "первым" [2, 8, 9, 69, 83, 84]. Здесь, кроме задачи о синхронизации, которая играет по-прежнему важную роль, возникает проблема существования и устойчивости волновых движений, и в частности стационарных волн. Исследованию этих задач и посвящена настоящая глава.

## 10.1. Возможность синхронизации

Рассмотрим систему

$$\varphi_n(k+1) - \varphi_n(k) + \alpha F(\varphi_n(k)) = \beta - \alpha \delta F(\varphi_{n-1}(k)) - \alpha \varepsilon F(\varphi_{n+1}(k)) \quad (10.1)$$

с граничными условиями  $\varphi_{n+1}(k) \equiv \varphi_n(k)$ , где  $F(\varphi) = 2\pi$  – периодическая функция, имеющая на интервале  $[-\pi, \pi)$  вид  $F(\varphi) = \varphi / \pi$ . Фазовое пространство  $T^N$  этой системы – прямое произведение  $N$  окружностей, а динамика порождается кусочно-линейным разрывным отображением  $f$ , определяемым формулами (10.1). Условия синхронизации – это условия существования глобальной устойчивости неподвижной точки  $f$ , а волновым движениям отвечают более сложные режимы, о которых речь пойдет ниже.

$g(x, y) = \left( \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\delta}{2} y - \frac{1}{2} x, x \right)$  Координаты неподвижной точки  $\square$  отображения  $f$  определяются выражением  $x^* = y^* = \frac{\beta}{\alpha(1+\delta+\alpha)}$  Точке  $\square$  соответствует неподвижная точка

$\varphi^*(\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*), \varphi_n^* = \alpha x^*, n = 1, 2, \dots, N$  Отсюда следует, что условия существования неподвижной точки отображения  $f$  определяются неравенством

$$|\beta \alpha^{-1} (1 + \alpha + \delta)^{-1}| < 1 \quad (10.2)$$

Используя технику анализа, описанную в гл. 9, получим условия глобальной асимптотической устойчивости точки  $\varphi^*$ . Здесь эта задача упрощается, так как прямоугольник  $\Pi_0$  (см. рис. 9.2) заменяется точкой  $\square$ . Поэтому величины  $r_{max}$  и  $r_{min}$ , характеризующие расстояние от  $\square$  до множества разрыва, определяются формулами

$$r_{max} = 1 + \frac{|\beta| \alpha}{|\alpha(1 + \alpha + \delta)|}, \quad r_{min} = 1 - \frac{|\beta| \alpha}{|\alpha(1 + \alpha + \delta)|}$$

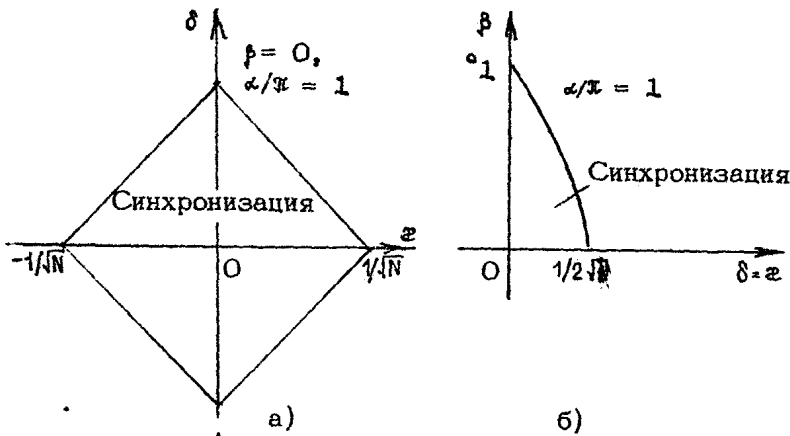
(Заметим, что в силу (10.2)  $r_{min} > 0$ ). Повторяя рассуждения разд. 9.4, устанавливаем, что точка  $\varphi^*$  глобально асимптотически устойчива, если выполнено неравенство

$$\alpha r_{max} \sqrt{N} < r_{min} \quad (10.3)$$

Отсюда вытекают следующие условия синхронизации:

$$|\beta| < (1 + \alpha \sqrt{N})^{-1} (1 - \alpha \sqrt{N}) |\alpha(1 + \alpha + \delta)| \quad (10.4)$$

Это неравенство в пространстве параметров выделяет некоторую область, сечения которой представлены на рис. 10.1.



Р и с. 10.1

Обратим внимание, что поскольку в условия (10.4) входит  $N$ , то при заданном  $N$  это условие выполняется если  $(1 - 1/\sqrt{N}) < \alpha/\pi < (1 + 1/\sqrt{N})$ . Однако отсюда еще нельзя утверждать, что область синхронизации сужается при  $N \gg 1$ , поскольку условия (10.4) являются достаточными.

## 10.2. Регулярная динамика и хаос в кольцевой цепочке

Поскольку для всех цепочек в  $T^N$  (конечно, за исключением точек разрыва отображения  $f$ ) дифференциал  $Df = Q_N$  — постоянная матрица, то ляпуновские показатели любой непересекающейся с множеством разрыва траектории  $\lambda_s = \ln |\rho_s|$ , где  $\{\rho_s\}$  — собственные числа этой матрицы. Поэтому, если для какого-либо  $s$   $|\rho_s| > 1$ , то движения в системе (10.1) будут хаотическими, если же

$$|\rho_s| \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (10.5)$$

то динамика системы (10.1) будет в некотором смысле регулярной, хотя и может быть достаточно сложной. Найдем  $\rho_s$ :

$$\det(Q_N - \rho E_N) = \begin{vmatrix} 1 - \tilde{\alpha} - \rho & -\tilde{\alpha} \varepsilon & 0 & \dots & -\tilde{\alpha} \delta \\ -\tilde{\alpha} \delta & -1 - \tilde{\alpha} - \rho & -\tilde{\alpha} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\alpha} \delta & -1 - \tilde{\alpha} - \rho & -\tilde{\alpha} \varepsilon & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{\alpha} \varepsilon & 0 & 0 & -\tilde{\alpha} \delta & -1 - \tilde{\alpha} - \rho \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \tilde{\alpha} - \rho) D_{N-1} + \tilde{\alpha} \varepsilon [(-\tilde{\alpha} \delta) D_{N-2} + (-1)^N (-\tilde{\alpha} \varepsilon)^{N-1}] + \\ + (-1)^{N+1} (-\tilde{\alpha} \delta) [(-\tilde{\alpha} \delta)^{N-1} + (-1)^N (-\tilde{\alpha} \varepsilon) D_{N-2}] = \\ = (1 - \tilde{\alpha} - \rho) D_{N-1} - 2 \tilde{\alpha}^2 \varepsilon \delta D_{N-2} - [(\tilde{\alpha} \varepsilon)^N + (\tilde{\alpha} \delta)^N],$$

где  $\tilde{\alpha} = \alpha/\pi$ , а  $D_k$  - то же, что и в разд. 9.2. То есть, полагая

$$1 - \tilde{\alpha} - \rho = 2 \varepsilon \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = \tilde{\alpha}^2 \varepsilon \delta, \quad (10.6)$$

получим

$$B_{N-1} = \varepsilon^{N-1} U_{N-1}(\tilde{z}), \quad B_{N-2} = \varepsilon^{N-2} U_{N-2}(\tilde{z}), \quad (10.7)$$

где  $U_{N-1}(\tilde{z}), U_{N-2}(\tilde{z})$  - полиномы Чебышева второго рода. Используя (10.6), (10.7), получаем

$$\det(Q_N - \rho E_N) = 2 \varepsilon^N \tilde{z} U_{N-1}(\tilde{z}) - 2 \varepsilon^N U_{N-2}(\tilde{z}) - [(\tilde{\alpha} \varepsilon)^N + (\tilde{\alpha} \delta)^N]$$

Так как

$$U_{N-1}(\tilde{z}) = \frac{(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^N - (\tilde{z} - \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^N}{2 \sqrt{\tilde{z}^2 - 1}}, \quad U_{N-2}(\tilde{z}) = \frac{(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^{N-1} - (\tilde{z} - \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^{N-1}}{2 \sqrt{\tilde{z}^2 - 1}},$$

то

$$\det(Q_N - \rho E_N) = 2 \varepsilon^N \left\{ \frac{\tilde{z}}{2 \sqrt{\tilde{z}^2 - 1}} [(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^N - (\tilde{z} - \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^N] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \sqrt{\tilde{z}^2 - 1}} [(\tilde{z} + \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^{N-1} - (\tilde{z} - \sqrt{\tilde{z}^2 - 1})^{N-1}] - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\tilde{\alpha} \varepsilon}{\varepsilon} \right)^N + \left( \frac{\tilde{\alpha} \delta}{\varepsilon} \right)^N \right] \right\}$$

Положим

$$t = \tilde{z} - \sqrt{\tilde{z}^2 - 1} \quad (10.8)$$

Тогда

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = 1/t, \quad 2\sqrt{z^2 - 1} = 1/t - t,$$

$$z = (2t)^{-1}(t^2 + 1)$$

и

$$\det(Q_N - pE_N) = 2\varepsilon^N \left\{ \frac{t^{2N} + 1}{2t^N} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\tilde{\alpha} \tilde{x}}{\varepsilon} \right)^N + \left( \frac{\tilde{\alpha} \delta}{\varepsilon} \right)^N \right] \right\}$$

Из уравнения  $\det(Q_N - pE_N) = 0$  находим

$$t_1^N = \left( \frac{\tilde{\alpha} \tilde{x}}{\varepsilon} \right)^N, \quad t_2^N = \left( \frac{\tilde{\alpha} \delta}{\varepsilon} \right)^N. \quad \text{и}$$

$$t_{1s} = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{x}}{\varepsilon} \exp\left(i \frac{2\pi s}{N}\right), \quad t_{2s} = \frac{\tilde{\alpha} \delta}{\varepsilon} \exp\left(i \frac{2\pi s}{N}\right), \quad s = 0, 1, \dots, N-1$$

Рассмотрим сначала одну из этих совокупностей корней, например  $\{t_{1s}\}$ . Из уравнений (10.6) и (10.8) получаем

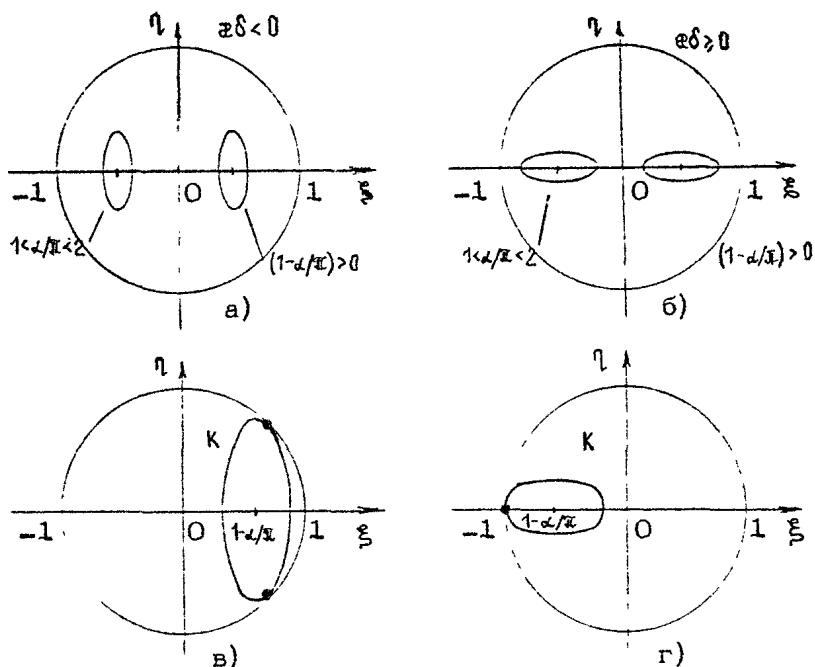
$$p_s = 1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} \left[ \tilde{x} \exp\left(i \frac{2\pi s}{N}\right) + \delta \exp\left(-i \frac{2\pi s}{N}\right) \right] \quad (10.9)$$

Легко проверить, что второй серии корней  $\{t_{2s}\}$  отвечает та же совокупность корней (10.9) (которые по-другому пронумерованы).

Вопрос о регулярной и хаотической динамике системы (10.1) сводится, таким образом, к расположению корней  $p_s$  на комплексной плоскости относительно единичного круга. Из уравнения (10.9) следует, что корни  $p_s$  лежат на эллипсе  $K$  комплексной плоскости  $\{\xi + i\eta\}$

$$\frac{[\xi - (1 - \tilde{\alpha})]^2}{\tilde{\alpha}^2 (\tilde{x} + \delta)^2} + \frac{\eta^2}{\tilde{\alpha}^2 (\delta - \tilde{x})^2} = 1 \quad (10.10)$$

Поэтому, если  $K$  целиком содержится в замкнутом единичном круге (рис. 10.2, а, б), то все  $p_s$  по модулю меньше единицы, — динамика регулярна. Если же есть точки  $K$  вне единичного круга, то ситуация зависит от  $N$ . Так, если  $N$  мало, то может случиться, что среди  $p_s$  нет точек вне единичного круга, несмотря на то что эллипс  $K$  пересек единичную окружность. Если же  $N \gg 1$ , то переход через единичную окружность фактически гарантирует появление  $|p_s| > 1$  и свидетельствует о хаотической динамике.



Р и с. 10.2

При выводе условий регулярной динамики ограничимся получением оценки области "регулярности", которая при  $N \gg 1$  хорошо аппроксимирует истинную границу. В зависимости от параметров эллипс  $K$  может быть вытянут по горизонтальному или вертикальному направлениям. Горизонтальное расположение  $K$  осуществляется, когда  $\tilde{\mathcal{L}}^2(x+\delta)^2 \geq \tilde{\mathcal{L}}^2(x-\delta)^2$ , т. е.

$$|x+\delta| \geq |x-\delta| \quad (10.11)$$

(следовательно,  $x\delta \geq 0$ ), а вертикальное, когда

$$|x+\delta| < |x-\delta|, \quad (10.12)$$

т. е. когда  $x\delta < 0$ . Отсюда ясно, что при выполнении (10.12) точка касания  $K$  единичной окружности имеет ненулевую мнимую часть (рис. 10.2, в), а при выполнении (10.11) — находится на вещественной оси (рис. 10.2, г). Сначала приведем условия касания  $K$  с единичной окружностью при выполнении (10.12). Переходя в выражении (10.10)

к параметрической форме записи и учитывая двукратность корня в момент касания, получаем условия на параметры, при которых реализуется такая ситуация.

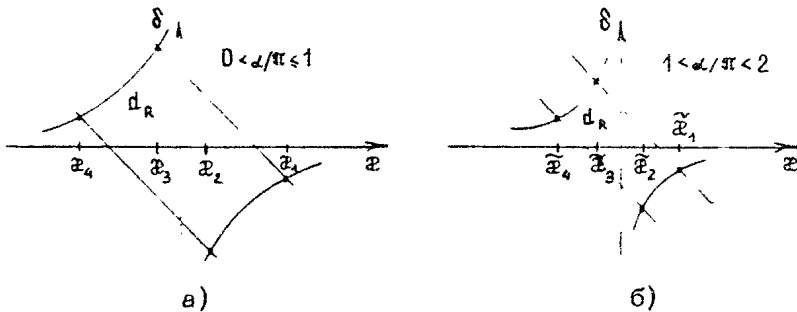
$$(\alpha - \delta)^2 [\tilde{\alpha}^2 - (1 - \tilde{\alpha})^2 / 4\tilde{\alpha}\delta] = 1 \quad (10.13)$$

Пусть теперь выполнено (10.11). Выделим два случая.

$$0 < \tilde{\alpha} \leq 1,$$

$$1 < \tilde{\alpha} < 2$$

В первом случае из условий касания (см. рис. 10.2, в) получаем, что область параметров, при которых  $|\rho_s| \leq 1$  (в дальнейшем эту область будем обозначать через  $d_R$ ), ограничена двумя кусками кривой (10.13) и отрезками двух прямых  $\alpha + \delta = \pm 1$  (рис. 10.3, а). Значения  $\alpha$  в точках пересечения следующие.  $\alpha_1 = 1/2 + 1/2\sqrt{\tilde{\alpha}}$ ,  $\alpha_2 = -1/2 + 1/2\sqrt{\tilde{\alpha}}$ ,  $\alpha_3 = -\alpha_2$ ,  $\alpha_4 = -\alpha_1$ .



Р и с. 10.3

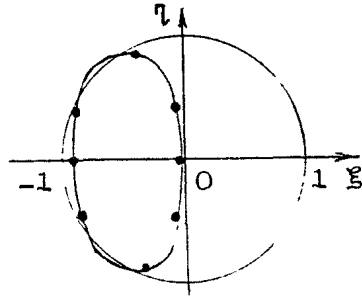
Во втором же случае область  $d_R$  ограничена отрезками прямых  $\alpha + \delta = \pm \frac{2 - \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}}$  и кусками той же кривой (10.13) - рис. 10.3, б. Здесь значения  $\alpha$  в угловых точках следующие:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{2 - \tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha}} + \frac{\sqrt{2 - \tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}}, \quad \tilde{\alpha}_4 = -\tilde{\alpha}_1,$$

$$\tilde{\alpha}_2 = -\frac{2 - \tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha}} + \frac{\sqrt{2 - \tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}}, \quad \tilde{\alpha}_3 = -\tilde{\alpha}_2$$

Переходя к условиям хаотической динамики в цепочке (10.1), сразу отметим, что при  $\tilde{\alpha} \leq 0$  и  $\tilde{\alpha} \geq 2$  в наборе  $\{\rho_s\}$  (10.9) всегда найдется  $\rho_s$  с  $|\rho_s| > 1$ , что свиде-

гельствует о хаотическом поведении. Теперь рассмотрим случай  $0 < \tilde{\alpha} < 2$ . Как уже говорилось, пересечение эллипсом единичной окружности не приводит к появлению  $|\rho_s| > 1$ , до тех пор пока кусок кривой на  $K$  вне единичной окружности не будет содержать точек  $\{\rho_s\}$



Р и с. 10.4

На рис. 10.4 изображена такая ситуация при  $N = 8$ . По этой причине не все границы являются одновременно и границами области хаоса. Но можно гарантировать, что при сколь угодно малом отклонении из

$d_R$  от отрезка  $\alpha + \delta = -1$ , а при четном  $N$  — и от отрезков прямых  $\alpha + \delta = \frac{2 - \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}}$ ,  $\alpha + \delta = -1$ , с необходимостью выполняются неравенства  $|\rho_0| > 1$ , и соответственно  $|\rho_{N/2}| > 1$ .

### 10.3. Стационарные волны

и пространственно однородные режимы

Как известно, вопрос о существовании стационарных волн в распределенных системах при помощи стандартной процедуры введения автомодельной переменной сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения [2, 9]. Ниже для нахождения стационарных волн системы (10.1) проводится аналогичная процедура в дискретном варианте. Будем искать решение (10.1) в виде

$$\varphi_n(\kappa) = \Psi(n + \epsilon \kappa), \quad (10.14)$$

где  $\epsilon = 0, 1, 2 \dots^*$ . Подставляя (10.14) в систему (10.1), получим

$$\Psi(n + \epsilon \kappa + \epsilon) = \Psi(n + \epsilon \kappa) - \alpha F(\Psi(n + \epsilon \kappa)) - \alpha \delta F(\Psi(n + \epsilon \kappa - 1)) - \tilde{\alpha} \alpha F(\Psi(n + \epsilon \kappa + 1)) + \beta \quad (10.15)$$

Ниже соотношения (10.15) сводятся к некоторому отображе-

Случай  $\epsilon < 0$  рассматривается аналогично и здесь не приводится.



нию  $(\zeta + 1)$ -мерной плоскости в себя. Вид этого отображения разный в зависимости от  $\zeta$ . Поэтому отдельно рассмотрим случаи  $\zeta = 0^*$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\zeta > 1$ . Предположим, что  $|\Psi(\zeta)| < \pi$  при всех значениях аргумента (ниже будет показано, что такие решения существуют). Тогда, вводя обозначения

$$\Psi(n+\zeta k-1) = \tau_{\zeta}^{(1)}, \quad \Psi(n+\zeta k) = \tau_{\zeta}^{(2)}, \quad \Psi(n+\zeta k+\zeta) = \tau_{\zeta}^{(\zeta+1)},$$

перепишем (10.15) в следующем виде:

при  $\zeta = 0$

$$\tau_{\zeta+1}^{(1)} = -\delta \tau_{\zeta}^{(1)} + \beta / \tilde{\alpha}, \quad \text{если } \alpha = 0, \text{ и} \quad (10.16)$$

$$\tau_{\zeta+1}^{(1)} = \tau_{\zeta}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta+1}^{(2)} = \frac{\beta}{\tilde{\alpha}\alpha} - \frac{\tau_{\zeta}^{(2)}}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} \tau_{\zeta}^{(1)}, \quad \text{если } \alpha \neq 0;$$

при  $\zeta = 1$

$$\tau_{\zeta+1}^{(1)} = \frac{\tilde{\alpha}\delta}{1-\tilde{\alpha}} \tau_{\zeta}^{(1)} - \beta / (1-\tilde{\alpha}), \quad \text{если } \tilde{\alpha}\alpha = -1^{**}, \quad (10.17)$$

$$\tau_{\zeta+1}^{(1)} = \tau_{\zeta}^{(2)}, \quad \tau_{\zeta+1}^{(2)} = \frac{1-\tilde{\alpha}}{1+\tilde{\alpha}\alpha} \alpha \tau_{\zeta}^{(2)} - \frac{\tilde{\alpha}\delta}{1+\tilde{\alpha}\alpha} \tau_{\zeta}^{(1)} + \frac{\beta}{1+\tilde{\alpha}\alpha}, \quad \text{если } \tilde{\alpha}\alpha \neq -1,$$

при  $\zeta \geq 2$

$$\begin{aligned} \tau_{\zeta+1}^{(1)} &= \tau_{\zeta}^{(2)}, & \tau_{\zeta+1}^{(2)} &= \tau_{\zeta}^{(3)}, & \dots, & \tau_{\zeta+1}^{(\zeta+1)} = \\ &= -\tilde{\alpha}\delta \tau_{\zeta}^{(1)} + (1-\tilde{\alpha})\tau_{\zeta}^{(2)} - \tilde{\alpha}\alpha \tau_{\zeta}^{(3)} + \beta \end{aligned} \quad (10.18)$$

Линейные отображения (10.16), (10.17), (10.18) порождают динамические системы, траектории которых, удовлетворяющие условиям

$$\tau_{\zeta+n}^{(i)} \equiv \tau_{\zeta}^{(i)}, \quad (10.19)$$

определяют искомые стационарные волны. Траектории отображения  $\mathcal{Q}$ , отличные от его неподвижной точки, которая

\* Решения (10.14) при  $\zeta = 0$ , вообще говоря, не являются бегущими волнами, но для удобства изложения мы тоже будем их называть стационарными волнами с нулевой скоростью.

\*\* Случай  $\tilde{\alpha} = 1$  здесь тривиален — стационарная волна возникает в пространственно однородное решение, отвечающее неподвижной точке отображения  $\mathcal{f}$ .

при наличии наших предположений всюду существует, могут удовлетворять условию (10.19) лишь в следующих случаях. 1)  $\nu_1 = +1$ ; 2)  $\nu_1 = -1$ ,  $N$  - четное; 3)  $\nu_1 = \exp\left(\pm i \frac{2\pi s'}{N}\right)$ ,  $s' \in Z_+$ , где  $\nu_1$  - наибольший по модулю мультипликатор неподвижной точки отображения  $g$ . Отметим, что волны существуют и в случае, когда любой из мультипликаторов неподвижной точки  $g$  удовлетворяет одному из приведенных условий. Однако, поскольку неустойчивость в пространстве стационарных волн с необходимостью влечет неустойчивость в фазовом пространстве (10.1), то будем рассматривать лишь стационарные волны, отвечающие  $\nu_1$ .

Другой важный класс режимов в моделях (в том числе и дискретных), описывающих неравновесные среды, - это пространственно однородные режимы [85]. Для системы (10.1) это решение  $\varphi_n(k)$ , не зависящее от  $n$ , т. е.

$\varphi_n(k) \equiv \psi(k)$  Из системы (10.1) получим

$$\psi(k+1) = \psi(k) - \mathcal{L}\pi(1+\mathfrak{x}+\delta)F(\psi(k)) + \beta, \quad (10.20)$$

где функция  $F(\psi) = \psi/\pi$  при  $-\pi \leq \psi < \pi$  и  $2\pi$ -периодична по  $\psi$ .

Если  $|1 - \mathcal{L} - \mathcal{L}(\mathfrak{x} + \delta)| > 1$ , то неподвижная точка отображения  $h$ , определяемого (10.20), неустойчива; неустойчиво и любое пространственно однородное решение в пространстве системы (10.1). Если  $|1 - \mathcal{L} - \mathcal{L}(\mathfrak{x} + \delta)| < 1$ , то все решения "загушают" к неподвижной точке  $h$ , координата которой совпадает с координатами неподвижной точки  $\psi^*$  отображения  $f$ . Пусть теперь  $1 - \mathcal{L} - \mathcal{L}(\mathfrak{x} + \delta) = 1$ , т. е.  $\mathfrak{x} + \delta = -1$ . Уравнение (10.20) примет вид

$$\psi(k+1) = \psi(k) + \beta \quad (10.21)$$

Это непрерывное отображение окружности - поворот на угол  $\beta$ . Если  $\beta/2\pi$  - иррационально, то все траектории отображения  $h$  квазипериодичны, если же  $\beta/2\pi = p/q$ , то все траектории  $h$  периодичны с периодом  $q$  [86]. Возвращаясь к фазовому пространству системы (10.1), получаем, что на горе  $T^N$  существует инвариантная окружность - "диагональ" гора  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N$ , на которой отображение  $f$  совпадает с  $h$ . Чтобы вывести условие устойчивости этой  $f$ -инвариантной кривой, приведем значения  $\beta_s$  при условии  $\mathfrak{x} + \delta = -1$ :

$$\beta_s = 1 - \mathcal{L} + \mathcal{L} \cos \frac{2\pi s}{N} - i \mathcal{L}(2\mathfrak{x} + 1) \sin \frac{2\pi s}{N} \quad (10.22)$$

Анализируя это выражение, получаем, что при выполнении неравенств

$$0 < \tilde{\alpha} < 1, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}} < \alpha < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}} \quad (10.23)$$

все  $|\rho_s| < 1$ ,  $s \neq 0$ , а  $\rho_0 = 1$  (это собственное значение соответствует направлению вдоль инвариантной кривой). Таким образом, при выполнении (10.23) пространственно однородное решение (10.21) устойчиво, а при невыполнении этих неравенств — неустойчиво (последнее также вытекает из (10.22)).

Рассмотрим второй случай:  $1 - \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}(\alpha + \delta) = -1$ , т. е.

$$\alpha + \delta = \frac{2 - \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \quad (10.24)$$

Отображение (10.20) примет вид

$$\omega(k+1) = -\omega(k) - 2\pi F(\omega(k)) + \beta \quad (10.25)$$

Оно имеет неподвижную точку, окрестность которой заполнена 2-периодическими траекториями (рис. 10.5). Этим траекториям отображения  $h$  отвечает однопараметрическое семейство пространственно однородных решений системы (10.1). При выполнении (10.24)

$$\rho_s = 1 - \tilde{\alpha} - (2 - \tilde{\alpha}) \cos \frac{2\pi s}{N} - i \tilde{\alpha} \left( 2\alpha - \frac{2 - \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) \sin \frac{2\pi s}{N} \quad (10.26)$$

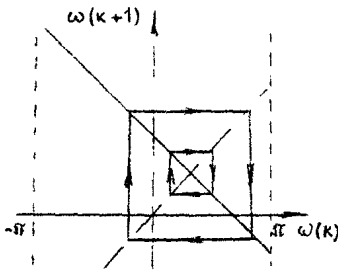
После выкладок получаем, что  $|\rho_s| < 1$  при условии  $s \neq 0$  и

$$1 < \tilde{\alpha} < 2, \quad \frac{2 - \tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha}} - \frac{\sqrt{2 - \tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}} < \alpha < \frac{2 - \tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha}} + \frac{\sqrt{2 - \tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}} \quad (10.27)$$

Очевидно также, что  $\rho_0 = 1$ . Следовательно, при выполнении (10.27) семейство пространственно однородных решений  $\{\omega(k)\}$  устойчиво. Эти решения лежат на прямой в фазовом пространстве системы (10.1), проходящей через неподвижную точку  $f$  в направлении собственного вектора, отвечающего  $\rho_0 = 1$ , и имеют вид

$$\varphi_n(k) = (-1)^k \varepsilon + \beta/2, \quad (10.28)$$

где  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , а  $\varepsilon_0 > 0$  определяется минимальным расстоянием



Р и с. 10.5

от неподвижной точки до множества разрыва вдоль прямой  $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_N$

#### 10.4. Устойчивость стационарных волн

Аналогично 10.3 рассмотрим отдельно три случая:  $\epsilon = 0$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\epsilon > 1$ . Предварительно отметим следующее. Пусть волна  $\tilde{\psi}_n(k) \equiv \Psi(n + \epsilon k)$  существует. Тогда для возмущений  $\xi_n(k) = \psi_n(k) - \tilde{\psi}_n(k)$  из системы (10.1) получим уравнение

$$\xi_n(k+1) = (1 - \tilde{\alpha})\xi_n(k) - \tilde{\alpha}\delta\xi_{n-1}(k) - \tilde{\alpha}\tilde{\alpha}\xi_{n+1}(k) \quad (10.29)$$

с периодическими краевыми условиями  $\xi_n(k) \equiv \xi_{n+N}(k)$ . Линейное отображение (10.29) имеет тот же дифференциал  $D_f$ , что и  $f$ . Поэтому, если все  $\rho_s$ , определяемые формулой (10.9), лежат в единичном круге комплексной плоскости, то волна устойчива — достаточно малые возмущения затухают по всем направлениям за исключением одного (в случае  $\nu_1 = \pm 1$ ) или двух ( $\nu_1 = \text{etr}(\pm 2\pi s'/N)$ ), по которым они не нарастают.

Начнем со случая  $\epsilon = 0$ . Легко показать, что равенство  $\nu_1 = \pm 1$  и условие существования неподвижной точки отображения  $f$  при  $\beta \neq 0$  противоречивы. Рассмотрим случай  $\nu_1 = \text{etr}(\pm i \frac{2\pi s'}{N})$  ( $s' \neq N$ , так как  $\nu_1 = +1$ , и  $s' \neq N/2$ , так как  $\nu_1 = -1$ , а эти случаи рассматриваются отдельно). Поэтому неподвижная точка отображения  $Q$  (10.16) с необходимостью является центром, и  $\alpha = \delta$ ,  $2 \cos(2\pi s'/N) = -1/\alpha$ , а

$$\rho_s = 1 - \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \cos \frac{2\pi s'}{N} \left( \cos \frac{2\pi s'}{N} \right)^{-1}$$

Отсюда следует\*, что существует  $s$ , для которого  $|\rho_s| > 1$ , и значит, стационарная волна неустойчива.

Пусть теперь  $\nu_1 = -1$ . Это возможно, когда  $\alpha + \delta = 1$ . Находя собственный вектор дифференциала отображения  $Q$  (см. (10.16)), отвечающий  $\nu_1$ , получаем уравнение семейства "стоячих" волн

\* Предполагается, что  $N > 3$ ; для  $N = 3$  стационарная волна устойчива, если  $|1 - 3\tilde{\alpha}| < 1$

$$\varphi_n(\kappa) = (-1)^n \varepsilon + \beta/2\tilde{\alpha}, \quad (10.30)$$

где  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , а  $\varepsilon_0$  определяется расстоянием от  $\varphi^*$  до множества разрыва. В этом случае

$$\rho_s = (1-\tilde{\alpha}) - \tilde{\alpha} \cos \frac{2\pi s}{N} - i\tilde{\alpha}(2\alpha-1) \sin \frac{2\pi s}{N},$$

откуда получаем, что волны (10.30) будут устойчивы при выполнении неравенств

$$0 < \tilde{\alpha} < 1, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}} \quad (10.31)$$

Пусть теперь  $t = 1$ . Из двух случаев в (10.17) рассмотрим сначала первый:  $\tilde{\alpha}\alpha = -1$ . Отображение  $q$  здесь одномерно, поэтому логически возможны лишь два варианта:  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_1 = -1$ . Как и в предыдущем случае, равенству  $\nu_1 = 1$  не соответствует стационарная волна. Для второго варианта  $\nu_1 = -1$  и при учете (10.17) получаем, что стационарная волна существует при условиях

$$\alpha\delta = \alpha - 1, \quad \tilde{\alpha}\alpha = -1 \quad (10.32)$$

При выполнении (10.32)

$$\rho_s = (1-\tilde{\alpha}) - (\tilde{\alpha}-2) \cos \frac{2\pi s}{N} + i \sin \frac{2\pi s}{N}$$

Отсюда вытекает, что существует  $s$  такое, что  $|\rho_s| > 1$ , т. е. волна неустойчива.

Рассмотрим случай  $\tilde{\alpha}\alpha \neq -1$ . Если  $\nu_1 = 1$ , то  $f$  не имеет неподвижной точки и стационарной волны не существует. Пусть  $\nu_1 = -1$ . Тогда

$$\alpha + \delta = -\frac{2-\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}}$$

При этом условии

$$\rho_s = (1-\tilde{\alpha}) + (2-\tilde{\alpha}) \cos \frac{2\pi s}{N} - i \frac{\tilde{\alpha}}{\pi} \left( 2\alpha + \frac{2-\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} \right) \sin \frac{2\pi s}{N} \quad (10.33)$$

Если выполнены неравенства

$$1 < \alpha < 2, \quad -\frac{2-\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} - \frac{\sqrt{2-\tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}} < \alpha < -\frac{2-\tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha}} + \frac{\sqrt{2-\tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}}, \quad (10.34)$$

то  $|\rho_s| < 1$ ,  $s \neq N/2$ ,  $\rho_{N/2} = -1$ . Следовательно, семейство стационарных волн

$$\psi_n(\kappa) = (-1)^{n+\kappa} \varepsilon + \frac{\beta}{2(\alpha-1)} \quad (10.35)$$

устойчиво ( $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ )

Рассмотрим теперь случай  $\rho_{s'} = e \mp \rho \left( \pm i \frac{2\pi s'}{N} \right)$ ,  $s' \neq N$ ,  
 $s' \neq N/2$  Отсюда

$$\delta = 1 + \alpha x, \quad (1-\alpha)(1+\alpha x)^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi s'}{N}, \quad (10.36)$$

$$\rho_s = (1-\alpha) - (2\alpha x + 1) \cos \frac{2\pi s}{N} + i \sin \frac{2\pi s}{N} \quad (10.37)$$

Поскольку при  $|2\alpha x + 1| > 1$  наличие комплексного корня  $\rho_s$  приводит к существованию  $|\rho_s| > 1$ , то такие (неустойчивые) стационарные волны рассматривать не будем. Итак, пусть

$$|1 + 2\alpha x| < 1 \quad (10.38)$$

Поскольку большая полуось эллипса  $K$  (на котором лежат значения  $\rho_s$ ) здесь равна единице, то первыми при изменении параметров пересекают единичную окружность корни  $\rho_{s_0}$ , для которых  $2\pi s_0 / N$  — ближайшее значение справа от  $\pi/2$ , если  $1 - \alpha > 0$  (рис. 10.6,а), и ближайшее слева, если  $1 - \alpha < 0$  (рис. 10.6,б). Случай, когда  $N$  кратно четырем, следует рассматривать отдельно, так как в этом случае  $s_0 = N/4$  или  $s_0 = 3N/4$  (рис. 10.6,в).

Пусть сначала  $s_0 = N/4$ , тогда  $\rho_{N/4} = 1 - \alpha + i$  и из условия  $|\rho_{N/4}| = 1$  получаем  $1 - \alpha = 0$ . Поэтому из соотношения (10.36) выводим, что  $\delta = 1 + \alpha x$  и  $\cos(2\pi s'/N) = 0$ , т. е.  $s' = N/4$  или  $s' = 3N/4$ . Следовательно, уравнение двухпараметрического семейства стационарных волн будет

$$\psi_n(\kappa) = \varepsilon \cos \left[ \frac{\pi}{2}(n+\kappa) + \theta \right] + \frac{\beta}{2(\alpha+1)}, \quad (10.39)$$

где  $\varepsilon$  — амплитуда,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , а  $\theta$  — начальная фаза волны. Эти волны устойчивы при  $-1 < \alpha < 0$ .

Если  $N$  не кратно четырем, то равенство  $|\rho_{s_0}| = 1$  (см. рис. 10.6) влечет за собой выполнение условия

$$\tilde{x} = -1 + (1 - \tilde{x} / 2 \cos \frac{2\pi s_0}{N}) \quad (10.40)$$

и равенства  $\cos(2\pi s' / N) = \cos(2\pi s_0 / N)$ , откуда получаем

$$s' = s_0, \text{ или } s' = N - s_0. \quad (10.41)$$

Семейство стационарных волн

$$\varphi_n(k) = \varepsilon \cos \left[ \frac{2\pi s_0}{N} (n+k) + \theta \right] + \frac{\beta}{2(1+x)} \quad (10.42)$$

существует при

$$x = \frac{1}{\tilde{x}} \left[ \frac{1 - \tilde{x}}{\cos(2\pi s_0 / N)} - 1 \right], \quad \delta = \frac{1 - \tilde{x}}{2\tilde{x} \cos(2\pi s_0 / N)} \quad (10.43)$$

и устойчиво при выполнении неравенства

$$|1 - \tilde{x}| < 2 \left| \cos \frac{2\pi s_0}{N} \right| \quad (10.44)$$

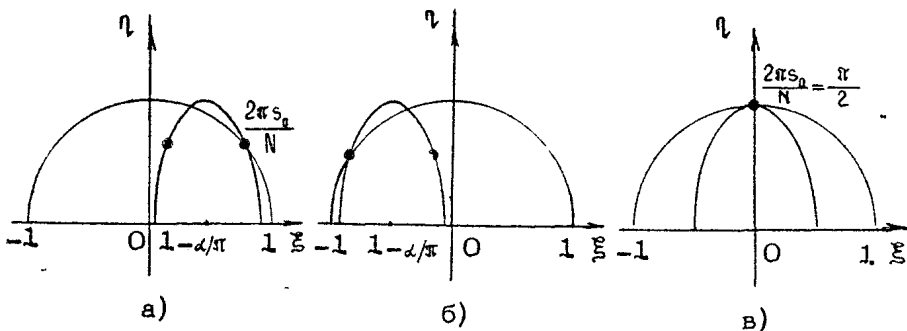
Перейдем к рассмотрению случая  $c \geq 2$ ,  $c \in Z_+$ . Запишем характеристическое уравнение для неподвижной точки отображения  $q$  - см. (10.18).

$$A \equiv \det \begin{pmatrix} -\nu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\nu & 1 \\ -\tilde{x}\delta & 1-\tilde{x} & -\tilde{x} & 0 & & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

т. е.  $\nu^{c+1} + \nu^2 \tilde{x} x - \nu(1 - \tilde{x}) + \tilde{x} \delta = 0$ . Сразу отметим, что  $\nu_1$  не может равняться  $+1$ , так как из уравнения (10.45) следует соотношение, при котором неподвижной точки  $u$  отображения  $q$  (и  $f$ ) не существует. Предположим, что  $\nu_1 = -1$  и  $N$  - четное число. Подставляя это значение в (10.45), получим следующее условие на параметры:

$$\delta + x = - \frac{1 - \tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{(-1)^{c+1}}{\tilde{x}} \quad (10.46)$$

Пусть  $c = 2l + 1$  - нечетное число; равенство (10.46) примет вид



Р и с. 10.6

$$\delta + \alpha = \frac{\tilde{\alpha} - 2}{\tilde{\alpha}}, \quad (10.47)$$

а

$$\rho_s = (1 - \tilde{\alpha}) - (\tilde{\alpha} - 2) \cos \frac{2\pi s}{N} - i\tilde{\alpha} \left( 2\alpha - \frac{\tilde{\alpha} - 2}{\tilde{\alpha}} \right) \sin \frac{2\pi s}{N} \quad (10.48)$$

Пусть  $\nu = 2\beta$  — четное число, тогда (10.46) переходит в  $\delta + \alpha = 1$ , а

$$\rho_s = (1 - \tilde{\alpha}) - \tilde{\alpha} \cos \frac{2\pi s}{N} - i\tilde{\alpha} (2\alpha - 1) \sin \frac{2\pi s}{N} \quad (10.49)$$

Уравнение семейства стационарных волн при условии (10.46) имеет вид

$$\varphi_n(k) \equiv \mathcal{F}(n+ck) = (-1)^{n+ck} \epsilon + \frac{\beta}{[2\tilde{\alpha} - 1 - (-1)^{n+ck}]}, \quad |\epsilon| < \epsilon_0 \quad (10.50)$$

Используя (10.48), (10.49), получаем следующие условия устойчивости семейства (10.50):

при  $s$  нечетных

$$1 < \tilde{\alpha} < 2, \quad \frac{(2 - \tilde{\alpha})}{2\tilde{\alpha}} - \frac{\sqrt{2 - \tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}} < \alpha < \frac{-(2 - \tilde{\alpha})}{2\tilde{\alpha}} + \frac{\sqrt{2 - \tilde{\alpha}}}{2\tilde{\alpha}}, \quad (10.51)$$

при  $s$  четных

$$0 < \tilde{\alpha} < 1, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}}. \quad (10.52)$$



Перейдем к рассмотрению случая  $\nu_1 = \exp(\pm i \frac{2\pi s'}{N})$ ,  $s' \neq N$ ,  $s' \neq N/2$ . Подставляя это значение  $\nu_1$  в уравнение (10.45) и приравнявая к нулю действительную и мнимую части, получим

$$\cos \frac{2\pi s'}{N} (\epsilon + 1) = -\tilde{\alpha} \delta + (1 - \tilde{\alpha}) \cos \frac{2\pi s'}{N} - \tilde{\alpha} \epsilon \cos \frac{4\pi s'}{N}, \quad (10.53)$$

$$\sin \frac{2\pi s'}{N} (\epsilon + 1) = (1 - \tilde{\alpha}) \sin \frac{2\pi s'}{N} - \tilde{\alpha} \epsilon \sin \frac{4\pi s'}{N},$$

откуда вытекает равенство

$$(1 - \tilde{\alpha})^2 + \tilde{\alpha}^2 (\epsilon - \delta)^2 - 2\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\alpha})(\epsilon + \delta) \cos \frac{2\pi s'}{N} + 4\tilde{\alpha}^2 \delta \epsilon \cos^2 \frac{2\pi s'}{N} = 1 \quad (10.54)$$

Условия (10.53) выделяют значения параметров, при которых существуют волны, отвечающие рассматриваемому значению  $\nu_1$ . Используя тот факт, что на плоскости, отвечающей  $\nu_1$ , отображение  $\mathcal{Q}$  имеет точку типа центр, и находя собственные векторы, отвечающие  $\nu_1$ ,  $\nu_1^*$ , получаем уравнение семейства этих волн

$$\varphi_n(k) = \Psi(n + \sqrt{\epsilon k}) = \epsilon \cos \left[ \frac{2\pi s'}{N} (n + \sqrt{\epsilon k}) + \theta \right] + \frac{\beta}{\tilde{\alpha}(1 + \epsilon + \delta)}, \quad (10.55)$$

где амплитуда  $\epsilon$  достаточно мала, а "начальная" фаза  $\theta$  произвольна.

Рассмотрим вопрос об устойчивости волн (10.55). Из соотношения (10.9) получаем, что

$$|\rho_s|^2 = (1 - \tilde{\alpha})^2 + \tilde{\alpha}^2 (\epsilon - \delta)^2 - 2\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\alpha})(\epsilon + \delta) \cos \frac{2\pi s'}{N} + 4\tilde{\alpha}^2 \epsilon \delta \cos^2 \frac{2\pi s'}{N} \quad (10.56)$$

Отсюда следует, что при  $s = s'$   $|\rho_s|^2 = 1$ . Найдем условия на параметры, при которых  $|\rho_s|^2 < 1$ , если  $\rho_s \neq \rho_{s'}$  и  $\rho_s \neq \rho_{s'}^*$ , т. е. условия устойчивости волны (10.55).

Пусть  $s$  таково, что  $\rho_s \neq \rho_{s'}$ ,  $\rho_s \neq \rho_{s'}^*$ . Вычитая из (10.54) равенство (10.56), получим

$$|\rho_s|^2 - |\rho_{s'}|^2 = 1 - |\rho_s|^2 - 2\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\alpha})(\epsilon + \delta) \left( \cos \frac{2\pi s'}{N} + \cos \frac{2\pi s}{N} \right) + 4\tilde{\alpha}^2 \delta \epsilon \left( \cos^2 \frac{2\pi s'}{N} - \cos^2 \frac{2\pi s}{N} \right)$$

Условие положительности величины  $1 - |\rho_s|^2$  приводит к неравенству

$$2\tilde{\alpha}\varepsilon\delta \cos^2 \frac{2\pi s}{N} - 2\tilde{\alpha}\varepsilon\delta \cos^2 \frac{2\pi s'}{N} + (1-\tilde{\alpha})(\varepsilon+\delta) \cos \frac{2\pi s'}{N} - (1-\tilde{\alpha})(\varepsilon+\delta) \cos \frac{2\pi s}{N} < 0, \quad (10.57)$$

которое должно выполняться для всех рассматриваемых значений  $s$ . Отсюда вытекает, что при  $\varepsilon\delta \geq 0$  неравенство (10.57) для некоторых  $s$  не выполняется и, следовательно, в этом случае волны (10.55) неустойчивы. В случае же  $\varepsilon\delta < 0$  неравенство (10.57) будет выполнено (для любых  $s$ ) при условии

$$\left| \frac{(1-\tilde{\alpha})(\varepsilon+\delta)}{2\tilde{\alpha}\varepsilon\delta} - 2 \cos \frac{2\pi s'}{N} \right| < \Delta_s, \quad (10.58)$$

где

$$\Delta_s = \min \left\{ \left| \cos \frac{2\pi(s'+1)}{N} - \cos \frac{2\pi s'}{N} \right|, \left| \cos \frac{2\pi s'}{N} - \cos \frac{2\pi(s'-1)}{N} \right| \right\}$$

Отметим, что условия существования (10.54) и устойчивости (10.58) выделяют в пространстве параметров непустое множество для каждого рассматриваемого  $s'$  (т. е.  $s' = 1, 2, \dots, N-1$ ;  $s' = N/2$ ). В этом нетрудно убедиться, приравняв нулю левую часть (10.58) и подставив найденное выражение  $\cos(2\pi s'/N)$  в равенство (10.54), получим точку на границе области устойчивости (10.13).

### 10.5. Модулированные волны

В предыдущих разделах были исследованы стационарные волны и пространственно однородные режимы в системе (10.1). Ниже будет изучен еще один класс волновых движений, который по аналогии с непрерывным случаем [87] будем называть модулированными по пространству волнами. Такие решения будем искать в области непрерывности отображения  $f$ , при этом в системе (10.1) перейдем к комплексному переменному. Рассмотрим систему

$$\varphi_n(k+1) = \varphi_n(k) - \tilde{\alpha}\varphi_n(k) - \tilde{\alpha}\delta\varphi_{n-1}(k) - \tilde{\alpha}\varepsilon\varphi_{n+1}(k) + \beta, \quad (10.59)$$

где  $\operatorname{Re} \Phi_n(k) = \psi_n(k)$ ,  $\Phi_{n+N}(k) \equiv \Phi_n(k)$ . Решения  $\tilde{\Phi}_r(k)$  системы (10.6), для которых  $\tilde{\Phi}_k(k) \equiv \operatorname{Re} \tilde{\Phi}_n(k)$ , принадлежат области непрерывности  $f$ , определяют решения  $\tilde{\Psi}_n(k)$  системы (10.1). Будем искать решения системы (10.59) в виде

$$\Phi_n(k) = A(n) \exp(i\epsilon k) + \frac{\beta}{\alpha(1+\epsilon+\delta)}, \quad (10.60)$$

где  $A(n) \in \mathbb{C}$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$  — произвольный параметр. Подстановка (10.60) приводит к уравнению

$$A(n+1) = \frac{1}{\alpha \alpha} (1 - \tilde{\alpha} - e^{i\epsilon}) A(n) - \frac{\delta}{\alpha} A(n-1) \quad (10.61)$$

Крайние условия для (10.59) влекут следующие условия для (10.61):

$$A(n+N) \equiv A(n)$$

Решения вида

$$A(n) = \epsilon \exp(i\theta) \exp\left(i \frac{2\pi s'}{N} n\right) \quad (10.62)$$

удовлетворяют этим условиям и существуют, если выполнены следующие соотношения на параметры:

$$\tilde{\alpha} \alpha \exp\left(i \frac{4\pi s'}{N}\right) = [1 - \tilde{\alpha} - \exp(i\epsilon)] \exp\left(i \frac{2\pi s'}{N}\right) - \tilde{\alpha} \delta, \quad (10.63)$$

$$\cos\left(\epsilon + \frac{2\pi s'}{N}\right) = -\tilde{\alpha} \delta + (1 - \tilde{\alpha}) \cos \frac{2\pi s'}{N} - \tilde{\alpha} \alpha \cos \frac{4\pi s'}{N},$$

$$\sin\left(\epsilon + \frac{2\pi s'}{N}\right) = (1 - \tilde{\alpha}) \sin \frac{2\pi s'}{N} - \tilde{\alpha} \alpha \sin \frac{4\pi s'}{N} \quad (10.64)$$

(ср. с (10.53))\*. Найденные условия (10.64) являются условиями существования модулированных волн.

\* Прямой проверкой убеждаемся, что при  $\epsilon \neq 0, \pi$  значения  $s' = 0, N/2$  (при четном  $N$ ) не удовлетворяют соотношению (10.63) ни при каких значениях параметров.

$$\varphi_n(k) \equiv k \Phi_n(k) = \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi s'}{N} n + \varepsilon k + \theta\right) + \frac{\beta}{\tilde{\alpha}(1+\alpha+\delta)}, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (10.65)$$

Из соотношений (10.63, и (10.9) получаем

$$\rho_{s'} = e^{i\varepsilon}, \quad (10.66)$$

т. е.  $|\rho_{s'}| = 1$ , а условия на параметры, при которых  $|\rho_s| < 1$  ( $\rho_s \neq \rho_s^*$ ), точно совпадают с условиями (10.58). Это вытекает из того факта, что правые части равенств (10.64) и (10.53) одинаковы. Заметим, что при  $\varepsilon = 2\pi s'/N$  решения (10.65) переходят в стационарные волны (10.55).

Таким образом, для каждого  $s'$  ( $s' \neq N/2$ ) условия (10.64) определяют на плоскости  $(\alpha, \delta)$  ( $\tilde{\alpha} = \cos \alpha$ ) кривую второго порядка, имеющую вид

$$\begin{aligned} & \left(1 - \cos \frac{4\pi s'}{N}\right) \left[ (\alpha + \delta) - \frac{2(1 - \tilde{\alpha}) \cos \frac{2\pi s'}{N}}{\tilde{\alpha} \left(1 - \cos \frac{4\pi s'}{N}\right)} \right]^2 + \\ & + \left(1 + \cos \frac{4\pi s'}{N}\right) (\alpha - \delta)^2 = \frac{2(2 - \tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}} + \frac{4(1 - \tilde{\alpha})^2 \cos^2 \frac{2\pi s'}{N}}{\tilde{\alpha}^2 \left(1 - \cos \frac{4\pi s'}{N}\right)}, \quad (10.67) \end{aligned}$$

если  $1 - \cos \frac{4\pi s'}{N} \neq 0$ , и

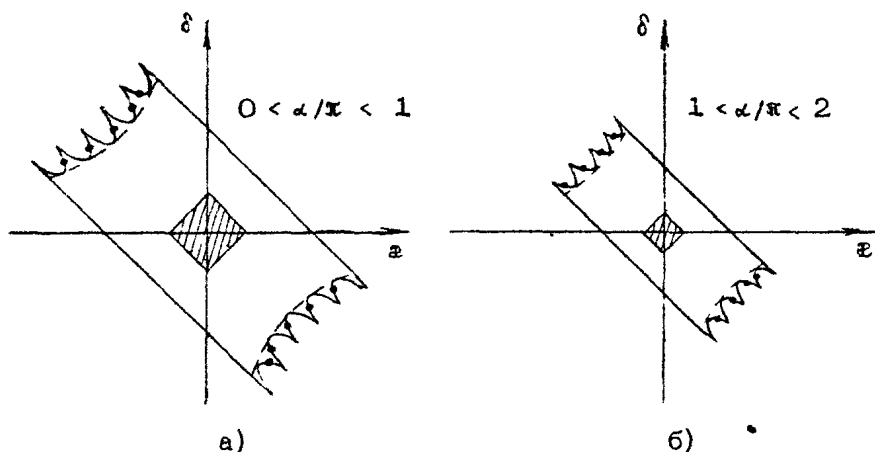
$$(\alpha - \delta)^2 + \frac{2(1 - \tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}} (\alpha + \delta) = \frac{2 - \tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}},$$

если  $1 - \cos \frac{4\pi s'}{N} = 0$ . Каждой точке на этой кривой соответствует значение  $\varepsilon$ , которому, в свою очередь, отвечает волна (10.65). Однако эта волна устойчива не для всех точек кривой, а лишь для значений  $(\alpha, \delta)$ , удовлетворяющих неравенству (10.58). Меняя  $s'$ , получаем набор кривых (10.67), пересекающихся между собой для соседних значений  $s'$ ; точки пересечений выделяют куски кривых (10.67), которые образуют кусочно-гладкую кривую, отвечающую устойчивым волнам (10.65). При этом на каждом куске имеется единственная точка, отвечающая стационарной волне (10.55) (рис. 10.7). На рис. 10.7 изображены куски кривых (10.67), отвечающие устойчивым волнам. Пунктирной линией отмечена линия (10.13), являющаяся огиба-

Режимы	Уравнение волны	Условия существования	Условия устойчивости
Пространственно однородные режимы	$\varphi_n(k) = \theta + k\beta \pmod{2\pi}$	$\alpha + \delta = -1$	$0 < \alpha < 1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} < \alpha < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$
	$\varphi_n(k) = (-1)^k \varepsilon + \frac{\beta}{2}$	$\alpha + \delta = (2 - \alpha) / \alpha$	$1 < \alpha < 2, \frac{2 - \alpha}{2\alpha} - \frac{\sqrt{2 - \alpha}}{2\alpha} < \alpha < \frac{2 - \alpha}{2\alpha} + \frac{\sqrt{2 - \alpha}}{2\alpha}$
Пространственно неоднородные режимы	$\varphi_n(k) = (-1)^n \varepsilon + \frac{\beta}{2\alpha}$	$\alpha + \delta = 1$	$0 < \alpha < 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$
	$\varphi_n(k) = (-1)^{n+k} \varepsilon + \frac{\beta}{2(\alpha-1)}$	$\alpha + \delta = -\frac{2 - \alpha}{\alpha}$	$1 < \alpha < 2, -\frac{2 - \alpha}{2\alpha} + \frac{\sqrt{2 - \alpha}}{2\alpha} < \alpha < \frac{2 - \alpha}{2\alpha} - \frac{2 - \alpha}{2\alpha}$
Стояковые волны	$\varphi_n(k) = \varepsilon \cos \left[ \frac{\pi}{2} (n+k) + \theta \right] + \frac{\beta}{2} (\alpha + 1)$	$\alpha - \delta = -1$	$-1 < \alpha < 0$
	$\varphi_n(k) = \varepsilon \cos \left[ \frac{2\pi s_0}{N} * \right. \\ \left. * (n+k) + \theta \right] + \\ \left. + \frac{\beta}{2} (\alpha + 1) \right.$	$\alpha = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1 - \alpha}{2 \cos(2\pi s_0 / N)} - 1 \right]$ $\delta = \frac{1 - \alpha}{2\alpha \cos \frac{2\pi s_0}{N}}$	$ 1 - \alpha  < 2 \left  \cos \frac{2\pi s_0}{N} \right $

r=1





Р и с. 10.7

ющей набора кривых (10.67). Заметим, что эта кривая является приближенной границей области регулярной динамики (см. разд. 10.2).

Закljučая исследование кольцевых цепочек, отметим, что в такой цепочке всегда существует область параметров (заштрихованная область на рис. 10.7), которой отвечает глобально устойчивый пространственно однородный режим синхронизации.

Этот режим остается (локально) устойчивым вплоть до границы области регулярной динамики. Эта граница — кусочно-гладкая замкнутая кривая  $\Lambda$ , состоящая из нескольких компонент. Одни из этих компонент отвечают смене устойчивости статического пространственно однородного решения, другие — бифуркации его исчезновения в множестве разрыва. Основные типы движений, условия их существования и устойчивости приведены в табл. 10.1, где введен вспомогательный параметр  $s_0$ , такой, что  $s_0 \in \mathbb{Z}_+$ , а значение  $2\pi s_0/N$  выбирается ближайшим справа от  $\pi/2$ , если  $1 - \alpha > 0$ , и ближайшим слева, если  $1 - \alpha < 0$ .

Смена устойчивости сопровождается появлением на границе области регулярной динамики различных типов волновых движений – стационарных и модулированных волн и 2-периодических пространственно однородных состояний, а бифуркация исчезновения – появлением нетривиальных (квазипериодических) пространственно однородных решений. Вне области, ограниченной кривой  $\Delta$ , система демонстрирует хаотические колебания.



## ПОРЯДОК И ХАОС В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

В этой главе рассматриваются вопросы, несколько выходящие за рамки основной тематики книги. Глава посвящена изучению динамики однокомпонентной одномерной дискретной модели активной среды с диффузией. Интерес к этой модели связан отчасти с тем, что к ней можно свести при некоторых предположениях задачу о поведении цепочки систем синхронизации с частотным управлением (см. гл. 8), но главным образом с тем, что к моделям такого типа приводит большое число задач (самой различной природы), возникающих в теории неравновесных сред с дискретным расположением активных элементов в пространстве. В ряде случаев состояние этих систем изменяется циклическим образом и во времени. К системам указанного типа могут быть отнесены клеточные биологические ткани при слабой связи между клетками [88,89], некоторые искусственные нейроподобные среды [90] и др. Динамические процессы в этих системах описываются дискретными моделями [1,2,52,91]. К дискретным моделям приводит также и любой численный эксперимент с непрерывными моделями неравновесных сред, поскольку такая процедура всегда включает в себя использование некоторых рандомных схем.

### 11.1. Замечания о модели

В настоящей главе рассматривается однокомпонентная, одномерная дискретная модель активной среды с диффузией, имеющая вид

$$\frac{u_n(k+1) - u_n(k)}{\tau} = \frac{d(u_{n+1}(k) - 2u_n(k) + u_{n-1}(k))}{h^2} + \Phi(u_n(k)) \quad (11.1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  - дискретное время,  $n = 1, 2, \dots, N$  - дискретная пространственная координата;  $\tau, h$  - параметры, характеризующие масштабы дискретности;  $d$  - коэффициент диффузии, который считается постоянным;  $\Phi = \alpha F(u) - \beta$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\beta$  - параметры, а функция  $F(u)$  удовлетворяет условиям

$$F(u) = \begin{cases} -2u, & \text{если } u < 1/2, \\ -2(u-1), & \text{если } u > 1/2 \end{cases} \quad (11.2)$$

Система (11.1), (11.2) представляет собой дискретный вариант базовой модели однокомпонентной среды – уравнения типа Колмогорова – Петровского – Пискунова (КПП). Как известно (см., например, [1,52,91], это уравнение встречается в задачах биофизики, теории горения, химической кинетики, твердотельной электроники и т.д.

Систему (11.1), (11.2) можно интерпретировать как порожденную разрывным отображением  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Движениям модели (11.1), (11.2) соответствует отрезок полутраектории отображения  $f$ , состоящий из  $N$  точек. В дальнейшем рассматриваются только те траектории  $f$ , которые не попадают в множество разрыва  $\{u_n(k) = 1/2\}$ . Поэтому доопределение  $f$  на множестве разрыва здесь не проводится. Будем рассматривать систему (11.1), (11.2) с периодическими граничными условиями

$$u_{n+N}(k) \equiv u_n(k) \quad (11.3)$$

При выполнении (11.3) система (11.1), (11.2) моделирует "кольцо" активной среды.

## 11.2. Хаотической динамика модели

Найдем ляпуновские характеристические показатели системы (11.1) – (11.3), с помощью которых установим условия хаотического и регулярного поведения этой системы. В нашем случае, поскольку  $F(u)$  – кусочно-линейная функция с одинаковой производной, дифференциал  $Df$  отображения  $f$  – постоянная матрица и ляпуновские показатели  $\lambda_s = \ln |\rho_s|$ , где  $\rho_s$  – собственные числа этой матрицы. Если в наборе  $\rho_s$  имеется собственное число, лежащее на комплексной плоскости вне единичного круга, то в силу того, что отображение  $f$  – кусочно-линейное, любая траектория неустойчива. Вычисление  $\rho_s$  проведем по той же схеме, что и в гл. 10 (см. разд. 10.3). Запишем, принимая во внимание граничные условия (11.3), дифференциал отображения  $f$

$$D_f \equiv Q_N = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau & \frac{d\tau}{h^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{d\tau}{h^2} \\ \frac{d\tau}{h^2} & 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau & \frac{d\tau}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d\tau}{h^2} & 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau & \frac{d\tau}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{d\tau}{h^2} & 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau & \frac{d\tau}{h^2} \\ \frac{d\tau}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{d\tau}{h^2} & 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau \end{pmatrix}$$

Разлагая  $\det(Q_N - \rho E_N)$  по первой строке, получим

$$\det(Q_N - \rho E_N) = 2z\epsilon B_{N-1} - 2\epsilon' B_{N-2} - 2(-1)^N \left(\frac{d\tau}{h^2}\right)^N, \quad (11.4)$$

где

$$2z\epsilon = 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau - \rho, \quad \epsilon^2 = \frac{d^2\tau^2}{h^4},$$

$$B_m = \begin{vmatrix} 2z\epsilon & \epsilon & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon & 2z\epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 2z\epsilon & \epsilon & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \epsilon & 2z\epsilon & \epsilon \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \epsilon & 2z\epsilon \end{vmatrix}$$

Выразим  $B_{N-1}$  и  $B_{N-2}$  через полиномы Чебышева второго рода (см. гл. 9, разд. 9.2)

$$B_{N-1} = \epsilon^{N-1} U_{N-1}(z), \quad B_{N-2} = \epsilon^{N-2} U_{N-2}(z) \quad (11.5)$$

Подставляя (11.5) в (11.4) и принимая во внимание вид этих полиномов, получим

$$\det(Q_N - pE_N) = 2\varepsilon^N \left\{ \frac{z}{2\sqrt{z^2-1}} \left[ (z+\sqrt{z^2-1})^N - (z-\sqrt{z^2-1})^N \right] - \frac{1}{2\sqrt{z^2-1}} \left[ (z+\sqrt{z^2-1})^{N-1} - (z-\sqrt{z^2-1})^{N-1} \right] - (-1)^N \left( \frac{d\tau}{\varepsilon h^2} \right)^N \right\}$$

Отсюда после замены  $t = z - \sqrt{z^2-1}$  имеем

$$\det(Q_N - pE_N) = 2\varepsilon^N \left[ \frac{t^{2N} + 1}{2t^N} - (-1)^N \left( \frac{d\tau}{\varepsilon h^2} \right)^N \right] \quad (11.6)$$

Отсюда вытекает, что уравнение  $\det(Q_N - pE_N) = 0$  эквивалентно уравнению

$$t^{2N} - 2(-1)^N t^N + 1 = 0 \quad (11.7)$$

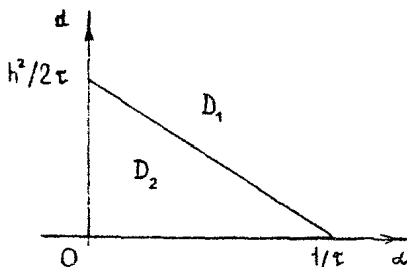
Уравнение (11.7) легко решается и в зависимости от  $N$  имеет различные корни. Если  $N$  - четное, то  $t = \exp\left(\frac{2\pi s}{N} i\right)$ , а если  $N$  - нечетное, то  $t = \exp\left(\frac{2s+1}{N} \pi i\right)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N-1$ . Отсюда, возвращаясь к исходным переменным, находим искомый набор  $\rho_s$

$$\rho_s = \begin{cases} 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau - \frac{2d\tau}{h^2} \cos \frac{2\pi s}{N}, & \text{если } N - \text{четное} \\ 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau - \frac{2d\tau}{h^2} \cos \frac{(2s+1)\pi}{N}, & \text{если } N - \text{нечетное} \\ & s = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Проанализируем, как расположен на комплексной плоскости набор собственных чисел  $\rho_s$  в зависимости от параметров системы (11.1) - (11.3). Поскольку все  $\rho_s$  действительные, этот анализ тривиален. Для точек области параметров  $D_1$  определяемой неравенством

$$\frac{2\tau}{h^2} d + \alpha\tau > 1, \quad (11.9)$$

в набор  $\rho_s$  имеется, по крайней мере, один корень, удовлетворяющий неравенству  $|\rho_s| > 1$ . Следовательно, при этих значениях параметров любая траектория неустойчива и система (11.1) - (11.3) обладает хаотической динамикой. Противоположное (11.9) неравенство выделяет на плоскости  $(\alpha, d)$  ( $h, \tau = \text{const}$ ) область  $D_2$  (рис. 11.1), любой точке которой отвечает спектр  $\rho_s$ , удовлетворяющий неравенствам  $|\rho_s| < 1$ ,  $s = 0, 1, \dots, N-1$ . Это означает, что при значениях параметров из  $D_2$  система (11.1) - (11.3) имеет регулярную динамику.



Р и с. 11.1

Рассмотрим более детально хаотическую динамику модели. Важной характеристикой хаотического множества  $A$  является его ляпуновская размерность [2,82, 92,93]. Пусть ляпуновские показатели упорядочены следующим образом:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \quad (11.10)$$

Ляпуновской размерностью называется число

$$\dim_{\Lambda}(A) = m + \nu, \quad (11.11)$$

где  $m$  находится из условий

$$\sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell} \geq 0, \quad \sum_{\ell=1}^{m+1} \lambda_{\ell} < 0, \quad \nu = -\frac{\sum_{\ell=1}^m \lambda_{\ell}}{\lambda_{m+1}} \quad (11.12)$$

Кроме  $\dim_{\Lambda}(A)$ , введем в рассмотрение также приведенную ляпуновскую размерность

$$\theta = \frac{\dim_{\Lambda}(A)}{N} = \frac{m + \nu}{N} \quad (11.13)$$

В случае системы (11.1) - (11.3) ляпуновские показатели, упорядоченные в соответствии с (11.10), имеют следующий вид:

1) если  $N$  - нечетное число:

$$\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = \rho_n \left| 1 - 2\alpha\tau - \frac{2d\tau}{h^2} - \frac{2d\tau}{h^2} \cos \frac{(2\ell-1)\pi}{N} \right|,$$

$$\lambda_N = \rho_n |1 - 2\alpha\tau|, \quad d = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \quad (11.14)$$

2) если  $N$  - четное число:

$$\lambda_1 = \rho_n \left| 1 - 2\alpha\tau - \frac{4d\tau}{h^2} \right|,$$

$$\lambda_{2j} = \lambda_{2j+1} = \rho_n \left| 1 - 2\alpha\tau - \frac{2d\tau}{h^2} - \frac{2d\tau}{h^2} \cos \frac{2\pi\ell}{N} \right|,$$

$$\lambda_N = \ln |1 - 2\alpha\tau|, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Отсюда вытекает, что при  $\alpha\tau > 1$  все ляпуновские показатели  $\lambda_p$  положительны и, следовательно, ляпуновская размерность совпадает с  $N$ , а  $\theta = 1$ . Установим ляпуновскую размерность хаотического множества системы (11.1) - (11.3) при  $1/2 < \alpha\tau < 1$ \* Пусть  $N$  - нечетное число. Используя (11.14), запишем сумму  $m$  ляпуновских показателей:

$$\sum_{p=1}^m \lambda_p = \begin{cases} 2 \sum_{s=1}^{m/2} \ln \left\{ \rho \left[ 1 + q \cos \frac{(2s-1)\pi}{N} \right] \right\}, & m - \text{четное} \\ \ln \left\{ \rho \left[ 1 + q \cos \frac{(2m-1)\pi}{N} \right] \right\} + 2 \sum_{s=1}^{(m-1)/2} \ln \left\{ \rho \left[ 1 + q \cos \frac{(2s-1)\pi}{N} \right] \right\}, & m - \text{нечетное} \end{cases} \quad (11.15)$$

где

$$\rho \equiv 2\alpha\tau - 1 + \frac{2d\tau}{h^2}, \quad q \equiv \frac{2d\tau/h^2}{2\alpha\tau - 1 + 2d\tau/h^2}$$

Необходимо найти такое  $m$ , чтобы сумма (11.15) удовлетворяла неравенствам (11.12). Для нахождения искомого  $m$  требуется провести вычисление суммы (11.15), которое выполним с помощью методики работы [82]. При этом будем предполагать, что  $N$  очень велико. Рассмотрим сначала случай четного  $m$ :

$$2 \sum_{s=1}^{m/2} \ln \left\{ \rho \left[ 1 + q \cos \frac{(2s-1)\pi}{N} \right] \right\} = m \ln \rho + \frac{N}{\pi} \epsilon,$$

где

$$\epsilon \equiv \sum_{s=1}^{m/2} \ln \left[ 1 + q \cos \frac{(2s-1)\pi}{N} \right] \frac{2\pi}{N}$$

\* При  $\alpha\tau = 1$  наименьший ляпуновский показатель  $\lambda_N = 0$ , а все остальные  $\lambda_p > 0$ , т.е. в этом случае приведенная ляпуновская размерность также равна единице.

Сумму  $\epsilon$  можно рассматривать как интегральную для интеграла

$$\int_0^{\pi m/N} \rho_n (1 + q \cos z) dz, \quad (11.16)$$

причем  $\epsilon$  приближает интеграл (11.16) равномерно по  $z_m = N^{-1}(2m-1)\pi$  с любой наперед заданной степенью точности для достаточно больших  $N$ . Будем предполагать, что  $\tau$  достаточно мало. В этом случае

$$\int_0^{\pi m/N} \rho_n (1 + q \cos z) dz = q \sin \frac{\pi m}{N} + O(\tau)$$

Таким образом, при четных  $m$  имеем

$$\sum_{p=1}^m \lambda_p \approx m \rho_n \rho + \frac{N}{\pi} q \sin \frac{\pi m}{N}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение

$$\frac{m}{N} = \theta + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

получаем приближенное уравнение (оно отличается от точного уравнения на функцию, не превосходящую  $O(1/N)$  и  $O(\tau)$ ) для приведенной ляпуновской размерности  $\theta$ .

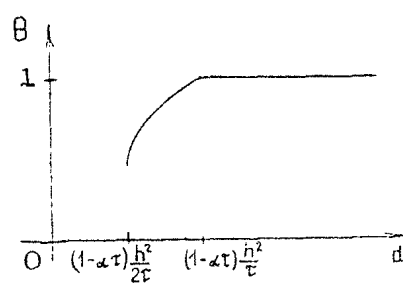
$$\frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} = \begin{cases} 0 & d \geq (1-\alpha\tau) \frac{h^2}{\tau}, \text{ при} \\ -\frac{\rho_n \rho}{q} & (1-\alpha\tau) \frac{h^2}{2\tau} < d < (1-\alpha\tau) \frac{h^2}{\tau} \end{cases} \quad (11.17)$$

Случай нечетных  $m$  рассматривается аналогично, и при достаточно малых  $\tau$  и  $N^{-1}$  для нахождения  $\theta$  вновь получается уравнение (11.17).

Кроме того, действуя аналогично предыдущему можно показать, что к уравнению (11.17) сводится также нахождение  $\theta$  и в случае, когда  $N$  — четное число.

Анализируя уравнение (11.17), устанавливаем характер зависимости приведенной ляпуновской размерности  $\theta$  от коэффициента диффузии  $d$  и параметра  $\alpha$ . На рис. 11.2 в плоскости  $(d, \theta)$  (все остальные параметры зафикс-

зованы) для  $\alpha \in (\frac{\tau}{2}, \tau)$  представлена зависимость  $\theta(d)$ . В этом случае размерность  $\theta$  при  $d \in [(1-\alpha\tau)\frac{h^2}{2\tau}, (1-\alpha\tau)\frac{h^2}{\tau}]$  монотонно возрастает с увеличением  $d$ , а при  $d > (1-\alpha\tau)(h^2/\tau)$  от  $d$  не зависит и равна единице. Причем этот возрастающий участок зависимости  $\theta(d)$  при  $\alpha \rightarrow \tau^{-1}$  трансформируется в прямую  $\theta=1$  и при  $\alpha \geq 1/\tau$  ляпуновская размерность  $\theta$  равна единице при всех  $d > 0$ .



Таким образом, если  $\alpha \in (\tau/2, \tau)$ , движение на предельном множестве  $A$  с ростом коэффициента диффузии  $\Gamma$  становится все более неустойчи-

Р и с. 11.2

вым и, начиная с  $d=(1-\alpha\tau)\frac{h^2}{\tau}$ , каждая траектория системы (11.1) - (11.3) является

неустойчивой в любом направлении, т.е. хаос полностью развит. При  $\alpha \geq \tau^{-1}$  система (11.1) - (11.3) демонстрирует такой развитый хаос уже при любом  $d > 0$ .

### 11.3. Пространственно однородные и стационарные состояния

Рассмотрим пространственно однородные состояния модели (11.1) - (11.3). Такие состояния определяются решениями системы (11.1) - (11.3), не зависящими от пространственной переменной  $n$ :

$$w_n(k) = w(k) \tag{11.18}$$

Подставив (11.18) в (11.1), получим

$$w(k+1) = w(k) + \alpha\tau F(w(k)) - \tau\gamma \tag{11.19}$$

Уравнение (11.19) при условиях (11.2), (11.3) порождается одномерным разрывным отображением  $f_0$ . В силу граничных условий (11.3) искомым пространственно однородным состояниям отвечают неподвижные точки и периодические траектории этого отображения. Будем интересоваться лишь устойчивыми состояниями модели (11.1) - (11.3) и поэтому рассмотрим отображение  $f_0$  при значениях параметров из области  $D_2$ . При  $\gamma > \alpha$  все траектории отображения  $f_0$ .



не лежащие в множестве разрыва, асимптотически стремятся к неподвижной точке  $0_1$  ( $\psi(k) = -\gamma/2\alpha$ ). В случае  $0 \leq \gamma < \alpha$  все траектории отображения  $f_0$  с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству  $\psi(k) < 1/2$ , асимптотически стремятся к неподвижной точке  $0_1$ , а все траектории, начинающиеся при  $\psi(k) > 1/2$ , к неподвижной точке  $0_2$  ( $\psi(k) = 1 - \gamma/2\alpha$ )\*. Следовательно, при  $\gamma > \alpha$  модель (11.1)–(11.3) имеет единственное стационарное пространственно однородное состояние

$S_1$ , соответствующее неподвижной точке  $0_1$ . При  $0 \leq \gamma < \alpha$  у системы (11.1)–(11.3) стационарных пространственно однородных состояний два  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_2$  соответствует неподвижной точке  $0_2$ ). Поскольку для точек области  $D_2$  собственные числа  $\rho_s$  удовлетворяют неравенствам  $|\rho_s| < 1$ ,  $s = 0, 1, \dots, N-1$ , состояния  $S_1$  и  $S_2$  устойчивы ("в малом"). Таким образом, система (11.1)–(11.3) при  $0 \leq \gamma < \alpha$  моделирует активную бистабильную среду.

Простейшие типы стационарных движений мы уже рассмотрели выше. Это  $S_1$  и  $S_2$  – пространственно однородные состояния, отвечающие неподвижным точкам  $0_1$  и  $0_2$ . Сейчас исследуем существование и устойчивость пространственно неоднородных стационарных режимов. Искомые состояния системы (11.1) – (11.3) определяются уравнением

$$\frac{d}{h^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \alpha F(u_n) - \gamma = 0, \quad (11.20)$$

которое после введения обозначения  $u_{n-1} = v_n$  может быть записано в виде следующей системы:

$$\begin{cases} v_{n+1} = u_n, \\ u_{n+1} = 2u_n - v_n - \frac{\alpha h^2}{d} F(u_n) + \frac{h^2}{d} \gamma \end{cases} \quad (11.21)$$

Будем интерпретировать (11.20) при условии (11.2), (11.3) как динамическую систему, которая порождается разрывным отображением следующего вида:

$$g \begin{cases} g_1, & \text{если } u_n < 1/2, \\ g_2, & \text{если } u_n > 1/2, \end{cases}$$

\* Координаты точек  $0_1$  и  $0_2$  совпадают с координатами неподвижных точек отображения  $f$ .

где  $g_1, g_2$  - диффеоморфизмы вида

$$g_1(v, u) \rightarrow \left( u, -v + 2 \left( 1 + \frac{\alpha h^2}{d} \right) u + \frac{\gamma h^2}{d} \right),$$

$$g_2(v, u) \rightarrow \left( u, -v + 2 \left( 1 + \frac{\alpha h^2}{d} \right) u + \frac{(\gamma - 2\alpha) h^2}{d} \right)$$

В такой постановке искомому стационарному состоянию системы (11.1) - (11.3) соответствует периодическая ( в силу граничных условий ) дискретная траектория периода  $N$  системы (11.21), (11.2).

Прежде всего покажем, что система (11.21), (11.2) может демонстрировать большое разнообразие таких периодических движений, причем их количество существенно зависит от числа  $N$ , а "профиль" некоторых периодических движений может быть достаточно сложным. Докажем, что отображение  $g$  имеет гомоклинический и гетероклинический контуры, существование которых, как известно (см., например, [77]), гарантирует наличие у системы самых разнообразных типов траекторий, и в частности периодических, - с периодом  $N$ .

Рассмотрим сначала случай  $0 < \gamma < \alpha$ , при котором система (11.21) вне множества разрыва имеет две неподвижные точки  $\bar{u}_1 (u^* = v^* = -\gamma/2\alpha)$  и  $\bar{u}_2 (u^0 = v^0 = 1 - \gamma/2\alpha)$ . Каждая из этих точек - седло с положительными мультипликаторами

$$\mu_1 = 1 + \frac{\alpha h^2}{d} + \sqrt{\frac{2\alpha h^2}{d} + \frac{\alpha^2 h^4}{d^2}}, \quad \mu_2 = 1 + \frac{\alpha h^2}{d} - \sqrt{\frac{2\alpha h^2}{d} + \frac{\alpha^2 h^4}{d^2}}$$

Сделаем в системе (11.21) замену переменных:

$$u_n = \frac{x_n - y_n}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\gamma}{2\alpha}, \quad v_n = \frac{-\mu_1 y_n + \mu_2 x_n}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\gamma}{2\alpha} \quad (11.22)$$

В этих переменных множество разрыва отображения  $g$  записывается в виде

$$\left\{ y_n = x_n - \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2) \right\} \quad (11.23)$$

Прямая (11.23) делит фазовую плоскость  $(x_n, y_n)$  на две части:

$$P_1 = \left\{ y_n > x_n - \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2) \right\}, \quad P_2 = \left\{ y_n < x_n - \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2) \right\}$$

Если  $(x_n, y_n) \in P_1$ , то система (11.21) имеет вид

$$x_{n+1} = \mu_1 x_n, \quad y_{n+1} = \mu_2 y_n, \quad (11.24)$$

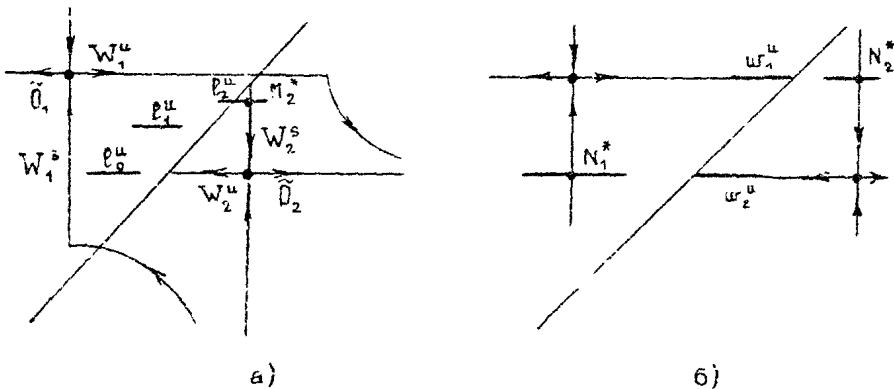
а если  $(x_n, y_n) \in \rho_2$ , то системе (11.21) эквивалентна система

$$x_{n+1} = \mu_1 x_n - \frac{2\mu_1 \alpha h^2}{d}, \quad y_{n+1} = \mu_2 y_n - \frac{2\mu_2 \alpha h^2}{d}. \quad (11.25)$$

Заметим, что на плоскости  $(x_n, y_n)$  неподвижная точка  $\tilde{O}_1$  расположена в начале координат, а  $\tilde{O}_2$  имеет координаты

$$x_2^* = \frac{2\mu_1 \alpha h^2}{d(\mu_1 - 1)}, \quad y_2^* = -\frac{2\mu_2 \alpha h^2}{d(1 - \mu_2)}$$

Куски сепаратрис, примыкающие к неподвижной точке  $\tilde{O}_1$  (соответственно  $\tilde{O}_2$ ) и целиком расположенные в области  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ), совпадают с осями координат (с прямыми  $x = x_2^*$  и  $y = y_2^*$ ). Так что у каждой из неподвижных точек  $\tilde{O}_1$  и  $\tilde{O}_2$  две сепаратрисы уходят в бесконечность (неустойчивая сепаратриса, — конечно, при действии обратного отображения) — рис. 11.3. Рассмотрим поведение остальных сепаратрис.



Р и с. 11.3

Покажем, что существуют значения параметра  $\gamma$ , при которых неустойчивая  $W_2^u$  и устойчивая  $W_2^s$  сепаратрисы точки  $\tilde{O}_2$  пересекаются трансверсально и, следовательно, отображение  $\varphi$  имеет гомоклиническую точку. Пусть  $m$  — произвольное натуральное число. Введем в рассмотрение интервал

$$\rho_0^u = \left\{ \tau_1^u < \tau < \tau_0^u, \quad y = y_2^* \right\},$$

где

$$\tau_0^u = \frac{1}{(\mu_1)^{2(m-1)}} \left[ \mu_1^{m-1} \frac{\gamma + d}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2) - \frac{2\alpha h^2}{d(\mu_1 - 1)} \right],$$

$$\tau_1^u = \begin{cases} \frac{\mu_1(\gamma + \alpha)}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2) - \frac{2\mu_1 \alpha h^2}{d(1 - \mu_2)}, & \text{если } \gamma > \Gamma_0, \\ 0, & \text{если } \gamma < \Gamma_0. \end{cases}$$

$$\Gamma_0 \equiv -\alpha + 4\alpha^2 h^2 \mu_1 / [d(\mu_1 - 1)(\mu_1 - \mu_2)], \quad \Gamma_0 > 0$$

Интервал  $\rho_0^u$  целиком содержится в области  $\rho_1$  и принадлежит сепаратрисе  $W_2^u$ . Обозначим  $\rho_i^u = g_2^i(\rho_0^u)$  — образ  $\rho_0^u$  после  $i$  итераций отображения  $g$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), и введем область параметров  $\Gamma_m$ , выделяемую неравенствами

$$\Gamma_m^- < \gamma < \Gamma_m^+,$$

где

$$\Gamma_m^- \equiv -\alpha + \frac{4\alpha^2 h^2 (1 + \mu_2^{m-1})}{d(\mu_1 - 1)(\mu_1 - \mu_2)}, \quad \Gamma_m^+ \equiv -\alpha + \frac{4\alpha^2 h^2 (\mu_1 + \mu_2^m)}{d(\mu_1 - 1)(\mu_1 - \mu_2)} \quad (11.26)$$

Для точек области  $\Gamma_m$  справедливы следующие соотношения:

$$g_1^{-1}(\rho_0^u) \in \rho_2, \quad \rho_i^u \in \rho_1, \quad i=1, 2, \dots, m-1, \quad \rho_m^u \cap W_2^s \neq \emptyset. \quad (11.27)$$

(В справедливости (11.27) можно убедиться непосредственной подстановкой  $\rho_0^u$  в (11.24) и (11.25)). Интервал  $\rho_m^u$  и сепаратриса  $W_2^s$  пересекаются трансверсально в точке  $M_2^* \in \rho_2$ . Отсюда, поскольку  $\rho_m^u \in W_2^u$ , получаем, что сепаратрисы  $W_2^u$  и  $W_2^s$  пересекаются трансверсально и  $M_2^*$  — гомоклиническая точка. Ее координаты следующие:

$$\tau = \tau_2^*, \quad y = -\frac{2\alpha h^2 (\mu_2)^m}{d(\mu_1 - 1)}$$

Следовательно, для любого натурального числа  $m$  существует интервал  $\Gamma_m$  значений параметра  $\gamma$ , для точек которого отображение  $g$  имеет гомоклиническую траекторию. Поскольку  $m=1, 2, \dots$ , таких интервалов  $\Gamma_m$  — бесконечное число. Гомоклинические траектории, соответствующие точкам различных  $\Gamma_m$ , отличаются числом итераций  $m$ , совершаемых в области  $\rho_1$ . Из выражений (11.26) вытекает, что чем

больше номер  $m$ , тем больше длина интервала  $\Gamma_m$ , но для любого  $m$  выполняются неравенства

$$\Gamma_m^+ > \Gamma_0, \quad \Gamma_m^- > \beta_0,$$

где

$$\beta_0 \equiv \frac{4\alpha^2 h^2}{d(\mu_1 - 1)(\mu_1 - \mu_2)} - \alpha, \quad \beta_0 < 0$$

Рассмотрим взаимное расположение на прямой  $\gamma$  интервалов  $\Gamma_m$ , соответствующих различным  $m$ . Из выражений (11.26) следует, что

$$\Gamma_1^{+(-)} > \Gamma_2^{+(-)} > \dots > \Gamma_m^{+(-)} > \dots,$$

однако существует такое  $m = m^* \geq 1$  (значение  $m^*$  зависит от параметров  $d, h, \alpha$ ), что для всех  $m \geq m^*$  выполняются неравенства  $\Gamma_{m+1}^+ > \Gamma_m^-$ . Последнее неравенство означает, что, начиная с  $m = m^*$ , интервалы  $\Gamma_m$ , соответствующие соседним  $m$ , перекрываются, т.е.  $\Gamma_{m+1} \cap \Gamma_m \neq \emptyset$  при  $m \geq m^*$ . При  $\gamma \in \Gamma_m^0$  отображение  $q$  имеет две гомоклинические траектории с различным числом итераций  $m$  в области  $P_1$ . Заметим, что в асимптотическом случае  $m \rightarrow \infty$  величина  $\Gamma_m^- \rightarrow \beta_0$ , но при этом выполняется (11.28). Другими словами, значение  $\gamma = \beta_0$  является бифуркационным и недостижимым [94, 95].

Итак, если  $\gamma \in \Gamma_m$ ,  $m = 1, 2$ , то отображение  $q$  имеет, по крайней мере, одну гомоклиническую траекторию, образованную пересечением сепаратрисных инвариантных кривых неподвижной точки  $\tilde{O}_2$ . При  $\gamma > \beta_0$  все сепаратрисы точки  $\tilde{O}_1$  уходят в бесконечность (см. рис. 11.3, а).

Аналогично предыдущему при  $\gamma < \beta_0$  можно найти значения параметра  $\gamma$  при которых пересекаются, образуя гомоклиническую траекторию, сепаратрисы  $W_1^u$  и  $W_1^s$  неподвижной точки  $\tilde{O}_1$ . Это происходит, если  $\gamma \in \beta_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), где  $\beta_m$  задается неравенствами

$$\beta_m^- < \gamma < \beta_m^+,$$

$$\beta_m^- \equiv \frac{4\alpha^2 h^2 (\mu_1^m - 1)}{d(\mu_1 - 1)(\mu_1 - \mu_2)\mu_1^m} - \alpha, \quad \beta_m^+ \equiv \frac{4\alpha^2 h^2 (\mu_1^m - 1)}{d(\mu_1 - 1)(\mu_1 - \mu_2)\mu_1^{m-1}} - \alpha$$

Координаты гомоклинической точки  $M_1^*$  следующие:

$$x = 0, \quad y = \frac{2\mu_2 \alpha h^2}{d(1 - \mu_2)} (\mu_2^m - 1)$$

При  $m \rightarrow \infty$  значение  $B_m^+ \rightarrow \Gamma_0$ , но при этом  $B_m^+ < \Gamma_0$  и, следовательно,  $\gamma = \Gamma_0$  является недостижимой бифуркационной точкой.

Если  $\gamma \in (B_0, \Gamma_0)$ , кроме гомоклинических траекторий, существующих при  $\gamma \in \Gamma_m, B_m$ , отображение  $q$  имеет также две гетероклинические траектории, входящие в состав гетероклинического контура. Действительно, в этом случае (см. рис. 11.3,б) выполняются соотношения

$$w_1^u \in P_1, \quad w_1^u \in W_1^u, \quad W_2^s \cap q_1(w_1^u) = N_2^* \in P_2,$$

$$w_2^u \in P_2, \quad w_2^u \in W_2^u, \quad W_1^s \cap q_2(w_2^u) = N_1^* \in P_1,$$

где

$$w_1^u = \{ \tau_3^u < \tau < \tau_4^u, \quad y = 0 \},$$

$$w_2^u = \{ \tau_5^u < \tau < \tau_6^u, \quad y = y_2^* \},$$

$$\tau_3^u \equiv \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1}, \quad \tau_4^u \equiv \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2),$$

$$\tau_5^u \equiv \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} (\mu_1 - \mu_2) - \frac{2\alpha h^2}{d(\mu_1 - 1)},$$

$$\tau_6^u \equiv \frac{\gamma + \alpha}{2\alpha} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} + \frac{2\alpha h^2 (\mu_1 - \mu_2 - 1)}{d(\mu_1 - 1)}$$

Здесь  $N_1^*, N_2^*$  - гетероклинические точки в которых трансверсально пересекаются сепаратрисы  $W_2^s, W_1^u$  и  $W_1^s, W_2^u$  (см. рис. 11.3,б). Следовательно, при  $\gamma \in (B_0, \Gamma_0)$  отображение  $q$  имеет грубый гетероклинический контур. Обратим внимание, что среди областей  $\Gamma_m, B_m$  существуют такие, которые лежат в интервале  $(B_0, \Gamma_0)$ . Поэтому возможна ситуация, когда отображение  $q$  имеет одновременно гетероклинический контур и две гомоклинические траектории. Заметим, что рождение гетероклинической структуры отображения  $q$  происходит при  $\gamma = B_0(\Gamma_0)$  через "касание" сепаратрис неподвижных точек  $\tilde{O}_1$  и  $\tilde{O}_2$  [95, 96].

Пусть теперь  $\gamma > \alpha$ . При таком условии отображение  $q$  имеет лишь одну неподвижную точку  $\tilde{O}_1$ . Нетрудно показать, что в этом случае сепаратрисы точки  $\tilde{O}_1$  уходят в бесконечность и гомоклинических траекторий не существует.

Таким образом, в случае  $0 < \gamma < \alpha$  существуют значения параметра  $\gamma$ , при которых отображение  $q$  имеет гомокли-

нический и гетероклинический контуры \*. Как известно [77, 97], окрестность таких образований имеет сложное строение и содержит решения разнообразного типа. Однако в силу граничных условий (11.3) из всего множества траекторий нас интересуют только периодические траектории периода  $N$ . Таких траекторий имеется некоторое конечное число, существенно зависящее от  $N$ . Так, при  $N=3$  их две (это будет показано ниже), а при  $N \rightarrow \infty$  число периодических траекторий растет [58] как  $e^{\theta_0 N}$ , где  $\theta_0$  — топологическая энтропия отображения  $q$  на инвариантном гомоклиническом (гетероклиническом) множестве. При этом, поскольку эти периодические траектории лежат в окрестности гомоклинического (гетероклинического) контура, их профиль в случае больших  $N$  может быть достаточно сложным. Следовательно, система (11.1) — (11.3), кроме двух пространственно однородных состояний  $S_1, S_2$  имеет также конечное число стационарных пространственно неоднородных состояний (в некоторых случаях сложного профиля), соответствующих периодическим (период  $N$ ) траекториям отображения  $q$ .

Опишем процедуру нахождения стационарных пространственно неоднородных состояний модели (11.1) — (11.3). Любая периодическая точка  $z$  отображения  $q$  при итерировании последовательно проходит через области непрерывности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Поэтому ей можно поставить в соответствие конечный набор чисел

$$k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_p, m_p, \quad (11.29)$$

тогда

$$\begin{aligned} q_1^{k_1+1} z \in \rho_1 & \quad \text{при} \quad 0 < k_1 \leq k_1, \\ q_2^{k_2+1} z \in \rho_2 & \quad \text{при} \quad 0 < k_2 \leq m_2, \end{aligned} \quad (11.30)$$

$$q_1^{k_1 + \dots + k_{p-1} + m_1 + \dots + m_{p-1} + 1} z \in \rho_1 \quad \text{при} \quad 0 < k_p \leq k_p,$$

$$q_2^{k_2 + \dots + k_{p-1} + m_1 + \dots + m_{p-1} + 1} z \in \rho_2 \quad \text{при} \quad 0 < k_p \leq m_p$$

\* Напомним, что в этой главе  $\gamma \geq 0$ , хотя в настоящем разделе частично рассмотрен и случай  $\gamma < 0$ .

При этом

$$\sum_{s=1}^{\ell} \kappa_s + \sum_{r=1}^{\ell} m_r = N \quad (11.31)$$

И обратно. любому набору чисел (11.29) при выполнении (11.31) соответствует единственная траектория с периодом  $N$  отображения  $g$  (см., например, [77,98]). Отсюда следует, что существует конечное число периодических траекторий, удовлетворяющих (11.31). Найдем, например, периодические траектории, у которых  $\ell=1$ . Пусть  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка области  $\rho_1$ . Запишем уравнение куска дискретной траектории, проходящего через эту точку и лежащего в области  $\rho_1$

$$x_l = x_0(\mu_1)^l, \quad y_l = y_0(\mu_2)^l, \quad l=1, 2, \dots, \kappa_1 \quad (11.32)$$

Поскольку  $(x_{\kappa_1+\nu}, y_{\kappa_1+\nu}) \in \rho_2$ ,  $\nu=1, 2, \dots$ , то рассматриваемая траектория в  $\rho_2$  продолжается отображением  $g_2$  и имеет вид

$$\begin{aligned} x_{\kappa_1+\nu} &= \frac{2\mu_1 \alpha h^2}{d(\mu_1-1)} + \left[ x_0(\mu_1)^{\kappa_1} - \frac{2\mu_1 \alpha h^2}{d(\mu_1-1)} \right] (\mu_1)^\nu, \\ y_{\kappa_1+\nu} &= \frac{2\mu_2 \alpha h^2}{d(\mu_2-1)} + \left[ y_0(\mu_2)^{\kappa_1} - \frac{2\mu_2 \alpha h^2}{d(\mu_2-1)} \right] (\mu_2)^\nu \end{aligned} \quad (11.33)$$

Из соотношений (11.33) при  $\nu=m_1$  находим точку  $(x_N, y_N)$ , где  $N = \kappa_1 + m_1$ , и получаем два уравнения для нахождения  $(x_0, y_0)$ .  $x_0 = x_N$ ,  $y_0 = y_N$ , решая которые, находим

$$x_0 = \frac{2\mu_1 \alpha h^2 (\mu_1^{m_1} - 1)}{d(\mu_1-1)(\mu_1^N - 1)}, \quad y_0 = - \frac{2\mu_2 \alpha h^2 (1 - \mu_2^{m_1})}{d(1-\mu_2)(1-\mu_2^N)}$$

Следовательно, отображение  $g$  имеет траекторию с периодом  $N$  следующего вида:

$$L_{\kappa_1, m_1} = \left\{ (x_0, y_0), (x_0 \mu_1, y_0 \mu_2), \dots, (x_0 \mu_1^{\kappa_1}, y_0 \mu_2^{\kappa_1}), (x_{\kappa_1+1}, y_{\kappa_1+1}), \dots, (x_N, y_N) \right\}$$

Существование траектории  $L_{\kappa_1, m_1}$  установлено в предположении выполнения условий (11.30). Эти условия налагают ограничения на параметры и определяют условия существования  $L_{\kappa_1, m_1}$ :

$$\delta_1 < \delta < \delta_2, \quad (11.34)$$



где

$$\gamma_1 \equiv \frac{4\alpha^2 h^2 \mu_1 (\mu_1^{m_1} - 1) (1 + \mu_1^{k_1 - 1})}{d(\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - 1) (\mu_1^N - 1)} - \alpha,$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{4\alpha^2 h^2 (\mu_1^{k_1 + 1} + 1) (\mu_1^{m_1} - 1)}{d(\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - 1) (\mu_1^N - 1)} - \alpha$$

Траектории  $L_{k_1, m_1}$  отвечает стационарное пространственно неоднородное состояние  $S_{k_1, m_1}$  модели (11.1)–(11.3), имеющее координаты

$$u_n = \frac{x_n - y_n}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\gamma}{2\alpha}, \quad n=1, 2, \dots, N,$$

где  $x_n, y_n$  определяются формулами (11.32), (11.33).

Аналогично устанавливается существование периодических траекторий других типов и соответствующих им пространственно неоднородных состояний.

Рассмотрим устойчивость этих состояний. Можно показать (см. разд. 10.5), что линейная система, описывающая эволюцию возмущений в окрестности любого пространственно неоднородного состояния, имеет тот же дифференциал, что и система (11.1)–(11.3). Поэтому устойчивость каждого пространственно неоднородного состояния может быть установлена с помощью анализа собственных чисел  $\rho_s$  (см. (11.8)). Так как  $\rho_s$  не зависят от параметра  $\gamma$ , то в области  $D_2$  одновременно выполняются условия существования неоднородного состояния и  $|\rho_s| < 1$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Следовательно, при этих значениях параметров пространственно неоднородные состояния системы (11.1)–(11.3) устойчивы, в каждом состоянии существует окрестность, из которой возмущения затухают по всем направлениям.

Таким образом, система (11.1)–(11.3) имеет следующие устойчивые стационарные состояния: два пространственно однородных ( $S_1, S_2$ ) и некоторое конечное число, зависящее от  $N$ , пространственно неоднородных ( $S_{k_1, m_1}, \dots, S_{k_p, m_p}$ )

#### 11.4. Стационарные волны

Рассмотрим существование и устойчивость стационарных волн, отвечающих траекториям системы (11.1)–(11.3), целиком лежащим в областях непрерывности отображения  $f$ . Решение системы (11.1) – (11.3), соответствующее стационарной волне, будем искать в виде

$$\psi_n(k) = \Psi(n+ck), \quad (11.35)$$

где  $c = 1, 2, \dots$ . Подстановка (11.35) в (11.1) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \Psi(n+ck+c) - \Psi(n+ck) = \frac{d\tau}{h^2} \left[ \Psi(n+ck+1) - 2\Psi(n+ck) + \right. \\ \left. - \Psi(n+ck-1) \right] + \alpha\tau F(\Psi(n+ck)) - \tau g \end{aligned} \quad (11.36)$$

Используя подход, изложенный в гл. 10 (см. разд. 10.4, 10.5), уравнение (11.36) можно свести к некоторому отображению  $q_c$   $(c+1)$ -мерной плоскости в себя. В такой постановке искомым стационарным волнам отвечают периодические траектории периода  $N$  отображения  $q_c$ . Такие периодические траектории (напомним, что движения, "пересекающие" множество разрыва, здесь не рассматриваются) могут существовать лишь в тех областях непрерывности отображения  $f$ , в которых имеются неподвижные точки  $Q_1$  и  $Q_2$ . Причем в каждой из этих областей непрерывности возможно существование лишь трех типов периодических траекторий, которым отвечают устойчивые стационарные волны. Условия существования таких траекторий имеют вид

$$\begin{aligned} \nu_1 = +1, \quad \nu_1 = -1, \quad N - \text{четное} \\ \nu_1 = \varepsilon \exp\left(\pm \frac{2\pi s'}{N}\right), \quad s' \in Z_+, \end{aligned} \quad (11.37)$$

где  $\nu_1$  – наибольший по модулю мультипликатор неподвижной точки отображения  $q_c$ . Уравнения искомым волн можно найти, определяя собственный вектор дифференциала отображения  $q_c$ , соответствующий  $\nu_1$ .

Здесь существование стационарных волн установим несколько иначе. Уравнение (11.36) к отображению  $q_c$  сводить не будем, а, исходя из условий (11.37) и вида (11.36), выпишем уравнения всех трех типов периодических траекто-

рий. Затем непосредственной подстановкой их в уравнение (11.36) проверим, являются или нет эти траектории решениями уравнения.

Рассмотрим сначала периодические траектории, целиком содержащиеся в области непрерывности отображения  $f$ , в которой имеется точка  $0_1$ . Предполагаемый вид периодических траекторий следующий:

$$u_n(k) = \Psi(n+ck) \equiv \varepsilon \beta^{n+ck} - \gamma/2\alpha, \quad (11.38)$$

$$u_n(k) = \Psi(n+ck) \equiv \operatorname{Re} x_n(k) - \gamma/2\alpha, \quad (11.39)$$

где  $\beta = \pm 1$ ,  $x_n(k) = \varepsilon \tau \rho \left[ \pm \frac{2\pi s'}{N} (n+ck + \varphi) \right]$ ,

$\varphi$  — начальная фаза волны,  $\varepsilon$  — амплитуда волны,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , а  $\varepsilon_0$  определяется минимальным расстоянием от  $0_1$  до множества разрыва. Подставим (11.38) в уравнение (11.36).

После очевидных алгебраических преобразований получим

$$\varepsilon \beta^{n+ck-1} \left[ \beta^{c+1} - \frac{d\tau}{h^2} \beta^2 - \left( 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau \right) \beta - \frac{d\tau}{h^2} \right] \equiv 0 \quad (11.40)$$

Отсюда вытекает, что (11.38) является решением уравнения (11.36) только в том случае, если выполняется тождество

$$\beta^{c+1} - \frac{d\tau}{h^2} \beta^2 - \left( 1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau \right) \beta - \frac{d\tau}{h^2} \equiv 0 \quad (11.41)$$

Нетрудно видеть, что при  $\beta=1$  тождество (11.41) несправедливо и, следовательно, стационарных волн вида (11.38) с  $\beta=1$  в системе (11.1)–(11.3) нет. Пусть теперь  $\beta=-1$ . Тождество (11.41) принимает вид

$$(-1)^{c+1} + 1 - \frac{4d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau \equiv 0 \quad (11.42)$$

При четных  $c$  тождество (11.42) не выполняется, а при нечетных  $c$  — выполняется, если

$$\frac{2\tau}{h^2} d + \alpha\tau = 1 \quad (11.43)$$

Следовательно, когда  $N$  — четное число при значениях параметров, удовлетворяющих (11.43), существует однопараметрическое семейство стационарных волн

$$u_n(k) = (-1)^{n+ck} \varepsilon - \gamma/2\alpha, \quad (11.44)$$

где  $c=2j+1$ ,  $j=0,1,2 \dots$ . Обратим внимание, что на плоскости  $(\alpha, d)$  уравнение (11.43) представляет собой уравнение прямой (см. рис.11.1), которая является границей между областями регулярной ( $D_2$ ) и хаотической ( $D_1$ ) динамики модели (11.1)-(11.3).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании волн вида (11.39). Заметим, что в решении (11.39)  $s' \neq N$ , поскольку тогда  $\nu_1 = +1$  и  $s' \neq N/2$ , так как это соответствует  $\nu_1 = -1$ . Подставляя  $u_n(k) = x_n(k)$  в уравнение (11.39) и приравнявая к нулю действительную и мнимую части решения, получаем

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi s' c}{N}\right) - \frac{2d\tau}{h^2} \cos\left(\frac{2\pi s'}{N}\right) - \left(1 - \frac{2d\tau}{h^2} - 2\alpha\tau\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{2\pi s'}{N}\right) = 0 \end{cases} \quad (11.45)$$

Очевидно, что при  $s' \neq N, N/2$  второе тождество в системе (11.45) не выполняется. Поэтому в модели (11.1)-(11.3) стационарных волн вида (11.39) не существует.

Полностью аналогично предыдущему решается задача о стационарных волнах, соответствующих периодическим траекториям, расположенным в области непрерывности отображения  $f$ , содержащей неподвижную точку  $D_2$ . В этом случае при выполнении (11.43) и четном  $N$  существует однопараметрическое семейство волн вида

$$u_n(k) = (-1)^{n+ck} \varepsilon + (2\alpha - \gamma)/2\alpha, \quad (11.46)$$

где  $c=2j+1$ ,  $j=0,1,2$

Перейдем к исследованию устойчивости волн (11.44), (11.46). Из модели (11.1) следует, что уравнение в вариациях для обоих типов волн одно и то же и имеет вид

$$\xi_n(k+1) - \xi_n(k) = \frac{d\tau}{h^2} (\xi_{n+1}(k) - 2\xi_n(k) + \xi_{n-1}(k)) - 2\alpha\xi_n(k) \quad (11.47)$$

где  $\xi_{n+N}(k) \equiv \xi_n(k)$ . Уравнение (11.47) представляет собой линейное отображение с дифференциалом, совпадающим с  $Df$ . Это означает, что исследование устойчивости волн (11.44),

(11.46) можно провести, анализируя собственные числа  $\rho_s$  матрицы  $D_f$ . Из системы уравнений (11.8) получаем, что при выполнении (11.43) набор  $\rho_s$  следующий:

$$\rho_s = -\alpha\tau - (1-\alpha\tau)\cos\frac{2\pi s}{N}, \quad s=0,1,\dots,N-1$$

Поскольку  $\alpha, \tau > 0$ , то  $\rho_s$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\rho_0 = -1, \quad |\rho_s| < 1, \quad s=1,2,\dots,N-1, \quad (11.48)$$

которые означают, что достаточно малые возмущения  $\xi_n(k)$  затухают в фазовом пространстве по всем направлениям, кроме одного, отвечающего  $\rho_0 = -1$ , вдоль которого они не нарастают. Таким образом, семейства стационарных волн (11.44) (11.46) устойчивы.

---

Проведенное в этой главе исследование показало, что дискретная модель (11.1)–(11.3) активной среды может демонстрировать разнообразную динамику. Пространство параметров модели состоит из двух областей, точкам одной из них соответствует регулярная, а точкам другой – хаотическая динамика. Причем для достаточно больших значений коэффициента диффузии  $d$  ( $d > h^2(2\tau)^{-1}$ ) в системе происходят только хаотические колебания, характеризующиеся высокой степенью развития хаоса – приведенная ляпуновская размерность равна единице. Переход порядок – хаос сопровождается потерей устойчивости всех пространственно однородных состояний и рождением, в случае четного  $N$ , стационарных волн, имеющих спектр скоростей  $\sigma$  вида  $\sigma = 2j+1$ ,  $j=0,1,2,\dots$ . При  $\beta > \alpha$  имеется одно ( $S_1$ ), а при  $\beta \in [0, \alpha)$  – два ( $S_1$  и  $S_2$ ) пространственно однородных состояния. Эти режимы являются локально устойчивыми во всей области параметров, соответствующей регулярной динамике модели. При  $\beta \in [0, \alpha)$ , кроме  $S_1$  и  $S_2$ , существует некоторое конечное число стационарных пространственно неоднородных режимов, число которых существенно зависит от  $N$ . Так, при  $N=3$  их два, а при  $N \rightarrow \infty$  число пространственно неоднородных состояний растет как  $e^{B_0 N}$ , где  $B_0$  – топологическая энтропия на

некотором инвариантном гомоклиническом (гетероклиническом) множестве. При больших  $N$  профиль стационарных пространственно неоднородных состояний вдоль дискретной пространственной координаты  $n$  может быть достаточно сложным. Здесь можно говорить о временном порядке и пространственном хаосе. В области регулярной динамики все стационарные режимы локально устойчивы.

## ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

На данном этапе исследования полученные результаты в целом дают достаточно полное описание качественного поведения простейших однородных цепочечных и решеточных сетей синхронизации. В основном стали понятными процессы установления режима синхронизации в таких сетях и пути его нарушения, характер режимов (в том числе хаотических), устанавливающихся после нарушения синхронизации. Разработаны методы анализа коллективной динамики связанных систем синхронизации, базирующиеся на объединении детального знания динамики отдельных парциальных систем синхронизации, аналогиях с поведением неравновесных нелинейных сред (с использованием теории пространственных бифуркаций, приводящих к структурированию и хаотизации сред) и, наконец, на возможностях прямого моделирования сложной динамики на ЭВМ.

Установлено, что однородные цепочечные и решеточные сети синхронизации при введении нелинейных связей между элементами в достаточно широком диапазоне изменения параметров сохраняют основные черты динамики парциальных систем — демонстрируют существование устойчивых режимов полной синхронизации сети опорным сигналом. Эти режимы могут быть как однородными, так и неоднородными по сети.

По мере увеличения связей синхронизация нарушается либо в части элементов, либо полностью во всей сети, при этом, как правило, возникает динамический хаос. Характерным для связанных цепочек и решеток является наличие тенденции к самоорганизации, проявляющейся в образовании (при нарушении режима глобальной синхронизации) в сети пространственных структур различной сложности из синхронизированных и асинхронизированных элементов. Способность таких сетей к самоорганизации в наибольшей степени проявляется в возможности установления режима полной взаимной синхронизации (при этом поведение каждого элемента в сети может быть достаточно сложным).

Характер нелинейных связей между элементами существенно влияет на динамику сети синхронизации. Для сетей со связями, осуществляющими обмен управляющими сигналами

(гл. 1 – 4), характерно стремление к сохранению в определенной степени свойств динамики индивидуальных элементов. Наблюдается, в частности, пространственная неоднородность устанавливаемых режимов (остаточные разности фаз, как правило, различны для элементов с разными номерами). Для сетей со связями, осуществляющими сравнение фаз соседних элементов, характерно стремление к взаимной синхронизации, установлению пространственно однородных режимов (как в режиме синхронизации опорным сигналом, так и в асинхронном по отношению к опорному сигналу режиме). По-видимому, первый тип связей более предпочтителен при решении задачи управления поведением каждого элемента сети, а второй тип связей ориентирован на выполнение задачи стабилизации частоты в сети или задачи установления состояния взаимной синхронизации. Заметим, что в энергосетях, условием нормального функционирования которых является полный взаимный синхронизм генераторов, реализуется именно второй тип связи.

Существенными для динамики сетей оказываются граничные условия. Учет периодических граничных условий, т. е. переход к кольцевым цепочкам или сферическим решеткам синхронизации, ведет к проявлению волновых свойств сетей – становятся возможными волны синхронизации, появляются “живые” пространственные структуры, периодически меняющиеся во времени.

Интересно отметить, что если в индивидуальном элементе сети усложнение динамики прямо связано со степенью сложности фильтра в цепи управления парциальной СФС (при простейшем идеализированном фильтре может быть только простейшая динамика СФС), то при объединении элементов в сеть даже при простейших фильтрах за счет связей появляется возможность существования очень сложного динамического поведения как элементов сети, так и всей сети в целом.

Исходя из практических приложений сетей синхронизации, полученные сведения о динамике в первую очередь интересны в связи с анализом характеристик различных режимов синхронизации. Однако из проведенных исследований можно извлечь результаты, которые могут представить значительный интерес и при решении совершенно других прикладных задач, не связанных с задачей синхронизации. Так, например, цепочки СФС с потоковым типом связей в асинхронном режи-



ме позволяют получить с выхода парциальных генераторов сигналы со спектрами различной сложности, вплоть до шума г. е., по существу, позволяют решать задачу управления спектром колебаний (с помощью изменения параметров и выбора номера элемента) и, в общем случае, решать задачу синтеза спектра с заданными свойствами.

Детальное изучение вопросов образования структур из синхронизованных и асинхронизованных элементов в решетках СФС подводит к идеям управления диаграммой направленности фазированной антенной решетки, совершенно не похожим на традиционные.

Сейчас уже ясно, что слой изученных и понятых явлений в теории нелинейных сетей синхронизации еще весьма тонок. В этом убеждает даже простое перечисление некоторых нерешенных задач, постановки которых возможны на базе уже изученных.

Довольно понятно, например, что полученные результаты, в принципе, можно распространить на объемные решетки синхронизации. Предположение об однородности рассмотренных сетей, вообще говоря, может быть снято, так как моделирование динамики неоднородных сетей можно вести аналогичными методами, хотя математические трудности неизмеримо возрастут. В книге рассмотрены всего два типа межэлементных связей, и авторы совершенно не касались изучения таких интересных для практики случаев, как связи при наличии запаздывания, связи не только по фазе, но и по частоте, не только с ближайшими соседними элементами, но и дальнедействующие связи, в том числе по типу "каждый с каждым", и др. Здесь не обсуждается также динамика взаимной синхронизации без опорных сигналов.

Значительный интерес представляет изучение влияния регулярных воздействий и различных шумов на сеть синхронизации, в частности таких специфических для сети воздействий, как аварий, связанных с выходом из строя одного или нескольких элементов. В качестве примера отметим, что предварительное исследование, проведенное нами по моделированию аварийной ситуации в сети СФС со связями через сигналы фазовых рассогласований (рассматривалась как цепочка, так и решетка СФС), когда выходит из режима синхронизации один из генераторов в сети, показало, что от элемента - источника возбуждения - в пространстве начинает распространяться волна возбуждения, сопровождающаяся вы-

паданием из режима синхронизации других элементов. При этом после окончания переходных процессов в зависимости от параметров во всей сети либо снова устанавливался режим синхронизации (кроме элемента, вышедшего из строя), либо устанавливался асинхронный (по-видимому, хаотический) режим во всей сети.

На пути построения теории нелинейных сетей синхронизации пока сделаны только первые шаги. Можно надеяться, что богатство, красота и свежесть возникающих проблем заинтересуют читателя и оправдают перед ним оптимизм авторов в отношении открывающихся возможностей и перспектив дальнейшего изучения нелинейной динамики таких сетей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219 - 280.
2. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова, М.И.Рабиновича. М.. Наука, 1987. 398 с.
3. Линдсей У.С., Гхазвинян Ф., Хагман В.К., Дессуки Х. Синхронизация сегей // ТИИЭР. 1985. Т.73, №10. С. 6 - 31.
4. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.. Связь, 1972. 447 с.
5. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управления / Пер. с англ. под ред. Ю.Н.Бакаева, М.В.Капранова. М.: Сов. радио, 1978. 600 с.
6. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М. Наука, 1981. 352 с.
7. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М. Наука, 1984. 320 с.
8. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М. Радио и связь, 1982. 288 с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.. Наука, 1984. 432 с.
10. Минакова И.И. Неавтономные режимы автоколебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1987. 168 с.
11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
12. Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна. М.: Связь, 1979. 224 с.

13. Лифшиц Л.М. Некоторые вопросы синхронизации разветвленных сетей передачи данных // Электросвязь. 1972. № 5. С. 44 - 48.
14. Пэн Д. Синхронизация и уплотнение каналов в цифровых системах связи // ТИИЭР. 1972. Т.60, № 5. С. 160 - 171.
15. Радиопередающие устройства / Под ред. М.В.Благовещенского, Г.М.Уткина. М.: Радио и связь, 1982. 408 с.
16. Самойленко В.И., Шишов Ю.Л. Управление фазированными антенными решетками. М.: Радио и связь, 1983. 238 с.
17. Есин С.В., Каганов В.И. Системы автоматического фазирования в передающих ФАР и устройствах сложения мощности СВЧ сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. 1986. № 8. С. 39 - 48.
18. Дворников А.А., Уткин Г.М. Фазированные автогенераторы радиопередающих устройств. М.. Энергия, 1980. 176 с.
19. Логгинов А.С., Ржанов А.Г., Еленский В.Г. Многоэлементные полупроводниковые лазеры // Зарубежная радиоэлектроника. 1986. № 8. С. 49 - 64.
20. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.. Высшая школа, 1978. 415 с.
21. Варайя П., У Ф.Ф., Чжань Жунлян. Прямые методы анализа динамической устойчивости энергосистем: Новые результаты // ТИИЭР. 1985. Т. 73, № 12. С. 8 - 22.
22. Мучник Г.Ф. Порядок и хаос // Наука и жизнь. 1988. № 3. С. 68 - 75.
23. Тода М. Теория нелинейных решеток / Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 264 с.
24. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Рогальский А.В., Сагдеев Р.З. Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред: Препринт ИПФ АН СССР № 163, Горький, 1987. 24 с.
25. Рабинович М.И., Шалфеев В.Д. Нелинейная динамика пространственных сетей синхронизации. Дискретные и континуальные модели // Развитие и совершенствование устройств синхронизации в системах связи: Тез. докл. всесоюз. науч.-техн. конф. М.: Радио и связь, 1988. С. 6 - 7.

26. Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Осипов Г.В., Рабинович М.И. Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных средах: Препринт ИПФ АН СССР № 199, Горький, 1988. 40 с.
27. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т. 39, № 12. С. 561 - 564.
28. Нелинейные волны: Самоорганизация / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова, М.И.Рабиновича. М.: Наука, 1983. 264 с.
29. Синергетика: Сб. ст. / Пер. с англ. под ред. Б.Б.Кадомова. М.. Мир, 1984. 248 с.
30. Многопроцессорный вычислительный комплекс ЕС-1037 - ЕС-2706 опыт системных разработок и численного моделирования нелинейных физических задач / Под ред. Р.З.Сагдеева, В.И.Шевченко; ИКИ АН СССР. М., 1987. 268 с.
31. Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Стационарные режимы в однонаправленной цепочке связанных систем фазовой синхронизации // Радиотехника. 1988. № 3. С. 27 - 31.
32. Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Переходные процессы в цепочке однонаправленно связанных систем фазовой синхронизации // Радиотехника. 1988. № 6. С. 19 - 23.
33. Осипов Г.В. О развитии турбулентности по Ландау в дискретной модели потоковых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 5. С. 624 - 627.
34. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Странные аттракторы и пространственное развитие турбулентности в потоковых системах // ЖЭТФ. 1986. Т. 90, № 5. С. 1707 - 1718.
35. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120 - 1124.
36. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т.11, № 24. С. 1505 - 1509.

37. Кузнецов С.П., Пиковский А.С. Универсальность бифуркаций у воения периода в одномерной диссипативной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 5. С. 308 - 320.
38. Афраимович В.С., Рабинович М.И., Сбитнев В.И. О размерности аттракторов в цепочке связанных генераторов // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 11, № 6. С. 338 - 342.
39. Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.A., Rabino-  
vich M.I. The onset and spatial development of  
turbulence in flow systems // Physica D. 1988.  
N 33. P.1-20.
40. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика / Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528 с.
41. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
42. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of Strange Attractors // Physica D. 1983. V. 9D, N 1. P.189-208.
43. Bondeson A., Ott L., Antonson I.M. Quasiperiodically Forced Damped Pendula and Schrödinger Equations with Quasiperiodic Potentials // Phys. Rev. Lett. 1985. V.55, N 20. P.2103-2106.
44. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука, 1978. 304 с.
45. Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 4. С. 561 - 566.
46. Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. Применение ЭВМ к расчету полосы захвата нелинейных систем фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника. 1972. Т. 27, № 7. С. 36 - 39.
47. Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Автоматизация вычисления полосы захвата нелинейных систем фазовой синхронизации // Радиотехника. 1988. № 9. С. 88 - 90.

48. Белюстина Л.Н., Белых В.Н., Шалфеев В.Д. О захвате в системе ФАП при действии аддитивной гармонической помехи // Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика: Межвуз. сб. / ГГУ. Горький, 1973. № 1. С. 94 - 101.
49. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Гомоклинические структуры, порождаемые простейшей моделью фазовой автоподстройки // Фазовая синхронизация / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Связь, 1975. С. 97 - 106.
50. Белых В.Н. Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С. 45 - 55.
51. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
52. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы / Под ред. Д.С.Чернавского. М.: Наука, 1987. 240 с.
53. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. О глобальной структуре разбиения цилиндрического фазового пространства одной неавтономной системы // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 4. С. 595 - 608.
54. Лихарев К.К., Ульрих Б.Г. Системы с джозефсоновскими контактами. М.: Изд-во МГУ, 1978. 446 с.
55. Ermentrout G.B. Synchronization in a Pool of Mutually Coupled Oscillators with Random Frequencies // J.Math.Biology. 1985. V.22, P.1-9.
56. Солитоны в действии / Под ред. К.Лонгрена, С.Скогга; пер. с англ. М.: Мир, 1981. 312 с.
57. Eilbeck J.S., Tjondahl P.S., Olsen O.H., Samuelson M.R. Comparison between one-dimensional and Two-dimensional Models of Josephson Junctions of Overlap Type // J.of Applied Physics.1985. V.57, N 3. P.861-867.

58. Olsen O.H., Lomdahl P.S., Bishop A.R., Eilbeck J.S. Pattern selection and Low-dimensional Chaos in the Driven Damped Two-dimensional Sine-Gordon Equation // J.Phys.C. : Solid State Phys. 1985. V.18. P.511-517.

59. Bishop A.R., Forest M.G., McLaughlin D.W., Overmann E.A. II. A Quasiperiodic Route to Chaos in a Near-integrable PDF // Physica I. 1986. V.23, N 1-3, P.293-328.

60. Осипов Г.В. Самоорганизация и стохастичность сегм фазовой синхронизации // Развитие и совершенствование устройств синхронизации в системах связи Тез. докл. всесоюз. науч.-техн. конф. М. Радио и связь, 1988. С. 13.

61. Астахов А.Ю., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Процессы синхронизации в цепочке взаимодействующих генераторов // Развитие и совершенствование устройств синхронизации в системах связи: Тез. докл. всесоюз. науч.-техн. конф. М.: Радио и связь, 1988. С. 13.

62. Bishop A.R., Lomdahl P.S. Nonlinear Dynamics in Driven, Damped Sine-Gordon System // Physica D. 1986. V. 18D, N 1-3. P.54-66.

63. Marcus P.M., Imry Y. Steady Oscillatory States of a Finite Josephson Junctions // Solid State Comm. 1980, V.33, N 3. P.345- 349.

64. Карпман В.И., Рябова Н.А., Соловьев В.В. Численные исследования системы флуксон - антифлуксон в длинном джозефсоновском контакте. Препринт ИЗМИРАН № М., 1982.

65. Карпман В.И., Соловьев В.В. Влияние внешних возмущений на солитоны в джозефсоновских контактах Препринт ИЗМИРАН № 28. М., 1980.

66. Chirikov B.V. A Universal Instability of a many Dimensional Oscillator Systems // Phys.Reports.1979 V.52. N 5. P.263-379.



67. Арансон И.С., Рабинович М.И. Рождение и динамика спиральных вихрей в двумерной модели Гинзбурга – Ландау // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 12. С. 1514 – 1517.
68. Арансон И.С., Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Рождение структур. Иерархия неустойчивостей и бифуркации // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1987. Т. 51, № 6. С. 1133 – 1150.
69. Арансон И.С., Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И. Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т. 81, № 1. С. 92 – 104.
70. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М. Наука, 1967. 575 с.
71. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения жестких уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
72. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 665 с.
73. Капранов М.В. Каскадные системы фазовой автоподстройки частоты // Динамика систем. Межвуз. сб. / ГГУ. Горький, 1976. № 11. С. 76 – 85.
74. Капранов М.В. Взаимодействующие многосвязные СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. М. Радио и связь, 1982. С. 55 – 73.
75. Некоркин В.И., Шалфеев В.Д. Коллективная динамика систем частотной автоподстройки как модель возбуждения нейроподобной среды // Коллективная динамика возбуждений и структурообразование в биологических тканях / ИПФ АН СССР. Горький, 1988. С. 190 – 197.
76. Пономаренко В.П. Динамика нелинейной системы частотной автоподстройки с инерционным управляющим элементом // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 3. С. 418 – 423.
77. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113 – 185.
78. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре // 7th Intern. Conf.

über nichtlineare Schwingungen. Bd. 2. Berlin: Akad'mic - Verlag, 1977. С.279-293.

79. Беляков Л.А., Шильников Л.П. Гомоклинические кривые и сложные уединенные волны // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / ГГУ. Горький, 1985. С. 22 - 35.

80. Keener I.P. Chaotic behaviour in piece wise continuous difference equations // Trans. AMS. 1980. V.26, №2. P.589-604.

81. Малкин М.И. Интервалы вращения и динамика отображений лоренцевского типа // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / ГГУ. Горький, 1986. С. 122 - 138.

82. Афраймович В.С. О ляпуновской размерности инвариантных множеств в одной модели активной среды // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Межвуз. сб. / ГГУ. Горький, 1986. С. 19 - 22.

83. Жабогинский А.М. Концентрационные колебания. М. Наука, 1974. 178 с.

84. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М.: Наука, 1984. 165 с.

85. Арансон И.С., Афраймович В.С., Рабинович М.И. Устойчивость пространственно однородного состояния в цепочках отображений: Препринт ИПФ АН СССР № 203. Горький, 1988.

86. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 240 с.

87. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // УФН. 1979. Т. 128, № 4. С. 579 - 624.

88. Соколов Е.Н., Шмелев Л.А. Нейробионика. М.. Наука, 1983. 280 с.

89. Фролов А.А., Муравьев И.П. Нейронные модели ассоциативной памяти. М.: Наука, 1987. 160 с.

90. Дубинин Ф.Д. Оптоэлектронные модели однородных сред. М.: Радио и связь, 1984. 124 с.

91. Автоволновые процессы в системах с диффузией: Сб. науч. тр. / ИПФ АН СССР. Горький, 1981. 286 с.

92. Eckmann J.P., Ruelle D. Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors // Rev.Mod.Phys. 1985. V.57, N 3. P.617-656.

93. Frederickson P., Kaplan I., Yorke I. The Lyapunov dimension of strange attractors // J. Diff. Equations. 1983. V.49. P.185-194.

94. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О достижимых переходах от систем Морса - Смейла к системам со многими периодическими движениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38, № 6. С. 1248 - 1288.

95. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. 1, П // Мат. сб. 1972. Т. 88, № 8. С. 475 - 492; 1973. Т. 90, № 1. С. 139 - 157.

96. Гаврилов Н.К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 5. С. 687 - 697.

97. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре - Биркгофа // Мат. сб. 1967. Т. 74 (116), № 3. С. 378 - 397.

98. Алексеев В.М. Символическая динамика // 11-ая математическая школа / Ин-т математики АН УССР, Киев. 1976. С. 6 - 210.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов.....	3
Предисловие.....	4
Глава 1	
БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ.....	6
1.1. Синхронизация в природе и технике.....	6
1.2. Системы автоматической синхронизации.....	7
1.3. Коллективные системы.....	10
1.4. Решеточные модели.....	12
Глава 2	
ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ.....	18
2.1. Уравнение погоковой цепочки. Динамика го- точного элемента.....	18
2.2. Режим синхронизации.....	21
2.3. Развитие пространственных неустойчивостей. Модель развития турбулентности по Ландау	29
2.4. Переходные процессы.....	33
Глава 3	
ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ НА ДИНАМИКУ ЦЕПОЧКИ ПОТОКОВОГО ТИПА.....	38
3.1. Динамика парциальной системы с фильтром...	38
3.2. О возможных режимах в цепочке.....	40
3.3. Глобальная синхронизация.....	42
3.4. Сценарии развития хаоса.....	45
3.5. Характеристики переходных процессов.....	51
	251

3.6.	Структурообразование.....	51
3.7.	О цепочках с более сложной динамикой элементов.....	58
Глава 4		
	ЦЕПОЧКИ С ВЗАИМНЫМИ СВЯЗЯМИ.....	69
4.1.	Синхронизация в изотропных и анизотропных цепочках.....	69
4.2.	Стационарные структуры. Хаос.....	76
4.3.	Переходные процессы.....	79
4.4.	Цепочка связанных инерционных систем.....	86
Глава 5		
	ЦЕПОЧКИ СО СВЯЗЯМИ ЧЕРЕЗ СИГНАЛЫ ФАЗОВЫХ РАССОГЛАСОВАНИЙ.....	91
5.1.	Потоковая цепочка.....	91
5.2.	Случай взаимных связей.....	97
Глава 6		
	НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РЕШЕТОК.....	112
6.1.	Процессы синхронизации в решетке с однонаправленными связями.....	112
6.2.	Изотропные решетки.....	115
6.3.	Когерентные периодические структуры.....	118
6.4.	Влияние внешнего поля на динамику решетки	121
Глава 7		
	АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ СИНХРОНИЗАЦИИ.....	128
7.1.	Стационарные режимы в цепочке.....	128
7.2.	Стационарные режимы в решетке.....	139

Глава 8	
ЗАМЕЧАНИЯ О ДРУГИХ ЦЕПОЧКАХ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ.....	148
8.1. Каскадные цепочки.....	148
8.2. Волновые свойства цепочки систем синхронизации с управлением по частоте.....	154
Глава 9	
УСТОЙЧИВОСТЬ И ХАОС В ЦЕПОЧКАХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ.....	174
9.1. О динамике парциальной системы.....	174
9.2. Хаотическое и регулярное поведение цепочки	176
9.3. Условия существования устойчивого стационарного режима.....	179
9.4. Условия синхронизации.....	187
Глава 10	
ДИНАМИКА КОЛЬЦЕВОЙ ЦЕПОЧКИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ.....	192
10.1. Возможность синхронизации.....	192
10.2. Регулярная динамика и хаос в кольцевой цепочке.....	194
10.3. Стационарные волны и пространственно однородные режимы.....	199
10.4. Устойчивость стационарных волн.....	203
10.5. Модулированные волны.....	209
Глава 11	
ПОРЯДОК И ХАОС В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ.....	216
11.1. Замечания о модели.....	216
11.2. Хаотическая динамика модели.....	217

11.3. Пространственно однородные и стационарные состояния.....	223
11.4. Стационарные волны.....	233
Глава 12	
ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ.....	238
Литература.....	242

V.S.Aframovich, V.I.Nekorkin,  
G.V.Osipov, V.D.Shalfeev

STABILITY, STRUCTURE AND CHAOS IN  
NONLINEAR SYNCHRONIZATION NETWORKS

(Ed. by A. V. G a p o n o v-G r e k h o v,  
M. I. R a b i n o v i c h)

Nonlinear dynamics of discrete nonequilibrium media - chain and lattice automatic synchronization networks - is considered. The onset of synchronization regime, possible ways of synchronization losses related, in particular, to dynamical chaos, as well as the formation of spatial structures in such networks are studied. The book is intended for specialists in radiophysics, radioengineering and applied mathematics.