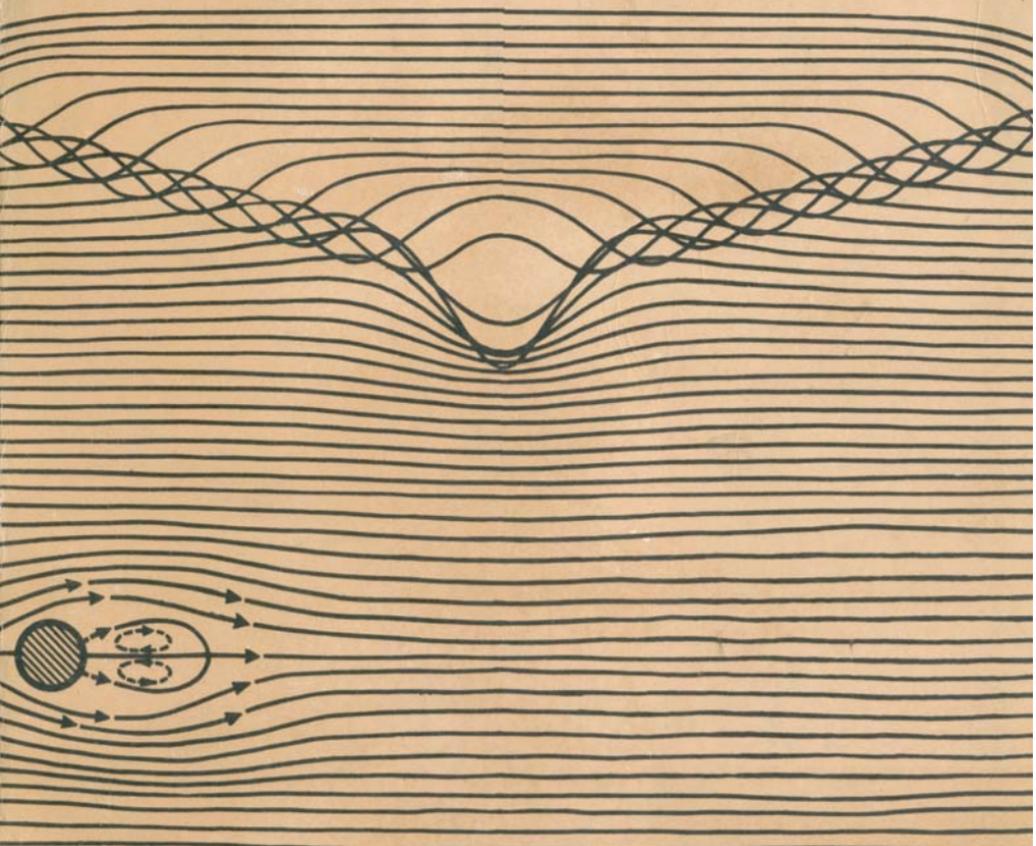


Методы гидрофизических исследований



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

**МЕТОДЫ
ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Материалы
I Всесоюзной школы
(Солнечногорск, октябрь 1983 г.)

Издано по решению Редакционно-издательского
совета института прикладной физики АН СССР

УДК 532.5+551.46

Сборник содержит материалы лекций I Всесоюзной школы по методам гидрофизических исследований (октябрь 1983 г.). В нем рассматриваются принципы и методы диагностики состояния водной среды и происходящих в ней физических процессов, находящие в последнее время все более широкое применение в геофизической гидродинамике, гидромеханике и других фундаментальных и прикладных областях исследований. В тематику сборника входят следующие вопросы: взаимодействия гидрофизических полей, физическое и численное моделирование движений жидкости, теоретические аспекты дистанционной диагностики, а также методы гидрофизических измерений.

Сборник предназначен для широкого круга специалистов в области геофизической гидродинамики, океанологии, гидромеханики и смежных областях.

Ответственные редакторы

А.В.ГАПОНОВ-ГРЕХОВ, С.А.ХРИСТИАНОВИЧ

Редакционная коллегия

Л.А.ОСТРОВСКИЙ (зам.отв.редактора),
Ю.Д.ЧАШЕЧКИН, Л.Ш.ЦИМРИНГ,
Н.А.ГОРОДЕЦКАЯ (отв.секретарь)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, гидрофизика – это наука о физических свойствах гидросферы и протекающих в ней физических процессах. Объект ее изучения – все воды Земли, но здесь мы будем говорить только о гидрофизике Мирового океана.

Нет нужды в подробном обсуждении все возрастающего значения океана для человечества: рост интереса к изучению и использованию ресурсов океана бросается в глаза каждому. Сейчас, несмотря на обширный материал, накопленный океанологами, мы еще многого не знаем о его структуре, динамике, энергообмене между различными движениями. Причину этого нетрудно понять. Океан напоминает живой организм, его приходится изучать одновременно на всех "уровнях", во взаимосвязи всех масштабов – от глобальных до самых мелких, поскольку движения различных масштабов активно взаимодействуют между собой, и в этом смысле океан представляет собой существенно нелинейную систему.

Отсюда ясна и чрезвычайно большая сложность постановки океанического эксперимента. Локальные измерения часто не дают нужных закономерностей, хотя они и позволили собрать огромный статистический материал. Лишь в сравнительно недавнее время появилась возможность дополнить их постановкой глобальных экспериментов. Это, в первую очередь, космическая океанография и акустическое зондирование океана, в частности акустическая томография.

Но не только этот шаг характеризует современную ситуацию в гидрофизике. Весьма важны еще, по крайней мере, два фактора. Первый из них – прогресс физического моделирования; создается все больше лабораторных установок и бассейнов со стратификацией, позволяющих изучать в малых масштабах те процессы, которые технически очень сложно исследо-

вать в натуральных условиях. Второй – это вычислительный эксперимент, видимо, позволяющий уже подойти вплотную к решению задач о “многомасштабном” поведении океана. Это, впрочем, не исчерпывающий перечень – важную роль играет, с одной стороны, применение в теоретической гидрофизике современных методов теории волн, а с другой – совершенствование “традиционных” локальных датчиков гидрофизических полей за счет достижений технологии. Все это вместе позволяет надеяться на качественный скачок (или скачки) в уровне наших знаний об океане.

Гидрофизические проблемы привлекают сейчас молодых исследователей самых различных специальностей, особенно молодежь, – океанологов, акустиков, радиофизиков, оптиков, инженеров, математиков... Важным симптомом такого интереса можно считать проведение в октябре 1983 г. первой Всесоюзной школы–семинара по методам гидрофизических исследований. Настоящий сборник составлен из материалов лекций этой школы. (Несколько лекций не нашли отражения в сборнике, поскольку их материалы опубликованы в других изданиях. Так, основное содержание лекции акад. А.М.Обухова “Системы гидродинамического типа и их применение” опубликовано в статье: Обухов А.М. “Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование” – УМН, 1983, т.38, №4(232), с.101-111.)

Конечно, одна школа не могла охватить всех сторон проблемы, тем не менее, важнейшие направления – физическое моделирование, численный эксперимент, дистанционные методы – представлены, на наш взгляд, хотя и не полно, но достаточно интересно. Правда, материалы сборника довольно разнородны и по объему, и по характеру изложения (что типично для школ вообще). Однако мы надеемся, что большинство статей будет понятно и полезно весьма широкому кругу молодых ученых и инженеров, желающих лучше ориентироваться в сложном лабиринте гидрофизических проблем.

А.В.Гапонов–Грехов,

С.А.Христианович

ЛАБОРАТОРНЫЙ БАССЕЙН
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ
В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ

В.В.Арабаджи, С.И.Баранов, С.Д.Богатырев,
В.А.Брайловская, В.И.Казаков, В.Р.Коган,
Ю.А.Степанянц, В.И.Таланов

К числу наиболее динамичных явлений, происходящих в верхних, сильно стратифицированных слоях океана, в том числе на границе с атмосферой, относятся поверхностные и внутренние волны. Охватываемый ими диапазон включает длины волн от сантиметров до километров, а области, существенные для их формирования, простираются на десятки и сотни километров. Такой широкий диапазон масштабов сильно затрудняет исследования. Между тем научный и практический интерес к изучению динамики волновых движений верхних слоев океана неуклонно растет, что требует все более сложного и дорогостоящего натурного эксперимента. Альтернативой такому эксперименту является моделирование волновых движений стратифицированной жидкости в лабораторных условиях. Хотя такие исследования имеют весьма давнюю историю, однако выполненные на небольших лотках со стратификацией, лишь отдаленно напоминающей пикноклин реального океана [1], эти исследования в лучшем случае касались лишь общей качественной картины явлений или отдельных ее деталей, что на современном этапе совершенно недостаточно.

В данной статье обсуждаются возможности лабораторного масштабного моделирования структуры верхнего слоя океана и динамики происходящих в нем волновых движений; оценивается величина коэффициента подобия, определяющая минимальные размеры лабораторных бассейнов, при которых еще допу-

стимо масштабное моделирование; описан простой, эффективный способ создания в лабораторных бассейнах температурной стратификации, воспроизводящей по структуре пикноклин океана; проиллюстрированы результаты применения этого способа на математических и физических моделях; приведены результаты экспериментов по генерации внутренних волн в температурно-стратифицированном бассейне.

1. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ТЕЧЕНИЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ КОЭФФИЦИЕНТА ПОДОБИЯ

Критериями, определяющими подобие течений стратифицированной по плотности $\rho(z)$ и горизонтальной скорости $u(z)$ невязкой несжимаемой жидкости, являются [2]:

внутреннее или денситометрическое число Фруда

$$Fr = \frac{v}{\left(g \frac{\Delta \rho}{\rho} L\right)^{1/2}} \quad (1)$$

и градиентное число Ричардсона

$$Ri = - \frac{g \left(\frac{d\rho}{dz}\right)}{\rho \left(\frac{du}{dz}\right)^2}, \quad (2)$$

а наиболее употребительной характеристикой среды, устойчиво стратифицированной по плотности $\rho(z)$, — частота Брента-Вейсяля

$$N = \left(-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right)^{1/2}. \quad (3)$$

В океане соответствующие периоды внутренних колебаний $T = 2\pi/N$ равны минутам и десяткам минут в максимуме градиента плотности и возрастают до часов в глубине, где стратификация незначительна. В приведенных критериях v — характерная скорость потока, $\Delta\rho/\rho$ — характерное относительное изменение плотности, L — характерный линейный размер, g — ускорение силы тяжести.

При изучении волн, генерируемых в стратифицированной жидкости движущимся телом, вводят в рассмотрение также число Фруда

$$Fr = \frac{v}{NL} ,$$

связанное с размером L , скоростью тела v и частотой Брента-Вайсяля на горизонте его движения N .

Масштабное моделирование течений по критериям Фруда и Ричардсона может быть осуществлено в одной и той же жидкости (в том числе со свободной поверхностью) с любым коэффициентом подобия $K_L = L/L'$ (L – натурный, L' – модельный размер) при одновременном изменении временного масштаба в $t/t' = K_L^{1/2}$ раз и сохранении характерного перепада плотности $\Delta\rho$.

Для верхнего слоя океана, где стратификация плотности обусловлена в основном изменением температуры, масштабное моделирование означает вертикальное сжатие распределения температуры в K_L раз при сохранении полного перепада температуры ΔT , свойственного океану.

С модели (штрихованные обозначения) на натуру (нештрихованные обозначения) легко пересчитываются и другие физические величины, например, скорость $v/v' = K_L^{1/2}$ (включая фазовую и групповую скорости волн), сила $F/F' = K_L^3$, плотность энергии $w/w' = K_L$, плотность потока энергии $S/S' = K_L^{3/2}$, энергия $W/W' = K_L^4$, мощность $P/P' = K_L^{7/2}$, амплитуда смещения в волнах $\rho/\rho' = K_L$, частота Брента-Вайсяля $N/N' = K_L^{-1/2}$ и т.д.

Важно отметить, что во всех движениях при моделировании сохраняются неизменными абсолютные перепады плотности и температуры, свойственные натурным движениям. В частности, сохраняются в сопоставимых условиях амплитуды колебаний плотности и температуры во внутренних волнах, хотя сами волны переносятся в более высокочастотную область временных и пространственных масштабов.

Величина K_L ограничивается сверху, в первую очередь такими факторами, как поверхностное натяжение и вязкость. Так, на поверхности масштабно моделируются лишь гравитационные волны. Ограничиваясь в натуре изучением волн с длинами $\lambda \geq 1$ м, в модели нельзя превышать коэффициент подобия $K_L \sim 20$, чтобы не выйти на гравитационно-капиллярные волны.

В вязкой жидкости моделирование по числам Фруда и Ричардсона не сохраняет числа Рейнольдса $Re = vd/\nu$, где d – характерный масштаб потока или движущегося в нем тела, ν – кинематическая вязкость. В опытовых бассейнах при испыта-

нии движущихся моделей, имеющих значительное волновое сопротивление, принято выдерживать критерий Фруда, обеспечивая, однако, при этом достаточно большие числа Рейнольдса $Re/Re_{кр}$, при которых коэффициент сопротивления трения слабо зависит от Re . Критическим числом принято считать $Re_{кр} \approx 3 \cdot 10^6$. Практически ограничение коэффициента подобия

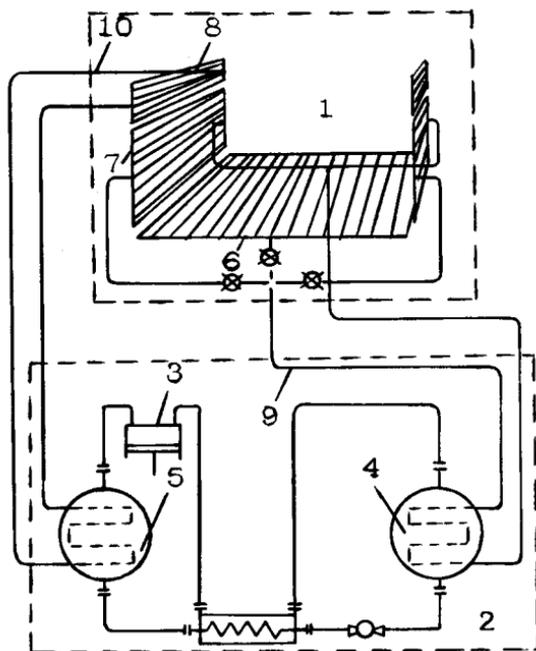
$$K_L < \left(\frac{d v}{\nu Re_{кр}} \right)^{2/3}$$

означает, что стратифицированный бассейн широкого назначения должен строиться по типу и размерам судостроительных опытовых бассейнов с $K_L \sim 25$. Собственно внутренние волны, возбуждаемые, например, специальными волнопродукторами, могут, конечно, изучаться и в гидрлотках меньших размеров. Влияние диссипативных факторов, таких как вязкость и теплопроводность, на характеристики внутренних движений стратифицированной жидкости быстро падает с увеличением масштабов лабораторной установки (время релаксации пропорционально L'^2); поэтому даже в установках сравнительно небольших размеров, реализующих высокие значения коэффициента подобия K_L , этим влиянием, как правило, можно пренебречь.

2. СПОСОБ СОЗДАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ В ЛАБОРАТОРНОМ БАССЕЙНЕ

До последнего времени метод искусственной термостратификации практически не находил применения в лабораторных условиях. Объяснялось это необходимостью значительных затрат энергии и времени на создание стратификации, трудностями формирования нужного профиля и поддержания его сколько-нибудь длительное время. Была предложена конструкция термостратифицированного бассейна, практически лишенная указанных недостатков, что делает ее весьма перспективной для оснащения модельного гидрофизического эксперимента [3,4].

Способ стратификации бассейна иллюстрируется принципиальной схемой, изображенной на рис.1. Термостратификация осуществляется по принципу теплового насоса холодильной машиной с помощью теплообменников, размещенных на внутренней поверхности бассейна, дно и стенки которого хорошо



Р и с. 1. Схема создания термостратификации в бассейне: 1 – бассейн, 2 – холодильная машина, 3 – компрессор, 4 – испаритель, 5 – конденсатор, 6,7,8 – теплообменники, 9,10 – трубопроводы

теплоизолированы от внешней среды. Теплообменники, расположенные в нижней части бассейна, связаны трубопроводом и внешним теплообменником с испарителем холодильной машины, а верхние – с конденсатором. При работе холодильной машины тепло отбирается от нижних слоев жидкости в бассейне и передается верхним, выбор режима работы теплого и холодного контуров позволяет регулировать характер стратификации, а сам принцип теплового насоса делает установку экономичной. Требуемая мощность машины зависит от объема бассейна. Для больших бассейнов могут быть использованы промышленные холодильные установки.

В описываемой конструкции свободная конвекция, поддерживаемая бортовыми теплообменниками, обеспечивает высокую однородность стратификации по всей площади бассейна при значительных градиентах температуры в области скачка.

Это наглядно видно из результатов анализа как математической, так и физической моделей бассейна.

Для приближенного описания установления температурной стратификации в бассейне можно привлечь хорошо известные представления о характере течения жидкости около вертикальной нагретой (охлажденной) стенки. Режим течения и характер теплообмена в тонком пограничном слое у стенки зависят от числа Рэлея Ra : при $10^3 < Ra < 10^9$ течение ламинарно, при $Ra > 10^9$ - турбулентно. Для воды с перепадом температуры между стенкой и внутренним объемом бассейна, равным $\Delta T_- = -6^\circ\text{C}$ в нижней части и $\Delta T_+ = 10^\circ\text{C}$ в верхней части бассейна, критическая высота стенок, соответствующая переходу от ламинарного к турбулентному теплообмену ($Ra = 10^9$), равна соответственно $H_{кр}^- = 40$ см и $H_{кр}^+ = 20$ см. В описанных ниже моделях реализуются оба режима.

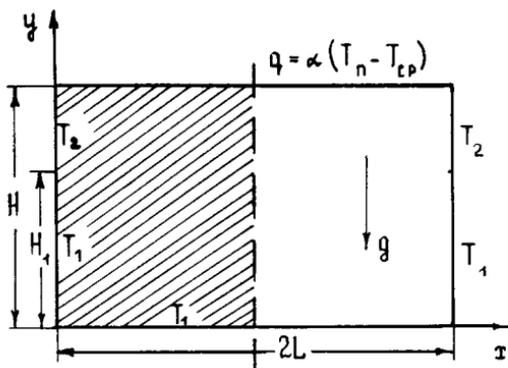
3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВЛЕНИЯ ТЕРМОСТРАТИФИКАЦИИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ БАСЕЙНА

Для проверки правильности идеи термостратификации были разработаны и построены две физические модели бассейна, получившие название "малой" и "промежуточной". Размеры гидротка малой модели $5 \times 0,7 \times 0,4$ м, промежуточной - $5 \times 1,6 \times 1,2$ м. Слой температурного скачка в малой модели расположен на глубине 10 см, в промежуточной он может занимать два положения - 15 см и 30 см от поверхности, что достигается переключением секций теплообменников. В ходе разработки и исследования обеих моделей была создана и реализована на ЭВМ ЕС-1040 математическая программа, позволяющая предварительно смоделировать процессы массо- и теплопереноса, приводящие к возникновению температурной стратификации*). Расчет выполнен для двумерной модели бассейна (рис.2).

Система уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

*)

Разработка методов математического моделирования свободной конвекции в бассейне проводилась совместно с группой сотрудников ИПМ АН СССР, руководимой В.И.Полежаевым.

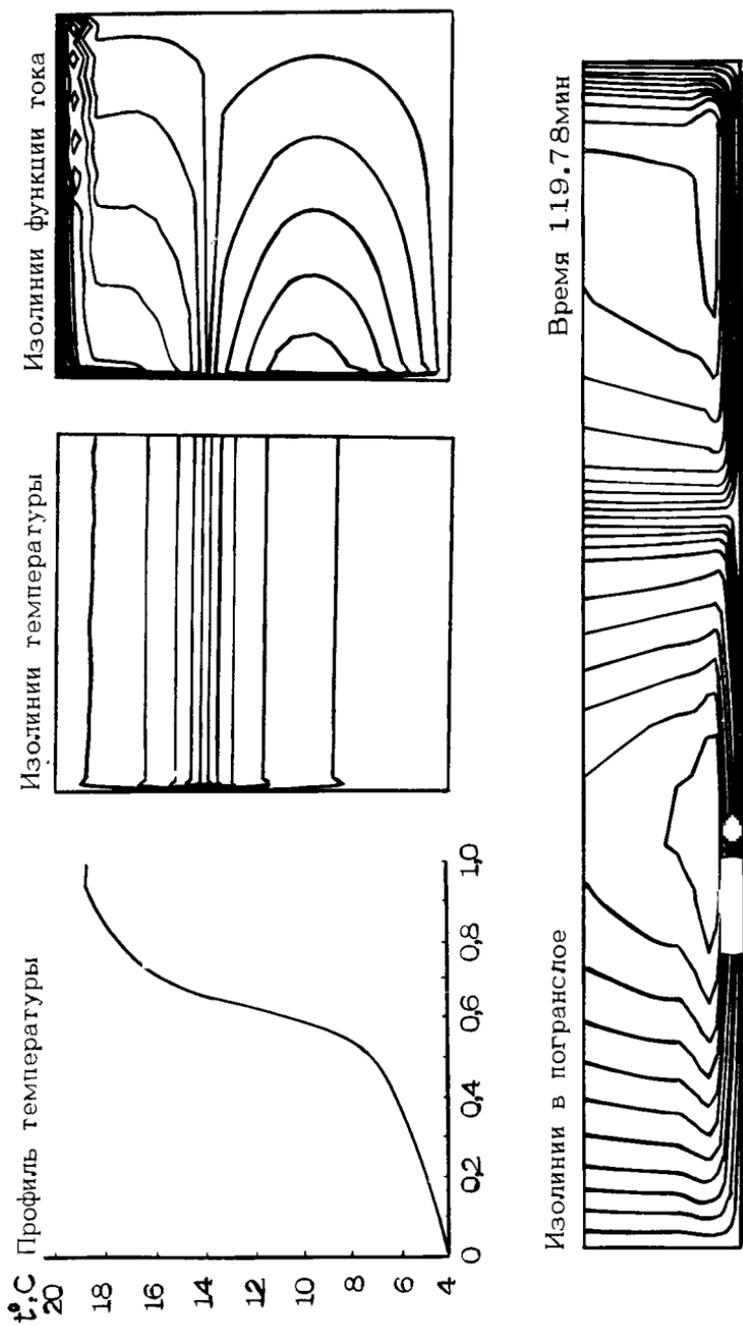


Р и с. 2. Математическая модель бассейна

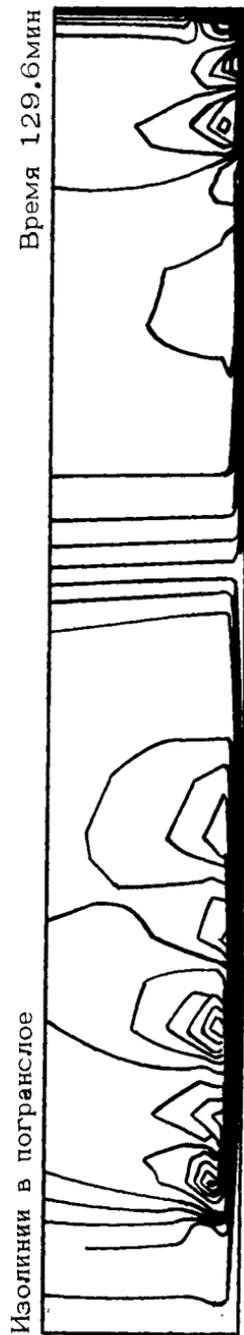
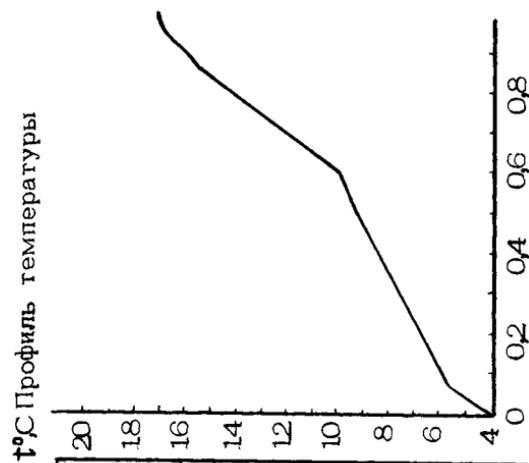
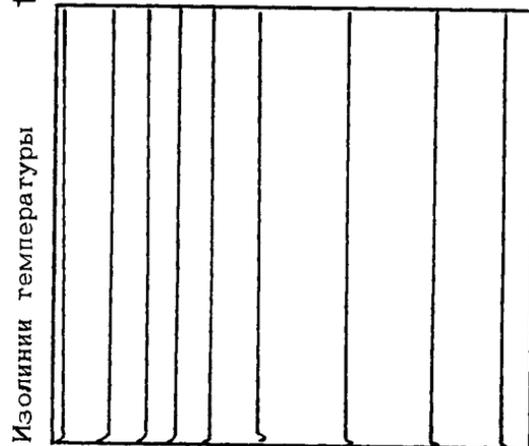
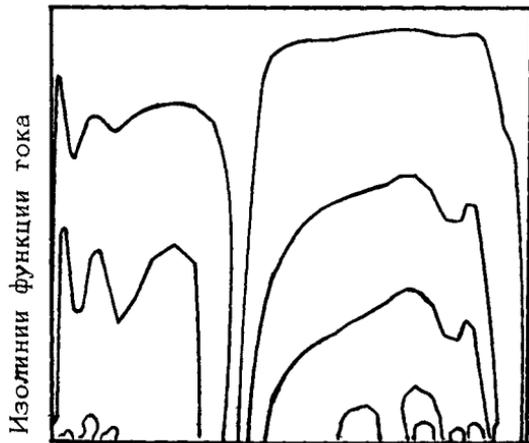
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \Delta \omega - \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \Delta \psi = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T,$$

где u, v – проекции скорости на оси x и y , $\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ – завихренность, ψ – функция тока, $\text{Gr} = g \beta H^3 \Delta T / \nu^2$ – число Грасгофа; $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля, $\beta = -\rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ – коэффициент объемного расширения, χ – коэффициент температуропроводности. В расчетах предполагалось, что все физические свойства жидкости постоянны и не зависят от температуры. Температура стенок принималась равной $T_1 = 4^\circ$, $T_2 = 20^\circ$, начальная температура жидкости $T = 10^\circ\text{C}$, температура окружающей среды $T_{\text{сп}} = 18^\circ$, коэффициент теплоотдачи с поверхности $\alpha = 5 \text{ Вт/м}^2$. Число Грасгофа для малой модели $\text{Gr} = 0,9 \cdot 10^9$, для промежуточной $0,28 \cdot 10^{11}$. Расчет проводился для половины поперечного сечения бассейна по монотонной дивергентной схеме с использованием неравномерной сетки 43×34 в первом и 48×38 во втором варианте. Примеры полученных распределений для малой модели показаны на рис.3. Как и ожидалось, после включения холодильной машины в бассейне возникают вихревые движения с различным средним направлением циркуляции жидкости выше и ниже температурного скачка. Эти движения в основном объеме имеют малые (порядка долей миллиметров в секунду и ниже) скорости и носят нерегулярный пульсирующий характер. Тем не менее они обеспечивают устойчивую вертикальную температурную стратификацию жидкости, которая



Р и с. 3. Распределение скорости и температуры в малой модели бассейна в начале работы холодильной машины

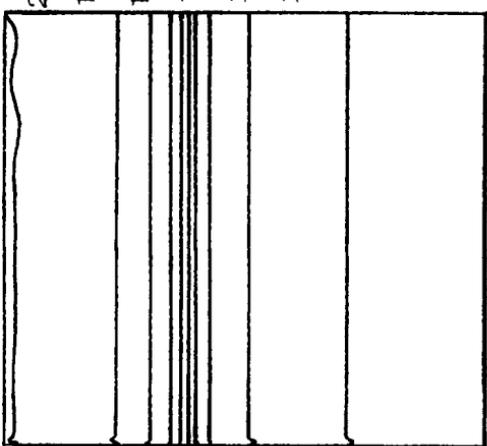


Р и с. 4. Распределение скорости и температуры в малой модели бассейна в стационарном режиме

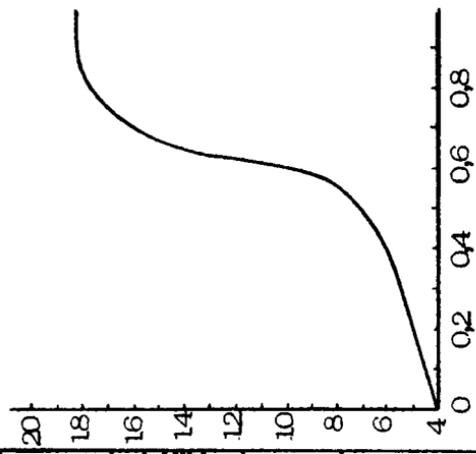
Изолинии функции тока



Изолинии температуры



$t^{\circ}\text{C}$ Профиль температуры



Изолинии в погранслое



Р и с. 5. Распределение скорости и температуры в промежуточной модели бассейна в стационарном режиме

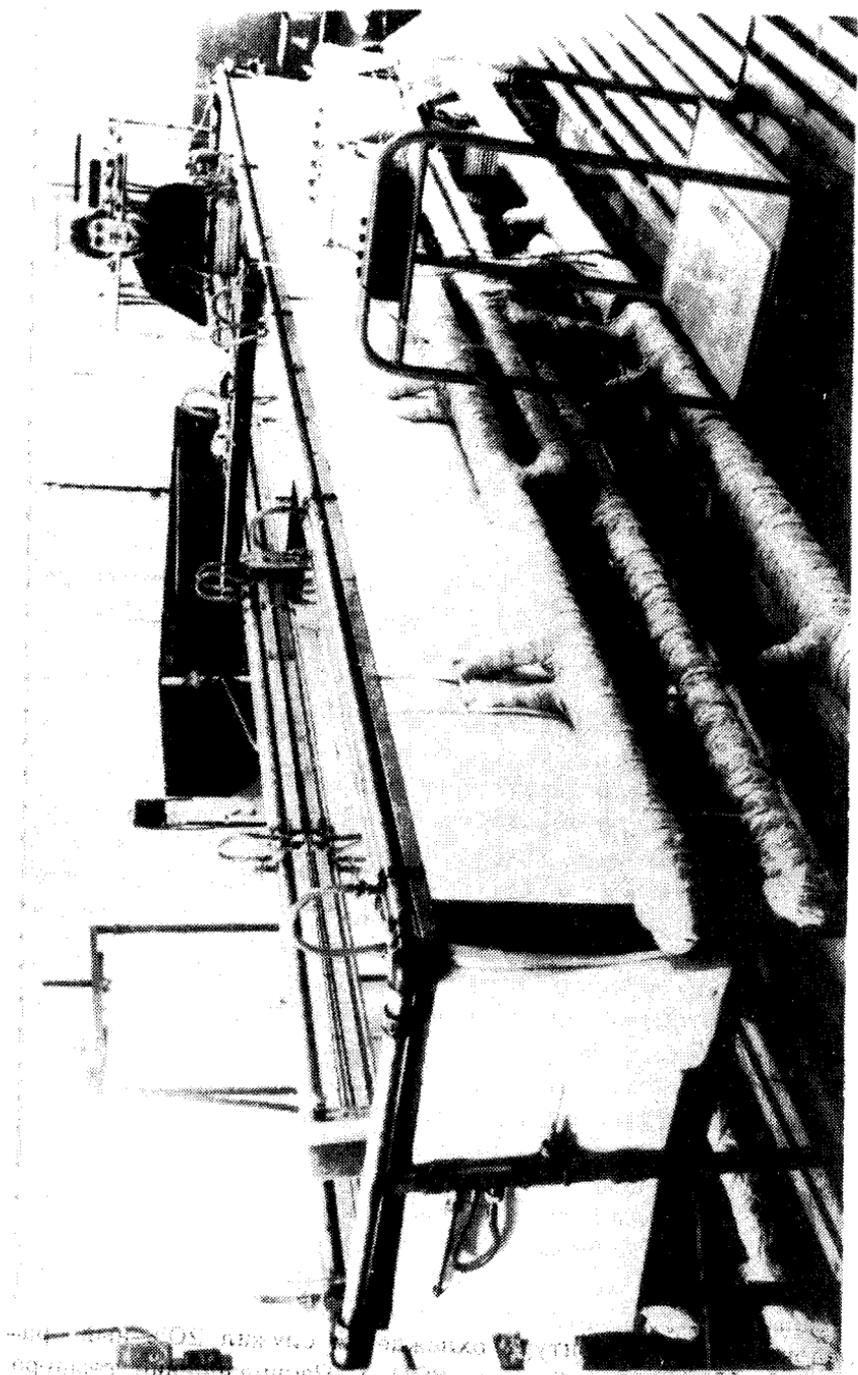
на стадии установления медленно и монотонно изменяется, оставаясь практически однородной по всей ширине бассейна, кроме тонких пограничных слоев у боковых стенок, где изотермы возмущаются пристеночной циркуляцией жидкости. Течение у стенок в первой (малой) модели носит чисто ламинарный характер на всех стадиях установления стратификации.

В промежуточной модели на начальной стадии установления стратификации у стенок наблюдается существенное усложнение структуры течения по сравнению с картиной при $Gr = 10^9$, выражающееся в появлении вторичных вихрей в пограничном слое у вертикальной стенки (рис.4). Однако такой характер течения наблюдается лишь в переходном режиме, постепенно вторичные вихри в пристеночном слое исчезают и реализуется течение, обладающее ламинарной структурой, близкой к структуре в малой модели (рис.5). Это явление можно объяснить действием устанавливающейся в бассейне вертикальной температурной стратификации, снижающей локальный перепад температур между стенкой и жидкостью и стабилизирующей свободноконвективное течение.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Малая модель стратифицированного бассейна показана на рис.6. Чаша гидроканала модели емкостью $5,0 \times 0,7 \times 0,4 = 1,4 \text{ м}^3$ выполнена из листов нержавеющей стали толщиной 2 мм. Она вставлена в жесткий каркас из уголков, который одновременно служит основой для системы трубопроводов, соединяющих теплообменники стенок и дна канала с соответствующими контурами холодильной машины. Конструктивно теплообменники представляют собой секции параллельно соединенных трубопроводов из 10-миллиметровых трубок нержавеющей стали, уложенных в пенопласт толщиной 60 мм и термосоединенных с закрывающим их листом нержавеющей стали. Все коммуникации холодного контура, а также сам бассейн тщательно теплоизолированы асбестопуховым шнуром и пенопластом

В качестве холодильного агрегата использовалась машина марки ИФ-49М с номинальной холодопроизводительностью 2000 ккал/ч и электрической мощностью 2 кВт. Холодный и теплый контуры прокачивались насосами типа К 20/30. Хладоносителем в контуре охлаждения служил 20%-ный раствор CaCl_2 , общим объемом 800 л. Распределение темпера-



Р и с. 6. Общий вид малой модели

туры в бассейне по вертикали определялось специальным датчиком, выполненным на основе термосопротивления, значение температуры одновременно с положением датчика регистрировалось двухкоординатным самописцем.

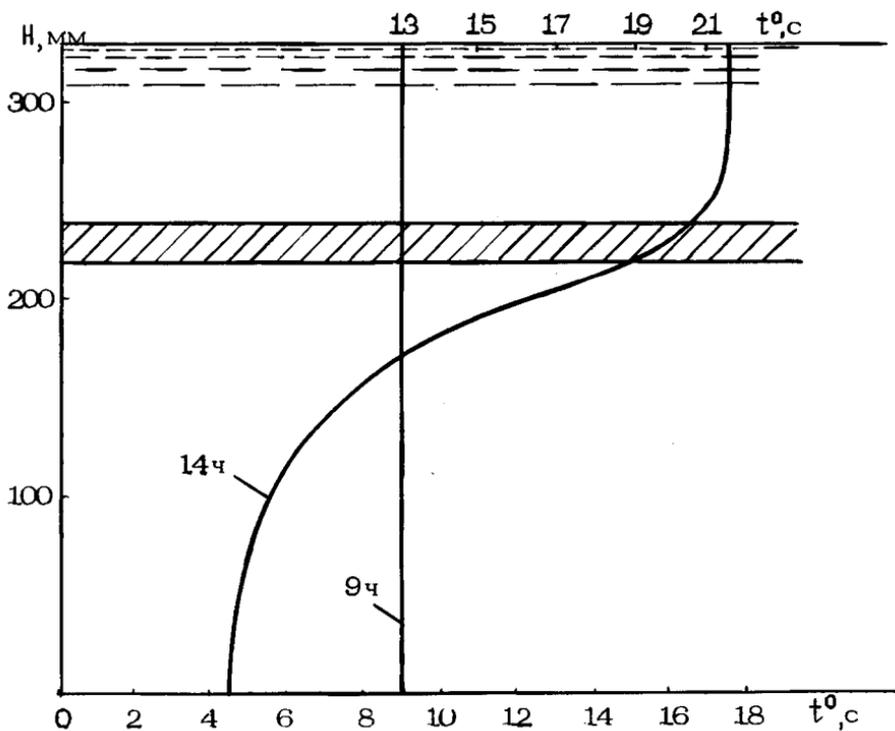
Эксперименты показали, что за время порядка одного часа в жидкости устанавливается стратификация близкая к линейной. Установление такой же стратификации в режиме чисто диффузионного теплообмена потребовало бы несравнимо большего времени – порядка 20–25 ч. Выход на стационарную стратификацию с резко выраженным слоем скачка происходит примерно через три часа после включения холодильной машины в зависимости от начальной температуры и остаточной стратификации.

На рис. 7, 8 показаны профили температуры в различных режимах работы холодного и теплого контуров. В зависимости от момента и продолжительности включения теплого и холодного контуров распределение температуры может иметь вид сильно выраженного скачка с практически полным отсутствием стратификации в придонных и приповерхностных слоях, либо термоклина с плавно меняющейся температурой ниже слоя температурного скачка и слабой стратификацией в приповерхностном слое. В отдельных экспериментах были получены распределения температуры, имитирующие закон изменения температуры, установленный для сезонного термоклина Китайгородским и Миропольским [5]. Максимальный градиент температуры, достигнутый в эксперименте, составляет величину 1,8–2 град./см.

В процессе эксперимента выяснилось, что в установлении стратификации основную роль играют бортовые секции теплообменников, роль донной секции практически незначительна. Во всех экспериментах наблюдалось постоянство профилей температуры по всей ширине бассейна, за исключением очень тонких пристеночных слоев.

В одном из экспериментов установление стратификации осуществлялось холодной секцией лишь одного борта и всем теплым контуром. При этом время установления термоклина возросло в 2 раза, а предельный градиент уменьшился примерно в 1,5 раза.

Вышеописанная малая модель подтвердила все теоретические предпосылки и принцип работы термостратифицированного бассейна. Однако, как уже отмечалось, при выбранном масштабе характер течений в тонком слое у поверхности теплооб-



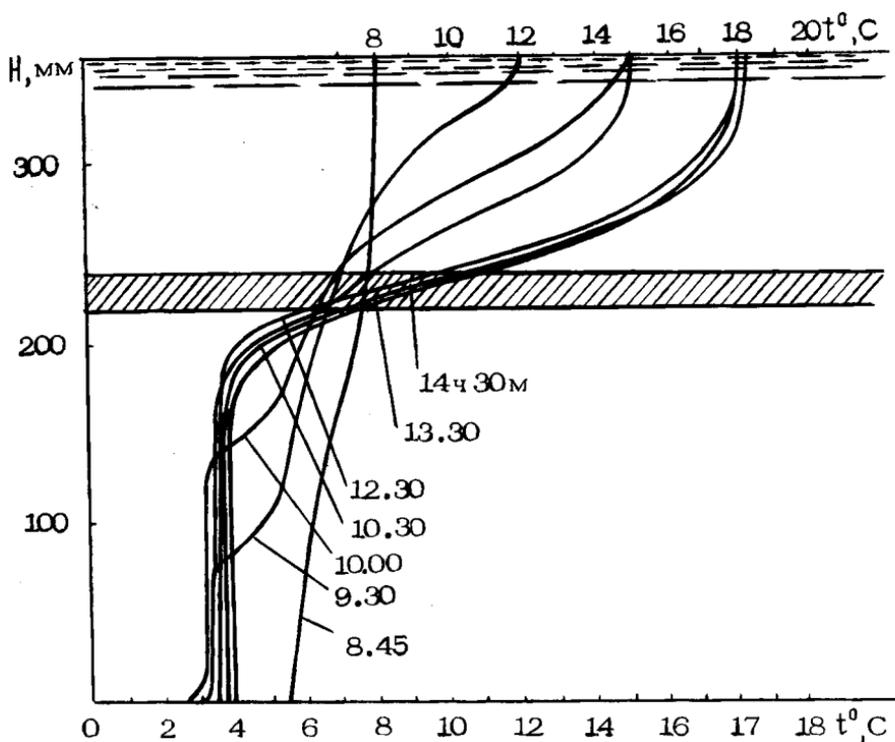
Время суток	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Борт (тепло)		■	■	■		■	■			
Борт (холод)		■			■			■	■	■
Днище (холод)		■			■			■	■	

■ - Время работы

Р и с. 7. Распределение температуры в малой модели в различных режимах работы холодного и теплового контуров (эксперимент)

мена был ламинарным ($Re < 10^9$), в большем же бассейне он должен быть турбулентным. С целью реализации такого режима была создана вторая (промежуточная) модель с размерами 5х1,6х1,2 м.

Схема создания термостратификации в промежуточной модели принципиально не отличается от приведенной на рис.1,



Время суток	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Борт (тепло)										
Борт (холод)										
Днище (холод)										

▨ - Время работы

Р и с. 8. Распределение температуры в малой модели в различных режимах работы холодного и теплого контуров (эксперимент)

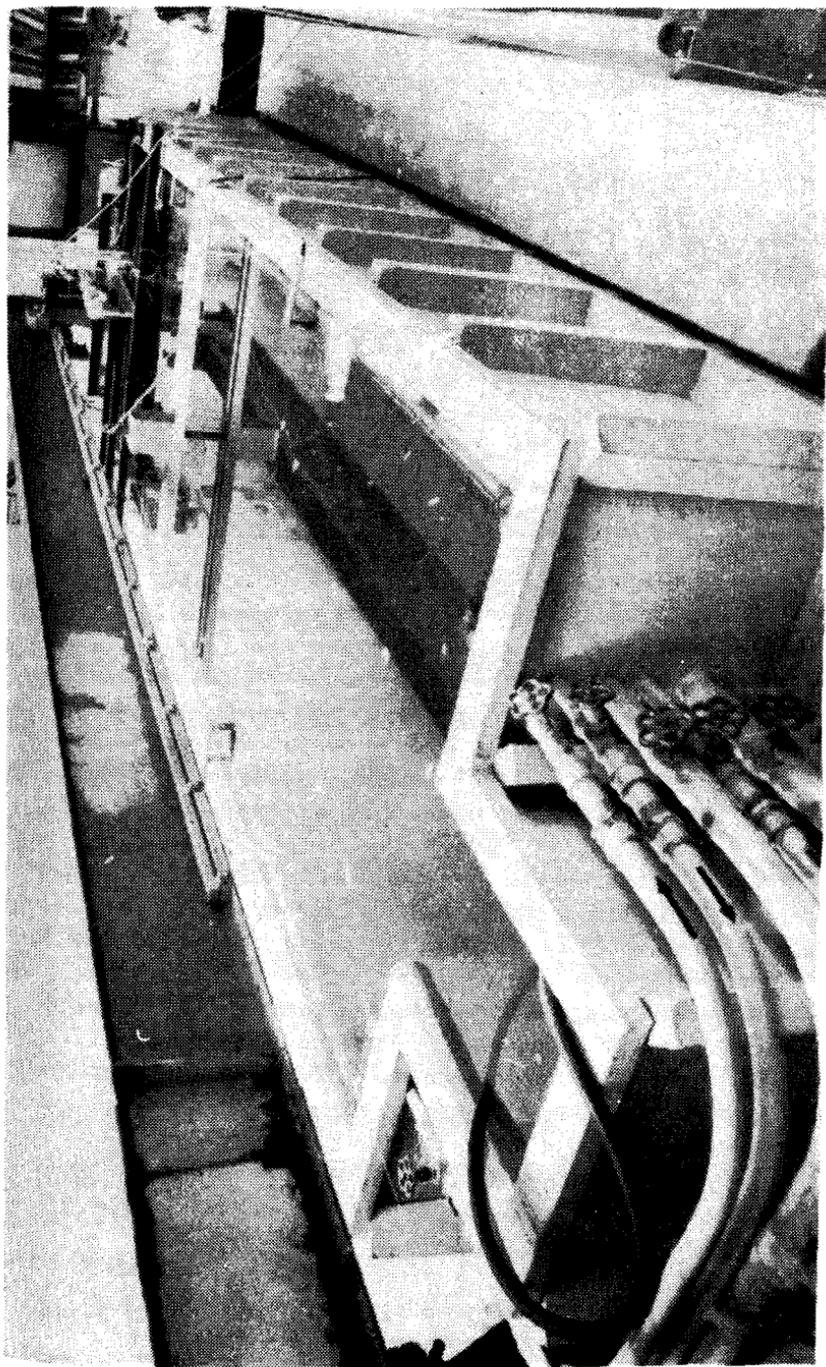
исключены лишь донные теплообменники. Общий вид промежуточной модели стратифицированного бассейна показан на рис.9.

Гидроканал модели выполнен из обычной стали (Ст3) в виде прямоугольной чаши с наружными ребрами жесткости. Внутренняя поверхность покрыта напыленным пенополиуретаном, толщина покрытия 20-30 мм. Вся наружная поверхность, вклю-

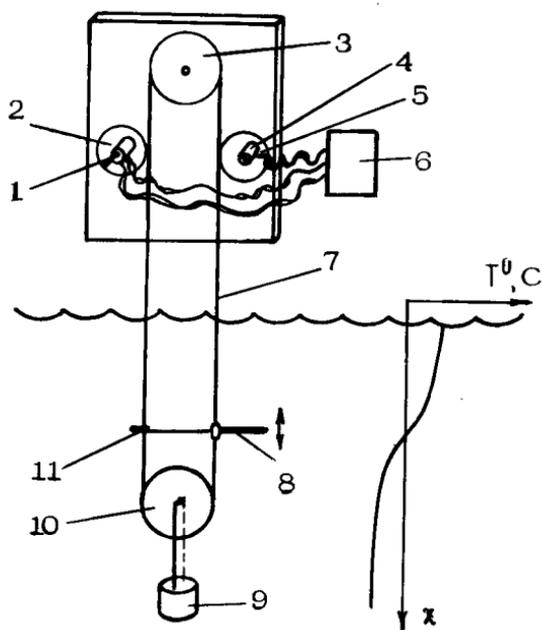
чая и днище, теплоизолирована листовым пенопластом толщиной 60 мм. В торцевой стенке вварены трубопроводы, соединяющие холодильную установку с теплообменниками в бассейне. Теплообменники выполнены в виде настенных ширмовых поверхностей. Продольные трубы (коллекторы) имеют диаметр 50 мм, поперечные, образующие собственно поверхность теплообмена, — 10 мм. Теплообменники навешиваются на внутреннюю поверхность бортов и дюритовыми патрубками соединяются с трубопроводами, вваренными в торцевую стенку гидроканала. Два дополнительных коллектора дают возможность изменять площади теплообмена холодного и теплого контуров и тем самым варьировать положение слоя скачка температуры по глубине.

Холодильная установка состоит из двух холодильных машин типа МКВ4-1-2, работающих на один общий испаритель. Машины данного типа предназначены для создания и поддержания температур от -3° до $+5^{\circ}\text{C}$ в стационарных камерах и оснащены сухими настенными ребристыми испарителями типа ИРСН-24. Каждая машина имеет четыре испарителя. В нашей установке все восемь испарителей заключены в герметичный кожух из нержавеющей стали, через который прокачивается раствор CaCl_2 концентрацией примерно 20%. Таким образом, нижние теплообменники и испаритель составляют контур, в котором циркулирует раствор CaCl_2 . Компрессоры холодильных машин охлаждаются пресной водой, проходящей через верхние теплообменники, которые образуют второй контур, отдающий тепло в верхние слои бассейна. В обоих контурах используются насосы типа "К", создающие напор 30 м вод.ст. при подаче $20 \text{ м}^3/\text{ч}$. Холодopоизводительность каждой машины — 4000 ккал/ч, а потребляемая мощность — 2,3 кВт, суммарная мощность двух холодильных машин и двух насосов составляет 12,6 кВт.

Для измерения и регистрации статического профиля температуры по глубине бассейна, а также регистрации колебаний изотерм во внутренних волнах был разработан и создан прибор, кинематическая схема которого показана на рис.10. В качестве датчика использован термистор МТ-64 конструкции Карманова. Термисторный датчик Д (рис.11) подключен к одному из входов дифференциального усилителя $У_1$. К другому входу $У_1$ подключен источник регулируемого смещения. Выход усилителя $У_1$ подключен ко входу усилителя $У_2$, выход последнего питает реверсивный двигатель М (И — источник



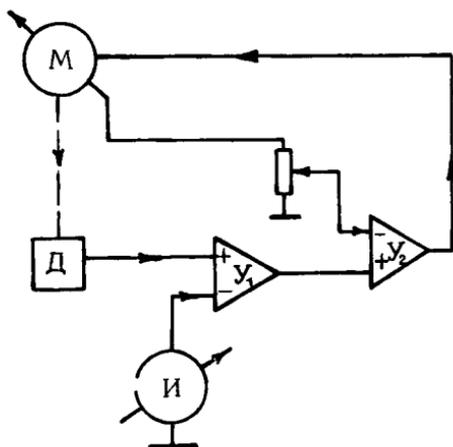
Р и с. 9. Общий вид промежуточной модели



Р и с. 10. Кинематическая схема следящего индикатора изотерм: 1 - реверсивный двигатель, 2,3, 5,10 - шкив, 4 - многооборотный потенциометр, 6 - блок управления, 7 - трос-кабель, 8 - термистор, 9 - груз, 11 - фиксатор

регулируемого смещения). Угол поворота вала двигателя используется как выходной сигнал - указатель глубины изотермы и как сигнал отрицательной обратной связи, регулируемой потенциометром. Для преобразования угла поворота вала в напряжение используется многооборотный потенциометр. В качестве троса применен гибкий изолированный провод, служащий одновременно для связи датчика с электрической схемой. Регистрация производится на двухкоординатном самописце. Прибор работает в двух режимах: сканирования по глубине (определяется профиль стратификации) и отслеживания заданной изотермы (регистрируются внутренние волны и другие колебания в термоклине).

С помощью этого прибора были выполнены измерения термостратификации в гидроканале промежуточной модели. На рис.12 изображены профили температуры в стационарном режиме. Кривая 1 соответствует верхнему (приповерхностному)

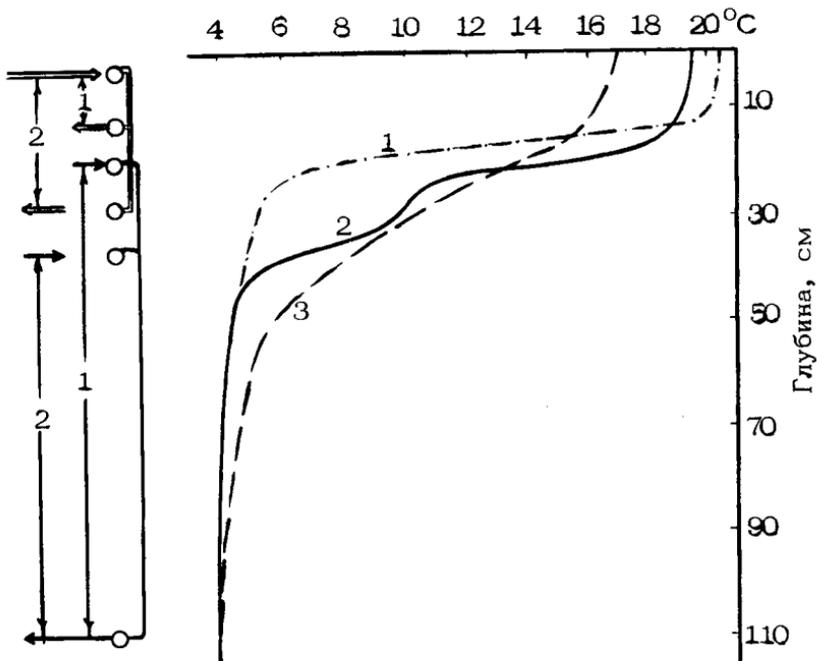


Р и с. 11. Схема следящего индикатора изотерм

расположению термоклина. При этом теплообменник включен так, что площадь теплообмена теплого контура является минимальной, а площадь холодного контура – максимальной. На кривой 2 отчетливо видна "ступенька", т.е. слой скачка является двойным. Это, возможно, объясняется особенностями конструкции теплообменников в области скачка. Экспериментально достигнут градиент 0,8–1,2 град/см. Время создания стационарной стратификации (типа изображенной на рис.12) при начальной температуре 10°С во всем объеме бассейна равно примерно 9 ч.

Следует отметить, что с увеличением размеров бассейна, а объем промежуточной модели почти в 7 раз больше объема малой, время "жизни" стратификации (после выключения машин) значительно возросло. На рис.12 приведен график стратификации, оставшейся по прошествии 18 ч – кривая 3. Потери на диффузионный обмен между слоями и с атмосферой составляют не более 250 ккал/ч.

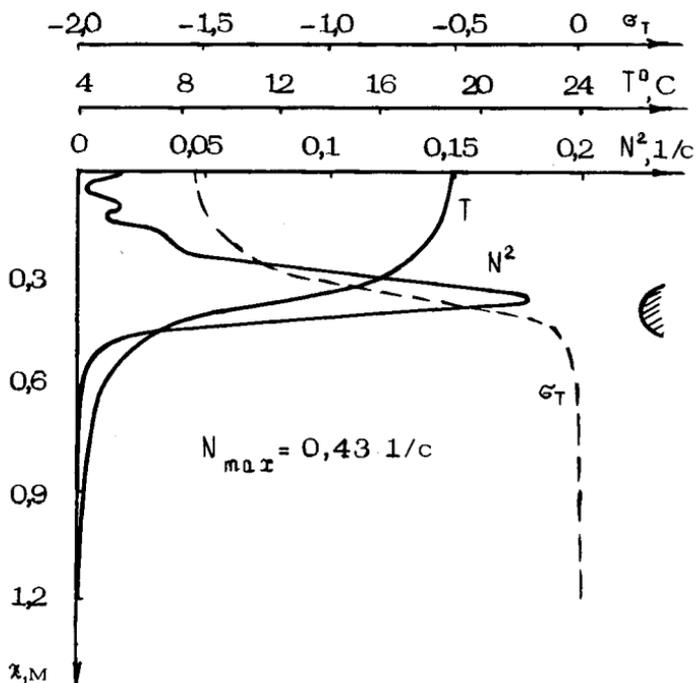
2. Одним из первых экспериментов, проведенных в температурно-стратифицированном бассейне на промежуточной модели, был эксперимент по генерации внутренних волн механическим волнопродуктором. Волнопродуктор представлял собой полуцилиндр радиусом 5,5 см и длиной 160 см, укрепленный вплотную к одной из торцевых стенок бассейна, вдоль которой он мог вертикально перемещаться определенным образом. Глубина погружения волнопродуктора, амплитуда и частота его колебаний могли быть установлены произвольно.



Р и с. 12. Экспериментальные профили температуры в промежуточной модели: 1,2 – профили стационарной стратификации при различном включении секций, 3 – трансформация кривой 2 через 18 ч после выключения холодильной установки

На рис.13 показаны типичные профили температуры T , условной плотности σ_T и квадрата частоты Брента-Вяйсяля N^2 ; заштрихованный полукруг изображает в масштабе положение волнопродуктора в одном из экспериментов. На рис.14 приведены рассчитанные на ЭВМ по гидрологическим данным рис.13 дисперсионные кривые для первых двух вертикальных мод. На рис.15 показано распределение по глубине вертикальной компоненты скорости $W(z)$ во внутренних волнах, соответствующих первым двум модам (расчет на ЭВМ при $\omega = 0,2 \text{ с}^{-1}$).

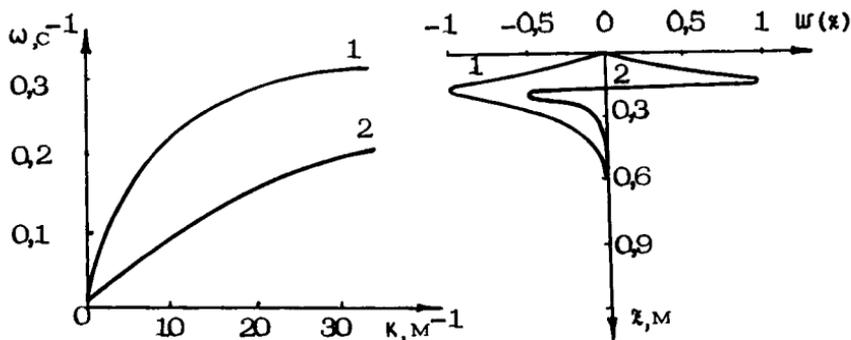
Исследование внутренних волн проводилось в двух режимах: бегущих и стоячих волн. В первом из этих режимов были получены передаточные характеристики волнопродуктора: а) зависимость амплитуды колебаний внутренней волны первой моды в заданной точке бассейна на горизонте максимального градиента плотности от амплитуды колебаний волнопродуктора при фиксированной частоте (рис.16); б) зависимость



Р и с. 13. Вертикальные распределения температуры T , условной плотности $\sigma_T = (\rho - 1) \cdot 10^3$ и квадрата частоты Брента-Вайсяля N^2

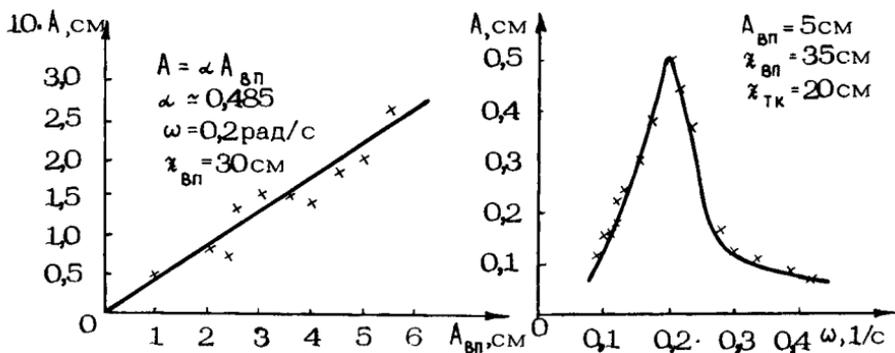
амплитуды колебаний внутренних волн от частоты волнопродуктора при фиксированной амплитуде его колебаний (амплитудно-частотная характеристика). График этой зависимости (рис.17) имеет выраженный максимум в области угловых частот порядка $0,2 \text{ с}^{-1}$. Это объясняется тем, что на более низких частотах волнопродуктор работает неэффективно, так как соответствующие длины волн значительно превышают диаметр колеблющегося цилиндра. В области же высоких частот сказывается заглубленность волнопродуктора по отношению к слою резкого перепада температуры, вследствие чего вертикальные собственные моды, экспоненциально убывающие в глубину (см. рис.15), слабо возбуждаются.

Отдельно исследовалось возбуждение колебаний импульсным источником, в качестве которого использовался свободно падающий цилиндр диаметром 10 см. Сигналы от гирлянды



Р и с. 14. Дисперсионные зависимости для первых двух вертикальных мод, построенные с помощью ЭВМ для стратификации, указанной на рис.13.

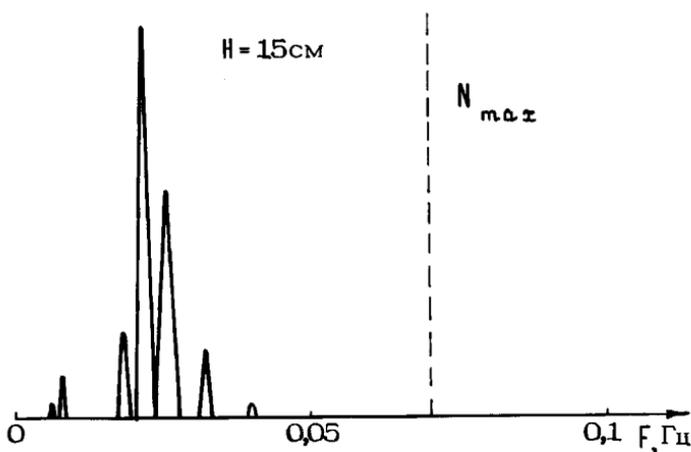
Р и с. 15. Вертикальные структуры двух первых мод внутренних волн, рассчитанные на ЭВМ для $\omega = 0,2 \text{ с}^{-1}$



Р и с. 16. Зависимость амплитуды внутренней волны первой вертикальной моды от амплитуды колебаний волнопродуктора.

Р и с. 17. Зависимость амплитуды внутренней волны первой вертикальной моды от частоты колебаний волнопродуктора

датчиков обрабатывались с помощью анализатора спектра. Пример такого спектра приведен на рис.18. Из резонансных кри-



Р и с. 18. Спектр колебаний в бассейне при импульсном возбуждении внутренних волн свободно падающим цилиндром (H – глубина расположения датчика)

вых была определена добротность резонатора на соответствующих частотах. Эта величина в среднем оказалась равной 30–50. Такие же значения были получены и непосредственно из анализа волнограмм, показывающих установление синусоидальных колебаний в бассейне после включения волнопродуктора.

В настоящее время, как уже упоминалось, моделирование природных явлений, происходящих в стратифицированной жидкости, в лабораторных условиях осуществляется в небольших лотках, которые заполняют слоями жидкости различной плотности. С другой стороны, изучение процессов и явлений, происходящих на поверхности и внутри жидкости при движении тел конечных размеров, осуществляется в опытовых гидродинамических бассейнах больших размеров в нестратифицированной жидкости. Приведенные в настоящей работе результаты исследований позволяют создать большой стратифицированный опытовый бассейн, являющийся соединением гидрофизического лотка и судостроительного опытового бассейна. Такой бассейн

открывает совершенно новые возможности как в гидрофизических исследованиях океана, так и в экспериментальных работах по теории корабля в стратифицированной среде.

Кроме того, устройствами для термостратификации могут быть оснащены уже имеющиеся опытовые бассейны при условии их хорошей термоизоляции. Описанный принцип позволяет также решать задачу термостратификации акустических бассейнов.

Л и т е р а т у р а

1. Глинский Н.Т. Внутренние волны в океанах и морях. М.: Наука, 1973.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977.
3. Богатырев С.Д., Брайловская В.А., Коган В.Р. и др. Принципы построения лабораторной модели стратифицированного океана: Препринт №26. Горький: ИПФ АН СССР, 1981.
4. А.с. 924740 (СССР). Устройство для создания стратифицированной жидкости /С.Д.Богатырев, Ф.А.Никифоров, Г.М.Никифоров, Л.А.Пугачев, В.И.Таланов. - Оpubл. в Б.И., 1982, №16.
5. Китайгородский С.А., Миропольский Ю.З. К теории деятельного слоя открытого океана. - Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, т.6, №2, с.177.

ЛАБОРАТОРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю.Д.Чашечкин

Большинство природных систем (океан, атмосфера, озера, пресноводные и соленые водоемы) характеризуется устойчивым распределением плотности. Стратификация, создаваемая соответствующими распределениями температуры или концентрации растворенных (взвешенных) веществ, оказывает существенное влияние на динамику и структуру гидрофизических процессов. В таких системах меняется характер традиционных форм движения (струй, течений, волн) и возникают новые, например внутренние волны. Вследствие многообразия природных факторов и перехода одних типов течений в другие в естественных условиях не всегда удается установить вид источника или распределение сил, порождающих наблюдаемые явления. Осложняющим обстоятельством также является нестационарность среды. Поэтому наряду с непосредственным изучением природных систем интенсивно развиваются методы лабораторного моделирования, позволяющие изучить выбранный процесс или взаимодействие разных типов течений в контролируемых и воспроизводимых условиях.

Гидродинамика стратифицированных течений фактически начинается с лабораторного эксперимента – внутренние волны были открыты и описаны Б.Франклином по наблюдениям колебаний границы раздела воды и масла в корабельной осветительной лампе [1]. По предложению Ф.Нансена цикл лабораторных исследований волн на поверхности раздела, моделирующих явление “мертвой воды”, выполнил В.Экман [2]. В конце прошлого века было замечено расслоение взвесенесущих жидкостей при боковом нагреве [3]. В течение почти 50 лет

эти работы не имели продолжения. В конце 60-х годов интерес к ним появился вновь в связи с общим повышением внимания к геофизической гидродинамике и развитием техники эксперимента в жидкости с непрерывной стратификацией. В данной статье рассмотрены вопросы моделирования течений в жидкости с устойчивым градиентом концентрации (солености). Основное внимание уделено коротким внутренним волнам и процессам образования регулярных структур свободных конвективных течений. Наряду с указанными в лаборатории изучают ламинарные и турбулентные струи, интрузии (в том числе и термоконцентрационные), растекание турбулизованных пятен, вихревые кольца и линейные вихри [4], гермики [5], многие другие стратифицированные течения, сведения о которых приводятся в монографиях [6,7].

При моделировании должны выполняться условия геометрического, кинематического и динамического подобия, т.е. должны сохраняться отношения характерных размеров, скоростей и сил. Условия полного подобия обычно являются противоречивыми (особенно при сохранении одной и той же жидкости в модели и натуре), и в этом случае применяют частичное моделирование, сохраняя подобие по основному (для изучаемого явления) безразмерному параметру и выбирая диапазон остальных таким, чтобы при их вариациях течение было автомодельным или, по крайней мере, не происходила его качественная перестройка.

При моделировании турбулентных течений и внутренних волн в жидкости с непрерывным градиентом плотности в качестве основных критериев выбирают внутреннее число Фруда $F = U^2 \Lambda / g d^2 = U^2 \rho / dg \Delta \rho = U^2 / N^2 d^2$ и отношение масштабов $[\Lambda = d$ при дополнительном условии $Re = Ud/\nu > Re_{кр} \sim 10^5 - 10^6$ [8]. Здесь U – скорость, d – размер, $\rho(x)$, $\Delta \rho$ – плотность и ее изменение, g – ускорение силы тяжести, $\Lambda = (d \ln \rho / dx)^{-1}$ – масштаб плавучести. В качестве характерного времени выбирается период плавучести $T_k = 2\pi / N = 2\pi \sqrt{\Lambda / g}$. При этом, когда $\partial U / \partial x \sim U / d$, глобальное число Ричардсона есть $Ri = Fr^{-1} = N^2 / \kappa \partial U / \partial x > 2$ [8].

Предельный масштаб моделирования выбирается из условия сохранения качественного характера процесса (для гравитационной ветви поверхностных волн и в испытаниях моделей он составляет не более 1:25 [9]). Размеры бассейна должны существенно превышать масштабы модели и процессов, например длины изучаемых волн.

В соответствии с уравнением состояния стратификацию среды можно создавать заданием соответствующего распределения температуры или солености. Стационарная тепловая стратификация поддерживается непрерывной работой охлаждающих и нагревательных элементов. Величина градиента плотности легко регулируется в пределах возможности метода, обеспечивая воспроизводимость распределений плотности; поле температур хорошо рассчитывается и измеряется. Тепловую стратификацию можно создавать в бассейнах малых и больших размеров (до 1000 м^3) [9]. Однако в таких системах сложно создавать резкие скачки плотности. Теплообменные элементы, установленные вблизи боковых стенок, затрудняют применение оптических методов. Кроме того, в подобных системах сложно изучать термоконцентрационную (двойную) диффузию, поскольку источники соли конструктивно более сложны, чем тепловые. В силу этих и других причин (простота обслуживания, большая универсальность, возможность увеличить масштаб моделирования и длительно сохранять стратификацию даже в отсутствие поддерживающего потока через дно и свободную поверхность) в основной части установок применяется солевая стратификация. Для ее создания выбирают растворитель с известными и стабильными свойствами и растворенное вещество, существенно увеличивающее плотность раствора, но мало влияющее на его остальные свойства – вязкость, коэффициент преломления. Оно должно иметь малый коэффициент диффузии и не образовывать макроструктур и сложных комплексов. Раствор должен быть прозрачным (т.е. допускать применение оптических методов), доступным, дешевым, нетоксичным, не разрушающим установку. Наиболее полно этим требованиям удовлетворяют водные растворы солей металлов, спирта, глицерина, сахара (вязкость последних зависит от концентрации). На практике используют прозрачные растворы бромистого цинка, четыреххлористого олова, иодистого бария, азотнокислого серебра, двуххлористого олова, иодистого натрия, но наиболее часто хлористый цинк ($\rho_{20} = 1,962 \text{ г/см}^3$) [10] и хлористый натрий ($\rho_{20} = 1,200 \text{ г/см}^3$). Характеристики последнего приводятся в работе [11]. На практике используются бассейны, в которых жидкость в невозмущенном состоянии покоится, и гидродинамические грубы, в которых обеспечено течение неоднородной жидкости. В зависимости от конструкции последние делятся на циркуляционные (с замкнутым циклом) и проточные. В проточных бассейнах изучается течение жидкости с неодн-

родным (послойным), а в циркуляционных – с послойным и непрерывным распределением плотности. Как правило, бассейны изготавливают из прозрачных материалов (стекло, органическое стекло) или вставляют оптические иллюминаторы.

Первые стратифицированные бассейны были сравнительно небольшими (100x17, 5x33 см [12]). В дальнейшем стали быстро расти их размеры и их число. В большинстве исследовательских центров устанавливается несколько бассейнов (в университете Глазго три бассейна 4,8x0,1x0,1 м, 5,4x2,1x0,46 м, 5,7x0,46x0,254 м – длина, ширина, высота [13]). Наибольшие размеры имеют бассейны Массачусетского технологического института (США) – 21x1,2x1,2 м [14], метеорологического отделения Агентства по охране окружающей среды США (25x2,4x1,2 м) [15], университета Южной Калифорнии (США) – 8,2x0,2x0,3 м и 30x24x12 м [16,17]. Объем наибольшего стратифицированного бассейна составляет 8640 м³.

Стратификацию создают с помощью послойного заполнения бассейна растворами выбранной концентрации (жидкость подается снизу через диффузор или сверху на плоский отражатель, плавающий на поверхности), при непрерывной подаче раствора изменяющейся концентрации [18], а также путем разрушения поверхности раздела при перемещении турбулизатора, состоящего из пластин и стержней. Размеры элементов турбулизатора, их относительное расположение, скорость перемещения подбирают индивидуально для каждой установки методом проб и ошибок [19]. Самым распространенным является второй метод, при котором жидкость максимальной (для данного опыта) концентрации из одного бака поступает в другой, с чистым растворителем, тщательно перемешивается и подается в бассейн [18]. Именно этот метод применяется в больших бассейнах.

Распределение плотности по глубине измеряется методом отбора проб с различных горизонтов или непосредственно в бассейне весовыми, оптическими и зондовыми методами. Плотность проб определяется с помощью стандартных погружных денситометров (погрешность 10^{-4} г/см³), лабораторных интерферометров (ИТР-2), рефрактометров, солемеров, измерителей удельной электрической проводимости. Более точным является весовой метод, при котором с помощью тензометров регистрируется деформация упругой пластины, к которой на тонких нитях горизонтально подвешен стержень из инертного

материала, плотность которого близка к плотности среды [20].

Распределение коэффициента преломления, связанного с плотностью линейным соотношением [21], измеряют методом наклонной нити [21], наклонной щели [18], по муаровой картине от двух скрещенных решеток [18], с помощью плотностной метки, возникающей при свободном всплывании газового пузырька [22].

С помощью высокоразрешающих датчиков электропроводности [23] измеряют распределение солености по глубине и непосредственно частоту свободных колебаний (частоту плавучести), возбуждаемых плотностной меткой.

Бассейны оборудуются устройствами перемещения моделей, координатными механизмами и каретками для установки датчиков, волнопродукторами поверхностных и внутренних волн, системами создания струйных и сдвиговых течений, плотностных и термоконцентрационных интрузий, вентиляторами для обдува свободной поверхности и т.д. Наибольшее распространение получили два способа буксировки моделей – на ноже и по направляющей. Каретка, к которой крепится нож, перемещается с помощью автономных двигателей или внешнего привода с тяговым тросом. Достоинствами этой системы являются широкий диапазон скоростей модели (0,01–10 м/с, нестабильность скорости до 0,5%), возможность визуализации течения с помощью непрерывно вводимых красок и отбора проб жидкости с поверхности модели, высокая точность поддержания траектории (как прямолинейной, так и более сложной – винтовой, синусоидальной). В бассейнах больших размеров реализуется режим квазистационарных измерений, когда датчики установлены на второй каретке, перемещающейся с той же скоростью, что и первая на ней, на том же расстоянии от нее [19]. Для уменьшения помех от вибраций каретка устанавливается на профилированные колеса из алюминиевых и магниевых сплавов или опоры на воздушной подушке [24]. Однако каретка, установленная над бассейном, усложняет его конструкцию, затрудняет использование стационарных измерительных систем, создает шум и вибрации. Буксирующий нож порождает в бассейне дополнительные возмущения, степень влияния которых в ряде случаев трудно оценить и измерить.

Технически более простое устройство привода с направляющей используется как с самодвижущимися, так и буксируемыми моделями. Механизм привода включает двигатель, редуктор, тахометр, приводной барабан (обычно обрешиненный

для повышения трения и уменьшения шума) и гибкую закольцованную направляющую, установленную на погруженные в бассейн штанги. Основным недостатком конструкции является нестабильность положения модели, ее колебания вместе с направляющей и относительно нее, особенно при нестационарных режимах обтекания. Погрешность поддержания скорости составляет 1–5%.

Активным элементом волнопродукторов поверхностных волн являются колеблющиеся пластины, цилиндры, погружаемые клинья и т.д. Аналогичные элементы используются и в генераторах внутренних волн. Широко распространены волнопродукторы пластинчатого типа, включающие одну или несколько лопастей, совершающих колебания вокруг горизонтальной оси. Пластины располагают вертикально и горизонтально [14]. В качестве излучателей также используют колеблющиеся цилиндры и тела переменного объема [25], возбуждающие волны максимальной крутизны. Гашение поверхностных волн производится на наклонной пластине, установленной под углом $6-10^\circ$ к горизонту. Для уменьшения отражения внутренних волн также используются наклонные пластины [14] или волногасители, включающие перфорированные пластины и поглощающие легко деформируемые стержни.

Для изучения пространственной структуры течений применяются методы оптической визуализации, которые можно разбить на пять основных групп: подкрашенной жидкости, дискретных микрочастиц, водородных пузырьков, линейных меток, оптической денситометрии [26].

Струйки подкрашенной жидкости позволяют определять линии тока, траектории и линии отмеченных частиц. Трассеры (чернила, анилиновые красители, растворимые лаки, гушь, молоко и др.) вносятся в поток с помощью игл, отверстий в моделях или наносятся на их поверхность перед опытом. В стратифицированных средах окрашивают в различный цвет слои жидкости при заполнении или отдельные локальные участки перед опытом. Преимуществом метода являются простота оборудования, состоящего из инжектора, системы подсветки и фоторегистратора, наглядность результатов [27], недостатком – большая погрешность в определении скорости (10–20%).

Метод дискретных частиц позволяет визуализировать линии тока и траектории частиц. Для уменьшения методической погрешности частицы должны иметь малые размеры, нейтральную плавучесть, не слипаться, обладать высокой фотоконтра-

стностью. Часто используют алюминиевую пудру, полистироловые шарики, масляно-керосиновые смеси и суспензии, продукты электролиза, янтарную пыль. Для уменьшения интегрального эффекта, вызванного неразличимостью треков в разных слоях, предельно уменьшают концентрацию частиц и толщину освещающего пучка света. Световой нож, вырезающий отдельную плоскость течения, создают с помощью щелевых осветителей, путем развертки лазерного луча в плоскость цилиндрической линзой или колеблющимся зеркальцем магнитного гальванометра. Для получения информации о третьей координате используется набор световых ножей разного цвета, расположенных перпендикулярно оси приемного объектива, и стереофото-съемка двумя синхронизованными фотокамерами или одной через систему зеркал. Достоинством метода является широкая информативность и универсальность, недостатком – большая трудоемкость обработки данных. Погрешность определения скорости составляет 1–5%.

Для изучения структуры пограничных слоев и низкоскоростных потоков используются водородные пузырьки диаметром 20–40 мкм, выделяющиеся при электролизе на тонкой проволочке, внесенной в изучаемую часть потока [28].

Для исследования пограничных слоев и малоскоростных потоков используется как временная, так и пространственная маркировка потоков. Нижний предел измеряемых скоростей близок к нулю, а верхний ограничивается механической прочностью проволочки, скоростью образования пузырьков, приемлемой точностью измерений и составляет 0,3–0,6 м/с. Метод одинаково хорошо работает и в однородной, и в стратифицированной жидкости [27]. Основные источники погрешностей метода – осреднение пути и временного интервала, всплытие пузырька под действием сил плавучести, спутный след за формирующей проволочкой. Суммарная погрешность равна 2–6 %.

Линейная плотностная метка в стратифицированной жидкости создается гидродинамическим следом за свободно всплывающим газовым пузырьком, который движется равномерно и прямолинейно, если его радиус не превышает 0,063 см, скорость подъема 15,4 см/с, число Рейнольдса – 202. Тепловая метка возникает вследствие поглощения сфокусированного излучения лазера на неодимовом стекле. Время существования тепловой метки при теневой регистрации 2–5 с, плотностной – 20–30 с. Погрешность измерений составляет 3–5%, верхний предел скоростей 0,3 м/с, нижний – 0,01 см/с.

На практике для визуализации используются все три денситометрических метода: регистрирующий вариации коэффициента преломления (интерферометрический, голографический [29,30]), его градиента (теневого [21,22]), второй производной (метод "светящейся точки" [24]). Самым распространенным среди них является теневой (шлирен-метод), применяющийся для изучения внутренних волн и турбулентности [21]. Более удобными для работы в средах с произвольным распределением плотности являются различные варианты цветного теневого метода (щель - регулярная решетка [29], щель - решетка из светофильтров (или слайд) [30]). Количественные характеристики процессов при оптических измерениях определяются с учетом интегрирования вдоль луча.

Оптические методы в основном используются для изучения пространственных (фазовых) характеристик течений. Локальные вариации скорости, солёности, температуры измеряются контактными датчиками.

Термоанемометры в низкоскоростных стратифицированных потоках могут использоваться только при малых температурах перегрева. Они чувствительны к загрязнению, вариациям температуры и широкого распространения не получили [19]. При работе с лазерными доплеровскими анемометрами необходимо учитывать искажения траектории луча, которые приводят к смещению положения точки пересечения и появлению паразитных модуляций. В последние годы создаются анемометры с адаптивной оптической системой, удерживающей положение точки выхода лучей, и накапливается опыт их использования.

Методика применения измерителей температуры (термопар, термисторов, терморезисторов и др.) практически не отличается от традиционной. Однако при работе в средах с большими градиентами необходимо учитывать изменение динамических свойств датчика [31].

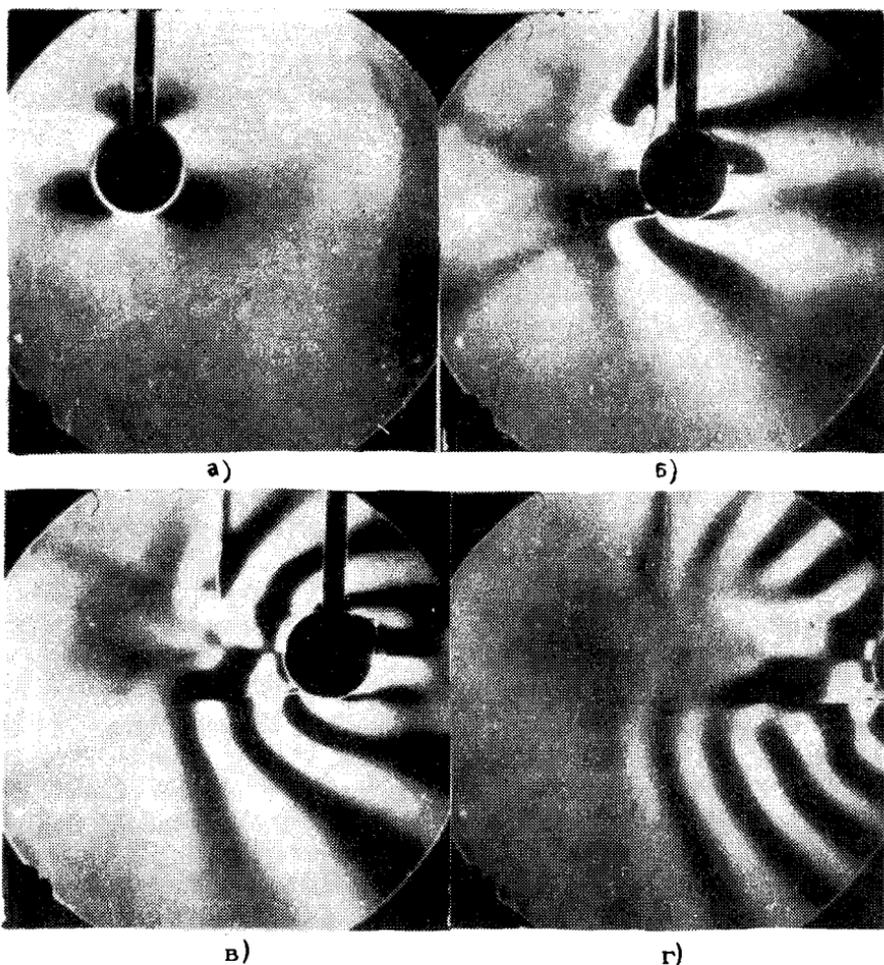
В средах с солевой стратификацией широко применяются контактные "одноэлектродные" датчики удельной электропроводности, обеспечивающие высокое временное и пространственное разрешение (как погружаемые, так и с прокачкой исследуемой среды). Основным недостатком традиционных приборов является низкочастотный дрейф, обусловленный разогревом жидкости в окрестности чувствительного элемента и нестационарностью диффузионного слоя на границе электрод - электролит [24]. Дрейф устраняется с помощью метода импульсного

зондирования [23], обоснование которого дано в работе [32]. Для повышения точности измерений помимо статической необходимо определять динамические характеристики датчика непосредственно в стратифицированной среде [31].

В качестве примера рассмотрим два типа свободных стратифицированных течений, которые интенсивно изучаются в лаборатории, — присоединенные внутренние волны и термоконвекционную конвекцию.

Присоединенные внутренние волны образуются при стационарном движении тела в стратифицированной жидкости. По своим свойствам они близки к подветренным волнам в атмосфере, возникающим при обтекании холмов и горных гряд. Фазовая структура двумерных и трехмерных внутренних волн исследовалась теоретически методом стационарной фазы и экспериментально с помощью традиционного теневого метода "щель — нож Фуко" [33]. Амплитудно-фазовые характеристики, рассчитанные с учетом нелокальности источника и вязкости среды с экспоненциальным распределением плотности, сравниваются с экспериментом в работах [34–36].

Рассмотрим картину установления присоединенных внутренних волн при движении тела из состояния покоя ($x=0, t=0$) в жидкости с экспоненциальным распределением плотности $\rho_0(x) = \rho_{00} \exp(-x/\Lambda)$; ось x направлена вертикально вверх, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, t — время, Λ — масштаб стратификации. Как обычно, предполагается, что безвихревое обтекание тела потоком слабостратифицированной жидкости эквивалентно обтеканию системы источников и стоков. Асимптотические выражения для поля нестационарных внутренних волн, образующихся при трогании и остановке тела, получены в работах [34–36]. Теоретический анализ показывает, что в области $x < 0$ присутствуют только волны, связанные с троганием тела. В объеме жидкости удобно выделить две сферы S_0 и S_t диаметрами $\alpha_0 = U\tau$ и $\alpha_t = U(t - T)$ соответственно, центры которых расположены в точках $\{\alpha_0/2, 0, 0\}$ и $\{U\tau + \alpha_t/\Lambda, 0, 0\}$ (T — полное время движения тела). Каждая новая волна внутри сферы S_0 образуется, когда тело проходит расстояние $\lambda_0 = U\tau_k$ (τ_k — период плавучести). Фазовые поверхности волн вне сферы S_0 при $x > 0$ являются продолжениями присоединенных внутренних волн, причем продолжения этих волновых поверхностей пересекаются в точке трогания. В случае стационарного движения ($t \rightarrow \infty, t < T$) поверхность S_t , связанная с остановкой тела, отсутствует, а сфера S_0 вырождается в плоскость $x = 0$.



Р и с. 1. Образование внутренних волн при равномерном движении сферы из состояния покоя; t, τ :

а - 1,5; б - 9; в - 13; г - 20

На рис.1 показаны последовательные теневые кинограммы установления внутренних волн после начала движения сферы диаметром $d=4$ см со скоростью $U=0,87$ см/с в жидкости с постоянным градиентом плотности ($T_k=2,9$ с). Кадры сняты спустя 1,5, 9, 13, 20 с; $\tau_i=t/T_k=0,52, 3,1, 4,5, 6,9$ после начала движения тела. Если в первый момент волновая картина и распределения смещений довольно симметричны, то уже на втором кадре отчетливо проявляется разница в фазовой структуре и смещениях изопокин при $t > 0$ и $t < 0$.

Возмущения, связанные с троганием, впереди тела имеют гораздо большую амплитуду, чем позади него. Волновое поле занимает ограниченную область в окрестности тела, куда дошли со своей групповой скоростью волны, которые распространяются вдоль радиус-векторов из точки трогания. На рис.1, в волны заполняют все поле зрения при $t > 0$ и проникают внутрь формирующегося спутного ламинарного следа (на фотографии отчетливо видна его резкая внешняя плотностная граница). Типичная картина присоединенных внутренних волн внутри сферы S_0 приведена на рис.1, г.

Регулярные пространственные структуры возникают в жидкости с устойчивым градиентом солености, если интенсивность нагрева превышает критическую. Система вытянутых по горизонтали ячеек образуется при однородном боковом нагреве стратифицированной жидкости, подогрете снизу, вокруг вертикального и горизонтального цилиндра, при локализованном изменении температуры и солености жидкости [37,38]. Образование регулярных структур обусловлено совместным влиянием стратификации, ограничивающей высоту подъема нагретой жидкой частицы, и пространственной дисперсии, связанной с различием кинетических коэффициентов (вязкости ν , температуропроводности χ и диффузии соли κ_s). Дисперсия приводит к образованию возвращающих сил, замыкающих движение в ячейках. В случае конвекции над точечным источником тепла основными безразмерными параметрами течения являются числа Прандтля $Pr = \nu/\chi$, Шмидта $Sc = \nu/\kappa_s$ и глобальное число Рэлея $Ra^+ = g\alpha\beta/N\rho c_p \nu \chi$ [39] (здесь β – мощность источника, c_p – удельная теплоемкость жидкости).

В зависимости от величины глобального числа Рэлея в жидкости с различными градиентами плотности наблюдается несколько типов течений. При малых мощностях ($Ra^+ < 250$) область прогретой жидкости около нагревателя имеет диффузные границы. В слоистом режиме $270 < Ra^+ < 2000$ над источником (или сбоку, если высота источника превышает характерный размер ячейки) формируется конвективная ячейка с резкими границами. В ламинарно-слоистом режиме ($1000 - 2200 < Ra^+ < 20\ 000$) над источником устанавливается гонкая всплывающая струйка, окруженная колоколообразной пленкой опускающейся жидкости. Вокруг солевого купола возникает система аксиально-симметричных ячеек высотой 0,7–1,5 см (рис.2). Высота струйки и число ячеек растет с увеличением мощности. В пальцево-слоистом режиме ($20\ 000 < Ra^+ < 60\ 000$)

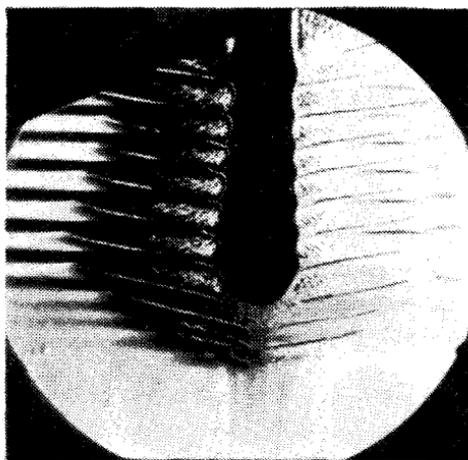


Р и с. 2. Свободное конвективное течение над точечным источником тепла (ламинарно-слоистый режим). $\Lambda = 15$ м, $T_k = 7,8$ с, $P = 3,7$ Вт, $\rho_1 = 7$, $Sc = 101$, $Re^+ = 2 \cdot 10^4$; $\zeta = 14 \cdot 10^3$, $t = 21$ мин

течение в погружающемся солевом куполе становится неустойчивым и разбивается на тонкие вертикальные струйки (солевые пальцы). Область пальцевой конвекции окружена системой вихревых ячеек. Максимальное число ячеек – 12 (включая и те, которые образуются над струйкой). При $Re^+ > 50\,000$ течение во всплывающей струе становится турбулентным, резко увеличивается вовлечение окружающей жидкости и над нагревателем образуется область частично перемешанной жидкости, температура и соленость в которой выше, чем в окружающей среде. Перемешанная жидкость растекается отдельными интрузионными языками. Одна или несколько ячеек возникают и над нагретой перемешанной жидкостью.

В режиме ламинарно- и пальцеслоистой конвекции высота области ячеистого течения растет с увеличением мощности и глобального числа Рэлея $Hi \sim \sqrt{Ra^+} \sim \sqrt{P}$. Положение и число слоев изменяются во времени. Высота отдельных ячеек слабо зависит от мощности ($\lambda_1 \sim P^{0,14}$), и растет с увеличением масштаба плавучести ($\lambda_1 \sim \Lambda^{0,25}$)

Картина конвективного течения в жидкости существенно влияет на форму фронта кристаллизации льда. В стратифицированной жидкости поверхность ледяного кристалла, намерзающего на охлажденный вертикальный цилиндр, не плоская, а рифленая (рис.3), отражающая картину линий тока слоистого



Р и с. 3. Намерзание льда в стратифицированной жидкости на вертикальный цилиндрический кристаллизатор диаметром 2,0 см. $\Delta = 9,5$ м; $T_k = 6,2$ с; $t = 12,5$ мин

термоконцентрационного течения. Области максимальных скоростей роста отстоят приблизительно на $1/4$ от верхней границы ячеек. Зоны минимальных скоростей роста находятся в центре ячеек. Возникающая структура медленно меняется во времени: уменьшается угол наклона ячеек к горизонту, увеличивается высота слоев за счет поглощения тонких более крупными, вся картина медленно смещается вверх. Этот процесс можно представить волной, бегущей вдоль поверхности кристалла со скоростью порядка его скорости роста (10^{-3} см/с). Высота слоев в центральной части кристалла $h = k \Delta T \Delta$, при $t > 10$ мин $K = K_0 + K_1 t$; $\Delta = 9,6$ м, $K_0 = 0,26$, $K_1 = 4,1 \cdot 10^{-5}$ с $^{-1}$; $\Delta = 4,8$ м, $K_0 = 0,28$; $K_1 = 4,5 \cdot 10^{-5}$ с $^{-1}$ [40].

Большой интерес также представляет лабораторное моделирование взаимодействия различных видов течений (поверхностных и внутренних волн, внутренних волн и регулярных слоистых структур конвективных течений, волн и течений, вихрей и волн и ряда других), которое может быть выполнено с использованием современных дистанционных, оптических и зондовых методов исследований. Наряду с традиционными для этих задач весьма перспективны акустические методы – как зондирующие, так и томографические.

Л и т е р а т у р а

1. Franklin B. Behavior of oil on water. A letter to J. Pringle, December 1, 1762. - In: Experiments and observation on electricity. London, 1769
2. Ekman V.W. On dead-water. In: Scientific results of the Norwegian North Polar expedition 1893-1896, 1904, 15, p.150.
3. Brewer W.H. On the subsidence of a particles in liquids. - Mem. US Natl. Acad. Sci., 1883, v.2, p.165.
4. Онуфриев А.Т. Об особенностях вихревого движения в ядре вихревого кольца. - В сб.: Физическая механика. Динамические процессы в газах и твердых телах. Л.: ЛГУ, 1980, вып.4, с.31.
5. Заславский Б.И., Сотников И.М. Экспериментальное исследование движения всплывающих вихревых колец. - ПМТФ, 1983, №1, с.20.
6. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
7. Скорер Р. Аэродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 549 с.
8. Чашечкин Ю.Д. О характеристиках затопленных турбулентных струй в неоднородных жидкостях. - Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1974, т.10, №12, с.1331.
9. Богатырев С.Д., Брайловская В.А., Коган В.Р. и др. Принципы построения лабораторной модели стратифицированного океана: Препринт №26. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. 41с.
10. Нурумов С.Ж. О лабораторном моделировании процессов орографического волнообразования в стратифицированной атмосфере. - Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1974, т.10, №10, с.1083.
11. Kaufmann D.W. Sodium Chloride. N.Y. Reynhold, 1960, p.743.
12. Schooley A.H., Stewart R.W. Experiments with selfpropelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient. - J. Fluid Mech., 1963, v.15, part 1, p.83.
13. Barr D.I.N., Hassan A.M.M. Densimetric exchange flow in rectangular channels. - La Hoille Blanche, 1967, N7, p.757.

14. Martin S., Simmons W., Wunsch C. The excitation of resonant triads by single internal waves. - J. Fluid Mech., 1972, v.53, part 1, p.10

15. Castro I.P., Snyder W.H., Marsh G.L. Stratified flow over three dimensional ridges. - J. Fluid Mech., 1980, v.135, p.261.

16. Maxworthy T. On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixed regions in two and three dimensions. - J. Fluid Mech., 1980, v.96, part 1, p.47.

17. Amen R., Maxworthy T. The Gravitational collapse of a mixed regions in two and three dimensions. - J. Fluid Mech., 1980, v.96, part 1, p.65.

18. Oster G. Density Gradients. - Sci. Am., 1965, v.217, p.70.

19. Stockhausen P.J., Clark C.B., Kennedy J.F. Three-dimensional wakes in density-stratified liquids. - In: MIT, USA, Hydrodynamic Lab. Rept., 1966, T66-6, N93, 105 p.

20. McLaren T.I., Pierce A.D., Fohl T., Murpy B.L. An investigation of internal gravity waves generated by a buoyantly rising fluid in a stratified medium. - J. Fluid Mech., 1973, v.57, part 2, p.229.

21. Mowbray D.E. The use of schlieren and shadowgraph techniques in the study of flow patterns in density stratified liquids. - J. Fluid Mech., 1967, v.27, part 3, p.595

22. Некрасов В.Н., Чашечкин Ю.Д. Измерение скорости и периода внутренних колебаний жидкости методом плотностных меток. - Метрология, 1972, №11, с.36.

23. Левцов В.И., Чашечкин Ю.Д. Высокочувствительный контактный преобразователь удельной электропроводности жидкости и установка для его статической градуировки. - В кн.: Метрология гидрофизических измерений: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. М., 1980, с.46.

24. Pao Y.-H. Measurements of internal waves and turbulence in two-dimensional stratified shear flows. - Boundary-Layer Meteorology., 1973, v.5, p.177.

25. Байбаков В.И., Кистович Ю.В., Тупицын В.С., Чашечкин Ю.Д. Модуляция электромагнитного поля внутренними волнами в жидкости с градиентом солености. - В сб.: Метро-

логия гидрофизических измерений: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. М., 1980, с.216.

26. Власов Ю.Н., Чашечкин Ю.Д. Визуализация течений для измерений скорости и турбулентности жидкости (обзор). - В кн.: Метрология в гидродинамических измерениях: Сб. науч. тр. /ВНИИФТРИ. М., 1974, вып.14(44), с.23.

27. Hunt J.C.R., Snyder W.H. Experiments on stably and neutrally stratified flow over a model three-dimensional hill. - J. Fluid Mech., 1980, v.96, p.671.

28. Schraub F.A. Use of hydrogen bubbles for quantitative determination of time-dependent velocity fields in low-speed water flow. - Trans. ASME, 1965, D-87, N2, p.429.

29. Чашечкин Ю.Д., Попов В.А. Цветной теневой метод. - ДАН СССР, 1981, т.261, №5, с.1130.

30. McEwan A.D. The kinematics of stratified mixing through internal wave breaking. - J. Fluid Mech., 1983, v.128, p.47.

31. Беляев В.С., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д. Динамические измерения параметров стратифицированных течений. - В кн.: Динамические измерения: Тез. докл. 4-й Всесоюз. симпозиума. Л., 1984, с.156.

32. Левцов В.И., Чашечкин Ю.Д. Оценка пороговой чувствительности контактного преобразователя электропроводности. - Измерительная техника, 1979, №4, с.42.

33. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598с.

34. Макаров С.А., Чашечкин Ю.Д. Присоединенные внутренние волны в жидкости с экспоненциальным распределением плотности. - ПМТФ, 1981, №6, с.47.

35. Макаров С.А., Чашечкин Ю.Д. Присоединенные внутренние волны в вязкой несжимаемой жидкости. - Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1982, т.18, №9, с.986.

36. Чашечкин Ю.Д., Макаров С.А., Беляев В.С. Присоединенные внутренние волны: Препринт /ИПМ АН СССР, №214. М., 1983. 74 с.

37. Чашечкин Ю.Д. Структуры конвективных течений в стратифицированной жидкости. - В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с.131.

38. Чашечкин Ю.Д., Попов В.А. Методы лабораторного моделирования конвективных процессов в неоднородных системах

в условиях нормальной и пониженной гравитации. – В кн.: Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982, с.119.

39. Чашечкин Ю.Д., Беляев В.С. Режимы свободной термоконцентрационной конвекции над точечным источником тепла. – ДАН СССР, 1982, т.267, №3, с.574.

40. Гудзенко О.И., Чашечкин Ю.Д. Влияние термоконцентрационной конвекции на форму фронта кристаллизации. – ЖТФ, 1983, т.53, №5, с.917.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

О.М.Белоцерковский

1. Появление высокопроизводительных ЭВМ и разработка эффективных численных методик решения задач математической физики создали предпосылки для реализации прямого численного моделирования сложных течений, в том числе и отрывных явлений. Численный эксперимент в сочетании с физическим открывает совершенно новые возможности в познании явлений природы, установлении роли в них различных факторов, а также позволяет более точно и глубоко определить рамки схем и математических моделей. Кажущаяся простота численного эксперимента, однако, таит в себе значительные трудности, связанные с построением соответствующей математической модели – численного алгоритма решения задачи и необходимостью обоснования полученных результатов. Имеющийся опыт показывает, что определяющими условиями успеха численного эксперимента являются удачно выбранная модель явления, численный метод решения соответствующей математической задачи и способ реализации алгоритма на ЭВМ. При этом удачным является именно тот алгоритм решения, который в определенном смысле адекватен рассматриваемому явлению. Таким образом, выбор и построение соответствующего оптимального (для данной задачи) метода решения является, на наш взгляд, центральным моментом теоретических подходов и в настоящее время. Видимо, в ближайшем будущем не столько мощности ЭВМ, сколько разработка рациональных моделей будет определять эффективность внедрения вычислительного эксперимента в различные области науки и техники.

Далее приведем результаты численного исследования некоторых задач аэродинамики. Основное внимание будет уделено отрывным течениям в случае "пределных" режимов движения при больших числах Рейнольдса Re . Главный результат мы видим здесь в построении новых численных моделей для указанного класса течений и разработке численных методик, доступных для использования на современном уровне развития вычислительной техники.

2. Кратко остановимся на общих чертах и особенностях используемых численных методик. Для построения численных алгоритмов здесь применяется, по существу, один и тот же подход, который кажется весьма физическим и адекватным рассматриваемым переходным явлениям, — так называемый метод расщепления [1,2].

Данный подход позволяет в случае численных моделей, построенных на основе модели идеальной среды, — уравнений Эйлера (метод "крупных частиц" [2-5] и др.), последовательно осуществлять вычисления в эйлерово-лагранжевых переменных, что дает возможность использовать "сильные" стороны таких подходов.

В случае численных моделей, в основе которых лежат уравнения Навье-Стокса (несжимаемая жидкость) [2,6-9], указанный подход позволяет преодолевать трудности, связанные с неэволюционностью системы уравнений по давлению.

В качестве исходной системы для построения численных алгоритмов целесообразно использовать также аппроксимацию известных законов сохранения, записанных в интегральной форме (метод "потоков" [2,10-12]):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \oint_{S_{\Omega}} \vec{Q}_F \cdot \vec{n} \, ds, \quad F = \{M, \vec{P}, E\}, \quad (1)$$

где S_{Ω} — боковая поверхность объема Ω , \vec{Q}_F — вектор плотности потока величины F .

Уравнения (1) выписываются (как для вязкого сжимаемого газа, так и в случае идеальной среды) с учетом граничных условий и решаются численно для каждой расчетной ячейки вычислительной области. Проводя разделение вектора плотности потока \vec{Q}_F на "конвективную" и "вязкую" составляющие (и используя соответствующие аппроксимации), удается построить консервативные схемы расчета второго порядка точности, правильно учитывающие области влияния и характер взаимодействия рассматриваемых величин.

Построенные таким образом однородные конечно-разностные схемы являются дивергентно-консервативными и диссипативно-устойчивыми. Они позволяют проводить по единому алгоритму "сквозной" счет как в областях гладкости решения, так и в зонах разрывов. При этом устойчивость вычислений обеспечивается лишь внутренней диссипацией (аппроксимационной вязкостью), что позволяет использовать эти схемы при наличии криволинейных границ, а также для нестационарно-пространственных задач [4,5].

Так, уравнения "разностного Эйлера" (полученные с помощью дифференциальных приближений для схем расщепления в методе крупных частиц) имеют следующий вид [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho \bar{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla(\rho u \bar{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon_y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \bar{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \epsilon_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon_y \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho E \bar{V}) + \nabla(\rho \bar{V}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \epsilon_x \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon_y \frac{\partial E}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

где $\epsilon_x = \frac{1}{2} |\omega| \Delta x$, $\epsilon_y = \frac{1}{2} |\omega| \Delta y$ - коэффициенты аппроксимационной вязкости.

*) Здесь выписаны разложения с точностью до $O(\Delta t, h^2)$ Интересно заметить, что в системе (2) структура коэффициентов аппроксимационной вязкости $\epsilon \sim |V|h$ напоминает структуру коэффициента турбулентной вязкости для λ -масштаба $\nu_{\text{ТурБ}} \lambda \sim \nu_\lambda$ (это объясняется, видимо, одной причиной их возникновения - нелинейностью происходящих процессов). Если с турбулентным вихрем масштаба λ , движущимся со скоростью ν_λ , соотнести "крупную частицу" размером h , движущуюся со скоростью ν_h , то выражения для ϵ и $\nu_{\text{ТурБ}}$ будут совершенно идентичны. Положим $\epsilon_x \sim \epsilon_y \sim \nu_{\text{ТурБ}}$, тогда уравнения (2) при $\rho = \text{const}$ (несжимаемая жидкость) примут вид точных уравнений Навье-Стокса, где вместо молекулярной вязкости ν будет стоять коэффициент "эффективной" турбулентной вязкости $\nu_{\text{ТурБ}}$ [13].

В левой части (2) находятся точные выражения исходных дифференциальных уравнений Эйлера, а справа – диссипативные члены, возникающие при аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений конечно-разностными и зависящие от внутреннего характера используемых представлений

Таким образом, как следует из приведенных выражений, реализуемые при конкретных вычислениях "сглаженные" уравнения (2) являются диссипативными (хотя в качестве исходных использовалась модель идеальной среды). Вид диссипативного механизма зависит от характера вводимых аппроксимаций, и его структурой можно, вообще говоря, "управлять"

Точное моделирование временного процесса в уравнениях (2) дает возможность изучать динамику нестационарных явлений. Приближенный механизм диссипации (с аппроксимационной вязкостью) позволяет определять с достаточной точностью характеристики осредненных течений, а также положение, скорость распространения и характер взаимодействия разрывов: скачков уплотнения, контактных поверхностей, узких слоев смешения в следе за телом и т.п. Однако внутренние структуры этих образований (которые определяются молекулярными эффектами) таким подходом не улавливаются.

Таким образом, если в уравнения идеального газа введены диссипативные члены, то (как показали исследования и расчеты) при достаточно широких предположениях относительно характера диссипации обобщенное решение большого класса задач для предельных режимов течения ($\nu \rightarrow 0$) можно получить с определенной точностью путем предельного перехода из уравнений с приближенным механизмом диссипации, а не из уравнений Навье–Стокса [1, 13].

Если численные методики, основанные на моделях идеальной среды, позволяют рассматривать "глобальные" явления (когда малые эффекты слабо влияют на картину течения в целом), то подходы, основанные на уравнениях Навье–Стокса, дают возможность детально "разрешать" внутренние структуры потоков, определяемые механизмом молекулярной диффузии. Так, для исследований на основе уравнений Навье–Стокса движений вязкой несжимаемой жидкости использовались схемы расщепления в естественных переменных скорость–давление [2, 6–9]. Это позволило развить методику и на случай пространственных течений жидкости [8], а также избежать постановки граничного условия для вихря на поверхности те-

ла, которое свойственно для переменных (ω, ψ) и отсутствует в физической постановке задачи.

Рассмотрим теперь другой предельный режим—дискретную среду. Исследуем движение разреженного газа, описываемое кинетическим уравнением Больцмана. Предполагаем, что задача обтекания тела разреженным газом может быть решена на уровне функции распределения f и газ является одноатомным.

Если Ω означает область контрольного объема и Γ — границу Ω , включающую и поверхность обтекаемого тела, то задача сводится к нахождению решения $f(\vec{t}, \vec{\tau}, \vec{c})$ уравнения Больцмана

$$\frac{df}{dt} + \vec{c} \frac{df}{d\vec{t}} = \int (f' f'_1 - f f_1) g d\tau \vec{c}_1, \quad (3)$$

удовлетворяющего заданным начальным и граничным условиям.

Хорошо известно, что уравнение Больцмана (3) представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение, замкнутое относительно функции распределения плотности. Оно практически не поддается прямому решению (и расчету) за исключением, может быть, одномерных или простых двумерных задач. Основная трудность заключается здесь в расчете интеграла столкновений $I(f, f_1)$. В общем случае это пятикратный интеграл, имеющий семь независимых переменных $(t, \vec{\tau}, \vec{c})$, с квадратичной нелинейностью подынтегрального выражения, причем имеет место зависимость $I(f, f_1)$ от значений функции распределения f' , определяемых после столкновения.

Для приближенного решения таким образом поставленной задачи построим статистическую модель идеального одноатомного газа из N частиц с координатами \vec{r}_i и скоростями $\vec{c}_i (i=1, \dots, N)$, такую, что уравнение эволюции этой модели аппроксимирует уравнение (3) при единственном дополнительном предположении о молекулярном хаосе [14].

Используя в статистической трактовке синтез идей расщепления Берда [15, 16] и математическую модель Каца [17] (асимптотически эквивалентную уравнению Больцмана без конвективной производной), можно построить эффективный численный метод статистического моделирования кинетического уравнения Больцмана в многомерном случае. При моделировании столкновения в этом подходе рассматриваются монтекарловские методы численного решения основного уравнения модели Каца [6], что позволяет рассчитывать время между столкновениями частиц в правильном соответствии со стати-

стики столкновений в идеальном одноатомном газе. В отличие от ранее предлагавшихся методик [15,16] указанный подход является строго марковским процессом.

Указанные выше подходы оказались эффективными при исследовании широкого круга нелинейных задач механики сплошных сред и физики плазмы [1,2,13], и в частности при расчете течений в следе за движущимся телом [3-5,12,18,7-9]. Некоторые результаты таких расчетов приводятся ниже. Важно отметить, что данная группа алгоритмов допускает реализацию на машинах средней мощности.

Данная методика может быть обобщена и на случай нестационарных течений в задачах турбулентности.

3. Проблема изучения свойств отрывных течений за движущимся телом непосредственно связана с исследованием явлений развитой свободной сдвиговой турбулентности. При рассмотрении указанного класса движений представляется теоретически возможным и физически оправданным изучение осредненных крупномасштабных макроструктур и статистических характеристик турбулентности. Центральным моментом, который можно отметить здесь, является, на наш взгляд, в следующем: на основе каких моделей – идеальной среды, уравнений Навье–Стокса или на кинетическом уровне – следует проводить построение схем исследования турбулентных течений на предельных режимах движения (при $\nu \rightarrow 0$).

Для широкого класса явлений этого типа при больших числах Рейнольдса (в инерционном интервале движения) влияние молекулярной вязкости и малых элементов потока на общие характеристики макроструктур течения и картину обтекания "в целом" в большей части области возмущения является практически несущественным. Сюда относятся струйные задачи, течения в спутном следе за телом, движения корпусов кораблей с кормовым срезом, формирование передних срывных зон при обтекании затупленных тел со струями или иглами, направленными навстречу потоку и др. В то же время течения в пограничных слоях, узких слоях смешения, на вязком интервале турбулентности, а также при малых и умеренных числах Рейнольдса определяются в основном молекулярной диффузией. Пульсационные движения в турбулентности носят неустойчивый, нерегулярный характер и представляют собой стохастический процесс, поэтому здесь следует говорить о получении осредненных характеристик такого движения (моментов разного порядка) путем соответствующей статистической об-

работки результатов. Основная трудность при рассмотрении указанного класса задач – это выработка общей концепции построения конструктивных численных моделей турбулентности.

Далее будем обсуждать главным образом подходы, где используется при описании турбулентного движения для больших интервалов времени полная (и замкнутая) система динамических уравнений для истинных значений скоростей и давления, а также статистические методы. Совместное использование этих двух подходов позволяет глубже продвинуться в понимании структуры турбулентности и определить рациональные пути построения соответствующих математических моделей.

Численная реализация общих концепций теории турбулентности проводится в разных направлениях (см., например, [13] и др.):

- интегрирование полных нестационарных уравнений Навье-Стокса без дополнительных предположений о характере переноса (конечно-разностные подходы, спектральные фурье-методы и другие используются для сравнительно простых задач конвекции, диффузии, при моделировании "распада" ламинарного режима и т.п.);

- расчет тех же моделей на более грубой разностной сетке с использованием полуэмпирических переменных коэффициентов переноса (эффективной вязкости и т.п.);

- решение уравнений Рейнольдса или Буссинеска для средних элементов движения и рейнольдсовых напряжений вместе с приближенными уравнениями переноса;

- применение дифференциальных уравнений для моментов разного порядка с различными видами "замыкания" и др.

Методики изучения турбулентности, основанные на уравнениях Навье-Стокса, тесно связаны, как известно, с исследованием свойств этих уравнений (в частности, диссипации энергии) при наличии слабой вязкости, т.е. при $\nu \rightarrow 0$. Главная трудность моделирования турбулентности связана практически с построением для больших "критических" чисел Рейнольдса нестационарного устойчивого (для средних характеристик) численного решения, адекватного уравнениям Навье-Стокса. Дело в том, что для обеспечения условий аппроксимации и устойчивости решения при расчетах шаг сетки должен быть таким, чтобы погрешность аппроксимации конвективных членов в уравнениях Навье-Стокса была бы много меньше разностных представлений вязкостных членов. Оценки для модельных уравнений показывают [19], что приближение к реально-

му решению может быть достигнуто при условии $Re_n \ll \alpha \ll 1$, т.е. расчет течений с молекулярным механизмом диссипации для больших ("турбулентных") значений если и можно проводить, то лишь на очень мелких разностных сетках (сравнимых, вообще говоря, с молями пульсаций). Важно добавить, что в возникающей при турбулентном обмене эффективной турбулентной вязкости доля молекулярной вязкости незначительна (обычно $\nu_{\text{турб}}/\nu_{\text{мол}} \sim 10^4 - 10^5$). Кроме того, при исследовании задач турбулентности необходимо, вообще говоря, рассматривать трехмерные (по пространственным переменным) нестационарные уравнения Навье-Стокса. При этом возможна неединственность решения таких задач при больших числах Рейнольдса (хотя доказано, что нестационарные одномерные и двумерные задачи для уравнений Навье-Стокса всегда имеют единственное решение на всем интервале времени $t > 0$ [20]). Следовательно, условия возникновения турбулентности, вообще говоря, должны соответствовать и условиям неединственности нестационарных решений уравнений Навье-Стокса [21]. Таким образом, в прямой постановке задача о детальном изучении турбулентных структур на основе модели Навье-Стокса кажется трудновыполнимой даже при использовании самых мощных ЭВМ.

Таким образом, кажется вполне оправданным и целесообразным проводить моделирование крупномасштабных макроструктур отрывных течений для предельных ("турбулентных") режимов движения на основе нестационарных уравнений идеальной среды [2, 5, 13, 18] и др.

Прежде чем привести общую схему таких исследований, сделаем ряд замечаний. Если в первые годы изучения турбулентности эти явления трактовались как полностью стохастические процессы (определяемые случайными распределениями пульсационных величин), то к настоящему времени произошел, на наш взгляд, принципиальный поворот в понимании указанных явлений. Оказалось, что турбулентности свойственно (как элемент) и организованное движение когерентных структур; вопросы соотношения детерминированного и хаотического начал сейчас активно изучаются ([22-27] и др.).

Многие эксперименты и исследования показали (см., например, [22-26] и др.*), что широкому классу турбулент-

* На указанные работы наше внимание обратил проф. О.С.Рыжов. Автор признателен ему за обсуждения рассматриваемых здесь проблем.

ных потоков с поперечным сдвигом (как при свободных течениях, так и в пристеночной области) присуще наличие нестационарного организованного движения крупномасштабных образований ("больших вихрей") со слабой пульсацией – упорядоченное движение когерентных структур, которые имеют устойчивую и типичную (для данной задачи) форму. Внутренняя зона указанных течений, например для струйных задач, имеет турбулентный (стохастический) характер и состоит из неупорядоченных мелкомасштабных пульсаций достаточно высокой интенсивности, но примерно однородной структуры.

Основной вклад в турбулентный перенос, естественно, вносят движения крупномасштабных структур, которые поглощают энергию основного потока, а часть своей энергии передают "по каскаду" мелкомасштабным вихрям. В свою очередь, крупномасштабный перенос турбулентной жидкости осуществляется, по-видимому, организованным движением группы больших вихрей, которые обуславливают искажение границы турбулизированного поля и осуществляют перенос турбулентной жидкости поперек потока [22,23]. Следовательно, именно движение упорядоченных когерентных макроструктур формирует в основном динамические и энергетические характеристики течения в целом, что, естественно, определяет свойства и "глубинной" турбулентности, где происходит диссипация энергии. Обратное же влияние мелкомасштабной турбулентности (и молекулярной диффузии) на основные характеристики организованного потока для свободных сдвиговых турбулентных течений, по-видимому, незначительно, так как это эффекты разных порядков, а сам процесс передачи энергии является односторонним.

Отмеченные выше положения определяют, по существу, идеологию организации вычислительного процесса при прямом численном моделировании задач турбулентности. Общий цикл исследования распадается здесь, вообще говоря, на две взаимосвязанные задачи.

1. Расчет нестационарного движения упорядоченных крупномасштабных структур. Большой масштаб и организованный характер такого движения позволяют использовать при его описании численные схемы, основанные на нестационарных уравнениях гидродинамики для модели идеальной среды ("разностный Эйлер") и обладающие неким приближенным диссипативным механизмом. Этот механизм должен обеспечивать устойчивость осредненного решения и отражать ("в сглажен-

ном" виде) вклад мелкомасштабных пульсаций. Свойства крупномасштабных движений определяются в основном объемной конвекцией и зависят, вообще говоря, от решения в целом. Следовательно, расчет должен проводиться непосредственно во всем поле течения на "реальных" разностных сетках с последующим определением необходимых осредненных характеристик турбулентного потока (например, моментов различного порядка) путем соответствующей статистической обработки полученных результатов.

Как показал В.М.Иевлев [28], существует принципиальная возможность получения правильных статистических результатов с помощью "сглаженных" уравнений движения, где вклад мелкомасштабных вихрей представлен приближенно (без требования правильного расчета "истинных" полей пульсирующих величин).

2. Численное моделирование стохастической составляющей турбулентного сдвигового потока (мелкомасштабная турбулентность). Расчет этого типа течений можно проводить статистическими методами [29,30] или феноменологически вводя соответствующие коэффициенты турбулентной вязкости [13]. Здесь также возможно использовать алгоритмы, основанные на рассмотрении пульсационных уравнений (например, [31]), где параметры среднего течения определяются из решения первой задачи.

При этом важно отметить, что расчеты указанных течений целесообразно осуществлять лишь в ограниченных подобластях, "вырезая" в общей картине потока зоны больших градиентов. Такой подход основан на вероятном предположении о том, что при масштабе турбулентности, малом по сравнению с масштабом среднего движения, локальная структура турбулентности универсальна для различных течений и определяется лишь локальными условиями. (турбулентный перенос характеризуется здесь градиентной диффузией) [22]. Все это позволяет использовать при вычислениях вполне определенные модели и необходимые достаточно мелкие расчетные сетки, причем уровень требований, предъявляемый к ресурсам ЭВМ, здесь резко снижается.

Как известно, осреднение уравнений Навье-Стокса по Рейнольдсу проводится сразу по всем масштабам турбулентности для больших интервалов времени, что требует моделирования сразу всех структур. Нереально, таким образом, для различных классов движения сконструировать универсальную модель

турбулентности. В отличие от этого подхода описанная выше концепция основана на "расщеплении" общего движения на крупно- и мелкомасштабные структуры. При этом движение крупномасштабных вихрей (размером $\lambda \geq h$, где h - шаг разрешения разностной сетки) определяется непосредственно путем интегрирования уравнений гидродинамики, а моделирование ("сглаживание") применяется лишь для "подсеточных" мелкомасштабных пульсаций, которые не разрешаются в явном виде при численном интегрировании и обладают, как уже отмечалось, достаточно универсальными свойствами. Указанная концепция вполне адекватна и так называемым моделям "надсеточного" замыкания [32,33] и др. Все дело, однако, в том, как организовать указанный процесс расщепления (осреднения) и на базе каких моделей выстраивать приближенные ("сглаженные") уравнения, описывающие движение крупномасштабных структур. При этом, естественно, возникают проблемы, связанные с выбором аппроксимаций для мелкомасштабных вихрей и оценкой их влияния на крупномасштабные движения. И, конечно, центральное место должны занимать аспекты, связанные с реализацией указанных подходов.

Используя общие численные методики и основные положения структурной турбулентности, предложим одну конструктивную схему прямого численного моделирования задач турбулентности [13]. Основная идея предлагаемого подхода для изучения развитой свободной сдвиговой турбулентности заключается в том, что при исследовании различных структур турбулентных движений представляется весьма рациональным расщепление общего явления на области (интервалы) с разными масштабами взаимодействия и соответственно с разными численными моделями *).

На инерционном интервале турбулентности (масштабы вихрей $\ell \gg \lambda \gg \lambda_0$, где ℓ и λ_0 - основной и внутренний масштабы турбулентности соответственно; $Re_{\lambda_0} \sim 1$) роль вязкости незначительна и естественно в этом случае проводить исследова-

*) По существу, вместо введения единого (для всего поля течений) коэффициента эффективной турбулентной вязкости в "сглаженные" уравнения здесь предлагается использовать спектр таких коэффициентов в зависимости от порядка длин рассматриваемых масштабов.

ние упорядоченных *) крупномасштабных образований непосредственно путем построения обобщенного решения для нестационарной модели Эйлера с некоторым приближенным механизмом диссипации при точном моделировании временного процесса. Точное моделирование нестационарности позволяет исследовать динамику развития процесса; приближенный механизм с "быстрой" диссипацией в разностных уравнениях Эйлера позволяет, по существу, определять из условий устойчивости осредненных характеристик эффективные значения коэффициентов переноса. В принципе можно так "управлять" указанным диссипативным механизмом, что он будет в определенной мере отражать (при соответствующих масштабах разрешения) вклад "подсеточных" мелкомасштабных вихрей для различных

Если расчет движения нестационарных упорядоченных макроструктур (зависящего от всей области движения) проводится по схемам "разностного Эйлера" со схемной вязкостью типа

$$\epsilon \sim |V| h, \quad (4)$$

то при изучении "энергонесущих" турбулентных вихрей в областях больших градиентов возможно ввести в приближенный механизм диссипации турбулентную вязкость вида

$$\hat{\nu}_{\text{ТУРБ}} \sim \Delta u \ell, \quad (5)$$

где Δu — изменение средней скорости на расстояниях порядка ℓ , а для зон локальной турбулентности, определяемых местными градиентами, целесообразно использовать в "разностном Эйлере" эффективную вязкость $\hat{\nu}_{\text{ТУРБ}}$, удовлетворяющую известному закону Колмогорова-Обухова [34,35]:

*) Как отмечается в работе [41], все величины, относящиеся к турбулентному движению в масштабах $\lambda \gg \lambda_0$, не могут зависеть от молекулярной вязкости ν , точнее, эти величины не должны меняться при изменении ν и неизменных остальных условий, в которых происходит движение. Расстояние порядка $\lambda_0 = \ell / Re^{3/4}$ является границей применимости уравнений Эйлера к турбулентному движению. Таким образом, турбулентные движения масштаба $\lambda \gg \lambda_0$ могут изучаться, вообще говоря, на основе уравнений Эйлера с приближенным механизмом диссипации, который должен отражать вклад мелких вихрей.

$$v_{\lambda} \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3} \quad \text{или} \quad \varepsilon \sim \frac{v_{\lambda}^3}{\lambda} \sim \hat{\zeta}_{\text{ТУРБ } \lambda} \left(\frac{v_{\lambda}}{\lambda} \right)^2, \quad (6)$$

откуда

$$\hat{\zeta}_{\text{ТУРБ } \lambda} \sim \varepsilon \lambda^2 / v_{\lambda}^2. \quad (7)$$

Здесь ε – скорость диссипации турбулентной энергии по каскаду вихрей (эту величину можно непосредственно получать из расчетов крупномасштабных образований); v_{λ} – изменение скорости (в основном пульсационной ее составляющей) на протяжении расстояний $\sim \lambda$ *).

Введение в расчетную схему соотношений (4)–(7) позволяет правильно смоделировать закон затухания турбулентности для разных масштабов λ . При этом в областях вязкого интервала движения, где происходит полная диссипация энергии (на расстояниях h при $Re_h \sim 1$), влияние молекулярной вязкости становится существенным, и здесь необходимо переходить к расчету уравнений Навье–Стокса с молекулярным механизмом диссипации.

Так, последовательно вводятся новые коэффициенты турбулентной вязкости, соответствующие "своему" масштабу движения.

Чем мельче масштаб разрешения, тем меньше масштаб "подсеточных" вихрей и тем, вообще говоря, грубее могут быть оценки подсеточных пульсаций (все большая часть спектра попадает под прямое разрешение). Смена типа эффективной вязкости ("склейка" решения) производится при выполнении условия о сохранении потока энергии по каскаду вихрей в областях, где старое решение становится неустойчивым и требуется переход на более мелкие шаги (масштабы) расчетной сетки. Указанная методика построения численного эксперимента вполне адекватна, как нам кажется, основной идее развития турбулентности по Ландау [34,36].

При этом важно отметить следующие обстоятельства:

1) выбор размера расчетной сетки h в "разностном Эйлере" должен обеспечивать содержание основной части энергии

*)

В зонах локальной турбулентности ($\lambda \gg \lambda_0$) рассматривается относительное движение жидких частиц на этом участке, а не абсолютное, когда весь участок – "ячейка" – движется как целое, что характерно для крупных масштабов и следует из выражения (4).

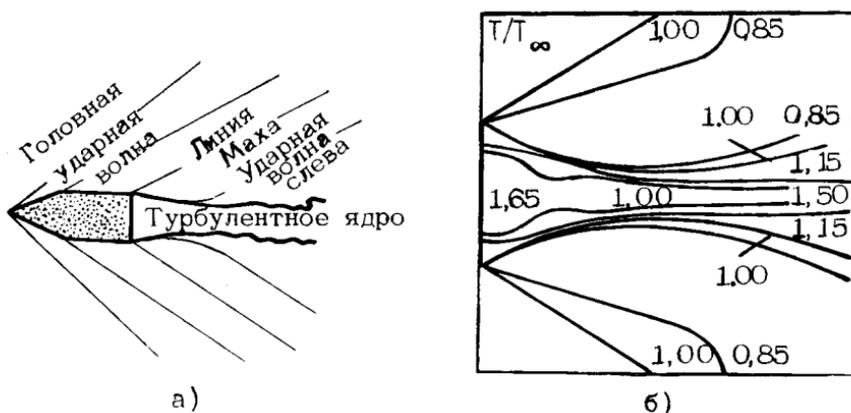
гического спектра при $\lambda \gg h$ (сетка не должна быть жестким фильтром);

2) при таком подходе не требуется, как видим, решение уравнений Навье–Стокса для больших значений чисел Рейнольдса;

3) "истинный" масштаб турбулентности (а также соответствующие коэффициенты переноса) вырабатываются здесь в процессе расчета нестационарного движения *).

Вычисления по "сглаженным" уравнениям с приведенным диссипативным механизмом проводятся на большие интервалы времени до формирования устойчивых характерных (в общем случае – нестационарных) упорядоченных структур, после чего для определения осредненных характеристик пульсационного турбулентного потока (моментов) необходима соответствующая статистическая обработка полученных результатов. Указанная статистическая обработка может производиться непосредственно по результатам вычислений или с использованием вероятных подходов.

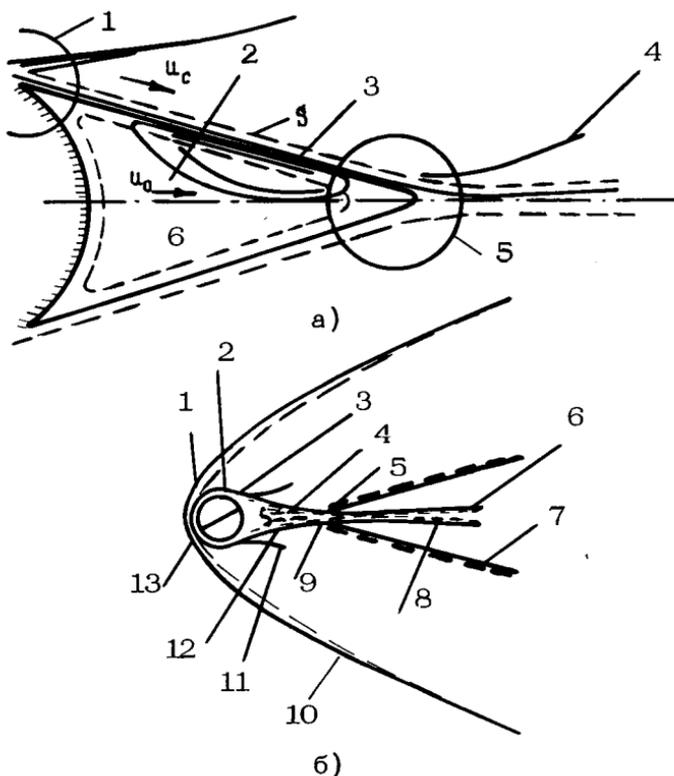
Приведем некоторые результаты расчетов. Сначала о стационарных отрывных течениях.



Р и с. 1

На рис.1,а показана общая структура обтекания заостренного осесимметричного тела ("снаряда") сверхзвуковым потоком воздуха [37]. При установлении статистически стационарного состояния характеристики в следе поддаются численному моделированию, что в частности, иллюстрирует рис.1,б, где изображены изотермы T/T_∞ при $M_\infty = 1,89$.

*) Автор благодарит акад. А.М.Обухова, чл.-кор. АН СССР В.М.Иевлева и проф. А.Т.Онуфриева за обсуждение указанных идей.



Р и с. 2. Течение сжимаемого газа за тупым телом при большом числе Рейнольдса и гиперзвуковом обтекании - а (1 - область отрыва, 2 - слой смешения, 3 - разделяющая линия гока, 4 - хвостовой скачок, 5 - область присоединения, 6 - область возвратно-циркуляционного течения) и характерные области течения в следе при обтекании кругового цилиндра ($Re_d = 66 \cdot 10^3$) - б (1 - звуковая линия, 2 - пограничный слой, 3 - точка отрыва, 4 - линия раздела, 5 - горловина следа, 6 - след, 7 - хвостовая ударная волна, 8 - область невязкого сверхзвукового гиперзвукового течения, 9 - область взаимодействия скачка со следом, 10 - головная ударная волна, 11 - скачок, образующийся в точке отрыва, 12 - область обратного течения, 13 - дозвуковая область)

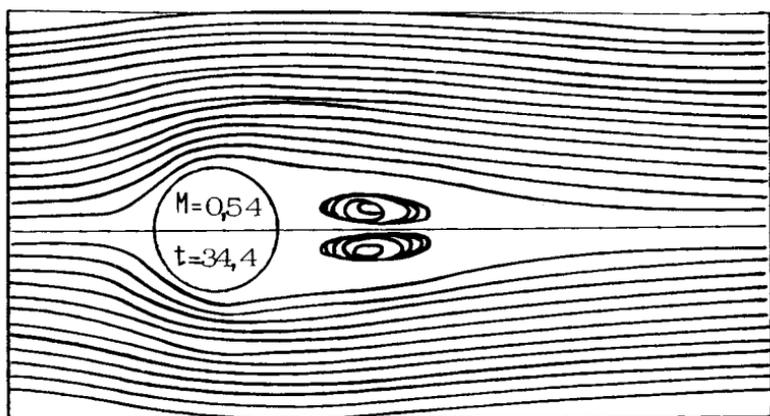
На рис.2,а показана классическая схема Чепмена [38] срывной зоны за тупым телом для сжимаемого газа при гиперзвуковом обтекании, а также эксперимент Маккарти-Куботы [39] обтекания кругового цилиндра при $M_{\infty} = 5,7$ (рис.2,б). Оказалось, что и картины такого типа можно получить в результате численного эксперимента.

До сих пор речь шла о стационарных режимах при сверхзвуковых скоростях. Сложнее дело обстоит на дозвуковых скоростях движения. Эксперименты показывают, что здесь возможны, по крайней мере, два режима обтекания – стационарный (метастабильный) с симметричными зонами отрыва и нестационарный периодический ("абсолютно" устойчивый) с развитой вихревой дорожкой. Численное моделирование такого рода задач имеет следующую специфику: в силу симметрии тела, начальных и граничных условий, а также алгебраической симметрии самих аппроксимирующих уравнений, решение получается симметричным. Видимо, возмущение чисто схемного происхождения (например, ошибки округления) не в состоянии разрушить симметрию, которая в натуральных условиях легко разрушается естественными возмущениями, почему на практике и реализуется обычно именно несимметричный (автоколебательный) режим обтекания с развитой вихревой дорожкой [25,40-42] и др. Для численной имитации периодического режима при обтекании тел конечных размеров вводили начальную асимметрию потока в виде кратковременных или мгновенных возмущений (например, вихри перед телом, вращение тела, сдвиг потока, кратковременный вдув и т.д.).

В сжимаемом газе возможность существования двух режимов отрыва – симметричного стационарного *) (рис.3) и несимметричного периодического (рис.4) отчетливо наблюдалась при численном моделировании предельных режимов обтекания кругового цилиндра дозвуковым (закрытическим) потоком. А.В.Бабаковым и А.П.Зюзиным [43] при расчетах использовалась консервативная схема метода потоков (1) для полных нестационарных уравнений сжимаемой среды (влияние вязкости на движение макроструктур в таких явлениях несущественно, т.е. характер взаимодействия здесь определяется в основном волновыми процессами).

*)

Отрыв потока от поверхности тела здесь возникает за скачком, замыкающим местную сверхзвуковую зону, что согласуется с экспериментом [25].

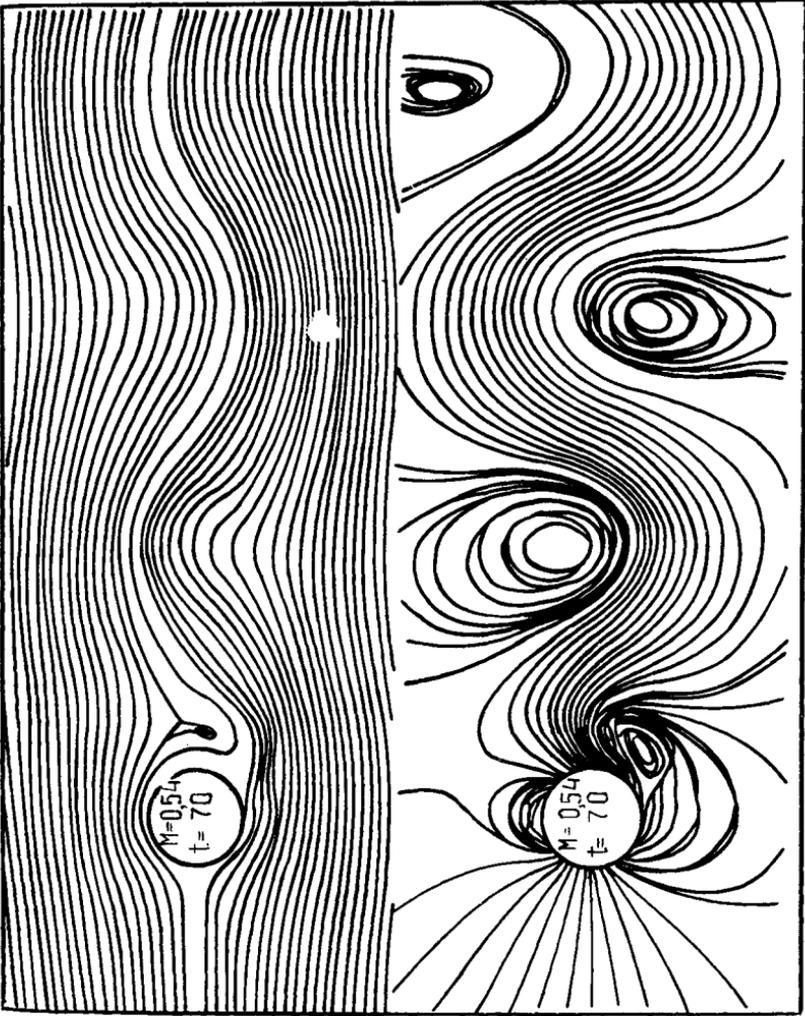


Р и с . 3

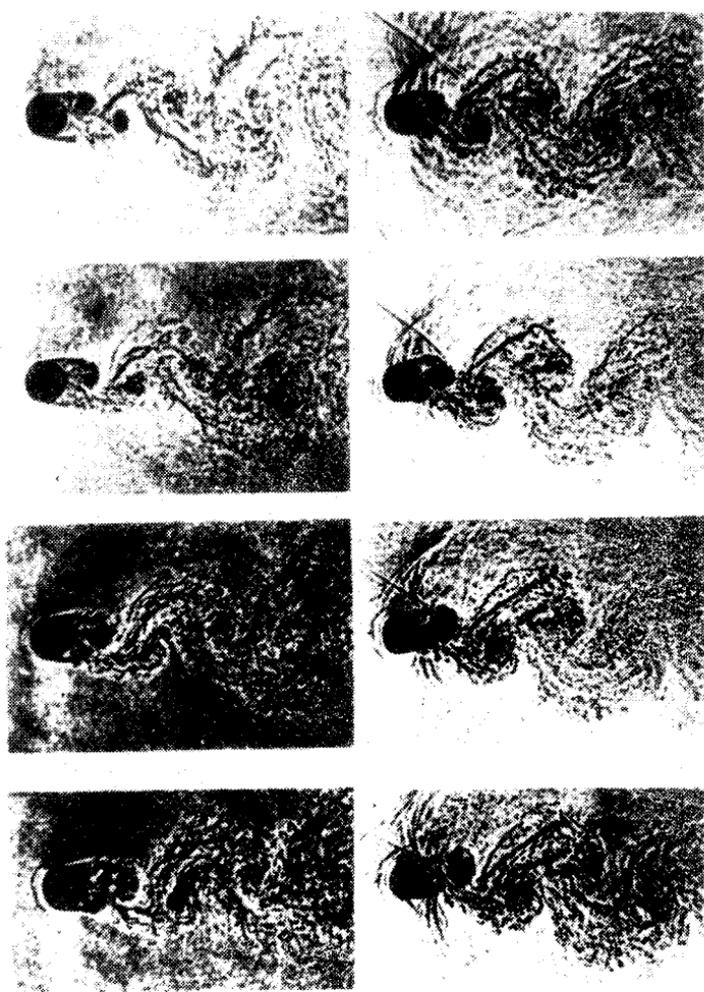
Оказалось, что здесь можно получить и второй (устойчивый) режим, реализующий вихревую дорожку за телом. Для кругового цилиндра ($M_\infty = 0,54$) он характеризуется сходом вихревой пелены с точки на поверхности, совершающей периодические движения от 120 до 240° . На рис.4 показана мгновенная визуализация поля течения в системах координат, связанных как с цилиндром (верхнее поле), так и с набегающим потоком, где ясно видны развитые вихревые структуры. Для достижения этого режима в начальный момент времени вводилось мгновенное возмущение, которое затем снималось. Независимо от вида (и типа) возмущений получалась одна и та же устойчивая периодическая картина течения, хорошо согласующаяся с наблюдаемой в эксперименте [25] (рис.5).

Указанный тип течения можно характеризовать, видимо, как движение равновесных когерентных макроструктур в турбулентном следе за телом, на что указывают, в частности, сравнения с экспериментом (рис.5), положение точек отрыва на теле, а также характер поведения давления вдоль поверхности кругового цилиндра.

Использование разностных уравнений Эйлера позволяет построить общую "макрокартину" течения, не опираясь на эффекты малой молекулярной вязкости. Если же необходимо получить тонкую структуру течения, зависящую от этой вязкости (например, характеристики трения и теплового потока), то в этом случае признанным инструментом исследования являются уравнения Навье-Стокса.

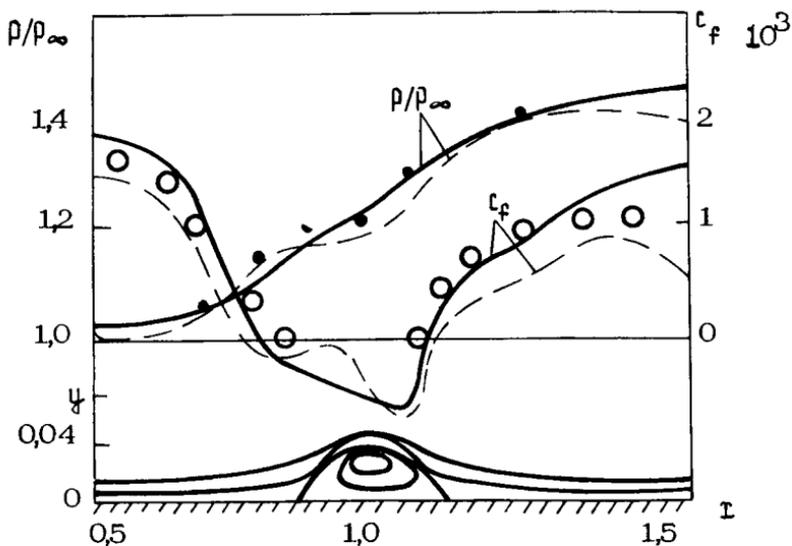


Р и с. 4



Р и с 5

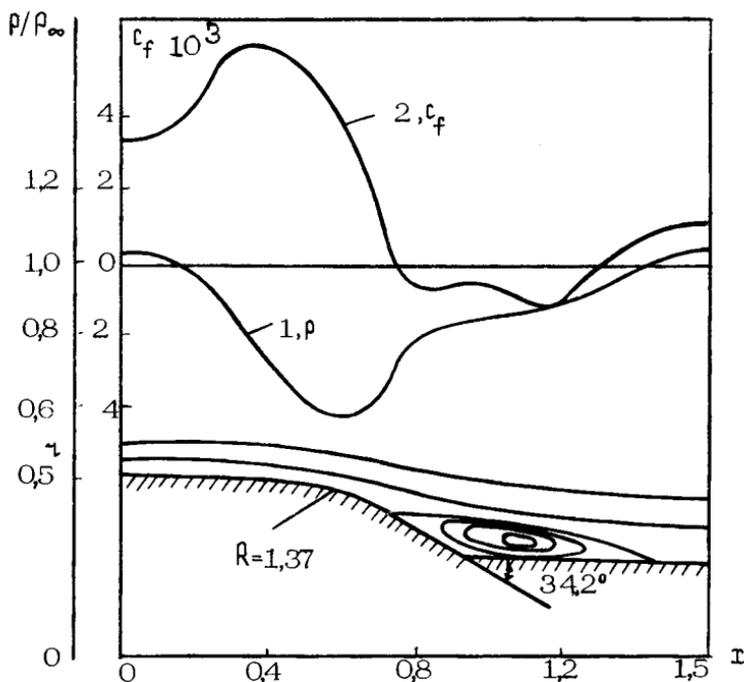
Основная трудность, возникающая при их применении, состоит, как уже отмечалось, в достаточно точном "разрешении" структуры потока при не слишком малых значениях Re . Эта трудность может быть частично преодолена применением сгущающихся (в нужных местах) сеток и схем повышенной точности. На рис.6 и 7 приведены некоторые примеры численного моделирования ламинарного стационарного отрыва на сверхзвуковых скоростях [18,44].



Р и с. 6

На рис.6 показан фрагмент картины течения, полученный в результате решения классической задачи о падении косога скачка уплотнения (под углом наклона $32,6^\circ$) на пластинку с острой передней кромкой при $M_\infty \sim 2$. Для решения уравнений Навье-Стокса использовалась так называемая "компактная" схема 4-го порядка точности со сгущающейся разностной сеткой [44]. Несмотря на то что число Рейнольдса составляло 10^5 , метод позволил "разрешить" даже тонкий пристеночный слой внутри пограничного слоя (на рис.6 приведены линии тока в окрестности срыва, распределения давления ρ/ρ_∞ вдоль пластины и коэффициента трения c_f , а также результаты эксперимента). Видно, что численное решение хоро-

шо описывает расположение зоны отрыва в окрестности падения скачка и распределение основных параметров потока.

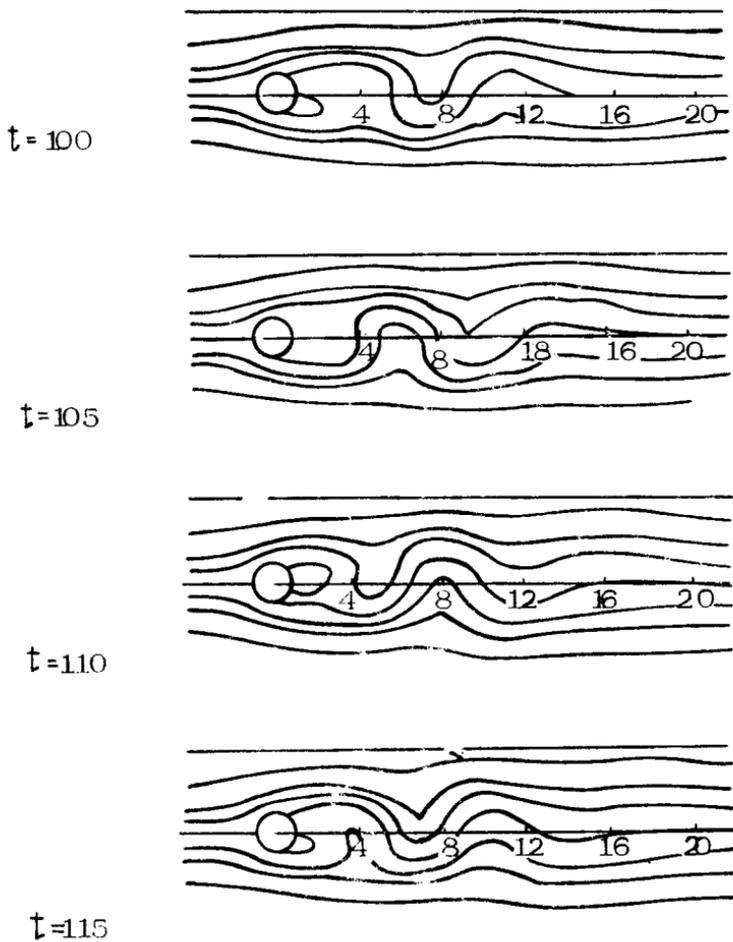


Р и с . 7

На рис.7 изображена срывная зона, образовавшаяся при обтекании осесимметричного тела с криволинейной образующей. Эту конфигурацию можно интерпретировать как заднюю часть гондолы авиационного двигателя с имитатором струи.

С.О.Белоцерковский и В.А.Гушин [9,18] сделали попытку промоделировать для течений вязкой несжимаемой жидкости периодическую структуру потока в следе за телом, не вводя искусственной начальной асимметрии потока, используя естественные условия, а именно устойчивую стратификацию по плотности.

На рис.8 показана картина обтекания кругового цилиндра при $Re=100$, $F_r = U_\infty^2 / dg = 0,315$, $F_{r_{вн}} = \frac{U_\infty^2}{d^2 N^2} = 47,47$ потоком стратифицированной несжимаемой вязкой жидкости. Ра-



Р и с. 8

счета проводились на основе уравнений Навье–Стокса при помощи разностной схемы (7), использующей расщепление по физическим признакам [7,9]. На рисунке видно образование периодического отрыва (то в верхней, то в нижней части цилиндра) с формированием структуры течения типа вихревой "дорожки Кармана". Расчетное число Струхала, соответствующее этому периодическому режиму, оказалось равным 0,133.

Если предыдущие результаты иллюстрировали моделирование осредненных крупномасштабных макроструктур потока, то исследование статистических характеристик ("стохастической составляющей") турбулентности естественно проводить мето-

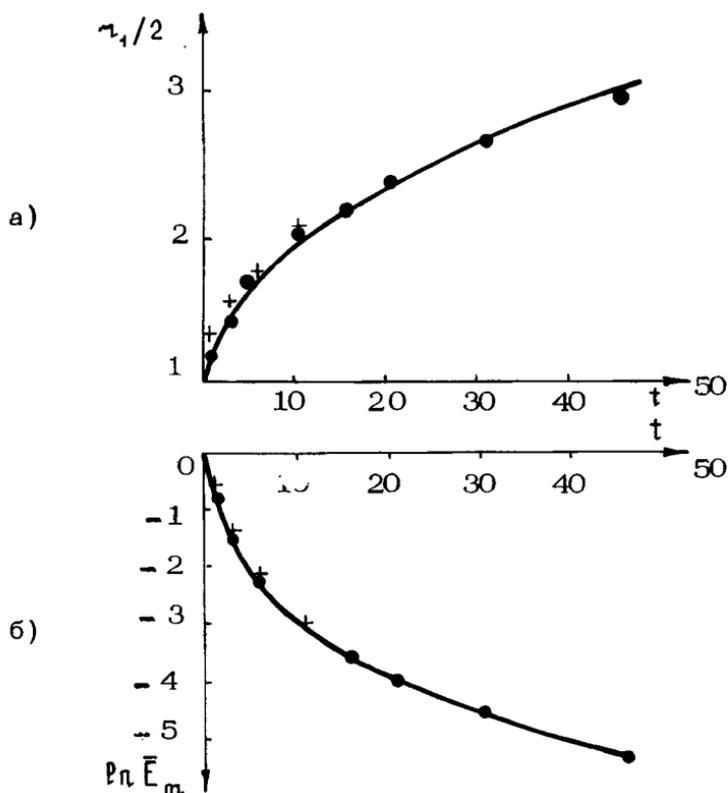
дами Монте-Карло путем построения имитационных моделей для соответствующих кинетических уравнений. Приведем здесь некоторые результаты расчета задачи о "распаде" турбулентного пятна, полученные В.Е.Яницким [29,30].

Здесь, как и в динамике разреженного газа, решается задача на уровне функции распределения, но теперь это будет распределение пульсаций скорости $\vec{v}^{(1)}$ "жидкой" частицы. В турбулентности методика построения вычислительного процесса на основе метода расщепления остается прежней (по сравнению с задачами динамики разреженного газа [45-48]). Частица также характеризуется здесь положением и скоростью, но является теперь уже моделью жидкой частицы. Трудность создания такой модели связана с нестационарностью самого явления и с отсутствием в турбулентности универсального кинетического уравнения, аналогичного уравнению Больцмана (3) в динамике разреженного газа. В принципе моделирование можно проводить для разных видов кинетических уравнений; одну из таких попыток здесь и продемонстрируем. Наша главная цель - сохранить при решении нестационарных задач турбулентности основные принципы метода прямого статистического моделирования, записав его, однако, в других терминах.

На данном этапе работы за основу построения имитационной модели было взято релаксационное кинетическое уравнение А.Т.Онуфриева [49] для одноточечной функции распределения $f(\vec{t}, \vec{v}, \vec{v})$ пульсационной скорости v .

Численно решалась задача о диффузии турбулентности, энергия которой первоначально сосредоточена в области с характерным радиусом r_0 (задача о "пятне"). С течением времени меняется характерный радиус пятна $r(t)$ и плотность турбулентной энергии $\bar{E}_m(t)$ в центре пятна.

На рис.9 для случая однородного пятна приведено сравнение данных расчета с экспериментом Наудашера [50]. На рис.9,а показано изменение во времени относительного характерного радиуса пятна $\bar{r}_{1/2} = r_{1/2} / r_0$ (под $r_{1/2}$ здесь понимается радиус, на котором плотность энергии $E(t, r_{1/2})$ составляет половину ее значения в центре пятна $E(t, r_{1/2}) = E_m(t) / 2$). Рис.9,б иллюстрирует аналогичное сравнение для плотности турбулентной энергии в центре пятна $\bar{E}_m(t) = E_m(t) / E_m(0)$. Наблюдается, как видим, хорошее согласие численного и физического эксперимента.



Р и с. 9

Перспективность применения метода прямого статистического моделирования в турбулентности связана с возможностью использования кинетических моделей, замкнутых на уровне функции распределения пульсаций. Такие модели имеют, как правило, меньшее число эмпирических констант.

Данное направление интенсивно развивается и, в частности, можно надеяться на успех в решении более сложных задач турбулентности, когда движение упорядоченных и крупномасштабных макроструктур вычисляется непосредственно по схемам расщепления для конечно-разностных уравнений периода (например, с помощью метода крупных частиц или потоков), а локальные мелкомасштабные флуктуации "стохастической составляющей" турбулентности моделируются (внутри "крупной частицы" - эйлеровой ячейки) с помощью статистических подходов [2,13].

Л и т е р а т у р а

1. Белоцерковский О.М. Вычислительный эксперимент: прямое численное моделирование сложных течений газовой динамики на основе уравнений Эйлера, Навье–Стокса и Больцмана. – В кн.: Численные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1981, с.348.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод "крупных частиц" для газодинамических расчетов. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т.11, №1, с.182.
4. Давыдов Ю.М. Многопараметрические схемы расщепления для решения пространственно–трехмерных нестационарных задач. – ДАН СССР, 1979, т.247, №6, с.1346.
5. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982. 392 с.
6. Гушин В.А., Щенников В.В. Об одном численном методе решения уравнений Навье–Стокса. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т.14, №2, с.512.
7. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т.15, №1, с.197.
8. Гушин В.А. Пространственное обтекание трехмерных тел потоком вязкой жидкости. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т.16, №2, с.529.
9. Белоцерковский С.О., Гушин В.А. Моделирование некоторых течений вязкой жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 66с.
10. Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Консервативный метод "потоков" и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т.13, №2, с.385.
11. Бабаков А.В., Северинов Л.И. Стационарный вариант метода потоков для решения задач механики сплошной среды. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т.16, №1, с.140.
12. Бабаков А.В., Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Численное исследование течения вязкого теплопроводного газа у тупого тела конечных размеров. – Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1975, №33, с.112.
13. Белоцерковский О.М. Прямое численное моделирование

- "переходных" течений газа и задач турбулентности. - В кн.: Механика турбулентных потоков/Под ред. В.В.Струминского. М.: Наука, 1980, с.70.
14. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
15. Bird G.A. Direct simulation and the Boltzmann equation.- Phys. Fluids, 1970, v.13, N11, p.2677.
16. Берд Г. Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1971. 320 с.
17. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
18. Бабаков А.В., Лушин В.А., Давыдов Ю.М., Толстых А.И. Численное моделирование отрывных течений. - В кн.: Труды 5-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике: Аннотации докладов. Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1981, с.37.
19. Dorodnicyn A.A., Review of Methods for Solving the Navier-Stokes Equations. - Lect. Notes in Phys., Springer-Verlag, 1973, v.18, N1, p.23.
20. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
21. Ляхтер В.М. Вероятностная природа турбулентных течений и пути замкнутого описания турбулентности. - В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974, с.136.
22. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959. 400 с.
23. Cantwell B.J. Organized motion in turbulent flow. - Ann. Rev. Fluid Mech., Palo Alto, California, 1981, v.13, p.457.
24. Хинце И.О. Турбулентность. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1963. 680 с.
25. Van Dyke M. Album of fluid motion. - Stanford, California (U.S.A.): Parabolic Press, 1982. 130 p.
26. Structure and mechanisms of turbulence I, II. - Lect. Not. in Phys. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1978, v.75. 295 p. (I); 406 p. (II).
27. Структурная турбулентность. - Сб. научных трудов. Под ред. М.А.Гольдштика. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1982. 166 с.

28. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
29. Белоцерковский О.М., Ерофеев А.И., Яницкий В.Е. Прямое статистическое моделирование задач аэрогидродинамики. - В кн.: Теоретическая и прикладная механика: Тр. 4-го Национ. конгресса по геор. и прикл. механике (Болгария, 1981). София: Изд-во БАН, 1982, с.80; Успехи механики (Advances in Mechanics, Warszawa), Варшава, 1982, т.5, вып.3/4, с.11.
30. Belotserkovskii O.M., Eroffeev A.I., Yanitskii V.E. Direct statistical simulation of problems in aerohydrodynamics. - In: 13 Intern. symposium of rarefied gas dynamics (Novosibirsk, 1982). - - Book of Abstracts. Novosibirsk: Inst. Thermophysics, 1982, p.152.
31. Струминский В.В. Об одном новом направлении исследования проблемы турбулентности. - В кн.: Турбулентные течения. - М.: Наука, 1977, с.20.
32. Deardorff J.W. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. - J. Fluid Engineering, Ser. I, 1973, v.95, p.429.
33. Ferziger J.H. Large eddy Numerical simulations of turbulent flows. - AIAA Journal, 1977, v.15, N9, p.1261.
34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
35. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, ч.1, 1965, 639 с.; ч.2, 1967, 720 с.
36. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности. - ДАН СССР, 1944, т.44, №8, с.339.
37. Эмсен А., Харлоу Ф. Численный расчет сверхзвукового течения в следе. - Ракетная техника и космонавтика, 1965, №11, с.128.
38. Chapman D.R., Kuehn D.M., Larson H.K. Investigation of Separated Flow in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition. - NACA Rept., 1956, N1356.42 p.
39. Маккарти Д., Кубота Н. Исследование следов за круглым цилиндром при $M = 5,7$. - Ракетная техника и космонавтика, 1964, №4, с.51.

40. Кузнецов О.М., Попов С.Г. Вихри в плоском газодинамическом следе за цилиндром. – Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1967, №2, с.112.
41. Баженов Д.В., Баженова Л.А. Влияние звукового возмущения на характеристики Эолова тона. – В кн.: Труды 2-го Всесоюз. симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений в оптоакустике. М.: Наука, 1982, с.105.
42. Баженов Д.В., Баженова Л.А., Римский-Корсаков А.В. Экспериментальное исследование влияния внешних возмущений на процессы вихреобразования и флуктуацию подъемной силы на круговом цилиндре, обтекаемом потоком. – В кн.: Труды 5-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике: Аннотации докладов. Алма-Ата: Наука Уз. ССР, 1981, с.42.
43. Белоцерковский О.М., Бабаков А.В., Зюзин А.П. О двух режимах течения сжимаемого газа у цилиндра. Численный эксперимент. – ДАН СССР, 1984, т.279, №2.
44. Белоцерковский О.М., Быркин А.П., Мазуров А.П., Толстых А.И. Разностный метод повышенной точности для расчета течений вязкого газа. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, т.22, №6, с.1480.
45. Яницкий В.Е. Применение стохастического процесса Пуассона для расчета столкновительной релаксации неравновесного газа. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т.13, №2, с.505.
46. Яницкий В.Е. Применение процессов случайных блужданий для моделирования свободномолекулярного движения газа. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т.14, №1, с.259.
47. Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е. Статистический метод "частиц в ячейках" для решения задач динамики разреженного газа. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т.15, №5, с.1195 (ч. I); с.1553 (ч. II).
48. Белоцерковский О.М., Ерофеев А.И., Яницкий В.Е. О нестационарном методе прямого статистического моделирования течений разреженного газа. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т.20, №5, с.1174.
49. Онуфриев А.Г. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентности. – Прикл. механ. и техн. физ., ПМТФ, 1970, №2, с.66
50. Naudasher E. Flow in the Wake of Self-propelled Body and Related Sources of Turbulence. – J. Fluid Mech., 1965, v.22, N4, p.625.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В.И.Полежаев

ВВЕДЕНИЕ

Исследования атмосферы и океана выдвигают в настоящее время ряд новых задач, в решении которых важную роль играет информация о процессах, связанных с движениями за счет изменений температуры и (или) состава в поле силы тяжести, происходящих на расстояниях от нескольких сантиметров до нескольких сотен метров; эти движения будем называть локальными естественно-конвективными движениями.

К ним относятся, например, вертикальные движения в поверхностном слое, определяющие отвод тепла от поверхности и вынос (или, наоборот, заглубление) примесей, а также движения, вызванные концентрационными или температурными неоднородностями различной природы как на поверхности, так и в глубине океана (см., например, [1-3]).

Локальные естественно-конвективные движения - важнейший класс движений, возникающих при различных "сценариях" природных катастроф, связанных с выбросом в атмосферу или океан нагретых масс жидкости, газа, потоков лавы при извержениях и т.д. В моделях глобальной циркуляции, используемых для долгосрочного прогноза погоды и климатических изменений, их учет составляет самостоятельную проблему.

Данная статья представляет обзор исследований локальных естественно-конвективных процессов, т.е. движений и вызываемых ими изменений температурных и концентрационных полей на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса, выполненных с помощью методики и комплекса программ, разработанных в Институте проблем механики АН СССР [4,5].

1. УРАВНЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ПО ТЕМПЕРАТУРЕ И СОСТАВУ СРЕДАХ

Моделирование осуществляется на основе системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска, которую запишем относительно вихря ω , функции тока ψ и скалярных компонент θ, c в виде (см. [4, 5])

$$\omega_{tt} + u\omega_{tz} + v\omega_{tz} = \frac{1}{Re} (\omega_{tt} + 3kz^{-1}\omega_{tz} + \omega_{zz}) + \mathcal{F}, \quad (1)$$

$$\mathcal{F} = -\gamma^{-k} \left[\frac{Gr}{Re^2} (\theta_z \sin \varphi - \theta_{zz} \cos \varphi) + \frac{Gr_c}{Re^2} (c_z \sin \varphi - c_{zz} \cos \varphi) \right];$$

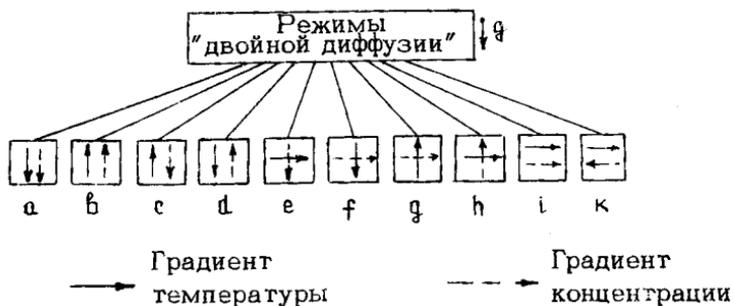
$$\psi_{tt} + kz^{-1}\psi_{tz} + \psi_{zz} = \omega \gamma^{2k}; \quad (2)$$

$$\theta_{tt} + u\theta_{tz} + v\theta_{tz} = \frac{1}{Re Pr} (\theta_{tt} + kz^{-1}\theta_{tz} + \theta_{zz}); \quad (3)$$

$$c_{tt} + u c_{tz} + v c_{tz} = \frac{1}{Re Pr_D} (c_{tt} + kz^{-1}c_{tz} + c_{zz}). \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) записаны в безразмерной форме; критериями подобия, определяющими режимы термоконцентрационной конвекции, являются число Грасгофа $Gr = \frac{g \beta L^3}{\nu^2} \Delta T$, диффузионное число Грасгофа $Gr_c = \frac{g \beta_c L^3}{\nu^2} \Delta c$, число Прандтля $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ и диффузионное число Прандтля $Pr_D = \nu/D$ или число Шмидта. Для морской воды последние существенно различаются: $Pr \approx 7$, $Pr_D \approx 700$. Это определяет особенности режимов "двойной диффузии", которые в меньшей степени проявляются для атмосферы.

В реальных атмосферных и океанических условиях и величины градиентов температуры $j = \frac{\partial \theta}{\partial z}$ и концентрации $j_c = \frac{\partial c}{\partial z}$, равно как и их направления, могут изменяться в широких пределах, что, в свою очередь, может приводить к образованию разнообразных конвективных структур. На рис.1 представлены 10 простейших теоретически возможных ситуаций в двумерном случае, связанных с различным взаимным направлением этих градиентов, из которых можно выделить четыре характерные группы.



Р и с. 1. Классификация режимов термоконцентрационной конвекции (двойная диффузия)

Первая (a, b, c, d) объединяет случаи, в которых статическое равновесие возможно. В случае a оно абсолютно устойчиво, а в остальных – может быть неустойчивым, причем во всех случаях возникающие за порогом устойчивости равновесия структуры отличаются определенным горизонтальным масштабом.

Вторая группа (e, f) представляет те случаи, в которых тепловой и диффузионный потоки направлены по нормали друг к другу. В этих, а также и следующих за ними случаях (g-k) статическое равновесие в системе отсутствует, поэтому тепловая (или концентрационная) конвекция существует при новых числах Грасгофа. Отличительной особенностью таких режимов является возможность образования слоистых структур (см. ниже, п.4).

В третьей группе (g, h) конвекция, обусловленная тепловой (концентрационной) неустойчивостью, взаимодействует с конвекцией, обусловленной боковым потоком массы (тепла).

Четвертая группа (i, k) объединяет режимы, которым соответствует тепловая (концентрационная) конвекция, возникающая только при боковом потоке тепла (массы) в двух случаях, когда эти потоки направлены в одну сторону (i) или в противоположные стороны (k). В последнем случае тепловой и концентрационный типы конвекции могут взаимно компенсировать друг друга.

2. МЕТОДИКА И КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

Разработанные в лаборатории численного моделирования в гидродинамике Института проблем механики АН СССР методика и комплекс программ [4,5] ориентированы для решения именно этого класса задач. Созданию комплекса предшествовал опыт решения отдельных частных задач, включая параметрические исследования (см., например, [6,7]). Несмотря на то что этот комплекс существует уже несколько лет, выполненные работы по решению конкретных задач этого класса не исчерпывают всех его возможностей.

Данный комплекс позволяет решать систему уравнений Навье-Стокса для конвекции (1)-(4) бинарной смеси в областях плоской и цилиндрической геометрии при различных типах граничных условий во всех описанных выше случаях взаимной ориентации градиентов (температур и концентраций).

Важной особенностью методики и комплекса является (обеспечиваемая средствами вычислений и обработки) возможность описания режимов конвекции при больших числах Грасгофа, когда стационарный режим отсутствует и реализуется некоторый переходный или турбулентный режим. В последнем случае осуществляется статистическая обработка полученных численных реализаций. Имеются три составляющих комплекса: группа вычислительных программ, группа программ графической визуализации и группа программ статистической обработки. Состав и назначение отдельных программ, а также более полные сведения о комплексе в целом, включая некоторые расчеты, выполненные до 1981 г., приведены в работах [4,5].

За последнее время класс решаемых задач существенно расширился, что связано прежде всего с реализацией возможности увеличения разрешающей способности пространственных конечно-разностных сеток (вплоть до 10-15 тысяч узлов) при их сгущении в зонах больших градиентов. Важное значение имеет вычислительная устойчивость конечно-разностной схемы на подробных конечно-разностных сетках при больших числах Рэлея, что позволило в ряде задач получить численные решения при Ra до 10^9-10^{13} [8-12,13], т.е. охватить диапазон чисел Ra , соответствующий лабораторным бассейнам, а также некоторый диапазон, соответствующий атмосферным и океаническим условиям. Применение ЭВМ со спе-

циальными векторными процессорами позволяет еще более продвинуться в этом направлении.

3. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ (КОНЦЕНТРАЦИИ)

Конвекция в узких горизонтальных слоях

Горизонтальные разности температур в океане могут быть связаны с движением фронтов, подводом (отводом) тепла от берега или кромки льда, температурной "пятнистостью" поверхности за счет неоднородного поглощения солнечного излучения при наличии облачности, осадков и т.д. Однако математические модели и соответствующий лабораторный эксперимент по конвекции в вытянутых горизонтальных слоях даже в случае однокомпонентной жидкости (т.е. в одном из частных случаев, соответствующих режимам i или k на рис.1) развиты недостаточно. Библиография работ и сопоставление результатов лабораторного эксперимента, выполненного А.Г.Кирдяшкиным, и математического моделирования на основе упомянутого выше комплекса программ представлены в работе [14]. На рис.2 дана расчетная схема и приведены некоторые результаты, поясняющие специфику конвекции в вытянутом горизонтальном слое ($L/H=12,7$), заполненном водой ($Pr=5,8$) при заданных температурах $T_2 > T_1$ на левой и правой границах слоя. Предполагается, что верхняя и нижняя поверхности твердые и не обмениваются теплом с окружающей средой (один из возможных вариантов граничных условий, играющих, как будет видно из дальнейшего, важную роль для этого класса задач ^{*)}).

Математическая запись этих условий имеет следующий вид:

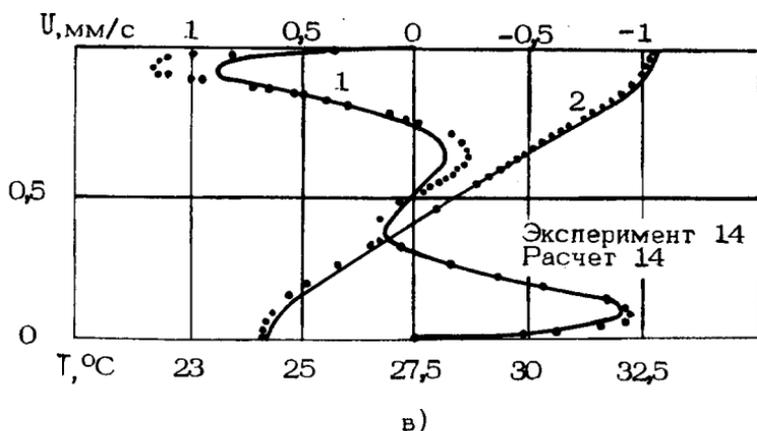
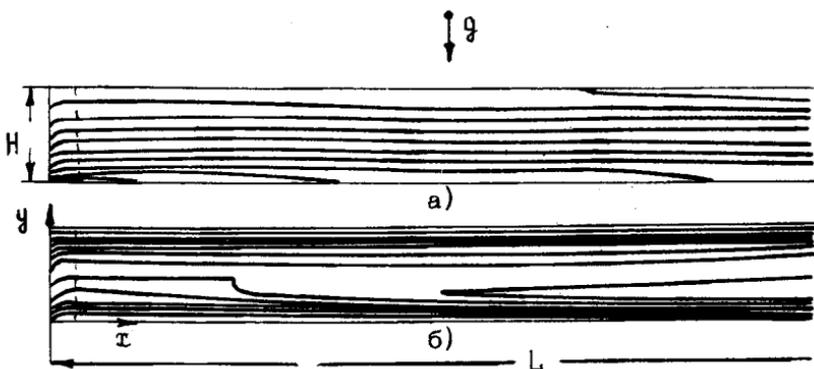
$$1) \text{ левая боковая граница } (x=0, 0 \leq y \leq \kappa)$$

$$u = v = 0, \quad T = T_2, \quad \left(\Gamma = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = 1 \right);$$

2) правая боковая граница

$$u = v = 0, \quad T = T_1, \quad (\Theta = 0);$$

^{*)} Для задач в плоской геометрии вместо χ, λ используются обозначения x, y соответственно.



Р и с. 2. Стационарный режим тепловой конвекции в горизонтальном слое ($Ra = 1,2 \cdot 10^8$; $Pr = 5,8$; $L/H = 12,7$): а - изотермы поля температур; б - линии тока; в - вертикальные профили горизонтальной составляющей скорости (1) и температуры (2) в центральном по оси к сечению слоя

3) верхняя и нижняя стенки

$$u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Для геофизических приложений такая постановка задачи имеет, конечно, условный характер, так как чаще всего ограничивающие поверхности отсутствуют, и следует рассматривать проникновение конвекции из зоны ее генерации в область

невозмущенного течения. Рассматриваемая задача является на этом пути одной из промежуточных, ее цель - изучение некоторых качественных закономерностей и их проверка в контролируемых лабораторных условиях.

Число Рэлея, определенное в виде $Ra_H = \frac{g\beta H^3}{\nu\alpha} (T_2 - T_1)$, равно в этом случае $1,2 \cdot 10^8$, что соответствует для воды $H \approx 6,41$ см, $T_2 - T_1 \approx 17,5^\circ\text{C}$. Представленные на рис.2 результаты иллюстрируют следующие особенности этого естественно-конвективного движения:

1) эффективное выравнивание температуры по горизонтали (рис.2, а, б);

2) существенное различие в масштабе узких пограничных слоев подъемно-опускных движений у торцов слоя и в основной его части (ядре).

Отмеченная пунктиром (рис.2) область течения у торца включает в действительности, как показано в работе [14], вторичное течение и тонкий "пристеночный" слой. Горизонтальный масштаб буферной зоны со вторичным течением составляет около 1/6 вертикального размера слоя H ; горизонтальный масштаб пристеночного слоя составляет около 1/6 масштаба буферной зоны, т.е. около 1/36 вертикального размера слоя или около 1/470 всего горизонтального размера слоя L . Для того чтобы добиться удовлетворительного описания столь тонкой структуры, использована разностная сетка с числом узлов по 141×33 со сгущением в буферной зоне, так что минимальный горизонтальный размер сетки непосредственно у стенки составлял около $1/200 H$.

Внутренняя (собственная) стратификация, вызываемая конвекцией

Конвекция рассматривавшегося выше вида приводит к весьма существенному вертикальному перераспределению температуры, в результате которого реализуется устойчивая вертикальная стратификация по температуре (рис.2, в), которую можно назвать "собственной", или "внутренней", стратификацией в отличие от "внешней" стратификации, образующейся, например, при поглощении поверхностью жидкости солнечного излучения. Наличие внутренней стратификации оказывает значительное обратное влияние на конвекцию, которая его вызывает, существенно ее стабилизируя. В результате этого течен

ние при больших числах Рэлея, вплоть до $Ra_n \approx 10^9$ (и, по-видимому, выше), имеет стационарный характер. Результаты расчетов профилей скорости и температуры, как показано на рис. 2, в, хорошо согласуются с экспериментальными данными, что является также косвенным подтверждением преимущественно двумерного характера течения этого типа.

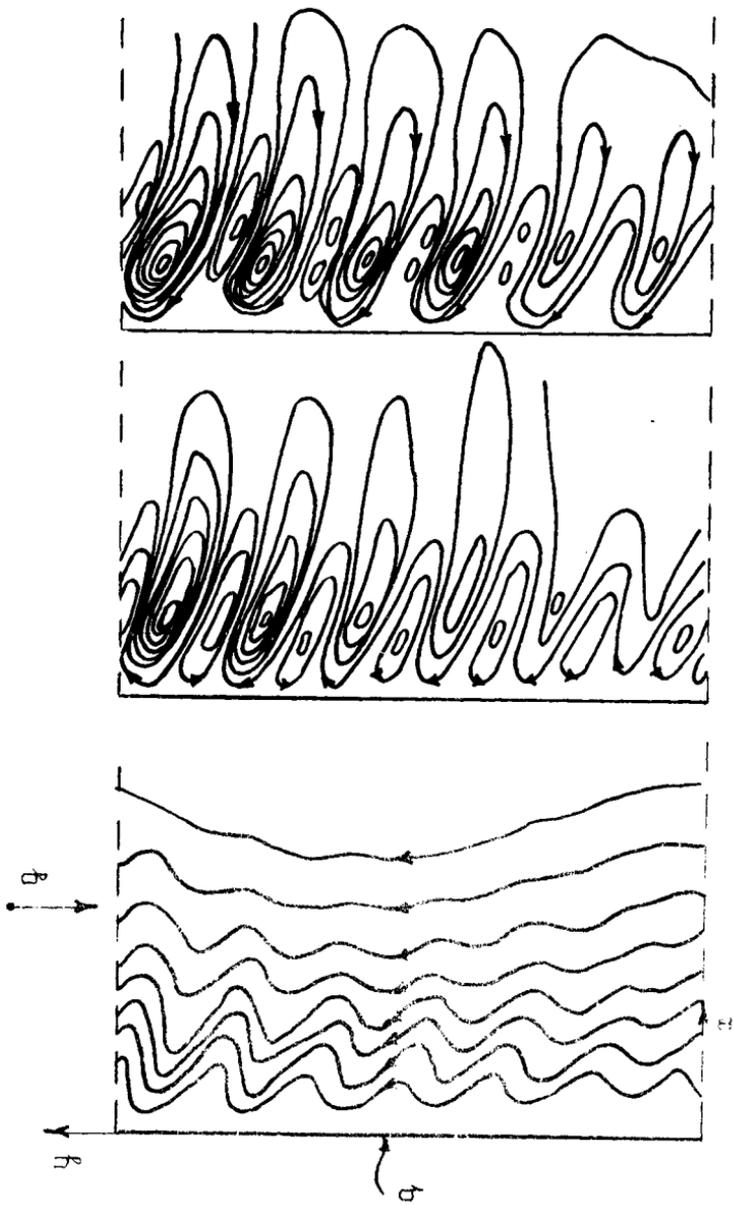
Внутренняя стратификация является одним из характерных свойств конвективных течений типа i, k , вызываемых как тепловой, так и концентрационной конвекцией, а также суперпозицией этих двух видов конвекции. Ее величина зависит в общем случае от чисел Рэлея, Прандтля, отношения сторон (т.е. относительного удлинения слоя) и характера тепловых (концентрационных) граничных условий.

Оценка вклада конвекции в формирование вертикальной температурной (соленостной) стратификации в геофизических приложениях представляется весьма важной, в особенности при интерпретации данных измерений в естественных океанических условиях, а также при создании регулируемой температурной стратификации в специальных лабораторных бассейнах [10].

К настоящему времени наиболее полно эти эффекты изучены в квадратной области и горизонтальных кюветах при малых числах Рэлея (около 10^3-10^5) и малых числах Прандтля ($Pr \leq 1$) [7, 15]. Применительно к океаническим условиям требуются дополнительные количественные данные.

"Внутренняя" стратификация может оказывать существенное стабилизирующее воздействие на конвекцию, которая ее вызывает. Это замечено, например, в длинном вертикальном слое, где при увеличении числа Рэлея система вторичных вихрей сменяется одновихревой структурой, существующей в некотором диапазоне числа Рэлея [13]. В сосуде с заданным боковым потоком тепла обнаружено ступенчатое по высоте распределение температуры, вызываемое конвекцией при больших числах Рэлея [11].

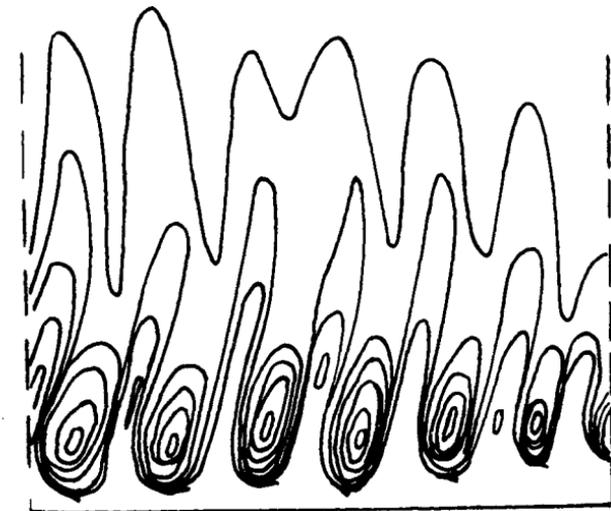
Наличие таких, еще мало изученных эффектов требует при анализе локальных естественно-конвективных процессов разделения как заданной извне температурной (соленостной) стратификации, так и внутренней (собственной) стратификации. Для изучения этих эффектов необходимы специальные постановки теоретических и экспериментальных исследований.



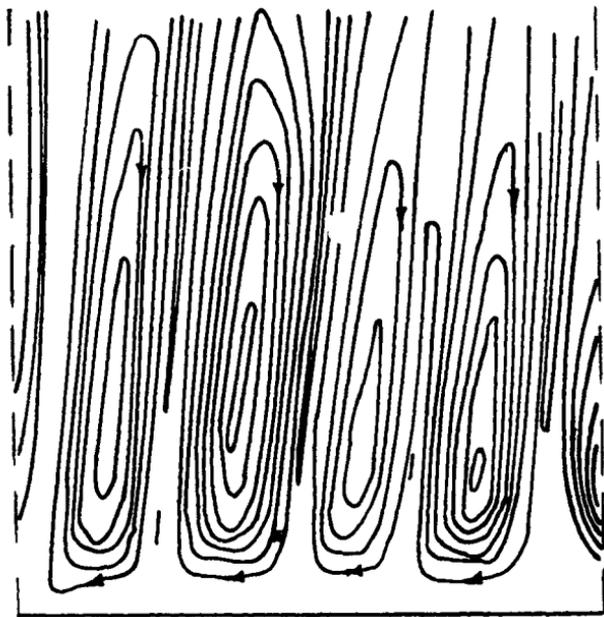
B)

b)

a)



г)



д)

Р и с. 3. Развитие во времени слоистой структуры конвекции при боковом потоке тепла и устойчивой стратификации по солёности ($Ra = 8,4 \cdot 10^8$, $Pr_t = 7$, $Pr_b = 700$, $Ra_b = 7,7 \cdot 10^9$). Представлены картины линий тока при значениях $F_0 = 0,00512$ (а), $0,00528$ (б), $0,0560$ (в), $0,00688$ (г), $0,0272$ (д) в центральной ($1/4$ высоты/час-ти бассейна. Исходные данные соответствуют экспериментам [15]

4. СЛОИСТЫЕ СТРУКТУРЫ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

Естественно-конвективные течения, вызываемые горизонтальными неоднородностями температуры, могут подвергаться существенным изменениям в неоднородной по концентрации системе с образованием слоистых структур. Математические модели таких течений развиты в настоящее время недостаточно из-за значительных трудностей расчета таких структур. Эти трудности в значительной степени преодолены в работах [8,9,13]. Важную роль при этом имеет проверка адекватности модели путем сопоставления с экспериментальными данными, которые в широком диапазоне параметров получены в работах Ю.Д.Чашечкина и В.А.Попова [16]. При этом для системы (1)-(4) ставятся следующие граничные условия:

1) боковая поверхность ($x=0$, $0 \leq y \leq H$)

$$u = v = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

2) дно ($y=0$, $0 \leq x \leq L$)

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

3) поверхность жидкости ($y=H$, $0 \leq x \leq L$)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Начальными условиями являются нулевое поле скорости, линейный профиль солености, равномерное поле температур.

Формирование слоистых структур и их динамика в различные моменты времени в условиях, соответствующих экспериментам бассейна [16], показаны на рис.3.

Для разрешения деталей слоистой структуры использована неравномерная сетка с числом узлов 65×65 . Физической причиной образования таких структур является действие устойчивого градиента солености, способного, в принципе, подавить тепловую конвекцию, возникающую при боковом потоке тепла. При этом в некотором диапазоне чисел Gr , Gr_D реализуется баланс между силами плавучести и силами, препятствующими всплыванию жидкости. Границы существования слоистых структур в морской воде ($Pr = 7$, $Pr_D = 700$) в плоскости Gr , Gr_D , полученные в работе [13], могут использоваться для интерпретации натурных данных по вертикальной структуре в океане и при постановке лабораторных экспериментов. Результаты

расчетов внутренней структуры, масштабов и условий образования слоистых структур в рассмотренном случае хорошо согласуются с данными упоминавшихся выше экспериментов [16].

Помимо слоистой регулярной структуры в ядре при тепловой конвекции в устойчиво стратифицированной по составу системе в отдельных режимах наблюдаются более интенсивные зоны замкнутых циркуляционных течений у дна, которым соответствует равномерное на некоторой высоте распределение более тяжелой компоненты [13].

Представляется важным и гребующим более полного исследования наблюдаемый в экспериментах [16] факт образования слоистых структур вокруг нагретого или охлаждаемого цилиндра в устойчиво стратифицированной жидкости. Этот факт означает, что слоистые структуры имеют широкую область существования при комбинированном (т.е. различным образом направленном) потоке тепла (массы) по отношению к направлению силы тяжести. Это составляет одну из задач параметрических исследований в естественных океанических условиях, характеризующихся, как известно, большим разнообразием упомянутых потоков. Ряд интересных режимов может встречаться в условиях воздушной атмосферы, характеризующихся числами $R_T \sim 0,7$. Аналогичные эффекты могут встречаться и в расплавах, которым, однако, соответствуют меньшие числа Прандтля ($R_T \approx 0,01$, $R_\rho \approx 10$).

Причиной образования слоистых структур и ступенчатого распределения параметров может являться действие устойчивого температурного градиента на концентрационную конвекцию при боковом потоке массы (случай f на рис.1), а также действие на тепловую конвекцию устойчивого градиента температур, как уже упоминалось выше в разд.3.

Наряду с периодической структурой конвекции Рэлея-Бенара и упоминавшимися выше более сложными структурами переходных и турбулентных режимов конвекции слоистые структуры представляют один из примеров самоорганизованных структур в механике нелинейных конвективных процессов.

5. КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОНИКАЮЩАЯ КОНВЕКЦИЯ

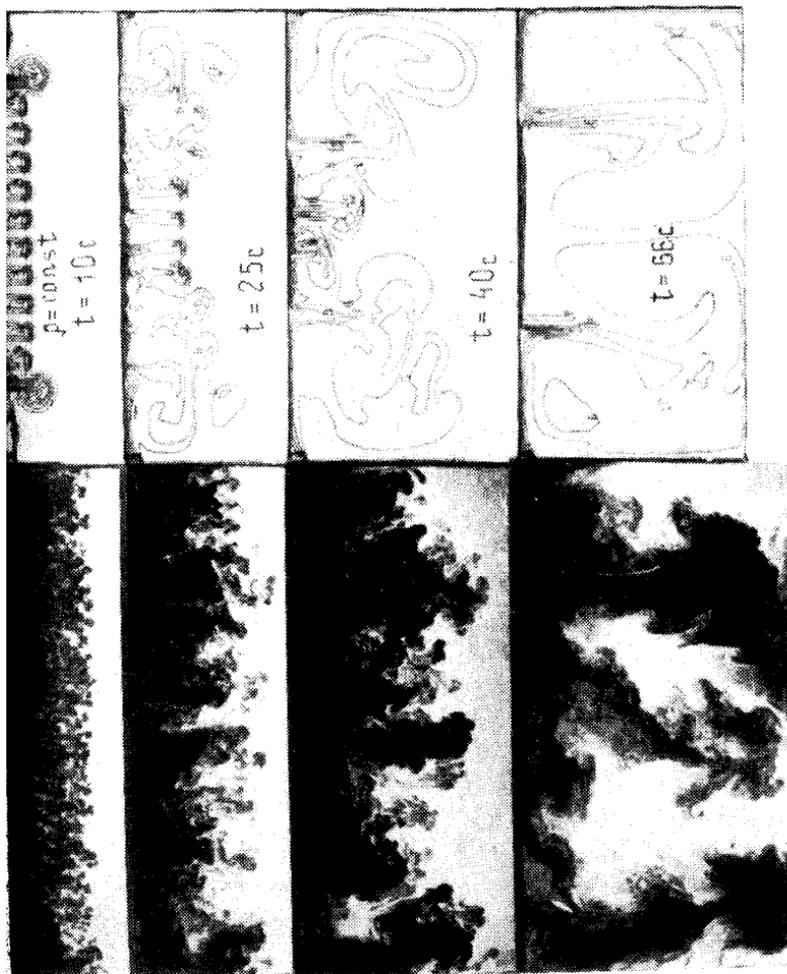
Группа течений, соответствующая случаям $a-d$ на рис.1, имеет наиболее широкое распространение в океане и атмосфере.

ре в связи с тем, что потоки тепла (массы) направлены чаще всего по нормали к поверхности океана (суши), т.е. вдоль направления силы гравитации.

Значительные трудности при численном решении этого класса задач связаны с большими значениями чисел Ra (Ra_D) в естественных условиях. Для течений типа $b-d$ (рис.1) реализуются режимы конвекции, находящиеся далеко за порогом устойчивости статического равновесия, как правило, в переходных и турбулентных режимах движения. Конвекция этого типа имеет чаще всего проникающий характер, распространяясь из некоторой неустойчивой в устойчивую или нейтрально стратифицированную среду. В связи с отсутствием характерного размера по горизонтали одной из проблем является решение вопроса о выборе горизонтального масштаба за порогом устойчивости равновесия. Наличие температурной и соленостной стратификации приводит к ряду особенностей, которые проявляются наиболее отчетливо в режимах конвекции типа c и d (рис.1). В первом из них (устойчивая стратификация по солености и неустойчивая по температуре) могут реализовываться, как и в случае бокового потока тепла, вытянутые по горизонтали ячейки; в книге Дж.Тернера [3] этот режим имеет наименование "диффузионный режим". Во втором реализуются вытянутые по вертикали ячейки, или по терминологии работы [3], "солевые пальцы".

Модель стационарной проникающей конвекции газа в атмосфере [17] основана на введении эффективной теплопроводности, соответствующей исходному профилю лучистого равновесия. При фиксированном горизонтальном масштабе $L/H \sim 1$ (H - глубина неустойчивой зоны, L - длина полуволны ячейки) определена интенсивность и глубина проникновения конвекции H_p в устойчивую область при числе $Ra_H \sim 10^6 - 10^7$. В работе [18] на основе двумерных уравнений численно реализован упоминавшийся режим "солевых пальцев" при $Gr \approx 1,5 \cdot 10^5$, $Gr/Gr_D \approx 3$, $R_1 \approx 6,8$, $R_{1D} \approx 680$, характеризующийся весьма вытянутыми по вертикали ячейками. Устойчивое распределение температуры ограничивает при этом область проникновения конвекции. Модель "солевых пальцев" на основе трехмерных уравнений реализована в работе [19].

Продвижение в изучении задач проникающей конвекции на основе методики и комплекса программ [4,5] в последние годы связано с реализацией нестационарного режима многоячейковой структуры, а также сопоставлением с данными ла-



Р и с. 4. Развитие во времени проникающей конвекции при обрушении тяжелого слоя изотермической жидкости ($\rho_1, \rho_2 = 6,8 \cdot 10^8, \rho_1, \rho_2 = 800$): а – визуальные картины распрощенного слоя подкрашенного слоя тяжелой жидкости в экспериментах [18] б – картины линий равной плотности в соответствующие моменты времени, полученные методом численного моделирования

б)

а)

бораторного эксперимента. На рис. 4 показаны полученные в работе [20] данные о нестационарном этапе распространения краски при обрушении тяжелой окрашенной жидкости в узкой ячейке, первоначально находившейся над легкой жидкостью ($\rho_{\text{д}} = 6 \cdot 10^8$, $\rho_{\text{л}} \approx 800$). Численные данные качественно согласуются с данными эксперимента начиная с некоторого момента времени, которому соответствует преимущественно двумерная структура течения.

Исследованию переходных и турбулентных режимов проникающей конвекции в принципе должно предшествовать изучение более простой классической задачи Рэлея-Бенара. В этой связи следует отметить работу [21], где получены и обработаны численные реализации турбулентной конвекции по аналогии с работой [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработка методики и программного обеспечения для решения нестационарных уравнений Навье-Стокса при больших числах Рэлея и численная реализация переходных и турбулентных режимов конвекции путем прямого численного решения этих уравнений, выполненная в последние пять-семь лет, дают возможность охватить диапазон параметров лабораторных экспериментов и вплотную приблизиться к диапазону параметров локальных естественных конвективных процессов природных атмосферных и океанических условий.

В конкретных примерах, полученных в последние два-три года, даны расчеты конвекции с использованием подробных пространственных сеток $(5-15) \cdot 10^3$ узлов. Получено достаточное пространственное разрешение тонкой структуры локальных естественно-конвективных процессов, в том числе многомасштабной структуры течений, вызываемых горизонтальными неоднородностями температур, включая когерентные структуры пристенной турбулентной конвекции слоистых структур в стратифицированных средах с двойной диффузией, проникающих конвективных движений, в которых обнаружены самоорганизованные структуры.

Опыт расчетов конвекции и внутренних волн в лабораторных бассейнах конечных размеров приводит также к выводам о необходимости формулировки граничных условий, соответствующих локальной конвекции в океане и атмосфере, а также

организации систематических измерений для их определения и контроля.

Важным этапом дальнейших исследований является численная реализация пространственных моделей локальных естественно-конвективных процессов и разработка методов учета этих процессов в моделях, описывающих глобальные процессы, а также проведение прецезионных измерений характеристик соответствующих процессов, в особенности элементов тонкой структуры для тестов численных решений при больших числах Рейлея.

Л и т е р а т у р а

1. Булгаков Н.П. Конвекция в океане. М.: Наука, 1975.
2. Федоров К.П. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоздат, 1976.
3. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
4. Бунэ А.В., Грязнов В.Л., Дубовик К.Г., Полежаев В.И. Методика и комплекс программ численного моделирования гидродинамических процессов на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса: Препринт ИПМ АН СССР №173, 1981.
5. Бунэ А.В., Грязнов В.Л., Дубовик К.Г., Полежаев В.И. Комплекс прикладных программ для моделирования процессов гидродинамики, тепло- и массообмена на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. - В кн.: Пакеты прикладных программ. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1983, с.156.
6. Полежаев В.И. Конвективное взаимодействие в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью, при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну. - Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1972, №4, с.77.
7. Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Гидродинамические эффекты макрораспределения примесей в замкнутых объемах. - Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1980, №3, с.11.
8. Грязнов В.Л. Численное моделирование процесса образования ячеистой структуры при нагревании стратифицированной жидкости. (Институт проблем механики АН СССР, семинары). - Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1981, №5, с.191.
9. Грязнов В.Л., Полежаев В.И. Математические модели процессов образования слоистых структур в устойчиво стра-

тифицированной по солености жидкости. – В кн.: 2-й Всесоюз. съезд океанологов. Тез. докл., вып.2. Физика и химия океана. Севастополь, 1982.

10. Богатырев С.Д., Брайловская В.А., Коган В.Р. и др. Принципы построения лабораторной модели стратифицированного океана. – В кн.: Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983, с.252.

11. Полежаев В.И., Черкасов С.Г. Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла. – Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1983, №4, с.148.

12. Дайковский А.Г., Полежаев В.И., Федосеев А.И. Исследование структуры переходного и турбулентного режимов конвекции в вертикальном слое. – Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1978, №6, с.66.

13. Грязнов В.Л. Исследование тепловой и концентрационной конвекции при больших числах Рэлея: Автореф. дис. ... физ.-мат. наук. М., 1983.

14. Кирдяшкин А.Г., Полежаев В.И., Федюшкин А.И. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла. – ПМТФ, 1983, №6, с.122.

15. Шайдунов Г.Ф., Пинягин А.Ю., Пшеничников А.Ф. Экспериментальное исследование ламинарной гермоконцентрационной конвекции газовых смесей /Перм. ун-т. Пермь, 1982. Рукопись деп. в ВИНТИ, №5059-82.

16. Чашечкин Ю.Д., Попов В.А. Методы лабораторного моделирования конвективных процессов в неоднородных системах в условиях нормальной и пониженной гравитации. – В кн.: Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости /Под ред. В.С.Авдуевского, В.И.Полежаева. М.: Наука, 1982.

17. Власюк М.А., Полежаев В.И. Исследование стационарной проникающей конвекции сжимаемого газа в атмосфере: Препринт №46. М.: Ин-т прикладной матем., 1972.

18. Piacsek S.A., Toomre J. Nonlinear evolution and structure of salt fingers. Marine turbulence. – Proceedings II-th Int. Lige Colloquium Ocean Hydrod., Elsevier Sci. Publ. Comp. Amsterdam, Oxford, 1980.

19. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Семин В.Н., Шмидт В.М. О нелинейных конвективных движениях в средах с "двойной диффузией". – ДАН СССР, 1981, т.257, №3, с.570.

20. Бунэ А.В., Дикарев С.П., Зацепки А.Г., Тишаев Д.В.
Пример численного и лабораторного воспроизведения процесса
развития конвекции. - Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана,
1984.

21. Grötzbach G. Direct numerical simulation of
laminar and turbulent Bénard convection. - J. Fluid
Mech., 1983, v.119, p.27.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ГИДРОФИЗИКЕ

В.А.Гушин

В настоящее время наряду с натурными и лабораторными измерениями, а также теоретическими исследованиями и в связи с бурным развитием вычислительной техники все более важное место при изучении физических явлений занимает новый метод исследования – вычислительный эксперимент. Основные принципы, положенные в основу вычислительного эксперимента, достаточно подробно освещены в работах [1–4].

Технологический цикл вычислительного эксперимента можно представить в следующем виде. Для изучаемого явления строится физическая модель. Далее, чтобы получить количественное описание явления, необходимо найти адекватное математическое описание всех его существенных особенностей – создается математическая модель, т.е. ставится начальная краевая задача для соответствующих уравнений, проверяется ее корректность.

Степень сложности математической модели определяется прежде всего самим явлением и качеством информации, которую желательно получить при изучении данного явления. Естественно желание построить максимально упрощенную модель и исследовать ее по возможности простыми средствами (размерностный анализ, асимптотические методы, понижение размерности задачи). При сопоставлении полученных результатов с экспериментальными данными может возникнуть необходимость усложнения математической модели, а в связи с этим потребуются и более сложные методы решения задачи. Следует иметь в виду, что результаты, полученные на основе более простых моделей и методов решения, могут служить

для контроля при решении усложненной математической задачи. Здесь ни в коей мере не преуменьшается роль аналитических исследований, а наоборот, подчеркивается их целесообразность.

Итак, математическая задача поставлена, и имеются некоторые предварительные сведения о характере решения. Возникает необходимость в разработке по возможности точного и достаточно эффективного метода решения поставленной задачи. Конструирование вычислительного алгоритма включает в себя два основных этапа: построение разностной схемы для математической задачи, т.е. аппроксимация исходной дифференциальной задачи системой разностных уравнений, и построение эффективного метода решения этих уравнений.

Переход от дифференциальной задачи к разностной есть не что иное, как замена непрерывной среды некоторым ее дискретным аналогом. При этом возникают новые параметры — шаги разностной сетки как по времени, так и по пространственным переменным. Естественно, чем крупнее шаги, тем меньший объем памяти ЭВМ и меньшее время для расчетов нам потребуется. Но здесь возникает ряд вопросов. И самый главный из них — на сколько хорошо разностная задача, описывающая эволюцию дискретной среды, соответствует исходной дифференциальной задаче, так как возможно возникновение различных нежелательных эффектов схемного происхождения, например, появление фиктивных источников (стоков) массы и (или) энергии, мощность которых находится в прямой зависимости от шагов разностной сетки.

При построении разностных схем следует соблюдать ряд принципов. В первую очередь, в разностной модели должны выполняться основные законы сохранения — массы, импульса и энергии.

Построенный алгоритм предварительно анализируется (экономичность, точность и т.д.). Этими вопросами занимается теория численных методов.

После того как построен вычислительный алгоритм, обладающий необходимыми качествами, возникает проблема его реализации в виде программы для ЭВМ.

Поскольку вычисления носят, как правило, многовариантный характер (расчет нескольких вариантов с целью выявления закономерностей, уточнение модели), потребовалась разработка определенной технологии программирования, в основе которой лежит принцип модульной (блочной) структуры.

Сборку программы из модулей можно проводить автоматически с помощью специальной программы. В настоящее время важное место занимает создание проблемно-ориентированных комплексов и систем, называемых пакетами прикладных программ. Допускается их расширение за счет новых модулей – функциональное наполнение.

Последний этап в технологическом цикле вычислительного эксперимента – обработка, анализ, интерпретация полученных данных и сопоставление с результатами физических экспериментов. Здесь под обработкой подразумевается получение основных физических параметров (полей скорости, температуры, солености, плотности, давления и т.д.). Во многих случаях прямое измерение физических характеристик затруднено или вообще невозможно. Информацию приходится извлекать косвенным путем: обработка фотоснимков, осциллограмм, интерферограмм и т.д. При этом оказывается необходимым проводить самостоятельный вычислительный эксперимент.

В результате анализа расчетных данных и сопоставления с физическим экспериментом может возникнуть необходимость уточнения исходной математической модели, что потребует повторения цикла вычислительного эксперимента.

После того как достигнут определенный уровень понимания особенностей физического процесса и получено удовлетворительное согласие с данными физического эксперимента, можно построить некоторую упрощенную (инженерную) модель, которая далее может использоваться на практике, а также для дальнейшего анализа явлений в исследуемой области.

Предполагая, что для задач гидрофизики исследуемая среда представляет собой несжимаемую жидкость, в качестве метода решения соответствующих начально-краевых задач естественно использовать метод расщепления по физическим факторам [5], обобщенный на случай пространственных течений [6], течений неоднородной (стратифицированной по плотности) жидкости [7,8] и течений со свободной поверхностью [9].

С помощью данного подхода были рассмотрены задачи внешнего обтекания однородной жидкостью кругового цилиндра [5,10], сферы и других тел [11], задача внешнего обтекания кругового цилиндра неоднородной (линейно-стратифицированной по плотности) жидкостью [8], задача о коллапсе пятен в линейно-стратифицированной среде [7,8]. Исследовалась задача о гидродинамической устойчивости течения вяз-

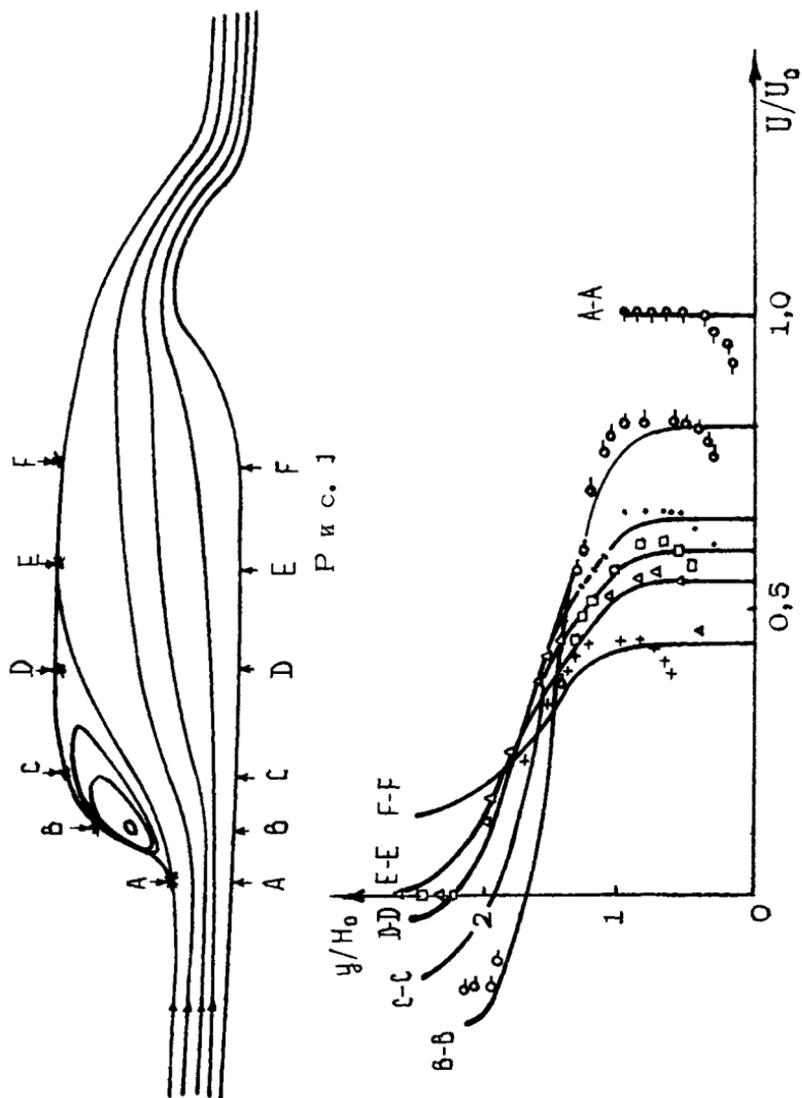
кой несжимаемой жидкости под действием периодической в пространстве силы (течение Колмогорова) [8]. Выполнено численное моделирование вихревой дорожки в следе кругового цилиндра, рассмотрены задачи об опрокидывании поверхностных волн и о взаимодействии внутренних волн с пикноклином и свободной поверхностью.

В качестве примера рассмотрим задачу об опрокидывании поверхностной волны^{*)}. Пусть слой однородной жидкости толщиной H_0 натекает со скоростью U_0 на преграду высотой h . Согласно теории мелкой воды при достаточно большом числе Фруда $Fr = U_0^2 / gH_0$, где g - ускорение свободного падения, и при фиксированном отношении $k = h/H_0$ течение симметрично относительно препятствия. При уменьшении Fr симметрия нарушается и появляется отклонение от результатов теории мелкой воды. При дальнейшем уменьшении Fr удается достигнуть режима с опрокидыванием поверхностной волны. На рис.1 для варианта $Fr = 4,8$, $k = 1,4$ приведена стационарная картина течения с опрокидыванием. Стационарный режим удается получить путем отклонения наветренной части дна на угол $1,5^\circ$. Для сравнения на свободной поверхности крестиками отмечены точки, соответствующие экспериментальным данным. (Эксперимент выполнен Е.Е.Бурыниным и П.Я.Ураковым под руководством профессора Ю.Г.Красникова). На рис.2 приведены профили продольной составляющей вектора скорости в различных вертикальных сечениях, отмеченных стрелками на рис.1.

Отметим, что вне зоны пограничного слоя совпадение результатов достаточно хорошее. Максимальное различие экспериментальных данных и результатов расчетов не превосходит 7%. За счет усложнения математической модели по сравнению с моделью мелкой воды исходя из результатов расчетов удалось уточнить кривую нейтральной устойчивости такого течения и исследовать влияние геометрических параметров задачи.

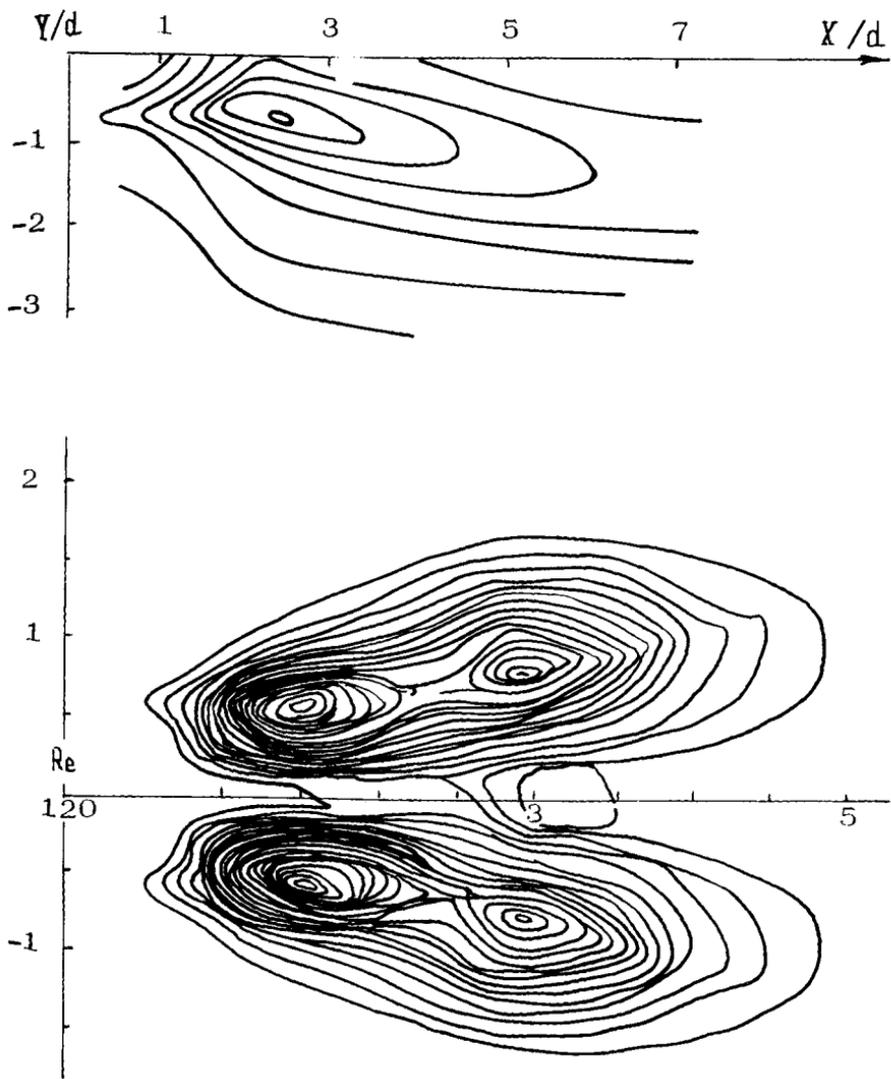
В качестве второго примера рассмотрим задачу о нестационарном отрывном течении около кругового цилиндра, возникающем при обтекании его несжимаемой вязкой жидкостью. Известно, что при числах Рейнольдса $Re = U_0 d / \nu$ (здесь U_0 - скорость набегающего потока, d - диаметр, ν - кинематический коэффициент вязкости) меньших $Re_{кр} \approx 30-40$ течение около цилиндра асимптотически устойчиво. При переходе через $Re_{кр}$ абсолютное большинство экспериментов показывает,

^{*)} Расчеты этой задачи выполнены В.Н.Коньшиным.



Р и с. 1

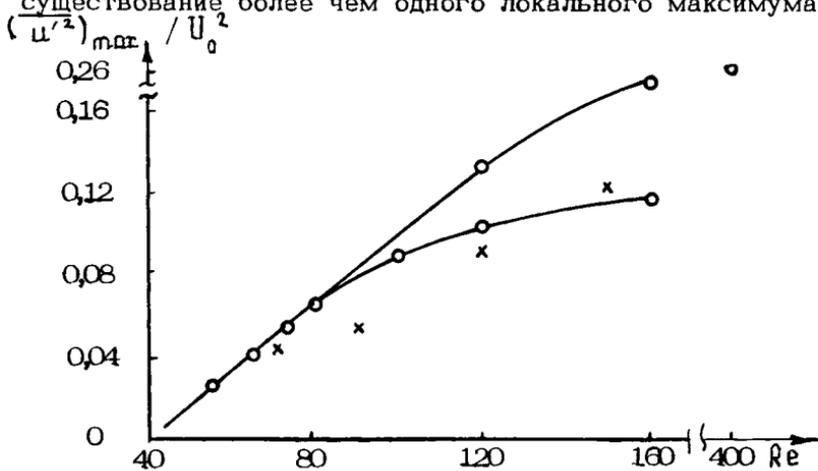
Р и с. 2



Р и с. 3

что в диапазоне умеренных чисел Re характерно наличие периодического режима течения (вихревой дорожки) – происходит периодический срыв вихрей с верхней и нижней частей боковой поверхности цилиндра, причем безразмерная частота (число Струхала $Sh=d/U_0T$, где T – период) увеличивается с ростом Re , достигая (практически при $Re=400$) своего асимптотического значения для ламинарных течений близкого к $0,2$. Такое течение, экспериментально полученное более ста лет назад, в настоящее время удается получать и путем численного моделирования. Отметим некоторые характерные особенности такого течения. На обтекаемое тело действуют в направлении движения сила сопротивления F_x , в поперечном направлении – подъемная сила F_y . Кроме того, на цилиндр действует вращательный момент M . Учитывая, что все эти характеристики периодически изменяются во времени, причем период F_x в два раза меньше периодов F_y и M , можно сделать вывод, что тело при таких режимах будет двигаться по сложной траектории, совершая колебания по углу тангажа. Очевидно, аналогичная картина будет иметь место и при движении цилиндра в стратифицированной среде.

На рис.3 изображены изолинии u'^2 для продольной составляющей вектора скорости при $Re=120$. Верхняя картина – экспериментальные данные [12], нижняя – результаты расчетов. Следует отметить, что при $Re > 80$ в расчетах обнаружено наличие "тонкой структуры" в изолиниях u'^2 и v'^2 , т.е. существование более чем одного локального максимума.



Р и с. 4

На рис.4 показана зависимость $(\overline{u'^2})_{\text{max}} / U_0^2$ от числа Re . Нижняя ветвь соответствует дальнему от тела максимуму, верхняя - ближнему. Крестиками отмечены экспериментальные данные [12]. При $Re < 120$ верхняя кривая описывается формулой

$$(\overline{u'^2})_{\text{max}} / U_0^2 = c (Re - Re_{\text{кр}}).$$

Практика расчетов и сопоставление с экспериментальными данными показывают достаточно широкие возможности рассматриваемого подхода и целесообразность его использования в рамках вычислительного эксперимента для решения гидрофизических задач.

В заключение автор выражает благодарность О.М.Белоцерковскому и А.И.Толстых за постоянное внимание и ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. Белоцерковский О.М. Вычислительный эксперимент. Прямое численное моделирование сложных течений газовой динамики на основе уравнений Эйлера, Навье-Стокса и Больцмана. - В кн.: Прямое численное моделирование течений газа. (Численный эксперимент в газовой динамике). М.: ВЦ АН СССР, 1978, с.6.

2. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. - Вестн. АН СССР, 1979, №5.

3. Самарский А.А. Что такое вычислительный эксперимент? - В кн.: Что такое прикладная математика. М.: Знание, 1980, с.22.

4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

5. Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. - Журн. вычисл.матем. и матем. физ., 1975, т.15, №1, с.197.

6. Гушин В.А. Пространственное обтекание трехмерных тел потоком вязкой жидкости. - Журн. вычисл.матем. и матем. физ., 1976, т.16, №2, с.529.

7. Гушин В.А. Метод расщепления для решения задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. - Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т.21, №4, с.1003.

8. Белоцерковский С.О., Гушин В.А. Моделирование некоторых течений вязкой жидкости: Препринт ВЦ АН СССР, 1982, 66 с.
9. Гушин В.А., Коньшин В.Н. Численное моделирование течений со свободной поверхностью. – В кн.: Труды МФТИ. Сер. Аэрофизика и прикл. математика. М., 1981, с.124.
10. Гушин В.А. Численное исследование обтекания тела конечного размера потоком несжимаемой вязкой жидкости. – Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т.20, №5, с.1333.
11. Гушин В.А., Щенников В.В. Решение задач динамики вязкой несжимаемой жидкости методом расщепления. – В кн.: Прямое численное моделирование течений газа. (Численный эксперимент в газовой динамике). М.: ВЦ АН СССР, 1978, с.114.
12. Nishioka M., Sato H. Mechanism of determination of the shedding frequency of vortices behind a cylinder at low Reynolds numbers. – J. Fluid Mech., 1978, v.89,1, p.49.

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В.А.Боровиков

I. ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой вниманию читателя статье собраны известные к настоящему времени факты, относящиеся к асимптотике дальних полей внутренних волн, возбужденных локализованными в пространстве и времени источниками. Задача рассматривается в приближении Буссинеска; среда предполагается горизонтально однородной. Искомая функция ψ удовлетворяет уравнению

$$L\psi = F(x, y, z), \quad (1)$$

где L — оператор внутренних волн; при отсутствии средних горизонтальных течений и вращения Земли

$$L\psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \psi. \quad (1a)$$

Здесь x, y — горизонтальные координаты, z — вертикальная.

Поставим граничные и начальные условия. Будут рассматриваться или колебания в безграничной по вертикали среде ($-\infty < z < \infty$) — тогда требуется достаточно быстрое убывание ψ при $|z| \rightarrow \infty$, или колебания в слое ограниченной толщины ($-H < z < 0$) — тогда берутся граничные условия

$$\psi = 0 \quad (z = 0, -H), \quad (1б)$$

т.е. на поверхности ($z = 0$) принимается известное приближение жесткой крышки.

Функция F в (1) представляет собой распределение источников. Предположим, что эти источники включаются при

$t \geq 0$, а при $t < 0$ среда находилась в покое, т.е.

$$w = 0 \quad (t < 0). \quad (1b)$$

Рассмотрим как неподвижные источники, так и источники, движущиеся равномерно и прямолинейно по горизонтали с некоторой скоростью V . Наиболее важным примером поля, возбужденного неподвижным источником, является функция Грина, которой соответствует функция $F = \delta(t, x, y, z - z_0)$. В задаче о неподвижном источнике нас будет интересовать асимптотика поля при больших t .

Источнику, движущемуся вдоль оси x в отрицательном направлении со скоростью V соответствует правая часть уравнения (1) вида $F(x + Vt, y, z)$. Например, движущемуся δ -образному источнику массы соответствует $F = \delta''_{xt}(x + Vt, y, z - z_0)$. В этой задаче будем рассматривать предел поля при $t \rightarrow \infty$ в системе координат, связанной с источником, т.е. предел при $t \rightarrow \infty$ и фиксированных $\xi = x + Vt, y, z$. Иными словами, рассматривается установившееся волновое возмущение, движущееся со скоростью источника V . Нас будет интересовать асимптотика поля вдали от источника, т.е. при больших $\sqrt{\xi^2 + y^2}$.

Искомое решение посредством преобразования Фурье по t, x, y представляется в форме квадратур от решения соответствующей одномерной задачи по переменной z . После аналитического или численного решения этой задачи поле можно найти численным интегрированием и, казалось бы, нет необходимости в исследовании асимптотик дальних полей. Тем не менее, проблема получения таких асимптотик весьма актуальна. Объясняется это следующими причинами.

Во-первых, по мере увеличения времени и расстояния до источника приходится вычислять интегралы от все более и более осциллирующих функций и численные расчеты делаются все более и более трудоемкими.

Во-вторых, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника волновых пакетов, их эволюцию во времени и в пространстве, их зависимость от характеристик источника и т.п. или практически невозможно, или требует больших расчетов. В то же время асимптотические выражения для полей представляют собой явные формулы, выражающиеся через известные специальные функции, и их качественный анализ не вызывает затруднений.

Наконец, в-третьих, найденные асимптотики позволяют в принципе перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых n медленно меняются по горизонтали, так как наличие явных формул для поля позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных и фазовых множителей. Для гармонических волновых пакетов эта задача уже рассматривалась многими авторами (см., например, [1,2,3]).

Задачи распространения внутренних волн естественно разбиваются на два класса — распространение колебаний в безграничной по вертикали среде и в слое конечной толщины. Первый класс задач применим для интерпретации и анализа лабораторных экспериментов, когда изучаются колебания на таких относительно малых дистанциях и временах, что влияние границ бассейна еще не успевает сказаться и им можно пренебречь. При распространении внутренних волн в естественных условиях уже нельзя пренебрегать эффектами конечной толщины слоя.

Из-за ограниченности объема статьи выводы излагаемых результатов не приводятся.

II. БЕЗГРАНИЧНЫЕ ПО ВЕРТИКАЛИ СРЕДЫ

1. Функция Грина для среды с постоянным N^2 . В этом случае уравнение (1) имеет постоянные коэффициенты и функция Грина строится методом Фурье [4,5]:

$$G(t, r, \theta) = \frac{-1}{2\pi^2 r} \int_0^{N \cos \theta} \frac{\sin \omega t \, d\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 - N^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2)$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$ — расстояние от точки наблюдения до источника; полярный угол θ определяется соотношением $\cos \theta = |z - z_0| / r$.

Асимптотика интеграла (2) при $t \rightarrow \infty$ имеет вид (см. [4])

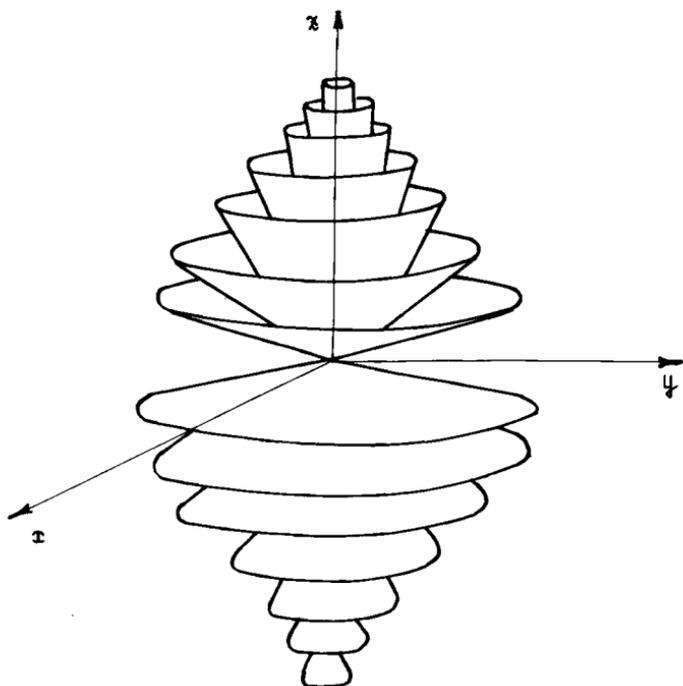
$$G \sim \frac{-\sin(Nt - \pi/4)}{(2\pi N)^{3/2} \sqrt{t} r \sin \theta} - \frac{\sin(Nt \cos \theta + \pi/4)}{(2\pi N)^{3/2} \sqrt{t \cos \theta} r \sin \theta} + O(t^{-3/2}). \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое — стоячая волна, осциллирующая с частотой Брента — Вайсяля N . Гребни волн (линии постоян-

ной фазы) второго слагаемого определяются соотношением

$$\cos \theta = \frac{|z - z_0|}{r} = \frac{(n - 1/4) \pi}{Nt}.$$

Структура этих гребней при достаточно большом t показана на рис.1. Каждый гребень представляет собой конус с осью,



Р и с. 1

совпадающей с осью z ; он возникает на этой оси при $Nt = (n - 1/4) \pi$, при увеличении t раствор конуса увеличивается, а сам конус неограниченно приближается к плоскости источника $z = z_0$.

Асимптотика (3) неприменима вблизи оси z , где возникают волновые гребни, и вблизи плоскости $z = z_0$, с которой они сливаются. Это обстоятельство видно непосредственно из формулы (3), содержащей в знаменателях $\sin \theta$ и $\cos \theta$. Иными словами, асимптотика (3) является неравномерной.

Равномерная асимптотика, применимая при всех θ , была найдена в работе [6]. При θ близких к нулю, т.е. вблизи оси z , она имеет вид

$$G \sim \frac{1}{16 \pi^2 N \cos \frac{\theta}{2}} \left[\frac{1 + \sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} \sin \left(N t \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) J_0 \left(N t \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \sqrt{\cos \theta} \right) \cos \left(N t \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) J_1 \left(N t \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(t^{-3/2}) \right], \quad (4)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя. Если эти функции заменить их асимптотиками при больших значениях аргумента, придем к выражению (3). Практически для этого достаточно $N t \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 6$. Отсюда получается следующее условие применимости неравномерной асимптотики (3) вблизи оси:

$$\theta \geq \frac{2.5}{\sqrt{Nt}}.$$

При θ близких к $\pi/2$, т.е. вблизи плоскости источника, равномерная асимптотика имеет вид

$$G \sim \frac{\sin \left(N t - \frac{\pi}{4} \right)}{(2\pi N)^{3/2} \sqrt{t} \sin \theta} - \frac{J_0(Nt \cos \theta)}{8 \pi^2 N \sin \theta} + O(t^{-3/2}). \quad (5)$$

При замене функции $J_0(Nt \cos \theta)$ ее асимптотикой это выражение также переходит в (3). Из условия $Nt \cos \theta \geq 5$ получаем условие применимости (3) вблизи плоскости источника:

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \geq \frac{5}{Nt}.$$

2. Функция Грина для среды с переменным N^2 . Картина волновых фронтов функции Грина, показанная на рис. 1, нестандартна для задач математической физики. Возникает вопрос о том, насколько эта картина обусловлена тем частным обстоятельством, что был взят случай постоянного N^2 . Чтобы ответить на этот вопрос, следует рассмотреть безграничную по вертикали среду с переменным N^2 . Автор с А.П.Анютиным рассмотрели случай линейного $N^2(z) = \beta^2 z$. Для такого $N^2(z)$ естественно взять задачу в полупространстве $z > 0$, поставив при $z=0$, например, нулевое граничное условие. Оказалось удобнее, однако, рассмотреть решение во всем пространстве, требуя, чтобы при $z \rightarrow -\infty$ волновое поле экспоненциально убывало. Можно рассчитывать, что такая постановка задачи не исказит компонент функции Грина, быстро осциллирующих вблизи источника $x=y=0, z=z_0$, помещенного, конечно, в область положительных z .

Было найдено приближенное выражение $\tilde{G}(t, \rho, z, z_0)$ для функции Грина ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$\tilde{G}(t, \rho, z, z_0) = \frac{-1}{\pi^2 B} \int_0^{\infty} \sin \beta \omega t d\omega \int_0^{\infty} q^{1/3} J_0(q \omega \rho) v \left[q^{2/3} (\omega^2 - z) \right] v \left[q^{2/3} (\omega^2 - z_0) \right] dq, \quad (6)$$

где $v(\xi)$ - функция Эйри-Фока [7]:

$$v(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{u^3}{3} + u \xi \right) \right] du.$$

Функция (6) является при $t > 0$ точным решением уравнения внутренних волн. Ее приближенный характер проявляется в том, что, продолженная нулем в область $t < 0$, она удовлетворяет уравнению (1) с правой частью F равной не δ -функции, сосредоточенной в точке $x=y=0, z=z_0$, а δ -функции с регулярной при всех x, y, z добавкой $\Delta \Psi$:

$$L \tilde{G} = \delta(t) \delta(x, y) \delta(z - z_0) + \delta(t) \Delta \Psi(\chi, z, z_0),$$

где Δ - оператор Лапласа, $\chi = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$ и $\Psi = \frac{1}{\chi} \times \times \arctg \frac{z}{\sqrt{3}(z + z_0)}$. Дополнительное гладкое слагаемое $\Delta \Psi$ не искажает характера коротковолновых осцилляций функции Грина вблизи источника. Поэтому для описания этих осцилляций можно воспользоваться асимптотикой функции \tilde{G} при $t \gg 1$.

Оказалось, что эта функция осциллирует не везде, а лишь вне воронок V_+ и V_- , заштрихованных на рис.2 и имеющих уравнения

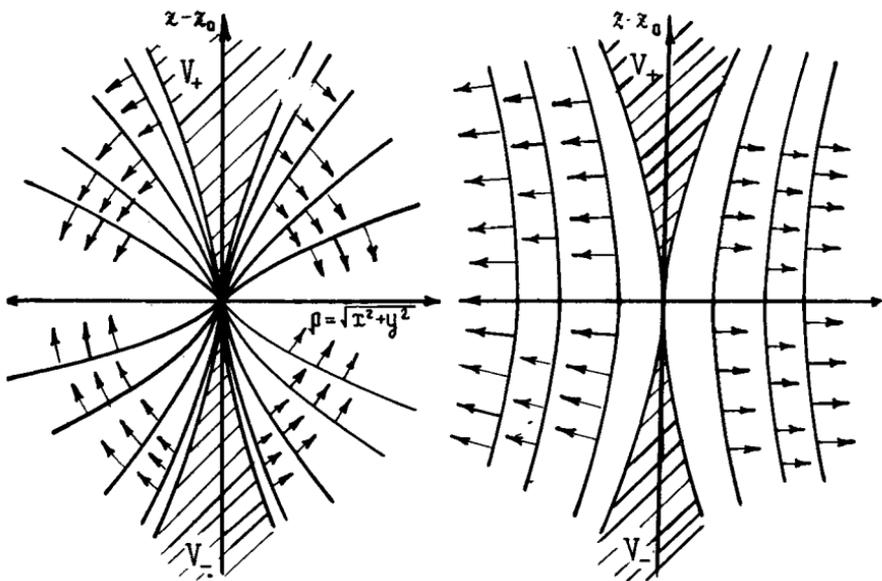
$$V_+ \text{ (при } z > z_0 \text{)} : \rho \sqrt{z_0} = \frac{2}{3} (z - z_0)^{3/2};$$

$$V_- \text{ (при } z < z_0 \text{)} : \rho \sqrt{z} = \frac{2}{3} (z_0 - z)^{3/2}.$$

Внутри воронок поле монотонно убывает как t^{-1} . Вне этих воронок оно состоит из двух осциллирующих слагаемых с фазами $\beta \omega_{\pm}(z, \rho) t$, где функции ω_{\pm} определяются из уравнения

$$\rho \omega_{\pm}(z, \rho) = \frac{2}{3} \left| (z - \omega_{\pm}^2)^{3/2} \pm (z_0 - \omega_{\pm}^2)^{3/2} \right|.$$

Поверхности уровня функций ω_- и ω_+ показаны соответственно на рис.2,а и 2,б. Поверхности уровня функции $\beta \omega_- t$, т.е. поверхности постоянной фазы первого из слагаемых в асимптотике \tilde{G} , представляют собой искривленные конусы с



Р и с. 2

вершиной в источнике $x=y=0$, $z=z_0$. По мере увеличения t каждая поверхность постоянной фазы (волновой гребень) отрывается от воронки V_+ или V_- , затем угол раствора этой поверхности увеличивается, и при больших t она сливается с плоскостью источника $z=z_0$. Поверхности постоянной фазы второго слагаемого $V_{\omega_+}(\rho, z)t$, отрываясь от воронок V_+ и V_- , уходят по ρ на бесконечность. Предельный переход к случаю постоянного N^2 стягивает воронки V_+ и V_- к оси z , а слагаемые с фазами $V_{\omega_+}t$ и $V_{\omega_-}t$ стремятся соответственно к первому и второму слагаемому в выражении (3).

3. Источник, движущийся в среде с постоянным N^2 . Решение этой задачи было найдено в работе [8]. Рассмотрим, например, потенциал горизонтальных скоростей $\Phi(t, x, y, z)$, связанный с вектором горизонтальных скоростей u соотношением $\text{grad}_{xy} \Phi = u$ и возбужденный движущимся дипольным источником массы. Предел Φ при $t \rightarrow \infty$ и фиксированных $\xi = x + Vt, y, z$ имеет вид

$$\Phi = -\frac{DV}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \text{erf} \left[i \left(\alpha \xi + \beta y + \frac{\sqrt{(\kappa^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2)}}{\alpha} |z| \right) \right] d\alpha d\beta. \quad (7)$$

Здесь D — дипольный момент, $\kappa = N/V$, а у корня $\sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}$ при $|\alpha| > \kappa$ выбирается ветвь с отрицательной мнимой частью.

Далее в работе [8] методом стационарной фазы была найдена асимптотика Φ при $r = \sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$. Оказалось, что фазовая функция имеет стационарные точки лишь при $\xi > 0$, т.е. в области за источником, движущимся влево по оси x . Учитывая лишь вклад стационарных точек, получаем главный член асимптотики:

$$\Phi \approx \begin{cases} -\frac{DN}{2\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta} \cos(\kappa r \sin \varphi) & \xi > 0, \\ 0 & \xi < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где r, θ, φ — сферические координаты: $\xi = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta \cos \varphi$; $|z| = r \sin \theta \sin \varphi$. Естественно возникают следующие вопросы:

1) Каков следующий член асимптотики поля?

Ответ на этот вопрос особенно важен для оценки поля в области перед источником (при $\xi < 0$), где главный член асимптотики (8) равен нулю.

2) Каковы границы применимости выписанной неравномерной асимптотики?

3) Какой вид имеет равномерная асимптотика?

Приведем ответы на эти вопросы.

Двучленная неравномерная асимптотика Φ имеет вид

$$\Phi \approx -\frac{DN}{2\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta} \cos(\kappa r \sin \varphi) \chi(\cos \theta) - \frac{DN \cos(\kappa |z| - \pi/4)}{(2\pi)^{3/2} r \cos \theta \sqrt{\kappa |z|}}, \quad (9)$$

где $\chi(\cos \theta) = 1$ при $\cos \theta > 0$ и $\chi(\cos \theta) = 0$ при $\cos \theta < 0$. Из выражения (9) видно, что эта асимптотика неприменима при малых $\cos \theta$ и при малых $\kappa |z| = \kappa r \sin \theta \sin \varphi$, т.е. вблизи плоскости $\xi = 0$ и вблизи горизонтальной плоскости $z = 0$.

Асимптотика Φ , применяемая при малых $\cos \theta$, выражается через комплексно-сопряженный интеграл Френеля

$$F^*(\eta) = \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} \exp(-iq^2) dq$$

и имеет вид

$$\Phi \approx -\frac{DN}{2\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta} \operatorname{Re} \left\{ \exp(i\kappa r \sin \varphi) F^* \left[\sqrt{\kappa r \sin \varphi} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\exp(i\kappa r \sin\psi \sin\theta)}{2i\sqrt{\pi\kappa r |\sin\psi|}} \left[\frac{1}{\cos^{\frac{\theta}{2}} - \sin^{\frac{\theta}{2}}} - \frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{2}{\sin\theta(1-\sin^2\psi\cos^2\theta)} \right)^{1/2} \right] \quad (10)$$

При $\theta \rightarrow \pi/2$ и $\cos\theta \rightarrow 0$ полюсы двух последних членов (10) взаимно уничтожаются и эта формула применима при θ , сколь угодно близких к $\pi/2$. Если же функцию F^* заменить на ее асимптотику, то (10) перейдет в неравномерную асимптотику (9). Отсюда получается следующее условие применимости двучленной асимптотики (9):

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \geq 2.5 / \sqrt{\kappa r |\sin\psi|} \quad (11)$$

Условие применимости одночленной асимптотики (8) более жесткое:

$$\theta < \frac{\pi}{2} - \frac{5}{\sqrt{\kappa r |\sin\psi|}} \quad (11a)$$

Выписанные формулы неприменимы при $\sin\psi$, близких к нулю, т.е. при малых $\kappa r |\sin\psi \sin\theta|$. Условие их применимости при $z \rightarrow 0$ имеет вид

$$\kappa r |\sin\psi| \frac{\sin^3\theta}{1-\sin^2\psi\cos^2\theta} = \kappa r \sin^4\theta \sin\psi = M \gg 1 \quad (116)$$

Для практических целей достаточно положить $M = 2-3$.

Асимптотика интеграла (7), равномерная по z , имеет вид

$$\varphi \approx - \frac{DN}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+q^2 \cos^2\psi}}{(1+q^2)(\cos\theta + q \sin\theta)} \exp(i\kappa r |\sin\psi| \sqrt{1+q^2}) dq, \quad (12)$$

где полюс в точке $q = -i \tan\theta$ при интегрировании по q обходится в верхней полуплоскости. При $\kappa r |\sin\psi| \gg 1$ асимптотическое вычисление интеграла (12) приводит к формуле (10).

При $\kappa r |\sin\psi| \ll 1$ этот интеграл также вычисляется аналитически. При промежуточных $\kappa r |\sin\psi|$ в интеграле (12) не остается больших или малых параметров, и это выражение не поддается дальнейшим упрощениям.

Формула (12) применима при всех $r \gg 1$, θ, ψ , за исключением θ , близких к нулю или к π , так как при ее выводе предполагалось, что $\sin\theta > 0$. Значения $\theta = 0, \pi$ — это ось ξ , т.е. траектория источника. Задача о построении асим-

птотики Φ , применимой вблизи траектории, еще ожидает решения.

4. Обсуждение близких по тематике работ. Обсудим в свете приведенных результатов некоторые работы на близкие темы.

В работе [9], а затем в монографии [10] предлагаются приближенные формулы для удовлетворяющего условию излучения решения уравнения:

$$L\left(-i \frac{\partial}{\partial t}, i \frac{\partial}{\partial x}, i \frac{\partial}{\partial y}, i \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi = F(x, y, z) \exp(-i\omega_0 t); \quad (13)$$

$$\psi = \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{(2\pi)^3} \iint_{S_+} \Phi(\alpha, \beta, \gamma) \exp[-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \frac{d\sigma}{|g^{\alpha\beta\gamma}|}. \quad (14)$$

Здесь Φ — преобразование Фурье функции F ; $d\sigma$ — элемент площади дисперсионной поверхности Σ , задаваемой уравнением $L(\omega_0, \alpha, \beta, \gamma) = 0$. Интегрирование проводится по части S_+ поверхности Σ , определяемой следующим образом. В окрестности Σ уравнение $L(\omega, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ задает ω как функцию α, β, γ ; сама поверхность Σ является поверхностью уровня $\omega(\alpha, \beta, \gamma) = \omega_0$. В качестве S_+ берется та часть Σ , на которой $x\omega'_\alpha + y\omega'_\beta + z\omega'_\gamma > 0$.

Та же формула предлагается в работе [10] для движущегося источника, когда в правой части (13) стоит $F(x + Vt, y, z) \exp(-i\omega_0 t)$. Следует лишь заменить в (14) $L(\omega_0, \alpha, \beta, \gamma)$ на $L(\omega_0 - \alpha V, \alpha, \beta, \gamma)$ и x на $\xi = x + Vt$, после чего сохраняется то же определение S_+ .

Для движущегося источника внутренних волн интеграл (14) отличается от (7) лишь выбором области интегрирования — замене истинной области интегрирования S_M (состоящей из точек Σ , в которых $\gamma > 0$ для вещественных γ или $\text{Im } \gamma < 0$ для мнимых γ) на приближенную S_+ .

Эта замена не меняет главного члена (8) асимптотики Φ , так как при $\xi > 0$ область S_+ содержит стационарные точки фазовой функции. Однако следующий член вычисляется при интегрировании по S_+ уже неверно, так как он определяется границей области интегрирования, а при замене S_M на S_+ эта граница смещается.

Впереди источника, т.е. при $\xi < 0$, когда интеграл (7) не имеет в области интегрирования стационарных точек, замена S_M на S_+ сказывается уже в первом ненулевом члене асимптотики, т.е. возникающая ошибка имеет порядок искомого члена.

Замена истинной области интегрирования поверхностью S_+ приводит к большим погрешностям и в других задачах. Например, для осциллирующего с частотой ω_0 δ -образного источника звуковых волн поле, как хорошо известно, имеет вид

$$w = \frac{1}{4\pi r} \exp[i\omega_0(r-t)],$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. При интегрировании же по S_+ получаем

$$w = \frac{1}{4\pi r} \left\{ \exp[i\omega_0(r-t)] - \exp(-i\omega_0 t) \right\},$$

т.е. и в этом случае погрешность имеет порядок искомой величины. Та же ситуация будет для любого сферически-симметричного уравнения.

В работе [11] рассматривается возбуждение внутренних волн движущимся источником при учете вязкости, для чего в оператор L в уравнении (1) добавляется член $-\nu \Delta^2$, где ν — коэффициент вязкости. Предполагается, что берутся такие ξ, η, z , чтобы добавление этого члена мало смещало положение стационарной точки в интеграле (7), т.е. что вводимую вязкость можно учесть методом возмущений, беря этот интеграл в качестве нулевого приближения. В работе [11] указаны условия для ξ, η, z , при выполнении которых это предположение оправдывается. Однако условия (11) — (11б) применимости метода стационарной фазы, являющиеся, очевидно, необходимыми для описанного выше метода учета вязкости, в этой работе вообще не указаны. Такой подход может привести и, как показывает опыт, реально приводит к тому, что результаты, аналогичные полученным в работе [11], применяются для тех ξ, η, z , для которых они заведомо ошибочны.

III. РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В СЛОЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

1. Дисперсионные уравнения. В случае слоя конечной толщины $-H < z < 0$ и произвольной функции $N(x)$ решение посредством преобразования Фурье по x, y, t выражается через собственные функции и собственные значения одномерной задачи по переменной z ; последнюю задачу приходится решать численно. Сформулируем основные факты, относящиеся к этой спектральной задаче.

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2 \varphi_n(\kappa, z)}{dz^2} + \frac{\kappa^2}{\omega_n^2(\kappa)} \left[N^2(z) - \omega_n^2(\kappa) \right] \varphi_n(\kappa, z) = 0, \quad (z = -H, 0). \quad (15)$$

Здесь $\omega_n(\kappa)$ – спектральный параметр, $\varphi_n(\kappa, z)$ – собственная функция, κ – свободный параметр задачи. Собственные числа ω_n убывают с ростом κ , функции φ_n при любом κ образуют полную систему функций, ортогональную с весом $N^2(z)$ (см. [12]).

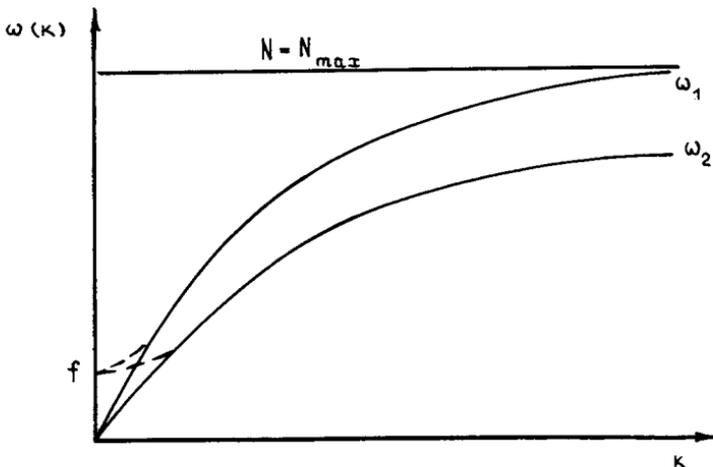
Величина $c_n(\kappa) = \frac{d\omega_n}{d\kappa}$ – групповая скорость n -й моды для волнового числа κ ; она достигает максимального значения $c_n = \max c_n(\kappa)$ при $\kappa = 0$. При $\kappa \rightarrow \infty$ все $\omega_n(\kappa)$ стремятся к $m_{\frac{1}{2}} N(z)$, а $c_n(\kappa)$ – к нулю. При малых κ $\omega_n(\kappa)$ разлагаются в ряд по нечетным степеням κ :

$$\omega_n(\kappa) = c_n \kappa - \alpha_n \kappa^3 + O(\kappa^5), \quad (16)$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{4} c_n^2 \int_{-H}^0 \varphi_n^2 dz \left[\int_{-H}^0 N^2(z) \varphi_n^2 dz \right]^{-1}. \quad (17)$$

Вид кривых $\omega_n(\kappa)$ показан на рис.3 сплошной линией. Будем предполагать далее для простоты изложения, что все дисперсионные кривые выпуклы.



Р и с. 3

2. Функция Грина. Для уравнения внутренних волн с учетом вращения Земли (когда в оператор L в (1) добавляется член $f^2 \omega_{zz}''$, где $f = 2\Omega$ и Ω – вертикальная компонента вектора вращения Земли) функция Грина $G(t, r, z, z_0)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $t = y = 0$, $z = z_0$ – координаты источника, была построена в работах [13, 14]:

$$G(t, r, z, z_0) = \sum_n G_n = \sum_n \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kr) \sin[\omega_n(k)t] \frac{[\omega_n^2(k) - f^2] \varphi_n(k, z) \varphi_n(k, z_0)}{k \omega_n(k)} dk. \quad (18)$$

Здесь $\omega_n(k)$ и $\varphi_n(k, z)$ – собственные числа и собственные функции спектральной задачи, отличающейся от (15) тем, что в знаменателе второго слагаемого вместо ω_n^2 стоит $\omega_n^2 - f^2$. Частота f мала ($f \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) и дисперсионные кривые $\omega_n(k)$ при учете f мало отличаются от кривых $\omega_n(k)$ при $f = 0$. Существенное отличие имеет место лишь при малых k (см. пунктирные линии на рис.3); в частности, групповая скорость достигает максимума c_n не при $k = 0$, как было в случае $f = 0$, а при $k \sim \sqrt{f}$.

Каждая из функций G_n в уравнении (18) описывает распространение n -й вертикальной моды, возбуждаемой δ -образным источником. В работе [14] методом стационарной фазы исследована асимптотика функции G_n при $t, r \gg 1$. Результат существенно зависит от отношения r/t . При $r > c_n t$ стационарные точки отсутствуют и G_n экспоненциально убывает. При $r < c_n t$ интеграл для G_n содержит две стационарные точки, G_n – осциллирующая функция, убывающая при $t, r \rightarrow \infty$ как $(rt)^{-1/2}$. При $r \rightarrow c_n t$ стационарные точки стремятся друг к другу и к значению $k = \tilde{k}$, в котором $c_n(k)$ достигает максимума, а G_n выражается через функцию Эйри:

$$G_n \sim \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{2\pi r}} \exp[i(\tilde{k}r - \tilde{\omega}_n t)] \frac{\tilde{\omega}_n^2 - f^2}{\tilde{k}^{3/2} \tilde{\omega}_n} \tau^{-1/2} \varphi_n(\tilde{k}, z) \varphi_n(\tilde{k}, z_0) \mathcal{U} \left[\tau^{1/3} (r - c_n t) \right] \right\}, \quad (19)$$

где $\tilde{\omega}_n = \omega_n(\tilde{k})$; $\tau = \frac{1}{2} t \frac{d^2 \omega_n(\tilde{k})}{dk^2}$.

Таким образом, поле каждой моды образует волновой фронт $r = c_n t$. Перед фронтом, т.е. при $r > c_n t$, это поле экспоненциально мало; в окрестности фронта оно согласно (19) выражается через функцию Эйри и убывает как $t^{-1/3} r^{-1/2}$, а за фронтом, т.е. при $r < c_n t$, оно осциллирует и убывает как $(rt)^{-1/2}$. Поскольку скорости c_n монотонно убывают с ростом

ν , быстрее всего распространяется первая мода, за ней вторая и т.д.

Зафиксируем точку наблюдения χ . Сначала, при достаточно малых t , поле в этой точке экспоненциально мало. При $t = \chi/c_1$ в точку наблюдения приходит фронт первой моды, и поле имеет вид (19), где надо положить $\mu = 1$. При $\frac{\chi}{c_1} < t < \frac{\chi}{c_2}$ поле состоит из единственной моды – первой; ее амплитуда осциллирует и может быть найдена методом стационарной фазы. При $t = \chi/c_2$ в точку наблюдения приходит фронт второй моды; в интервале $\frac{\chi}{c_2} < t < \frac{\chi}{c_3}$ поле состоит из двух мод. Далее, при $t = \chi/c_3$ включается третья мода и т.д.

Область применимости выписанной асимптотики имеет вид $\chi \gg L_i$, где $L_i = \frac{HN}{f}$ – внутренний радиус Россби (H и N – масштабы толщины слоя, в котором распространяются внутренние волны и частоты Брента-Вяйсяля). Для реальных океанических условий эта асимптотика начинает работать при расстояниях χ порядка сотен километров.

При расстояниях χ до десятков километров вращением Земли можно пренебречь, т.е. положить $f = 0$. Этот случай был рассмотрен автором совместно с М.Я.Кельбертом [15]. Качественная картина поля остается той же, что и при $f \neq 0$, однако аналитическая обработка задачи несколько изменяется, и поле вблизи фронта описывается следующим модельным интегралом, выражающимся через квадрат функции Эйри [16]:

$$f(\xi) = \int_{-\infty + i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} \exp i \left(\frac{u^3}{3} + u\xi \right) \frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{5/3} \pi^{3/2} e^{-\pi i/4} u^2 (2^{-2/3} \xi).$$

Асимптотика G_n вблизи фронта имеет вид

$$G_n = \frac{c_n \varphi_n(\chi, 0) \varphi_n(\chi_0, 0)}{2^{5/6} (3\alpha_n t)^{1/6} \sqrt{\chi}} v^2 \left[\frac{\chi - c_n t}{(12\alpha_n t)^{1/3}} \right]. \quad (20)$$

Из этой формулы видно, что при отсутствии вращения G_n убывает в окрестности фронта медленнее, чем при наличии вращения – не как $t^{-1/3}$, а как $t^{-1/6}$.

Автором совместно с М.Я.Кельбертом было рассмотрено также поле при больших t и ограниченных или даже стремящихся к нулю χ . В этой ситуации интегралы (18) уже нельзя оценивать методом стационарной фазы, так как стационарные точки $\tilde{\chi}$ стремятся к бесконечности при $\chi/t \rightarrow 0$ и $\omega_n''(\tilde{\chi})$ стремится к нулю. Кроме того, собственные функции $\varphi_n(\kappa, \chi)$,

$\varphi_n(k, z_0)$ при $k \rightarrow \infty$ сосредотачиваются в окрестности горизонта $z = \tilde{z}$, на котором $N^2(z)$ достигает максимума, и их нельзя уже считать медленно меняющимися функциями k .

Но именно потому, что при больших k собственные функции сосредотачиваются в окрестности максимума $N^2(z)$, можно редуцировать задачу, аппроксимируя $N^2(z)$ в окрестности максимума квадратичной функцией

$$N^2(z) = N^2 - 4\alpha(z - \tilde{z})^2 \quad (21)$$

и заменяя граничные условия при $z = -H, 0$ требованием убывания собственных функций при $|z - \tilde{z}| \rightarrow \infty$. Тогда для дисперсионных кривых $\omega_n(k)$ и собственных функций выписываются явные формулы, и получающиеся интегралы допускают аналитическую обработку.

Здесь целесообразно рассматривать источники, не сосредоточенные на фиксированном горизонте $z = z_0$, а распределенные по вертикали с некоторым весом $m(z)$. При такой модификации функции $\varphi_n(z_0, k)$ в формуле (19) следует замеснить на

$$\int m(z_0) \varphi_n(z_0, k) dz_0.$$

При ограниченных снизу ν/t эта замена не вносит каких-либо качественных изменений в асимптотику поля при $\nu, t \rightarrow \infty$. Если же $\nu/t \rightarrow 0$, то асимптотики полей, возбужденных сосредоточенными источниками и источниками, распределенными по вертикали, существенно отличаются. Здесь рассматриваем случай распределенного источника как более реальный с физической точки зрения. В этом случае при $t \rightarrow \infty, \nu/t \rightarrow 0$ поле каждой моды, кроме первой, стремится к нулю. Поле первой моды G_1 также стремится к нулю, если на горизонте $z = \tilde{z}$ максимума $N^2(z)$ плотность $m(z)$ равна нулю; в противном случае асимптотика G_1 имеет вид

$$G_1 = -m(\tilde{z}) 2^{-2/3} N^{-1} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2N^2}(z - \tilde{z})^2\right] \operatorname{Im}\left[\exp(-iNt) J_0(\alpha) H_0^{(1)}(\beta)\right],$$

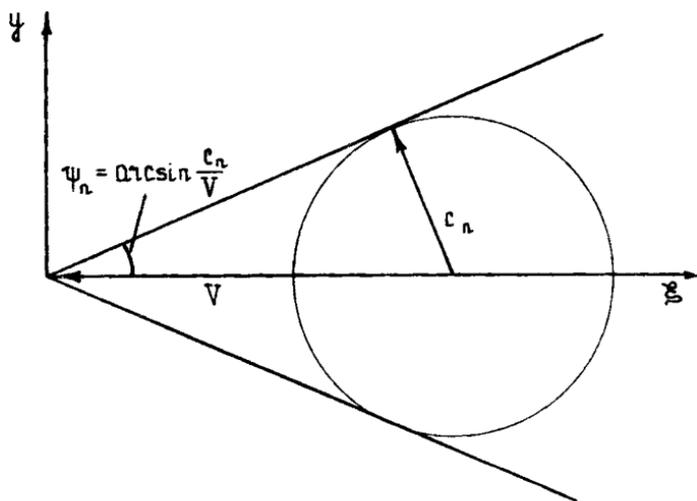
где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода; $q = \nu t$; $\rho = \frac{\alpha t(z - \tilde{z})^2}{N}$ и $\alpha = \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) \left[2\alpha(\sqrt{\rho^2 + q^2} - \rho)\right]^{1/2}$; $\beta = \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) \left[2\alpha(\sqrt{\rho^2 + q^2} + \rho)\right]^{1/2}$

Линии уровня функции, стоящей в квадратных скобках, как видно из выражений для α, β , стремятся при $t \rightarrow \infty$ к точкам $z = \tilde{z}$; $\nu = 0$ как $t^{-1/2}$ по переменной z и как t^{-1} по пе-

ременной . Поэтому при росте эти линии уровня делаются все более и более вытянутыми вдоль оси x .

3. Поле движущегося источника. Будем рассматривать наиболее интересный случай "сверхзвуковой" скорости $V > c_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Фазовая картина поля в этой задаче была найдена в работе [17].

Как и в случае функции Грина, здесь каждая возбужденная источником мода распространяется далее независимо от других: $w = \sum_n w_n$. Поле n -й моды w_n образует два фронта ("фронты Маха"), составляющие с траекторией угол $\psi_n = \arcsin \frac{c_n}{V}$ (рис.4). Перед этими фронтами, т.е. при $\xi < |y| \operatorname{tg} \psi_n = \frac{c_n |y|}{\sqrt{V^2 - c_n^2}}$, поле w_n экспоненциально мало. За фронтами поле осциллирует с ростом ξ, y как $(\xi^2 + y^2)^{-1/4}$



Р и с . 4

В [17] отсутствовали, однако, какие-либо результаты по амплитуде поля w_n . Для различных частных случаев интегралы для w_n и их расчет методом стационарной фазы рассматривались в ряде работ, в том числе [18,19,20]. Метод стационарной фазы неприменим, однако, вблизи фронта, т.е. при $\xi \sim |y| \operatorname{tg} \psi_n$, и вблизи траектории - при $\xi \gg 1$ и малых y . Приведем выражения для полей в этих зонах, полученные нами совместно с Ю.В.Владимировым [21].

Рассматривается возвышение w , возбужденное движущимся источником массы. Эта функция, с точностью до экспоненциально малых слагаемых, представляется в виде суммы квадратур:

$$w = \sum_n w_n = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\nu, \bar{x}, z_0) \exp(-i\nu|y|) \sin \mu_n(\nu) \xi d\nu, \quad (22)$$

где функция $\mu_n = \mu_n(\nu)$ определяется из уравнения $V^2 \mu_n^2 = \omega_n^2 (\sqrt{\mu_n^2 + \nu^2})$, а $A_n(\nu, \bar{x}, z_0)$ имеет вид ($\kappa = \kappa(\nu) = \sqrt{\nu^2 + \mu_n^2(\nu)}$)

$$A_n = \varphi_n(\kappa, z) \frac{d\varphi_n(\kappa, z_0)}{d\kappa} \mu_n^2(\nu) \left[\nu^2 + \mu_n^2(\nu) \omega_n^2(\kappa) \int_{-H}^0 \varphi_n^2(z, \kappa) dz \right]^{-1}$$

и аналитически продолжается четным образом в область $\nu < 0$.

В окрестности фронта (при $\xi \sim |y| \operatorname{tg} \psi_n$) асимптотика w_n выражается через функцию Эйри $v(\eta)$:

$$w_n \approx A_n(0, \bar{x}, z_0) \frac{v'(\eta)}{(3\alpha_n \xi)^{1/3}}; \quad \eta = \frac{|y| - \xi \operatorname{ctg} \psi_n}{(3\alpha_n \xi)^{1/3}}; \quad \alpha_n = \frac{2\alpha_n c_n V^4}{(V^2 - c_n^2)^{3/2}},$$

где α_n определена формулой (17). За фронтом, т.е. при $\xi > |y| \operatorname{tg} \psi_n$, асимптотика интегралов (22) определяется методом стационарной фазы.

При $\xi \rightarrow \infty$ и $|y|/\xi \rightarrow 0$, т.е. вблизи траектории, метод стационарной фазы делается неприменимым. Однако в этом случае, как и в аналогичной ситуации для функции Грина, $N^2(z)$ можно аппроксимировать квадратичной функцией (21), после чего для $\omega_n(\kappa)$ и $\varphi_n(\kappa, z)$ выписываются явные выражения и получающиеся интегралы снова допускают аналитическую обработку.

IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

1. Спектральная задача. Рассматривается распространение внутренних волн в слое $-H < z < 0$ на фоне сдвиговых горизонтальных течений. Предполагается, что на каждом горизонте z задана горизонтальная скорость течения $U_x(z)$, $U_y(z)$; уравнение внутренних волн в этой ситуации имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) + N^2(z) (w_{xx} + w_{yy}) =$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \psi'_x + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \psi'_y \right) = F(x, y, z, t), \quad (23)$$

где F – как и прежде, функция распределения источников.

Предполагается, что выполнено условие устойчивости Майлса [22], гарантирующее, что внутренние волны не могут получать энергию от сдвиговых течений: требуется, чтобы при всех z

$$Ri(z) = N^2(z) \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} > \frac{1}{4}. \quad (24)$$

Спектральная задача, соответствующая уравнению (23), называется уравнением Тейлора–Гольштейна:

$$(\omega - f)^2 \psi''_n(z) + \left\{ \kappa^2 [N^2 - (\omega - f)^2] + f''_{zz} (\omega - f) \right\} \psi_n = 0; \quad \psi_n = 0 \quad (z=0, -H). \quad (25)$$

Здесь λ, μ – переменные, двойственные x и y ; $f = \lambda U_x + \mu U_y$; $\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2$; $\omega = \omega_n(\lambda, \mu)$ – спектральный параметр; $\psi_n(z, \lambda, \mu)$ – собственная функция.

В работе [23] показано, что собственные числа ω_n в этой задаче образуют две серии. В первой из них ω_n убывают с ростом n и стремятся при $n \rightarrow \infty$ к $f_+ = \max_x f$. Во второй – возрастают и стремятся к $f_- = \min_x f$. Интервал $[f_-, f_+]$ – непрерывный спектр. Собственные функции $\omega_n(x, \lambda, \mu)$ в этой задаче не ортогональны; для вычисления коэффициентов разложения по собственным функциям в [23] предлагается использовать процедуру ортогонализации.

2. Функция Грина. Положим

$$u(\omega, \lambda, \mu, z, z_0) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx dy G(t, x, y, z, z_0) \exp[i(\omega t - \lambda x - \mu y)],$$

где G – функция Грина уравнения (23). Очевидно, u удовлетворяет уравнению

$$(\omega - f)^2 u''_{zz} + \left\{ \kappa^2 [N^2 - (\omega - f)^2] + f''_{zz} (\omega - f) \right\} u = \delta(z - z_0); \quad u = 0 \quad (z=0, -H)$$

и

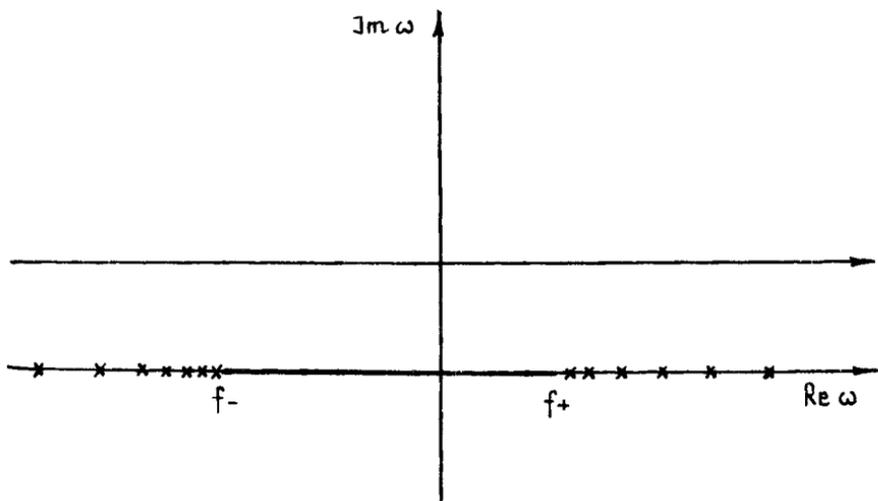
$$G(t, x, y, z, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty d\lambda d\mu \exp[i(\lambda x + \mu y)] \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \exp(-i\omega t) u(\omega, \lambda, \mu, z, z_0) d\omega. \quad (26)$$

Если выполнено условие Майлса (24), то $u(\omega, \lambda, \mu, z, z_0)$ — аналитическая функция ω при $\Im \omega \neq 0$. На вещественной оси эта функция имеет простые полюсы при значениях $\omega < f_-$ и $\omega > f_+$, являющихся собственными числами задачи (25); трудно найти вычеты v_n функции u в этих точках:

$$v_n = -\varphi_n(\lambda, \mu) \varphi_n(z_0, \lambda, \mu) \left\{ 2 \int_{-H}^0 \left[\frac{\kappa^2 \varphi_n^2}{\omega - f} + (\omega - f) \left(\frac{d}{dz} \frac{\varphi_n}{\omega - f} \right)^2 \right] dz \right\}^{-1}, \quad (27)$$

где ω_n и φ_n — соответствующие собственные числа и собственные функции.

Отрезок $[f_-, f_+]$ — линия ветвления функции u ; на этом отрезке u не имеет полюсов. На рис. 5 собственные числа ω_n обозначены крестиками, а разрез — сплошной линией.



Р и с. 5

Для вычисления внутреннего интеграла в формуле (26) при $t \rightarrow \infty$ следует замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости:

$$\int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \exp(-i\omega t) u(\omega, \lambda, \mu, z, z_0) d\omega =$$

$$= 2\pi i \sum_n \exp(-i\omega_n t) v_n + 2i \int_{f_-}^{f_+} \exp(-i\omega t) \Im [u(\omega + i0, \lambda, \mu, z, z_0)] d\omega.$$

Здесь интеграл по непрерывному спектру стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, его вклад в асимптотику G мал по сравнению с вкладами от полюсов ω_n и при дальнейших оценках мы его отбросим, полагая

$$G(t, x, y, z, z_0) \approx \sum_n G_n = \sum_n \frac{-i}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[\lambda x + \mu y - \omega_n(\lambda, \mu)t]\} v_n d\lambda d\mu. \quad (28)$$

Рассмотрим асимптотику G_n при $t, x, y \rightarrow \infty$. Если фазовая функция в (28) имеет стационарные точки, то G_n осциллирует и убывает как $(t \sqrt{x^2 + y^2})^{-1/2}$, в противном случае G_n экспоненциально мало. Уравнение для стационарных точек имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda x + \mu y - \omega_n t) = x - t \frac{\partial \omega_n}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \mu} (\lambda x + \mu y - \omega_n t) = y - t \frac{\partial \omega_n}{\partial \mu} = 0. \quad (29)$$

Назовем волновой зоной область на плоскости $c_x = \frac{x}{t}$, $c_y = \frac{y}{t}$ в которой G_n осциллирует, и запредельной зоной область, где G_n экспоненциально убывает. Из уравнения (29) следует, что волновая зона содержит те $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, для которых имеет решения λ, μ система уравнений

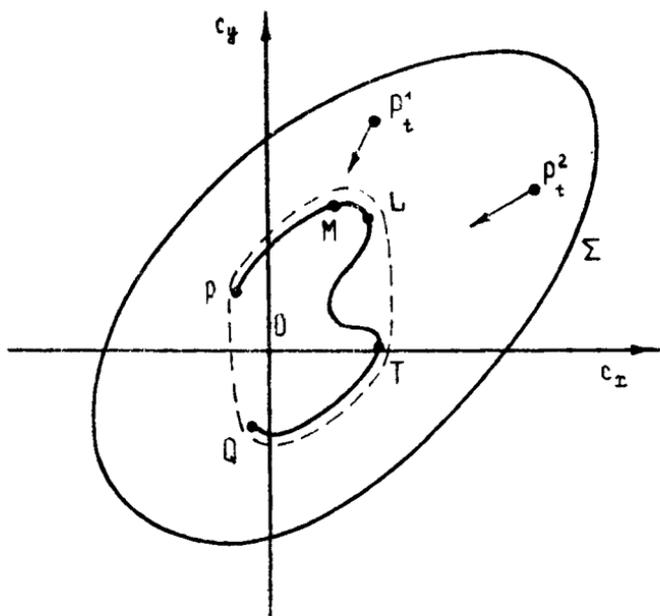
$$c_x = \frac{x}{t} = \frac{\partial \omega_n(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}; \quad c_y = \frac{y}{t} = \frac{\partial \omega_n(\lambda, \mu)}{\partial \mu}. \quad (30)$$

Поэтому волновая зона — это множество точек на плоскости (c_x, c_y) , которое пробегает вектор $g \text{ grad } \omega_n$, когда λ, μ принимают все значения на плоскости $-\infty < \lambda, \mu < \infty$. Напомним, что здесь $\omega_n(\lambda, \mu)$ — собственное число задачи (25).

Естественно возникает вопрос о границах волновой зоны. Проведенный анализ позволяет сформулировать гипотезу о том, что, по крайней мере для достаточно широкого класса функций U_x, U_y, N , волновая зона представляет собой кольцо, внешнюю границу которого составляют значения $g \text{ grad } \omega$ при $\lambda^2 + \mu^2 \rightarrow 0$ (т.е. при $\lambda = k \cos \psi$; $\mu = k \sin \psi$, $0 < \psi < 2\pi$ и $k \rightarrow 0$), а внутреннюю — значения $g \text{ grad } \omega$ при $\lambda^2 + \mu^2 \rightarrow \infty$. Иными словами, каждая мода G_n в разложении (28) имеет не только передний фронт (внешнюю границу волновой зоны), но и задний фронт (внутреннюю границу). В фиксированной точке $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, где r достаточно велико, поле G_n сначала экспоненциально мало, затем, после того как в эту точку придет передний фронт, G_n начинает осциллировать, а после того, как в точку наблюдения приходит задний фронт, G_n снова экспоненциально затухает.

Положение переднего фронта аналитически не вычисляется и требует численного расчета дисперсионных функций $\omega_n(\lambda, \mu)$. При малых U_x, U_y передний фронт представляет собой, с точностью до величин второго порядка относительно U_x, U_y , окружность, расширяющуюся со скоростью c_n (максимальной групповой скоростью n -й моды при отсутствии течений) и смещающуюся (сносимую течениями) со скоростью, равной среднему значению U_x, U_y по вертикали, взятому с некоторым весом.

Положение заднего фронта, т.е. предел значений $\frac{d\omega}{d\lambda}$ и $\frac{d\omega}{d\mu}$ при $k \rightarrow \infty$, вычисляется аналитически. Оказывается, что задний фронт представляет собой одну и ту же кривую для всех n . Чтобы построить ее, надо на плоскости (c_x, c_y) взять годограф вектора скорости $\vec{U}(t)$, т.е. кривую, которую пробегает точка U_x, U_y , когда t меняется от нуля до $-\infty$. Задний фронт представляет собой выпуклую оболочку этой кривой. На рис. 6 овал Σ — это передний фронт, сплошная кривая PQ — годограф скорости, а пунктирная кривая — задний фронт.



Р и с. 6

Рассмотрим какую-либо точку P с координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, где r достаточно велико. На плоскости (c_x, c_y) при заданном t точке P соответствует точка P_t с координатами

$c_x = \frac{v}{t} \cos \varphi$, $c_y = \frac{v}{t} \sin \varphi$. При t , растущем от нуля до бесконечности, точка P_t движется к началу координат вдоль луча с наклоном φ . Когда P_t пересекает передний фронт, G_n начинает осциллировать; когда P_t пересекает задний фронт, G_n снова экспоненциально убывает.

Представляет интерес асимптотика G_n вблизи заднего фронта. Эта асимптотика еще не построена, но некоторые качественные особенности поведения G_n уже известны. Приведем соответствующие результаты, ограничиваясь первой модой G_1 .

Если источник сосредоточен на некотором горизонте $x = x_0$, то с приближением к заднему фронту G_1 экспоненциально стремится к нулю при всех $x \neq x_0$. Если же источник распределен по вертикали на некотором интервале $x_- < x < x_+$, то $G_n(x)$ стремится к нулю, если x находится вне этого интервала. Для горизонта x , находящегося внутри интервала (x_-, x_+), асимптотика G_n зависит от того, где точка P_t пересекает при увеличении t задний фронт.

Этот фронт состоит из дуг годографа $\bar{V}(x)$ (на рис.6 - дуги PL и TQ) и из отрезков выпуклой оболочки (на рис.6 - отрезки LT и QP). Пусть P_t пересекает задний фронт в некоторой точке M годографа (на рис.6 - при $P_t = P_t^1$). Этой точке соответствует некоторое значение $x = \tilde{x}$, для которого $c_x = U_x$, $c_y = U_y$. С приближением P_t к M поле G_1 концентрируется на горизонте $x = \tilde{x}$, а групповая скорость первой моды стремится к $U_x(\tilde{x})$, $U_y(\tilde{x})$. Иными словами, при больших t поле, концентрирующееся на горизонте $x = \tilde{x}$, имеет нулевую скорость относительно среды (так как его групповая скорость равна скорости течения на этом горизонте).

Можно сказать, что течения "растаскивают" поле по разным горизонтам - на каждом горизонте поле концентрируется в той области, которая при $t=0$ находилась в начале координат, а затем, при росте t , уносится со скоростью течения на этом горизонте. Однако это происходит не на всех горизонтах, а лишь на тех, которым соответствуют дуги годографа, принадлежащие к выпуклой оболочке (на рис.6 - дуги PL и TQ). Если же P_t пересекает задний фронт по отрезкам LT или QP , то поле G_1 с приближением к заднему фронту экспоненциально убывает.

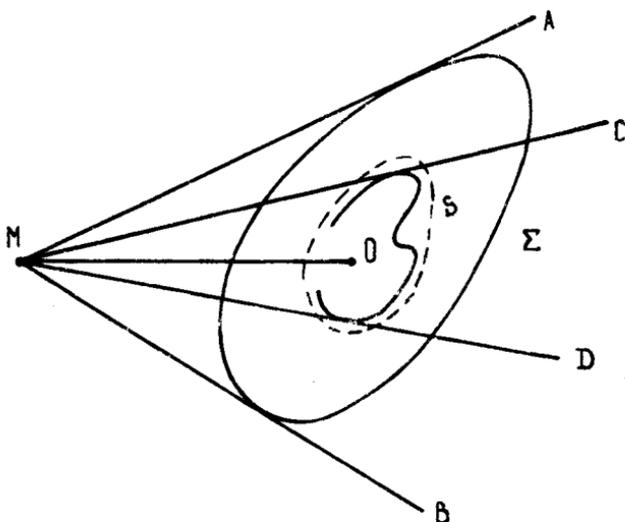
3. Источник, движущийся в среде с течениями. От функции Грина нетрудно перейти к случаю источника, движущегося равномерно и прямолинейно с горизонтальной скоростью \bar{V} .

Снова будем предполагать, что $|\vec{V}|$ больше максимальной групповой скорости.

Поле движущегося источника имеет вид

$$\psi = \psi_0 + \sum_n \psi_n,$$

где ψ_0 - вклад непрерывного спектра, ψ_n - n -я мода, причем ψ_0 убывает быстрее любой из ψ_n . Рассмотрим первую моду ψ_1 . Эта мода обладает передним фронтом (МА и МВ на рис.7) и задним фронтом (МС и МD); перед лучами МА, МВ и за лучами МС, МD она экспоненциально мала, а в секторах АМС и ВMD - осциллирует (см. рис.7).



Р и с. 7

Положение фронтов можно найти посредством простого геометрического построения. Построим передний фронт Σ и задний фронт \mathcal{S} моды G_1 из разложения (28) функции Грина. Выпустим из точки O вектор $\vec{V} = \vec{OM}$ скорости источника. Тогда M - положение источника, передний фронт поля источника - это касательные МА и МВ к Σ , а задний фронт - касательные МС и МD к \mathcal{S} .

Асимптотика поля ψ_1 вблизи этих фронтов еще не построена.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение асимптотик полей внутренних волн – далеко не законченная область исследований. На многие естественно возникающие вопросы ответы еще не получены; часть приведенных выше результатов доказана на физическом уровне строгости и нуждается в строгом математическом обосновании. Не будем приводить постановок соответствующих задач, их легко извлечь из основного текста статьи. Остановимся лишь на двух, наиболее важных с практической точки зрения проблемах.

Первая проблема имеет более частный характер – это выяснение границ применимости выписанных выше асимптотик: начиная с какого времени (для неподвижного источника) или расстояния (для движущегося) эти асимптотики дают хорошее приближение.

Для движущегося источника и типичных распределений $N^2(x)$ эта задача может быть решена относительно просто, так как существуют точные интегральные формулы для поля, доведенные до программ численного расчета соответствующих интегралов [24], и требуется лишь сравнить приведенные выше результаты с результатами расчетов по этим программам.

Вторая проблема – расчет полей в средах, параметры которых медленно меняются по горизонтали. Здесь могут возникнуть качественно новые эффекты. Пусть, например, вдоль трассы распространения волновых пакетов, возбужденных в среде с горизонтальными течениями, оказываются области, в которых нарушено условие устойчивости Майлса (24). В таких областях могут существовать неустойчивые внутренние волны, амплитуда которых растет за счет энергии сдвиговых течений. Попавший в такую область волновой пакет может, возбуждив неустойчивую моду, увеличиться по амплитуде, в результате чего после выхода из неустойчивой области его форма существенно изменится. Требуется количественно описать этот эффект.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А.П.Анютину, Ю.В.Владимирову и М.Я.Кельберту, в сотрудничестве с которыми была получена часть приведенных выше результатов.

Л и г е р а т у р а

1. Keller J.B., Van C., Mow. Internal Wave propagation in an inhomogeneous fluid of non-uniform depth. - J. Fluid, 1969, v.38, p.365
2. Воронович А.Г. Распространение поверхностных и внутренних гравитационных волн в приближении геометрической оптики. - Изв. АН СССР. ФАО, 1976, т.12, №8, с.850-857.
3. Боровиков В.А., Попов А.В. Модальное описание коротких установившихся акустических и внутренних волн в почти слоистых средах. - В кн.: Волны и дифракция. М.: Изд-во АН СССР, 1981, т.3, с.170-173.
4. Секерж-Зенькович С.Я. Фундаментальное решение оператора внутренних волн. - ДАН СССР, 1979, т.246, №2, с.286-289.
5. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости: Препринт ИПМ АН СССР, 1978, №114.
6. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Черенковское излучение внутренних волн равномерно движущимся источником: Препринт ИПМ АН СССР, 1981, №183.
7. Фок В.А. Таблицы функций Эйри. М.-Л.: ГИТТЛ, 1946.
8. Miles J. W. Internal Waves Generated by a Horizontal Moving Source.- Geophysical Fluid Dynamics, 1971, v.2, p.63
9. Lighthill M.J. Studies on Magneto-Hydrodynamic waves and other anisotropic waves motions.- Phil. Trans. of Roy. Soc. London. Series A, 1960 v.252, N1014, p.397
10. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
11. Макаров С.А., Чашечкин Ю.Д. Присоединенные внутренние волны в вязкой несжимаемой жидкости. - Изв. АН СССР. ФАО, 1982, т.18, №9, с.986-994.
12. Yanovitch M. Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid. - Comm. Pure Appl. Math., v.15, N1, p.45
13. Миропольский Ю.З. О распространении импульсов в стратифицированной вращающейся жидкости. - Изв. АН СССР. ФАО, 1975, т.11, №12, с.1314-1322.
14. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1981.

15. Боровиков В.А., Владимиров Ю.В. Дальнее поле внутренних волн, возбужденное равномерно и прямолинейно движущимся источником. Тез. докл. 2-го Всесоюз. съезда океанологов. Севастополь: Изд-во АН СССР, 1982, вып.2, с.4-6.

16. Грикуров В.Э. Явление перекрытия приакустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода. - Радиофизика, 1980, т.23, №9, с.1038-1045.

17. Keller J.B., Munk W.H. Internal wave wakes of a body moving in a stratified fluid. - The Physics of Fluids, 1970, v.13, №6, p.1425-1431.

18. Докучаев В.П., Долина И.С. Излучение внутренних волн источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости. - Изв. АН СССР. ФАО, 1977, т.13, №6, с.655-663.

19. Стурова И.В. Внутренние волны, генерируемые локальными источниками в линейно-стратифицированной жидкости конечной глубины. - ПМТФ, 1978, №3, с.61-69.

20. Стурова И.В., Сухарев В.А. Генерация внутренних гравитационных волн в термоклине. - Изв. СО АН СССР. Сер. техн.наук, 1980, №2, с.136-142.

21. Боровиков В.А., Владимиров Ю.В., Кельберг М.Я. Асимптотики полей внутренних волн, возбужденных импульсными источниками. - В кн.: Тез. докл. 3-й дальневосточной акустич. конф. "Человек и океан", ч.1, с.72-75. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1982.

22. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flows. - J. Fluid Mech., 1961, v.10, pt.4, p.496.

23. Bell T.H. Effects of Shear on the Properties of Internal Gravity Wave Modes. - Deutsche Hydrographische Zeitschrift, 1974, Jahrgang 27, Heft 2, p.57-62.

24. Санников В.Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости. - В кн.: Теоретические исследования волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1983, с.68-76.

РАЗВИТИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ

С.В.Нестеров

Волновые процессы в океане развиваются на фоне других движений океанических вод, которые, в свою очередь, являются нестационарными, причем характерные временные масштабы нестационарности могут быть как больше, так и меньше периодов волновых движений. В связи с этим классические гидродинамические модели волновых движений должны быть изменены таким образом, чтобы учесть этот фон.

Ниже дается обобщение модели Кельвина [1], объясняющей образование волн на поверхности моря под действием ветра, на основе которого удастся учесть как медленные изменения, так и быстрые осцилляции относительной скорости потоков двух соприкасающихся жидкостей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая задача ставится следующим образом. Пусть имеются два расположенных друг над другом слоя идеальной жидкости, верхний из которых имеет плотность ρ_1 , а нижний — $\rho_2 > \rho_1$. Оба слоя неограниченно простираются в горизонтальных направлениях, а глубины их бесконечны. На частицы обоих слоев жидкости действует сила тяжести, направленная вертикально вниз, а также силы поверхностного натяжения.

Пусть, кроме того, на частицы верхнего слоя жидкости в направлении вдоль поверхности раздела действует массовая сила, величина которой не зависит от координат, но изменяется с течением времени по закону $f(t)$. Движение жидкости

будем считать двумерным и введем декартову прямоугольную систему координат XOY , направив ось y вдоль границы раздела, а ось x вертикально вверх.

Обозначим через u_i, v_i соответственно горизонтальные и вертикальные компоненты скоростей верхней ($i=1$) и нижней ($i=2$) жидкостей, через p_i — давление и через q — ускорение силы тяжести. Тогда уравнения движения и неразрывности для первого слоя записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + f(t), \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} - g, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

для второго слоя

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y} - g; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Системы уравнений (1) и (2) имеют следующие частные решения:

$$u_1 = U(t) = \int_0^t f(t) dt + U_0; \quad v_1 = 0; \quad p_1 = -\rho_1 g y + \varepsilon(t),$$

$$u_2 = v_2 = 0; \quad p_2 = -\rho_2 g y + c(t),$$

где $\varepsilon(t)$ — произвольная функция времени. Этими решениями описывается такое движение, при котором первая жидкость движется с переменной скоростью $U(t)$ вдоль оси x , вторая неподвижна, а граница раздела совпадает с осью x . Будем считать такое движение основным, причем примем, что $U(0) = U_0 \neq 0$.

Предположим, что на это основное движение наложены малые синусоидальные возмущения, имеющие характер волн заданной длины λ , распространяющихся вдоль оси x и затухающих при $y \rightarrow \pm \infty$. Эти возмущения приведут к отклонению границы раздела от оси x . Величину отклонения возмущений границы раздела обозначим через $\eta(x, t)$. Если бы функция $U(t)$ была константой, меньшей по величине соответствующей

критической скорости, то для данного x возвышение $\eta(x, t)$ было бы простой гармонической функцией времени. Если $U(t)$ изменяется во времени, то $\eta(x, t)$ может зависеть от времени по более сложному закону. В частности, амплитуда возвышения может оказаться монотонно возрастающей функцией времени даже в докритическом режиме. Определим функцию $\eta(x, t)$, предполагая, что возмущения потенциальны, а скорости жидкостей в возмущенном движении малы по сравнению с $U(t)$.

Обозначим через $\Phi_1(x, y, t)$ и $\Phi_2(x, y, t)$ потенциалы скоростей возмущенного движения первой и второй жидкостей соответственно. Функции Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi_{1,2} = 0. \quad (3)$$

На поверхности раздела $\eta(x, t)$ должны выполняться кинематические условия

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U(t) \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right]_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (4)$$

а также динамическое условие, состоящее в том, что разность давлений в жидкостях равна поверхностному натяжению на границе раздела:

$$\left[\rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_1 U(t) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right]_{y=0} + (\rho_2 - \rho_1) g \eta - \Gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

где Γ - коэффициент поверхностного натяжения.

Учитывая отмеченный выше волновой характер возмущения и поведение $\Phi_{1,2}$ при $y \rightarrow \pm \infty$, ищем решение краевой задачи (3)-(5) в виде

$$\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1(t) \exp(ikx - ky); \quad \Phi_2 = \tilde{\Phi}_2(t) \exp(ikx + ky); \quad \eta(x, t) = \tilde{\eta}(t) \exp(ikx); \quad \kappa = 2\pi/\lambda. \quad (6)$$

Подстановка функций (6) в условия (4)-(5) и исключение функций $\tilde{\Phi}_{1,2}(t)$ приводит к следующему уравнению второго порядка относительно $\tilde{\eta}(t)$:

$$(\rho_1 + \rho_2) \frac{d^2 \tilde{\eta}}{dt^2} + 2ik\rho_2 U(t) \frac{d\tilde{\eta}}{dt} + \left[g\kappa(\rho_2 - \rho_1) + \kappa^3 \Gamma - \kappa^2 \rho_1 U^2(t) + ik\rho_1 \frac{dU}{dt} \right] \tilde{\eta} = 0. \quad (7)$$

Подстановкой $\tilde{\eta} = \tilde{z}(t) \exp \left[-\frac{ik\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \int_0^t U(t) dt \right]$ уравнение (7)

приводится к виду

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \xi^2(t) Z = 0, \quad (8)$$

где

$$\xi^2 = \frac{g\kappa(\rho_2 - \rho_1) + \kappa^3 T}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\kappa^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} U^2(t). \quad (9)$$

Сформулируем для функции $Z(t)$ начальные условия. Примем, что в начальный момент времени скорость потока меньше критической, т.е. выполняется неравенство $U_0^2 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left[(\rho_2 - \rho_1) \frac{g}{\kappa} + T \right]$.

Введя обозначение $\omega_0 = \xi(0)$, где ω_0 – вещественное число, будем искать такое решение уравнения (8), которое удовлетворяет начальным условиям

$$Z(0) = A_0; \quad \frac{dZ}{dt}(0) = -i\omega_0 A_0. \quad (10)$$

Смысл этих условий заключается в том, что если бы функция $U(t)$ была тождественно равна константе U_0 , то под действием возмущений в положительном направлении оси x распространялась бы волна с амплитудой $A_0 = \text{const}$ и частотой ω_0 относительно наблюдателя, перемещающегося по оси x со скоростью $\frac{\rho_1 U_0}{\rho_1 + \rho_2}$.

Исследование решений уравнения (8) проведем, рассматривая несколько случаев зависимости функции $U(t)$ от времени.

2. МЕДЛЕННОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Пусть функция $U(t)$ изменяется медленно во времени по сравнению с решениями $Z(t)$. Воспользовавшись методом усреднения [2] и учтя начальные условия (10), в первом приближении получим

$$Z(t) = A_0 \sqrt{\frac{\xi(0)}{\xi(t)}} \exp \left[-i \int_0^t \xi(t) dt \right]. \quad (11)$$

Соответственно получаем приближенное выражение для отклонения границы раздела:

$$\eta(x, t) = A_0 \sqrt{\frac{\xi(0)}{\xi(t)}} \exp \left\{ i \left[\kappa x - \int_0^t \left(\frac{\kappa \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} U(t) + \xi(t) \right) dt \right] \right\}. \quad (12)$$

Из этой формулы с учетом (9) следует, что если скорость $U(t)$ воздушного потока с течением времени увеличивается, то даже тогда, когда эта скорость меньше критической, амплитуда волн на поверхности раздела возрастает, а их частота уменьшается.

Формулы (11) и (12) перестают быть справедливыми в окрестности критической точки, когда $\xi(t_{kp}) = 0$. В принципе асимптотические методы позволяют найти $Z(t)$ и для этого случая, однако получающиеся формулы оказываются малообозримыми. Чтобы выполнить исследование до конца, зададимся определенным законом изменения скорости во времени, полагая

$$U(t) = U_0 \sqrt{1 + \gamma t}, \quad (13)$$

где γ - некоторая константа. В этом случае функция $\xi(t)$ принимает вид $\xi(t) = \sqrt{\omega_0^2 - \mu t}$, где $\mu = \frac{\rho_1 \rho_2 k^2 U_0^2 \gamma}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$. Уточним сделанное выше предположение о медленности изменения функции $U(t)$ во времени. Если считать U_0 заданной, то в силу (13) справедливость этого предположения должна обеспечиваться малостью γ . Потребуем, чтобы величина γ была столь малой, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega_0}{\mu} \gg 1. \quad (14)$$

При выполнении неравенства (14) решение уравнения (8), удовлетворяющее поставленным выше начальным условиям, имеет вид

$$Z(t) = \sqrt{\frac{\pi \omega_0}{3\mu}} \exp\left[-i\left(\alpha - \frac{5}{12}\pi\right)\right] A_0 H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{2}{3} \frac{\xi^3(t)}{\mu}\right), \quad (15)$$

где $H_{1/3}^{(1)}$ - функция Ханкеля порядка $1/3$ первого рода. Заметим, что для скоростей $U(t)$, далеких от критической, справедливо неравенство

$$\frac{2}{3} \frac{\xi^3(t)}{\mu} \gg \frac{1}{3}. \quad (16)$$

Поэтому функцию Ханкеля в уравнении (15) можно заменить ее асимптотическим выражением для больших значений аргумента, после чего для $Z(t)$ получится формула

$$Z(t) = \sqrt{\frac{\xi(0)}{\xi(t)}} A_0 \exp\left\{i \frac{2}{3\mu} \left[\xi^3(t) - \xi^3(0)\right]\right\}. \quad (17)$$

Такая же формула получилась бы и из выведенной для общего случая формулы (11) после подстановки ее в (13). Для скоростей $U(t)$, близких к критической, можно считать выполненным неравенство

$$\frac{2}{3} \frac{\xi^3(t)}{\mu} \ll \frac{1}{3}. \quad (18)$$

Поэтому функцию Ханкеля в формуле (15) можно заменить ее асимптотическим выражением для малых значений аргумента, после чего для $Z(t)$ получится формула

$$Z(t) \approx \frac{i\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi} 3^{1/6}} \cdot \frac{\xi^{1/2}(0)}{\mu^{1/6}} A_0 \exp \left[-i \left(\alpha - \frac{5}{12} \pi \right) \right]. \quad (19)$$

Отсюда видно, что амплитуда волн возмущения при подходе скорости воздушного потока к критической изменяется в N раз, где

$$N = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi} 3^{1/6}} \cdot \frac{\xi^{1/2}(0)}{\mu^{1/6}} \approx 1,26 \frac{\xi^{1/2}(0)}{\mu^{1/6}}. \quad (20)$$

Прежде чем анализировать выражение (20), рассмотрим физический смысл параметра γ . Из формулы (13) при $t_1 = 1/\gamma$ имеем $U(t_1) = \sqrt{2} U_0$, т.е. обратная величина $1/\gamma$ равна времени, за которое скорость воздушного потока превысит свое исходное значение U_0 в $\sqrt{2}$ раз. Подставив в (20) выражение для μ , придадим этой формуле следующий вид $N(k, \gamma) = 1,26 \frac{n(k)}{\gamma^{1/6}}$, где

$$n(k) = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^{1/12}}{(\rho_1 \rho_2 U_0^2)^{1/6}} \left[g(\rho_2 - \rho_1) k^{-1/3} + T k^{5/3} - \frac{\rho_1 \rho_2 U_0^2}{\rho_1 + \rho_2} k^{2/3} \right]^{1/4}$$

Введем обозначение $k_0 = \frac{1}{5T(\rho_1 + \rho_2)} \left\{ \rho_1 \rho_2 U_0^2 + \left[\rho_1^2 \rho_2^2 U_0^4 + 5gT(\rho_2 - \rho_1)^2 \right]^{1/2} \right\}$

Функция $N(k, \gamma)$ при фиксированном γ изменяется в зависимости от k следующим образом. При $0 < k < k_0$ она убывает, при $k > k_0$ возрастает, при $k = k_0$ $N(k, \gamma)$ минимальна. Для границы воздух - вода имеем:

$$\begin{aligned} k_0 &= 1,63 \text{ см}^{-1} & \lambda_0 &= 2\pi / k_0 = 3,85 \text{ см} & \text{при } U_0 &= 0,1 \text{ м/с} \\ k_0 &= 1,64 \text{ см}^{-1} & \lambda_0 &= 2\pi / k_0 = 3,83 \text{ см} & \text{при } U_0 &= 0,5 \text{ м/с} \\ k_0 &= 1,67 \text{ см}^{-1} & \lambda_0 &= 2\pi / k_0 = 3,76 \text{ см} & \text{при } U_0 &= 1,0 \text{ м/с} \end{aligned}$$

Всегда имеются два волновых числа k_1 и k_2 , удовлетворяющих условию $k_1 < k_0 < k_2$, таких, что $N(k_1, \gamma) = N(k_2, \gamma)$. Это означа-

ет, что при заданных U_0 , γ у двух волн с волновыми числами k_1, k_2 амплитуды при подходе скорости потока к соответствующим критическим значениям U_1 и U_2 изменяются в одно и то же число раз.

Если же считать фиксированным волновое число k , а переменным параметр γ , то $N(k, \gamma)$ возрастает при уменьшении γ . Время перехода из начального состояния в критическое определяется из условия $\xi(\tau) = 0$ и с учетом (9) может быть представлено формулой

$$\tau = \frac{\xi^2(0)}{\mu} = - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\gamma \rho_1 \rho_2 U_0^2} m(k). \quad (21)$$

где

$$m(k) = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{k} + T k - \frac{\rho_1 \rho_2 U_0^2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Функция $m(k)$ убывает при $k < \left[\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{T} \right]^{1/2}$ и возрастает при $k > \left[\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{T} \right]^{1/2} = \tilde{k}$, при $k = \tilde{k}$ имеет минимум (для границы воздух - вода $\lambda_{\text{мин}} = 1,73$ см). Всегда имеются два волновых числа k_3 и k_4 , удовлетворяющих условию $k_3 < \tilde{k} < k_4$, таких, что $m(k_3) = m(k_4)$. Это означает, что при заданных начальной скорости U_0 и параметре γ существуют две волны с разными волновыми числами, достигающие критического режима за одинаковое время. Так как, вообще говоря, из равенства $m(k_3) = m(k_4)$ не следует $n(k_3) = n(k_4)$, то амплитуды волн, одновременно достигающих критических точек, будут возрастать при подходе к этим точкам не в одинаковое число раз. Таким образом, ускорение потока еще до прихода в критический режим производит селекцию волн по волновым числам.

Проиллюстрируем рост амплитуды волн возмущения из-за ускорения воздушного потока следующим числовым примером. Положим $k = \pi$ см $^{-1}$ ($\lambda = 2$ см), $U_0 = 1$ м/с, $\rho_2 = 1$ г/см 3 , $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 770$, $T = 74$ дин/см, $\gamma = 1$ с $^{-1}$. По формуле (20) получим, что амплитуда волн возмущения при подходе к критической точке увеличится в $N = 4,8$ раза, время τ перехода в критический режим равно 40 с. Если принять $\gamma = 0,1$ с $^{-1}$, а остальные параметры не менять, то $N = 7,4$, $\tau = 400$ с. Заметим, что приведенные значения N изменились бы весьма мало, если бы скорость U_0 была в два раза меньшей или большей.

Если же скорость воздушного потока превысит критическое значение, то из формулы (15) видно, что $|\xi(t)|$ экспонен-

диально растет при $t \rightarrow \infty$. Это представляет собой аналог обычной кельвиновской неустойчивости в закритической области.

Можно ожидать, что основные выводы, сформулированные выше для частного вида функции $U(t)$, подтвердятся и в общем случае, поскольку в окрестности критической точки весьма широкий класс функций может быть аппроксимирован выражением (13).

3. БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ПОТОК

Примем, что $U(t) = U_0(1 - \alpha \cos \Omega t)$, и будем считать период осцилляций потока малым по сравнению с характерным временем изменения $Z(t)$.

Введем малый параметр ϵ следующими формулами:

$$\epsilon = \frac{2\alpha \chi_1 U_0^2}{\Omega^2}; \quad \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} = \beta \epsilon^2, \quad (22)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{gK(\rho_2 - \rho_1) + \kappa^3 T}{\rho_1 + \rho_2} - \chi_1 U_0^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad \chi_1 = \frac{\kappa^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}; \quad \beta = O(1). \quad (23)$$

Такой способ определения малого параметра приводит к наиболее интересным, на наш взгляд, физическим результатам. Положив $\tau = \Omega t$, приведем уравнение (8) к виду

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \left[\beta \epsilon^2 - \epsilon \left(\cos \tau + \frac{\alpha}{4} \cos 2\tau \right) \right] Z = 0. \quad (24)$$

Для исследования решений этого уравнения применим метод усреднения [2], [3]. С помощью замены переменных

$$Z = \left[1 - \epsilon \left(\cos \tau + \frac{\alpha}{16} \cos 2\tau \right) \right] \theta; \quad \frac{dZ}{d\tau} = \epsilon \Psi + \epsilon \left(\sin \tau + \frac{\alpha}{8} \sin 2\tau \right) \theta$$

уравнение (24) приводится к системе двух уравнений первого порядка, записанных в стандартной форме:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \epsilon \Psi + \epsilon^2 \dots \quad (25)$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = -\epsilon \left(\sin \tau + \frac{\alpha}{8} \sin 2\tau \right) \Psi - \epsilon \left(\beta + \cos^2 \tau + \frac{5\alpha}{64} \cos \tau \cos 2\tau + \frac{\alpha^2}{64} \cos^2 2\tau \right) \theta + \dots$$

Усредняя систему (25) по явно входящему τ и ограничиваясь слагаемыми, содержащими ϵ в первой степени, получим сис-

тему первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \varepsilon \Psi, \\ \frac{d\Psi}{d\tau} &= -\varepsilon \left(\beta + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{128} \right) \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Основное движение потоков становится неустойчивым, когда $Z(t)$, а следовательно и функции $\Psi(\tau)$ и $\theta(\tau)$, являются возрастающими функциями времени. Из системы (26) следует, что $\Psi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ экспоненциально возрастают во времени, если выполняется неравенство

$$\beta + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{128} < 0. \quad (27)$$

Учтя введенные обозначения, найдем, что последнее неравенство выполняется при условии

$$\frac{2\omega^2}{\gamma_1} \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 - \frac{8\omega^2 \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{64}\right)}{\Omega^2}} \right]^{-1} < U_0^2 < \frac{2\omega^2}{\gamma_1} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{2} \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 - \frac{8\omega^2 \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{64}\right)}{\Omega^2} \right]^{1/2} \right\}^{-1}, \quad (28)$$

где $\omega^2 = [gk(\rho_2 - \rho_1) + k^3 T] / (\rho_1 + \rho_2)$.

Таким образом, при заданном волновом числе k критическое значение средней скорости потока оказывается ограниченным как снизу, так и сверху, в то время как в классической модели Кельвина-Гельмгольца критическое значение скорости ограничено только снизу. Далее, с увеличением амплитуды быстрых осцилляций, нижняя граница критического значения средней скорости убывает. Если считать, что $8\omega^2/\Omega^2 \ll 1$, то условие (28) принимает более простой вид

$$\frac{\omega^2}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} < U_0^2 < \frac{\Omega^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\gamma_1 \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{64}\right)}. \quad (29)$$

Из неравенства (29) следует, что наименьшее для всех волн возмущения критическое число $U_{0 \text{ min}}$ средней скорости для быстро осциллирующего потока примерно в $(1 + \alpha^2/2)^{1/2}$ раз меньше, чем наименьшее критическое значение U_{min} для стационарного потока. Так, если для воздушного потока, двигающегося над водой, $U_{\text{min}} = 6,46$ м/с, то $U_{0 \text{ min}} = 5,28$ м/с при $\alpha = 1$ и $U_0 = 3,73$ при $\alpha = 2$.

4. БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ПОТОК ПРИ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ РАВНОЙ НУЛЮ

Положим

$$U(t) = U_1 \cos \Omega t, \quad \varepsilon = \frac{\gamma_1 U_1^2}{8\Omega^2}; \quad \beta \varepsilon = \frac{2\omega^2 - \gamma_1 U_1^2}{8\Omega^2}, \quad (30)$$

где $\beta = U(t)$. Применяя к уравнению (8) метод усреднения, подобно тому как это было изложено выше, найдем, что основное движение будет неустойчивым, если $\beta + 1/2 < 0$. Последнее условие в силу формул (30) выполняется при U_1^2 , удовлетворяющем неравенствам

$$\frac{4\omega^2}{\gamma_1} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{2\Omega^2}} \right]^{-1} < U_1^2 < \frac{4\omega^2}{\gamma_1} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{2\Omega^2}} \right]^{-1} \quad (31)$$

Здесь также существует критическое значение квадрата U_1^2 , ограниченное как снизу, так и сверху. Если считать, что $\omega^2/2\Omega^2 \ll 1$, то неравенства (31) упрощаются:

$$\frac{2\omega^2}{\gamma_1} < U_1^2 < \frac{16\Omega^2}{\gamma_1}. \quad (32)$$

Следует особо подчеркнуть, что потеря устойчивости границы раздела двух жидкостей, согласно (31)–(32), может наступить тогда, когда отсутствует среднее во времени течение.

Все результаты, найденные для того случая, когда один слой жидкости движется относительно другого с ускорением, не могут быть получены на основе классической модели Кельвина–Гельмгольца. В случае медленного монотонного ускорения амплитуда возмущения границы раздела начинает возрастать еще до перехода в критический режим. Быстрые осцилляции скорости одного слоя относительно другого приводят к понижению среднего значения критической скорости по сравнению с классическим случаем Кельвина–Гельмгольца.

Л и т е р а т у р а

1. Kelvin W. On stationary waves in flowing water. – Phil. Mag., 1872, ser.4, p.42.
2. Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. – УМН, 1962, т.17, №6, с.1541.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963

ЛИНЕЙНОЕ ОПИСАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ (КОЛЛАПСА) СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВОЗМУЩЕНИЙ ДНОРОДНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В.А.Городцов, Э.В.Теодорович

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди процессов, формирующих микроструктуру стратифицированных жидкостей и волновые поля в них, важное место занимает "коллапс" областей ("пятен") перемешанной жидкости. Начальное возмущение исходной равновесной стратификации релаксирует при коллапсе с растеканием жидкости в горизонтальных направлениях и излучением переносящих завихренность внутренних волн в окружающую среду.

Начиная с работы [1], поставившей вопрос о коллапсе в стратифицированных жидкостях, количество работ на эту тему быстро росло. Среди них важное место заняло экспериментальное исследование [2], утвердившее в последующей литературе выделение трех стадий в развитии перемешанных пятен: нестационарной начальной и стационарных основной и заключительной вязкой. В рамках этой классификации возникла на первый взгляд законченная картина эволюции пятен перемешанной жидкости [3], опирающаяся на упрощенный качественный анализ начальной и основной стадий [4,5], линейные теории начальной стадии [6-10] и экспериментально подтвержденную теорию заключительной стадии [11,12]. Множество численных исследований первых двух стадий коллапса [13-22] также не противоречило этой картине. Лишь некоторое несоответствие теорий эксперименту [2] было в отношении скорости растекания жидкости на начальной стадии.

Долгое время не обращалось должного внимания на предельно вырожденный характер ситуации, которой касалась работа [2] и для которой могла быть справедливой утвердившаяся классификация стадий коллапса. Вырожденность заключалась в рассмотрении [2] малого по сравнению с вертикальным размером бассейна коллапсирующего пятна ("безграничная жидкость") при линейной стратификации по вертикали (почти однородно стратифицированная жидкость, $N = \text{const}$) и полном начальном перемешивании в пятне (отсутствие стратификации внутри). При нарушениях этих упрощающих условий, которые часто имеют место в реальных ситуациях, развитие коллапса может протекать совершенно иначе, как было продемонстрировано в работах [23,24].

Когда размеры пятна превышали характерный вертикальный масштаб изменения стратификации (почти "мелкая вода") [23], ведущую роль при коллапсе играли солитоны внутренних волн. Это совершенно меняло характер эволюции пятна из-за частичного переноса перемешанной жидкости солитонами. Согласно [24] взаимодействие солитоноподобных волн с перемешанной жидкостью существенно изменяло основную стадию коллапса и при относительной малости пятна по сравнению с внешним масштабом (по крайней мере, при отношениях до 0,2).

Наконец, стратификация внутри перемешанных пятен должна приводить к модификации заключительной стадии коллапса. Как было показано в работе [25], она может вообще практически отсутствовать в случае стратифицированных пятен.

Таким образом, современное состояние вопроса требует как расширения круга исследований, так и дальнейшей проработки упрощенных модельных подходов. Ниже ограничимся обсуждением результатов одного из таких подходов, а именно линейной теории начальной стадии коллапса в безграничной однородно стратифицированной жидкости. Такая модель интересна с точки зрения оценки излучения внутренних волн, поскольку "большая часть энергии вкладывается в волны на начальной стадии коллапса" [24]. Некоторые результаты в рамках этой линейной теории были получены в работе [8], но здесь они существенно расширены с целью анализа таких вопросов, как влияние начальных движений на коллапс, роль размерности задачи, влияние распределений начальных возмущений внутри пятен, характер передачи энергии из пятен во внешнюю волновую зону и перераспределение ее из потенциальной в кинетическую и обратно.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЯТЕН (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Возмущения скорости $\vec{v}(\vec{r}, t)$, плотности $\rho(\vec{r}, t)$ и давления $p(\vec{r}, t)$ в безграничной несжимаемой жидкости с $N = \text{const}$ в линейном приближении можно выразить следующим образом при $t > 0$ через фурье-образы начальных возмущений (предполагая $[\nabla_{\vec{r}} \vec{v}(\vec{r}, 0)] = 0$) [26]:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ \rho_0 \vec{v} \end{pmatrix} = \int \frac{d^n \kappa}{(2\pi)^n} \left\{ \rho(\vec{\kappa}, 0) \begin{pmatrix} -\kappa^2 \frac{d}{dt} \\ i g \kappa_z \frac{d}{dt} \\ [\vec{\kappa} [\vec{\kappa} \vec{g}]] \end{pmatrix} + \rho_0 \vec{v}(\vec{\kappa}, 0) \begin{pmatrix} (N\kappa/g)^2 g \\ -i \frac{N^2}{g} \kappa_z \vec{g} \\ -\kappa^2 \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \right\} D(\vec{\kappa}, t) e^{i\vec{\kappa}\vec{r}}; \quad (1)$$

$$D(\vec{\kappa}, t) = -\frac{\sin(Nt \kappa_h / \kappa)}{N \kappa_h \kappa}; \quad \bar{\alpha}_h \equiv \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} \vec{g}) \vec{g} / g^2.$$

В частности, для начальных плоских ($n=2$) возмущений вида

$$\rho(\vec{r}, 0) = -\varepsilon \frac{\rho_0 N^2}{g} x f_1(r); \quad u(\vec{r}, 0) = \omega_0 x f_2(r); \quad w(\vec{r}, 0) = -\omega_0 x f_2(r) \quad (2)$$

при использовании полярных координат ($x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, $\kappa_{\pm} = \kappa \cos \theta'$, $\kappa_z = \kappa \sin \theta'$) находим

$$\rho = \frac{\rho_0 N^2}{2g} \int_0^{\infty} d\tau' \tau'^{\hat{L}_1} I_1; \quad p = \frac{\rho_0 N^2}{2} \int_0^{\infty} d\tau' \tau'^{\hat{L}_2} I_2; \quad u = -\frac{N}{2} \int_0^{\infty} d\tau' \tau'^{\hat{L}_2} I_1;$$

$$w = -\frac{g}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \hat{L}_1 \equiv \frac{\omega_0}{N} \frac{\partial f_2}{\partial \tau'} + \frac{\varepsilon}{Nt} \frac{\partial f_1}{\partial \tau'} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad (3)$$

$$\hat{L}_2 \equiv \frac{\omega_0}{N^2 t} \frac{\partial f_2}{\partial \tau'} \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial \tau'} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial (Nt)^2} \right),$$

причем разрывные функции $I_1(r'/r, Nt, \theta)$ и $I_2(r'/r, Nt, \theta)$ могут быть представлены интегралами от произведений функций Бесселя

$$I_n = r'^{2-n} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa^{1-n} J_2(\kappa r') \sum_{\pm} (\pm 1)^n J_0(R_{\pm}),$$

$$R_{\pm}^2 = \kappa^2 r^2 + N^2 t^2 \pm 2 \kappa r N t \cos \theta \quad (4)$$

или в виде рядов по произведениям тригонометрических функций $c_n = \cos n\theta$, цилиндрических функций $J_n = J_n(Nt)$ и полиномов Якоби $\rho_n^{(\ell, m)} = \rho_n^{(\ell, m)}(1 - 2r^2/r^2)$:

$$\begin{aligned} -I_1 &= h(r'-r) \frac{4r}{r'} c_1 + h(r-r') 4 \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{(2,0)} J_{2n+1} c_{2n+1}; \\ I_2 &= h(r'-r) \left[\left(1 - \frac{r'^2}{r^2}\right) J_0 + \frac{r^2}{r'^2} J_2 c_2 \right] + \\ &+ h(r-r') \frac{r'^2}{r^2} \left[J_2 c_2 + 2 \left(1 - \frac{r'^2}{r^2}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{n-2}^{(2,1)} J_{2n} \frac{c_{2n}}{n-1} \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Из этого решения следует, что вблизи оси симметрии пятен (при $f_i(0) \neq 0, \infty$) возмущения плотности осциллируют и затухают

$$\rho|_{r \rightarrow 0} \approx \frac{2\rho_0 N^2}{g} J_1(Nt) \left[f_2(0) \frac{\omega_0}{N} x - f_1(0) \frac{\varepsilon x}{Nt} \right], \quad (6)$$

причем возмущения, обязанные начальным движениям, затухают медленнее (как $t^{-1/2}$ при $Nt \gg 1$), чем возмущения вследствие начальных искажений поля плотности ($\sim t^{-3/2}$ при $Nt \gg 1$).

Вдали от пятен при больших временах ($Nt|\sin \theta| \gg 1$) возмущения плотности имеют следующее асимптотическое поведение (для простоты $f_1(r) = f_2(r)$)

$$\begin{aligned} \rho \approx \frac{\rho_0 N^2 |\cos \theta|}{2\pi g r} F\left(\frac{Nt \cos \theta}{r}\right) \left[\varepsilon \sin(Nt \sin \theta) - \frac{\omega_0 \cos(Nt \sin \theta)}{N \cos \theta} \right] \\ F(\kappa) = -\kappa \int_0^{\infty} d\tau \tau^2 f(\tau) J_1(\kappa \tau), \quad (7) \end{aligned}$$

так что вдали от пятна величина возмущения при $\omega_0 \sim \varepsilon N$ либо зависит от механизма возбуждения (имеются лишь угловые и фазовые различия). Однако если $\omega_0 \gg \varepsilon N$, то начальные движения будут определенно влиять и на дальнюю зону.

На важность начальных ламинарных и турбулентных движений при коллапсе указывалось в работах [18, 27]. Еще раньше они обсуждались при анализе функции Грина [6].

Решение задачи выше фактически свелось к свертке производных функции распределения начальных возмущений с частным решением для цилиндрического пятна конечного радиуса $r = r_0$.

Для цилиндрического пятна, для которого $f_1(r) = f_2(r) = h(r_0 - r)$, возмущения плотности во всей внутренней области (при $r < r_0$) заухают так же, как вблизи его оси, т.е. как в формуле (6). На границе пятна $r = r_0$ сохраняется осциллирующий скачок плотности

$$[\rho] = \frac{\rho_0 N^2 r_0}{g} \left[\epsilon \sin \theta \cos(Nt \cos \theta) - \frac{\omega_0}{N} \sin(Nt \cos \theta) \right], \quad (8)$$

а в дальней зоне при больших временах справедлива асимптотика (7) с $F(\kappa) = -2\pi r_0^2 J_2(\kappa r_0)$, и возмущение представляет собой сумму сдвинутых по фазе колебаний с частотой внутренних волн $N \sin \theta$ с медленно меняющимися амплитудами, причем изменение определяется групповой скоростью $N r_0 \cos \theta$ для внутренних волн с длиной волны порядка r_0 .

Простой результат вне пятна получается для вертикального направления

$$\rho(0, z, t) = \frac{2\rho_0 N^2}{g} \epsilon z \left[\frac{\lambda - 1}{Nt} J_1(Nt\lambda) + \frac{r_0^2}{z^2} J_0(Nt\lambda) \right], \lambda = \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right)^{1/2}, |z| > r_0, \quad (9)$$

и в дальней зоне ($|z| \gg r_0$) при $z^2 \gg r_0^2 Nt$ из него следует (ср. (7))

$$\rho(0, z, t) \approx \frac{\rho_0 N^2}{g} \epsilon z \left(\frac{r_0}{z}\right)^2 J_1'(Nt), \quad z^2 \gg r_0^2 Nt. \quad (10)$$

Радиальная компонента скорости и давление остаются непрерывными и при $r = r_0$ и принимают значения

$$v_r = \frac{2\epsilon r_0}{t} J_2(Nt) \cos 2\theta, \quad p = \frac{\epsilon \rho_0 N^2 r_0^2}{2} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial(Nt)^2}\right) J_2(Nt) \cos 2\theta, \quad r = r_0. \quad (11)$$

Отсюда видно, что при $Nt < 5,14$ жидкость "падает" внутрь пятна через угловые секторы $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ и $-3\pi/4 < \theta < -\pi/4$ и вытекает через боковые секторы. Затем происходят последовательные смены направления течения с постепенным убыванием амплитуды. В итоге суммарный массовый расход жидкости (на единицу длины образующей цилиндра) за время t через такой "насос" оказывается равным $2\rho_0 \epsilon r_0^2 (1 - 2J_1(Nt)/Nt)$. Колебания расхода при $Nt > 6$ становятся меньшими 10%.

Азимутальная скорость, как и плотность, герпит разрыв при $r = r_0$:

$$[v_\theta] = \omega_0 r_0 \cos(Nt \cos \theta) + \varepsilon N r_0 \sin \theta \sin(Nt \cos \theta), r = r_0. \quad (12)$$

Локализованному в цилиндрической области начальному распределению скоростей (2) с $f_2(r) = h(r_0 - r)$ соответствует начальное распределение завихренности в виде "вихревого шнура" $2\omega_0 h(r_0 - r)$ и компенсирующего "вихревого слоя" $-\omega_0 r_0 \delta(r - r_0)$. Для подобного начального сингулярного распределения завихренность во внешней области оказывается нарастающей со временем [28].

3. ПОЛЕ ПЛОТНОСТИ ПРИ КОЛЛАПСЕ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ПЯТЕН

Ограничиваясь рассмотрением начального возмущения плотности

$$\rho(\vec{r}, 0) = -\varepsilon \frac{\rho_0 N^2}{g} z f(r), \quad \vec{v}(\vec{r}, 0) = 0, \quad r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (13)$$

в сферических координатах ($x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$), выражение для плотности (1) можно представить в виде разложения в ряд по произведениям полиномов Лежандра $P_n = P_n(\cos \theta)$, полиномов Якоби $P_n^{(5/2, 0)} = P_n^{(5/2, 0)}(1 - 2r'^2/r^2)$ и функций Вебера $E_n = E_n(Nt)$:

$$\rho = \varepsilon \frac{\rho_0 N^2}{g} \int_0^\infty dr' r' \frac{df}{dr'} I_3(r'/r, Nt, \theta);$$

$$I_3 = h(r' - r) \frac{3r}{2r'} F_0 P_1 + h(r - r') \left(\frac{r'}{r}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2n + \frac{3}{2}\right) P_{2n+1} P_{n-1}^{(5/2, 0)} F_n;$$

$$F_n(Nt) = \int_0^\infty d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \cos(Nt \sin \theta') P_{2n+1}(\cos \theta');$$

$$F_0(Nt) = \frac{\pi}{Nt} E_2(Nt), \quad F_1(Nt) = -\frac{\pi}{4Nt} E_2(Nt) + \frac{5\pi}{4Nt} E_4(Nt), \dots \quad (14)$$

В случае шарового коллапсирующего пятна во внутренней области

$$\rho = -\frac{3\pi}{2} \frac{\rho_0 N^2}{g} \epsilon z \frac{E_2(Nt)}{Nt}, \quad r < r_0, \quad (15)$$

что совпадает с результатом из работы [8] и аналогично результату для плоской задачи (см. разд.2). Аналогия с решением плоской задачи имеется во всей ближней зоне. При $r=r_0$ также сохраняется скачок плотности:

$$[\rho] = \frac{\epsilon \rho_0 N^2 r_0}{g} \cos \theta \cos(Nt \sin \theta), \quad r=r_0. \quad (16)$$

Что касается дальнего волнового поля, то различие решений пространственной и плоской задач связано прежде всего с различием в их геометрической расходимости. Сравнивая изменения плотности вдоль вертикали, вне исходного шарового пятна получаем

$$\rho(0,0,z,t) = \frac{\rho_0 N^2}{g} \epsilon z \left[3 \int_0^{r_0/|z|} d\xi \xi^2 \cos(Nt \sqrt{1-\xi^2}) - \left(\frac{r_0}{|z|}\right)^3 \cos(Nt \sqrt{1-r_0^2/z^2}) \right], \quad (17)$$

и в дальней зоне ($|z| \gg r_0$) при $2\xi \equiv Nt r_0^2/z^2 \ll 1$ интеграл (его можно выразить через неполную функцию Вебера [29]) сводится к интегралам Френеля $S(\xi)$ и $L(\xi)$

$$\rho(0,0,z,t) \approx \frac{\rho_0 N^2}{g} \epsilon z \left(\frac{r_0}{|z|}\right)^3 \Phi(Nt, \xi), \quad \xi^2 \gg r_0^2;$$

$$\Phi \equiv \cos(Nt - \xi^2) - \frac{3}{2\xi^3} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} [L(\xi) \sin Nt - S(\xi) \cos Nt] - \xi \sin(Nt - \xi^2) \right\}, \quad (18)$$

$$\Phi \approx \cos Nt, \quad \xi \ll 1$$

Отсюда и из выражения (10) видно, что на большом удалении по вертикали имеет место квадратичное убывание возмущений плотности в пространственной задаче и линейное - в плоской.

4. БАЛАНС ЭНЕРГИИ ПРИ КОЛЛАПСЕ

В случае рассмотренной плоской задачи (см. разд.2) для потенциальной энергии возмущений во всем пространстве $\Pi_2(t)$ следует формула

$$\Pi_2(t) = \frac{1}{2} \Pi_2(0) \left[1 + \frac{J_1(2Nt)}{Nt} \right] + \frac{1}{2} K_2(0) [1 - J_0(2Nt)],$$

$$\Pi_2(0) = \frac{\pi}{2} \rho_0 N^2 \varepsilon^2 \int_0^\infty d\tau \tau^3 f_1^2(\tau), \quad K_2(0) = \pi \rho_0 \omega_0^2 \int_0^\infty d\tau \tau^3 f_2^2(\tau), \quad (19)$$

которая показывает, что в конечном итоге энергия начальных возмущений переходит в энергию внутренних волн, характеризующихся равномерным распределением потенциальной и кинетической энергий. При этом характерным временем релаксации энергии является половина периода плавучести.

Аналогично в случае пространственной задачи разд.3 имеем

$$\Pi_3(t) = \frac{1}{2} \Pi_3(0) \left[1 + \frac{3\pi}{2} \frac{E_2(2Nt)}{2Nt} \right], \quad \Pi_3(0) = \frac{2\pi}{3} \rho_0 N^2 \varepsilon^2 \int_0^\infty d\tau \tau^4 f_1^2(\tau). \quad (20)$$

Что касается изменений энергии в пределах исходного пятна $r \leq r_0$, то в отсутствие начальных движений находим

$$\Pi_{2r_0}(t) = \Pi(0) \left(\frac{2J_1(Nt)}{Nt} \right)^2, \quad K_{2r_0}(t) = 8\Pi(0) \left(\frac{J_2(Nt)}{Nt} \right)^2; \quad \Pi_{3r_0}(t) =$$

$$= \Pi(0) \left(\frac{3\pi}{2} \frac{E_2(Nt)}{Nt} \right)^2, \quad K_{3r_0}(t) = \frac{27\pi^2}{8} \Pi(0) \left| \frac{\partial}{\partial Nt} \frac{E_2(Nt)}{Nt} \right|^2 \quad (21)$$

и, принимая во внимание закон сохранения энергии $\Pi(0) = \Pi(t) + K(t)$, убеждаемся, что в плоской задаче "потенциальная энергия перемешанной области вначале растрачивается в равной мере на кинетическую энергию внутри и вне перемешанной области, а потенциальная энергия во внешней части жидкости на этой стадии коллапса не запасается" [19]. Действительно, из формулы (19) при $K(0) = 0$ и из (21) в пределе $Nt \rightarrow 0$ следует $K_2(t) = 2K_{2r_0}(t) = \frac{1}{4} \Pi_2(0) (Nt)^2$, и вплоть до $Nt \approx 2,5$ отношение K_2 / K_{2r_0} отклоняется от 2 не более чем на 10%. В трехмерном случае подобного точного равномерного распределения кинетической энергии уже нет, но справедливой обобщенная гипотеза Дюгана, согласно которой "для малых времен все движения внутри перемешанной области вызывают сопоставимые движения вне ее" [19]. Действительно, в трехмерной задаче при $Nt \rightarrow 0$ имеем $K_3(t)/K_{3r_0}(t) = 5/3$.

Таким образом, в рамках линейного модельного описания коллапса в однородно стратифицированной безграничной жид-

кости убеждаемся, что в ближней зоне очень быстро становятся преобладающими возмущения, связанные с начальными движениями в коллапсирующем пятне. Если эти движения достаточно интенсивны ($\omega_0 \gg \epsilon N$), то их влияние будет преобладающим над влиянием начального нарушения стратификации и в дальней волновой зоне. В пределах области исходного пятна согласно линейной теории течение имеет характер затухающих колебаний с частотой, не зависящей от направления, в то время как вдали от нее возмущения представляют собой внутренние волны. Из-за затухания колебаний в конечном итоге через область пятна "прокачивается" жидкость в объеме, сопоставимом с объемом пятна.

Поведение возмущений в ближней области в плоском и трехмерном случаях аналогично. В частности, в равной мере не "рассасываются" их скачки на резких границах пятен. В дальней волновой зоне амплитуды внутренних волн убывают быстрее в пространственном случае из-за большей геометрической расходимости.

Интересны различия в балансе энергии для пространственного и плоского случаев. На начальной стадии коллапса (до $Nt \approx 2,5$) во внешней по отношению к исходному пятну области происходит разгон жидкости без существенного преобразования энергии в потенциальную форму. Причем в плоском случае на этой стадии движения внутри и вне пятна характеризуются одинаковой кинетической энергией, а в пространственном более энергичны внутренние движения. В дальнейшем происходит выравнивание кинетической и потенциальной энергий.

Для рассмотренных аналитических решений характерно отсутствие рассасывания начальных скачков плотности и скорости и соответствующее аномальное поведение завихренности. Эти эффекты, по-видимому, связаны с произведенной линеаризацией и пренебрежением вязкостью в исходных уравнениях.

Л и т е р а т у р а

1. Schooley A.H., Stewart R.W. Experiments with self-propelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient.-J.Fluid Mech., 1963, v.15, N1, p.83.
2. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density-stratified medium. - J. Fluid Mech., 1969, v.35, N3, p.531.

3. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. 2-е изд. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 256 с.
4. Kao T.W. Principal stage of wake collapse in a stratified fluid: Two-dimensional theory. - *Phys. Fluids*, 1976, v.19, N8, p.1071.
5. Manins P.C. Mixed-region collapse in a stratified fluid. - *J. Fluid Mech.*, 1976, v.77, N1, p.177.
6. Koh R.C.Y. Transient motions induced by local distribution in a linearly density-stratified fluid. - *J. Hydraulic Res.*, 1971, v.9, N3, p.335.
7. Schooley A.H., Hughes B.A. An experimental and theoretical study of internal waves generated by the collapse of two-dimensional mixed region in a density gradient. - *J. Fluid Mech.*, 1972, v.51, N1, p.159.
8. Hartman R.J., Lewis H.W. Wake collapse in a stratified fluid: linear treatment. - *J. Fluid Mech.*, 1972, v.51, N3, p.613.
9. Никишов В.И., Стеценко А.Г. Образование внутренних волн, порождаемых схлопыванием однородного "пятна" в стратифицированной жидкости. - В кн.: Гидромеханика, 1975, №32, с.14.
10. Никишов В.И. К вопросу о генерации внутренних волн локальными возмущениями. - *Прикладная мех.*, 1981, т.17, №6, с.137.
11. Баренблатт Г.И. Динамика турбулентных пятен и интрузии в устойчиво стратифицированной жидкости. - *Изв. АН СССР. Физ.атм. и океана*, 1978, т.14, №2, с.195.
12. Зацепин А.Г. и др. Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости. - *Изв. АН СССР. Физ.атм. и океана*, 1978, т.14, №2, с.234.
13. Wessel W.R. Numerical study of a perturbation in an infinite density stratified fluid. - *Phys. Fluids*, 1969, N12, suppl.2, p.171.
14. Padmanabhan H. A numerical investigation of wake deformation in density stratified fluid. - *J. Eng. Math.*, 1970, v.4, N3, p.229.
15. Young J.A., Hirt C.W. Numerical calculation of internal wave motions. - *J. Fluid Mech.*, 1972, v.56, N2, p.265.
16. Orlanski I., Ross B.B. Numerical simulation of the generation and breaking of internal waves. - *J. Geophys. Res.*, 1973, v.78, N36, p.8808.

17. Кузнецов Б.Г., Черных Г.Г. Численное исследование поведения однородного "пятна" в идеальной стратифицированной по плотности жидкости. - ПМТФ, 1973, №3, с. 120 .
18. Васильев О.Ф. и др. Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде. - Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1974, №3, с.45.
19. Dugan J.P. Numerical results for laminar mixed region collapse in density stratified fluid. - Computers and Fluids, 1976, v.4, p.109.
20. Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде. - В кн.: Динамика сплошной среды, №47. Новосибирск, 1980, с.70.
21. Гушин В.А. Метод расщепления для решения задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. - Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1981, т.21, №4, с.1003.
22. Нартов В.П., Черных Г.Г. О численном моделировании течения, возникающего при коллапсе зоны смешения в стратифицированной среде: Препринт ИТПМ СО АН СССР, №15. Новосибирск, 1982. 34 с.
23. Maxworthy T. On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixed region in two and three dimensions. - J. Fluid Mech., 1980, v.96, N1, p.47.
24. Amen R., Maxworthy T. The gravitational collapse of a mixed region into a linearly stratified fluid. - J. Fluid Mech., 1980, v.96, N1, p.65.
25. Зацепин А.Г. О коллапсе стратифицированных пятен. - ДАН СССР, 1982, т.265, №2, с.460.
26. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости: Препринт ИПМ АН СССР, №114. М., 1978. 37 с.
27. Никишов В.И. Об одном эффекте в теории распространения внутренних волн в стратифицированной среде. - В кн.: Некоторые задачи механики сплошных сред. Киев, 1978, с.129.
28. Городцов В.А. Эволюция осесимметричных распределений завихренности в идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости (линейное описание). - Изв. АН СССР. ЛММ. 1983, т.47, №4, с.583.
29. Агрест М.М., Максимов М.З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М.: Атомиздат, 1965.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ В ЗАДАЧАХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

С.Я.Секерж-Зенькович

В данной статье речь пойдет об аналитических методах применительно к нелинейным задачам о внутренних волнах стратифицированной несжимаемой жидкости. Это чисто гидродинамические задачи. Но, на наш взгляд, постановка этих задач на настоящей школе представляет интерес по следующим соображениям. Во-первых, они отражают естественную логику развития самой гидродинамики, поскольку гидродинамическая теория движений стратифицированной жидкости еще очень плохо разработана и в курсах гидродинамики содержатся только ее азы. Это относится и к внутренним волнам, особенно нелинейным. Во-вторых, волновые движения, о которых пойдет речь, могут быть реализованы, а частично уже реализованы в лабораторных экспериментах. В-третьих, выявленные особенности этих движений могут оказаться полезными при объяснении геофизических явлений и для технических приложений. В-четвертых, аналитические решения задач могут быть полезны для отработки численных методов решения прикладных геофизических задач.

В лекции А.М.Обухова, прочитанной на настоящей школе (см. [1]), были продемонстрированы возможности конечномерной аппроксимации в задачах геофизической гидродинамики. Построение решений рассматриваемых ниже задач также основывалось на надежном фундаменте методов нелинейной механики систем с конечным числом степеней свободы, что позволяло либо дать строго математическое обоснование используемого метода, либо надеяться на правильность результатов.

Каждая задача будет изложена по следующей схеме. Сначала формулируются гидродинамическая и соответствующая математическая задачи, затем будут выписаны модельные обыкновенные дифференциальные уравнения, типичные для задач теории колебаний, отражающие основные нелинейные особенности волновой задачи, и показано, как такие уравнения можно решать; наконец, кратко о схеме решения гидродинамической задачи и об окончательных результатах.

Первая задача посвящена установившимся прогрессивным волнам в двухслойной жидкости конечной глубины со свободной поверхностью.

Рассмотрим два расположенных друг над другом слоя жидкостей плотностью ρ_1 и $\rho_2 > \rho_1$. Условимся, что индекс 1 присваивается величинам, относящимся к верхней жидкости, индекс 2 – к нижней. Считаем, что слои простираются неограниченно в горизонтальном направлении, но имеют конечные глубины h_1 и h_2 . Нижний слой ограничен снизу горизонтальным дном, верхний имеет свободную поверхность, на которой давление предполагается постоянным. Ставится задача: найти и исследовать такое не зависящее от времени безвихревое в каждом слое движение, при котором линия раздела между жидкостями и свободная поверхность имеют форму неподвижных волнистых кривых ϑ и ϑ_0 с общим периодом λ . Введем комплексные переменные $z_k = x_k + iy_k$, направляя ось x вдоль среднего уровня границы раздела, а ось y через одну из вершин кривой ϑ вертикально вверх. Введем комплексные потенциалы ψ_k и скорости $d\psi_k/dz_k$:

$$\psi_k = \varphi_k + i\psi_k; \quad \frac{d\psi_k}{dz_k} = -U_k + iV_k, \quad U_k = -\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_k},$$

$$V_k = -\frac{\partial\psi_k}{\partial y_k}$$

и будем считать ψ_k независимыми переменными, а $\frac{d\psi_k}{dz_k}$ – искомыми функциями. Тогда область течения, занятая одной волной, отобразится в плоскостях ψ_k на два прямоугольника $\{0 \leq \varphi_1 \leq \lambda_1, 0 \leq \psi_1 \leq 0\}$, $\{0 \leq \varphi_2 \leq \lambda_2, 0 \leq \psi_2 \leq q_2\}$, где λ_k – периоды функций ψ_k , отвечающие периоду λ , плоскости z_k , $(-\rho_1 q_1)$ и $\rho_2 q_2$ – расходы жидкостей через вертикальные сечения в каждом слое, причем $q_1 < 0$. Вводим новые независимые переменные ξ_k и искомые функции ω_k :

$$\mathcal{W}_k = \varepsilon \rho \frac{2\pi i \omega_k}{\lambda_k}, \quad \frac{d\omega_k}{dz_k} = -c_k \varepsilon \rho (-i\omega_k),$$

$$\omega_k = \varphi_k + i\tau_k, \quad \mathcal{W}_k = \tau_k \varepsilon \rho (i\theta_k),$$

где положительные постоянные c_k выбираются так, чтобы в разложениях $\omega_k(\mathcal{Z}_k)$ в ряды Лорана мнимые части свободных членов были равны нулю. Указанные прямоугольники отображаются на плоскости \mathcal{Z}_k на два кольца: $\{1 \leq r_1 \leq r_{10}, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi\}$ и $\{r_{20} \leq r_2 \leq 1, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi\}$. В результате замен переменных нелинейная задача в области с неизвестной границей на плоскости z_k свелась к задаче для колец на плоскости \mathcal{Z}_k .

Математическая задача заключается в отыскании сопряженных, гармонических в данных кольцах функций φ_k и τ_k , периодичных по θ_k с периодом 2π и удовлетворяющих на границах колец – окружностях радиусов r_{20} , 1 и r_{10} – следующим условиям, выводимым из кинематического требования, чтобы дно, граница раздела и свободная поверхность были линиями тока, и динамических условий непрерывности давления при переходе через границу раздела и постоянства давления на свободной поверхности:

$$\varphi_2(r_{20}, \theta_2) = 0; \quad \varphi_1(1, \theta_1) = \varphi_2(1, \theta_2);$$

$$m_2 \varepsilon \rho \left[2\tau_2(1, \theta_2) \right] - m_1 \varepsilon \rho \left[2\tau_1(1, \theta_1) \right] - 2\rho \int_0^{\theta_1} \varepsilon \rho [-\tau_1(1, \theta)] \times \\ \times \sin \varphi_1(1, \theta) d\theta = \text{const};$$

$$\varepsilon \rho \left[2\tau_1(r_{10}, \theta_1) \right] - 2\rho \int_0^{\theta_1} \varepsilon \rho [-\tau_1(r_{10}, \theta)] \sin \varphi_1(r_{10}, \theta) d\theta = \text{const}, \quad (1)$$

где $m_k = \frac{\rho_k}{\rho_2 - \rho_1}$, $\rho = \frac{\rho \lambda}{2\pi c_1^2}$.

Здесь учтено, что в каждом слое имеет место интеграл Бернулли

$$\rho_k = \rho \rho_k \mathcal{W}_k + \frac{1}{2} \rho_k \left| \frac{d\omega_k}{dz_k} \right|^2 + \text{const}.$$

Для нахождения функций φ_k и τ_k применим метод малого параметра, но сразу отметим особенность данной задачи, за-

ключающуюся в том, что в ней нет малых параметров, естественно появляющихся из исходной гидродинамической задачи. Поэтому малый параметр введем искусственно, предположив, что разыскиваются нелинейные волны, близкие к соответствующим линейным. Так было впервые сделано для однородной жидкости А.И.Некрасовым [2] и чуть позже Т.Леви-Чивита [3], а для двухслойной – Н.Е.Кочиним [4] в предположении, что верхняя жидкость ограничена не свободной поверхностью, а твердой крышкой, а также С.Р.П.Синха [5] – для бесконечно глубокой нижней жидкости. При этом в работе [4] содержится доказательство методом мажорант сходимости построенных рядов, а в краткой заметке [5] написано, что если воспользоваться выведенными в работе [4] оценками, то можно доказать сходимость рядов и в задаче со свободной поверхностью, что неверно.

Поясним существо применения метода малого параметра в подобных задачах на следующем примере системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим так называемую систему Ляпунова [6]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y + X(x, y), & \omega = \text{const}, \\ \frac{dy}{dt} = \omega x + Y(x, y), & X = a_2 x^2 + b_2 y^2 + \dots, \quad Y = c_2 x^2 + d_2 y^2 + \dots, \end{cases}$$

где X и Y – аналитические функции, разлагающиеся в степенные ряды указанного вида, т.е. начинающиеся с членов второй степени относительно x и y . Предположим еще, что система имеет аналитический первый интеграл вида $H = A x^2 + B y^2 + \dots = \mu^2 = \omega \text{const}$. Введем начальные условия

$$x(0) = \epsilon, \quad y(0) = 0.$$

Тогда, если нелинейные члены в системе отсутствуют, т.е. $X = Y = 0$, решение системы таково:

$$x(t) = \epsilon \cos \omega t, \quad y(t) = \epsilon \sin \omega t,$$

т.е. оно периодически с периодом $2\pi/\omega$.

Для полной системы имеет место теорема Ляпунова. Если значение ϵ достаточно мало (т.е. начальные данные малы), то все решения системы являются периодическими функциями t , причем период T – четная аналитическая функция μ , стремящаяся к $2\pi/\omega$ при $\mu \rightarrow 0$, а сами решения – аналитические функции ϵ , т.е. начального отклонения переменной x .

Итак, в качестве малого параметра в системах Ляпунова можно взять амплитуду решения линейной системы и искать периодические решения системы в виде рядов по степеням ϵ . Однако, если отыскивать коэффициенты этих рядов чисто формально, то можно прийти к ошибочным результатам. В самом деле, будем искать $x(t)$ и $y(t)$ в виде

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n x_n(t), \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n y_n(t).$$

Подставляя эти ряды в систему и сравнивая члены с одинаковыми степенями ϵ , находим, что

$$x_1 = \epsilon \cos \omega t, \quad y_1 = \epsilon \sin \omega t,$$

и что для $x_n (n > 1)$ получается уравнение вида

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + \omega^2 x_n = a_n^{(1)} \cos \omega t + a_n^{(2)} \cos 2\omega t + \dots + a_n^{(n)} \cos n\omega t,$$

решение которого содержит наряду с периодическими вековой (секулярный) член вида $t \cos \omega t$, обусловленный присутствием в правой части подчеркнутого слагаемого, содержащего первую гармонику по ωt . Понятно, что таким образом построенные ряды не представляют ценности для приближенных вычислений даже и при малых ϵ , если рассматриваются достаточно большие времена, как это имеет место при отыскании периодических решений. Причина неудачи в том, что при таком подходе x_n, y_n ищутся как периодические функции периода $2\pi/\omega$, тогда как согласно теореме Ляпунова период решения должен зависеть от ϵ (ясно, что μ есть аналитическая функция ϵ). Поэтому Ляпуновым был предложен очень удобный алгоритм построения таких рядов, каждый из членов которых был бы периодическим с периодом, который сам зависит от ϵ . Основная идея алгоритма состоит во введении вместо t нового независимого переменного τ по формуле

$$t = \frac{\tau}{\omega} (1 + h_2 \epsilon^2 + h_4 \epsilon^4 + \dots)$$

и поиске решения системы в виде ряда

$$x(\tau) = \epsilon \cos \tau + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon^n x_n(\tau)$$

для τ и аналогичного ряда для ψ , где константы h_n и периодические по τ с периодом $2\pi/\omega$ (!) функции τ_n и ψ_n определяются после подстановки указанных разложений в систему и сравнения членов с одинаковыми степенями ϵ .

Возвращаясь к исходной гидродинамической задаче, заметим, что роль периода T играет длина волны λ или, после замены переменных, параметр ρ . Поэтому, перенося на данную задачу основные идеи алгоритма Ляпунова, поступаем следующим образом. Сначала отбрасываем в системе (1) нелинейные относительно Φ_k и τ_k члены. Рассматриваем соответствующую линейную задачу. Ее решение возможно лишь при значениях параметра ρ , являющихся корнями некоторого квадратного уравнения. Один из этих корней соответствует внутренним волнам, имеющим наибольшее развитие на границе раздела; другой – поверхностным, близким к тем, что имели бы место в однородной жидкости глубиной $h_1 + h_2$.

Для выбранного значения ρ_0 определяем $\Phi_k^{(1)}$ и $\tau_k^{(1)}$, в частности $\tau_2^{(1)}$ таково:

$$\tau_2^{(1)} = \epsilon (\tau_2 + \tau_2^{-1}) \cos \theta_2.$$

Далее, ρ , Φ_k и τ_k ищем как степенные ряды по ϵ вида

$$\rho = \rho_0 + \epsilon \rho^{(1)} + \epsilon^2 \rho^{(2)} + \dots,$$

$$\tau_k = \tau_k^{(1)} + \epsilon^2 \tau_k^{(2)} \cos 2\theta_k + \epsilon^3 \left[f_1^{(3)}(\tau_k) \cos \theta_k + f_2^{(3)}(\tau_k) \cos 2\theta_k + f_3^{(3)}(\tau_k) \cos 3\theta_k \right] + \dots,$$

подставляя их в систему (1) и сравнивая члены с одинаковыми степенями ϵ , причем $\rho^{(n)}$ подбираются так, чтобы у функций $\Phi_k^{(n+1)}$ и $\tau_k^{(n+1)}$ отсутствовали вековые по θ_k члены.

На этом пути были рассчитаны два и частично третья приближения, получены все характеристики волн, и в первую очередь профили волн.

Остановимся очень кратко на качественных выводах.

Для отмеченных выше поверхностных волн профили волн на свободной поверхности и границе раздела всегда синфазны; для внутренних волн они могут быть как синфазными, так и противофазными.

Нелинейные эффекты для поверхностных волн проявляются всегда в заострении гребней и уплощении впадин, для внутренних волн возможен и обратный эффект.

У линейных волн их длина и амплитуда – независимые величины, у нелинейных – они связаны между собой.

Для нелинейных внутренних волн имеет место гечение, локализованное вблизи границы раздела, аналогичное известному гечению Стокса для поверхностных волн.

В заключение отметим, что изложенная здесь схема решения задачи близка к методу Леви-Чивита; о решении данной задачи методом интегральных уравнений А.И.Некрасова сообщалось в работе [7], там же указывалось, что удастся доказать сходимость построенных рядов. Однако оказалось, что это не так, но сходимость рядов, а тем самым и существование волн данного типа, доказать можно, если предварительно свести к системе двух интегральных и одного интегро-дифференциального уравнения относительно $\frac{d\tau_1(t, \theta_1)}{d\theta_1}$, $\frac{d\varphi_1(t, \theta_1)}{d\theta_1}$ и $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$.

Во второй задаче рассматриваются волны, параметрически возбуждаемые на границе раздела двух жидкостей различных плотностей. Постановка этой задачи инициировалась экспериментом, выполненным В.А.Калиниченко по предложению автора. Заметка об этом эксперименте по представлению С.А.Христиановича была опубликована в "Докладах АН СССР" [9]. Эксперимент состоял в следующем. В прямоугольный сосуд (11,2x2,5x18,3 см) наливались два слоя жидкостей - керосина ($\rho_1 = 0,78 \text{ г/см}^3$) и воды ($\rho_2 = 1 \text{ г/см}^3$) - одинаковой глубины (8 см). Сосуд устанавливался на вибростенд, сообщаящий ему вертикальные колебания, частота Ω и амплитуда α которых могли плавно регулироваться. Было обнаружено, что если уменьшенная в два раза частота колебаний сосуда близка к одной из собственных частот первых мод колебаний двухслойной жидкости, рассчитанных по формуле

$$\omega = \sqrt{g \alpha \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{l} n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad l - \text{ширина сосуда,}$$

то на границе раздела жидкостей устанавливаются под действием малых возмущений стоячие волны с частотой, равной $\Omega/2$, и значительной амплитудой, которая зависит от разности $(\Omega/2) - \omega$ и при непрерывном увеличении этой разности монотонно увеличивается, достигая некоторого максимального значения, после которого скачком уменьшается до нуля. Если же $\Omega/2$ не близко ни к одной из собственных частот ω , то граница раздела остается почти плоской.

Причина описанного явления – в параметрической неустойчивости границы раздела жидкостей, описанной и рассчитанной в рамках линейной теории в работе [10]. Но возможности этой теории позволили определить лишь диапазоны частот колебаний сосуда, при которых происходит усиление бесконечно малых волновых возмущений – резонансные зоны; амплитуды волн по линейной теории в резонансных случаях растут до бесконечности, даже если ввести в уравнения диссипативные члены. Рост амплитуды ограничивается лишь нелинейностью волн.

Соответствующая нелинейная задача была рассмотрена в работе [11]. Обозначим через x_k и y_k декартовы координаты индивидуальной частицы жидкости в системе координат, жестко связанной с сосудом, ось Ox которой направлена вдоль жесткой в невозмущенном состоянии границы раздела жидкостей, а ось Oy вдоль левой стенки сосуда вертикально вверх. Чтобы избежать рассмотрения областей с неизвестными границами, введем переменные Лагранжа a_k, b, t , где $k = 1$ для верхней и $k = 2$ для нижней жидкости, а t – время. Считаем, что на границе раздела $b = 0$, на левой стенке сосуда $a_k = 0$, на правой $a_k = l$.

Уравнения движения и неразрывности можно записать так:

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \frac{\partial x_k}{\partial a_k} + \left[\frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + g(1 + q \cos \Omega t) \right] \frac{\partial y_k}{\partial a_k} = - \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial a_k};$$

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \frac{\partial x_k}{\partial b} + \left[\frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + g(1 + q \cos \Omega t) \right] \frac{\partial y_k}{\partial b} = - \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial b}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_k} \frac{\partial y_k}{\partial b} - \frac{\partial x_k}{\partial b} \frac{\partial y_k}{\partial a_k} = 1; \quad q = \frac{g \Omega^2}{g}.$$

Граничные условия задачи следующие:

$$x_k(0, b, t) = 0, \quad x_k(l, b, t) = l, \quad y_k(a_k, \infty, t) = b,$$

$$x_1(a_1, 0, t) = x_2(a_2, 0, t), \quad y_1(a_1, 0, t) = y_2(a_2, 0, t),$$

$$\rho_1(a_1, 0, t) = \rho_2(a_2, 0, t).$$

Допустим, что в момент времени $t = 0$ в жидкости имеется возмущение в виде простой нелинейной волны с волновым числом π и малой амплитудой A_0 . Исследуем эволюцию возмущения. При решении этой задачи, как и в первой задаче, будем рассматривать волны хотя и нелинейные, но мало отли-

чающиеся от линейных. Поэтому введем малый параметр ϵ , характеризующий амплитуду линейных волн, и, кроме того, будем считать, что введенный выше параметр q также имеет порядок ϵ , а именно

$$q = \frac{s\Omega^2}{g} = \gamma \epsilon, \quad \gamma = O(1).$$

Теперь в системе (2) имеется естественный малый параметр. Однако и в этом случае система не является стандартной для теории колебаний, поскольку порождающая ее система, получающаяся из (2) при $\epsilon=0$, нелинейная.

Подобные случаи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались И.Г.Малкиным [6]. Изложим его результаты на примере следующей системы из двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + X(x, y) + \epsilon F_1(x, y, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + Y(x, y) + \epsilon F_2(x, y, t),$$

где $\omega = \text{const}$; X и Y — такие же, как в системах Ляпунова; $\epsilon \ll 1$; F_i — аналитические по x, y и периодические по t с периодом 2π функции, непрерывные по t и разлагающиеся в ряды Фурье.

И.Г.Малкин строил периодические по t с периодом 2π решения последней системы, переходящие при $\epsilon \rightarrow 0$ в периодические решения порождающей системы Ляпунова, и показал, что надо рассматривать отдельно два случая: нерезонансный, когда $\omega \neq n$ (n — целое), и резонансный, когда $\omega = n$.

В нерезонансном случае искомое периодическое решение можно строить в виде рядов по степеням ϵ , коэффициенты которых находятся обычным способом после подстановки рядов в систему. В резонансном же случае решение следует искать в виде рядов по степеням $\epsilon^{1/(2l+1)}$, где $2l$ — младшая степень величины ϵ в разложении периода периодического решения порождающей системы, которое удовлетворяет начальным условиям $x(0) = \epsilon, y(0) = 0$.

Итак, если бы отыскивались лишь периодические решения системы (2), то можно было бы непосредственно воспользоваться идеями метода Малкина, причем в интересующем нас случае параметрического резонанса решение следовало бы искать в виде рядов по степеням $\sqrt{\epsilon}$, поскольку, как можно вы-

вести из работы [12], значение параметра 2ℓ , фигурирующего в методе Малкина, оказывается равным единице. Для изучения же всего процесса параметрического возбуждения требуется решение неустановившейся задачи. В общем случае такая нелинейная задача представляется в настоящее время непреступной для аналитических методов. Но в данном случае она упрощается вследствие того, что, как следует из эксперимента, процесс параметрической раскачки волн происходит медленно по сравнению с периодическими движениями в сформировавшихся на заключительной стадии процесса волнах. В теории колебаний такие процессы исследуются методом усреднения (разделения движений), развитым Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым и Ю.А.Митропольским (см. [13]) на основе метода Ван-дер-Поля, который мы кратко изложим.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \epsilon \varphi \left(x, \frac{dx}{dt} \right),$$

где $\omega = \text{const}$, ϵ – малый параметр, функция φ может быть весьма общего вида, но главное, чтобы она была ограниченной.

Общее решение порождающего уравнения (при $\epsilon = 0$) имеет вид

$$x_0 = A_0 \cos \psi_0, \quad A_0 = \text{const} - \text{амплитуда}, \quad \psi_0 = \omega(t - t_0) - \text{фаза}.$$

Естественно предположить, что при малых значениях ϵ решение полного уравнения также будет описывать некоторый колебательный процесс подобного вида, но следует ожидать, что в общем случае амплитуда этого процесса будет изменяться, причем тем медленнее, чем меньше ϵ ; скорость изменения фазы также будет изменяться во времени. Учитывая это, ищем решение $x(t)$ при $\epsilon \neq 0$ в виде

$$x = A(t) \cos \psi(t),$$

вводя вместо x две неизвестные функции $A(t)$ и $\psi(t)$, которые свяжем соотношением

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \psi.$$

Подставив эти формулы в уравнение для x , приходим к системе

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\epsilon}{\omega} \varphi \sin \psi = -\frac{\epsilon}{\omega} \varphi_1(A, \psi),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\epsilon}{\omega A} \psi \cos \psi = \omega - \frac{\epsilon}{\omega A} \psi_2(A, \psi).$$

Видим, что за время одного "колебания", в течение которого ψ изменится на величину 2π , амплитуда A и характер колебаний изменятся мало. Поэтому согласно идее метода Вандер-Поля правые части последней системы заменяем их средними значениями за период, т.е. вместо этой системы рассматриваем так называемую укороченную систему

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\epsilon}{\omega} \bar{\psi}_1(A),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\epsilon}{\omega A} \bar{\psi}_2(A), \quad \bar{\psi}_{\left\{\frac{1}{2}\right\}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_{\left\{\frac{1}{2}\right\}}(A, \psi) \begin{cases} \sin \psi \\ \cos \psi \end{cases} d\psi.$$

Таким образом, приближенное нахождение амплитуды $A(t)$ свелось к решению уравнения с разделяющимися переменными, а фазы $\psi(t)$ — к взятию квадратур.

Возвращаясь к неустановившейся гидродинамической задаче, ищем ее решение с помощью синтеза метода усреднения и метода Малкина. В результате выводим следующее параметрическое уравнение границы раздела жидкостей:

$$x = a + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\epsilon} A \cos \alpha \cos \psi + \frac{\epsilon A^2}{4} \left(1 - \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \cos 2\psi \right) \sin 2\alpha + \epsilon^{3/2} \dots \right],$$

$$y = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\epsilon} A \cos \alpha \sin \psi + \frac{\epsilon A^2}{4} \left(1 - \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \cos 2\alpha \right) (1 + \cos 2\psi) + \epsilon^{3/2} \dots \right]$$

в котором амплитуда $A(t)$ и "медленная фаза" $\theta(t) = \psi - \frac{\Omega}{2} t$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dA}{dt} = \epsilon \frac{\omega^2}{2\Omega} A \sin 2\theta + \dots,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta + \epsilon \left[-\frac{\omega}{8} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} A^2 + \frac{\omega^2 \gamma}{2\Omega} \cos 2\theta \right], \quad \Delta = \omega - \frac{\Omega}{2},$$

причем $A(0) = A_0$, $\theta(0) = \psi_0$, где A_0 и ψ_0 — амплитуда и фаза начального возмущения.

Считая амплитуду A_0 малой, видим, что задача о параметрическом возбуждении свелась к анализу устойчивости решения $A=0$, $\theta(t)=\bar{\theta}(t)$ последней системы. Выполнив такой анализ стандартными методами [13], находим, что если $|\Delta| > \frac{\varepsilon \omega \gamma}{4}$, то такое решение устойчиво, если $|\Delta| < \frac{\varepsilon \omega \gamma}{4}$, то оно неустойчиво. В последнем случае $A(t)$ нарастает — имеет место параметрическое возбуждение.

В линейном приближении (пренебрежение членом A^2 во втором уравнении системы) $A(t)$ нарастает до бесконечности; нелинейность же ограничивает рост $A(t)$, вследствие чего в системе возможны стационарные колебания, при которых

$$\sqrt{\varepsilon} A = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\Delta + \frac{\varepsilon \gamma \omega^2}{2\Omega} \right)^{1/2}, \quad \psi \sim \frac{\Omega}{2} t, \quad \rho = \frac{\omega}{8} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Полученные количественные характеристики процесса параметрического возбуждения в ближайшее время будут сравнены с данными эксперимента, выполнявшегося В.А.Калиниченко на установке, позволяющей проводить значительно более точные измерения, чем были описаны в работе [9].

Отметим две интересные особенности нелинейных стоячих волн в жидкости, как на свободной поверхности, так и на границе раздела: 1) пучности волн неподвижны, а узлы (т.е. точки пересечения профиля волны со средним уровнем свободной поверхности или границы раздела) колеблются; 2) ни в какой момент времени профили волн не принимают формы горизонтальных прямых.

Аналогичное исследование параметрически возбуждаемых внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости изложено в работе автора [14]. Получено условие параметрической неустойчивости и рассчитаны профили стационарных внутренних волн конечной амплитуды.

В заключение заметим, что рассмотренные задачи могут иметь геофизические приложения при разработке вопроса о проявлении внутренних волн на поверхности океана (которому были посвящены ряд лекций и докладов на настоящей школе) и при изучении воздействия на внутренние волны периодических волн существенно большей длины, а также технические приложения, связанные с транспортировкой неоднородных жидкостей.

Л и т е р а т у р а

1. Обухов А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование. – УМН, 1983, т.38, №4, с.232.

2. Некрасов А.И. О волнах установившегося вида, ч.1. – Изв. Иваново-Вознесенск. политехн. ин-та, 1921, №3, с.52.

3. Levi-Civita T. Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. – Math. Annalen, 1925, Bd93, p.264.

4. Кочин Н.Е. Точное определение установившихся волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины. – Кочин Н.Е. Собр. соч., т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1949, с.43.

5. Синха С.Р.П. Точная теория установившихся волн на свободной поверхности и поверхности раздела двух жидкостей. – ДАН СССР, 1966, т.168, №1, с.47.

6. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд-во техн.-геог. литер., 1956. 491 с.

7. Секерж-Зенькович Я.И., Секерж-Зенькович С.Я. К теории установившихся волн конечной амплитуды в жидкости конечной глубины, состоящей из двух слоев разной плотности. – В кн.: Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Киев: Наукова думка, 1978.

8. Villat H. Sur les résolutions de certaines équations intégrales. – Acta math., 1916, 40, p.101.

9. Секерж-Зенькович С.Я., Калинин В.А. О возбуждении внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями. – ДАН СССР, 1979, т.249, №4, с.797.

10. Нестеров С.В. Исследование по нелинейной теории гравитационных волн: Докт. дис. М.: МЭИ, 1972. 220 с.

11. Секерж-Зенькович С.Я. Параметрическое возбуждение волн конечной амплитуды на границе раздела двух жидкостей разных плотностей. – ДАН СССР, 1983, т.272, №5, с.1083.

12. Секерж-Зенькович Я.И. К теории свободных конечных колебаний поверхности раздела двух неограниченных тяжелых жидкостей разных плотностей. – ДАН СССР, 1961, т.130, №1, с.51.

13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

14. Секерж-Зенькович С.Я. Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях суда. – ДАН СССР, 1983, т.270, №5, с.1089.

РАДИОЛОКАЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ ОКЕАНА

М. Б. Каневский

Радиолокация как средство дистанционного зондирования океана примечательна, прежде всего, своей всепогодностью. Для значительной части радиодиапазона атмосфера практически прозрачна, а потому с помощью радиолокатора можно зондировать океан сквозь облака в любое время года и суток.

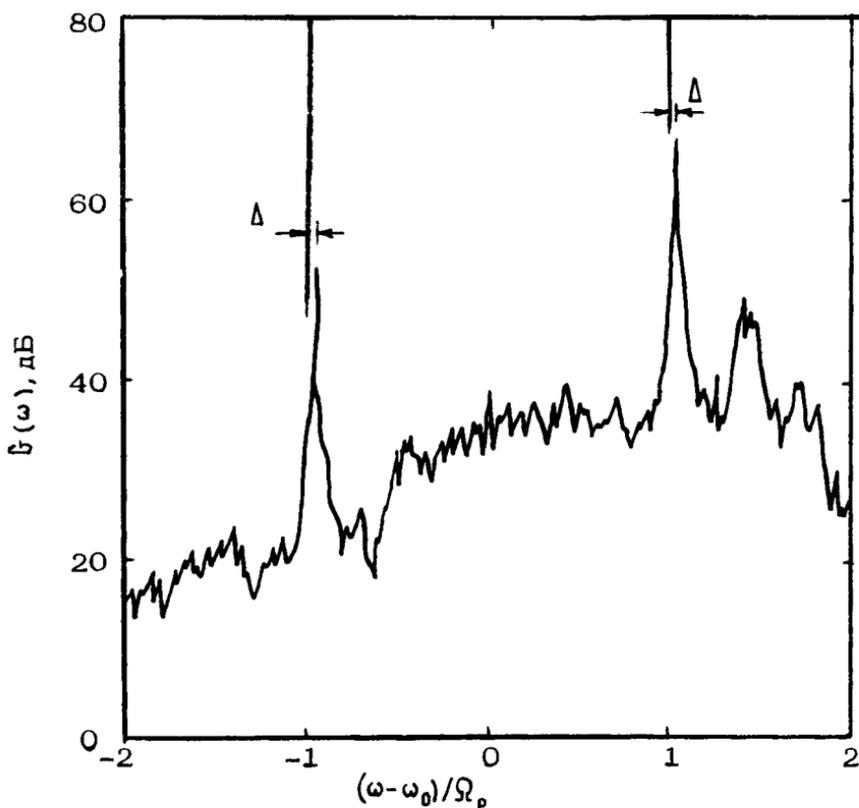
Радиоволны используемых в радиолокации диапазонов не проникают под водную поверхность на сколько-нибудь значительную глубину, поэтому рассеянный радиолокационный сигнал содержит информацию только о поверхностном волнении. Однако и внутренние процессы в океане могут быть выявлены с помощью радиолокационных средств, если только эти процессы каким-то образом влияют на характеристики поверхностного волнения.

Радиолокационная океанография ведет свою историю с начала 50-х годов, когда были поставлены первые эксперименты [1, 2], в которых море рассматривалось как объект исследования, а не как источник помех. В этих экспериментах, проводившихся в коротковолновом (КВ) диапазоне^{*)}, выявились интересные и поначалу непонятные факты.

Типичный временной спектр отраженного от морской поверхности сигнала КВ-диапазона (частота зондирующего сигнала 13,4 МГц) показан на рисунке, взятом из обзорной работы [3]. Основной особенностью спектра являются две четко выраженные линии, разнесенные в обе стороны относительно зондирующей частоты ω_0 примерно на одинаковые расстояния; интенсивности линий в разных экспериментах различаются на

^{*)} КВ-диапазон содержит длины волн $\lambda = 10-100$ м.

15–25 дБ. Оказалось, что при заданной зондирующей частоте положение линий не зависит от состояния морской поверхности, а при переходе на другую частоту сдвиг линий изменяется, однако, не пропорционально ω_0 , как можно было бы предположить, имея в виду доплеровский сдвиг на каких-то фиксированных рассеивателях, а пропорционально $\omega_0^{-1/2}$.



Объяснение этим фактам дает решение задачи рассеяния излучения на шероховатой поверхности в первом приближении теории возмущений по малому параметру ϵ/λ , где ϵ – среднеквадратичное отклонение поверхности от среднего уровня. Согласно теории рассеяние является избирательным – излуче-

ние, падающее на поверхность под углом скольжения ψ_0 , рассеивается в обратном направлении не на всем спектре шероховатостей $W(\vec{x})$, а лишь на компоненте с резонансной пространственной частотой $\vec{x}_p = 2\kappa \cos \psi_0$, $\kappa = 2\pi/\lambda$. В случае морского волнения этой пространственной частоте соответствуют две волны, одна из которых бежит на локатор $(+\vec{x}_p)$, а другая – от локатора $(-\vec{x}_p)$. Поэтому временной спектр рассеянного сигнала состоит из двух линий:

$$f(\omega) \sim \sum_{\pm} W(\pm \vec{x}_p) \delta[\omega - (\omega_0 \pm \Omega_p)]. \quad (1)$$

Эти линии сдвинуты относительно исходной частоты ω_0 на величину $\Omega_p = (\vec{x}_p g)^{1/2}$, которая, как нетрудно видеть, равна доплеровскому сдвигу на фазовой скорости резонансной компоненты спектра волнения. Таким образом, положение линий определяется не степенью волнения, а длиной волны λ и углом скольжения зондирующего излучения, причем $\Omega_p \sim \kappa^{1/2} \sim \omega_0^{1/2}$.

Из формулы (1) можно понять, что радиолокатор КВ-диапазона является весьма удобным инструментом для исследования энергонесущей части волнения. Действительно, измеряя интенсивность рассеянного сигнала при различных направлениях зондирования, можно найти угловой спектр волнения на заданной пространственной частоте, определить направление ветра [3,4], а также по величине $\Delta = \Omega - \Omega_p$ (Ω – наблюдаемый в эксперименте сдвиг линии) сделать вывод о наличии в обследуемой зоне течений и измерить их скорость. В частности, показанное на рисунке малое смещение Δ соответствует реальному местному течению вблизи Калифорнийского побережья США.

Дальность действия КВ-радиолокаторов, работающих "земным лучом", т.е. не использующих отражение от ионосферы, – до 200 км, однако, для того чтобы создать направленное КВ-излучение, приходится строить на берегу антенные сооружения километровых размеров. В СВЧ-диапазоне (дециметровые, сантиметровые волны) ситуация в этом смысле много проще. Но с переходом в СВЧ-диапазон механизм рассеяния, казалось бы, должен измениться коренным образом, поскольку теория возмущений здесь, строго говоря, неприменима. Оказывается, однако, что и в СВЧ-диапазоне резонансный характер рассеяния сохраняется, хотя и в несколько видоизмененной форме [5,6].

При не очень крутом падении на морскую поверхность сан-тиметрового излучения пространственная частота $\alpha_p = 2k \cos \psi_0$ попадает в сантиметровую часть спектра волнения, причем для высоты h_p соответствующей волны в силу малой ее крутизны справедливо $h_p \ll \Lambda_p = \frac{2\pi}{\alpha_p} \sim \lambda$, т.е. $h_p \ll \lambda$. Более того, для заданной λ существует граничная частота $\tilde{\alpha} < \alpha_p$ такая, что среднеквадратичная высота мелкомасштабного волнения, определенная через интеграл по области $\alpha > \tilde{\alpha}$, будет малой по сравнению с λ , т.е. к этой части спектра применима теория возмущений. Крупномасштабный рельеф энергонесущего волнения, описываемый оставшейся длинноволновой частью спектра ($\alpha < \tilde{\alpha}$), оказывается настолько пологим, что задачу о рассеянии на энергонесущем волнении можно решать в приближении Кирхгофа, когда рассеивающая поверхность в окрестности каждой ее точки заменяется касательной плоскостью с локальной ориентацией нормали.

Таким образом, в СВЧ-диапазоне рассеяние остается резонансным, однако этот механизм приобретает локальный характер, поскольку угол падения электромагнитной волны на элемент крупномасштабного рельефа определяется пространственной ориентацией данного элемента.

Исходя из такого представления о механизме рассеяния, нетрудно понять, что основу временного спектра рассеянного СВЧ-сигнала вновь будут составлять две линии, их интенсивности различаются теперь не столь резко, как в КВ-диапазоне, поскольку мелкомасштабная рябь существенно более изотропна, нежели крупные энергонесущие волны. Однако в натуральных условиях эти линии, как правило, не разрешаются из-за доплеровского расплывания. Дело в том, что рябь участвует в орбитальном движении жидкости в поле энергонесущего волнения, так что при достаточно большой площадке разрешения радиолокатора, захватывающей участки поверхности со всеми возможными значениями орбитальной скорости, спектр сигнала будет иметь доплеровскую полуширину $2k \epsilon_{\text{ОРБ. РАД}}$, где $\epsilon_{\text{ОРБ. РАД}}$ — среднеквадратичное значение радиальной по отношению к лучу локатора составляющей орбитальной скорости $\overline{v_{\text{ОРБ}}}$. Форма спектра в этом случае в основном повторяет функцию распределения $v_{\text{ОРБ. РАД}}$.

*1) Заметим, что здесь речь идет лишь о доплеровском спектре, обусловленном движениями ряби в пределах площадки разрешения локатора [7]. Полный спектр в его низкочастотной

С уменьшением площадки разрешения доплеровский спектр сужается и начинает периодически смещаться как целое в соответствии с орбитальными скоростями в волнах, длины которых существенно превышают линейные размеры площадки разрешения. Если сделать площадку достаточно малой и записать функцию $s(t)$ - смещение центра тяжести спектра сигнала, а затем найти спектр этой функции $G_c(\omega)$, то по формуле

$$G_z(\omega) = \left(\frac{\lambda}{2\omega} \right)^2 G_c(\omega) \quad (2)$$

можно найти спектр возвышений энергонесущего волнения $G_z(\omega)$. На этом принципе работает созданный в ИРЭ АН УССР радиоволномер, позволяющий измерять спектр волнения на дальностях порядка 1 км [9].

Существенную информацию о волнении содержит интеграл от спектра рассеянного сигнала - его средняя интенсивность. Как нетрудно догадаться, эта величина пропорциональна $W(x_p)$ -спектральной плотности волнения на резонансной пространственной частоте. В СВЧ-диапазоне зависимость средней интенсивности от степени волнения определяется не только ростом $W(x_p)$, но также тем, что с ростом волнения увеличивается вероятность появления сравнительно крутых участков крупномасштабного рельефа. Это приводит к значительной модуляции угла скольжения зондирующего луча и в конечном счете к увеличению средней интенсивности.

На практике обычно рассматривают не непосредственно среднюю интенсивность, зависящую, кроме всего прочего, от параметров локатора и дальности, а пропорциональную ей эффективную величину σ^0 , характеризующую лишь рассеивающие свойства поверхности, - удельное эффективное сечение рассеяния [5]. Зависимость σ^0 от вектора скорости приводного ветра \vec{u} довольно подробно исследовалась теоретически и экспериментально [6, 10, 11] с целью изучения возможности решения обратной задачи - дистанционного определения скорости ветра над океаном. Результатом этого изучения явился ряд аппроксимаций зависимости $\sigma^0(\vec{u})$, которые послужили основой для создания алгоритмов радиолокационного определения скорости приводного ветра из космоса [12].

Части имеет более сложную структуру [8], связанную с вариациями уклонов крупных волн и неравномерностью пространственного распределения ряби.

С помощью радиолокатора – скаттерометра ($\lambda = 2$ см), установленного на радиоокеанографическом спутнике Seasat A, запущенном в США в 1978 г., скорость ветра, усредненная по площади 50×50 км, измерялась в диапазоне 4–30 м/с с точностью не хуже 2 м/с по модулю и 20° по направлению [13].

Детальную океанографическую информацию можно получить с помощью радиолокатора бокового обзора, размещенного на самолете, вертолете или корабле. Антенна такого лоатора направлена перпендикулярно курсу носителя и обычно обладает большим в азимутальном направлении раскрытием. Панорамное изображение создается путем развертывания сигнала по двум координатам: по дальности – за счет запаздывания сигналов с больших дальностей, а по азимуту – за счет движения носителя. Если площадку разрешения лоатора уменьшить до размеров меньших, нежели длина волны зыби, то интенсивность отраженного сигнала будет “следить” за уклонами зыби. Очевидно, и достаточно крупномасштабные неоднородности в пространственном распределении ответственной за рассеяние ряби, обусловленные, в частности, воздействием внутренних волн, течениями, нефтяными загрязнениями, также будут проявляться в изменениях интенсивности рассеянного сигнала. Так, например, в работе [14] приводится радиоизображение внутренних волн на фоне зыби, полученное в Индийском океане с помощью трехсантиметрового корабельного лоатора.

Флуктуации интенсивности рассеянного сигнала, обусловленные различного рода причинами – орбитальными движениями сантиметровой ряби, неравномерным ее распределением на поверхности, модуляцией локального угла скольжения, – вообще говоря, неаддитивны. Поэтому в спектре радиоизображения морской поверхности помимо доплеровского спектра, также спектров уклонов энергонесущего волнения и неоднородностей ряби присутствуют комбинационные частоты, описываемые сверткой двух последних спектров [8]. Таким образом, спектр радиоизображения поверхности содержит составляющие (в частности, крупномасштабные), отсутствующие в спектрах исходных гидрофизических полей. Это обстоятельство во следует учитывать при интерпретации данных радиолокационного зондирования морской поверхности.

Для того чтобы с помощью некогерентного радиолокатора получить детальную (с разрешением до 100 м) панораму радиоизображения из космоса, т.е. с дальности $R \sim 10^3$ км,

шло бы даже на сантиметровых волнах создавать в космосе антенну с апертурой километровых размеров. К счастью, существует иной путь – синтезирование апертуры путем специальной обработки сигнала, записанного когерентным образом, т.е. с информацией о фазе.

При движении локатора относительно облучаемой поверхности сигналы, отраженные от различных ее элементов, приходят в приемник с различными доплеровскими частотами. Если поверхность "заморожена", то эволюция фазы комплексной огибающей сигнала от каждого элемента в процессе прохождения его через диаграмму направленности антенны известна:

$$E \sim e^{i\varphi} \left[2ik \left(R + \frac{V^2}{2R} t^2 \right) \right],$$

где t – время, отсчитываемое от момента прохождения элемента через ось диаграммы направленности; V – скорость движения локатора. Поэтому, преобразовав сигнал по частоте, можно затем при обработке так корректировать фазу огибающей, чтобы все сигналы, пришедшие от данного элемента поверхности за время прохождения его через диаграмму направленности, были синфазны. Это означает, что путем когерентной обработки сигнала синтезируется антенна с азимутальным размером апертуры D_c , равным азимутальному размеру освещенного пятна на поверхности:

$$D_c \sim \frac{\lambda}{D} R,$$

где D – азимутальный размер реальной апертуры. Следовательно,

$$\Delta_t \sim \frac{\lambda}{D_c} R \sim D,$$

т.е. путем синтезирования апертуры можно на "замороженной" поверхности получить разрешение порядка размера реальной апертуры, причем это разрешение не зависит от дальности.

Однако реальная морская поверхность, если она не заморожена в прямом смысле, всегда находится в движении, причем различные ее элементы движутся случайным образом с различными скоростями. Следовательно, в сигнале наряду с регулярным изменением фазы, учитываемым при синтезировании апертуры, присутствуют случайные фазовые флуктуации,

вызванные доплер-эффектом на орбитальных скоростях. Вопрос о величине и характере искажений, вносимых в радиоиообращение орбитальными скоростями, в настоящее время еще не выяснен окончательно, хотя и весьма активно исследуется [15, 16]. Тем не менее, интенсивные океанические внутренние волны, генерируемые вблизи подводных гор и в шельфовой зоне, уверенно регистрировались из космоса радиолокатором с синтезированной апертурой (РСА), установленным на спутнике Seasat A [13]. В более ранних экспериментах РСА регистрировал с самолета нефтяные пятна на поверхности океана [17].

Наконец коротко остановимся еще на одном важном классе радиолокационных устройств – радиовысотомерах, посредством которых зондирование океана производится в надир. В этом случае рассеяние теряет резонансный характер и основной вклад в обратно рассеянный сигнал дают квазизеркальные участки крупномасштабного рельефа. С ростом волнения вероятность появления таких участков в освещенном пятне уменьшается, что приводит к уменьшению сечения обратного рассеяния. Эта зависимость может быть использована для определения степени волнения [18]; кроме того, весьма информативной характеристикой является форма отраженного импульса, который с ростом волнения становится более растянутым [19]. По форме отраженного импульса можно не только с высокой точностью определить среднюю высоту значительного волнения $H_{1/3}$ (по данным Seasat A, ошибка в определении $H_{1/3}$ составляет не более 10% [13]), но и измерить функцию распределения высот волн [20]. Весьма важными являются собственно альтиметрические измерения, позволяющие по времени запаздывания отраженного импульса выявить изменения формы геоида, связанные с течениями и особенностями топографии океанского дна [13].

Хотя в данном кратком обзоре представлены не все радиолокационные методы (в частности, не затронут метод двухчастотного зондирования [21]), тем не менее приведенные сведения говорят о больших перспективах радиолокации в исследовании Мирового океана.

Л и т е р а т у р а

1. Crombie D.D. Doppler spectrum of sea echo at 13.56 Mc/s. – Nature, 1955, v.175, p. 681.

2. Радиоокеанографические исследования морского волнения /Под ред. С.Я.Брауде. Киев: Изд-во АН УССР, 1962.
3. Barrick D.E. HF radio oceanography - a review. - *Boundary-Layer Meteorology*, 1978, v.13, p.23.
4. Trizna D.B. e.a. Observation by HF radar of the Phillips resonance mechanism for generation of wind waves. - *J.Geophys.Res.*, 1980, v.85, NC9, p.4946.
5. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972.
6. Калмыков А.И. и др. Энергетические характеристики рассеяния радиоволн УКВ-диапазона взволнованной поверхностью моря: Препринт № 71. Харьков: ИРЭ АН УССР, 1976.
7. Фукс И.М. О ширине спектра сигналов, рассеянных на взволнованной поверхности моря. - *Акуст.журн.*, 1974, т.20, с.458.
8. Каневский М.Б. Спектр радиолокационного изображения морской поверхности. - *Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана*, 1984, т.20, №12.
9. Розенберг А.Д. Исследование морской поверхности радио и акустическими методами: Докт. дис. /ИО АН СССР. М., 1980.
10. Guinard N.W., Daley J.C. An experimental study of sea clutter model. - *Proc.IEEE*, 1970, v.58, p.543.
11. Леменга Ю.А., Фукс И.М. Сечение рассеяния УКВ-радиоволн на поверхности моря. - *Изв. вузов. Радиофизика*, 1978, т.21, №3, с.379.
12. Moore R.K., Fung A.K. Radar determination of winds at sea. - *Proc.IEEE*, 1979, v.67, N11, p.1504.
13. The special issue on Seasat A. - *J.Geophys.Res.*, 1983, v.88, NC3.
14. Браво-Животовский Д.М. и др. Исследования воздействия океанских внутренних волн на поверхностное волнение дистанционными методами. - *ДАН СССР*, 1982, т.265, №2, с.457.
15. Alpers W.R. e.a. On the detectability of ocean surface waves by real and synthetic aperture radar. - *J.Geophys.Res.*, 1981, v.86, NC7, p.6481.

16. Иванов А.В. Основные свойства синтезированных радиолокационных изображений морского волнения при больших временах синтеза и их интерпретация. - Изв. вузов. Радиофизика, 1983, т.26. №5, с.540.

17. Pilon R.O., Purves C.G. Radar imagery of oil slick. - IEEE Trans., 1973, AP-21, N5, p.630.

18. Kalmykov A.I. e.a. Some features of radar monitoring of the oceanic surface from aerospace platforms. - Int. J. Remote Sensing, 1982, v.3, N3, p.311.

19. Mc Googan J.T. Satellite Altimetry Applications. - IEEE Trans., 1975, v.MTT-23, N12, p.970.

20. Priester R.W., Miller L.S. Estimation of significant wave height and wave height density function using satellite altimeter data. - J. Geophys. Res., 1979, v.84, NB8, p.4021.

21. Alpers W., Hasselmann K. The two-frequency microwave technique for measuring ocean-wave spectra from an airplane and satellite. - Boundary-Layer Meteorology, 1978, v.13, p.215.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

В.Л.Козлов

1. При исследовании сложных объектов – протяженных сред с некоторой внутренней структурой – содержание прямых задач составляет определение всевозможных внешних (т.е. доступных для непосредственного наблюдения) проявлений внутреннего состояния объекта (среды). Обратные задачи зондирования возникают как задачи интерпретации тех или иных наблюдений, т.е. как задачи восстановления внутреннего состояния объекта по его внешним проявлениям. Дистанционное зондирование протяженных сред обычно основано на измерениях параметров тех или иных зондирующих полей (оптических, радиочастотных, акустических и т.д.) на границе или в некоторых точках среды. В силу уравнений распространения эти параметры связаны с возмущениями, распределенными в толще среды, некоторыми интегральными соотношениями. Так, поглощение (затухание) поля или запаздывание волнового фронта вдоль некоторой траектории определяются интегралом вдоль этой траектории от неоднородной плотности.

Пусть интересующая нас неоднородность среды описывается функцией $\varphi(\mathbf{x})$ пространственного аргумента \mathbf{x} . Предположим, что в точке наблюдения регистрируются величины

$$Y_t = \int \varphi(\mathbf{x}) \Lambda_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \epsilon_t, \quad t \in T, \quad (1)$$

где индекс t нумерует наблюдения; функция $\Lambda_t(\mathbf{x})$ описывает "степень чувствительности" наблюдения с номером t к возмущению, локализованному в точке \mathbf{x} ; величина ϵ_t соответствует погрешности наблюдения Y_t . Основная обратная задача

зондирования есть задача восстановления неизвестной функции φ_T по сигналам $\{Y_t : t \in T\}$. Возможность такого восстановления определяется тем, что весовые функции $A_t(x)$ для разных наблюдений по-разному зависят от пространственных координат, например, часто область максимальной чувствительности смещается в пространстве от наблюдения к наблюдению. На практике для создания пространственной избирательности используют различные физические эффекты, включая частотную зависимость затухания зондирующего поля, изменение диаграммы чувствительности приемника или изменение точки регистрации (угловое и пространственное сканирование) и т.д.

Характерной особенностью обратных задач вида (1) является их **н е к о р р е к т н о с т ь**. Этим исторически сложившимся и не очень удачным термином обозначается особый род неустойчивости решения обратной задачи к ошибкам в задании исходных данных – сигналов $\{Y_t\}$, связанный с математической природой задачи. На практике при численном решении некорректной задачи, если не приняты специальные меры, возникают большие численные ошибки, часто лишаящие результатов физического смысла.

Некорректные обратные задачи вида (1) возникают в самых различных областях математической физики. Энтузиазм практических исследователей по отношению к этим задачам, наметившийся с середины 50-х годов, был вызван возросшей мощностью ЭВМ и кажущейся легкостью их решения, по крайней мере приближенного, путем сведения к линейной системе алгебраических уравнений. Однако быстро выяснилось, что увеличение порядка приближения всегда сопровождается катастрофическим ростом ошибок в получаемых результатах. Трудности численного решения некорректных задач, выдвигаемые на первый план практикой интерпретации физических измерений, породили обширную литературу, в основном посвященную поискам устойчивых численных алгоритмов обращения. Однако, как показывает более внимательное рассмотрение, некорректность обратной задачи связана по существу с информационной недоопределенностью, и одно усовершенствование численных методов не может гарантировать надежную интерпретацию, если в исходных (экспериментальных) данных отсутствует или мала необходимая информация. Поэтому анализ реальной информативности соответствующего эксперимента является необходимой составной частью решения некорректной обратной задачи, при этом важную роль в повышении реальной информативности

может играть оптимальное планирование эксперимента.

Математическая природа некорректности выявляется при точной формулировке задачи с помощью средств функционального анализа.

2. В стандартной постановке линейная обратная задача формулируется как задача решения операторного уравнения

$$A\varphi = f, \quad (2)$$

где $\varphi \in \Phi$ – искомая функция, описывающая состояние наблюдаемого объекта и рассматриваемая как элемент некоторого линейного нормированного (функционального) пространства Φ ; $f \in F$ – элемент некоторого другого пространства, представляющий набор исходных данных, подлежащих регистрации в эксперименте; $A: \Phi \rightarrow F$ – вполне непрерывный интегральный оператор (основной оператор задачи).

Понятие корректности проблемы решения уравнения (2) восходит к Адамару (1902) и эквивалентно существованию ограниченного (непрерывного) обратного оператора $A^{-1}: F \rightarrow \Phi$. Долгое время в математической литературе было распространено мнение, что только корректные задачи могут иметь "физический" смысл и заслуживают изучения. По-видимому, первой математической работой, посвященной рассмотрению некорректных по Адамару задач, была работа А.Н.Тихонова (1943) [1].

Некорректность обратной задачи (2) выражается в неограниченности обратного оператора A^{-1} . В этом случае даже точное аналитическое обращение, если оно существует и гарантирует единственность решения при точно известной правой части, не решает дела, так как на практике оператор A^{-1} должен применяться к приближенным исходным данным $\tilde{f} = f + \epsilon$ и результат всегда оказывается неограниченно далеким от точного решения за счет члена $A^{-1}\epsilon$. Это показывает, что в формулировку задачи должны явным образом входить количественные характеристики ошибки ϵ , контролируемые в эксперименте. По существу, в стандартной постановке (2) предполагается, что экспериментатор в состоянии контролировать отклонение фактически регистрируемого (приближенного) элемента \tilde{f} от его точного значения $f = A\varphi$ в метрике пространства F :

$$\|\tilde{f} - A\varphi\|_F \leq \delta. \quad (3)$$

Собственно, условие (3) и исчерпывает всю содержащуюся в данных эксперимента информацию о неизвестном решении φ . Другими словами, "обобщенным" ("коллективным") решением

уравнения (2) с неточными данными (3) можно считать множеством

$$\Phi_{\tilde{f}, \delta} = \left\{ \varphi: \|A\varphi - \tilde{f}\|_F \leq \delta \right\} \subset \Phi. \quad (4)$$

Без дополнительных условий это наименьшее множество, содержащее "истинное" решение φ_0 , т.е. то состояние объекта, с которым фактически получены данные \tilde{f} . Некорректность задачи (2) эквивалентна неограниченности множества (4) в метрике пространства Φ . Тем самым задача отыскания решения уравнения (2) в обычном смысле, т.е. как некоторого элемента $\tilde{\varphi}_{\tilde{f}} \in \Phi$, оказывается **н е д о о п р е д е л е н н о й**.

Доопределение задачи (2) производится различными способами путем нахождения **д о п о л н и т е л ь н ы х** условий, которым должно удовлетворять неизвестное решение φ . Совокупность таких дополнительных условий называется **а п р и о р н о й** и **н ф о р м а ц и е й** и включается в формулировку обратной задачи (2). Следует отметить, что реальное различие между методами (алгоритмами) решения определяется характером и уровнем используемой (или, чаще, подразумеваемой) априорной информации. Различают следующие типы априорной информации:

тип R (ограничения) – точное указание класса Φ_0 допустимых решений при этом, вообще говоря, не требуется, чтобы само множество было ограниченным в метрике пространства Φ ;

тип P (вероятностная) – указание вероятностного распределения возможных решений в пространстве Φ (вероятностной меры)

$$\mu(\Phi') = P\{\varphi \in \Phi'\}, \quad \Phi' \subset \Phi;$$

тип D (директивная) – указание правила предпочтения на множестве возможных решений: $\varphi_1 > \varphi_2$ (φ_1 предпочтительнее φ_2), если $\Omega(\varphi_1) < \Omega(\varphi_2)$, где $\Omega(\varphi)$, – непрерывный положительный монотонный функционал на пространстве Φ , – регуляризирующий функционал (иногда в качестве регуляризирующего функционала используют норму исходного пространства $\Omega(\varphi) = \|\varphi\|_{\Phi}$).

Регуляризацией в широком смысле называют любой способ использования априорной информации для однозначного выделения элемента $\tilde{\varphi}_{\tilde{f}} \in \Phi_{\tilde{f}, \delta}$, непрерывно зависящего от \tilde{f} (устойчивого решения). Регуляризация в узком смысле (по Тихонову) [2] основана на использовании некоторого регуляризу-

шего функционала и эквивалентна минимизации этого функционала на обобщенном решении (4).

Классические методы регуляризации, связанные с приведенной выше стандартной детерминированной постановкой обратной задачи, хорошо освещены в монографиях [3-8], поэтому оставшаяся часть статьи будет посвящена изложению статистического подхода к анализу и решению некорректных обратных задач, вообще говоря, более адекватному условиям реальных измерений. Основы этого подхода, использующего аппарат математической статистики и теории информации, содержатся в работах Л.А.Халфина и В.Н.Судакова [9-10] и развиваются далее в 60-х годах применительно к некоторым классам задач интерпретации физических измерений (см. библиографию в обзоре [11]). Фактически статистические алгоритмы широко применяются на практике, например в задачах метеорологического зондирования [12], где они обеспечены адекватной априорной информацией. В последние годы усилился интерес к математическому обоснованию статистического подхода и установлению статистических свойств классических алгоритмов регуляризации [13]. Уточнение статистической формулировки обратной задачи потребовалось в связи с развитием теории планирования эксперимента [14].

3. Опыт показывает, что ошибки эксперимента, по крайней мере в некоторой своей неустранимой части, определяются тем или иным стохастическим механизмом, т.е. подчинены некоторому вероятностному распределению. Считая помеху случайным процессом и принимая естественное в рамках линейных задач условие аддитивности

$$\tilde{f} = f + \xi, \quad (5)$$

получаем, что распределение помехи ξ с помощью (2) и (5) обуславливает распределение вероятностей вектора наблюдений \tilde{f} , управляемое состоянием изучаемого объекта φ . Эта точка зрения является исходной для применения методов математической статистики к решению обратных задач рассматриваемого типа.

Начнем с уточнения постановки задачи (2). Дело в том, что реализации процесса ξ не принадлежат, вообще говоря, пространству F . В то же время распределение вероятностей процесса ξ (шума) каноническим образом выделяет некоторое метрическое пространство, которому должен принадлежать вектор f в модели (5), для того чтобы задача оценивания его

параметров имела смысл. Для упрощения рассмотрим случай, когда множество индексов $T = \{t\}$, нумерующих наблюдения (1), не более чем счетно (вместо t дальше будем использовать индекс $j=1,2,\dots$). Этот случай достаточно наглядно демонстрирует особенности некорректной задачи, в то же время распространение результатов на произвольный случайный процесс второго порядка не представляет особых затруднений [14].

Итак, пусть вектор наблюдений имеет вид

$$\tilde{f}_j = f_j + \xi_j, \quad j=1,2,\dots, \quad (5a)$$

и компоненты вектора ошибок ξ_j - некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и ненулевыми дисперсиями, не все из которых бесконечны:

$$E \xi_j = 0, \quad E \xi_j^2 = \sigma_j^2, \quad E \xi_j \xi_l = 0, \quad j \neq l.$$

Линейная статистика (функционал) от вектора наблюдений

$$u(\tilde{f}) = \sum_j u_j \tilde{f}_j$$

определяется набором коэффициентов (u_1, u_2, \dots) . Будем считать, что для оценивания параметров вектора f используются линейные статистики с конечной дисперсией:

$$E u(\tilde{f}) = u(f), \quad E |u(\tilde{f}) - u(f)|^2 = \sum u_j^2 \sigma_j^2 < \infty.$$

Очевидно, что множество всех таких статистик образует линейное нормированное (гильбертово) пространство U с нормой

$$\|u\|^2 = \sum_j \sigma_j^2 u_j^2.$$

Вектор наблюдений \tilde{f} в модели (5) получается сдвигом процесса ξ на вектор f . Назовем вектор сдвига f регулярным, если он ограничен относительно статистик из U , т.е.

$$\sup_{u \in U} \frac{\|u(f)\|^2}{\|u\|^2} = \sum_j \frac{f_j^2}{\sigma_j^2} < \infty.$$

Множество всех регулярных сдвигов также образует гильбертово пространство F с нормой

$$\|f\|^2 = \sum_j \frac{f_j^2}{\sigma_j^2}.$$

Пространства F и U сопряжены относительно билинейного функционала $u(f) = \sum u_j f_j$ и изометричны. Оператор, устанавливаю-

ший изометрию $F \rightarrow U$, называется обратным корреляционным оператором K^{-1} процесса ξ . С каждым регулярным сдвигом f он сопоставляет линейную статистику

$$u_f = K^{-1} f : (u_f)_j = \frac{f_j}{\sigma_j^2}, \quad j=1,2 \dots,$$

оптимальную для оценивания "амплитуды" этого сдвига, т.е. параметра β в модели $f_\beta = \beta f$, при этом $\|u_f\|^2 = \|f\|^2$ и дисперсия оценки "амплитуды" сдвига обратно пропорциональна норме сдвига. Поэтому, для того чтобы задачи оценивания для вектора сдвига или его параметров имели смысл, этот вектор должен быть регулярным сдвигом. Следовательно, необходимо отождествить пространство F в формуле (2) с пространством регулярных сдвигов случайного вектора ξ (шума). Будем считать, что оператор $A: \varphi \rightarrow F$ действует по правилу

$$f_j = A_j(\varphi) = \int a_j(x) \varphi_x dx, \quad j=1,2 \dots,$$

при этом ряд $\sum |A_j(\varphi)|^2 / \sigma_j^2$ сходится для любого $\varphi \in \Phi$.

Пространство состояний Φ будем считать полным нормированным пространством функций, пространства U и F полны по построению. Часто пространство Φ считают гильбертовым, что несколько упрощает рассмотрение [13], но может быть неадекватным физическому смыслу задачи. Например, если неизвестная функция описывает некоторую плотность, она не обязана быть квадратично интегрируемой. Кроме того, метрика основного пространства Φ определяет "запас" непрерывных линейных функционалов от неизвестной функции φ , значения которых могут представлять непосредственный интерес. Все такие функционалы $\alpha(\varphi)$ образуют сопряженное пространство Φ^* с нормой, порожденной нормой основного пространства

$$\|\alpha\| = \sup_{\varphi \in \Phi} \frac{\|\alpha(\varphi)\|}{\|\varphi\|} < \infty.$$

Рассмотрим вопрос об оценивании линейных функционалов от неизвестного решения φ . Точность такого оценивания для одного класса обратных задач вычислена в работе [15], оптимальные оценки для случая, когда пространство Φ - гильбертово, а априорные ограничения квадратичны, получены в работе [16]. Ниже рассматривается общий случай.

Линейная статистика $u \in U$ называется несмещенной оценкой линейного функционала $\alpha \in \Phi^*$, если для любого $\varphi \in \Phi$ выполнено

$$E u(\tilde{\varphi}) = u(A\varphi) = \alpha(\varphi), \quad \text{или} \quad \alpha = A^* u.$$

Сопряженный оператор $A^*: U \rightarrow \Phi^*$ сопоставляет каждой линейной статистике из U тот функционал из сопряженного пространства Φ^* , несмещенной оценкой которого эта статистика является. Каждый такой функционал имеет вид $\alpha(\varphi) = \sum_{j=1}^n A_j(\varphi)$, т.е. является линейной комбинацией наблюдаемых функционалов, и всеми такими линейными комбинациями исчерпываются функционалы, допускающие несмещенную оценку. Если любой непрерывный линейный функционал допускает несмещенную оценку с конечной дисперсией, т.е. множество $A^*(U)$ совпадает со всем пространством Φ^* , задача (2) называется статистически корректной.

Для статистически корректной задачи условие несмещенности

$$A^* u = \alpha \tag{6}$$

при фиксированном функционале α может быть выполнено более чем для одной статистики u . В этом случае наилучшей линейной несмещенной оценкой функционала α будет решение этого уравнения — статистика \bar{u} , удовлетворяющая дополнительному условию минимальности дисперсии:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|^2 &= \inf \|u\|^2, \\ u: A^* u &= \alpha \end{aligned} \tag{7}$$

Можно показать, что необходимым и достаточным условием минимальности дисперсии статистики \bar{u} является существование элемента $\bar{\varphi} \in \Phi$, такого, что $\bar{u} = K^{-1} A \bar{\varphi}$, при этом элемент $\bar{\varphi}$ является решением уравнения

$$A^* K^{-1} A \bar{\varphi} = \alpha. \tag{8}$$

Обозначая оператор в левой части (8) через Γ , получим наилучшую несмещенную оценку функционала α в виде

$$\bar{u} = K^{-1} A \Gamma^{-1} \alpha \tag{9}$$

с дисперсией $\|\bar{u}\|^2 = \alpha(\Gamma^{-1} \alpha)$. Если оператор A вполне непрерывен, то необходимым условием статистической корректности является конечная размерность пространства состояний Φ (или подпространства допустимых решений Φ_0). В этом случае

жет быть построено так называемое слабое решение обратной задачи (2), т.е. случайный процесс $\tilde{\varphi}$ с реализациями в пространстве Φ (или Φ_0), обладающий тем свойством, что для любого функционала $\alpha \in \Phi^*$ случайная величина $\alpha(\tilde{\varphi})$, т.е. значения этого функционала на реализациях процесса $\tilde{\varphi}$, есть наилучшая несмещенная оценка этого функционала. Действительно, пусть $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — конечный базис пространства Φ . Тогда существует биортогональная система линейных функционалов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Пусть $u_i = K^{-1} A \alpha_i, i=1, \dots, n$ — система наилучших оценок базисных функционалов. Тогда слабым решением обратной задачи (2) будет случайный процесс

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^n u_i(\tilde{f}) \varphi_i \quad (10)$$

с корреляционным оператором G^{-1} . Решение (10) является фактически оценкой метода наименьших квадратов, так как оно может быть получено минимизацией по параметрам $\theta_1, \dots, \theta_n$ квадратичной формы

$$\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} \left[\tilde{f}_j - \sum_{i=1}^n \theta_i A_j(\varphi_i) \right]^2 \rightarrow \min,$$

т.е. $\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i \varphi_i$, где $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n$ — оценки метода наименьших квадратов.

В общем случае не все функционалы из пространства Φ^* допускают несмещенное оценивание. Тогда задача (2) является статистически некорректной, и для оценки функционалов используются смещенные оценки. Линейные смещенные оценки могут иметь ограниченное смещение только при априорной информации типа R с ограниченным множеством допустимых решений Φ_0 или ограниченное в среднем смещение — при априорной информации типа ρ .

Пусть $\Phi_0 \subset \Phi$ — ограниченное центрально-симметричное множество и $\Omega(\alpha)$ — его калибровочный функционал:

$$\Omega(\alpha) = \sup_{\varphi \in \Phi_0} |\alpha(\varphi)|^2 < \infty, \quad \forall \alpha \in \Phi^*.$$

Для фиксированного линейного функционала α наилучшая линейная оценка (статистика $u \in U$) может быть найдена из условия минимума:

$$\sup_{\varphi \in \Phi_0} E |u(\tilde{f}) - \alpha(\varphi)|^2 = \Omega(A^* u - \alpha) + \|u\|^2 = \inf_u \quad (11)$$

В левой части (11) стоит максимальная полная ошибка оценивания функционала α с помощью статистики u . Нижняя грань в условии (11) достигается в силу полноты пространства статистик и любой функционал α может быть оценен с конечной ошибкой. Однако оценка (11) может оказаться тривиальной, если априорное множество Φ_0 "слишком широко" для оценивания данного функционала. Так, если попытаться оценить значение непрерывной функции в некоторой точке x_0

$$\alpha_0(\varphi) = \varphi(x_0),$$

располагая только априорной информацией вида

$$\|\varphi\| = \max_x |\varphi(x)| \leq \varepsilon,$$

то при условии, что наблюдаемые функционалы A_j имеют непрерывные весовые функции $a_j(x)$, из формулы (11) получается тривиальная оценка $u \equiv 0$. Это означает, что данные эксперимента не позволяют уточнить значение функционала α_0 по сравнению с априорной информацией $|\alpha_0| \leq \varepsilon$.

Имеется один важный частный случай, когда решение задачи (11) может быть получено в "явном" (операторном) виде, а именно когда калибровочный функционал допускает представление $\mathcal{Q}(\alpha) = \alpha(\mathcal{J}\alpha)$ с помощью положительного оператора $\mathcal{J}: \Phi^* \rightarrow \Phi$ (калибровочного оператора). Множество Φ_0 в этом случае естественно называть эллипсоидом пространства Φ . В этом случае наилучшая оценка (статистика) является решением уравнения

$$K^{-1} A \mathcal{J} A^* u + u = K^{-1} A \mathcal{J} \alpha,$$

т.е.

$$u = (A \mathcal{J} A^* + K)^{-1} A \mathcal{J} \alpha, \quad (12)$$

причем оператор в правой части (12) ограничен.

При использовании априорной информации типа ρ роль калибровочного функционала играет априорная дисперсия функционала α :

$$\mathcal{Q}(\alpha) = E_{\mu} |\alpha(\varphi)|^2 = \alpha(K_{\mu} \alpha), \quad \mathcal{J} = K_{\mu},$$

где математическое ожидание берется по априорному распределению μ ; K_{μ} - соответствующий корреляционный оператор

$$K_{\mu} \alpha = E_{\mu} \varphi \alpha(\varphi), \quad K_{\mu}: \Phi^* \rightarrow \Phi.$$

По форме решение (12) совпадает с решением, полученным в работе [16] для случая, когда исходное пространство Φ - гильбертово.

Поскольку решение (12) линейно относительно α , оно может быть записано в виде

$$u_j = \int \gamma_j(x) \alpha(x) dx, \quad j=1,2 \dots,$$

где $\gamma_j(x)$ – функции, определяющие действие оператора $(AJA^* + K)^{-1}AJ$ на α и сами от α не зависящие. Тогда оценка функционала по наблюдениям \tilde{f} имеет вид

$$\hat{\alpha} = \sum u_j \tilde{f}_j = \int \alpha(x) \tilde{\varphi}(x) dx = \alpha(\tilde{\varphi}),$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \sum \tilde{f}_j \gamma_j(x)$ – слабое решение некорректной задачи, оптимальное в оценке произвольного функционала α .

Двумя разобранными случаями, т.е. когда Φ_0 – конечномерное подпространство и когда Φ_0 – ограниченный эллипсоид пространства Φ , по-видимому, исчерпываются ситуации, когда обратная задача (2) имеет слабое решение, одновременно оптимальное для всех ограниченных линейных функционалов. В общем случае оптимальная оценка, получаемая из формулы (11), хотя и линейна по наблюдениям, но нелинейно зависит от α и потому не может быть записана в форме слабого решения.

4. Структура обратной задачи для априорной информации, заданной калибровочным оператором, может быть представлена в виде следующей схемы:

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{A} & F \\ \uparrow \mathcal{J} & & \downarrow K^{-1} \\ \Phi^* & \xleftarrow{A^*} & U = F^* \end{array}, \quad (13)$$

где стрелками указано направление "действия" соответствующих операторов. Как видно из этой схемы, система всех четырех обозначенных гам операторов образует замкнутый цикл, т.е. их произведение, взятое в надлежащем порядке, действует "внутри" каждого из пространств, приведенных на схеме, и, как можно показать, имеет там собственные элементы.

Обозначим, как и ранее, оператор $\mathcal{G} = A^*K^{-1}A$ и рассмотрим проблему собственных значений

$$\mathcal{G} \psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad k=1,2 \dots \quad (14)$$

в исходном пространстве состояний Φ . Если A – вполне непрерывный оператор, то проблема (14) имеет дискретный ряд неотрицательных собственных значений, сходящихся к нулю:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0.$$

Предположим для простоты, что все собственные значения простые, и обозначим через φ_k собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k . "Перенос" системы векторов $\{\varphi_k\}$ в пространство Φ^* : $\alpha_k = \int \varphi_k$ дает систему элементов с двойной ортогональностью:

$$\alpha_k(\int \alpha_l) = \lambda_k \alpha_k(\varphi_l) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \lambda_k & k = l \end{cases}$$

при нормировке $\alpha_k(\varphi_k) = 1, k=1, 2, \dots$.

Оператор $\int \int$ называется информационным оператором эксперимента (обратной задачи), а система $\{\varphi_k\}$ образует канонический базис пространства Φ . Перенос этой системы вдоль цикла (13) порождает канонический базис в каждом из остальных пространств цикла. В частности, канонический базис пространства статистик U состоит из ортогональных (некоррелированных) статистик $u_k = K^{-1} \int \varphi_k$ с единичной дисперсией $\|u_k\|^2 = 1$.

Наилучшая статистика (12) для оценивания функционала α может быть представлена в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \alpha(\varphi_k) u_k,$$

а слабое решение обратной задачи записывается в виде разложения по каноническому базису пространства Φ :

$$\tilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} u_k(\tilde{f}) \varphi_k. \quad (15)$$

Из разложения (15) можно усмотреть, что в каноническом представлении эксперимент (обратная задача (2)) распадается на независимые однопараметрические элементарные эксперименты по оцениванию коэффициентов разложения неизвестного решения по каноническому базису. В этом представлении каждое из чисел λ_k имеет смысл отношения априорной дисперсии соответствующего коэффициента разложения к дисперсии ошибки измерения (отношение сигнал/шум для соответствующего элементарного эксперимента). Поэтому можно сказать, что каноническое представление обратной задачи описывает структуру полезной информации, содержащейся в экспериментальных данных. Основная информация о состоянии изучаемого объекта заключена, очевидно, в главных членах

разложения (15), определяемых условием $\lambda_k \geq 1$. Расчеты показывают, что собственные числа при $\lambda_k < 1$ убывают, как правило, весьма быстро, так что соответствующие члены разложения (15) могут быть отброшены без ущерба для точности восстановления.

Если распределение помех (процесса ξ) и априорное распределение – гауссовские, то общая информативность эксперимента, определяемая количеством информации Шеннона, может быть выражена формулой

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \lambda_k). \quad (16)$$

В общем случае формула (16) также может быть интерпретирована как некоторое количество информации, содержащееся в линейных статистиках вектора наблюдений.

5. Отметим в заключение основные особенности статистического подхода и направления его дальнейшего развития. Прежде всего статистический подход вынуждает в явном виде формулировать априорные предположения о решении. Далее, каждому набору априорных предположений соответствует оптимальный (т.е. гарантирующий наименьшую возможную ошибку) алгоритм решения обратной задачи, тогда как классические алгоритмы регуляризации в статистическом смысле лишь состоятельны, т.е. асимптотически сходятся к точному решению при неограниченном увеличении точности измерений. Статистические методы в процессе самого решения вскрывают структуру полезной информации, содержащейся в экспериментальных данных. Анализ этой структуры открывает возможность планирования эксперимента с целью достижения желательных информационных характеристик.

Дальнейшее развитие статистических методов в теории обратных задач связано с разработкой конструктивных алгоритмов построения оптимальных статистик (11) для конкретных видов априорных ограничений, адекватных сведениям, имеющимся в распоряжении экспериментатора.

Л и т е р а т у р а

1. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. – ДАН СССР, 1943, т.39, №5, с.195.

2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. – ДАН СССР, 1963, т.153, №1, с.49.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 335 с.
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
7. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
8. Тихонов А.Н. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 198 с.
9. Халфин Л.А. О теоретико-информационном подходе к теории спектральных приборов. – В кн.: Труды Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и мат. статистике. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1960, с.187.
10. Судаков В.Н., Халфин Л.А. Статистический подход к корректности задач математической физики. – ДАН СССР, 1964, т.157, №5, с.1058.
11. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малкевич М.С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач. – УФН, 1970, т.102, №3, с.345.
12. Козлов В.П. Математические вопросы обращения радиационных данных. – В кн.: Инверсия Абеля и ее обобщения /Под ред. Н.Г.Преображенского. Новосибирск, 1978, с.68.
13. Федотов А.М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1982. 189 с.
14. Математическая теория планирования эксперимента (Сер. СМБ) /Под ред. С.М.Ермакова. М.: Наука, 1983. 391 с.
15. Козлов В.П. К вопросу об оптимальной редукции в теории спектральных приборов. – В кн.: Труды 16-го Всесоюз. совещ. по спектроскопии (Москва, 1965). М.: Наука, 1966. с.73.
16. Петров А.П. Оценки линейных функционалов для решения некоторых обратных задач. – Журн. вычислит. мат. и мат. физики, 1967, т.7, №3, с.648.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ КАК СРЕДСТВО ДИАГНОСТИКИ ОКЕАНА

Л.А.Островский

ВВЕДЕНИЕ

Дистанционные методы играют все более значительную роль в изучении океана. Основным средством изучения неоднородностей в толще океана должны служить низкочастотные звуковые волны, на использовании которых основана, в частности, акустическая томография [1]. Однако существуют задачи, которые вряд ли целесообразно решать с помощью акустических средств. Во-первых, акустические неоднородности в океане обычно весьма слабы, и необходимость их регистрации предъявляет жесткие требования к соответствующим системам излучения, приема и обработки. Во-вторых, изучение приповерхностных слоев океана акустическими методами обычно возможно лишь на небольших дистанциях, в основном с помощью зондирования направленным ультразвуком. Здесь может применяться диагностика сверху радиолокационными и оптическими средствами; в частности, даже простое фотографирование сверху — с корабля, самолета, искусственного спутника — дает массу информации о морской поверхности. Однако такая диагностика наиболее эффективна именно для изучения поверхности — поверхностных волн, температурных свойств тонкого приповерхностного слоя или для сильных внутренних волн, синоптических вихрей, оказывающих достаточно выраженное влияние на спектр поверхностных волн [2], да и то получить количественные данные здесь не так просто. Так или иначе, представляется полезным и своевременным рассмотреть и другие возможные методы изучения океанических движений и неоднородностей.

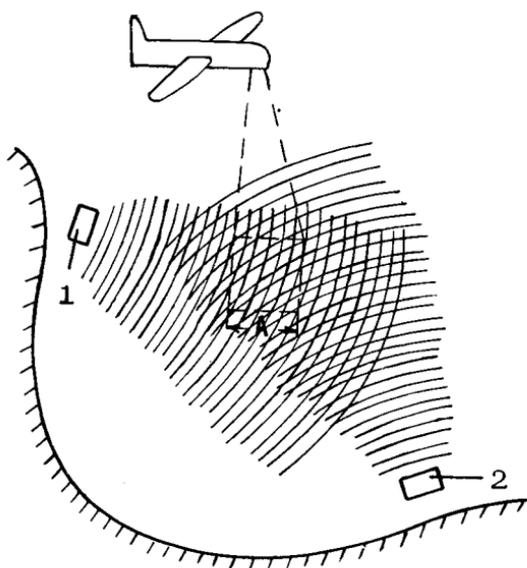
В данной статье обсуждаются некоторые новые возможности диагностики океана, которые привлекли в последнее время внимание исследователей как в нашей стране, так и за рубежом. Эти возможности связаны с искусственным возбуждением в море поверхностных и внутренних волн с целью изучения либо их самих, либо, с их помощью, других, как сейчас принято говорить, "гидрофизических характеристик океана", например параметров течений.

Использование гравитационных волн для целей локации выглядит непривычно и вызывает некоторые очевидные возражения: скорость используемых волн мала, а возбуждать их, на первый взгляд, трудно. Однако, во-первых, время изменчивости изучаемых процессов часто очень велико, а, во-вторых, требуемая мощность возбуждаемых волн оказывается не такой уж большой. С другой стороны, использование "медленных" волн сулит и явные преимущества. Так, при использовании поверхностных волн для измерения течений (см. далее разд.1) сразу выявляются, по крайней мере, три достоинства. Во-первых, в отличие от акустических волн, на скорость поверхностных волн не оказывают заметного влияния изменения температуры среды, играющие основную роль в акустической томографии. Во-вторых, чувствительность метода очень велика. Так, типичные скорости v_s для главных течений и синоптических вихрей имеют порядок 0,1-1 м/с. Очевидно, относительные изменения задержек или волновых чисел зондирующих волн имеют порядок v_s/v_Φ , где v_Φ - фазовая скорость волны. Для звука эта величина порядка 10^{-3} - 10^{-4} , тогда как для поверхностных волн с периодом в несколько секунд она составляет единицы или даже десятки процентов. В-третьих, как видно из дальнейшего, локальная скорость течения определяется лишь локальными свойствами зондирующей волны, и ее измерение не требует решения сложной томографической задачи. Внутренние волны еще более чувствительны к изменениям условий их распространения.

Ниже рассматриваются две проблемы этого рода.

1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ И ИЗМЕРЕНИЕ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Способ измерения приповерхностных течений посредством возбуждения поверхностных волн был недавно предложен независимо у нас и за рубежом. Его сущность - в следующем (рис.1).



Р и с. 1. Общая схема метода изучения приповерхностных течений с помощью искусственно возбуждаемых поверхностных волн: 1,2 - волнопродукторы, А - размер "окна наблюдения"

Пусть в некоторой точке моря установлены два источника поверхностных волн (волнопродукторы), возбуждающие гармонические во времени поверхностные волны. Эти волны попадают в исследуемый участок акватории, в котором существуют приповерхностные течения с горизонтальной скоростью $\vec{U}(x, y)$, где x, y - горизонтальные координаты. Сделаем одно существенное предположение: длина возбуждаемых поверхностных волн λ мала по сравнению с масштабом изменения течения в горизонтальной плоскости. Предположим еще для простоты, что в вертикальной плоскости течение можно считать однородным до глубины порядка $\lambda/2\pi$. Впрочем, это второе предположение менее существенно, поскольку действие неоднородного по глубине течения $\vec{U}(x)$ на волну эквивалентно действию однородного течения с эффективной скоростью $U_{эф} = 2\kappa \int_0^{\infty} U(x) e^{-2\kappa z} dz$, где κ - волновое число, а z - глубина, отсчитываемая от поверхности [3].

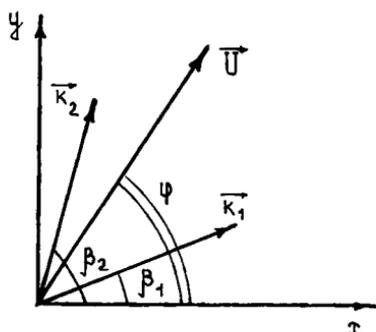
Итак, рассматривается сравнительно короткая поверхностная волна на плавно неоднородном горизонтальном течении. Для такой волны локально справедливо обычное дисперсионное уравнение с учетом влияния потока

$$\omega - \vec{k}\vec{U} = \sqrt{gk} . \quad (1)$$

Если частота волны ω известна (она совпадает с частотой колебаний волнопродуктора, если только течение не испытывает каких-либо быстрых и сильных изменений за время измерений), то, измеряя волновой вектор \vec{k} , из уравнения (1) определяем проекцию \vec{U} на направление \vec{k} :

$$U_{\vec{k}} = k^{-1}(\omega - \sqrt{gk}) . \quad (2)$$

Если же в месте измерения существуют две волны с разными \vec{k} , то таким образом определяются две проекции вектора \vec{U} и этот вектор будет известен полностью. Выбирая оси координат x, y произвольным образом (рис.2), зная углы β вол-



Р и с. 2. Направления распространения зондирующих волн и скорость течения в горизонтальной плоскости

новых векторов относительно этих осей и проекции U_{k_i} скорости на направления \vec{k}_i , с помощью элементарных тригонометрических соотношений получим модуль вектора \vec{U} и угол между ним и осью x :

$$U = U_{k_i} (\cos \varphi \cos \beta_i - \sin \varphi \sin \beta_i)^{-1} ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{k_2} \cos \beta_1 - U_{k_1} \cos \beta_2}{U_{k_2} \sin \beta_2 - U_{k_1} \sin \beta_1} , \quad (3)$$

где $i=1,2$ соответствуют двум возбуждаемым волнам, а U_{k_i} определяется из соотношения (2) для каждого k_i .

Итак, наша задача сводится к измерению волнового вектора \vec{k} волны в той же акватории (вернее, в области, большой по сравнению с длиной волны, но малой в сравнении с мас-

штабом изменения \vec{U}), где нужно определить течение; другими словами, достаточно иметь локальную информацию о волнах, а снимок или радиолокационное изображение большой акватории (с самолета, ИСЗ) позволяет измерить течение во всех точках этой акватории.

Уровень помехи. Для оценки эффективности метода необходимо также учесть помеху, которой в данном случае является ветровое волнение. Конечно, уровень помехи зависит от силы ветра, причем на больших акваториях он часто сильно неоднороден в пространстве. Чтобы получить здесь какое-либо представление о ситуации, возьмем худший случай - насыщенный спектр волнения, реализуемый лишь при достаточно сильном ветре и для относительно коротких волн. В таком спектре среднеквадратичное смещение поверхности равно [4]

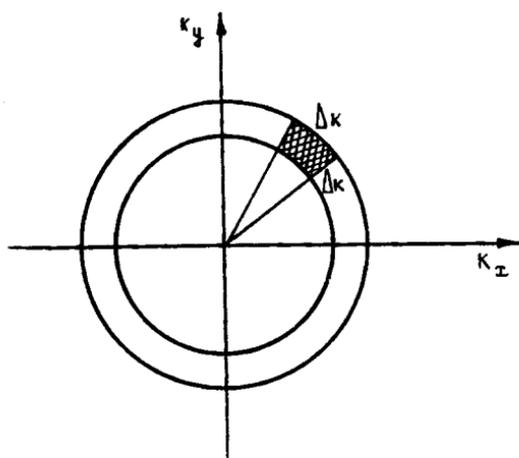
$$S(\omega) \approx 7,8 \cdot 10^{-3} g^2 \omega^{-5} \approx 0,77 T^5 (\text{см}^2 \cdot \text{с}), \quad (4)$$

где ω - частота, T - период волны, с. Чтобы определить уровень помехи, необходимо задать интервал волновых чисел, "вырезаемый" при обработке сигнала. Если задан размер A участка акватории, на котором определяется локальное значение вектора \vec{U} , и ведется двумерный спектральный анализ, позволяющий определить \vec{k} , то минимальный интервал спектрального разрешения Δk дается спектральным соотношением неопределенности $\Delta k \approx 2\pi/A$. Это значит, что на плоскости k_x, k_y вырезается площадка $\Delta k \times \Delta k$, а уровень возвышения поверхности ξ для помехи в этом "окне обработки"

$$\sqrt{\langle \xi^2 \rangle} = \left[S(\omega) \Delta \omega \frac{\Delta k}{2\pi k} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

причем $\Delta \omega = v_{gr} \Delta k$ (v_{gr} - групповая скорость). Действительно, интервал волновых чисел Δk в направлении \vec{k} отвечает кольцу радиусом k и шириной Δk , а такой же интервал в поперечном направлении "вырезает" из этого кольца долю $\frac{\Delta k}{2\pi k}$ (рис.3).

Примем для определенности $A = 1$ км (для наблюдений с самолета это вполне разумная величина). Тогда из формул (4) и (5) легко рассчитать среднюю "помеху" в интервале разрешения. Из табл.1, где приведен результат расчета для волн с длинами, лежащими в широком диапазоне от 0,4 до 156 м, видно, что уровень помехи растет с ростом длины волны, но не превышает 1 см вплоть до периода $T \approx 6$ с.



Р и с. 3. Интервал разрешения на плоскости волновых векторов

Т а б л и ц а 1

T, c	0,5	1	2	3	4	5	7	8	10
λ, m	0,39	1,56	6,24	14	30	39	76,4	100	156
$\sqrt{\langle \xi^2 \rangle},$ см	$6 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	0,015	0,077	0,24	0,6	2,1	3,95	9,7

Пороговый уровень сигнала. Следующий важный вопрос — об уровне сигнала, т.е. зондирующей волны в точке наблюдения. Кроме ослабления из-за цилиндрической расходимости, необходимо учесть поглощение волны. Этот вопрос не особенно ясен. Кинематическая вязкость дает очень малые потери, но реальные потери могут быть гораздо больше из-за влияния приповерхностной турбулентности, рассеяния на волнах мелких масштабов, взаимодействия с ветром (последнее, впрочем, может и "подпитывать" волну). Примем для оценки, что затухание определяется эквивалентным коэффициентом вязкости, на два порядка большим, чем в чистой воде, т.е. $\nu \approx 1$ см/с (некоторые основания для этого дают измерения уровня турбулентности в верхнем слое океана [5]). Тогда высота волны убывает по закону

$$\xi_s \sim e^{-\gamma^2/\sqrt{\tau}}, \quad \gamma = \frac{2\nu\omega^5}{g^3}, \quad \nu \approx 1 \text{ см}^2/\text{с}. \quad (6)$$

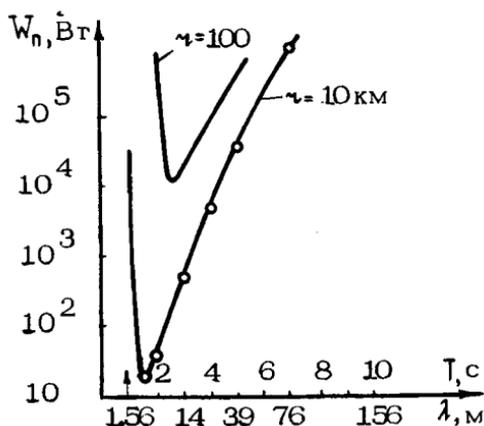
Результаты расчетов по этой формуле сведены в табл.2 - видно, что волны длиной более 100 м практически не загужают в океане; это подтверждается наблюдениями волн зыби, распространяющихся из районов шторма.

Т а б л и ц а 2

$\tau, \text{с}$	0,5	1	2	3	4	5	7	8	10
$L=\gamma^{-1}, \text{км}$	0,015	0,48	154	120	500	1500	$8 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$

Теперь можно оценить пороговую мощность источника сигнала, необходимую для превышения уровня помехи при указанных выше условиях. Для этого нужно приравнять значения $\sqrt{\langle \xi^2 \rangle}$ и ξ_s , определяемые формулами (5) и (6), и полученное значение ξ "пересчитать к источнику", учтя ослабление сигнала по формуле (6). Другими словами, пороговая мощность W_n дается выражением

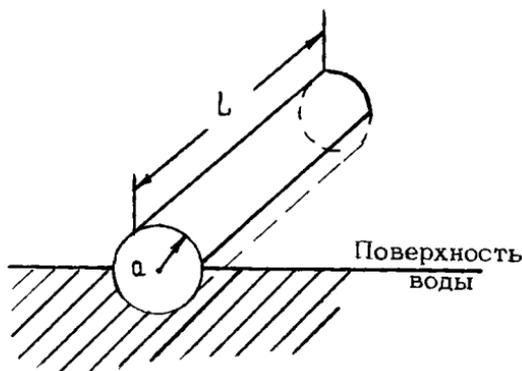
$$W_n = \frac{\rho g^2 \tau \gamma}{4} \langle \xi^2 \rangle \text{стр} (2\gamma\tau). \quad (7)$$



Р и с. 4. Пороговая мощность (граница превышения сигнала над помехой при спектральной обработке) как функция периода зондирующей волны

На рис.4 показана зависимость W_n от периода волны для расстояний 10 и 100 км. Здесь уже вступается оптимальный период волны – свой для каждого расстояния от источника. При этом мощности получаются небольшими: порядка 10 Вт для десятикилометровой и 10 кВт для стокилометровой акватории; оптимальный период волны в последнем случае составляет примерно 1 с.

Излучение сигнала. Один из наиболее сложных вопросов, содержащих "много неизвестных", относится к способам возбуждения волн – устройству волнопродукторов, вариантов их установки и т.д. Ограничимся здесь лишь одним оценочным примером. Пусть излучатель представляет собой горизонтально расположенный цилиндр (или полуцилиндр), лежащий своей средней плоскостью на поверхности воды и совершающий вертикальные колебания с амплитудой ξ_0 (рис.5). Поскольку в



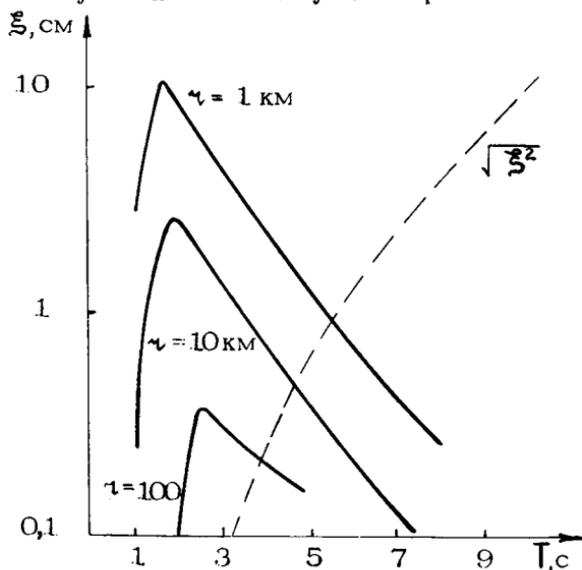
Р и с. 5. Цилиндрический волнопродуктор поверхностных волн

излучении участвует лишь нижняя половина цилиндра, находящаяся в воде, излучение имеет монополюсный характер и описывается формулой *)

$$\frac{W_0}{W_0} = \exp(-\gamma r) L a \left(\frac{2k^3}{\pi r} \right)^{1/2} \left[\int_0^1 \exp(-k a \sqrt{1-x^2}) \cos k a x dx \right] \frac{\sin(k L \cos \alpha)}{k L \cos \alpha}, \quad (8)$$

*) Соответствующая задача была решена в книге Л.Н.Сретенского [6].

где L – длина, a – радиус цилиндра, α – угол в горизонтальной плоскости относительно оси цилиндра. Последний множитель в формуле (8) описывает направленность излучения в горизонтальной плоскости; в дальнейшем будем интересоваться уровнем излучения в максимуме направленности ($\alpha = \pi/2$).



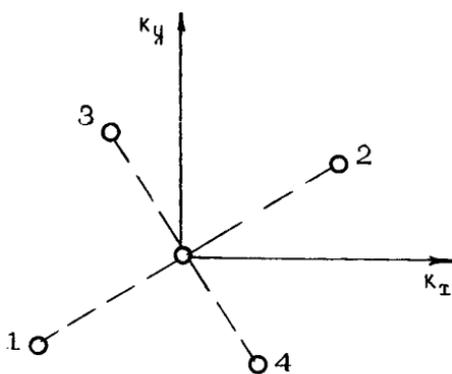
Р и с. 6. Уровень сигнала от цилиндрического волнопродуктора на расстояниях 1, 10 и 100 км (с учетом затухания). Штриховая линия – уровень помехи

На рис.6 приведены рассчитанные по формуле (8)*) значения высоты волны ξ в зависимости от ее периода T при следующих параметрах: $a = 1$ м, $L = 20$ м (т.е. объем погруженной части цилиндра, вернее, трубы, – примерно 30 м^3), $\xi_0 = 0,5$ м (наибольшая амплитуда, для которой с некоторой натяжкой еще применима “линейная” формула (8)). Данные приведены для трех расстояний: 1, 10 и 100 км. Здесь же показан уровень помехи $\sqrt{\xi^2}$, соответствующий формуле (5).

*) Отметим, что интеграл в формуле (8) является, вообще говоря, осциллирующей функцией кд. но лишь для очень коротких волн, быстро затухающих в нашем случае.

Очевидно, что для волн с периодом в единицы секунд уровень сигнала существенно выше уровня помехи даже для расстояний порядка 100 км. При этом максимум излучения соответствует примерно тем же периодам волн, что и минимум пороговой мощности для тех же расстояний (ср. рис.4 и 6), т.е. при данном уровне помехи выбранные размеры излучателя, вероятно, недалеко от оптимальных.

Эксперимент. К настоящему времени этот метод уже вышел из стадии идей и осуществлен на практике (правда, в сравнительно небольших масштабах) Шересом [3]. Эксперимент проводился в неглубокой лагуне. Два волнопродуктора (колеблющиеся пластины), расположенные примерно в 60 м от берега, возбуждали волну с периодом $T = 0,76$ с (что соответствует $\lambda = 0,92$ м на неподвижной воде). Водная поверхность фотографировалась сверху, и затем проводился двухмерный спектральный анализ фотографий. Один из результатов такого анализа, отвечающий области посередине между источниками, грубо воспроизведен на рис.7. Каждая пара диаго-



Р и с. 7. Схема двумерного фурье-изображения зондирующих волн в области размещения порядка 15 длин волн, расположенной в 50 м от берега, посередине между волнопродукторами [3]

нально расположенных точек соответствует одной из волн, а расстояние между этими точками пропорционально модулю волнового вектора. Заметим, что расстояние между точками 1 и 2 отвечает как раз невозмущенной длине волны 0,92 м. Это означает, что в этой точке течение перпендикулярно вол-

новому вектору одной из волн. Другая же пара точек (3,4) разнесена меньше, т.е. длина второй волны растет - она "сносится" по течению.

Полученные таким образом данные сравнивались с прямыми измерениями течения с помощью излучателей, помещенных на глубине 0,6 м, где влияние волны уже несущественно. Это сопоставление показывает, что данные двумерного спектрального анализа и контактных измерений во всех случаях хорошо совпадают в отношении направления течения, но дистанционные измерения дают заметно меньшую величину U (скажем, 12 см/с вместо 20). Автор объясняет это объективным различием величины U на поверхности и на глубине 60 см, вызванным влиянием прибрежной электростанции на водный режим лагуны.

Подчеркнем, что каждый единичный снимок позволяет восстановить поле скоростей на значительной акватории. В этом отношении данный метод имеет, по-видимому, ряд преимуществ перед дистанционным радиолокационным методом, который также используется для измерения течений на поверхности [7] и в котором получаемые данные обычно усреднены по значительному интервалу времени (20 мин) и по площади размером в несколько километров [7].

Заметим также, что используемый автором период волны (0,76 с) для зондирования акватории в сотни метров недалек от оптимального в том смысле, о котором говорилось выше. Это показывает оценка по формуле (7), причем пороговая мощность, необходимая для "засветки" стометровой площадки, не превышает десятых долей ватта. Более детальный расчет произвести для этого случая нет возможности, поскольку автор [7] не приводит размеров волнопродукторов.

2. ОБ ИСКУССТВЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В МОРЕ

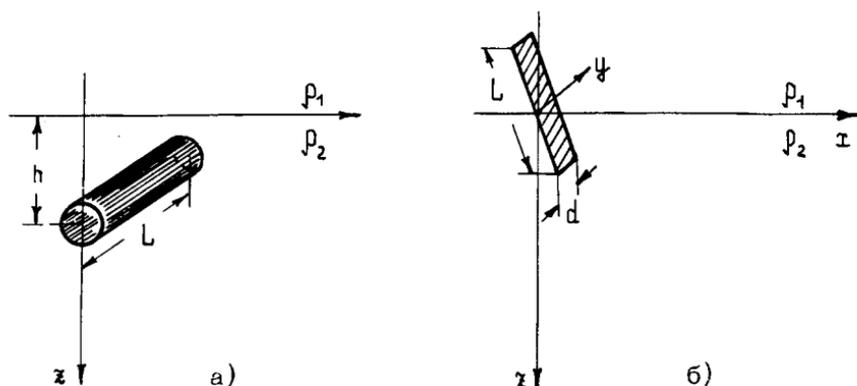
В настоящее время общепризнано, что внутренние волны являются одним из важнейших факторов, определяющих уровень турбулентности и тонкой структуры океана, а также влияющих на состояние его поверхности, регистрируемое методом космической океанографии. В то же время степень изученности процессов взаимодействия внутренних волн с другими гид-

рофизическим и полями все еще очень мала, несмотря на все растущий интерес исследователей к этим проблемам. Основная причина заключается в трудностях эксперимента, связанного с тщательным количественным измерением различных возмущений и установлением корреляций между ними. Дело осложняется и тем, что условия эксперимента обычно зависят от ряда неконтролируемых факторов, в том числе от параметров внутренних волн, приходящих в точку наблюдения. В настоящее время известны лишь единичные эксперименты по прямому наблюдению взаимодействий внутренних волн с турбулентностью и поверхностными волнами в натуральных условиях. Но даже в этих случаях трудно обеспечить повторяемость результатов из-за изменчивости поля внутренних волн.

В такой ситуации перспективным представляется искусственное возбуждение внутренних волн в море с помощью специальных волнопродукторов. Это позволило бы получить калиброванные волны с достаточно хорошо контролируруемыми и стабильными параметрами. В свою очередь, стабильность "сигнала" создает возможность возбуждения его на фоне даже сильной помехи с помощью стандартных методов обработки, обычных для радиофизики и акустики.

Не будем здесь, как в разд.1, давать подробный анализ условий выделения "сигнала" на фоне "помехи" - естественных внутренних волн, поскольку этот фон известен плохо. Однако ряд соображений можно высказать. Так, вряд ли целесообразно пытаться "засветить" искусственными волнами всю толщу океана - целесообразно использовать верхний, сезонный термоклин как "канализирующее устройство". Следовательно, речь идет о достаточно высокочастотных внутренних волнах, которые могут быть локализованы в сезонном термоклине. Здесь уровень фона внутренних волн изучен относительно слабо. На первом этапе речь, по-видимому, может идти о волнопродукторе, установленном в области шельфа (где "внутренняя погода" обычно спокойнее) и "засвечивающем" сравнительно небольшую акваторию, скажем, 1-10 км в радиусе, где волна может надежно выделяться на фоне "помехи". Еще лучше, если на небольших расстояниях (хотя бы в сотни метров) волна могла бы оказывать заметное воздействие на поверхностное волнение и уровень турбулентности в районе термоклина - это создало бы возможность контролировать не только распространение внутренних волн, но и их "вторичные" проявления.

Чтобы получить грубое представление о возможности выполнения этих условий, рассмотрим некоторые весьма упрощенные ситуации (рис.8). Пусть волнопродуктор находится



Р и с. 8. Схемы расположения волнопродукторов:
 а - цилиндрический волнопродуктор, б - качающаяся вертикальная пластина

под (или над) пикноклином, моделируемым скачком плотности $\Delta\rho$. В качестве волнопродукторов рассматривались две модели: горизонтально лежащий цилиндр, совершающий вертикальные колебания с амплитудой ξ_0 , и вертикально расположенная пластина, колеблющаяся около горизонтальной оси. Действие таких волнопродукторов может быть приближенно представлено системой источников и стоков массы. Так, цилиндр в первом приближении представим системой диполей, а тонкую пластину, для которой обтекание становится стрывным даже при небольших числах Рейнольдса, - системой монополей, характеризуемых коэффициентом сопротивления $C_d \approx 1$. Если еще поперечные размеры волнопродуктора малы по сравнению с $\lambda/2\pi$ (λ - длина генерируемой волны) и с глубиной h его расположения под пикноклином, то высота ξ смещения пикноклина, создаваемого волнопродуктором на расстоянии r (в волновой зоне), дается формулами

$$\frac{\xi_I}{\xi_0} = \frac{Ld \omega^5}{8g'^2} \sqrt{\frac{2\pi}{rg'}} \exp\left(-\frac{\omega^2 h}{g'}\right) \frac{\sin \delta}{\delta}; \quad (9a)$$

$$\xi_{II} = \frac{c_d L}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{g' \tau}} \frac{g'}{\omega} \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega^2 d}{2g'}\right) \left(1 + \frac{\omega^2 d}{2g'}\right) \right] \sin \theta_0 \frac{\sin \delta}{\delta}, \quad (9,б)$$

где индекс I относится к цилиндру, II - к вертикальной пластине. Здесь L - длина волнопродуктора; d - диаметр цилиндра и ширина пластины; $g' = g \Delta \rho / 2\rho$; $\delta = (\omega^2 L / 2g) \cos \alpha$; α - как и выше, угол, отсчитываемый от нормали к оси системы в горизонтальной плоскости; θ_0 - амплитуда угловых колебаний пластины в случае II.

Мощность излучаемых волн (при условии $kL \ll 1$, т.е. $\delta \ll 1$) равна

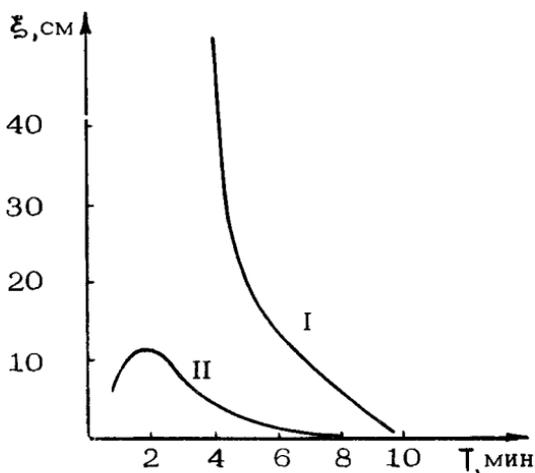
$$W = g \Delta \rho \xi^2 2\pi \tau v_{гр}, \quad (10)$$

где $v_{гр}$ - групповая скорость данной волны; для данной модели $v_{гр} = g' / 2\omega$.

Для конкретных оценок примем $g' = 5 \cdot 10^{-3}$ м/с² (т.е. $\Delta \rho / \rho = \approx 10^{-3}$). Такие пикноклины типичны для многих морей, в том числе для Черного моря. Примем для определенности, что оси цилиндра и горизонтальной пластины расположены на 8 м глубже пикноклина (т.е. в формуле (9,а) $h = 8$ м), а ось вертикальной пластины находится в самом пикноклине (это уже учтено в формуле (9,б)). В дальнейших расчетах примем $L = 50$ м, $d = 10$ м, $\xi_0 = 4$ м, $\theta_0 = 10^\circ$. Результаты расчетов приведены в табл.3 и на рис.9, где показана зависимость амплитуды смещения пикноклина от частоты на расстоянии $\tau = 10$ км от волнопродуктора (в направлении $\alpha = 0$). Заметим, что в каждом случае существует оптимальная частота колебаний, соответствующая наибольшей амплитуде смещения на данном расстоянии. Для трех рассматриваемых случаев она соответственно равна

$$\omega_x(I) = \sqrt{\frac{5g'}{2h}}, \quad \omega_x(II) = \sqrt{\frac{6,4g'}{d}}.$$

Заметим, что, как видно из рис.9, более эффективным излучателем при одинаковых площадях продольного сечения следует признать цилиндр. Вместе с тем, даже "слабый" вариант II приводит к вполне обнаружимым (с учетом возможностей обработки стабильного сигнала) значениям амплитуды волны. Впрочем, в этом варианте наибольшие (горизонтальные) смещения концов пластины от среднего положения составляют лишь 88 см против 4 м для первого варианта. Кроме того, лабораторные эксперименты, проведенные в ИПФ, показывают, что только в варианте II реализуется одномодо-

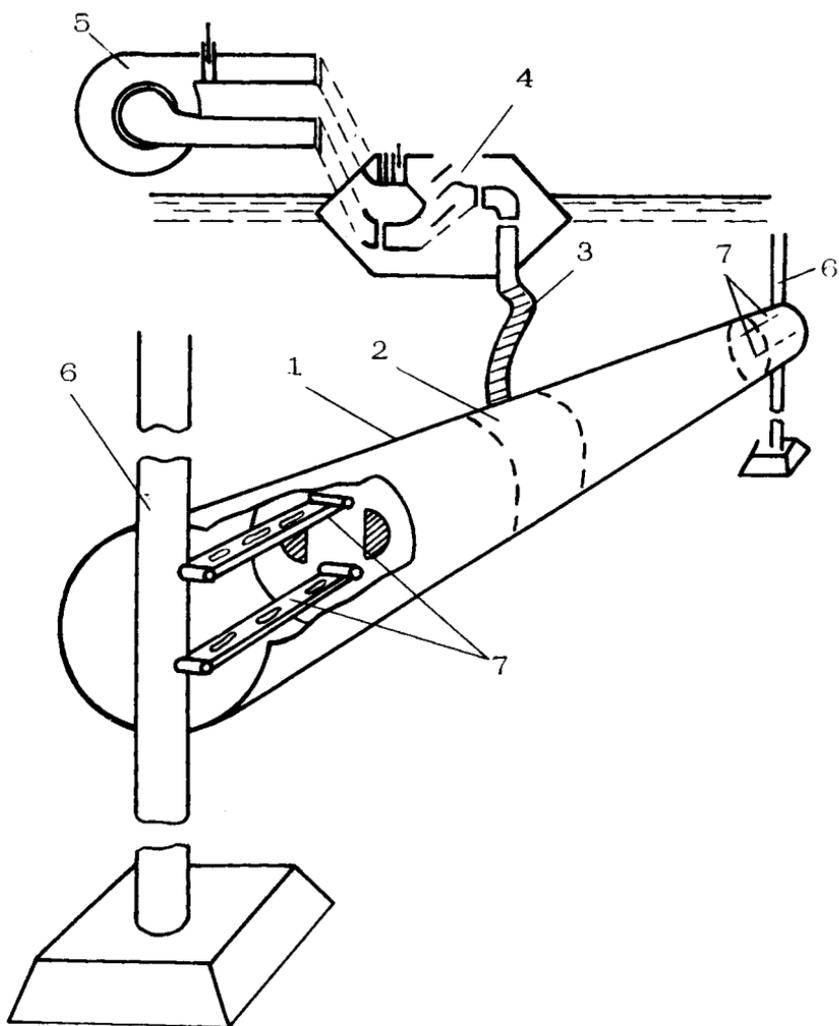


Р и с. 9. Амплитуда возбуждаемых внутренних волн на расстоянии 10 км от волнопродуктора как функция периода колебаний волнопродуктора: I – цилиндр; II – вертикальная пластина

ый режим возбуждения реального (имеющего конечную толщину) пикноклина.

Из табл.3 видно, что энергетическим требованиям к волнопродукторам внутренних волн, по-видимому, весьма несложно удовлетворить. Наиболее сложная проблема – их размеры: изготовление и установка тел длиной в десятки метров и площадью в сотни квадратных метров в реальных условиях моря (даже его прибрежной зоны) – задача не простая. Вместе с тем, ввиду малости сил плавучести, управление такими системами в принципе не представляет большого труда. Один из возможных вариантов волнопродуктора [8] (типа I) показан на рис.10. Сам цилиндр не герметичен, он сообщается с водной средой и имеет почти нейтральную плавучесть. Управление движением системы осуществляется посредством отсека плавучести, из которого с помощью воздушного компрессора вытесняется вода (или, наоборот, отсасывается воздух). Если волнопродуктор находится в стратифицированной жидкости с частотой Вайсяля N , то уравнение его колебаний имеет вид

$$\ddot{\xi} + N^2 \xi = \frac{g \Delta \rho_b}{\rho} - F_T, \quad (11)$$



Р и с. 10. Схема цилиндрического волнопродуктора для шельфовой зоны [8]: 1 – волнообразующий элемент, 2 – отсек плавучести, 3 – трубопровод, 4 – распределительное устройство, 5 – компрессор, 6 – опора, 7 – параллелограммные подвески

Т а б л и ц а 3

Т , мин	ξ , см $r = 1$ км	ξ , см $r = 10$ км	ρ , Вт
	Цилиндрический волнопродуктор		
4	197	62	5830
5	64	20	780
7	12	9,8	38
10	2	0,6	1,5
	Вертикальная пластина		
4	13,5	4,2	7,5
5	8,1	2,15	3,2
7	3,6	1,2	9,5
10	1,2	0,4	1,5

где F_T – сила сопротивления жидкости, $\Delta\rho_B(t)$ – средняя избыточная плотность цилиндра. Если пренебречь членом F_T , то из уравнения (11) легко видеть, что для создания колебаний с амплитудой ξ_0 необходимо изменять среднюю плотность с амплитудой

$$\Delta\rho_B \approx \frac{N^2 - \omega^2}{g} \rho \xi_0. \quad (12)$$

Например, при $\xi_0 = 4$ м, $T = 5$ мин отсюда следует $\Delta\rho_B = 2 \cdot 10^{-4} \rho$. Это означает, что объем воды в цилиндре водоизмещением 5000 м^3 должен изменяться всего на 1 м^3 ; этим и определяется объем герметизированного "отсека плавучести". В этом случае для управления волнопродуктором достаточно стандартного компрессора.

Несколько слов о силе сопротивления F_T . Несмотря на малые скорости движения (низкие частоты), наибольшее число Рейнольдса Re для рассматриваемого случая весьма велико (для периодов в единицы минут – до 10^6); при таких Re можно положить $F_T \sim \rho u^2 S_{\text{пл}}$, где $u \sim \omega \xi$ – мгновенная скорость движения цилиндра. Простая оценка показывает, что в этом случае отношение F_T/ξ имеет порядок ξ/d и в рамках данного приближения мало.

В ИПФ был произведен также расчет излучения внутренних волн вертикально расположенной пластиной (вариант II), которая подвижно закрепляется на секциях и может ориентироваться по течению (принцип "флюгера") и тем самым решить довольно сложную проблему устранения напора воды. Качание пластины также может осуществляться с помощью компрессора.

Сделанные здесь оценки, в лучшем случае, могут считаться "прикидочными": они не учитывают влияния поверхности, они теряют применимость при $d \sim h$; наконец, минимальное значение T ограничено реальным максимумом частоты Вайселя в пикноклине (значение $T = 3$ мин вполне реально, скажем, для Черного моря, но, как правило, слишком мало для океана). Вместе с тем эти оценки свидетельствуют о том, что создание волнопродуктора внутренних волн выглядит хотя и не простой, но вполне реальной задачей.

Здесь рассмотрены лишь некоторые вопросы, связанные с использованием поверхностных и внутренних волн в качестве искусственно создаваемого сигнала для изучения как их самих, так и других неоднородностей и течений в океане. Такие методы позволили бы, кроме измерения приповерхностных течений (уже реализованного), осуществлять локацию неоднородностей термоклина (при этом коэффициент отражения назад может быть близок к единице, что нереально для звука), изучать воздействие внутренних волн на поверхностные и турбулентность и, наконец, осуществить прямые измерения затухания поверхностных и внутренних волн (задача до сих пор не решенная в натуральных условиях). Можно думать и о возможностях построения изображений в поверхностных и внутренних волнах. Во всяком случае, на наш взгляд, вопросы "гравитационной" диагностики сигнала заслуживают внимания и интереса, в том числе со стороны молодых исследователей.

Л и т е р а т у р а

1. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: a scheme for large scale monitoring. - Deep-Sea Res., 1979, v.26A, p.123.

2. Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н. Воздействие внутренних волн на морскую поверхность. - В кн.: Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983, с.240.

3. Sheres D. Remote Synoptic Surface current measurements by gravity waves; a method and its test in a small body of water. - J. Phys. Oceanography, 1982, v.12, N2, p.200.

4. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

5. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

6. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.

7. Barrick D.E. HF radio oceanography.-a review. - Boundary-Layer Meteorol., 1978, v.13, p.23.

8. Богатырев С.Д. и др. Волнопродуктор. Заявка на изобретение №3515773/11 (положительное решение ВНИИГПЭ от 12 апреля 1983 г.).

АКУСТИЧЕСКИЙ ТОМОСИНТЕЗ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ОКЕАНЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.М.Бухштабер, В.К.Маслов, А.М.Трохан

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методы восстановления внутренней структуры объектов, сред по их проекциям (томография) получили в последнее десятилетие широкое распространение в самых различных областях науки и техники [1], что в значительной мере обусловлено прогрессом вычислительной техники, позволившей в разумное время решать обратные задачи весьма большой размерности по реконструкции "образа" объекта или среды.

Рассматривается схема исследования неоднородных сред методом динамического томографирования, осуществляемого с помощью подвижных приемоизлучающих акустических устройств, применительно к задачам диагностики среднемасштабных неоднородностей ($l \sim 10^3 - 10^5$ м) в приповерхностном слое океана (~ 500 м). Это такие задачи, как исследование структуры синоптических вихрей и меандров, изучение динамики внутренних волн, солитонов и мезомасштабных вихревых образований, определение геометрии фронтальных зон, интрузий и квазиоднородных слоев, исследование мезомасштабных конвективных процессов, апвеллинга и т.д. [2].

Океанографические и атмосферные задачи, в отличие от задач технологической интроскопии изделий, томографии в медицине и геофизике, обладают важной особенностью, заключающейся в том, что прямым наблюдениям доступна, по крайней мере, некоторая часть исследуемого физического пространства

Это обстоятельство позволяет в широких пределах управлять тактикой и геометрией сканирования в процессе эксперимента, производить его планирование и оптимизацию, а также использовать прямые наблюдения непосредственно при восстановлении структуры неоднородностей с целью улучшения разрешения и уменьшения статистических погрешностей.

Достаточно общая модель для реконструкции недоступного непосредственному наблюдению образа $f(x), x \in X \subset R^N$ по его вырожденным измеряемым характеристикам (проекциям) $P(y, w), w \in W, y \in Y \subseteq R^k, k < N$ может быть во многих практических случаях сведена к решению системы интегральных уравнений типа

$$P(y, w) = \int_{x \in R^N} f(x) H_w(x, y) \mu(dx) + \eta_w(y), \quad (1)$$

где $H_w(x, y)$ – ядро интегрального преобразования (1), определяющего геометрию системы измерения проекций $P(y, w)$, а также физические свойства взаимодействия зондирующего излучения с объектом – в активных системах томографирования, либо свойства среды распространения сигналов (волн) – в пассивных системах визуализации структуры "самосветящихся" объектов; $\eta_w(y)$ – инструментальные шумы и помехи, всегда присутствующие в реальных измерениях; w – матрица параметров сканирования, определяющая набор углов ("точек зрения"), под которыми просвечивается или рассматривается объект (участок среды) в процессе томографирования; $P(y, w)$ – измеряемая характеристика объекта – проекция на подпространство $Y \subseteq R^k$ в "направлении" $w \in W, k < N$; $f(x)$ – реконструируемый образ объекта; $x \in X \subset R^N$ – искомая функция распределения физических величин, например, плотности, температуры, скорости волн и т.п. в области $X \subset R^N$.

Для классической схемы активной томографии в приложении геометрической оптики ядро $H_w(x, y)$ имеет вид

$$H_w(x, y) = \delta(y - w^T x), \quad w: R^N \rightarrow R^k, \quad (2)$$

т.е. в этом случае уравнение (1) представляет собой преобразование Радона. При этом в физических задачах обычно $k = 1$ или 2, $N = 2$ или 3.

В последние годы интенсивно развиваются дифракционные методы томографии [3]. В этих методах волновое уравнение, описывающее распространение волн (например, звуковых) в сре-

де с пространственно изменяющимися акустическими параметрами, решается приближенно. Затем с помощью этого решения производится реконструкция набора параметров среды (например, скорости звука) по наблюдаемым двумерным распределениям комплексной амплитуды поля [4,1].

В работе [3] описана стационарная базовая томографическая система диагностики океанских бассейнов на основе измерения времени прохождения акустических сигналов вдоль нескольких разрешаемых лучей. Трехмерная реконструкция бассейна (определение вариаций скорости звука $\delta c_{i,m}$ в ячейках объема, i – номер ячейки в m -м слое по глубине) достигается путем решения последовательности двумерных обратных задач для всех m слоев. Задача восстановления структуры любого горизонтального слоя является канонической и сводится к решению системы алгебраических уравнений, возникающих в результате дискретизации основного соотношения (1). Для этого в горизонтальном слое (например, на оси подводного звукового канала) задается некоторая стационарная конфигурация расположения источников и приемников и считается, что лучи, проходящие разными путями, в вертикальном разрезе могут быть разделены.

Регион (слой), охватываемый заданной конфигурацией источников и приемников, разбивается на ряд более мелких ячеек (рис.1), размер и количество которых определяется горизонтальным масштабом возмущений, подлежащих обнаружению и реконструкции. С другой стороны, это накладывает требования на необходимое количество источников и приемников, которое и является главным ограничивающим фактором на величину реального пространственного разрешения [3,5]. Измеряемое время прохождения сигнала вдоль луча определяется соотношением

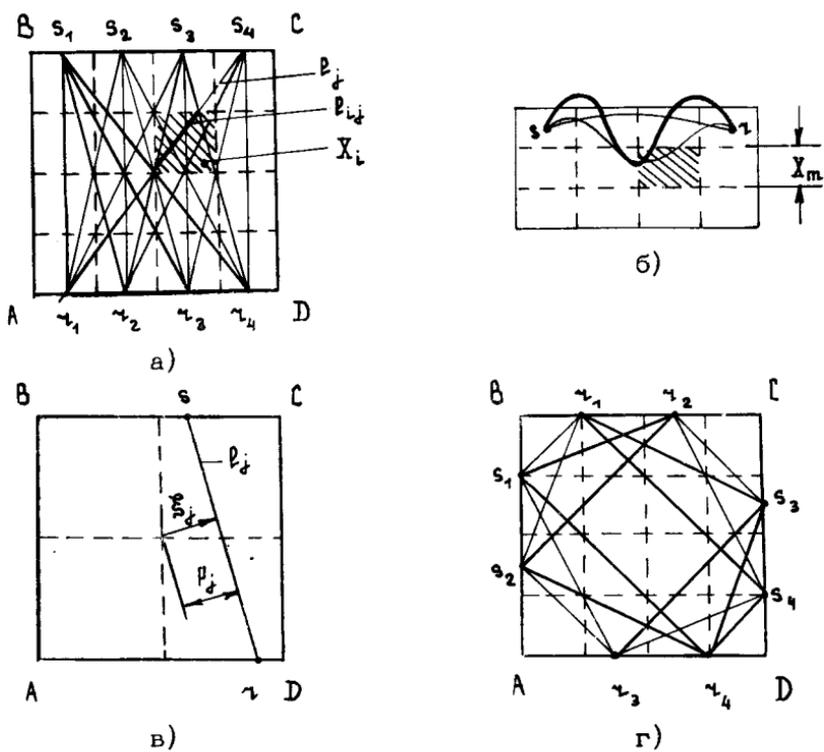
$$T_i = \sum_{j=1}^J \frac{R_{ij}}{c_j} \approx T_{i0} + \delta T_i,$$

где

$$T_{i0} = \sum_{j=1}^J \frac{R_{ij}}{c_{j0}}; \quad \delta T_i = \sum_{j=1}^J E_{ij} \delta c_j; \quad E_{ij} = -\frac{R_{ij}}{c_{j0}^2}.$$

или в матричной форме

$$E \delta c = \delta T, \quad E = \{E_{ij}\}, \quad \delta c = \{\delta c_j\}, \quad \delta T = \{\delta T_i\}, \quad (3)$$



Р и с. 1

где R_{ij} - длина i -го луча, проходящего через j -ю ячейку сетки просвечиваемого региона; c_j - скорость волн в j -й ячейке; δT_i - возмущения времени прихода сигнала по i -му лучу, вызванные искомыми отклонениями скорости волн δc_j в ячейках сетки, через которые проходит луч; c_{j0} - средняя скорость звука в j -й ячейке сетки; c_0 - усреднения по времени и пространству, скорость звука в рассматриваемом горизонтальном слое.

Обычно полагают, что пространственно-временную изменчивость поля скорости звука $c(\vec{r}, t)$ в океане можно удовлетворительно описать соотношением [3,6]

$$c(\vec{r}, t) = c_0(\vec{r}, t) + \Delta c_1(\vec{r}, t) + \Delta c_2(\vec{r}, t), \quad (4)$$

где $c_0(\vec{r}, t)$ описывает значения и вариации поля скорости звука, обусловленные глобальными климатическими изменениями.

Для диагностируемого региона размером приблизительно 1000×1000 км полагают, что $c_0(\vec{r}, t) \approx c_0(h)$ является некото-

рым усредненным вертикальным профем скорости звука на трассе распространения со средним значением $c_0 \sim 1500$ м/с. Член $\Delta c_1(\tau, t)$ описывает мезомасштабную изменчивость с характерным пространственным размером от десятков до нескольких сотен километров по горизонтали на интервалах времени от нескольких дней до месяцев. Фронты и ринги являются типичными представителями этого класса неоднородностей. Член $\Delta c_2(\tau, t)$ описывает мелкомасштабные флуктуации с характерными размерами по горизонтали до километра и по вертикали до десяти метров на временных интервалах до нескольких часов. Этот класс неоднородностей включает внутренние волны, тонкую структуру, микроструктуру и турбулентность. Их наличие приводит при акустическом зондировании к порождению пучков спорадических микропутей и дополнительному "размазыванию" сигнала на приемнике [7]. Отметим, что соотношение $\Delta c_1/c_0$ по порядку величины составляет 10^{-2} , в то время как $\Delta c_2/c_0 \approx 10^{-4}$ [6,8].

Проекционная матрица E полностью определяет лучевую картину в слое при заданной конфигурации источников и приемников и выбранной сетке разбиения диагностируемой области на ячейки. Как правило, матрица E сингулярна, ее ранг определяет число независимых лучей, т.е. объем полезной информации при измерениях. Нахождение оптимальной конфигурации источников и приемников при заданной сетке для получения максимального ранга E является важной задачей повышения информативности измерений, которая может решаться на этапе планирования эксперимента.

В работе [3] приведено несколько примеров стационарных конфигураций для 4 источников и 4 приемников и 16 прямоугольных ячеек сетки. Все эти конфигурации не достигают максимальной величины ранга равной 16. Авторы [3] констатируют, что не смогли найти оптимальную конфигурацию и, более того, не уверены, что конфигурация рангом 16 при заданных условиях вообще существует. На рис.1,г приведена конфигурация источников и приемников для этого случая с максимальным рангом (rank $E = 16$), найденная с помощью численной оптимизации на ЭВМ на основе изложенных методов.

Возможность управляемой геометрии просвечивания, и соответственно получения переменного разрешения в различных областях диагностируемого региона, может быть достигнута путем использования излучателей и приемников, попеременно (или одновременно) движущихся по определенным планируе-

мым до эксперимента траекториям, и работа которых засинхронизирована системой единого времени. Такую схему томографирования будем называть динамическим томографированием или томосинтезом. С помощью системы единого времени возможно определение с необходимой точностью текущего взаимного расположения приемников и излучателей.

Важным моментом томосинтеза является тот факт, что во многих случаях достаточно только одного источника и одного приемника, чтобы получить любое количество произвольных проекций и осуществить реконструкцию неоднородностей с приемлемой точностью и разрешением. Для этого необходимо, чтобы исследуемый объект был квазистационарным, т.е. изменения во времени его пространственной структуры были бы пренебрежимо малы по сравнению с интервалом времени, необходимым для получения нужного количества проекций. В некоторых случаях при измерении голографических проекций методом апертурного синтеза [9,10] необходимо использовать несколько приемников и излучателей (два-три), тем не менее для метода динамического томографирования количество приемоизлучающих устройств принципиально не является ограничивающим фактором, но при этом затраты переносятся на увеличение времени "экспонирования".

Процесс восстановления при томосинтезе реализуется как оптимизационная процедура на множестве динамически меняющихся конфигураций источников и приемников. Для определения схемы этой процедуры введем следующие определения [11].

Множество $X' \subset R^N$ будем называть областью сбора данных, если в рамках данной задачи его точки доступны для установки источников и приемников и его линейная оболочка $V(X')$ (в случае прямолинейных зондирующих лучей) или лучевая оболочка (в случае криволинейных зондирующих лучей) содержат область исследуемого участка среды X , т.е. $X \subset V(X')$.

Пусть имеется Q источников и P приемников. Допустимой конфигурацией $k(s_q, r_p)$, $k \in K$ назовем любое расположение источников $q = \overline{1, Q}$ в точках s_q и приемников $p = \overline{1, P}$ в точках r_p в области X' . Динамической допустимой конфигурацией источников и приемников назовем конфигурацию $k(t) = (s_q(t), r_p(t))$, которая зависит от некоторого параметра $t \in T$, например, времени. Таким образом, каждая динамическая кон-

фигурация состоит из некоторого набора траекторий источников и приемников в области X' . И з л о ж е н и е м к а д р о м будем называть массив экспериментальных данных, полученных на данной конфигурации $\kappa(t)$ в результате излучения и приема парой (s_q, r_p) . Выбор последовательности траекторий $\kappa_m(t)$, $m = \overline{1, M}$, обеспечивающих восстановление искомого образа $f(x)$, будем называть п л а н о м э к с п е р и м е н т а. С каждой конфигурацией $\kappa_m(t)$ ($m = \overline{1, M}$), естественно, связывается, во-первых, множество лучей $L_{\kappa_m} \subset L$, реализуемое этой конфигурацией, и, во-вторых, множество точек $X_{\kappa_m} \subset X$ диагностируемого региона, которые "просматриваются" при данной конфигурации. На основании (1) и (2) уравнение κ_m -го измерительного кадра имеет вид

$$\check{f}_m(y, \omega; \kappa_m(t)) = \int f(x) \delta(y - \omega x) Z(x, \kappa_m(t)) dx + \eta_m,$$

где проекции $\check{f}_m(\cdot)$ имеют смысл времени распространения зондирующего излучения вдоль отрезка луча $\ell(y, \omega) \subset L_{\kappa_m}$, определяемого конфигурацией $\kappa_m(t)$; $f(x)$ - восстанавливаемая характеристика;

$$Z(\cdot) = \begin{cases} 1, & x \in X_{\kappa_m} \\ 0, & x \notin X_{\kappa_m} \end{cases} \quad m = \overline{1, M}$$

- характеристическая функция ячеек региона.

Задача реконструкции пространственной структуры неоднородных сред методом динамического томографирования сводится теперь к решению специальной системы матричных уравнений вида

$$\check{f}_m = E_m f + \eta_m, \quad (5)$$

где $m = \overline{1, M}$ - номер измерительного кадра; \check{f}_m, η_m - векторы размерности J_m ($\check{f}_m, \eta_m \in R^{J_m}$); f - вектор размерности I ($f \in R^I$); E_m - проекционная матрица m -го кадра размерности $(J_m \times I)$.

Система (5) имеет ряд специфических особенностей, характерных для задач томографии, а именно: естественная "неравноправность" координат (ячеек региона) при восстановлении; большие размеры и большая "разреженность" проекционных матриц; необходимость преодоления барьера "несовместности", обусловленного неточностью исходной модели и влиянием шумов и др.

Все это делает задачу инверсии акустических данных далеко не тривиальной. Более того, модели распространения звука

в горизонтально-неоднородных средах еще далеко не совершенны даже для решения прямых задач.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В алгебраических методах $f(x)$ задается в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^I f_i \varphi_i(x) + \Psi(x), \quad (6)$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ – некоторая система элементарных изображений, а $\Psi(x)$ – известная функция, описывающая априорную информацию о $f(x)$. Тогда модель получения экспериментальных данных на любом кадре (1) принимает вид

$$\check{f}(\xi, \rho) = \sum_{i=1}^I f_i \check{\varphi}_i(\xi, \rho) + \check{\Psi}(\xi, \rho) + \eta(\xi, \rho). \quad (7)$$

Зафиксируем в пространстве функций $f(x)$, $x \in R^2$, скалярное произведение

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle_1 = \iint f_1(x_1) f_2(x_2) h_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

а в пространстве функций $\check{f}(\rho)$, где $\rho = (\xi, \rho) \in L$, скалярное произведение

$$\langle \check{f}_1(\rho), \check{f}_2(\rho) \rangle_2 = \iint \check{f}_1(\rho_1) \check{f}_2(\rho_2) h_2(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2.$$

Выберем в пространстве функций на L систему тестовых функций $\{\Delta_q(\rho)\}$, $q = 1, 2, \dots, Q$. Умножив (7) скалярно на Δ_q и положив

$$\check{f}_q = \langle \check{f}(\rho), \Delta_q(\rho) \rangle_2, \quad \check{\varphi}_{qi} = \langle \check{\varphi}_i(\rho), \Delta_q(\rho) \rangle_2,$$

$$\check{\Psi}_q = \langle \check{\Psi}(\rho), \Delta_q(\rho) \rangle_2, \quad \eta_q = \langle \eta(\rho), \Delta_q(\rho) \rangle_2,$$

получаем систему линейных уравнений

$$\check{f}_q = \sum_{i=1}^I f_i \check{\varphi}_{qi} + \check{\Psi}_q + \eta_q. \quad (8)$$

Выбираемая система тестовых функций $\{\Delta_q(\rho)\}$ должна:

1) минимизировать функционал $\Phi(q) = |\check{f}_q - \check{f}_{q,*}|$ равномерно или в среднем по q , где $\check{f}_{q,*}$ – оценка \check{f}_q по выборке $\check{f}_{m(n)}$, соответствующей массиву опорных точек $\rho_n = (\xi_n, \rho_n)$;

2) оптимизировать функционал Φ_2 , оценивающий качество системы уравнений

$$E_f = \check{f} - \check{\Psi}, \quad (9)$$

где $f = \{f_1, \dots, f_I\}$, $\check{f} = \{\check{f}_1, \dots, \check{f}_Q\}$, $\check{\Psi} = \{\check{\Psi}_1, \dots, \check{\Psi}_Q\}$, а E — это $(Q \times I)$ — матрица с элементами $\rho_{qi} = \check{\Psi}_{qi}$, $q = 1, \dots, Q$; $i = 1, \dots, I$;

3) минимизировать функционал $\Phi_3(q) = |\check{\eta}_q|$ равномерно или в среднем по q .

Разнообразие применяемых на практике методов восстановления можно объяснить спецификой выбора способа удовлетворения противоречивым требованиям критериев Φ_1, Φ_2, Φ_3 [12].

Ясно, что согласование требований к системе $\{\check{\Delta}_q(\rho)\}$ достаточно проводить в терминах функций

$$\tilde{\Delta}_q(\rho) = \int \Delta_q(\rho_2) h_2(\rho, \rho_2) d\rho_2.$$

Отметим, что в постановку задачи (7) включается описание контролируемой области $L' \subset L$, и выбор системы $\{\check{\Delta}_q(\rho)\}$ проводится одновременно с планированием оптимального расположения опорных точек $\rho_n \in L'$. Первым шагом при этом является разбиение начального массива опорных точек ρ_n на однородные группы. Минимизация функционала Φ_1 заключается в выборе функций $\check{\Delta}_q(\rho)$, каждая из которых имеет носитель в окрестности одной из таких групп. При этом условие минимизации функционала Φ_3 сводится к требованию того, чтобы в рамках выбранной модели генерации шума корреляция $\check{\Delta}_q(\rho)$ с $\eta(\rho)$ была незначительной. В том случае, когда нет существенных ограничений на выбор опорных точек ρ_n , оптимизация функционала Φ_2 сводится к выбору функций $\{\check{\Delta}_q(\rho)\}$, для которых ранг системы (8) равен I и система (8) хорошо обусловлена. Более того, для специальных разложений (6) известны такие планы эксперимента, когда матрица E является ортогональной или треугольной.

В тех случаях, когда имеются ограничения как на число опорных точек, так и на их расположение в пространстве L , нельзя гарантировать существование функций $\{\check{\Delta}_q(\rho)\}$, дающих максимальный ранг E . Поэтому для выбора оптимального плана необходимо ввести критерий, оценивающий качество таких систем.

Интегральной характеристикой матрицы E является ее дефект $d(E)$, равный размерности пространства решений системы (9) с нулевой правой частью $ke \in E$. Введем характеристики системы (9) d_i (дефект ячейки), $i = 1, \dots, I$, равные

длине проекции вектора $\ell_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ на пространство $\ker E$. Имеет место соотношение $\sum_{i=1}^I d_i^2 = d(E)$, т.е. величины d_i дают распределение $d(E)$ по арифметическому базису. Заметим, что для любых двух решений f' и f'' имеет место априорная оценка

$$|f'_i - f''_i| \leq d_i \|f' - f''\|, \quad i=1, \dots, I.$$

Второе условие для системы тестовых функций $\{\tilde{\Delta}_q(\ell)\}$ в терминах d_i можно записать так: найти минимум $\sum_{i=1}^I d_i$ при условии, что $\sum_{i=1}^I d_i^2 = \text{const}$.

В основе алгоритмов решения системы (9) лежат различные варианты блочно-итерационных процедур [11,13]. На практике, за счет инструментальных помех и неточности описания характеристик неоднородности среды с помощью выбранной модели (6), система (9), как правило, несовместна и поэтому возможны два подхода к ее решению.

Первый подход заключается в применении итерационной процедуры непосредственно к системе (9) и построении векторной последовательности, вообще говоря, различных псевдорешений. Этот подход детально описан в работе [14]. Там же приведены соотношения, выражающие псевдорешения непосредственно через экспериментальные данные.

Второй подход заключается в замене системы (9) регуляризованной системой матричных уравнений. Регуляризация достигается за счет введения виртуальных переменных $\{h_k\}$ и перехода от системы (9) к системе [15]

$$E_k q - h_k = u_k, \quad k=1, \dots, K. \quad (10)$$

Различные регуляризации заключаются в выборе скалярных множителей $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в R^I и $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \dots, \langle \cdot, \cdot \rangle_K$ в R^{J_k} . Доказывается, что решение (q, h_1, \dots, h_K) , $q \in R^I$, $h_k \in R^{J_k}$ системы (10) с помощью итерационного алгоритма из работы [15], отвечающего этим скалярным множителям, приводит к единственному решению, доставляющему минимум функционалу:

$$F(q, h_1, \dots, h_K) = \|q - q_0\|_0^2 + \sum_{k=1}^K \|u_k - E_k q\|_k^2,$$

где $\|\cdot\|_k$ — норма в R^{J_k} , соответствующая скалярному умножению $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$.

Отметим, что введение виртуальных переменных $\{h_k\}$ при переходе от (9) к (10) существенно не увеличивает слож-

ность вычислительного алгоритма, но позволяет получить совместную систему матричных уравнений, использовать разреженную структуру проекционной матрицы Γ , точнее использовать априорную информацию о характере искомого решения и статистики измерительных шумов.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕКОНСТРУКЦИИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ЭКСПЕРИМЕНТА

Каждый метод, линейный относительно экспериментальных данных, дает оценку искомой неоднородности в точке τ_0 в виде

$$\tilde{f}(\tau_0) = \sum_{j=1}^J a_j(\tau_0) \tau_j$$

Для краткости будем считать, что $\tau_j = \int f(x) \delta(\rho_j - \langle \xi_j, x \rangle) dx + \eta_j$, где $M \eta_j = 0$, $M \eta_j^2 = \sigma^2$, $M \eta_j \eta_k = 0$, если $j \neq k$. Получаем $\tilde{f}(\tau_0) = \int f(x) K(x, \tau_0) dx + \sum a_j(\tau_0) \eta_j$; $K(x, \tau_0) = \sum a_j(\tau_0) \delta(\rho_j - \langle \xi_j, x \rangle)$. Тогда $\Delta^2(\tau_0) = M(f(\tau_0) - \tilde{f}(\tau_0))^2 = \left(\int f(x) D(x, \tau_0) dx \right)^2 + \sigma^2 \|a(\tau_0)\|^2$, где $D(x, \tau_0) = \delta(x - \tau_0) - K(x, \tau_0)$; $a(\tau_0) = \{a_1(\tau_0), \dots, a_J(\tau_0)\}^T$.

Широкий класс качественных предположений о характере искомой неоднородности (такие, как компактность и вид носителя, порядок убывания спектра на бесконечности и т.д.) можно выразить в виде $f(x) = \int f_1(y) R(x, y) dy$. Тогда $\Delta^2(\tau_0) = \left(\int f_1(y) D_1(\tau_0, y) dy \right)^2 + \sigma^2 \|a(\tau_0)\|^2$, где $D_1(\tau_0, y) = R(\tau_0, y) - \sum a_j(\tau_0) \tau_j(y)$, а $\tau_j(y)$ — преобразование Радона от $R(x, y)$ по переменной x в j -м направлении. Первый способ построения функционала использует известное соотношение в шкале гильбертовых пространств H_α , $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $\langle f, g \rangle_\alpha \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha$, где $\|f\|_\alpha^2 = \int (1 + \|\omega\|^2)^\alpha |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ и $\hat{f}(\omega)$ — преобразование Фурье-функции $f(x)$. В этом случае функционал имеет следующий вид:

$$F(a, \tau_0, \rho, \xi) = \left\langle \left(A(\rho, \xi) + \frac{\sigma^2}{\|f_1\|_\alpha^2} I \right) a, a \right\rangle + \langle b(\tau_0, \rho, \xi), a \rangle + \zeta(\tau_0), \quad (11)$$

где $\zeta(\tau_0) = \|R(\tau_0, y)\|_\alpha^2$, I — единичная матрица, элементы A_{ij} ($J \times J$) — матрицы $A(\rho, \xi)$ и элементы b_j вектора b вычисляются по формулам

$$A_{ij} = \langle r_i(y), r_j(y) \rangle_{-a}, \quad B_j = -2 \langle R(x_0, y), r_j(y) \rangle_{-a}.$$

Второй способ использует задание семейства тестовых изображений $f_j(x)$. В этом случае $\Delta^2(x_0) = (\langle f_{1,j}, D_1(x_0, y) \rangle)^2 + \sigma^2 \|a(x_0)\|^2$ и оптимизируемый функционал имеет вид

$$F_j(a, x_0, \rho, \xi) = \langle (A_j(\rho, \xi) + \sigma^2 I)a, a \rangle + \langle B_j(x_0, \rho, \xi), a \rangle + C_j(x_0). \quad (12)$$

В этом случае $C_j(x_0) = (\langle f_{1,j}(y), R(x_0, y) \rangle)^2$; $B_j = -2 \langle f_{1,j}(y), R(x_0, y) - r_j(y) \rangle$; $A_{ij} = \langle f_{1,j}(y), r_i(y) \rangle \langle f_{1,j}(y), r_j(y) \rangle$.

В случае фиксированной конфигурации источников и приемников задача реконструкции искомой неоднородности в точке x_0 сводится к минимизации квадратичных функционалов (11), (12) относительно вектора a . В тех случаях, когда необходимо добиться наилучшего разрешения в заданной точке x_0 или в заданном множестве точек (x_1, \dots, x_M) , то функционалы можно минимизировать как относительно вектора a , так и относительно всевозможных пар (ρ_j, ξ_j) (или относительно координат источников и приемников), но эта задача значительно труднее, так как зависимость (11) и (12) от (ρ_j, ξ_j) существенно нелинейна. Первый функционал позволяет получить оценку точности восстановления, равномерную на всем классе функций. Второй дает более точную оценку, чем первый, но только для класса тестовых функций. В алгебраических методах удается совместить достоинства обоих функционалов. В этом случае

$$f(x) = \int f(y) H(x, y) dy; \quad H(x, y) = \sum_{i=1}^I \psi_i(x) \psi_i(y),$$

$\{\psi_i(x)\} (i = \overline{1, I})$ — ортонормированная система базисных изображений. Тогда (12) имеет следующий вид:

$$F_\varphi(a, x_0, \rho, \xi) = (\langle \varphi(x_0) - E^T a, f \rangle)^2 + \sigma^2 \|a\|^2,$$

где $\varphi(x_0) = \{\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_I(x_0)\}$, $f = \{f_1, \dots, f_I\}$, и $f_i = \int f(y) \psi_i(y) dy$. Элементы E_{ij} проекционной матрицы E равны преобразованию Радона от i -го базисного изображения по j -му направлению и, таким образом, зависят как от выбранной системы базисных изображений, так и от конфигурации источников и приемников. Функционал (11) в этом случае имеет вид

$$F(a, x_0, \rho, \xi) = \|\varphi(x_0) - E^T a\|^2 + \sigma^2 \|a\|^2$$

Пусть $\Delta_i^2(x_0)$ – погрешность реконструкции i -го базисного изображения в точке x_0 , тогда для любой ортонормированной системы $\{\varphi_i(x_0)\}$ и любого метода определения вектора a выполняется следующее соотношение:

$$\Delta^2(x_0) \leq C \sum_{i=1}^I \Delta_i^2(x_0) + \epsilon^2 \|a\|^2, \quad C = \|f\|^2, \quad (13)$$

где $\Delta(x_0) = \{\Delta_1(x_0), \dots, \Delta_I(x_0)\}$. В том случае, когда $\varphi_i(x_0)$ – характеристические функции ячеек X_i , на которые разбита область реконструкции, соотношение (13) имеет вид

$$\Delta^2(x_0) \leq C \cdot d_i^2 \cdot d(\epsilon) + \epsilon^2 \|a\|^2, \quad x_0 \in X_i, \quad d(\epsilon) = \sum_{i=1}^I d_i^2,$$

где d_i ($i=1, \dots, I$) и $d(\epsilon)$ – соответственно дифференциальные и интегральная характеристики проекционной матрицы E .

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕСТОВЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Для проведения численного моделирования на ЭВМ процесса реконструкции тестовых изображений и оценки качества различных схем томографирования В.Г.Маркиным было разработано программное обеспечение, позволяющее:

формировать проекционные матрицы динамических кадров по заданным текущим координатам источников зондирующего излучения и приемников в выбранной системе координат и фиксированной сетке в области реконструкции (в качестве базисных функций $\varphi_i(x)$ – характеристические функции ячеек сетки);

выбраковывать лучи, не пересекающие область реконструкции, и хранить на магнитном носителе скорректированную проекционную матрицу;

осуществлять сингулярное разложение скорректированной проекционной матрицы;

оценивать качество выбранной схемы томографирования с помощью характеристик d_i ;

согласовывать заданные экспериментальные данные со структурой скорректированной проекционной матрицы;

находить коэффициенты разложения искомого изображения по выбранной системе базисных функций с помощью итерационной процедуры [13].

Для оценки номера минимально значимого собственного числа строился функционал $\chi_k(I_k^*)$ относительно вклада квадратов сингулярных чисел k -го блока проекционной матрицы по формуле

$$\chi_k(I_k^*) = 100\% \cdot \left(\sum_{i=1}^{I_k^*} \lambda_{k,i}^2 \right) / \sum_{i=1}^{I_k} \lambda_i^2,$$

где I_k - количество ненулевых сингулярных чисел $\lambda_{k,i}$ k -го блока E_k проекционной матрицы. Значение параметра I_k^* выбиралось из условия $\chi_k(I_k^*) \geq \chi_k$, где χ_k - некоторые заданные величины ($k = 1, 2, \dots, K$).

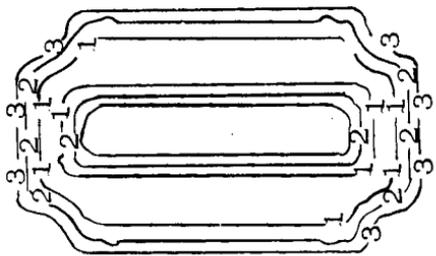
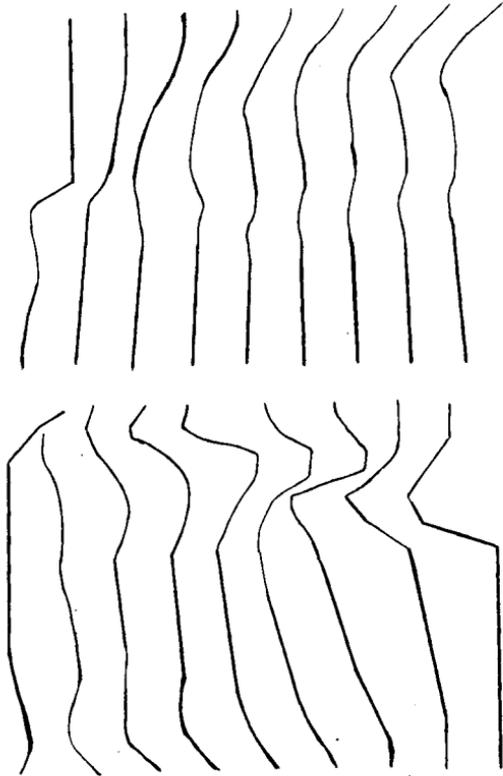
Одной из задач численного моделирования была оптимизация конфигураций источников и приемников.

На рис.1,г приведена стационарная конфигурация с $N_s = 4$ и $N_r = 4$ на сетке 4×4 , дающая максимальный ранг проекционной матрицы E равный 16.

На рис.2 и 3 приведен результат реконструкции тестового изображения (неоднородности в виде букв "О" и "С") на сетке 11×8 с $N_s = 18$ и $N_r = 18$. Данная конфигурация также дает максимальный ранг (равный 88) проекционной матрицы, но при этом 73% лучей являются избыточными. На рис.2,а и 3,а изображены линии уровней тестовых неоднородностей, на рис.2,б и 3,б - их верные проекции, являющиеся исходными данными при реконструкции. Результат восстановления представлен на рис.2,в-д и 3,в-д при значениях параметра регуляризации $I_k^* = 78, 84, 88$.

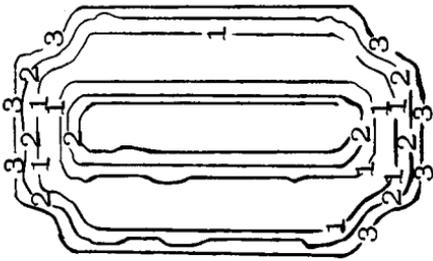
Для оценки эффективности метода динамического томографирования было проведено численное моделирование некоторых вариантов схем сканирования. Сравнение проводилось со стационарным вариантом на сетке 6×6 для конфигурации источников ($N_s = 6$) и приемников ($N_r = 7$) аналогичной конфигурации, изображенной на рис.1,а. Один дополнительный приемник располагался в центре отрезка АД. Для 42 лучей ранг проекционной матрицы равен 31 (при $\chi = 99,99\%$).

На рис.4,а приведена суммарная лучевая картина простейшей схемы томосинтеза, в которой один источник ($N_s = 1$) и один приемник ($N_r = 1$) поочередно двигаются по контуру квадрата в такой последовательности: $(A_0, B_1 \rightarrow C)$; $(A_1 \rightarrow B_1, C_1)$; $(B_2, C_1 \rightarrow D)$; $(B_3 \rightarrow C_1, D_1)$; $(C_2, D_1 \rightarrow A)$; $(C_3 \rightarrow D, A_1)$; $(D_2, A_1 \rightarrow B)$; $(D_3 \rightarrow A, B_1)$. Здесь скобками выделен каждый измерительный кадр, а стрелкой обозначено перемещение источника в или

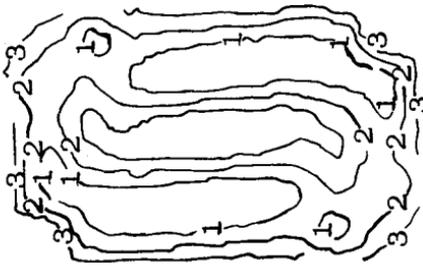


б)

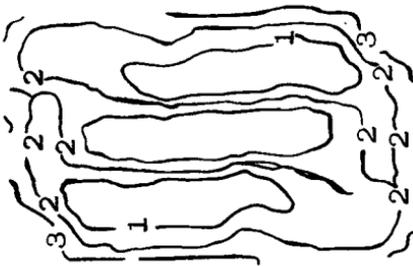
а)



д)

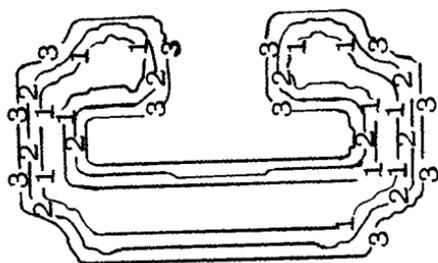


г)

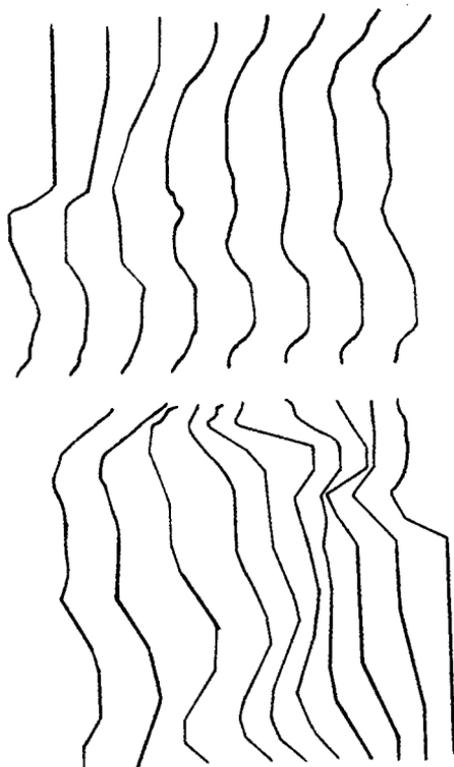


в)

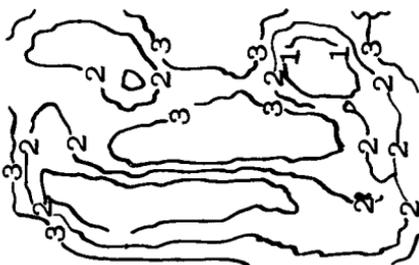
Рис. 2



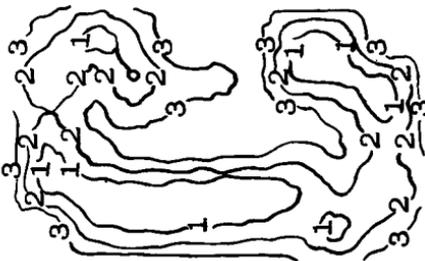
a)



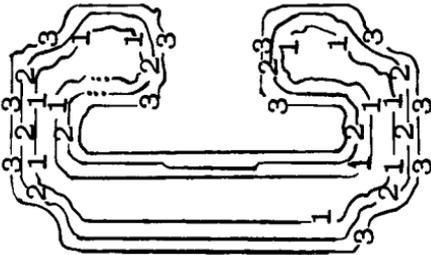
b)



в)

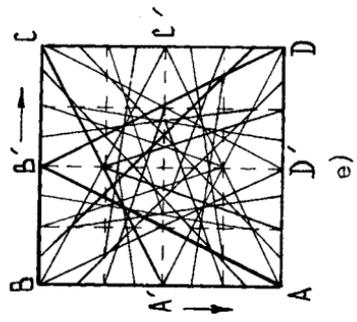
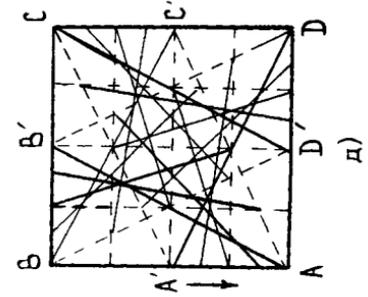
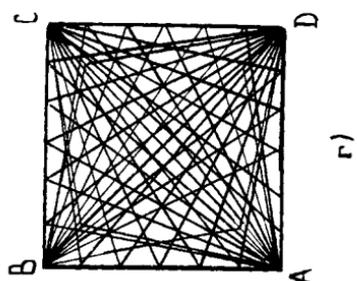
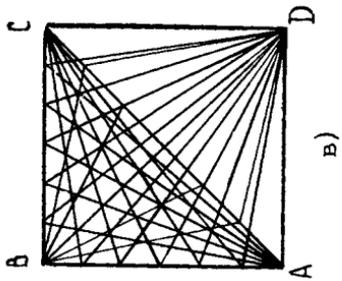
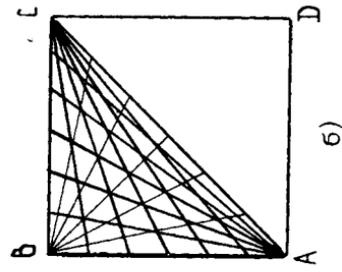
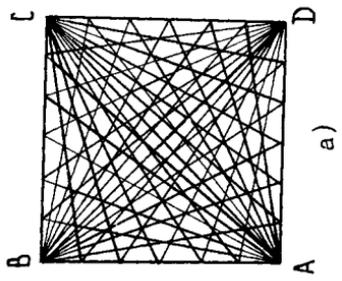


г)



д)

Р и с. 3



Р и с. 4

приемника γ . За 8 кадров можно получить 4 полных верных проекции. Для 48 лучей (в эксперименте использовалось только по 6 лучей на каждом кадре) ранг проекционной матрицы равен 33 при $\gamma=99,9\%$. На рис.4,б представлена суммарная лучевая картина при поочередном сканировании излучателем и приемником по контуру треугольника ABC в такой последовательности:

$$(A_s, A_\gamma \rightarrow C); (A_s, C_\gamma \rightarrow B); (A_s \rightarrow C, B_\gamma); (C_s, B_\gamma \rightarrow A).$$

Для 24 лучей ранг проекционной матрицы E равен 20 (полный ранг равен 21).

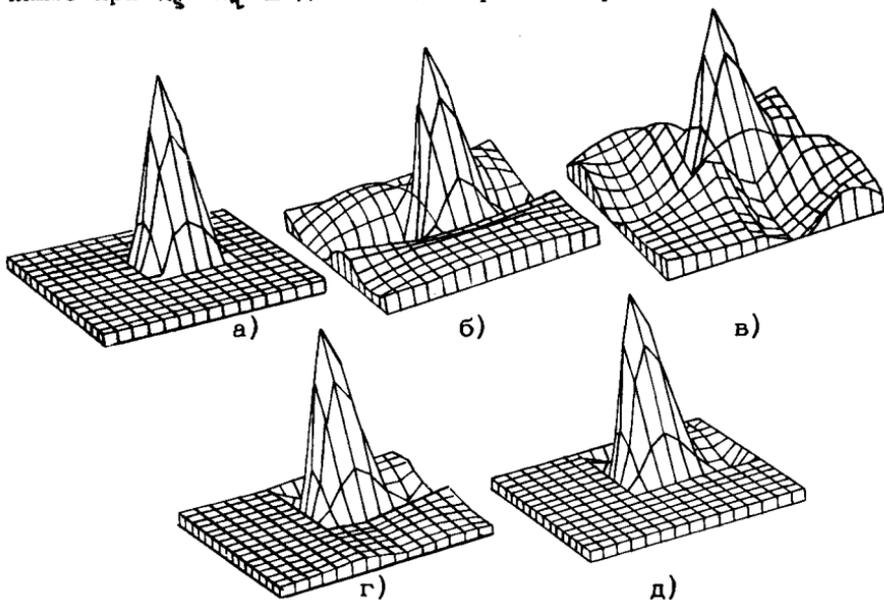
На рис.4,в приведена суммарная лучевая картина для схемы сканирования по контуру треугольника, аналогичной предыдущему примеру (см. рис.4,б), но при наличии одного дополнительного стационарного "подсвечивающего" источника, установленного в точке D. Последовательность кадров: $(A_{s1}, A_\gamma \rightarrow C, D_{s2}); (A_{s1}, C_\gamma \rightarrow B, D_{s2}); (A_{s1} \rightarrow C, B_\gamma, D_{s2}); (C_{s1}, B_\gamma \rightarrow A, D_{s2})$.

При использовании только шести лучей на каждом движении ранг E достигает величины 31 при $\gamma=99,9\%$.

На рис.4,г приведена суммарная лучевая картина при поочередном движении по контуру и диагоналям квадрата (схема "Крест") двух излучателей ($N_s=2$) и двух приемников ($N_\gamma=2$). Последовательность шести измерительных кадров следующая: $(A_{s1}, A_{\gamma1} \rightarrow C, D_{s2}, D_{\gamma2} \rightarrow B); (A_{s1} \rightarrow D, C_{\gamma1}, D_{s2} \rightarrow C, B_{\gamma2}); (D_{s1}, C_{\gamma1} \rightarrow B, C_{s2}, B_{\gamma2} \rightarrow A); (D_{s1} \rightarrow C, B_{\gamma1}, C_{s2} \rightarrow A, A_{\gamma2}); (C_{s1} \rightarrow B, B_{\gamma1} \rightarrow C, A_{s2}); (B_{s1} \rightarrow D, C_{\gamma1})$. Для указанных ранее условий в этом случае достигается полное восстановление, так как ранг E=36.

На рис.4,д приведена лучевая картина при одновременном, но с разными скоростями, движении источника и приемника. Геометрия сканирования такова: $(A' \rightarrow A, D \rightarrow B'); (B' \rightarrow B, A \rightarrow C'); (C' \rightarrow C, B \rightarrow D'); (D' \rightarrow D, C \rightarrow A')$. Поскольку в этой схеме $N_s=1$ и $N_\gamma=1$, а лучи взаимнообратимы, индексация источника и приемника опущена. Для сетки 4x4 достигается полное восстановление. Как видно на рис.4,д, на определенных участках сканирования существуют "неподвижные точки", в окрестности которых получается наибольшее пространственное разрешение. Меняя тактику сканирования, можно, очевидно, планировать получение зон наибольшего разрешения в заданных областях региона. На рис.4,е приведена схема лучей, отличающаяся от предыдущей только тем, что добавлен еще один источник и один приемник, движущиеся в определенном смысле антисим-

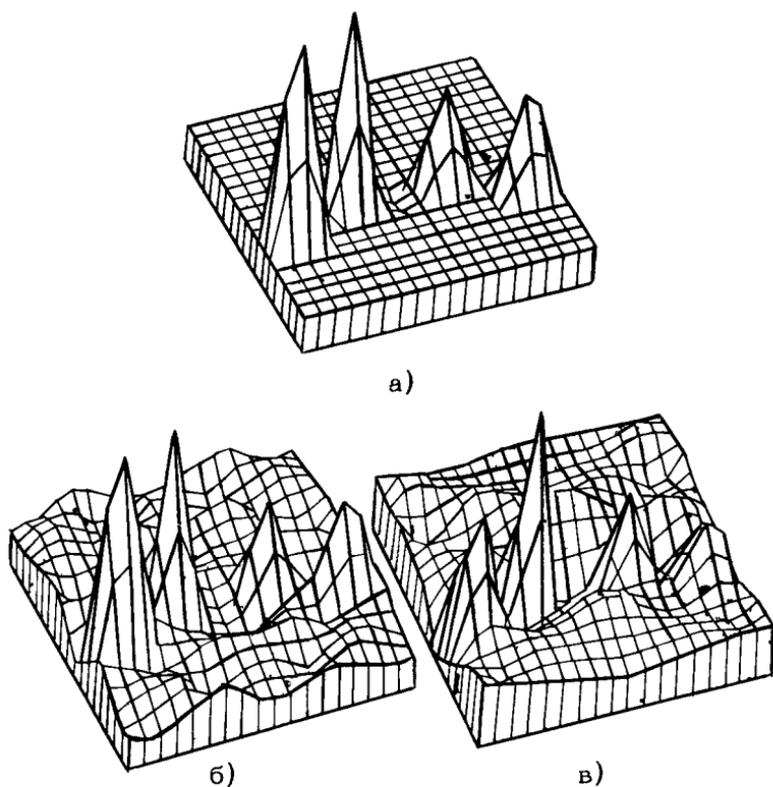
метрично первой паре. Начальные движения показаны стрелками из точек A', B', D . Во избежание "зрительной перегрузки" на этом рисунке показана только часть суммарной лучевой картины. Для сетки 6×6 ранг $\epsilon = 36$, что в принципе недостижимо при $N_s = N_\nu = 2$ для стационарного варианта.



Р и с. 5

На рис.5 приведены результаты численной реконструкции на ЭВМ неоднородностей на основе изложенных выше алгоритмов для некоторых вариантов сканирования. Входное (тестовое) изображение (рис.5,а) представляет собой "единичное" возмущение в одной из центральных ячеек; следовательно, восстановленное изображение представляет собой реакцию системы в целом на это возмущение. Расчеты проводились при $\gamma = 99,9\%$. Схемы, соответствующие рис.4,г, 4,е, дают практически полное восстановление тестовой неоднородности с погрешностью 10^{-2} (рис.5,г,д). В то же время схема, аналогичная рис.1,а, дает погрешность реконструкции 0,18 (рис.5,б), а схема, изображенная на рис.4,а, дает погрешность 0,33 (рис.5,в).

На рис.6,а приведена тестовая неоднородность с уровнем возмущения 1,0 для левых пиков и 0,5 - для правых. На рис.6,б и 6,в приводится результат реконструкции для схем,



Р и с 6

аналогичных схемам на рис.4,г и 1,а. Различные варианты сканирования, как видно из рис.5 и 6, обладают неравноценной разрешающей способностью, что подтверждает необходимость численной оптимизации плана томографического эксперимента.

В таблице приведены значения характеристик d_i^2 , рассчитанных по следующим измерительным кадрам (см. рис.4,а): $(B_s, D_s \rightarrow A)$; $(A_r, B_s \rightarrow C)$; $(C_s, A_r \rightarrow B)$; $(B_r, C_s \rightarrow D)$; $(B_s \rightarrow C, D_s)$. После четвертого и пятого движений сумма d_i^2 одинакова, но по критерию максимального разброса система, полученная после четырех движений, лучше, так как в этом случае удалось локализовать максимальное значение $d_i^2 = 0,35$ в одной клетке и сумма значений d_i^2 для всех клеток меньше, чем для системы, полученной после пяти движений. Это говорит о возможности получения переменного разрешения при динамическом томографировании.

Таблица

1. $(B_s, D_s \rightarrow A)$		2. $(A_s, B_s \rightarrow C)$			3. $(C_s, A_s \rightarrow B)$				
0,52	1	0,24	0,23	0,20	0,38	0,03	0,03	0,00	0,15
0,63	1	0,28	0,26	0,37	1	0,03	0,04	0,49	1
0,32	0,39	0,20	0,27	0,39	1	0,04	0,05	0,45	1
0,29	0,28	0,25	0,23	0,20	0,41	0,03	0,06	0,12	0,48

4. $(B_s, C_s \rightarrow D)$		5. $(B_s \rightarrow C, D_s)$						
0,01	0,01	0,00	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,01	0,00	0,02	0,06	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,00	0,02	0,19	0,12	0,01	0,15	0,19	0,00	0,00
0,02	0,06	0,12	0,35	0,06	0,23	0,23	0,06	0,06

Таким образом, результаты численного моделирования метода динамического томографирования показывают, что томосинтез обладает более высокой разрешающей способностью и более широкими функциональными возможностями для решения ряда задач по сравнению со стационарной схемой при практически одинаковых требованиях к точности измерений.

Л и т е р а т у р а

1. Мюллер Р.К., Кавех М., Уэйд Г. Реконструктивная томография и ее применение в ультразвуковой технике. - ТИИЭР, 1979, т.67, №4, с.146.
2. Бреховских Л.М. Современная стратегия в исследованиях и освоении океана. - В кн.: Проблемы исследования и освоения Мирового океана. Л.: Судостроение, 1979.
3. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography; A scheme for large scale monitoring. - Deep Sea Research, 1979, v.26A, p.123.
4. Маслов В.К., Теверовский В.И., Трохан А.М. Реконструкция волновых полей по их голографическим проекциям. - В кн.: Проблемы метрологии информационно-измерительных систем в области физико-технических измерений: Сб. науч. тр. /ВНИИФТРИ. М., 1982, с.11.
5. Eisler T.I., New R., Calderon D. Resolution and variance in acoustical tomography. - IASA, 1982, v.72, N6, p.1965.
6. Munk W., Wunsch C. Observing the ocean in the 1990s. - Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1982, A 307, p.439.
7. Портер Р.П. Акустическое зондирование пространственно-временных неоднородностей океана. - В кн.: Акустика океана /Под ред. Дж. Де Санто. М.: Мир, 1982, с.271.
8. Stanley L. Adams. Moving source/ receiver underwater acoustic tomography. - Oceans, 1981, p.21.
9. Зверев В.А. Голография в акустике океана. - В кн.: Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982.
10. Williams R.E. Creating an acoustic synthetic aperture in the ocean. - JASA, 1976, v.60, N1, p.60.

11. Бухштабер В.М., Маслов В.К., Трохан А.М. О методе реконструкции пространственной структуры неоднородных сред. - ДАН СССР, 1983, т.272, №2, с.331.

12. Бухштабер В.М., Маркин В.Г. Исследование методов томографического восстановления изображений. - В кн.: Проблемы метрологии и информационно-измерительных систем в области физико-технических измерений: Сб. науч. тр./ВНИИФТРИ. М., 1982, с.27.

13. Eggermont P.P.V., Herman G.T., Lent A. Iterative algorithms for large partitioned linear systems with applications to image reconstruction. Linear Algebra and its Applications, 1981, v.40, p.37.

14. Бухштабер В.М., Маслов В.К., Маркин В.Г. Обратные задачи прикладной статистики и томография. - В кн.: Тез. докл. 2-й Всесоюз. школы-семинара "Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа". М., 1983, с.26.

15. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии /Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 352 с.

ОПТОАКУСТИЧЕСКИЕ И АКУСТООПТИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

И.Б.Есипов, К.А.Наугольных

Около ста лет тому назад, в 1881 г., в опытах Белла, Рентгена и Тиндаля [1,2,3] было обнаружено явление возбуждения звука световым излучением в поглощающих свет средах. Солнечный свет, модулированный вращением зубчатого колеса, направлялся в камеру, напоминавшую современный стетоскоп с прозрачным для света окошком в стенке. Камера заполнялась исследуемым газом. Вставив трубки стетоскопа в уши, экспериментатор слышал возбуждаемый светом звук на частоте модуляции света. В некоторых опытах возбуждаемый звук напоминал по силе звук органа [3]. Эти опыты явились прообразом оптоакустической спектроскопии — метода измерения поглощения света в газообразных, жидких и твердых веществах, основанного на регистрации акустических эффектов.

Метод незаменим при измерениях поглощательной способности порошков, тел с шероховатыми границами и биологических сред, так как позволяет отделить поглощенную часть энергии от рассеянной и не требует изготовления специальных образцов. Создание лазеров открыло новые возможности для оптоакустики или фотоакустики, как еще называют исследования оптического возбуждения звука.

В настоящее время способы лазерного возбуждения звука позволяют генерировать акустическое излучение в широком диапазоне частот и интенсивностей, включая и очень высокие [4,5,6].

Другой аспект акустооптических взаимодействий — это явление воздействия звука на свет. В отличие от первого на-

правления в рассматриваемых эффектах звук возбуждает свет, а производит его модуляцию (частотную и пространственную).

У истоков этого направления также стоят великие имена. В 1922 г. Бриллюэн [7] предсказал, а в 1932 г. Дебай и Сирс [8], Люка и Бикар [9] экспериментально обнаружили эффект дифракции света на ультразвуке. Свет, падая на кювету с жидкостью, в которой распространяется ультразвуковая волна в направлении, перпендикулярном пучку света, расщепляется, образуя дифракционный пространственный спектр.

В последующие годы была разработана детальная теория явления и выполнены многочисленные эксперименты. Явление фазовой модуляции при дифракции света на ультразвуке лежит в основе многих наиболее чувствительных оптических методов регистрации периодических колебаний и движений рассеивающих свет тел. Развитие акустооптики в лазерный век привело к созданию разнообразных модулирующих свет устройств - акустооптических модуляторов, дефлекторов, процессоров для обработки сигналов. Близкими к ним по физическим принципам действия оказываются лазерные доплеровские виброметры и анемометры, с помощью которых оказывается возможным осуществлять измерение звуковых колебаний.

Таким образом, развитие оптоакустики и акустооптики привело к разработке способов оптической генерации и приема звука, области применения которых непрерывно расширяются. Отдельные вопросы этого направления рассматриваются в настоящей работе.

I. ОПТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКА

При падении света на границу поглощающей среды в ней возбуждаются звуковые волны. Механизмы этого явления разнообразны [4-6], здесь рассмотрим только некоторые из них. При умеренных интенсивностях света, когда не происходит фазовых превращений в среде, генерация звука вызывается тепловым расширением среды. В результате импульсного нагрева поглотившего световую энергию объема среды он расширяется, излучая акустический сигнал.

При воздействии модулированного по интенсивности непрерывного оптического излучения происходит генерация акустических волн на частоте модуляции света.

Этот процесс описывается волновым уравнением с правой частью, задающей тепловые источники звука

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt^2} = - \frac{\beta}{c_p} \frac{dq}{dt}, \quad (1)$$

где β , c_p – коэффициент теплового расширения и теплоемкость вещества, q – плотность мощности тепловых источников. Если луч света падает нормально на акустически мягкую границу поглощающей свет среды, то решение уравнения (1), описывающее звуковое поле в этой среде, можно представить в виде [10,11]

$$p = \frac{\beta I b^2 \omega}{4 c_p r} \frac{2 K l \cos \varphi}{1 + (K l)^2 \cos^2 \varphi} \frac{2 J_1(K b \sin \varphi)}{K b \sin \varphi}, \quad (2)$$

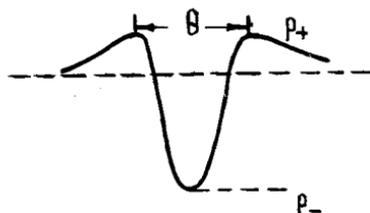
где I – интенсивность лазерного излучения; b – радиус поперечного сечения лазерного луча; l – длина пробега света в веществе; ω – частота модуляции света, равная частоте звука; K – волновое число звука; r – расстояние до точки наблюдения; φ – угол между направлением на точку наблюдения и нормалью к поверхности.

Приведенное выражение отражает тот факт, что область поглощения света играет роль объемной антенны, размеры которой определяются радиусом поперечного сечения светового пучка b и длиной пробега света l в веществе. Соотношение длины волны звука с этими размерами определяет направленность излучения. Можно указать на аналогию теплового механизма возбуждения звука с параметрическим излучением звука в нелинейной акустике; там также в среде возникает объемная антенна, обусловленная взаимодействием волн накачки.

Приведем пример количественной оценки. Расчет показывает, что при мощности излучения неодимового лазера ($\lambda = 1,06$ мкм) $I = 10^5$ кВт на частоте модуляции $\omega = 10^5$ с⁻¹ на расстоянии $r = 10$ см амплитуда звукового излучения в воде оказывается равной $p \approx 10$ Па. Эти данные, так же как и общие закономерности процесса, описываемые формулой (2), находятся в хорошем согласии с экспериментом [12].

При воздействии импульсного лазерного излучения в среде генерируются акустические сигналы, условия возбуждения которых зависят от длительности оптического импульса. В случае длинных лазерных импульсов, когда $\tau \gg \tau_a, \tau_p$, где $\tau_a = \frac{a}{c} \sin \varphi$, $\tau_p = \frac{p}{c} \cos \varphi$ – времена, определяемые попереч-

ным и продольными размерами объемной антенны, антенна оказывается малой по сравнению с длиной излучаемой звуковой волны. В этом случае параметры акустического сигнала определяются временной зависимостью интенсивности лазерного импульса. Акустический сигнал имеет М-образную форму (рис.1).



Р и с. 1. Оптоакустический импульс

Его характерная длительность равна длительности лазерного импульса, а пиковые значения положительных и отрицательных фаз определяются соотношениями

$$p_+ \approx \frac{\beta b^2}{4c_p \tau} \max \left[\dot{I}(t) / \dot{I}(\tau) \right],$$

$$p_- \approx \frac{\beta b^2 \tau}{4c_p \tau} \max \left[\ddot{I}(t') \right], \quad t' = t - \tau/c \quad (3)$$

В случае коротких лазерных импульсов их форма оказывается несущественной в определении параметров звукового импульса, пиковое давление акустического сигнала определяется плотностью выделившейся энергии, а длительность — размерами объемной антенны.

$$p_- \approx \frac{\beta c^2 E}{4\pi^2 c_p \tau b^2 \sin \varphi}, \quad \theta \approx \tau_a \quad (4)$$

Эффективность теплового механизма оптической генерации звука обычно невелика, но энергия возбуждаемых звуковых сигналов оказывается вполне достаточной для их надежной регистрации. Приведем для иллюстрации данные эксперимента. Импульс неодимового лазера с энергией $E = 0,01$ Дж, длительностью $\tau = 20 \cdot 10^{-8}$ с возбуждает в воде на расстоянии 1 м акустический сигнал с пиковым значением давления ~ 1 Па [13], при увеличении энергии до 1 Дж давление в звуковом импульсе возрастает соответственно до 10^2 Па [14].

Значительно более эффективным оказывается испарительный механизм оптической генерации звука, развивающийся в

том случае, когда плотность выделившейся в среде энергии превышает порог парообразования. При этом с поверхности вещества вырывается струя пара, вызывающая образование сильной ударной волны в воздухе и акустического возмущения в конденсированной среде. При умеренных интенсивностях лазерного излучения, когда разлет паров вещества происходит с дозвуковой, по сравнению со скоростью звука в паре, скоростью, давление на поверхности вещества приближенно определяется соотношением [6]

$$p = \left[\gamma(\gamma+1) p_0 (\gamma'-1) I / \gamma' c' \right]^{2/3}, \quad (5)$$

где γ , γ' – показатель адиабаты для воздуха и эффективный показатель адиабаты для пара, учитывающий вклад энергии испарения; c' – скорость звука в воздухе; p_0 – атмосферное давление; I – характерная интенсивность лазерного излучения.

Акустический сигнал, возбуждаемый импульсом давления, действующим на поверхность вещества, в волновой зоне имеет форму, аппроксимируемую одним периодом синусоиды. Пиковое значение давления акустического сигнала в направлениях, близких к нормали к границе вещества, определяется соотношением [6]

$$p \approx \frac{\beta^2}{2\gamma c} \frac{\rho}{\tau}, \quad (6)$$

где ρ – давление на поверхности вещества, определяемое формулой (5), c – скорость звука в веществе, τ – длительность лазерного импульса.

Эксперимент показывает, что при воздействии излучения CO_2 -лазера ($\lambda = 10,6$ мкм) в условиях поверхностного испарения величина избыточного давления в приповерхностном слое может достигать десятков мегапаскалей, что приводит к генерации акустических сигналов с пиковым значением давления 0,1 МПа [15,16]. Такие оптоакустические сигналы оказываются эффективными для диагностики среды [17].

II. ОПТИЧЕСКАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ЗВУКА

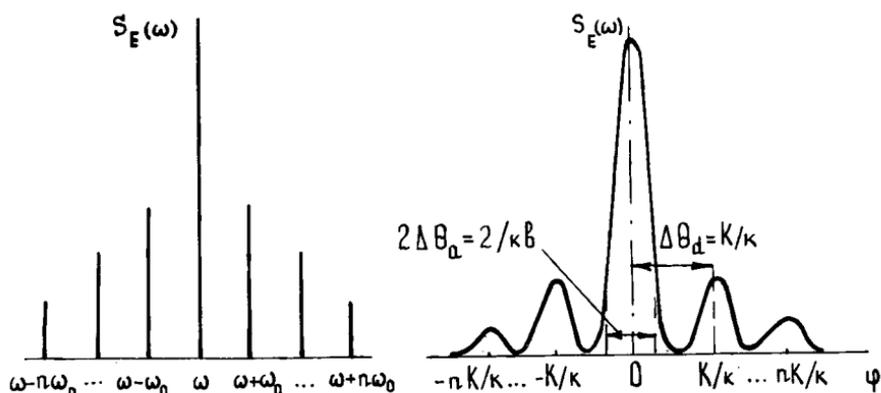
Применение лазерных источников когерентного излучения позволило реализовать гетеродинные методы измерения перемещений, вибраций, течений отражающих или рассеивающих

свет тел. Следует заметить, что первые указания на возможность применения такого рода методов для измерения сверхмалых перемещений были сделаны еще до создания первого лазера [18,19]. Свет, рассеянный колеблющимся телом, испытывает фазовую модуляцию. Непосредственно зарегистрировать фазовые изменения в рассеянном свете не удастся, поскольку существующие фотоприемники реагируют только на интенсивность оптического излучения. Смешивая сигнальное излучение, фаза которого несет информацию о движении исследуемого тела, с опорным или гетеродинным, фаза которого определена, получим меняющуюся во времени картину интерференции двух световых полей. В этом случае структура и интенсивность интерференционных полос определяются фазой сигнального излучения. Проводя, таким образом, интерференционные измерения, можно определить фазовую модуляцию рассеянного поля и, следовательно, исследуемые перемещения.

Чувствительность гетеродинных методов к регистрации колебаний твердых тел чрезвычайно высока. Известно об измерениях вибраций амплитуды 10^{-4} Å и менее [20]. Методы оптического гетеродинирования находят все более широкое применение и в акустических исследованиях [21-24], дополняя и развивая давно известные теневые и теплеровские методы визуализации ультразвуковых полей. Поэтому представляется интересным рассмотреть с единых позиций процесс акустооптического взаимодействия в рамках применения различных методов для его изучения. Такое рассмотрение позволит сопоставить возможности разных методов оптической регистрации звука для измерения того или иного параметра акустического возмущения.

Пусть оптическое излучение, представляющее собой ограниченный пучок радиусом b с гауссовым распределением поля в поперечном сечении, падает на отражающую свет поверхность, по которой бежит след звуковой волны $u = u_0 \cos(\omega_0 t - Kx)$. Здесь x - координата на поверхности, $K = K_0 \sin \theta$, K_0 - волновое число, ω_0 - частота колебаний звуковой волны, θ - угол ее падения. Для простоты будем рассматривать плоскую двумерную задачу. В таком случае поле оптического излучения, отраженного от возмущенной звуковыми колебаниями поверхности, запишется в виде

$$E = E_0 \frac{\exp[-i(\omega t - kR)]}{2\pi i R} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \exp\left[-i2k\alpha_0 \cos(\omega_0 t - Kx) + i\psi x\right] dx, \quad (7)$$



Р и с. 2. Спектры рассеянного оптического излучения: слева – частотный, справа – пространственный

где $\Psi = k \sin \varphi$, φ – угол наблюдения рассеянного оптического излучения, k – волновое число света.

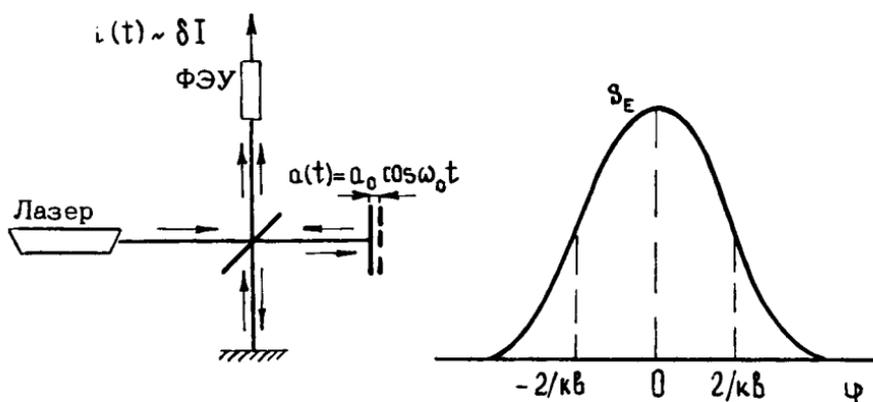
Процесс дифракции света на звуке приводит к фазовой модуляции пространственных и частотных характеристик отраженного оптического излучения. На рис.2 изображены типичные пространственные и частотные спектры оптического излучения, рассеянного на монохроматической звуковой волне. Видно, что эти характеристики по-разному проявляются в зависимости от значения параметра $k\bar{b}$. Соответственно разделяются и методы оптической регистрации звука.

1. Метод оптического гетеродинирования

При значении параметра $k\bar{b} \ll 1$ можно пренебречь пространственным изменением фазы звуковых колебаний на освещенном участке поверхности. В этом случае можно говорить о вибрации поверхности с частотой звука, которая приводит к фазовой модуляции во времени отраженного оптического излучения, т.е. только к частотным изменениям в спектре (рис.3):

$$E_c = E_0 \exp[-i(\omega t + 2k a_0 \cos \omega_0 t)] \quad (8)$$

Фазовые характеристики регистрируются при смещении его на поверхности фотоприемника с опорным гетеродинным излучением $E_r = E_r \exp(-i\omega_r t)$, $\omega_r = \omega - \omega_n$ – частота гетеродина, ω_n – промежуточная частота. Соответственно интенсивность поля интерференции опорного и сигнального (несущего информацию о колебаниях поверхности) излучений будет



Р и с. 3. Метод оптического гетеродинамирования: слева - схема интерферометра, справа - пространственный спектр

$$\begin{aligned} \delta I(t) &= E_0 E_1^* + E_1 E_0^* = 2E_0 E_1 \exp[-i(\omega_n t + 2\kappa a_0 \cos \omega_0 t)] = \\ &= I \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(2\kappa a_0) \exp[-i(\omega_n + n\omega_0)t]. \end{aligned} \quad (9)$$

При малом параметре фазовой модуляции $\kappa a_0 \ll 1$, что типично для акустооптического взаимодействия, выражение для интенсивности поля интерференции опорного и сигнального излучений упрощается:

$$\delta I = I \kappa a_0 \cos \omega_0 t. \quad (10)$$

Изменение интенсивности света будет пропорциональным амплитуде звуковых смещений поверхности, а ее частота совпадает с частотой звука. Поскольку ток фотоприемника в схеме интерферометра пропорционален δI , то, определяя частоту и амплитуду малых изменений фототока, можно регистрировать соответствующие параметры акустических колебаний поверхности.

Методом оптического гетеродинамирования были зарегистрированы ультразвуковые возмущения поверхности жидкости амплитудой $a_0 \sim 1 \text{ \AA}$ при мощности зондирующего излучения He-Ne-лазера 100 мкВт [25].

Другой вариант этого метода применяется для измерения движения сред, в которых свет эффективно рассеивается. Если на движущийся элемент среды, положение которого определяется радиус-вектором $\vec{r}(t)$, под углом χ направляются два

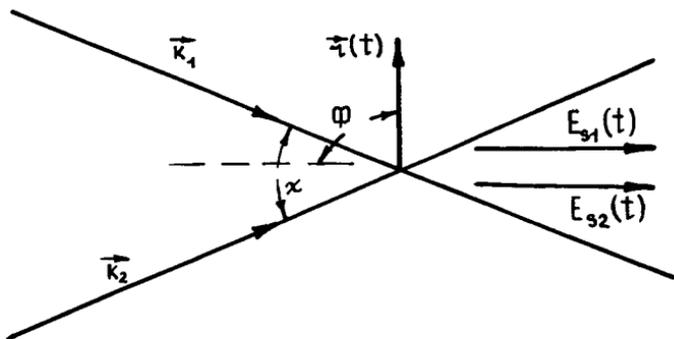
лазерных пучка с волновыми векторами соответственно \vec{k}_1 и \vec{k}_2 (рис.4), то рассеянное средой поле будет определяться суммой двух полей $E_{s1}(t)$ и $E_{s2}(t)$:

$$\begin{aligned} E_{s1}(t) &= E_{s1} e^{\pm i \rho [-i (\vec{k}_s - \vec{k}_1) \vec{r}(t)]}, \\ E_{s2}(t) &= E_{s2} e^{\pm i \rho [-i (\vec{k}_s - \vec{k}_2) \vec{r}(t)]}. \end{aligned} \quad (11)$$

В результате их интерференции интенсивность рассеянного поля будет модулирована

$$I(t) = E_{s1} E_{s2}^* + E_{s2} E_{s1}^* = I \cos(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r}(t) = I_s \cos \omega_d t. \quad (12)$$

Частота изменения интенсивности $\omega_d = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{v}(t)$ определяется доплеровским смещением частоты и пропорциональна скорости движения рассеивающего свет элемента среды. Метод оптического гетеродинамирования, которым измеряют скорость движения рассеивающих свет тел путем измерения частоты ω_d , известен как метод лазерной доплеровской анемометрии [26].



Р и с. 4. Принцип лазерной доплеровской анемометрии

При колебаниях элемента среды под действием звука $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 \cos \omega_0 t$, когда $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{u}_0 \ll 1$, происходит малая модуляция интенсивности рассеянного света, выражение для которой при соответствующем выборе значения τ_0 будет

$$\delta I(t) \approx 2I_s k u_0 \sin \frac{\chi}{2} \cos \varphi \cos \omega_0 t. \quad (13)$$

Здесь $2k \sin \frac{\chi}{2} = |\vec{k}_1 - \vec{k}_2|$. Изменение интенсивности зависит от направления звуковых колебаний и угла схождения зондиру-

ющих лучей и, как в любом другом методе оптического гетеродинамирования, будет пропорциональным амплитуде звуковых колебаний.

В эксперименте по регистрации ультразвукового поля в воде с помощью схемы лазерного доплеровского анемометра были зафиксированы акустические колебания амплитуды 300 \AA на частоте 26 кГц , что соответствовало звуковому давлению $7,5 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Была экспериментально подтверждена косинусная зависимость изменения уровня модуляции интенсивности от угла [27].

2. Теневой метод

При $Kb \ll 1$ уже невозможно пренебрегать пространственным набегом фазы звуковых колебаний на освещенном участке поверхности. В этом случае возникает пространственная модуляция отраженного света. Интегрируя выражение (7), в приближении $ka_0 \ll 1$ приходим к следующему соотношению:

$$E = E_0 \left\{ \exp\left(-i\omega t - \frac{\psi^2 b^2}{4}\right) - ika_0 \exp\left[-i(\omega \pm \omega_0)t - \frac{(\psi \pm K)^2 b^2}{4}\right] \right\}. \quad (14)$$

Первое слагаемое описывает поле зеркально отраженного от поверхности излучения. Два других соответствуют дифракционным составляющим, максимум излучения в которых направлен под углом $\psi = \pm K/k$ от зеркального. Поскольку параметр $Kb \ll 1$, то спектры рассеянного поля пространственно перекрываются и это приводит к их взаимной интерференции. Однако фазы колебаний отраженного поля в плюс и в минус первых спектральных порядках оказываются противоположными, и это приводит к их взаимному гашению при определении суммарной интенсивности поля. Фазовая модуляция не приводит к модуляции полной рассеянной мощности оптического излучения.

Другое дело, если определяется изменение интенсивности отраженного света в каком-либо заданном направлении $\psi_0 = \text{const}$. В таком случае получаем

$$\begin{aligned} \delta I = E_0 E^* + E E_0^* = I ka_0 \left\{ \exp\left[-\frac{(\psi_0 - K)^2 + \psi_0^2}{4} b^2\right] - \right. \\ \left. - \exp\left[-\frac{(\psi_0 + K)^2 + \psi_0^2}{4} b^2\right] \right\} \cos \omega_0 t \approx I ka_0 \psi_0 K b^2 \cos \omega_0 t. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь интенсивность меняется во времени с частотой колебаний поверхности и величина этих изменений зависит от произведения $K\alpha_0$ или числа Маха для звуковой волны. Зная акустические параметры среды, теньвым методом можно регистрировать колебательную скорость или давление в звуковой волне.

Величина изменения интенсивности рассеянного света зависит от угла наблюдения φ_0 и возрастает с его увеличением. При $\sin \varphi_0 = \frac{1}{K\beta}$ и соотношении $K\beta = 1$ получаем

$$\delta I(t) = I K \alpha_0 \cos \omega_0 t, \quad (16)$$

что совпадает с выражением, описывающим изменение интенсивности при оптическом гетеродинировании излучения, отраженного от вибрирующей поверхности. В направлении зеркального отражения $\varphi_0 = 0$ и $\delta I = 0$. В этом случае вклад в поле интерференции двух дифракционных спектральных порядков оказывается симметричным и модуляция интенсивности рассеянного света отсутствует.

Кроме смещения фотоприемника, для нарушения пространственной симметрии регистрируемого оптического излучения применяют ножевые диафрагмы, затеняющие половину рассеянного поля (рис.5). В этом случае

$$\delta I = \int_0^{\pi/2} (E_0 E^* + E E_0^*) d\psi \approx I K \alpha_0 \cos \omega_0 t. \quad (17)$$

В работе [28] была показана возможность регистрации теньвым методом с ножевой диафрагмой ультразвуковых колебаний поверхности амплитудой 0,1 Å и частотой 8 МГц.

3. Метод дифракционной решетки

Этот метод применяют в первую очередь для регистрации пространственных характеристик волн на отражающей свет поверхности при ее освещении достаточно широким лучом, когда выполняется условие $K\beta \gg 1$. В этом случае пространственные спектры рассеянного излучения разделяются и их взаимной интерференции не происходит. Интенсивность и направление распространения дифракционных порядков дают возможность определить с некоторой точностью амплитуду и длину волны колебаний поверхности. Однако фазовые характеристики волны путем прямого измерения интенсивности рассеянного поля не определяются.

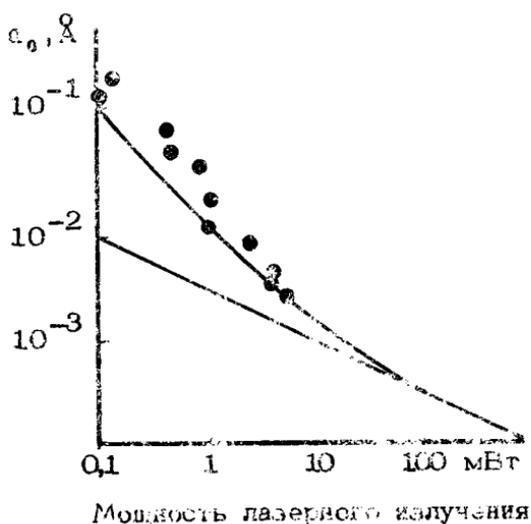


Р и с. 5. Теневой метод

Очевидно, что эти характеристики возможно определить при смещении одного из дифракционных порядков с некоторым опорным излучением, фаза которого фиксирована. Этот путь рассмотрен в разд. II.1. Простой реализацией такого гетеродинного метода в случае $Kb \gg 1$ является использование опорной фазовой дифракционной решетки на исследуемой поверхности. Пространственный период такой решетки должен совпадать с пространственным периодом волны на поверхности. В этом случае нулевой порядок в спектре рассеянного излучения в результате дифракции на решетке образует опорное излучение, которое совпадает по направлению с излучением, рассеянным на поверхностной волне и несущем информацию о ее фазовых характеристиках. В результате интерференции опорного (рассеянного на решетке) и сигнального (рассеянного на звуковой волне) излучений происходит модуляция интенсивности отраженного света

$$\delta I = E E_0^* + E_0 E^* \approx I_k \alpha_0 \cos \omega_0 t. \quad (18)$$

Изменение интенсивности света, так же как и при оптическом гетеродинировании, пропорционально амплитуде звуковых смещений поверхности. Обстоятельный анализ применения амплитудных и фазовых опорных решеток при регистрации ультразвуковых волн на поверхности тел приведен в работах [29-30]. В частности, там показано, что при мощности лазерного излучения 4,2 мВт могут быть зарегистрированы звуковые волны, имеющие амплитуду колебаний $3 \cdot 10^{-3}$ Å, на частоте около 16 МГц (рис.6). Метод опорной дифракционной ре-



Р и с. 6. Чувствительность оптических методов регистрации звуковых колебаний

шетки оказался чрезвычайно эффективным для определения характеристик поверхностных волн, возбужденных тепловыми флуктуациями в жидкости [31].

Рассмотренные методы оптической регистрации звука являются чувствительными к фазовым характеристикам звуковых колебаний. Это их свойство есть следствие заложенного в них общего принципа оптического гетеродинирования при интерференции сигнального, рассеянного на звуковой волне из-

лучения с некоторым опорным, фаза которого не меняется во времени. Поскольку разные методы реализуют один и тот же принцип, то и чувствительность этих методов (глубина модуляции интенсивности) оказывается близкой и определяется одними и теми же параметрами зондирующего оптического излучения. Чувствительность оптических методов регистрации звука будет пропорциональной интенсивности отраженного (рассеянного) излучения и волновому числу света. С уменьшением длины волны и увеличением мощности зондирующего оптического излучения чувствительность оптических методов к регистрации звуковых волн возрастает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптические методы возбуждения и приема звука оказываются очень гибкими по своим возможностям. Нерезонансный характер оптикоакустических и акустооптических эффектов позволяет возбуждать и, соответственно, регистрировать звуковые волны в широком диапазоне частот. Изменяя характеристики оптического излучения, его длину волны и размер освещенного участка на поверхности исследуемой среды, можно менять уровень и диаграмму направленности оптикоакустического излучения. С другой стороны, те же изменения в характеристиках оптического излучения открывают возможность непосредственного определения параметров акустической волны: амплитуды колебательной скорости и смещений, частоты и длины волны, направления ее распространения.

Рассмотренные оптические методы открывают новые возможности акустической диагностики конденсированных сред благодаря тому, что их применение не требует контакта акустического преобразователя со средой, не вносит дополнительных возмущений или искажений свойств среды.

Л и т е р а т у р а

1. Bell A. Upon the production of sound by radiant energy. - *Phyl. Mag. L. Journ. of Science*, 1881, v.11, N71, p.510.
2. Röntgen W. On Tones Produced by Inter-

mittent Irradiation of a Gas. - *Phyl. Mag.*, 1881, v.11, N68, p.308.

3. Тиндаль Д. Звук. М.: Гос. изд-во, 1922. 244 с.

4. Бункин Ф.В., Комиссаров В.М. Оптическое возбуждение звуковых волн. - *Акуст. журн.*, 1973, т.27, №3, с.305.

5. Лямшев Л.М., Седов Л.В. Оптическая генерация звука в жидкости. Тепловой механизм (обзор). - *Акуст. журн.*, 1981, т.27, №5, с.5.

6. Лямшев Л.М., Наугольных К.А. Оптическая генерация звука. Нелинейные эффекты. - *Акуст. журн.*, 1981, т.27, №5, с.641.

7. Brillouin L. Diffusion de la lumiere et des rayons X par un corps transparent homogene. - *Ann. de phys.*, 1922, v.88, N17, p.9.

8. Debye P., Sears F. Scattering of Light by Supersonic Waves. - *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.*, 1932, v.18, p.409.

9. Lucas R., Biquard P. Proprieties optiques des milieu solides et liquides soumis aux vibration elastiques ultrasonores. - *J. Phys. et rad.*, 1932, N3, p.464.

10. Божков А.И., Бункин Ф.В. Генерация звука в жидкости при поглощении в ней лазерного излучения с модулированной интенсивностью. - *Квант. электроника*, 1975, т.2, №8, с.1763.

11. Козяев Е.Ф., Наугольных К.А. О тепловом акустооптическом эффекте. - *Акуст. журн.*, 1976, т.22, №3, с.366.

12. Бункин Ф.В., Михалевиц В.Г., Шипуло Г.П. Генерация монохроматического звука в воде при поглощении в ней лазерного излучения. - *Квант. электроника*, 1976, т.3, №2, с.441.

13. Городецкий В.С., Егерев С.В., Есипов И.Б., Наугольных К.А. О генерации звука лазерными импульсами. - *Квант. электроника*, 1978, т.5, №11, с.2396.

14. Егерев С.В., Наугольных К.А., Пашин А.Е., Установ В.Н. Тепловое возбуждение звука при взаимодействии наносекундного лазерного импульса с жидкостью. - В кн.: 5-е Всесоюз. совещ. по нерезонансному взаимодействию оптического излучения с веществом: Тезисы. Л., 1981.

15. Giovaneschi P., Dufresne D., Caressa J.P., Bournot Ph. Measurement of high pressure induced in water by CO₂ laser pulse. - *Appl. Phys. Lett.*, 1980, v.36, N11, p.882.

16. Витшас А.Ф., Григорьев В.В., Корнеев В.В. и др. Возбуждение импульса давления в воде при взрыве с испарением приповерхностного слоя. - Письма в ЖТФ, 1983, т.9, №23, с.1442.

17. Hickman G.D., Edmond J.A. Laser acoustic measurements for remotely determining bathymetry in shallow turbid waters. - JASA, 1983, v.73, N3, p.840.

18. Брусин И.Я., Горелик Г.С., Пиковский С.А. - ДАН СССР, 1952, т.83, №3, с.553.

19. Берштейн И.Л. Об измерении весьма малых изменений разности хода двух световых колебаний. - ДАН СССР, 1954, т.94, №4, с.655.

20. Whitman R.L., Korpel A. Probing of Acoustic Surface Perturbations by Coherent Light. - Appl. Opt., 1969, v.3, N8, p.1567.

21. Jacobs S.F. Measurements of ultrasmall displacements. - Opt.Eng., 1978, v.17, N5, p.544.

22. Бондаренко А.Н., Дробот Ю.Б., Константинов В.А. и др. Измерение малых акустических колебаний оптическими методами. - Автометрия, 1976, №3, с.83.

23. Демиденко Т.Ф., Шенявский Л.А., Шмальгаузен В.И. Интерференционная установка для измерения малых акустических колебаний. - Квант. электроника, 1977, т.4, №11, с.2448.

24. Захаров В.П., Евтихийев Н.Н., Снежко Ю.А., Тычинский В.П. Применение лазерной интерферометрии для изучения колебательных явлений. - Акуст. журн., 1976, т.22, №1, с.32.

25. Massey G.A. An optical heterodyne ultrasonic anemometer. - Proc. IEEE, 1968, v.56, p.2157.

26. Дюррани Т., Грейтид К. Лазерные системы в гидродинамических измерениях. М.: Энергия, 1980.

27. Есипов И.Б., Зосимов В.В., Смирнов М.Г. Регистрация акустического поля методом объемного рассеяния света. - Акуст. журн., 1982, т.28, №5, с.641.

28. Adler R., Korpel A., Desmares P. An instrument for making surface waves visible. - IEEE Trans. SU-15, 1968, p.157.

29. Potorski K. Fourier Series for the Irradiance of Light Modulated by an Ultrasonic Progress-

sive Wave Associated with an Optical Amplitude Granting. - *Acoustica*, 1983, v.52, N14, p.246.

30. Komotskii V.A., Black T.D. Analysis and application of stationary reference granting method for optical detection of surface acoustical waves - *J. Appl. Phys.*, 1980, v.52, N1, p.129.

31. Edwards R.V., Sirohi R.S., Mann J.A. Surface fluctation scattering using granting heterodyne-spectroscopy. - *Appl. Opt.*, 1982, v.21, N19, p.3555.

ЛАЗЕРНАЯ ДОПЛЕРОВСКАЯ АНЕМОМЕТРИЯ

Б.С.Ринкевичюс

Одной из основных задач гидрфизического эксперимента является изучение скоростной структуры потоков жидкости. Для этого у исследователя должен быть большой набор аппаратуры, позволяющей измерять скорость жидкости в широком диапазоне. Однако в настоящее время на практике широко используются только термоанемометры, которые из-за контактности измерений имеют целый ряд недостатков.

Начиная с 1964 года для диагностики потоков жидкости стали использовать лазерные доплеровские анемометры [1-4]. В настоящее время эти приборы выпускаются серийно и широко используются в гидрофизическом эксперименте. Целью настоящей статьи является знакомство с основными принципами работы лазерных доплеровских анемометров.

ЭФФЕКТ ДОПЛера

Принцип работы лазерного доплеровского анемометра (ЛДА) основан на эффекте Доплера, суть которого заключается в зависимости частоты излучения, рассеянного движущейся в потоке малой частицей, от скорости ее движения. Это означает, что данный метод измерения применим только к потокам, в которых имеются частицы, искусственно введенные или естественно присутствующие.

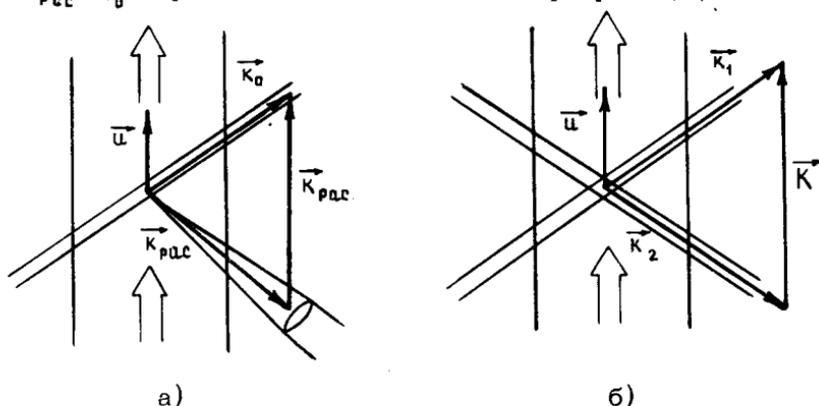
Если на частицу, движущуюся со скоростью \vec{u} , направить монохроматическое излучение с круговой частотой ω_0 , то рассеянное излучение из-за эффекта Доплера будет иметь круговую частоту $\omega_{\text{Д.С}}$, причем

$$\omega_{\text{р а с}} = \omega_0 + (\vec{k}_{\text{р а с}} - \vec{k}_0) \vec{u}, \quad (1)$$

где $\vec{k}_{\text{р а с}}$ - волновой вектор рассеянного излучения; \vec{k}_0 - волновой вектор падающего излучения; $|\vec{k}_0| = 2\pi / \lambda$; λ - длина волны падающего излучения; \vec{u} - вектор скорости частицы. Обычно выражение (1) записывают в виде

$$\omega_{\text{Д}} = \vec{K}_{\text{р а с}} \vec{u}, \quad (2)$$

где $\omega_{\text{Д}} = \omega_{\text{р а с}} - \omega_0$ - доплеровский сдвиг частоты, $\vec{K}_{\text{р а с}} = \vec{k}_{\text{р а с}} - \vec{k}_0$ - разностный волновой вектор (рис.1, а).



Р и с. 1

Таким образом, если измерить доплеровский сдвиг частоты, то при известной длине волны падающего излучения и известной геометрии опыта можно определить проекцию вектора скорости на разностный волновой вектор $\vec{K}_{\text{р а с}}$.

Наибольшее распространение получили схемы с двумя зондирующими пучками, имеющими близкие, но различные частоты ω_1 и ω_2 и волновые векторы \vec{k}_1 и \vec{k}_2 . Тогда разность доплеровских сдвигов частоты рассеянных волн не зависит от направления наблюдения и определяется соотношением

$$\omega_{\text{Д}} = \omega_{1\text{р а с}} - \omega_{2\text{р а с}} = \omega_{12} - \vec{K} \vec{u}, \quad (3)$$

где $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$, $\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ - разностный волновой вектор. Такие оптические схемы называют дифференциальными.

Из выражения (3) видно, что наличие разности частот ω_{12} приводит к тому, что доплеровский сдвиг частоты зависит от направления движения скорости частицы. При $\omega_{12}=0$ и с учетом обозначений, введенных на рис.1,б, имеем

$$\omega_D = 4\pi u n \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi / \lambda_0, \quad (4)$$

где n - показатель преломления среды, λ_0 - длина волны излучения в вакууме. Из выражения (4) получаем значение скорости

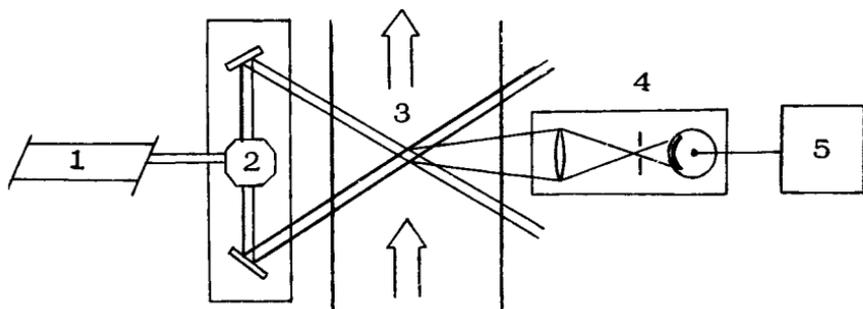
$$u = \frac{\omega_D}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_0}{2n \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}. \quad (5)$$

Таким образом, измерение скорости потока в лазерной доплеровской анемометрии сводится к измерению доплеровского сдвига частоты и нахождению масштабного коэффициента.

Отметим, что для типичных значений длин волны зондирующего излучения $\lambda_0 = 0,63$ мкм (He-Ne лазер), углов между зондирующими пучками $\alpha = 10^\circ$ для скорости объекта $u = 1$ м/с доплеровский сдвиг частоты составляет 0,276 МГц.

ОДНОКОМПОНЕНТНАЯ СХЕМА ЛДА

На рис.2 показана принципиальная схема ЛДА, предназначенная для измерения одной проекции вектора скорости потока. Излучение от одномодового лазера 1 попадает на блок передающей оптики 2, после которого получают два коге-



Р и с. 2

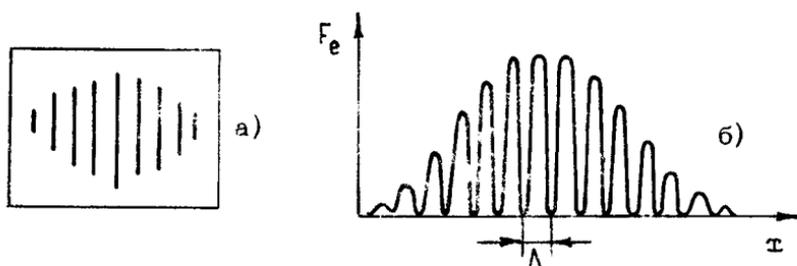
рентных пучка, распространяющихся под углом друг к другу. Эти пучки направляются в исследуемый поток 3. Рассеянное на движущихся в потоке частицах излучение попадает на блок приемной оптики 4 и преобразуется в электрический сигнал с помощью фотоприемника: Этот сигнал поступает в блок радиоизмерительной аппаратуры 5.

Блок передающей оптики содержит расщепитель пучка, поворотные зеркала, фокусирующую линзу и однополосный модулятор, позволяющий сдвигать частоту одного из пучков на определенную величину, от единиц до десятка мегагерц.

Блок приемной оптики содержит объектив, регулирующую диафрагму, установленную в плоскости изображения области пересечения пучков, фотоприемник.

Показанная на рис.2 схема ЛДА работает в дифференциальном режиме, когда на фотоприемник попадает только рассеянное излучение.

Рассмотрим более подробно работу дифференциальной схемы ЛДА. В области пересечения двух лазерных пучков образуется интерференционное поле, т.е. чередование светлых и темных полос, направленных вдоль биссектрисы угла пересечения этих пучков (рис.3,а). Период интерференционного по-



Р и с . 3

ля Λ зависит от длины волны лазерного излучения и угла пересечения между пучками и выражается следующей зависимостью:

$$\Lambda = \lambda / 2 \sin \frac{\alpha}{2} . \quad (6)$$

Таким образом, для данного типа лазера период интерференционного поля можно менять путем изменения угла между пучками. Например, для $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ при изменении угла между пучками в пределах от 1° до 30° период интерференционного поля будет меняться от 36 до 1,2 мкм.

Движение малой частицы через такое интерференционное поле в направлении, перпендикулярном направлению полос, приводит к модуляции мощности рассеянного излучения, регистрируемого блоком приемной оптики.

Мощность рассеянного излучения для одного пучка определяется следующей зависимостью:

$$P_{\text{рас}}(\vec{r}) = F_e(\vec{r}) \sigma, \quad (7)$$

где $F_e(\vec{r})$ - плотность мощности в зондирующем пучке в точке нахождения малой частицы \vec{r} , σ - сечение рассеяния частицы.

Для лазерного пучка плотность мощности имеет вид

$$F_e(x, y) = \frac{P_0}{\pi \omega_0^2 / 2} \exp \left[-2(x^2 + y^2) / \omega_0^2 \right],$$

где P_0 - мощность лазерного пучка, ω_0 - радиус пучка, где плотность мощности уменьшается в e^2 раз. Для $P_0 = 1$ Вт, $\omega_0 = 0,05$ мм в центре пучка плотность мощности составляет $F_e(0, 0) = 256$ Вт/мм².

Сечение рассеяния частицы зависит как от ее оптических свойств, т.е. показателя преломления и размера, так и от параметров приемной оптики, т.е. от направления наблюдения рассеянного излучения, размеров и формы апертуры приемной оптики. Так, для капли воды радиусом 0,26 мкм для $\lambda = 0,55$ мкм при телесном угле приемной оптики $\Delta\Omega = 10^{-2}$ ср сечение рассеяния составляет $\sigma = 5 \cdot 10^{-2}$ мкм² при наблюдении рассеянного излучения под углом 20° к оси пучка. Для частиц, размер которых больше длины волны, основная мощность рассеянного излучения направлена вперед. Таким образом, мощность рассеянного излучения для рассматриваемого случая будет $P_{\text{рас}} = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт.

При интерференции двух одинаковых по мощности и размерам гауссовых пучков, расположенных в плоскости xOx , плотность мощности меняется по закону

$$F_e(x, y) = \frac{2P_0}{\pi \omega_0^2 / 2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{\Lambda} \right) \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{\omega_0^2} \right], \quad (8)$$

где Λ – период интерференционной картины, рассчитываемый по формуле (6) (см.рис.3,б).

При движении малой по сравнению с длиной волны частицы через это интерференционное поле со скоростью u координата меняется по закону $x = ut$, поэтому мощность рассеянного излучения будет меняться во времени следующим образом:

$$P_{\text{рас}}(t) = \frac{2 P_0 \sigma}{\pi \omega_0^2 / 2} \left(1 + \cos \frac{2\pi ut}{\Lambda} \right) \exp \left[- \frac{2(ut)^2}{\omega_0^2} \right]. \quad (9)$$

Если углы между пучками не малы и размер частицы порядка длины волны лазерного излучения, то необходимо учитывать зависимость рассеянного излучения от направления наблюдения и состояния поляризации падающих пучков. Кроме того, строгий анализ работы ЛДА показывает, что важна интерференция не падающих на частицу пучков, а интерференция рассеянных волн. Поэтому мощность рассеянного излучения будет меняться по следующему закону:

$$P_{\text{рас}}(t) = \frac{P_0}{\pi \omega_0^2 / 2} \left[\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_{12} \cos \left(\frac{2\pi ut}{\Lambda} + \varphi \right) \right] \exp \left[- \frac{2(ut)^2}{\omega_0^2} \right],$$

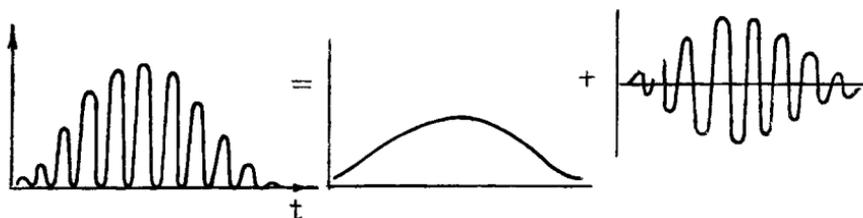
где σ_1 , σ_2 – сечения рассеяния частицы для первого и второго пучков соответственно, σ_{12} – модуль когерентного сечения рассеяния частицы; φ – начальная разность фаз, зависящая от свойств частицы.

Когерентное сечение рассеяния частицы характеризует способность интерферировать рассеянные волны и зависит как от оптических параметров частицы, так и от условий освещения и приема рассеянного излучения.

Так как ток фотоприемника связан с мощностью падающего на него излучения простой зависимостью

$$i(t) = \rho P(t), \quad (10)$$

где ρ – чувствительность фотоприемника, то в соответствии с формулой (9) ток будет равен (см.рис.4)



Р и с. 4

$$i(t) = i_0 \left[1 + m \cos(\omega_D t + \varphi) \right] \exp(-t^2/t_0^2), \quad (11)$$

где $i_0 = 2\rho\rho_0 \epsilon \exp(-2y^2/\omega_0^2) / (\pi\omega_0^2/2)$ - максимальное значение фототока, $\omega_D = 2\pi u / \Lambda$ - круговая частота доплеровского сигнала, $t_0 = \omega_0 / 2u$ - длительность импульса фототока, $m = 2\epsilon_{12} / (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ - глубина модуляции фототока, $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2) / 2$.

Фототок от совокупности частиц будет

$$i(t) = \sum_p i_p(t - t_p),$$

где i_p - фототок от одной частицы, t_p - момент появления частицы в пересечении пучков. Полный фототок представляет собой последовательность импульсов со случайными амплитудой, частотой, начальной фазой и начальным моментом появления.

Таким образом, измерение скорости частицы, по которой судят о скорости самого потока, сводится к измерению частоты доплеровского сигнала $f_D = \omega_D / 2\pi$ и вычислению скорости по формуле

$$u = f_D \cdot \Lambda. \quad (12)$$

Как видно из этой формулы, зависимость между вычисленной скоростью и измеряемой частотой доплеровского сигнала линейна, что, безусловно, является большим достоинством данного метода измерения скорости потока.

ОПТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ЛДА

Для решения многих задач гидродинамики требуется измерение двух компонент вектора скорости. Рассмотрим принципы измерения двух компонент вектора скорости потока.

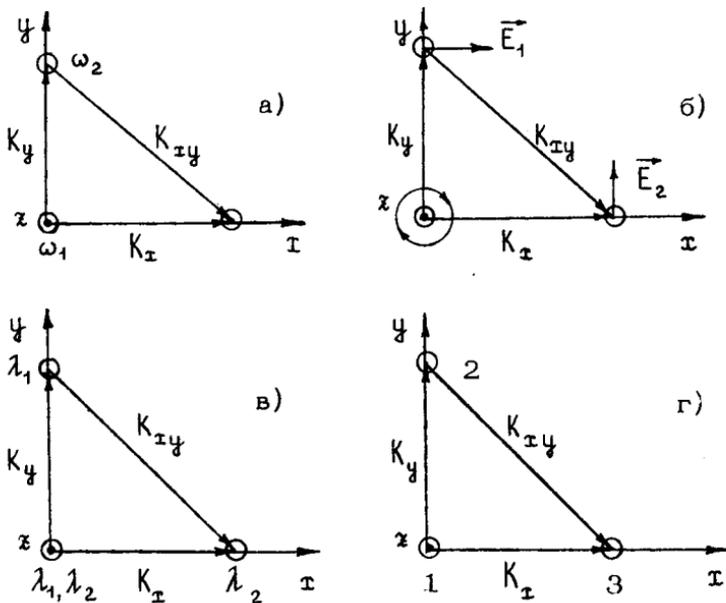
Для разделения информации, относящейся к отдельной компоненте вектора скорости, используются следующие принципы:

- 1) частотный,
- 2) поляризационный,
- 3) пространственный,
- 4) спектральный.

В первом случае между пучками вводится сдвиг частоты такой, что частоты доплеровских сигналов, относящиеся к разным компонентам вектора скорости, не перекрываются. При помощи полосовых фильтров дальше эти сигналы разделяются по отдельным каналам. Во втором случае поляризация зондирующих пучков при измерении двух компонент вектора скорости выбирается ортогональной и сигналы, относящиеся к разным компонентам вектора скорости, разделяются с помощью поляризационных устройств. В третьем случае наблюдение рассеянного излучения ведется по разным направлениям и регистрируется на отдельные фотоприемники. В четвертом случае используются несколько лазеров с излучением на различных длинах волн. Разделение по каналам осуществляется при помощи интерференционных светофильтров. Возможно использование одного аргонового лазера, работающего на нескольких линиях одновременно.

Пусть в исследуемую точку потока направляются три пучка, как показано на рис.5,а. Пучки 1 и 2 расположены таким образом, что разностный вектор $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{K}_y$ параллелен оси y , а разностный вектор $\vec{k}_1 - \vec{k}_3 = \vec{K}_x$ параллелен оси x . Наблюдение рассеянного излучения ведется вдоль оси z с помощью блока приемной оптики, на выходе которого поставлены два полосовых фильтра. Пусть частота первого пучка будет ω_1 , а частота второго $\omega_2 = \omega_1 + \omega_{12}$, третьего - $\omega_3 = \omega_1 + \omega_{13}$. Составляющие фототока для этого случая можно записать в виде

$$i(t) = \rho P_0 \sum_{i=1}^3 c_i h_i(t) \epsilon_i + \\ + \rho P_0 2\sqrt{c_1 c_2} h_{12}(t) \epsilon_{12} \cos(\omega_x t + \varphi_x) +$$



Р и с. 5

$$\begin{aligned}
 &+ \rho \rho_0 2 \sqrt{c_1 c_3} h_{13}(t) \epsilon_{13} \cos(\omega_y t + \varphi_y) + \\
 &+ \rho \rho_0 2 \sqrt{c_2 c_3} h_{23}(t) \epsilon_{23} \cos(\omega_{xy} t + \varphi_{xy}),
 \end{aligned}$$

где c_i - доля мощности излучения лазера, приходящаяся на i -й пучок; $h_i(t)$ - огибающая сигнала для i -го пучка; ϵ_i - сечение рассеяния частицы для i -го пучка; $h_{ij}(t)$ - огибающая сигнала для i -го и j -го пучков; ϵ_{ij} - когерентное сечение рассеяния для i -го и j -го пучков; $\omega_x = \omega_{12} - K_x u_x$, $\omega_y = \omega_{13} - K_y u_y$, $\omega_{xy} = \omega_{23} - K_{xy} u_{xy}$; φ_x , φ_y , φ_{xy} - начальные фазы.

Непосредственную информацию о u_x - и u_y - составляющих вектора скорости содержат члены, амплитуды которых определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 &\text{для } u_x\text{-составляющей} - \rho \rho_0 2 \sqrt{c_1 c_2} h_{12}(t) \epsilon_{12}, \\
 &\text{для } u_y\text{-составляющей} - \rho \rho_0 2 \sqrt{c_1 c_3} h_{13}(t) \epsilon_{13}.
 \end{aligned}$$

Для эффективного разделения информации о составляющих u_x и u_y при помощи полосовых фильтров необходимо выбрать соответствующим образом частоты зондирующих пучков. Например, если $\omega_{12}/2\pi = 40$ МГц, $\omega_{13}/2\pi = 30$ МГц, то $\omega_{23}/2\pi = 10$ МГц. Тогда можно надежно разделить сигналы, если

$$|K_x u_x| < 5 \text{ МГц} \text{ и } |K_y u_y| < 5 \text{ МГц}$$

Следует заметить, что амплитуды сигналов для u_x - и u_y -составляющих по-разному зависят от размера частиц, так как в общем случае $\epsilon_{12} \neq \epsilon_{13}$. Это необходимо учитывать при проведении статистических измерений, например рейнгольдовых напряжений.

При поляризационном разделении сигналов состояние поляризации зондирующих пучков выбирается следующим образом. Пучки 2 и 3 имеют линейные поляризации, ортогональные друг к другу, а пучок 1 - круговую (рис.5,б). Вектор поляризации пучка 2 лежит в плоскости $y \parallel O\vec{k}_2$, а вектор поляризации пучка 3 лежит в плоскости $x \parallel O\vec{k}_3$.

Для достаточно малого угла между зондирующими пучками и малого телесного угла приема рассеянного излучения с помощью поляризационной призмы можно разделить сигналы, соответствующие u_x - и u_y -составляющим вектора скорости.

В этом случае на первый фотоприемник попадает излучение от пучков 1 и 2, а на второй - от пучков 1 и 3. Фототок в каждом канале будет

$$i_1(t) = \rho P_0 \left[\sum_{i=1,2} c_i h_i(t) \epsilon_i + 2 \sqrt{c_1 c_2} h_{12}(t) \epsilon_{12} \cos(\omega_x t + \psi_x) \right],$$

$$i_2(t) = \rho P_0 \left[\sum_{i=1,3} c_i h_i(t) \epsilon_i + 2 \sqrt{c_1 c_3} h_{13}(t) \epsilon_{13} \cos(\omega_y t + \psi_y) \right].$$

Из этих выражений видно, что фототок в каждом канале содержит информацию только об одной составляющей вектора скорости потока. Влияние одного канала на другой проявляется через деполаризующие эффекты, возникающие при рассеянии излучения на частицах. Эти эффекты возрастают с увеличением телесного угла захвата $\Delta\Omega$ и угла между зондирующими пучками, и в большей степени для несферических частиц. Анализ их можно привести для определенного типа частиц и конкретного расположения приемной оптики, используя теорию рассеяния когерентного света.

При пространственном разделении информации о двух составляющих вектора скорости используется один зондирующий пучок, а рассеянное излучение собирается по трем различным

направлениям таким образом, чтобы регистрируемый в каждом канале доплеровский сдвиг частоты был пропорционален u_x - и u_y -компонентам вектора скорости потока. Это можно сделать, если регистрацию рассеянного излучения вести таким образом, как показано на рис.5,в.

При спектральном методе разделения информации о u_x и u_y -компонентах используются либо два лазера с излучением на различных длинах волн, либо один аргоновый лазер, работающий одновременно на двух длинах волн. Зондирующие пучки располагаются так, как показано на рис.5,г.

Разделение информации о u_x - и u_y -составляющих осуществляется при помощи интерференционных светофильтров. Влияние одного канала на другой возможно за счет пропускания светофильтра, настроенного на длину волны λ_1 , излучение с длиной волны λ_2 . Фототок, регистрируемый в каждом канале, будет

$$i_1(t) = \rho \rho_1 \left[\sum_{i=1,2} c_i h_i(t) \epsilon_i + 2 \sqrt{c_1 c_2} h_{12}(t) \times \right. \\ \left. \times \epsilon_{12} \cos(\omega_x t + \varphi_x) \right],$$

$$i_2(t) = \rho \rho_2 \left[\sum_{i=1,2} c_i h_i(t) \epsilon_i + 2 \sqrt{c_3 c_4} h_{34}(t) \times \right. \\ \left. \times \epsilon_{34} \cos(\omega_y t + \varphi_y) \right],$$

где ρ_1 - мощность излучения с длиной волны λ_1 , ρ_2 - мощность излучения с длиной волны λ_2 , $\omega_x = K_x u_x$, $\omega_y = K_y u_y$, причем $K_x = 2\pi (2 \sin \alpha_x / 2) / \lambda_1$, $K_y = 2\pi \times (2 \sin \alpha_y / 2) / \lambda_2$. Следует также заметить, что в общем случае $\epsilon_{12} \neq \epsilon_{34}$, так как когерентные сечения зависят и от длины волны падающего излучения.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА

Для извлечения информации о скорости потока, содержащейся в доплеровском сигнале, в настоящее время используются спектроанализаторы, следящие за частотой системы, и системы дискретного счета.

Дадим краткое качественное описание принципа их действия с целью сопоставления и выявления рациональных облас-

тей применения. Прежде всего отметим специфику сигналов, получаемых в ЛДА, которая состоит в следующем.

1. В физических исследованиях приходится сталкиваться с широким диапазоном изменения скорости (в 20–100 раз), что приводит к широкому диапазону измеряемых доплеровских частот.

2. Доплеровский сигнал носит заведомо статистический характер, причем случайными являются как частота сигнала, соответствующая случайной скорости, так и амплитуда импульсов и их момент появления.

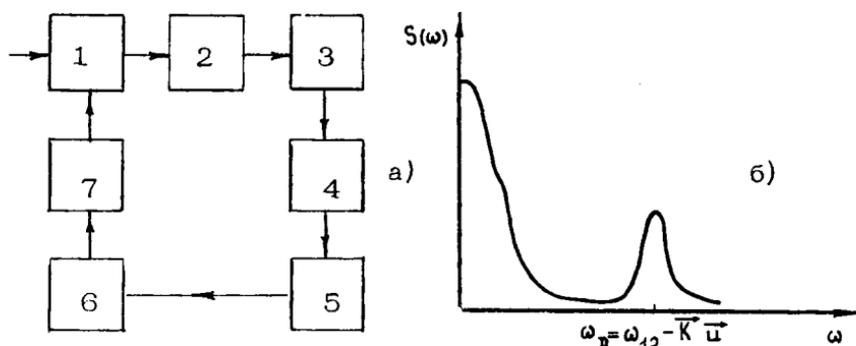
3. Ширина спектра доплеровского сигнала растет с ростом средней частоты, а относительная ширина при этом остается постоянной величиной.

4. Для сигналов, получаемых в ЛДА, свойствен большой диапазон изменения характера сигнала, соответствующего различным режимам течения (ламинарному, пульсирующему, турбулентному), различным концентрациям частиц: в измерительном объеме меньше одной частицы (одночастичный режим), в среднем одна частица (переходный режим) и большое число частиц.

Рассмотрим принципы работы радиоизмерительной аппаратуры, используемой в лазерных анемометрах.

Спектроанализатор. Спектральный анализ доплеровского сигнала с помощью серийно выпускаемых анализаторов спектра является наиболее изученным и распространенным методом обработки случайных сигналов. Анализатор спектра является квадратичным детектором, который измеряет мощность части сигнала, прошедшего через узкополосный фильтр с шириной $\Delta\omega_{\Phi}$ и центральной частотой ω_{Φ} . Изменяя частоту ω_{Φ} , можно получить полный спектр доплеровского сигнала, максимум которого приходится на частоту $\omega_D = \omega_{12} - \vec{K} \vec{v}$. Чаще всего частота фильтра остается постоянной, а доплеровский сигнал смешивается с сигналом от генератора, частота которого медленно меняется. Тогда получается сигнал, спектр которого также меняется во времени.

Структурная схема анализатора спектра показана на рис.6,а. Исследуемый сигнал поступает на модулятор 1, на другой вход которого подается напряжение от генератора качающейся частоты 7. После модулятора сигнал поступает на узкополосный фильтр 2 с фиксированной центральной частотой и полосой пропускания $\Delta\omega_{\Phi}$. После фильтра сигнал проходит квадратор 3, осредняющее устройство 4, деле-



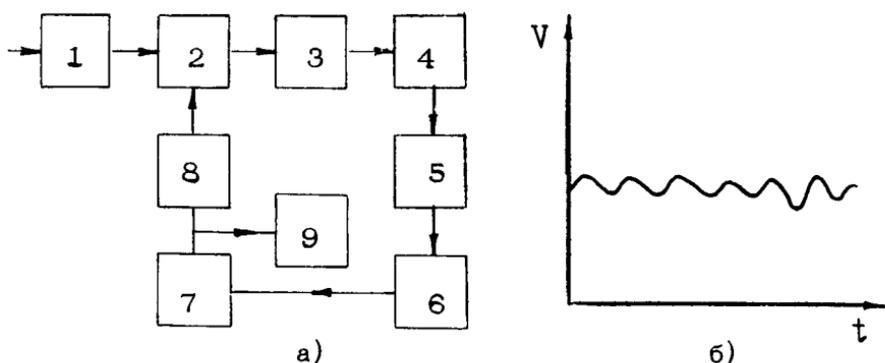
Р и с. 6

ние на ширину полосы пропускания 5 и поступает на двухкоординатный самописец 6, на другой вход которого подается напряжение от генератора качающейся частоты. Во многих серийно выпускаемых спектроанализаторах в качестве регистрирующего прибора используется электронно-лучевая трубка. Значение максимума спектральной плотности сигнала считывается с частотомера, встроенного в анализатор спектра. Вид спектра доплеровского сигнала показан на рис.6,б.

Анализаторы спектра одинаково хорошо функционируют как в одночастичном, так и многочастичном режимах работы ЛДА, что является их существенным достоинством. Основные недостатки спектроанализатора как измерительного прибора — большая погрешность измерения и малое быстродействие. Поэтому они используются в основном при настройке оптической схемы ЛДА и при исследовании стационарных потоков.

Следящие системы позволяют получить аналоговое напряжение, пропорциональное скорости, что является их существенным преимуществом.

Структурная схема следящей за частотой доплеровского сигнала системы показана на рис.7,а. На вход системы поступает доплеровский сигнал с частотой, изменяющейся во времени. Этот сигнал проходит полосовой фильтр 1 и подается на смеситель 2, куда поступает также сигнал с выхода генератора 8, частота ω_r которого пропорциональна приложенному на входе генератора напряжению. Сигнал от смесителя имеет разностную частоту $\omega_0 = \omega_D - \omega_r$ и проходит через узкополосный фильтр 3 для уменьшения уровня шумов и далее поступает на ограничитель 4, исключаяющий амплитудные флуктуации, присущие доплеровскому сигналу. Далее



Р и с. 7

Далее сигнал подается на частотный дискриминатор 5, напряжение на выходе которого пропорционально девиации промежуточной частоты вблизи фиксированного среднего значения $V_{\text{ср}}$. После соответствующего сглаживания с большой постоянной времени T в блоке 6 и усиления в блоке 7 напряжение подается на управляемый вход генератора 8.

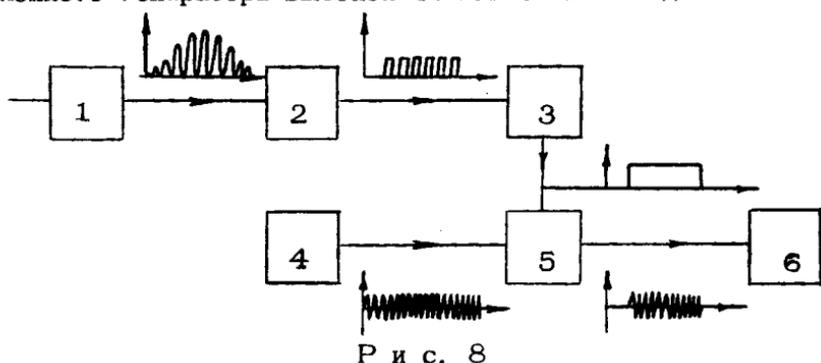
Результат действия цепи обратной связи таков, что при условии подходящего усиления в этой цепи частота генератора следует за частотой доплеровского сигнала, сохраняя постоянную с ней разность, равную ω_0 . Таким образом, напряжение представляет собой электрический аналог "мгновенной" доплеровской частоты, а следовательно и скорости потока (рис. 7, б). Это напряжение регистрируется и обрабатывается в блоке 9, где получают нужные параметры исследуемого потока. Например, степень турбулентности или интенсивность пульсаций определяется по отношению среднеквадратичного значения переменной составляющей выходного напряжения к значению постоянной составляющей.

Следящие за частотой доплеровского сигнала системы хорошо работают только в многочастичном режиме. В настоящее время они широко используются в ЛДА. Верхний диапазон частот доплеровского сигнала составляет около 50 МГц. В одном поддиапазоне отношение максимальной и минимальной скоростей составляет 200:1.

Системы дискретного счета. Сущность работы этих систем состоит в подсчете числа периодов доплеровского сигнала за известный эталонный промежуток времени, либо в подсчете числа периодов эталонной частоты за несколько периодов доплеровской частоты. Такие счетчики хорошо работают

при малой концентрации частиц и хорошем отношении сигнала к шуму.

На рис.8 показана структурная схема упрощенной системы дискретного счета. Доплеровский сигнал проходит полосовой фильтр 1 и поступает в блок формирования импульсов 2 с периодом, определяемым периодом доплеровского сигнала. В блоке 3 из N импульсов доплеровской частоты (чаще всего $N=8$) формируется строб длительностью $T=NT_D$, где T_D – период доплеровского сигнала. Этот строб управляет работой блока 5, на вход которого поступает сигнал от эталонного генератора высокой частоты. На выходе блока 5 по-



Р и с. 8

лучаются импульсы эталонной частоты, период которых T_0 , а число M зависит от длительности управляющего строба доплеровского сигнала, т.е. от T . В блоке 6 происходит подсчет числа этих импульсов. Частота доплеровского сигнала определяется по соотношению $\omega_D/2\pi = N/MT_0$. Верхняя частота созданных счетных систем составляет 50 МГц, период эталонного генератора составляет 1–2 нс.

Л и т е р а т у р а

1. Ринкевичюс Б.С. Лазерная анемометрия. М.: Энергия, 1978. 158 с.
2. Дубнишев Ю.Н., Ринкевичюс Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982. 303 с.
3. Коронкевич В.П., Соболев В.С., Дубнишев Ю.Н. Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, 1983, 289 с.
4. Дюрани Т., Грейтид К. Лазерные системы в гидродинамических измерениях / Пер. с англ. Под ред. А.И.Божкова. М.: Энергия, 1980. 335 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Физическое моделирование в гидрофизике	
В.В.Арабаджи, С.И.Баранов, С.Д.Богатырев, В.А.Брайловская, В.И.Казаков, В.Р.Коган, Ю.А.Сте- панянец, В.И.Таланов. Лабораторный бассейн для мо- делирования волновых движений в стратифицирован- ном океане.....	5
Ю.Д.Чашечкин. Лабораторное моделирование сво- бодных стратифицированных течений.....	29
Математическое моделирование	
О.М.Белоцерковский. Численное моделирование течений жидкости и газа.....	46
В.И.Полежаев. Локальные естественно-конвек- тивные процессы в геофизической гидродинамике...	74
В.А.Гущин. Вычислительный эксперимент в гид- рофизике.....	92
Динамика стратифицированной жидкости	
В.А.Боровиков. Дальние поля внутренних волн...	101
С.В.Нестеров. Развитие волн на границе разде- ла нестационарных потоков.....	127
В.А.Городцов, Э.В.Теодорович. Линейное описа- ние эволюции (коллапса) симметричных распределе- ний возмущений однородно стратифицированной жид- кости.....	137
С.Я.Секерж-Зенькович. Применение аналитичес- ких методов нелинейной механики в задачах вну- тренних волн.....	148
Дистанционные методы исследования океана	
М.Б.Каневский. Радиолокационное зондирование океана.....	161

В.П.Козлов. Методы решения обратных задач дистанционного зондирования.....	171
Л.А.Островский. Поверхностные и внутренние волны как средство диагностики океана.....	185
В.М.Бухштабер, В.К.Маслов, А.М.Трохан. Акустический томосинтез гидрофизических неоднородностей в океане и алгебраические методы реконструкции изображений.....	204
И.Б.Есипов, К.А.Наугольных. Оптоакустические и акустооптические взаимодействия на границе раздела сред.....	229
Приборы и техника гидрофизических измерений	
Б.С.Ринкевичус. Лазерная доплеровская анемометрия.....	246

УДК 432.541.591

Лабораторный бассейн для моделирования волновых движений в стратифицированном океане. Арабаджи В. В., Баранов С. И., Богатырев С. Д., Брайловская В. А., Казаков В. И., Коган В. Р., Степанянц Ю. А., Таланов В. И. – В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 5.

Обсуждаются вопросы масштабного моделирования структуры верхнего слоя океана и происходящих в нем волновых процессов с помощью термостратифицированного лабораторного бассейна. Описан простой и эффективный способ создания стационарной устойчивой термостратификации. Результаты применения этого способа проиллюстрированы на математических и физических моделях. Описаны эксперименты по генерации внутренних волн гармонически колеблющимся волнопродуктором цилиндрической формы, а также свободно падающим цилиндром. Ил.18, список лит. 5 назв.

УДК 551.465

Лабораторное моделирование свободных стратифицированных течений. Чашечкин Ю. Д. – В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 29.

Излагаются основные методы лабораторного моделирования свободных стратифицированных течений, к которым относятся турбулентные, волновые и конвективные движения. Сформулированы критерии подобия и проведен подробный анализ возможностей лабораторных установок с точки зрения выполнения критериев подобия. Описаны измерительные приборы, применяемые при изучении движений стратифицированной жидкости, а также способы возбуждения волновых, турбулентных и конвективных движений в лабораторных условиях. Проведено сопоставление теоретических результатов, полученных при исследовании присоединенных внутренних волн, и экспериментальных результатов, полученных на основе измерений в лабораторных условиях. Ил.3, список лит. 40 назв.

УДК 532.529.2

Численное моделирование течений жидкости и газа. Белощерковский О. М. – В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 46.

Рассматриваются задачи, стоящие перед вычислительным экспериментом в области гидро- и газодинамики, обсуждаются подходы в численном моделировании, турбулентны течений. В частности, предлагается для моделирования течения в области, где несущественна молекулярная вязкость, использовать диссипативные уравнения, полученные из уравнений Эйлера. В области пограничного слоя и резких градиентов скорости предлагается использовать приближение Берда и Каца для уравнений Больцмана. Эффективность предложенных алгоритмов демонстрируется в задачах обтекания тел и эволюции следа. Ил.9, список лит. 50 назв.

УДК 517.9:532.5

Локальные естественно-конвективные процессы в геофизической гидродинамике. П о л е ж а е в В. И. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.74.

Статья содержит классификацию, обзор примеров численного моделирования некоторых естественно-конвективных движений и сопоставление результатов расчета полученных для численного моделирования гидродинамических процессов на основе двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса с данными лабораторного эксперимента.

Обсуждаются эффекты внутренней стратификации, вызываемые конвекцией в узких горизонтальных слоях, особенности проникающей конвекции и самоорганизованных слоистых структур при наличии "двойной диффузии". Ил.4, список лит.21назв.

УДК 517.9:532.5

Вычислительный эксперимент в гидрофизике. Гушин В. А. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.92.

Рассматриваются основные принципы, положенные в основу вычислительного эксперимента. В качестве примера приведены некоторые результаты решения задачи о гидравлическом прыжке и классической задачи о поперечном обтекании кругового цилиндра равномерным на бесконечности потоком несжимаемой вязкой жидкости. Проводится сопоставление с экспериментальными данными. На основе полученных результатов для задачи об обтекании цилиндра предложена полуэмпирическая зависимость экстремальных значений вторых моментов от числа Рейнольдса. Ил.4, список лит. 12 назв.

УДК 551.466.81

Дальние поля внутренних волн. Б о р о в и к о в В. А. — В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 101.

Исследуется возбуждение внутренних волн источниками в стратифицированной жидкости. Получены асимптотики полей внутренних волн в дальней зоне. В частности, исследованы равномерные асимптотики функции Грина для жидкости с переменной частотой Брента-Вяйсяля. Найдены границы применимости метода стационарной фазы. Изучены дальние поля мод внутренних волн для слоя конечной толщины, в том числе и вблизи фронта волны, где решение выражается через функции Эйри. Ил. 7, список лит. 24 назв.

УДК 551.466.81(213)

Развитие волн на границе раздела нестационарных потоков. Н е с т е р о в С. В. — В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 127.

Верхний слой жидкости движется относительно нижнего слоя с переменной во времени скоростью. Получено уравнение, описывающее возвышение границы раздела и содержащее переменные по времени параметры. Проведен анализ этого уравнения для случаев медленно изменяющихся параметров, быстро осциллирующих и стохастических. Найден ряд новых эффектов, которые отсутствуют в классической модели Кельвина-Гельмгольца. Список лит. 3 назв.

УДК 551.466.81

Линейное описание эволюции (коллапса) симметричных распределений возмущений однородно стратифицированной жидкости. Г о р о д ц о в В. А., Т е о д о р о в и ч Э. В. — В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 137.

Рассмотрено линейное описание первой стадии коллапса. Решены задачи с начальными данными для частично перемешанного цилиндрического пятна и сферического пятна в однородно стратифицированной жидкости. Выполнено сравнение этих решений с решениями при заданных начальных возмущениях скорости. Дается количественное описание обмена энергией между перемешанной областью и окружающей стратифицированной жидкостью. Список лит. 29 назв.

УДК 532.592

Применение методов нелинейной механики в задачах внутренних волн. С е к е р ж - З е н ь к о в и ч С. Я. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький. ИПФ АН СССР, 1984, с.148.

Аналитические методы нелинейной механики систем с конечным числом степеней свободы применяются к решению двух гидродинамических задач о внутренних волнах: 1) установившиеся прогрессивные волны в двухслойной жидкости конечной глубины со свободной поверхностью; 2) параметрическое возбуждение волн на границе раздела двух жидкостей различных плотностей. Список лит. 14 назв.

УДК 621.371.22:551.46

Радиолокационное зондирование океана. К а н е в с к и й М. Б. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.161.

Кратко излагаются физические основы, методы и результаты радиолокационного зондирования поверхности океана. Ил.1, список лит. 21 назв.

УДК 517.98:519.25:528.7

Методы решения обратных задач дистанционного зондирования. К о з л о в В. П. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.171.

Рассмотрены основные методы решения некорректных обратных задач дистанционного зондирования, использующие априорную информацию об искомой функции. На основе статистического подхода сформулирована задача наилучшего оценивания заданного линейного функционала и введено понятие слабого решения статистически некорректной задачи. Для квадратичного калибровочного функционала указан явный вид слабого решения и построен канонический базис, решающий вопрос о структуре и количестве полезной информации, получаемой в эксперименте. Список лит. 16 назв.

УДК 551.466.8+551.466.4

Поверхностные и внутренние волны как средство диагностики океана. О с т р о в с к и й Л. А. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.185.

Обсуждаются новые методы исследования океана, связанные с искусственным возбуждением поверхностных и внутренних волн. В качестве характерных примеров рассматриваются вопросы о дистанционном определении скорости приповерхностных течений с помощью двух отдельно возбуждаемых гармонических поверхностных волн, и о возможности создания стабильного источника, генерирующего внутренние волны в термоклине. Для первого случая делаются оценки необходимого уровня волн, приемлемого диапазона их частот, приводятся данные экспериментов; для второго – даются примеры расчета различных моделей волнопродукторов внутренних волн и обсуждаются их сравнительные характеристики. Ил.10, список лит. 8 назв., табл.3.

УДК 551.463.21:551.465

Акустический томосинтез гидрофизических неоднородностей в океане и алгебраические методы реконструкции изображений. Б у х ш т а б е р В. М., М а с л о в В. К., Т р о х а н А. М. – В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.204.

Построена и исследована математическая модель динамического томографирования среднемасштабных гидрофизических неоднородностей в океане, осуществляемого с помощью подвижных приемоизлучающих устройств. Разработаны методы оценки качества реконструкции и оптимизации плана эксперимента. Описана структура математического обеспечения алгебраических методов реконструкции. Для тестовых неоднородностей при помощи численного моделирования проведено сравнение различных схем томографирования. Ил.6, список лит. 15 назв., табл.1.

УДК 534.14:535.36

Оптоакустические и акустооптические взаимодействия на границе сред. Е с и п о в И. Б., Н а у г о л ь н ы х К. А. – В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с.229.

Рассматриваются оптоакустические и акустооптические взаимодействия применительно к задачам оптической генерации звука и его регистрации.

Приводятся теоретические и экспериментальные сведения о тепловом механизме генерации звука лазерными импульсами. Характеристики звукового излучения в этом случае опре-

деляются мощностью и частотой модуляции интенсивности света, а также размерами области оптоакустического взаимодействия.

Акустооптическое взаимодействие приводит к модуляции света звуком, благодаря чему удается регистрировать звуковые волны с помощью оптического излучения. Показано, что в основе методов оптической регистрации звука лежит общий принцип оптического гетеродинирования. Соответственно этому, чувствительность оптической регистрации звука определяется только характеристиками оптического излучения и амплитудой звуковой волны и не зависит от выбранного метода. Ил.6, список лит. 31 назв.

УДК 532.59

Лазерная доплеровская анемометрия. Р и н к е в и ч у с Б. С. - В кн.: Методы гидрофизических исследований. Горький: ИПФ АН СССР, 1984, с. 246.

Излагаются основные принципы работы лазерных доплеровских анемометров (ЛДА). Рассматриваются схемы одно- и двухкомпонентных ЛДА, рассчитанных на измерение одной или двух компонент вектора скорости потока. Дается краткое качественное описание методов обработки доплеровского сигнала и принципов действия соответствующих устройств. Ил.8, список лит. 4 назв.

THE METHODS OF HYDROPHYSICAL
RESEARCH

(ed. A.V. Gaponov-Grekhov
and S.A. Khristianovich)

A B S T R A C T S

LABORATORY BASIN FOR THE MODELING
OF WAVE MOTIONS
IN THE STRATIFIED OCEAN

V.V. Arabadzhi, S.J. Baranov, S.D. Bogatyrev,
V.A. Brailovskaya, V.J. Kazakov, V.R. Kogan,
Yu.A. Stepanyants, V.J. Talanov

The possibilities of scale modeling of the ocean upper layer structure and related wave processes with the help of a thermostratified laboratory basin are discussed. A simple and effective method of constructing stationary stable thermostratification is described. The results are illustrated by mathematical and physical models.

The experiments on internal wave generation with the help of a harmonically oscillating cylinder as well as a freely falling cylinder are described.

LABORATORY MODELING
OF FREE STRATIFIED FLOWS

Yu.D. Chashechkin

The basic methods of the laboratory modeling of free stratified flows (turbulent wave and convective currents) are described. Similarity parameters are formulated and the potentialities of the laboratory equipment from the viewpoint of the similarity realization are thoroughly analysed. Measuring apparatus for studying the stratified fluid flows as well as the methods of the laboratory generation of wave, turbulent and convective currents are

described. Theoretical results of the investigation of following internal waves compared with the experimental data obtained on the basis of the laboratory measurements.

NUMERICAL MODELING OF THE FLUID AND GAS FLOWS

O.M.Belotserkovsky

The problems of computation in the field of hydro- and gas dynamics are considered, the approaches to the numerical modeling of the turbulent flows are discussed. In particular, it is proposed to use the dissipative equation derived from the Euler equation to model a flow in the region the molecular viscosity is unessential. For the region of the boundary layer and pronounced velocity gradients, Berd-Katz approximation for the Boltzmann equation is suggested to be utilized. The efficiency of the Algorithms proposed is demonstrated in the problems on the flow around of a body and the wake evolution.

LOCAL NATURAL CONVECTIVE PROCESSES IN A GEOPHYSICAL HYDRODYNAMICS

V.A.Polezhaev

A paper contains classification, review of computer simulation equations of some natural-convective moments and a comparison of numerical results obtained on a basis of two-dimensional non-stationary Navye-Stokes equations with the laboratory experiment data. The internal stratification effects, caused by a convection in narrow horizontal layers, the peculiarities of penetrating convection and self-organizing layer structures with the "double diffusion" are discussed.

COMPUTATIONAL EXPERIMENT IN HYDROPHYSICS

V.A.Gushchin

The basic principles of the computational experiment are considered. Some numerical results of the hydraulic jump and of the incompressible viscous flow around the circular cylinder are discussed. The results are compared with experimental data. The semiempirical relation between the extremal values of the second moments and Reynolds number is proposed.

FAR FIELDS OF INTERNAL WAVES

V.A. Borovikov

An excitation of internal waves by sources in a stratified fluid is investigated. Asymptotics of internal waves in far field are given. In particular, the uniform asymptotic behaviors of Green function for fluid with a variable Brunt-Väisälä frequency are analyzed. Ranges of applicability of a stationary phase method are found. Far fields of internal wave modes are studied for the layer of finite thickness including ones in the vicinity of wave front where the solution is expressed by airy function.

GENERATION OF WAVES AT THE INTERFACE OF NONSTATIONARY FLOWS

S.V.Nesterov

A two-layer flow with the upper layer moving at a variable velocity along the lower one is considered. The equation describing the deviation of

the interface is found which contains time-dependent parameters. The analysis of the equation is made for slowly varying, fast-oscillating and stochastically varying parameters. A number of new effects is found which are absent in the classical Kelvin-Helmholtz model.

THE LINEAR DESCRIPTION OF THE EVOLUTION OF SYMMETRICAL DISTURBANCES/COLLAPSE/ IN UNIFORMLY STRATIFIED FLUID

V.A.Gorodtsov, E.V.Theodorovich

The initial-value problems of a partially mixed cylindrical patch in a uniformly stratified fluid are solved. This solution is compared with the solutions for the initial velocity disturbances. The quantitative description of the energy exchange between the mixed region and the surrounding stratified fluid are given.

APPLICATIONS OF NONLINEAR-MECHANICS METHODS FOR SOLVING INTERNAL WAVES PROBLEMS

S.Ya.Sekerzh-Zen'covich

Analytical methods of nonlinear mechanics are applied for solving two hydrodynamical problems on internal waves: 1) stationary progressive waves in the two-layered liquid of finite depth with a free upper surface; 2) parametrical excitation of waves at the interface between two liquids of different density.

RADAR PROBING OF THE OCEAN SURFACE

M.B.Kanevsky

The physical foundations, methods and results of radar probing of the ocean surface are briefly reported.

THE SOLUTION OF THE REMOTE SOUNDING INVERSE PROBLEMS

V.P.Kozlov

The basic methods of solution of the remote sounding ill-posed inverse problems applying the a priori knowledge of the function to be found are considered. In terms of the statistical approach the problem of the best estimation of a certain linear functional is formulated, the conception of the weak solution for statistically ill-posed problem is introduced. The explicit form of the feeble solution for the quadratic calibration functional is given and the canonical basis is formed which determines the structure and the amount of useful information obtained experimentally.

SURFACE AND INTERNAL WAVES FOR OCEAN DIAGNOSTICS

L.A.Ostrovsky

New methods in the ocean diagnostics associated with artificial excitation of surface and internal waves in the ocean are discussed. As typical examples, two problems are considered: the remote measurement of a near-surface flow velocity by using two separately generated harmonic surface waves, and the possibility of producing a stable source for thermocline internal waves. For the first case, the wave level and the frequency

band are estimated and some experimental data are given; for the second one, several models of "waveproducers" for internal waves are calculated and their comparative characteristics are discussed.

ACOUSTICAL TOMOSYNTHESIS OF HYDROPHYSICAL INHOMOGENEITIES IN OCEAN AND ALGEBRAIC METHODS OF IMAGES RECONSTRUCTION

V.M.Buchstaber, V.K.Maslov, A.M.Trokhin

A model of dynamical tomographing of meso-scale hydrophysical inhomogeneities in the ocean carried out using moving emitter-receivers, is constructed and investigated. The methods of the estimate of the reconstruction quality and the methods of the optimization of the experimental plan are developed. The structure of the software of algebraic methods of the reconstruction is described. A comparison of different tomographing schemes using numerical modeling is carried out for test inhomogeneities.

OPTO-ACOUSTIC AND ACOUSTO-OPTIC INTERACTIONS AT THE MEDIA BOUNDARY

I.B.Esipov, K.A.Naugol'nykh

Opto-acoustic and acousto-optic interactions are considered as applied to the optic generation and registration of the sound.

Theoretical and experimental data on the thermal mechanism of sound generation by laser pulses are presented. The sound radiation patterns are defined in this case by the power and frequency of light intensity modulation and depend on the sizes of the opto-acoustic interaction area.

The acousto-optic interaction leads to light modulation by the sound, permitting to registrate the sound waves by means of the optical radiation. It is shown that the principle of the optical heterodyning is in the basis of the optical sound registration which, correspondingly, is determined only by the patterns of the optical radiation and the sound wave amplitude and is independent of the method chosen.

LASER DOPPLER ANEMOMETRY

B.S.Rinchevichus

Principles for operation of laser Doppler anemometers (LDA) are reported.

The schemes of one- and two-component LDA intended to measure one or two components of flow velocity vector are considered. Methods for processing of Doppler signal and principles of operation of the devices are briefly described.