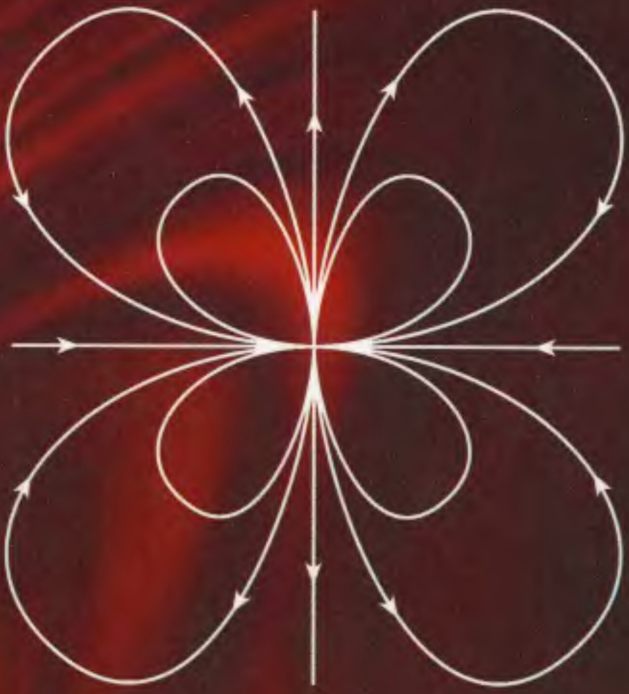
В.Б. Гильденбург

М.А. Миллер

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ



МОСКВА • ФИЗМАТЛИТ

Гильденбург В.Б., Миллер М.А.
Сборник задач по электродинамике: Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по физическим направлениям и специальностям/ 2-е издание, дополненное. - М.: Физматлит, 2001.- 168 с. : ил.
ISBN 5-9221-0113-7, 2000 экз.

Сборник задач соответствует содержанию основных разделов курсов классической и прикладной электродинамики (электро- и магнитостатика, постоянные токи, квазистационарные и волновые поля в однородных и неоднородных средах, линиях передачи и резонаторах, излучение и дифракция волн). Обязательный минимум стандартных задач дополняется большим количеством нестандартных и оригинальных, требующих известной сообразительности и направленных на развитие творческих навыков и «модельного» физического мышления. Хотя задачи сильно различаются по степени трудности, их решение, как правило, не требует проведения громоздких вычислений, что делает их удобными для использования на практических занятиях, в контрольных работах и на экзаменах (в том числе, и по разделам, касающимся теории волновых полей, недостаточно полно обеспеченным «каноническими» учебными задачами в ранее изданных сборниках). Для студентов физических факультетов университетов и технических вузов с повышенной программой по электродинамике, может быть полезен для аспирантов и научных работников.

Классическая электродинамика. Теория относительности

ББК 22.313
УДК 537.8

Оглавление

Ответы, решения, указания - 86-163с.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание сборника, осуществленное Издательством Нижегородского государственного университета, нашло положительный прием на факультетах физического профиля ННГУ, где сборник используется уже в течение ряда лет как одно из основных учебных пособий при проведении практических занятий по электродинамике. При подготовке настоящего издания мы устранили ряд выявленных в процессе этой работы неточностей и опечаток, содержавшихся в первом издании, пополнили все разделы сборника новыми задачами, увеличили число пояснительных рисунков, решений и указаний.

Мы благодарны сотрудникам радиофизического факультета и Высшей школы общей и прикладной физики ННГУ, способствовавшим улучшению качества сборника, в особенности, профессорам М.И.Петелину, В.Е.Семенову и доценту А.А.Фрайману — как за обсуждение конкретных задач, так и за советы, касающиеся содержания некоторых разделов в целом. Мы признательны академикам А.В.Гапонову-Грехову и В.Е.Голанту, члену-корреспонденту РАН А.Г.Литваку и профессору А.Ф.Александрову за положительные отзывы и поддержку в осуществлении данного издания.

Авторы

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Те богатые и разнообразные наборы задач по университетским курсам классической и прикладной электродинамики, которые предоставляются сегодня студенту и преподавателю изданными за последние десятилетия сборниками, обладая рядом неоспоримых достоинств и в основном выполняя (если отвлечься от оскудения их запасов в библиотеках) возложенные на них функции, на наш взгляд, уязвимы для критики в двух отношениях. Во-первых, они не полностью покрывают постоянно увеличивающуюся потребность в задачах по электродинамике волновых полей, в особенности по таким ее разделам как волны в линиях передачи, колебания в резонаторах, излучение заданных распределений токов, дифракция волн на различных объектах, волны в неоднородных средах. Во-вторых, в них ощущается недостаток задач, содержащих элемент физической занимательности или легкой неожиданности и позволяющих испытать стимулирующие к дальнейшей работе удивление или радость догадки (хотя бы и мелкой) студенту любого уровня подготовки; задач, развивающих «модельное» физическое мышление и, если уж трудных, то не громоздкостью и сложностью формульных преобразований, а нестандартностью подхода к решению и необходимостью проявить достаточную сообразительность.

Данный сборник задач, как нам кажется, в известной степени восполняет указанные выше пробелы. Авторы опирались на традицию преподавания электродинамики на радиофизическом факультете Нижегородского (ранее Горьковского) университета (ННГУ). Эта традиция (в общем соответствующая духу Мандельштамовской физической школы) была заложена более полувека назад курсом лекций и упражнений, созданным профессором Михаилом Львовичем Левиным во время его пребывания в горьковской ссылке (совпавшей с первыми годами существования радиофака) и затем развивалась несколькими поколениями его учеников.

По своему содержанию сборник охватывает основные разделы современной классической и прикладной электродинамики. Исключение составляют лишь разделы, касающиеся специальной теории относительности. Задачи по этим разделам, стоящие вообще говоря несколько особняком по отношению к конкретным вопросам динамики и структуры электромагнитных полей, в данный сборник не включены (достаточно полный набор таких задач представлен, например, в соответствующем учебном пособии В.В.Батыгина и И.Н.Топтыгина (М.: Наука, 1970)).

Сборник содержит более 300 задач, имеющих отдельную нумерацию внутри каждого раздела. Многие задачи объединяют в себе по несколько связанных общим условием, но фактически независимых вопросов и заданий, полное число которых приближается к 500. Примерно 20 % задач (в первую очередь, наиболее трудных, либо относящихся к разряду «типовых») снабжены решениями или указаниями. Ответы даны почти ко всем задачам (за исключением лишь тех, где требуется произвести несложное графическое построение).

Некоторый минимум теоретических сведений и методов, необходимых для работы с задачником, излагается непосредственно в приведенных решениях и указаниях. Мы уклоняемся, однако, от традиции предпосылать каждому разделу формульные подборки — отчасти ввиду трудности создания такого краткого, но всеобъемлющего и логически замкнутого переложения всего богатства методов и представлений теории электромагнитного поля, а отчасти, не желая потворствовать упрощенному ученичеству, поощряющему мышление, основанное лишь на поисках удачных подстановок. По нашему замыслу большая часть задач сборника должна стимулировать мышление несколько иного рода — содержащее элементы творческого подхода и основанное на «видении» и понимании физической картины рассматриваемых явлений. Вместе с тем в сборнике присутствуют в достаточном количестве и вполне рутинные (не менее необходимые в практике преподавания) упражнения, рассчитанные на прямое применение или воспроизведение известных формул и алгоритмов и на тренировку технических навыков. Это позволяет использовать задачник для работы со студентами различного уровня подготовки как самостоятельное учебное пособие (без обязательного обращения к другим пособиям подобного рода).

Что касается общих учебных руководств по классической и прикладной электродинамике, на которые, по нашему мнению, целесообразно ориентироваться, работая с задачником, то, помимо соответствующих лекционных курсов, мы можем рекомендовать, например, следующий набор учебных пособий:

1) Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М.: Наука, 1983;

2) Л.А.Вайнштейн, Электромагнитные волны, М.: Сов. радио, 1988;

3) Б.З.Каценеленбаум, Выскочастотная электродинамика, М.: Наука, 1966;

4) Дж. Джексон, Классическая электродинамика, М.: Мир, 1965;

5) В.Пановский, М.Филипс, Классическая электродинамика, М.: ГИФМЛ, 1963;

6) В.В.Никольский, Т.И.Никольская, Электродинамика и распространение радиоволн, М.: Наука, 1989.

Первые четыре из названных пособий придерживаются Гауссовой абсолютной системы единиц, принятой и в нашем задачнике. Хотя эта система обладает, на наш взгляд, наибольшей «электромагнитной изящностью» (в сравнении, в частности, с административно внедряемой СИ), мы отдаем себе отчет в том, что физик, профессионализирующийся в области электромагнетизма, должен быть свободен от «системных предрассудков» и в условиях исторически сложившейся в электродинамике «двусистемности» обязан непринужденно обращаться также и с работами, написанными в СИ (использованой в двух последних пособиях). Частичной компенсацией «односистемности» нашего сборника является наличие в нем ряда задач, предполагающих умение оперировать с величинами, выраженными в единицах различных систем; число этих задач сравнительно невелико, но может быть легко увеличено преподавателем, ведущим практические занятия, за счет небольшого варьирования их условий.

В основном представленный сборник рассчитан на студентов физических (разного профиля) факультетов университетов, пединститутов, а также технических вузов с повышенной программой по электродинамике. Наверняка он представит интерес для аспирантов и научных работников, специализирующихся в данной или смежной областях с общими или прикладными намерениями.

Авторы выражают признательность всем сотрудникам кафедры электродинамики ННГУ и ИПФ РАН, принимавшим участие в обсуждении и апробации сборника. Мы особенно благодарны В.Е.Семенову, с которым обсуждали условия и решения большого количества задач, и профессору Р.Г.Стронгину за стимулирующую поддержку.

Авторы

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОЛЯ И ИСТОЧНИКИ В ОДНОРОДНОЙ БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

1.1. На основании теоремы Гаусса–Остроградского, соображений симметрии и принципа суперпозиции найти скалярный потенциал φ и вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ следующих систем зарядов в вакууме:

1) точечный заряд q;

2) заряд, распределенный с постоянной объемной плотностью ρ: а) по шару радиуса a; б) по бесконечному круговому цилиндру радиуса a;

3) бесконечная прямая нить с погонной плотностью заряда $\varkappa$;

4) заряд, распределенный с постоянной поверхностной плотностью Ω: а) по сферической поверхности радиуса a; б) по поверхности бесконечного кругового цилиндра радиуса a; в) по бесконечной плоскости;

5) точечный диполь с вектором дипольного момента $\mathbf{p}$;

6) двумерный диполь (нить, поляризованная в поперечном направлении с вектором погонной плотности дипольного момента $\mathbf{p}_l$).

1.2. Найти форму силовых линий электрического поля, создаваемого: а) точечным диполем, б) двумерным диполем (дипольной нитью, описанной в п. 6 предыдущей задачи).

1.3. Какими источниками создаются в пустоте следующие одномерные распределения потенциала $\varphi(x)$? (x – декартова координата, C и a — константы):

1) $\varphi = C|x|$; 2) $\varphi = C\exp(-a|x|)$; 3) $\varphi = C\,\mathrm{th}\,(ax)$;

4) $\varphi = 0$ при $x < 0$ и $x > x_2$, $\varphi = Cx$ при $0 < x < x_1$, $\varphi = Cx_1$ при $x_1 < x < x_2$.

Построить качественно графики зависимости потенциала φ, проекции поля E_x и обьемной плотности заряда ρ от x.

1.4. Какими источниками создаются в пустоте следующие двумерные распределения потенциала φ? (x, y — декартовы координаты, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\mathrm{tg}\,\theta = y/x$; C, a, b — константы)

1) $\varphi = C(x^2 - y^2)$ при $|x^2 - y^2| < a^2$, $\varphi = Ca^2$ при $x^2 - y^2 > a^2$, $\varphi = -Ca^2$ при $y^2 - x^2 > a^2$;

2) $\varphi(r) = 0$ при $r > b$, $\varphi(r) = C\ln(r/b)$ при $a < r < b$, $\varphi(r) = C\ln(a/b)$ при $r < a$;

3) $\varphi(r,\theta) = Cr^{-1}\cos\theta$;

4) $\varphi(r,\theta) = Cr\cos\theta$ при $r < a$, $\varphi(r,\theta) = Ca^2r^{-1}\cos\theta$ при $r > a$.

Для каждого случая найти электрическое поле $\mathbf{E}$ и нарисовать картину его силовых линий.

1.5. Какими источниками создаются в пустоте следующие трехмерные распределения потенциала $\varphi(r,\theta)$? (r - модуль радиуса-вектора, θ - полярный угол, образуемый радиусом-вектором с осью z; C, C_1, C_2, α — константы)

1) $\varphi = Cr^{-1}\exp(-\alpha r)$;

2) $\varphi = Cr^{-2}\cos\theta$;

3) $\varphi = C_1r^2$ при $r < a$, $\varphi = C_2r^{-1}$ при $r > a$.

1.6. Заряд распределен равномерно с постоянной поверхностной плотностью Ω по плоскостям $x = 0$ и $y = 0$. Найти создаваемое им электрическое поле. Нарисовать картину силовых линий.

1.7. Решить предыдущую задачу для случая, когда поверхностные заряды на плоскостях одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку.

1.8. Найти электрическое поле внутри свободной от зарядов сферической полости, вырезанной в шаре, заряженном с постоянной обьемной плотностью ρ. Радиус шара a, радиус полости b, расстояние между центрами шара и полости d $(d + b < a)$.

1.9. Заряд распределен равномерно с поверхностной плотностью Ω по сфере радиуса a, исключая малую круглую площадку на ней радиуса $b \ll a$, где $\Omega = 0$. Найти электрическое поле вдали от этой площадки внутри и вне сферы.

1.10. Решить предыдущую задачу, заменив поверхностный заряд дипольным (двойным) слоем.

1.11. Распределение потенциала в пустоте является осесимметричным. Задана функция $\varphi = \varphi(z)$ на оси симметрии z. Найти потенциал $\varphi(r, z)$ при малых смещениях r от оси.

1.12. В области, свободной от источников, потенциал задан в виде $\varphi(x, y) = f(x) \cos ky$. Найти вид функции $f(x)$.

1.13. В области, свободной от источников, потенциал задан в виде $\varphi(r, \theta) = f(r)\ \cos n\theta$ (r, θ — цилиндрические координаты, n — целое число). Найти вид функции $f(r)$.

1.14. На плоскости $x = 0$ вектор электрического поля $\mathbf{E}$ имеет единственную компоненту $E_x = f(y, z)$. Найти компоненты E_y и E_z при малых значениях x.

1.15. Доказать, что в однородной среде внутри области, свободной от источников,

а) потенциал φ не имеет экстремумов;

б) квадрат напряженности поля E^2 не имеет максимумов.

1.16. Получить выражение для поля произвольного сферически симметричного распределения заряда (объемная плотность $\rho = \rho(r)$).

1.17. Два точечных заряда q_1 и q_2 имеют разные знаки, причем $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ и $q_1 > |q_2|$. Какой угол α с прямой AB, соединяющей заряды (рис. 1), образует касательная к силовой линии в точке ее выхода из заряда q_1, если эта силовая линия

а) уходит на бесконечность под углом β к прямой AB,

б) кончается на заряде q_2, где касательная к ней наклонена к AB под углом β?

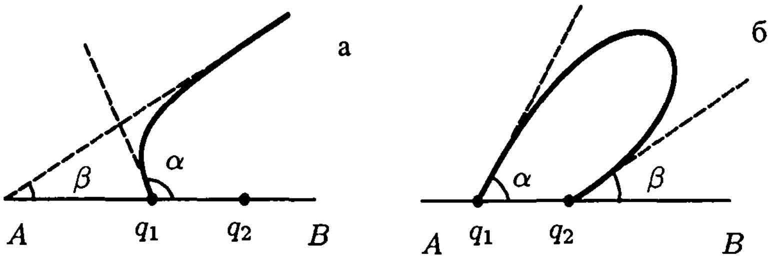


Рис. 1

1.18. Заряд q распределен равномерно по длине окружности радиуса a, лежащей на плоскости x, y. Центр окружности совпадает с началом координат. Найти потенциал $\varphi(z)$ и электрическое поле $E_z(z)$ на оси z. В какой точке на оси поле имеет максимум? Определить численные значения φ и E_z соответственно в вольтах и вольтах на сантиметр в этой точке при $a = 2$ см, $q = 10^{-8}$ Кл.

1.19. Найти выражение для потенциала $\varphi(z)$ в предыдущей задаче, если линейная плотность заряда κ на окружности является функцией полярного угла θ: ($C = \text{const}$; $n = 1, 2, 3, ...$)

1) $\kappa = C \sin n\theta$;

2) $\kappa = C\,\theta$, где $0 < \theta < 2\pi$.

1.20. На кривой, заданной в плоскости x, y уравнением $r = r_0\, e^{\theta}$ (r, θ — полярные координаты), распределен заряд с линейной плотностью $\kappa = \kappa_0\, e^{\theta}$ при $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\kappa = 0$ при $\theta < \theta_1$ и $\theta > \theta_2$. Найти потенциал $\varphi(z)$ на оси z.

1.21. Винтовая линия задана в цилиндрических координатах r, φ, z уравнениями $r = a$, $z = b\,\theta$. На интервале $z_1 < z < z_2$ по линии равномерно распределен заряд с линейной плотностью κ. Найти потенциал $\varphi(z)$ на оси z.

1.22. Заряд q равномерно распределен по прямолинейному отрезку длины $2l$. Найти потенциал φ во всем пространстве, выразив его как функцию расстояний точки до концов отрезка r_1 и r_2. Показать, что поверхности $\varphi = \text{const}$ представляют собой эллипсоиды вращения с фокусами на концах отрезка.

1.23. Полубесконечная дипольная нить с линейной плотностью дипольного момента $\mathbf{p}_l = \mathbf{x}_0 p_l$ ($\mathbf{x}_0$ — единичный вектор по оси x) совмещена с отрицательной полуосью z. Найти потенциал $\varphi(x, y, z)$ и исследовать его поведение при приближении к оси z в областях $z < 0$ и $z > 0$.

1.24. Поверхностный заряд распределен равномерно с плотностью Ω по площади круга радиуса a, лежащего в плоскости x, y. Центр круга совпадает с началом координат. Найти потенциал и электрическое поле (а) на оси z; (б) на граничной окружности.

1.25. Заряд q распределен с постоянной поверхностной плотностью по поверхности полусферы радиуса a, лежащей в области $z \geq 0$ декартовой системы координат. Граничная окружность полусферы лежит в плоскости $z = 0$, центр этой окружности совпадает с началом координат.

1) Найти потенциал φ во всех точках плоскости $z = 0$, выразив его как функцию расстояния r до начала координат.

2) Как ориентирован вектор электрического поля в плоскости $z = 0$ при $r < a$?

3) Найти потенциал $\varphi(z)$ на оси z.

4) Найти приближенно потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от полусферы ($|\mathbf{r}| \gg a$) в присутствии дополнительного точечного заряда противоположного знака $(-q)$, расположенного в начале координат.

1.26. Поверхность вращения задана в цилиндрических координатах r, z уравнением $r = f(z)$. На участке $z_1 < z < z_2$ поверхность заряжена с поверхностной плотностью заряда $\Omega = Cr^{-1}[1 + (df/dz)^2]^{-1/2}$, где $C = \text{const}$. Найти потенциал на оси z.

1.27. Поверхностный заряд распределен равномерно по площадке прямоугольной формы. Как ведут себя потенциал и напряженность электрического поля при приближении к краю площадки?

1.28. Известно, что плотность поверхностного заряда и напряженность электрического поля неограниченно возрастают при приближении к ребру или острию на поверхности проводника. Будет ли электрическое поле иметь особенность на поверхности той же формы, если поверхностный заряд распределить по ней равномерно?

1.29. Заряд распределен по поверхности сферы радиуса a с поверхностной плотностью Ω, являющейся произвольной функцией координат точки на поверхности. Доказать, что радиальная компонента напряженности электрического поля $E_r(Q)$ и потенциал $\varphi(Q)$ в тех точках Q поверхности сферы, где $\Omega = 0$, связаны соотношением $E_r = \varphi/2a$.

1.30. Найти дипольный момент системы зарядов, распределенных по поверхности сферы радиуса a с плотностью $\Omega = \Omega_0 \cos\theta$ (θ — сферический полярный угол).

1.31. В центр прямолинейного отрезка длины $2l$, заряженного с линейной плотностью κ, помещен точечный заряд $q = -2\kappa l$. Найти тензор квадрупольного момента D_{ik} данной системы и потенциал φ на больших расстояниях.

1.32. То же для случая точечного заряда q, помещенного в центр круга радиуса a, равномерно заряженного с поверхностной плотностью $\Omega = -q/(\pi a^2)$.

1.33. Шесть одинаковых по абсолютной величине точечных зарядов расположены в вершинах правильного шестиугольника. Знаки любых двух соседних зарядов противоположны. Мультиполь какого порядка образует данная система? По какому закону убывает ее потенциал на больших расстояниях r от центра?

1.34. Какую форму должно иметь тело, равномерно заряженное по объему, чтобы при фиксированных значениях объема V и плотности заряда ρ напряженность электрического поля достигала (в какой-то точке) наибольшего возможного значения? Чему равно это наибольшее значение?

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Как распределяется заряд по бесконечно тонкому металлическому проводу произвольной формы (радиус провода одинаков по всей длине и стремится к нулю)? Одинаковы ли значения линейной плотности заряда на участках провода, имеющих различную кривизну?

2.2. Доказать, что разность поверхностных плотностей заряда с разных сторон заряженной металлической поверхности, представляющей собой часть сферы, в отсутствие внешних источников одинакова во всех точках.

2.3. Найти поток вектора напряженности электрического поля через малое отверстие в заряженной проводящей сфере; заряд сферы q, радиус сферы a, площадь отверстия $s \ll a^2$.

2.4. Найти распределение поверхностной плотности заряда Ω по бесконечной плоской поверхности проводника, на расстоянии l от которой находится точечный заряд q. Определить численное значение Ω в единицах Кл/м^2 при $q = 10^{-9}$ Кл, $l = 3$ см на расстоянии 2 см от проекции заряда на плоскость.

2.5. Найти электрическое поле, создаваемое внутри металлического прямого двугранного угла поверхностным зарядом, равномерно распределенным с плотностью Ω в плоскости, делящей двугранный угол пополам.

2.6. Над бесконечной плоской границей проводника расположены на одинаковой высоте h два одинаковых металлических шарика, на которые помещены заряды q и $-q$. Радиусы шариков a много меньше высоты h и расстояния между их центрами l. Найти разность потенциалов между шариками.

2.7. В пространстве между двумя параллельными бесконечными металлическими плоскостями $x = 0$ и $x = L$ распределен заряд с объемной плотностью $\rho = \rho_0 \sin(\pi x/L)$. Найти потенциал и электрическое поле между плоскостями.

2.8. Точечный заряд q расположен на расстоянии b от центра O заземленного проводящего шара радиуса $a < b$. Показать, что поле этой системы совпадает (вне шара) с полем данного заряда и заряда $q' = -qa/b$, помещенного в «инверсную» точку, лежащую на прямой Oq на расстоянии $b' = a^2/b$ от центра шара.

2.9. Как изменится эквивалентная система точечных зарядов (изображений) в предыдущей задаче, если проводящий шар изолирован и не заряжен?

2.10. Найти силу, действующую на точечный заряд q, расположенный внутри сферической полости в проводнике. Радиус полости a, расстояние от заряда до ее центра b.

2.11. Найти систему изображений для точечного диполя с моментом $\mathbf{p}$, расположенного на расстоянии b от центра изолированного проводящего шара радиуса a и ориентированного

а) вдоль направления на центр шара;

б) перпендикулярно этому направлению.

2.12. Центр изолированной проводящей сферы радиуса a лежит в начале координат. Полный заряд сферы равен нулю. Плоскость $z = 0$ вне сферы заряжена с постоянной поверхностной плотностью Ω. Найти потенциал и напряженность поля на оси z вне сферы.

2.13. Решить «внутренюю» задачу, аналогичную предыдущей «внешней».

2.14. Найти положение равновесия точечного заряда внутри полусферической полости в проводнике.

2.15. Найти систему изображений для точечного заряда, расположенного над бесконечной проводящей плоскостью с полусферическим выступом.

2.16. Решить методом изображений задачу о поле точечного заряда q над плоской границей раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2.

2.17. С помощью теоремы взаимности найти потенциал изолированного незаряженного проводящего шара радиуса a, на расстоянии b от центра которого расположен точечный заряд q.

2.18. Найти заряд q_i, индуцированный на заземленном проводящем шаре радиуса a точечным зарядом q, расположенным на расстоянии b от его центра.

2.19. Плоский конденсатор емкости C образован двумя одинаковыми параллельными пластинами, расстояние между которыми d много меньше их размеров. Заряд каждой пластины равен нулю. Найти разность потенциалов между пластинами U, созданную точечным зарядом q, в следующих случаях.

1) Заряд находится внутри конденсатора вдали от его краев на расстоянии l от одной из пластин.

2) Заряд находится вне конденсатора на малой высоте над одной из пластин и на большом расстоянии от ее краев.

3) Заряд находится вне конденсатора на большом (по сравнению с размерами пластин) расстоянии R от некоторой точки O внутри него. Направление из точки O на заряд образует угол θ с нормалью к пластинам.

2.20. Чему равна разность потенциалов U между двумя зеркально симметричными проводниками произвольной формы, образующими конденсатор емкости C, если на один из них помещен заряд q, а другой не заряжен?

2.21. Найти силу тока, текущего по проводу, соединяющему пластины плоского конденсатора, если внутри него перпендикулярно пластинам движется со скоростью v, много меньшей скорости света c, точечный заряд q. Расстояние между пластиинами равно d.

2.22. Найти потенциал $\varphi(x, y)$ в пространстве между двумя бесконечными параллельными плоскостями $x = 0$ и $x = L$, если на первой из них $\varphi = 0$, а на второй

1) $\varphi = \varphi_0 \sin ky$;

2) $\varphi = \varphi_0 |\sin ky|$ (φ_0 и k – константы).

2.23. Проводящая цилиндрическая поверхность радиуса a разделена бесконечно тонким разрезом вдоль образующей на две одинаковые половины, имеющие потенциалы $+U$ и $-U$. Найти распределение потенциала φ:

а) внутри цилиндрической поверхности; б) вне ее.

2.24. Найти потенциал $\varphi(r, \theta)$ внутри бесконечной цилиндрической полости раднуса a в проводнике, если на цилиндрической поверхности радиуса $r = b < a$, соосной с границей полости, задана:

а) плотность поверхностного заряда $\Omega = \Omega_0 \cos n\theta$;

б) мощность двойного (дипольного) слоя $p_d = p_0 \cos n\theta$ (r, θ — цилиндрические координаты, $n =1, 2, 3, ...$).

2.25. Между двумя параллельными бесконечными металлическими плоскостями $x = 0$ и $x = L$ распределен в плоскости $z = 0$ поверхностный заряд с плотностью $\Omega = \Omega_0 \sin(\pi x/L)$. Найти потенциал $\varphi(x, z)$.

2.26. В поперечном сечении $z = 0$ бесконечной прямоугольной металлической трубы распределен поверхностный заряд с плотностью $\Omega = \Omega_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ (a и b — внутренние размеры поперечного сечения трубы, x и y — декартовы координаты в поперечном сечении, отсчитываемые от вершины прямоугольника вдоль его сторон). Найти потенциал $\varphi(x, y, z)$.

2.27. Точечный заряд q помещен внутрь бесконечной прямоугольной металлической трубы с внутренними размерами поперечного сечения a и b. По какому закону убывают потенциал и напряженность поля вдоль трубы на больших расстояниях от заряда? Каково поперечное распределение потенциала на больших расстояниях?

2.28. То же для круглой трубы радиуса a.

2.29. То же для точечного заряда, помещенного между двумя параллельными бесконечными металлическими плоскостями.

2.30. Внутри бесконечной металлической трубы с заданной произвольной формой поперечного сечения в конечной области распределен заряд с заданной объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}_\perp, z)$ ($\mathbf{r}_\perp$ — поперечный радиус-вектор, z — продольная координата). Найти потенциал $\varphi(\mathbf{r}_\perp, z)$ вне области заряда, считая известной систему собственных функций $\varphi_n(\mathbf{r}_\perp)$ и собственных значений κ_n задачи о колебаниях плоской упругой мембраны с закрепленной границей, совпадающей с границей внутренней области поперечного сечения трубы.

2.31. Двугранный угол θ_0 образован двумя заряженными металлическими полуплоскостями, имеющими одинаковый потенциал $\varphi = 0$. Получить и исследовать выражения для потенциала и поля во внутренней и внешней областях угла, которые при $\theta_0 = \pi$ переходят в соответствующие выражения для равномерно заряженной плоскости.

2.32. Решить предыдущую задачу для случая, когда полуплоскости, образующие двугранный угол, разделены бесконечно узким зазором и имеют различные потенциалы $\varphi = 0$ и $\varphi = V$.

2.33. Два беконечных проводящих конуса имеют общую ось (z), общую вершину (O) и одинаковые углы раствора 2α (уравнения их поверхностей в сферической системе координат r, θ, φ имеют вид $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi - \alpha$). Найти потенциал и электрическое поле в пространстве между коиусами ($0 < r < \infty$, $\alpha < \theta < \pi - \alpha$), если разность потенциалов между ними равна V (электрический контакт между конусами отсутствует).

2.34. Найти разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между двумя незаряженными проводящими концентрическими сферами, создаваемую точечным зарядом q, расположенным на расстоянии b от центра. Радиусы сфер r_1 и r_2. Рассмотреть случаи: 1) $b < r_1 < r_2$; 2) $r_1 < b < r_2$; 3) $r_1 < r_2 < b$.

Вычислить U (в вольтах) при $q = 10^{-8}$ Кл, $r_1 = 2$ см, $r_2 = 4$ см, $b = 3$ см.

2.35. Точечный заряд q находится на расстоянии r от центра O сферической диэлектрической оболочки с проницаемостью ε; внутренний и внешний радиусы оболочки — a и b. Найти потенциал $\varphi(O)$ в центре оболочки. Рассмотреть три случая: 1) $r > b$, 2) $a < r < b$, 3) $r < a$.

2.36. Найти диэлектрическую проницаемость среды ε, рассматривая в качестве модели ее молекул проводящие шарики радиуса a, число которых в единице объема $N \ll a^{-3}$.

2.37. Искусственный диэлектрик набран из металлических шариков радиуса a, соединеных попарно прямолинейными отрезками тонкой проволоки. Все отрезки имеют одинаковую длину l и ориентированы параллельно одной прямой M. Число шариков в единице объема N. Полагая выполненными условия $N^{-1/3} \gg l \gg a$, найти продольную ($\varepsilon_{\|}$) и поперечную ($\varepsilon_{\perp}$) диэлектрические проницаемости такой среды, определяющие соответственно ее поляризуемости в направлениях, параллельном и перпендикулярном прямой M.

2.38. Найти распределение плотности заряда Ω на заряженной поверхности проводника, представляющей собой бесконечную плоскость с полусферическим выступом. Радиус полусферы a; значение Ω вдали от выступа Ω_0.

2.39. Найти распределение плотности заряда Ω по поверхности проводящей сферы радиуса a, внесенной во внешнее однородное поле $\mathbf{E}_0$.

2.40. Найти возмущения, которые вносит во внешнее однородное поле $\mathbf{E}_0$ проводящая сфера, покрытая сферической оболочкой из диэлектрика с проницаемостью ε. Радиус сферы и внутренний радиус оболочки a, внешний радиус оболочки b.

2.41. Доказать, что проводящий шар приобретает в поле произвольного распределения внешних зарядов такой же дипольный момент, как и в однородном внешнем поле $\mathbf{E}_0$, равном полю данной системы зарядов в центре шара в его отсутствие.

2.42. Доказать утверждение, сформулированное в предыдущей задаче, для диэлектрического шара.

2.43. На бесконечной плоской поверхности проводника лежит, соприкасаясь с ней плоскостью основания, диэлектрический полушар радиуса a с проницаемостью ε. На оси симметрии данной системы, на расстоянии $b \gg a$ от центра шара расположен точечный заряд q. Найти электрическое поле во всем пространстве над проводником.

2.44. Найти дипольный момент, приобретаемый в однородном внешнем поле $\mathbf{E}$ следующими диэлектрическими телами (диэлектрическая проницаемость тел ε, в окружающей среде $\varepsilon = 1$):

1) Тонкий стержень длины l и радиуса a, ориентированный под углом θ к полю $\mathbf{E}$,

2) Тонкий диск радиуса a и толщины d, образующий своей плоскостью угол θ с полем $\mathbf{E}$,

3) Тонкая сферическая оболочка радиуса a и толщины d. Какими конкретными условиями имеет смысл определить в каждом случае понятие «тонкий»? Входят ли в эти условия значения ε?

2.45. Два точечных заряда $+q$ и $-q$ расположены на полюсах шара радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε. Найти электрический потенциал на больших расстояниях $r \gg a$ от центра шара.

2.46. Показать, что электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, создаваемое заряженными проводниками в вакууме, при заполнении пространства между ними неоднородным диэлектриком не изменяется, если потенциалы проводников φ поддерживаются неизменными, а диэлектрическая проницаемость заполняющей среды $\varepsilon(\mathbf{r})$ постоянна вдоль силовых линий поля $\mathbf{E}$ (т.е. $\mathbf{E}\nabla\varepsilon = 0$).

2.47. Показать, что электрическая индукция $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ при заданных зарядах на проводниках q и заданном распределении плотности заряда в пространстве $\rho(\mathbf{r})$ не зависит от диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(\mathbf{r})$, если последняя постоянна на эквипотенциальных поверхностях (т.е. $[\nabla\varphi \times \nabla\varepsilon] = 0$).

2.48. Плоский конденсатор образован двумя одинаковыми прямоугольными пластинами с размерами a и b и расстоянием между ними d. Пространство между пластинами заполнено неоднородным диэлектриком. Найти емкость конденсатора, пренебрегая краевым эффектом, для случаев, когда зависимость диэлектрической проницаемости ε от координат задана в виде: 1) $\varepsilon = \varepsilon(x)$; 2) $\varepsilon = \varepsilon(y)$; 3) $\varepsilon = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(y)$; (ось x параллельна одной из сторон пластин, ось y перпендикулярна пластинам).

2.49. Найти емкость сферического конденсатора, образованного концентрическими сферами радиусов a и b. Пространство между сферами заполнено неоднородным диэлектриком с проницаемостью: 1) $\varepsilon = \varepsilon(r)$; 2) $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$; 3) $\varepsilon = \varepsilon_1(r)\varepsilon_2(\theta)$ (r, θ — сферические координаты).

2.50. Получить выражение для электрического поля $\mathbf{E}$, создаваемого точечным зарядом q, лежащим в начале сферической системы координат r, θ, φ, если диэлектрическая проницаемость среды задана в виде: 1) $\varepsilon = \varepsilon(r)$; 2) $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$; 3) $\varepsilon = \varepsilon(\theta, \varphi)$; 4) $\varepsilon = \varepsilon_1(r)\varepsilon_2(\theta, \varphi)$.

2.51. Найти электрическое поле $\mathbf{E}$, создаваемое точечным зарядом, расположенным в общей вершине N непересекающихся диэлектрических конусов с углами раствора α_i и проницаемостями ε_i ($i = 1, 2, ..., N$). Вне конусов $\varepsilon = 1$.

2.52. Центр металлического шара радиуса a лежит на плоской границе раздела двух диэлектрических сред с проницаемостями ε_1 и ε_2. На расстоянии b от центра шара в среде с проницаемостью ε_1 находится точечный заряд q. Найти:

1) потенциал шара φ_0, если шар изолирован и не заряжен;

2) заряд q_0, индуцированный на шаре, если он заземлен.

2.53. Исследовать поведение потенциала и электрического поля вблизи ребра диэлектрического клина, грани которого образуют между собой угол $2\alpha < \pi$, диэлектрическая проницаемость клина равна ε; в пространстве вне его $\varepsilon = 1$. Найти решения, которые после выполнения предельного перехода $\alpha \to \pi$ (т.е. при развертывании клина в полупространство) описывают поле:

а) с однородным вектором электрической индукции $\mathbf{D}$, перпендикулярным плоской границе диэлектрика;

б) с однородным вектором напряженности $\mathbf{E}$, параллельным этой границе.

2.54. В центре тонкого диэлектрического кольца радиуса a с проницаемостью ε лежит точечный заряд q. Поперечное сечение кольца представляет собой круг радиуса $b \ll a$. Найти потенциал φ на оси кольца.

2.55. Тело произвольной формы, имеющее объем V и диэлектрическую проницаемость ε, мало отличающуюся от единицы ($\varepsilon - 1 \ll 1$), вносится в однородное электрическое поле $\mathbf{E}$. В окружающей среде $\varepsilon = 1$. Найти возмущения поля на больших расстояниях r от тела.

2.56. Точечный заряд q лежит в центре основания диэлектрического полушара радиуса a с проницаемостью ε, мало отличающейся от проницаемости окружающего свободного пространства ($\varepsilon - 1 \ll 1$). Найти дипольный момент полушара $\mathbf{p}$.

3. ПОСТОЯННЫЕ ТОКИ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

3.1. Получить граничное условие для нормальной компоненты плотности тока j_n.

3.2. Через границу раздела сред с различными значениями проводимости (σ_1, σ_2) и диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) течет ток с нормальной компонентой плотности j_n. Найти плотность поверхностного заряда Ω на границе.

3.3. Найти сопротивление R между обкладками конденсатора произвольной формы, заполненного однородной средой с проводимостью σ, если известна емкость C того же конденсатора, заполненного средой с диэлектрической проницаемостью ε.

3.4. Идеальный сферический электрод радиуса a погружен наполовину в электролит с проводимостью σ. Найти сопротивление электролита между электродом и бесконечностью R и распределение плотности тока в нем $\mathbf{j}$. Вычислить R (в омах) при $a = 3$ см, $\sigma = 10^2$ (Ом $\cdot$ м)$^{-1}$.

3.5. Решить предыдущую задачу для случая, когда тот же электрод погружен в электролит на глубину $h \gg a$. В решении должны быть сохранены члены порядка a/h.

3.6. Концы двух тонких проволочек касаются горизонтальной поверхности электролита, налитого в широкий и глубокий сосуд. Между ними пропущен ток силы I. Найти плотность тока $\mathbf{j}$ в электролите.

3.7. В электролит с проводимостью σ погружены два идеальных электрода, представляющих собой одинаковые шары радиуса a. Глубины погружения шаров h_1, h_2 и расстояние между ними l много больше a. Найти сопротивление между электродами R, сохраняя в решении члены порядка a/h, a/l.

3.8. Решить предыдущую задачу для случая, когда один из электродов представляет собой бесконечную пластину, перпендикулярную поверхности электролита, а другой — шар, радиус которого a мал по сравнению с глубиной его погружения h и с расстоянием до пластины l.

3.9. Проводник представляет собой бесконечный клин с углом между гранями $\alpha = \pi/n$, где n — целое число. Указать систему изображений для точечного источника тока I, расположенного внутри клина на равных расстояниях h от его граней. Найти плотность тока $\mathbf{j}$ на расстояниях от источника r, значительно превышающих его расстояние до ребра клина.

3.10. В металлический сосуд, представляющий собой полусферическую чашу радиуса a налит до краев электролит, проводимость σ которого много меньше проводимости стенок сосуда. На расстоянии b от центра поверхности электролита ее касается конец тонкой проволочки. Между проволочкой и чашей пропущен ток силы I. Найти электрическое поле в электролите.

3.11. Проводник с конечной проводимостью σ представляет собой часть конуса, вырезанную из него двумя сферами с центром в его вершине. Радиусы сфер r_1 и r_2, угол при вершине конуса 2θ. На сферические поверхности проводника нанесены идеально проводящие покрытия, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов U. Найти распределение плотности тока $\mathbf{j}$ в проводнике и его сопротивление R.

3.12. Постоянный электрический ток течет в направлении оси x вдоль бесконечного плоского слоя, ограниченного плоскостями $y = \pm L$. Плотность тока в слое j всюду одинакова, а проводимость σ изменяется вдоль x по закону $\sigma = \sigma_0(1 + a\cos kx)^{-1}$, где $a < 1$. Вне слоя $\sigma = 0$. Найти электрическое поле $\mathbf{E}$ внутри и вне слоя.

3.13. Проводимость σ задана в декартовой системе координат следующим образом (рис. 2): $\sigma = 0$ при $|x| > a$; $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ при $|x| < a$ и $|y| < b$; $\sigma = \infty$ при $|x| < a$ и $|y| > b$. Между двумя областями с $\sigma = \infty$ поддерживается постоянная разность потенциалов U. Найти: а) потенциал и плотность тока в области с конечной проводимостью; б) потенциал в области $\sigma = 0$.

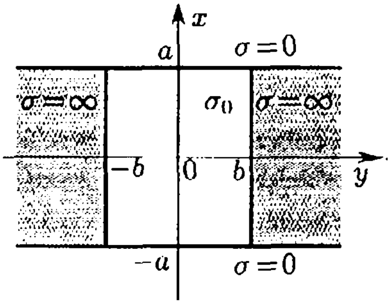


Рис. 2

3.14. В стенке проводящей трубы сделан по всей ее длине тонкий продольный разрез. На обе плоскости среза нанесены идеально проводящие покрытия, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов U. Внутренний и внешний радиусы трубы a и b, проводимость σ. Считая трубу бесконечно длинной, а разрез бесконечно тонким, найти:

а) потенциал φ и плотность тока $\mathbf{j}$ в стенке;

б) сопротивление R на единицу длины трубы;

в) потенциал φ в области внутри трубы;

г) потенциал φ в области вне трубы.

3.15. Полубесконечный коаксиальный кабель образован металлической трубой с внутренним радиусом b, введенным внутрь нее металлическим стержнем радиуса $a < b$ и разделяющим их цилиндрическим слоем неидеального изолятора толщины $b-a$ с проводимостью σ, много меньшей проводимости металла. Наружный и внутренний проводники имеют равные сопротивления на единицу длины ρ. На входе кабеля между проводниками поддерживается постоянное напряжение U_0, создающее в них равные и противоположно направленные (но не одинаковые в различных поперечных сечениях) токи. Найти:

а) погонную проводимость утечки кабеля Y — величину, обратную сопротивлению единицы длины изоляционного слоя по отношению к протекающему через него поперечному (радиальному) току;

б) сопротивление на входе кабеля R, а также зависимость силы тока в проводниках I и напряжения между ними U от осевой координаты (расстояния до входного сечения) z.

3.16. Точечный источник тока I помещен в анизотропную среду с холловской проводимостью, в которой проекции векторов плотности тока $\mathbf{j}$ и напряженности поля $\mathbf{E}$ связаны соотношениями $j_i = S_{ik}E_k + [\mathbf{E} \times \mathbf{a}]_i$; S_{ik} — симметричный тензор, имеющий в главных осях x, y, z компоненты $S_{xx} = S_1$, $S_{yy} = S_2$, $S_{zz} = S_3$; $\mathbf{a}$ — постоянный аксиальный (псевдо) вектор. Получить выражения для потенциала $\varphi(x, y, z)$. Показать, что при $\mathbf{a} = 0$ линии тока — радиальные прямые.

3.17. Цилиндрический конденсатор заполнен анизотропной средой с тензором проводимости, имеющим постоянные компоненты σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ в цилиндрической системе координат r, θ, z (ось z совпадает с осью конденсатора). Между внутренним и внешним проводниками конденсатора, имеющими радиусы a и b, поддерживается постоянная разность потенциалов U. Найти электрическое поле $\mathbf{E}$ и плотность тока $\mathbf{j}$ в конденсаторе. Нарисовать векторные линии $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$.

3.18. Бесконечный проводящий слой имеет неоднородную проводимость $\sigma(x) = C\sqrt{|x|} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, ось x перпендикулярна границам слоя, имеющим координаты $x = \pm a$. Между границами поддерживается постоянная разность потенциалов U. Найти при $\varepsilon \to 0$:

а) объемную плотность мощности джоулевых потерь в слое $q(x)$;

б) сопротивление R и мощность потерь Q, приходящиеся на единицу площади слоя.

3.19. Проводящий шар находится в среде с заданной проводимостью σ_0. Плотность тока вдали от шара однородна. При каком значении проводимости шара σ в нем выделяется наибольшее количество тепла за единицу времени?

3.20. Найти распределение плотности тока $\mathbf{j}$ в двумерной системе, образуемой идеально проводящим цилиндром радиуса a и параллельным его оси тонким проводом, помещенными в однородную среду с проводимостью σ. Между проводом и цилиндром с помощью сторонних ЭДС поддерживается постоянная разность потенциалов, обеспечивающая протекание через среду постоянного тока I на единицу длины системы. Расстояние от провода до оси цилиндра b.

3.21. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для случая, когда цилиндр изготовлен из идеального изолятора, а провод поддерживается при постоянном потенциале U по отношению к бесконечности.

3.22. Найти распределение потенциала φ по поверхности электролита, налитого в глубокий сосуд цилиндрической формы (радиус сосуда a мал по сравнению с высотой уровня электролита h). Ток в сосуде создается двумя электродами малых размеров, расположенными вблизи его дна симметрично относительно центра. Рассмотреть два случая:

1) сосуд целиком изготовлен из стекла;

2) дно сосуда стеклянное, а боковая стенка металлическая.

4. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

4.1. Ток распределен в пространстве с плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 j(y)$, $j(y) = j_0[1 + (y/L)^2]^{-1}$. Найти создаваемое им магнитное поле (x, y, z — декартовы координаты).

4.2. Найти магнитное поле, создаваемое током с плотностью $\mathbf{j} = \mathbf{z}_0 j_0 \exp(-\alpha r^2)$, где r — расстояние до оси, $\alpha = \text{const}$.

4.3. Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$, создаваемые током, текущим с постоянной поверхностной плотностью i по поверхности бесконечного цилиндра радиуса a в направлении:

а) вдоль образующей цилиндра;

б) перпендикулярно образующей;

в) под углом α к образующей. Вычислить величину H в единицах А/м на расстоянии 4 см от оси цилиндра при $a = 2$ см, $\alpha = 60°$, $i = 10^{-3}$ А/м.

4.4. Как изменится вектор $\mathbf{H}$ в случае (б) предыдущей задачи, если контур поперечного сечения цилиндра имеет произвольную форму?

4.5. Найти магнитное поле, создаваемое в свободном пространстве двойным слоем магнитных зарядов (дипольным магнитным слоем) с поверхностной плотностью магнитного дипольного момента $\mathbf{p}^{(m)} = \mathbf{x}_0 p_0^{(m)}$, занимающим полуплоскость $x = 0$, $-\infty < y < 0$, краем которой является ось z.

4.6. По двум бесконечным параллельным проводам текут встречные токи. Найти отношение величин этих токов I_1/I_2, если известны расстояние между проводами l и расстояния r_1 и r_2 от провода с током I_1 до точек пересечения некоторой силовой линии магнитного поля, охватывающей этот провод, с плоскостью, в которой лежат оба провода.

4.7. Поверхностный ток с плотностью $i = \text{const}$ течет вдоль бесконечной плоской ленты ширины $2a$. Найти магнитное поле. Исследовать его поведение при приближении к краю ленты.

4.8. Ток распределен равномерно по поперечному сечению провода. Какую форму должно иметь поперечное сечение, чтобы при фиксированных значениях его площади S и силы тока в проводе I максимум напряженности магнитного поля был наибольшим?

4.9. В круглой рамке радиуса a течет линейный ток силы I. Найти напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ на оси z, проходящей через центр рамки перпендикулярно ее плоскости.

4.10. Плоский линейный контур $ABCD$ (рис.3) образован двумя концентрическими дугами AB и DC с центром в точке O и радиальными отрезками AD и BC. Угловой размер дуг α, их радиусы $OA = r_1, OD = r_2$. По контуру течет ток силы I. Найти магнитное поле в точке O и на больших расстояниях от этой точки $r \gg r_2$ в плоскости контура.

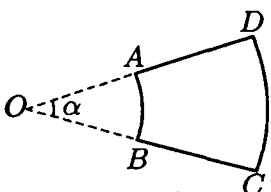


Рис. 3

4.11. Ток распределен равномерно с поверхностной плотностью $i = \text{const}$ по плоскому кольцу. Линии тока — концентрические окружности. Внутренний и внешний радиусы кольца a и b. Найти магнитное поле: а) на оси симметрии кольца z; б) в точках с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, удовлетворяющим условию $|\mathbf{r}| \gg b$ (начало координат помещено в центр кольца).

4.12. Ток течет по боковой поверхности круглого цилиндра перпендикулярно его образующей; поверхностная плотность тока $i = \text{const}$, длина цилиндра L, радиус a. Найти магнитное поле на оси цилиндра z.

4.13. По боковой поверхности полубесконечного цилиндра, определяемой в цилиндрической системе координат r, φ, z условиями $r = a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z \leq 0$, в направлении, перпендикулярном образующей цилиндра, течет ток с поверхностной плотностью i_0. Найти:

а) вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_0$ внутри цилиндра на бесконечном расстоянии от плоскости среза $z = 0$;

б) продольную компоненту поля H_z в плоскости среза $z = 0$;

в) вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в точках с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, удовлетворяющим условию $|\mathbf{r}| \gg a$;

г) полный магнитный поток Φ_0 через цилиндрическую поверхность, по которой течет ток.

4.14. Ток силы I равномерно распределен по всем радиальным направлениям внутри конуса, занимающего в сферических координатах r, θ, φ область $\theta \leq \theta_0$. К вершине конуса O ток подтекает по полубесконечному линейному контуру, совпадающему с отрицательной частью полярной оси z. Полагая, что накопления заряда нигде не происходит, найти:

а) зависимость плотности тока внутри конуса от радиуса $j_r(r)$;

б) магнитное поле во всем пространстве.

4.15. Постоянный ток силы I течет в направлении к некоторому центру O, где происходит накопление точечного заряда. Найти магнитное поле для следующих распределений тока в пространстве:

а) линейный ток, текущий по полупрямой, обрывающейся в точке O;

б) поверхностный ток, распределенный по плоскости радиально-симметрично относительно точки O;

в) радиально-симметричный объемный ток.

4.16. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для однородного поверхностного тока плотности i, текущего по полуплоскости в направлении к ее краю.

4.17. Линейный ток силы I течет по бесконечному контуру, образованному сторонами прямого угла. Найти магнитное поле в плоскости контура.

4.18. Постоянный ток течет по тонкому полубесконечному прямому проводу и затем растекается на бесконечность:

а) по плоскому проводящему листу;

б) по однородному проводящему полупространству;

в) по плоской границе сверхпроводника.

Указать рецепты расчета магнитного поля при произвольном угле наклона провода к поверхности соединенных с ним проводников.

4.19. Полубесконечная идеально проводящая коаксиальная линия, представляющая собой трубу с внутренним радиусом b, в которую вставлен имеющий с ней общую ось цилиндрический проводник радиуса $a < b$, заткнута на конце кольцевой втулкой длины l с конечной проводимостью σ (рис. 4). По внутреннему проводнику течет в направлении к втулке ток силы I, по внешнему — такой же ток в обратном направлении.

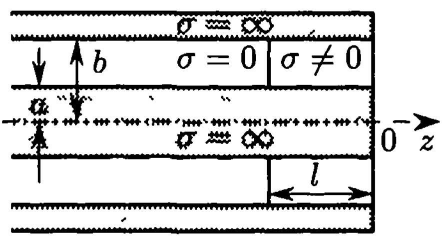


Рис. 4

Найти:

а) плотность тока во втулке $\mathbf{j}$ и ее сопротивление R;

б) электрическое поле в линии;

в) магнитное поле и плотность потока энергии.

4.20. Замкнутый линейный контур образован двумя полуокружностями радиуса a, лежащими во взаимно перпендикулярных плоскостях. В контуре течет ток силы I. Найти:

а) магнитное поле в центре полуокружностей;

б) магнитное поле на большом расстоянии от контура.

4.21. Найти магнитный дипольный момент контура, образованного отрезком винтовой линии, намотанной на цилиндр, и соединяющим ее концы отрезком образующей этого цилиндра. В цилиндрических координатах r, φ, z части контура заданы уравнениями: $r = a$, $z = b\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi n$ (n — целое число) и $r = a$, $\varphi = 0$, $0 \le z \le 2\pi n b$. Сила тока в контуре I.

4.22. В осесимметричном магнитном поле, не имеющем азимутальной компоненты, задана напряженность поля на оси симметрии $H_z(z)$. Найти радиальную компоненту поля H_r на малых расстояниях r от оси.

4.23. Найти магнитное поле, создаваемое поверхностным током, распределенным по плоскости $z = 0$ с плотностью $\mathbf{i} = \mathbf{y}_0 i_0 \cos kx$.

4.24. Найти магнитное поле, создаваемое поверхностным током, распределенным по цилиндрической поверхности $r = a$ с плотностью $\mathbf{i} = \mathbf{z}_0 i_0 \cos n\varphi$ (r, φ, z — цилиндрические координаты, $n = 1, 2, ...$).

4.25. Ток течет по поверхности сферы радиуса a в азимутальном направлении; поверхностная плотность тока $\mathbf{i} = \boldsymbol{\varphi}_0 i_0 \sin\theta$ (r, θ, φ – сферические координаты). Найти магнитное поле внутри и вне сферы.

4.26. Как изменится решение задачи 4.17 о поле линейного контура, имеющего форму прямого угла, если вершина этого угла совмещена с центром шара радиуса a с магнитной проницаемостью μ?

4.27. Линейный ток силы I течет по оси z цилиндрической системы координат r, φ, z. Найти создаваемое им магнитное поле, если магнитная проницаемость среды μ задана в виде: а) $\mu = \mu(z)$; б) $\mu = \mu(r)$; в) $\mu = \mu(\varphi)$; г) $\mu = \mu_1(r)\mu_2(\varphi)$.

4.28. Найти магнитное поле тонкого прямого провода, лежащего на плоской границе раздела сред с проницаемостями μ_1 и μ_2. Сила тока в проводе I.

4.29. По оси бесконечного соленоида с равномерной плотной намоткой, имеющей n витков на единицу длины, протянут бесконечный тонкий провод. Магнитная проницаемость среды внутри и вне соленоида является заданной функцией азимутального угла: $\mu = \mu(\varphi)$. Сила тока в проводах обмотки соленоида I_1, в осевом проводе I_2. Найти магнитное поле внутри и вне соленоида.

4.30. Используя понятие «магнитного листка» и опираясь на решение задачи 2.16 о заряде над плоской границей диэлектрика, решить методом изображений задачу о поле произвольного линейного контура с током I над плоской границей раздела сред с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2.

4.31. Найти закон «отражения» токов, текущих над плоской границей: а) ферромагнетика с $\mu \gg 1$, б) сверхпроводника.

4.32. Найти магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ шара радиуса a, приобретаемый им в однородном внешнем поле $\mathbf{H}_0$, если в окружающей среде $\mu = 1$, а шар

а) изготовлен из ферромагнетика с $\mu \gg 1$;

б) находится в состоянии сверхпроводимости.

Для обоих случаев нарисовать картину силовых линий магнитной индукции $\mathbf{B}$.

4.33. Найти возмущения, которые вносит во внешнее однородное поле $\mathbf{H}_0$ сверхпроводящий шар, покрытый сферической оболочкой из магнетика с проницаемостью μ. Радиус шара и внутренний радиус оболочки a, внешний радиус оболочки b.

4.34. Исследовать эффект экранирования внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ сферической оболочкой, имеющей магнитную проницаемость μ. Внутренний и внешний радиусы оболочки a и b.

4.35. Доказать теорему взаимности в магнитостатике: для двух различных распределений токов $\mathbf{j}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}_2(\mathbf{r})$ и соответствующих им (в одной и той же среде) распределений векторного потенциала $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ имеет место соотношение $\int \mathbf{j}_1 \mathbf{A}_2\, dv = \int \mathbf{j}_2 \mathbf{A}_1\, dv$, где интегрирование производится по всему пространству.

4.36. На основании теоремы взаимности, сформулированной в предыдущей задаче,

а) доказать симметрию коэффициентов взаимной индукции двух контуров i и k: $L_{ik} = L_{ki}$;

б) получить соотношение взаимности для двух точечных магнитных диполей;

в) доказать утверждение, аналогичное содержащемуся в задаче 2.41, для шара из магнетика в магнитном поле.

4.37. Круглая рамка радиуса a лежит на поверхности шара радиуса $b > a$ с магнитной проницаемостью μ. Сила тока в рамке I. Найти магнитное поле на большом расстоянии от шара $r \gg b$.

4.38. Линейный контур намотан на шар радиуса a с магнитной проницаемостью μ. Уравнение контура в сферических координатах $\varphi = 2n\theta$ (φ — азимутальный угол, θ — полярный угол, $n = 0, 1, 2, ...$). Концы контура, лежащие на полюсах шара ($\theta = 0, \pi$), замкнуты прямолинейным отрезком, проходящим внутри шара по диаметру. Найти:

а) поток магнитной индукции, пронизывающий контур, если шар помещен во внешнее однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$;

б) магнитный дипольный момент контура $\mathbf{m}$, если по нему пропущен ток силы I, а внешнее поле $\mathbf{H}_0 = 0$.

4.39. Найти магнитное поле, создаваемое однородно намагниченным шаром радиуса a с заданным вектором намагниченности $\mathbf{M}$.

4.40. Бесконечный цилиндр намагничен в поперечном направлении. Поперечное сечение цилиндра представляет собой площадку, ограниченную контуром $ABCD$, описанным в задаче 4.10 и изображенным на рис. 3 (две дуги радиусов r_1, r_2 с общим центром O и угловым размером α и соединяющие их концы радиальные отрезки). Найти напряженность магнитного поля $\mathbf{H}_0$ в точке O, если вектор намагниченности $\mathbf{M}$ задан в виде:

а) $\mathbf{M} = \mathbf{r}_0 M_0 r_1/r$; б) $\mathbf{M} = \boldsymbol{\varphi}_0 M_0 r_1/r$; в) $\mathbf{M} = \mathbf{x}_0 M_0$ (r, φ — полярные координаты в плоскости поперечного сечения, r_1 — меньший из радиусов дуг, $M_0 = \mathrm{const}$, $\mathbf{x}_0$ — постоянный единичный вектор, параллельный радиальному отрезку AD).

4.41. Постоянный магнит имеет форму и размеры проводника, описанного в задаче 3.11 (усеченный конус со сферическими «основаниями»). Вектор намагниченности **M** однороден и параллелен оси конуса. Найти напряженность поля $\mathbf{H}_0$ в вершине конуса O.

4.42. На основании решений задач 4.40 (в) и 4.41 определить:

а) характер особенностей поля вблизи ребра и конического острия однородно намагниченного тела;

б) оптимальный угол заточки полюсного наконечника постоянного магнита с намагниченностью **M** = const, исходя из требования максимальности поля в его вершине; рассмотреть и сравнить между собой два типа заточки: в виде клина и в виде конуса.

4.43. На противоположных сторонах бесконечного плоского слоя с бесконечной магнитной проницаемостью ($\mu = \infty$) лежат напротив друг друга два бесконечных параллельных провода, в которых текут одинаковые по величине и противоположные по направлению токи. Найти магнитное поле вне слоя. Показать, что на любом расстоянии от проводов приходящийся на единицу их длины поток магнитной индукции Φ, сосредоточенный в слое, равен бесконечности.

4.44. По какому закону будет убывать погонный поток индукции Φ через поперечное сечение слоя в предыдущей задаче на большом расстоянии от проводов r, если поместить оба провода с одной стороны слоя?

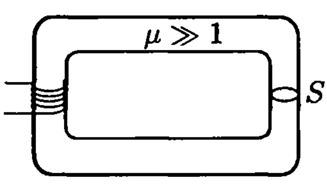


Рис. 5

4.45. Катушка небольших размеров (рис. 5) намотана на замкнутый магнитопровод длины L, изготовленный из материала с высокой магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Поперечное сечение магнитопровода — круг радиуса a. Оценить приближенно относительный поток рассеяния α (в предположении $\alpha \ll 1$), определяя его как $\alpha = (\Phi_0 - \Phi)/\Phi_0$, где Φ_0 и Φ – магнитные потоки внутри катушки и в наиболее удаленном от нее сечении магнитопровода S соответственно.

5. ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

5.1. Найти энергию W заряда q, равномерно распределенного: а) по поверхности сферы радиуса a; б) по объему шара радиуса a.

5.2. Найти энергию взаимодействия электрического поля $\mathbf{E}$ заданных источников с незаряженным диэлектрическим или металлическим телом, приобретающим под действием этого поля дипольный момент $\mathbf{p}$. Как меняется выражение для этой энергии, если дипольный момент тела $\mathbf{p}$ не зависит от приложенного поля $\mathbf{E}$?

5.3. Найти силу $\mathbf{F}$, действующую на точечный диполь с моментом $\mathbf{p}$ в следующих полях:

а) в поле точечного заряда q; расстояние между диполем и зарядом r;

б) в поле точечного диполя $\mathbf{p}_1$; векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$ и соединяющий диполи радиус-вектор $\mathbf{r}$ взаимно перпендикулярны.

5.4. Найти энергию w и силу взаимодействия F точечного заряда q со следующими телами:

а) с бесконечной проводящей плоскостью; расстояние от плоскости до заряда h;

б) с заземленным проводящим шаром радиуса a; расстояние от заряда до центра шара b;

в) то же, что б), но шар изолирован и не заряжен;

г) с маленьким диэлектрическим шариком, радиус которого a много меньше расстояния до заряда b; диэлектрическая проницаемость шарика ε.

5.5. Заряд распределен равномерно с плотностью ρ по объему полушара радиуса a. Какую работу A совершат силы электрического поля, если перенести из бесконечности в центр основания полушара:

а) точечный заряд q;

б) незаряженный шарик радиуса $b \ll a$ с диэлектрической проницаемостью ε?

5.6. Найти энергию взаимодействия w элементарного электрического диполя, обладающего заданным моментом $\mathbf{p}$, и бесконечной незаряженной проводящей плоскости. Расстояние от диполя до плоскости h, угол θ между вектором $\mathbf{p}$ и нормалью к плоскости: а) равен нулю; б) равен $\pi/2$; в) произволен.

5.7. Найти вращающий момент M, действующий на тонкий диэлектрический стержень, ориентированный под углом θ к внешнему полю $\mathbf{E}_0$. Длина стержня l, площадь поперечного сечения s, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \gg 1$.

5.8. Точечный заряд q находится внутри проводящей незаряженной сферической оболочки на расстоянии b от ее центра. Внутренний и внешний радиусы оболочки r_1 и r_2. Какую работу A надо совершить, чтобы перенести данный заряд: а) в центр оболочки; б) на бесконечность (сквозь малое отверстие в оболочке)?

5.9. Незаряженный проводящий шар радиуса a находится на расстоянии $b \gg a$ от бесконечной заряженной проводящей плоскости. Невозмущенная плотность поверхностного заряда на плоскости равна Ω. Найти силу, действующую на шар. Вычислить ее величину при $a = 1$ см, $b = 10$ см, $\Omega = 10$ Кл/см^2.

5.10. Сплошной проводящий шар радиуса a был внесен во внешнее однородное поле $\mathbf{E}_0$ и после этого разделен на две одинаковые половины бесконечно тонким разрезом, перпендикулярным $\mathbf{E}_0$. Какая сила $\mathbf{F}$ действует на каждую половину? Как изменится эта сила после выключения поля $\mathbf{E}_0$?

5.11. Незаряженный металлический шарик массы m покоится между пластинами заряженного плоского конденсатора на равных расстояниях от них. Какую начальную скорость v_0 в направлении, параллельном пластинам, нужно ему сообщить, чтобы он мог вылететь из конденсатора? Радиус шарика a много меньше его расстояния до пластин; поле внутри конденсатора в отсутствие шарика равно E_0.

5.12. Найти изменение емкости плоского конденсатора ΔC при внесении в него маленького диэлектрического шарика с проницаемостью ε. Радиус шарика a мал по сравнению с расстоянием от его центра до пластин; расстояние между пластинами d.

5.13. Пластины плоского конденсатора, представляющие собой прямоугольники со сторонами a и b, сдвинуты одна относительно другой в боковом направлении вдоль стороны b на расстояние $x < b$. Размеры как перекрывающихся, так и неперекрывающихся частей пластин много больше расстояния между ними d ($a \gg d$, $b - x \gg d$, $x \gg d$). Найти нормальную (F_n) и касательную (F_x) к пластинам компоненты силы их взаимодействия, если на конденсатор подано напряжение U.

5.14. Плоский конденсатор с вертикально расположенными пластинами частично погружен в жидкий диэлектрик с проницаемостью ε и плотностью τ. Расстояние между пластинами d, разность потенциалов U. На какую высоту h поднимется жидкость внутри конденсатора?

5.15. Плоский конденсатор помещен в газ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 + an$ ($a = \mathrm{const}$, n — концентрация молекул). Напряженность поля внутри конденсатора E_0. Концентрация молекул газа на бесконечности (вне конденсатора) равна n_0, температура газа T одинакова во всем пространстве. Найти концентрацию n внутри конденсатора в состоянии равновесия.

5.16. Найти коэффициент взаимной индукции L и силу взаимодействия F двух соосных круговых витков при условии, что радиус одного из них a_1 много меньше радиуса другого a_2. Расстояние между центрами витков h. Направления токов в витках одинаковы, силы токов I_1, I_2.

5.17. Найти коэффициент самоиндукции L_1 единицы длины коаксиальной линии, образованной сплошным цилиндрическим проводником радиуса a, вложенным внутрь тонкостенной проводящей трубы радиуса $b > a$. По сечению центрального проводника ток распределен равномерно.

5.18. Найти коэффициент самоиндукции L отрезка соленоида длины l и радиуса $a \ll l$. Соленоид имеет равномерную плотную намотку с полным числом витков N.

5.19. Найти коэффициент самоиндукции L тонкого круглого провода радиуса a и длины l при условии $\ln(l/a) \gg 1$.

5.20. Найти коэффициент самоиндукции L плоского квазилинейного контура, имеющего плоскость симметрии, совмещенную с границей раздела сред с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (плоскость контура перпендикулярна границе раздела). Коэффициент самоиндукции того же контура в вакууме L_0.

5.21. Как изменится по сравнению с вакуумным значением (L_0) коэффициент самоиндукции L плоского квазилинейного контура, если его положить на плоскую границу раздела сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2?

5.22. На какую величину ΔL изменится коэффициент самоиндукции малого кругового витка, если его расположить параллельно плоской границе сверхпроводника на расстоянии h от нее? Радиус витка $a \ll h$.

5.23. Найти поправку ΔL к величине коэффициента самоиндукции кругового витка радиуса a, связанную с помещением в его центр: а) сверхпроводящего шарика; б) шарика с $\mu \gg 1$. Радиус шарика $b \ll a$.

5.24. Круглая рамка радиуса a с током I находится во внешнем осесимметричном магнитном поле $\mathbf{H}(r, z)$, имеющем компоненты H_r и H_z (r, z — цилиндрические координаты). Ось симметрии поля z совпадает с осью симметрии рамки. Выразить силу F_z, действующую на рамку, (а) через пронизывающий ее поток индукции внешнего поля $\Phi(z)$; (б) через радиальную компоненту поля $H_r(a, z)$. Показать, что оба выражения для силы согласуются между собой.

5.25. Маленькая рамка с током I_1 расположена на расстоянии r от бесконечного прямого провода с током I_2. Площадь рамки s; размеры рамки малы по сравнению с r. Найти полную силу F и вращающий момент M, действующие на рамку, если:

а) рамка и провод лежат в одной плоскости;

б) вектор нормали к площади рамки и провод лежат в одной плоскости и взаимно перпендикулярны;

в) нормаль к площади рамки параллельна проводу.

5.26. Квадратная рамка с током I_1 и бесконечный прямой провод с током I_2 лежат в одной плоскости. Расстояние от центра рамки до провода l, длина ее стороны a. Найти силу F, действующую на рамку, если:

а) две стороны рамки параллельны проводу;

б) одна из диагоналей рамки параллельна проводу.

5.27. Ток течет по кольцу радиуса a, изготовленному из тонкой круглой проволоки с радиусом поперечного сечения $r \ll a$. При какой силе тока I кольцо разорвется, если максимальное натяжение на разрыв, которое выдерживает проволока, равно F? Вычислить I (в амперах) при $a = 10$ мм, $r = 1$ мм, $F = 10$ Н.

5.28. Ток течет по бесконечному круглому цилиндру в направлении его оси z. При какой зависимости плотности тока j_z от расстояния r до оси z плотность силы Лоренца $\mathbf{f}$ внутри цилиндра не зависит от r?

5.29. Найти распределение магнитного давления по поверхности сверхпроводящего шара радиуса a, внесенного в однородное внешнее поле $\mathbf{H}_0$.

5.30. Обмотка бесконечно длинного соленоида представляет собой многозаходную спираль, навитую с постоянным шагом l на цилиндр радиуса a. Провода обмотки равномерно распределены по поверхности цилиндра; их полное число $N \gg 1$. Найти внутреннее (p_i) и внешнее (p_e) магнитные давления на обмотку. При каком угле наклона проводов спирали α к образующей цилиндра давления изнутри и снаружи уравновешиваются?

5.31. На какой высоте h над горизонтальной поверхностью сверхпроводника следует расположить постоянный магнит и как его ориентировать, чтобы он находился в положении устойчивого равновесия? Магнит представляет собой продольно намагниченный стержень массы M с дипольным моментом m, его длина мала по сравнению с h.

5.32. Исследовать устойчивость возможных положений равновесия маленького шарика с магнитной проницаемостью μ в произвольном неоднородном магнитном поле заданных внешних источников. Рассмотреть случаи: а) $\mu < 1$; б) $\mu > 1$; в) шарик в состоянии сверхпроводимости.

6. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

6.1. В однородной среде с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε с помощью сторонних сил поддерживается некоторое статическое распределение объемной плотности заряда $\rho_0(\mathbf{r})$, создающее электрическое поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$. В момент $t = 0$ сторонние силы мгновенно исчезают. Найти закон релаксации плотности заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ и электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Какое магнитное поле возникает при этой релаксации?

6.2. Получить граничное условие для нормальной составляющей плотности тока j_n на поверхности с учетом возможности существования на ней переменного поверхностного заряда с плотностью $\Omega(t)$ и неоднородного поверхностного тока с плотностью $\mathbf{i}$.

6.3. Получить дифференциальное уравнение первого порядка для одномерного электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E(x, t)$ в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, t)$ и проводимостью $\sigma(x, t)$, полагая, что при некотором $x = x_0$ плотность тока $j(x_0) = 0$, а индукция $D(x_0)$ не зависит от времени. Найти решение этого уравнения при заданной начальной функции $E(x, 0)$. Существует ли в условиях данной задачи магнитное поле?

6.4. Плоский конденсатор с заданными зарядами на пластинах q и $-q$ заполнен идеальным изолятором с диэлектрической проницаемостью ε. В момент $t = 0$ внутри конденсатора, в слое толщины d, параллельном пластинам и не соприкасающемся с ними, под действием внешнего источника ионизации среда приобретает конечную проводимость $\sigma = \text{const}$. Найти и изобразить графически зависимость разности потенциалов на пластинах U и плотности поверхностного заряда Ω на границах ионизированного слоя от времени t. Площадь пластин S, расстояние между ними l.

6.5. На пластины плоского конденсатора помещены заряды q и $-q$. В момент $t = 0$ среда между пластинами приобретает конечную проводимость $\sigma = \text{const}$; диэлектрическая проницаемость среды ε. Найти, пренебрегая краевым эффектом:

а) ток разряда конденсатора $I(t)$;

б) магнитное поле между пластинами.

6.6. Найти закон квазистационарной релаксации в однородной среде с проводимостью σ магнитного поля, заданного в начальный момент времени в виде гармонической функции координаты x: $H_y = H_0 \sin kx$.

6.7. В однородной среде с проводимостью σ магнитное поле $\mathbf{H}$ в начальный момент времени локализовано в конечной области с характерным размером L. Оценить характерное время релаксации поля τ, полагая выполненным условие $\sigma\tau \gg 1$.

6.8. Найти распределение комплексной амплитуды $\mathbf{E}(x)$ вектора переменного электрического поля, представляемого в виде $\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}(x)\,e^{\imath\omega t})$, внутри проводящего плоского слоя толщины $2a$ с проводимостью $\sigma \gg \omega$ и магнитной проницаемостью μ. На границах слоя ($x = \pm a$) задана амплитуда тангенциальной компоненты поля: $E_y(-a) = E_y(a) = E_0$. Изобразить графически «моментальные снимки» поля при различных t для двух случаев: а) $a \gg \delta$ и б) $a \ll \delta$ ($\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ — толщина скин-слоя в проводнике).

6.9. В предыдущей задаче найти также при $a \gg \delta$:

а) распределение магнитного поля в слое $H_z(x)\,e^{\imath\omega t}$;

б) сдвиг фаз φ между полями E_y и H_z при $x = \pm a$;

в) поверхностный импеданс $\zeta_s = E_y/H_z$ на границах слоя; выразить ζ_s через μ и комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 4\pi\sigma/i\omega$;

г) силу тока i_0, протекающего через единицу длины поперечного сечения слоя $y = \mathrm{const}$;

д) средний за период вектор Пойнтинга в слое $\mathbf{S}(x)$;

е) среднюю за период мощность потерь на единицу площади слоя Q.

6.10. Решить задачу, аналогичную 6.8, если на одной границе слоя ($x = -a$) $E_y(-a) = E_0$, а на другой границе ($x = 0$):

а) лежит идеально проводящий лист;

б) задан поверхностный импеданс $\zeta_s = E_y(0)/H_z(0) = 1$.

6.11. Как изменится коэффициент самоиндукции L на единицу длины коаксиальной линии (см. задачу 5.17.) в случае сильного скин-эффекта (при $a \gg \delta$)?

6.12. Плоский конденсатор с круглыми пластинами подключен к источнику переменного напряжения $U = U_0 \sin \omega t$. Найти магнитное поле внутри конденсатора $\mathbf{H}$ при условии $d \ll a \ll c/\omega$, где d — расстояние между пластинами, a — радиус пластин, c — скорость света.

6.13. Бесконечный соленоид с числом витков в обмотке на единицу длины n питается переменным током $I = I_0 \sin \omega t$. Найти электрическое поле внутри соленоида при условии $a \ll c/\omega$ (a — радиус соленоида).

6.14. Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ в ближней зоне (на расстоянии $r << \lambda$) переменного электрического диполя с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0\, e^{i\omega t}$.

6.15. Сила тока I, текущего в обмотке тороидального (замкнутого на самого себя) соленоида, линейно растет со временем: $I = A\,t$. Полное число витков в обмотке равно N. Большой радиус тора a (в его экваториальном сечении) много больше малого радиуса b (в меридиональном сечении). Найти, пренебрегая компонентой электрического тока, перпендикулярной меридиональным сечениям:

а) магнитное поле внутри и вне соленоида;

б) электрическое поле на большом расстоянии от соленоида $r \gg a$.

6.16. Точечный заряд q движется с постоянной скоростью $v \ll c$ по направлению к плоской границе идеального проводника. Найти:

а) напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$;

б) плотность поверхностного электрического тока $\mathbf{i}$ на границе.

6.17. Найти частоту собственных колебаний квазистационарного закрытого контура, получаемого в результате вращения фигуры, изображенной на рис. 6, вокруг оси OO'. Границы контура идеально проводящие; обозначения размеров указаны на рисунке; размер d мал по сравнению с a, h и $b - a$.

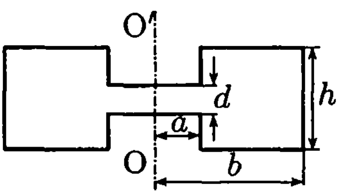


Рис. 6

6.18. Найти частоту ω собственных колебаний вибратора, представляющего собой два металлических шара радиуса a, соединенных отрезком проволоки длины l с радиусом поперечного сечения b. Считать выполненными условия $b \ll a \ll l \ll c/\omega$.

6.19. В однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, вращающееся с угловой частотой ω, внесен идеально проводящий шар радиуса a. Частота вращения $\omega \ll c/a$. Найти:

а) магнитное поле вблизи шара $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$;

б) распределение магнитного давления по поверхности шара.

6.20. Найти дипольные электрический $(\mathbf{p})$ и магнитный $(\mathbf{m})$ моменты идеально проводящего шара радиуса a в поле бегущей плоской волны с компонентами $E_x = H_y = E_0\, e^{i(\omega t - kz)}$. Длина волны $\lambda = 2\pi/k \gg a$.

6.21. Найти эффективную магнитную проницаемость μ искусственного магнетика, набранного из круглых проволочных рамок радиуса a. Плоскости рамок перпендикулярны магнитному полю, меняющемуся с частотой $\omega \gg c/a$. Коэффициент самоиндукции рамки L, сопротивление R, число рамок в единице объема n.

6.22. Тонкий диэлектрический стержень с проницаемостью ε, длиной l, площадью поперечного сечения s ($\sqrt{s} \ll l$) свернут в круглое кольцо. Найти эквивалентный магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ кольца, который оно приобретает во внешнем переменном магнитном поле $\mathbf{H}_0\, e^{i\omega t}$, перпендикулярном его плоскости.

6.23. Найти частоту собственных колебаний квазистационарного контура, представляющего собой диэлектричекое кольцо, описанное в предыдущей задаче.

6.24. Найти магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$ диэлектрического шара радиуса a с проницаемостью ε в однородном переменном магнитном поле $\mathbf{H}_0\, e^{i\omega t}$. Длины волн в вакууме ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega$) и в веществе шара ($\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon}$) велики по сравнению с радиусом шара a.

6.25. Шар радиуса a с проводимостью σ помещен во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, вращающееся с угловой частотой $\omega \ll \sigma$. Считая радиус шара a малым по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ и с толщиной скин-слоя $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$, найти:

а) электрическое поле внутри и вне шара;

б) вращающий момент $\mathbf{M}$, действующий на шар.

6.26. Найти ускорение свободного падения a круглой металлической пластинки в однородном магнитном поле, параллельном поверхности земли. Пластинка ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно поверхности земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса R, масса пластинки m, напряженность магнитного поля H.

6.27. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для падающего проводника, который представляет собой два шара радиуса a, соединенных горизонтальным отрезком тонкой проволоки длины $l \gg a$, ориентированным перпендикулярно магнитному полю.

7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ БЕЗ ИСТОЧНИКОВ

7.1. Вектор электрического поля гармонической плоской однородной волны задан в комплексной форме $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$. Векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{k}$ лежат в плоскости xz.

1) Записать комплексные и действительные выражения для проекций электрического и магнитного полей на направления x, y, z, которые содержали бы явные зависимости от переменных x, y, z, t и параметров $|\mathbf{E}_0|$, ω, k_x, k_z, для случая, когда волна распространяется вакууме.

2) Определить пространственные периоды поля λ_x, λ_z по осям x и z, если заданы: частота ω, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды ε, μ и угол α между вектором $\mathbf{k}$ и осью z.

3) Определить λ_x, если заданы: ω, ε, μ, λ_z.

4) Определить частоту ω, если заданы: ε, μ, λ_x, $v^{(z)}$, где $v^{(z)}$ — скорость, с которой перемещается вдоль оси z точка пересечения фазового фронта с этой осью.

5) Построить графики зависимости отличных от нуля компонент электрического и магнитного полей от координат x, y, z в различные моменты времени t для случая; когда вектор $\mathbf{k}$ направлен по оси z.

6) Построить графики зависимости поля от координат x, z для различных значений угла α между $\mathbf{k}$ и осью z.

7.2. Волновой вектор $\mathbf{k}$ плоской однородной волны направлен под углом α к оси z. Среда имеет проницаемости ε и μ. Найти поперечные (по отношению к оси z) характеристические импедансы волны $\zeta_\perp$, связывающие поперечные компоненты полей соотношением $\mathbf{E}_\perp = \zeta_\perp[\mathbf{H}_\perp \mathbf{z}_0]$, для поляризаций типа TE ($E_z = 0$), TM ($H_z = 0$), TEM ($E_z = H_z = 0$).

7.3. Выразить амплитуды электрического и магнитного полей гармонической плоской однородной волны E_0 и H_0 в среде с проницаемостями ε и μ через среднюю за период плотность потока энергии S. Вычислить значения E_0 (в В/см) и H_0 (в эрстедах и в А/м) в вакууме при S=1 кВт/см^2.

7.4. Рассматривая колебания свободных электронов в переменном электрическом поле частоты ω, получить выражение для диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon(\omega)$. Найти и изобразить графически зависимости $\omega(k)$, $\lambda(\omega)$, $v(\omega)$ для плоской волны в плазме (λ — длина волны, v — фазовая скорость).

7.5. Найти комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon_c = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, если ее магнитная проницаемость $\mu = 1$ и если для распространяющейся в данной среде плоской волны известны:

а) ее частота ω, скорость v перемещения волнового фронта и расстояние L, на котором амплитуда убывает в e раз;

б) сдвиг фаз между электрическим и магнитным полями φ и отношение их амплитуд $E_0/H_0 = p$.

7.6. Найти и изобразить графически зависимость переменного поля частоты ω от координаты x в вакууме, если известно, что от y поле не зависит, а его зависимость от переменных z, t представляет собой волну, бегущую с фазовой скоростью $v^{(z)}$. Рассмотреть случаи: $v^{(z)} > c$, $v^{(z)} < c$, $v^{(z)} = c$. Для указанных трех случаев сравнить длину волны λ_z, характеризующую зависимость поля от z, с длиной плоской однородной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$.

7.7. Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ неоднородной плоской волны в среде с проницаемостями ε и μ, если электрическое поле волны задано в виде $E_y = E_0 \exp\left(i(\omega t - hz) - \kappa x\right)$,

$E_x = E_z = 0$. Каким образом связаны между собой параметры κ, h, ω, ε, μ? При каком условии поляризация магнитного поля близка к круговой?

7.8. Плазма, помещенная в постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, является гиротропной средой, тензор диэлектрической проницаемости которой ε_{ik} в случае, если вектор $\mathbf{H}_0$ параллелен оси z, имеет следующие отличные от нуля компоненты: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\,\varepsilon_2$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_3$; величины ε_1, ε_2, ε_3 в отсутствие поглощения действительны.

а) Показать, что материальное уравнение $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ (i, $k = x, y, z$; по индексу k производится суммирование) для такой среды может быть записано в форме $\mathbf{D} = \varepsilon_{\|}\,\mathbf{z}_0\,E_z + \varepsilon\,\mathbf{E}_\perp + i\,[\mathbf{E}\times\mathbf{g}]$, где $\mathbf{g}$ — так называемый вектор гирации, параллельный постоянному полю $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{E}_\perp$ — перпендикулярная $\mathbf{g}$ компонента вектора $\mathbf{E}$. Выразить величины $\varepsilon_{\|}$, ε и вектор $\mathbf{g}$ через компоненты тензора ε_{ik}.

б) На основании записанного в п. (а) векторного материального уравнения исследовать решения уравнений Максвелла в виде монохроматических плоских волн с волновым вектором $\mathbf{k}$, параллельным вектору $\mathbf{g} = \mathbf{z}_0\,g_z$. Показать, что при заданной частоте ω в заданном направлении $\mathbf{k}$ в среде могут распространяться две поперечные циркулярно-поляризованные волны, различающиеся направлением вращения векторов поля и абсолютной величиной волнового числа $|\mathbf{k}| = k_\pm$. Найти числа $k_\pm$ для право- и лево-поляризованных волн.

7.9. Плоская линейно-поляризованная волна падает на плоский слой гиротропной среды толщины L. Направление падения и вектор гирации среды $\mathbf{g}$ перпендикулярны границам слоя. Опираясь на решение предыдущей задачи и пренебрегая отражением волн от границ слоя, показать, что, пройдя через слой, волна будет иметь линейную поляризацию, отличающуюся от первоначальной. Считая известными волновые числа k_+ и k_- для право- и лево-поляризованных волн в слое, найти угол поворота $\Delta\varphi$ плоскости поляризации прошедшей волны по отношению к падающей.

7.10. Записать в векторной форме связь между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ для магнитной гиротропной среды (феррит в постоянном магнитном поле), характеризуемой тензором магнитной проницаемости μ_{ik}, подобным тензору ε_{ik}, рассмотренному в задаче 7.8. Найти волновые числа циркулярно-поляризованных волн $k_\pm$, распространяющихся в такой среде в направлении постоянного магнитного поля.

7.11. Получить дисперсионные уравнения и нарисовать кривые $\omega(k)$ для поперечной ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$) и продольной ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$) волн в плазме, исходя из материального уравнения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \delta^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$, учитывающего тепловое движение частиц ($\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, $\delta = V_T/\omega$, V_T — средняя тепловая скорость электронов).

7.12. Показать, что изотропная среда с материальными уравнениями вида $\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu(\omega)\mathbf{H}$ в переменном поле частоты ω может быть описана как немагнитный диэлектрик с временной и пространственной дисперсией, электромагнитное поле в котором характеризуется тремя векторами: $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{D}'$. Найти вид материальной связи векторов $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{E}$. Показать, что для монохроматической поперечной плоской волны эта связь имеет вид $\mathbf{D}' = \varepsilon'(\omega,\ k)\mathbf{E}$, где $\varepsilon'(\omega,\ k) = \varepsilon + (1 - \mu^{-1})(ck/\omega)^2$.

7.13. Получить выражения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стоячей волны. Чему равен сдвиг фаз φ между полями? Изобразить «моментальные снимки» полей в различные моменты времени.

7.14. Электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух гармонических плоских однородных волн с одинаковыми частотами и амплитудами. Векторы электрического поля в обеих волнах параллельны оси x. Волновые векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ лежат в плоскости yz, причем $k_{1z} = k_{2z}$, $k_{1y} = -k_{2y}$. Написать выражения для компонент суммарного поля. Построить графики, иллюстрирующие поведение полей в пространстве и времени. Нарисовать картину силовых линий магнитного поля.

7.15. Выразить структурные параметры поля в предыдущей задаче (длину волны λ_z и фазовую скорость $v^{(z)}$ в направлении оси z, расстояние L между плоскостями $y = \mathrm{const}$, на которых $E_x = 0$, поперечный импеданс $\zeta_\perp = E_x/H_y$) через частоту поля ω и угол наклона α волновых векторов к оси z. При каком α средняя по времени плотность энергии магнитного поля w_m не зависит от координат?

7.16. Найти электрическое и магнитное поля $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 H(z,t)$ в вакууме в отсутствие источников при следующих начальных условиях:

а) $E(z,0) = H(z,0) = E(z)$;

б)$E(z,0) = -H(z,0) = E_0(z)$;

в)$E(z,0) = E(z)$, $H(z,0) = 0$;

г) $E(z,0) = E(z)$, $(\partial E/\partial t)(z,0) = G(z)$.

7.17. Найти электрическое и магнитное поля $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E(z,t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 H(z,t)$ в среде с проницаемостями ε и μ на промежутке $0 < z < L$ при следующих граничных условиях:

а) $E(0,t) = E_0(t)$, $E(L,t) = \pm\sqrt{\mu/\varepsilon} H(L,t)$;

б) $E(0,t) = E_0(t)$,

$(\partial E/\partial t)(L,t) = \pm(c/\sqrt{\varepsilon\mu})(\partial E/\partial z)(L,t)$.

7.18. Получить граничные условия для касательных компонент напряженностей электрического и магнитного полей E_x и H_y на плоскости, движущейся со скоростью V в направлении собственной нормали (параллельной оси z) в неподвижной среде с проницаемостями ε и μ. По плоскости в направлении оси x течет ток с поверхностной плотностью i, т.е. плотность объемного тока в пространстве задана в виде: $\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 i\delta(z - Vt)$, где $\mathbf{x}_0$ — единичный вектор, параллельный оси x.

7.19. Показать, что для гармонической плоской волны в плазме ($\mu = 1$, $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2 > 0$): а) произведение фазовой (v) и групповой (v_g) скоростей $vv_g = c^2$; б) средняя плотность электромагнитной энергии $w = |\mathbf{E}|^2/(8\pi)$.

7.20. Показать, что для гармонической плоской волны в прозрачной среде с дисперсией всегда выполняется соотношение $wv_g = S$, где w — средняя плотность энергии, v_g – групповая скорость, S — средняя плотность потока энергии.

7.21. Получить приближенное материальное уравнение, связывающее медленно меняющиеся во времени комплексные амплитуды индукции $\mathbf{D}_0(t)$ и напряженности $\mathbf{E}_0(t)$ квазигармонического электрического поля в среде с заданной зависимостью $\varepsilon(\omega)$. Несущая частота поля ω_0 (центральная частота спектра) много больше ширины спектра $\Delta\omega$.

7.22. Получить уравнение параболического типа для медленно меняющейся во времени комплексной амплитуды $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ квазигармонического электрического поля с несущей частотой ω_0 в среде с дисперсией ($\varepsilon = \varepsilon(\omega)$).

7.23. Радиоимпульс с высокочастотным заполнением распространяется в плазме ($\mu = 1, \varepsilon = 1-\omega_p^2/\omega^2, \omega_p=\text{const}$) в направлении оси z. Первоначально (в сечении $z = 0$) временная развертка импульса представляет собой отрезок синусоиды частоты ω_0 с конечной длительностью $\Delta\tau_0$. Полагая $\omega_0 \gg \omega_p$, $\omega_0\Delta\tau_0 \gg 1$, найти

а) характерную ширину спектра импульса $\Delta\omega$;

б) скорость v, с которой перемещаются в пространстве расположенные внутри импульса поверхности с нулевым значением поля;

в) первоначальную протяженность импульса в пространстве L и время t, за которое его центр проходит заданное расстояние z;

г) расстояние $\tilde{z}$, на котором заметно меняется длительность импульса, а также форму импульса и закон изменения его длительности $\Delta\tau(z)$ при $z \gg \tilde{z}$.

7.24. Показать, что если скалярная функция φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, то векторы $\mathbf{A}_1 = \nabla\varphi$, $\mathbf{A}_2 = [\mathbf{l}\nabla\varphi]$, $\mathbf{A}_3 = \text{rot}\mathbf{A}_2$ (где $\mathbf{l}$ — постоянный вектор) удовлетворяют уравнению $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$. Какие из этих векторов могут рассматриваться как комплексные амплитуды гармонического поля $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$ в вакууме в отсутствие источников?

7.25. Найти сферически симметричное решение $\varphi(r)$ скалярного уравнения Гельмгольца, описывающее простейшую стоячую сферическую волну. Используя указанное в задаче 7.24 соответствие скалярных и векторных решений, получить выражения для векторов электрического и магнитного поля этой волны. Изобразить качественно картины их силовых линий.

7.26. Найти сферически симметричное решение $\varphi(r,t)$ скалярного однородного волнового уравнения в вакууме, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\varphi(r,0) = \varphi_0(r)$, $(\partial\varphi/\partial t)(r,0) = \psi_0(r)$. При каких начальных условиях решение в течение некоторого промежутка времени $0 < t < \tau$ представляет собой сходящуюся сферическую волну? Как выглядит решение в точке $r = 0$ после прихода переднего фронта волны в эту точку?

7.27. Представляя поперечное поле широкого монохроматического волнового пучка, распространяющегося в однородной среде в направлении оси z, в виде $E = E_0(x,y,z)\,e^{i(\omega t-kz)}$, показать, что медленно меняющаяся в пространстве амплитуда E_0 приближенно удовлетворяет параболическому уравнению $2ik(\partial E_0/\partial z) = \Delta_\perp E_0$, где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — поперечная часть оператора Лапласа.

7.28. Показать, что любое решение параболического уравнения (см. предыдущую задачу) обладает следующими свойствами:

1) закон сохранения энергии:

$$W = \iint |E_0|^2\,dx\,dy = \text{const}.$$

2) закон прямолинейного движения центра энергии пучка $\mathbf{r}_{\perp c}$:

$$\mathbf{r}_{\perp c} = W^{-1}\iint |E_0|^2\mathbf{r}_\perp\,dx\,dy = \mathbf{a} + \mathbf{b}z,$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – постоянные векторы.

В приведенных выражениях интегрирование проводится по всей поперечной плоскости $z = \text{const}$; $\mathbf{r}_\perp$ — радиус-вектор в этой плоскости. Предполагается, что оба интеграла сходятся, т.е. поперечные распределения поля достаточно хорошо локализованы.

7.29. Получить выражение для комплексной амплитуды гармонического поля $\mathbf{E}_0(r, z)\, e^{i(\omega t - kz)}$ осесимметричного гауссового пучка (r — расстояние до оси симметрии z). Ширина пучка много больше длины волны. Использовать два способа:

а) решить уравнение поперечной диффузии поля с граничным условием на плоскости $z = 0$

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{x}_0 E_0 \exp\left(-r^2/2a_0^2\right); \;\; ka \gg 1;$$

б) рассмотреть точное решение скалярного уравнения Гельмгольца $(1/R)\, e^{-ikR}$, где $R = [r^2 + (z + il_0)^2]^{1/2}$, в приосевой области ($r \ll |R|$), полагая $l_0 = ka_0^2$, $ka_0 \gg 1$.

7.30. Для осесимметричного гауссового пучка (см. задачу 7.29) с заданным радиусом фокального пятна a_0 и волновым числом k найти (при условии $ka_0 \gg 1$):

а) угол расходимости пучка θ_0 на большом расстоянии от фокуса;

б) радиус пучка a на расстоянии z от фокуса;

в) расстояние z от фокальной плоскости, на котором квадрат амплитуды поля на оси убывает вдвое;

г) амплитуду поля E в центре фокального пятна при полном потоке энергии в пучке P.

7.31. Оценить поперечный (a_0) и продольный (l_0) размеры фокального пятна, создаваемого линзой радиуса a с фокусным расстоянием f при значении волнового числа k. Какое ограничение на f накладывает условие $a_0 \ll a$?

8. ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ

8.1. Плоская волна с вектором электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_0 \, e^{i(\omega t - kz)}$ падает в среде с проницаемостями ε и μ, занимающей область $z < 0$, на плоскость $z = 0$ с заданным поверхностным импедансом $\zeta_s = E_x(0)/H_y(0)$.

1) Найти коэффициент отражения волны Г.

2) Получить формулу пересчета импеданса, позволяющую определить импеданс суммарного поля падающей и отраженной волн $\zeta(L) = (E_x/H_y)_{z=-L}$ на расстоянии L от границы.

3) Найти функцию $|E|^2(z)$ и определить коэффициент стоячей волны КСВ = $|E|^2_{\max}/|E|^2_{\min}$.

4) Что можно сказать об импедансе ζ_s при КСВ = 1 и при КСВ =∞?

8.2. Выразить коэффициенты отражения (Г) и прохождения (T) плоской волны, падающей наклонно на плоскую границу раздела двух сред 1 и 2, через поперечные (по отношению к направлению нормали к границе) характеристические импедансы сред $\zeta_{\perp 1}$, $\zeta_{\perp 2}$. Выразить величины $\zeta_{\perp 1}$, $\zeta_{\perp 2}$ через значения диэлектрической и магнитной проницаемостей обеих сред ε_1, μ_1, ε_2, μ_2 и угол падения θ_0 (волна падает на границу из среды 1). Рассмотреть две различные поляризации волны: поперечно-электрическую (волна типа TE или s-поляризованная) и поперечно-магнитную (волна типа TM или p-поляризованная).

8.3. Пользуясь формулой пересчета импеданса (см. задачу 8.1(2), получить выражение для коэффициента отражения Γ плоской волны от плоского слоя толщины d с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε, μ, разделяющего среды 1 и 2 с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2. Волна падает на слой по нормали из среды 1. Найти условия, при которых $\Gamma = 0$, для случаев, когда среды 1 и 2: а) одинаковы, б) различны.

8.4. Не прибегая к анализу общего выражения для коэффициента отражения Γ в предыдущей задаче, указать условие, при котором $|\Gamma|$ не зависит от толщины слоя d.

8.5. Плоская волна падает по нормали из вакуума на плоскую границу проводника с проводимостью σ. Рассматривая поле в проводнике как функцию частоты волны ω (в области $\omega \ll \sigma$), определить, при какой частоте ω_m амплитуда электрического поля в проводнике на заданном расстоянии от границы z достигает максимума и какова при этом толщина скин-слоя δ.

8.6. Какие значения частоты ω_m и толщины скин-слоя δ в предыдущей задаче соответствуют максимуму амплитуды магнитного поля?

8.7. Найти коэффициент отражения Γ плоской волны от плоского слоя толщины d с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 0$. Угол падения волны θ_0. Вектор электрического поля $\mathbf{E}$ перпендикулярен к плоскости падения (волна типа TE).

8.8. Решить предыдущую задачу для волны типа TM (вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения).

8.9. Плоская волна частоты ω падает по нормали на плоскую границу идеального проводника ($\sigma = \infty$). На расстоянии d от границы располагается параллельный ей проводящий слой малой толщины l ($l \ll \delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$) с проводимостью $\sigma \gg \omega$. Найти условия, при которых коэффициент отражения от данной системы $\Gamma = 0$.

8.10. Плоская волна с амплитудой E_0 и частотой ω падает из вакуума по нормали на границу проводника с проводимостью $\sigma \gg \omega$. Рассматривая отношение ω/σ как малый параметр задачи и удерживая в решении члены порядка $(\omega/\sigma)^{1/2}$, найти приближенно:

а) амплитуды электрического (E) и магнитного (H) полей на границе;

б) отличие коэффициента отражения Γ от его значения $\Gamma_0 = -1$ при $\sigma = \infty$;

в) электромагнитное давление на проводник P.

8.11. Плоская волна падает из вакуума на плоскую границу идеального проводника (проводимость $\sigma = \infty$). Вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения. При каком значении угла падения θ_0 электромагнитное давление на границу $P = 0$?

8.12. Плоская волна типа TM падает из вакуума под углом θ_0 к нормали на плоскую границу диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon > 0$.

1) При каком значении угла падения $\theta_0 = \theta_B$ (угол Брюстера) коэффициент отражения волны равен нулю?

2) При каком значении угла падения $\theta_0 = \theta_m$ амплитуда электрического поля в диэлектрике достигает максимума?

3) При каком условии поляризация электрического поля в диэлектрике приближается к круговой?

8.13. Найти функцию Грина одномерного уравнения Гельмгольца $u'' + k^2 u = 0$ и решение уравнения $u'' + k^2 u = f(z)$.

8.14. Найти поля, создаваемые в вакууме поверхностным током с плотностью $\mathbf{i} = \mathbf{x}_0 \imath_0 \, e^{\imath(\omega t - hy)}$, текущим по плоскости $z = 0$. Рассмотреть случаи:
а) $h = 0$; б) $h < \omega/c$; в) $h > \omega/c$.

8.15. Указать комбинацию электрического ($\mathbf{i}^{\mathrm{e}}$) и магнитного ($\mathbf{i}^{\mathrm{m}}$) поверхностных токов на плоскости $z = 0$, при которой излучение существует только в области $z > 0$.

8.16. Тонкий неоднородный диэлектрический слой характеризуется заданной функцией $\varepsilon(z)$, отличной от единицы только внутри интервала $0 < z < L$. Найти приближенно коэффициенты отражения (Г) и прохождения (T) волны, падающей на слой по нормали (в направлении оси z), при выполнении условий $k_0 L \ll 1$, $k_0 L \sqrt{|\varepsilon|_{\max}} \ll 1$, где $k_0 = (\omega/c)$, $|\varepsilon|_{\max}$ — максимальное значение модуля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ (величины Г и T определяются соответственно как отношения комплексных амплитуд отраженной и прошедшей волн к амплитуде падающей волны на границах слоя).

8.17. Тонкий слабоотражающий плоский слой с чисто действительной диэлектрической проницаемостью ε вносится в стоячую электромагнитную волну параллельно вектору ее электрического поля $\mathbf{E}_s = \mathbf{x}_0 E_0 \cos k_0 z \cos \omega t$ ($k_0 = \omega/c$). Плоскость симметрии слоя имеет координату $z = z_s$. Параметры k_0, ε и толщина слоя L удовлетворяют условиям $k_0 L \ll 1$, $k_0 L|\varepsilon| \ll 1$. Найти вектор средней по времени плотности потока энергии $\mathbf{S}$ в результирующем поле, устанавливающемся после внесения слоя, в случае, если стоячая волна создается:

а) двумя независимыми встречными волнами с фиксированными амплитудами и фазами;

б) в результате отражения волны от идеального зеркала.

8.18. Плоская волна частоты ω падает по нормали на металлический слой толщины d с проводимостью $\sigma \gg \omega$. Не отыскивая точного решения задачи, найти приближенно в случае слабого скин-эффекта (при $d \ll \delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$) следующие величины:

а) коэффициенты отражения (Г) и прохождения (T) волны;

б) относительные доли R, П и Q, которые составляют соответственно отраженная, прошедшая и поглощаемая мощности (на единицу площади слоя) от плотности потока энергии падающей волны.

Является ли условие слабого скинирования достаточным условием прозрачности слоя (П ≈ 1)? Как распределяются между собой доли поглощаемой, отраженной и прошедшей мощностей в случаях слабого и сильного отражения?

8.19. Плоская волна падает по нормали на плоский плазменный слой, находящийся в вакууме. Найти коэффициент отражения волны Г как функцию частоты волны ω, толщины слоя d и числа электронов на единицу его площади N. Выполнить предельный переход $d \to 0$. Указание: диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon = 1 - (4\pi e^2 n / m\omega^2)$, e и m — заряд и масса электрона, n — число электронов в единице объема (см. задачу 7.4).

8.20. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ неоднородного слоя в области $-\infty < z < 0$ плавно нарастает от значения $\varepsilon = 1$ при $z = -\infty$ до $\varepsilon = \varepsilon_0$ при $z = 0$. В точке $z = 0$ величина ε скачком обращается в единицу и остается равной единице при $0 < z < \infty$. Со стороны $z < 0$ на слой падает плоская волна, электрическое поле которой при $z \to -\infty$ имеет вид $E_x = E_0 \exp\left[i\omega(t - z/c)\right]$. Длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ мала по сравнению с характерным размером неоднородности слоя L (расстоянием, на котором заметно меняется ε в области $z < 0$). Найти поля во всем пространстве в приближении геометрической оптики ($\lambda/L \to 0$).

8.21. Как изменится решение предыдущей задачи (в том же приближении геометрической оптики), если:

а) при $z \geq 0$ $\varepsilon = \varepsilon_0$?

б) плоскость $z = 0$ является границей идеального проводника (при $z \geq 0$ $\sigma = \infty$)?

в) диэлектрическая проницаемость ε в области $z < 0$ является комплексной: $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, причем функция $\varepsilon''(z)$ положительна и убывает (с тем же характерным масштабом $L \gg \lambda$) от $\varepsilon'' = \varepsilon''_0$ при $z = 0$ до $\varepsilon'' = 0$ при $z \to -\infty$, а величина ε''_0 удовлетворяет условиям $\varepsilon''_0 \ll \varepsilon'$, $(\omega/c)\varepsilon''_0 L \gg \sqrt{\varepsilon'}$?

8.22. Найти в коротковолновом приближении коэффициент отражения Г плоской волны, распространяющейся в направлении оси z, от скачка n-й производной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$; функция $\varepsilon(z)$ в точке $z = 0$ имеет $n - 1$ непрерывных производных ($n \geq 1$), а производная $d^n\varepsilon/dz^n$ при переходе от $z < 0$ к $z > 0$ меняется скачком на величину $\Delta\varepsilon^{(n)}$. Характерный масштаб неоднородности L функции $\varepsilon(z)$ и всех ее производных в областях $z < 0$ и $z > 0$ велик по сравнению с длиной волны ($kL \gg 1$).

8.23. Решить предыдущую задачу для всюду гладкой функции $\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon_0 \exp\left(-z^2/L^2\right)$ при условиях $\varepsilon_0 kL \ll 1$, $kL \ll 1$.

8.24. Получить дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды гармонического электрического поля при отсутствии сторонних источников в двумерной задаче: $\mathbf{E} = \mathbf{z}_0 E_z(x, y)\, e^{\,i\omega t}$; диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$, магнитная проницаемость $\mu = 1$.

8.25. То же для комплексной амплитуды магнитного поля $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 H_z(x, y)\, e^{\,i\omega t}$ в той же среде.

8.26. Получить дифференциальные уравнения для модуля и фазы комплексной амплитуды электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{z}_0 |E| \exp(i\varphi) \exp(i\omega t)$ в неоднородной среде с $\mu = 1$, $\varepsilon(x, y) = \varepsilon' - i\varepsilon''$.

8.27. Найти распределение концентрации плазмы $n(z)$, при котором модуль амплитуды одномерного гармонического электрического поля $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{z}_0 |E| \exp(i\varphi) \exp(i\omega t)$ постоянен ($|E| = \mathrm{const}$).

Указание: использовать уравнения для $|E|$ и φ, полученные в предыдущей задаче, и выражение для комплексной диэлектрической проницаемости плазмы $\varepsilon = 1 - (n/n_c)(1 + i\delta)$, где n_c и δ — некоторые константы.

8.28. Плоская волна с амплитудой E_0 и частотой ω падает из вакуума в направлении $+z$ на неоднородный слой, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon(z) = 1 - (z/L)$ при $0 < z < \infty$; при $z < 0$ $\varepsilon(z) = 1$. Оценить по порядку величины максимальное значение амплитуды электрического поля E_m, достигающееся при $\omega L \gg c$ в окрестности «точки поворота» волны $z = L$.

9. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАДАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

9.1. Дипольный момент элементарного электрического вибратора (прямого проволочного отрезка, в котором течет переменный ток) колеблется по гармоническому закону: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \exp(i\omega t)$. Длина вибратора l много меньше длины волны ($kl \ll 1$; $k = \omega/c$); окружающая среда — вакуум.

1) Найти в сферических координатах r, θ, φ (с полярной осью z, направленной вдоль вибратора, и началом координат в его центре) векторный потенциал $\mathbf{A}$, электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля, создаваемые вибратором на расстояниях $r \gg l$. Как меняется характер зависимостей полей от координат при переходе из зоны квазистатики ($kr \ll 1$) в волновую зону ($kr \gg 1$)?

2) Найти диаграмму направленности излучения — зависимость средней по периоду $2\pi/\omega$ плотности S потока излучаемой энергии в волновой зоне от направления радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Изменяется ли при переходе из волновой зоны в зону квазистатики вид функции $S(r, \theta)$?

3) Найти среднюю по периоду полную интенсивность излучения (излучаемую мощность) P и сопротивление излучения вибратора $R_r^{(e)} = 2P/I_0^2$ в предположении равномерного распределения амплитуды тока I_0 по его длине l. Вычислить $R_r^{(e)}$ в омах при $l = 20$ см, $\omega = 3 \cdot 10^8$ c^{-1}.

9.2. Найти диаграмму направленности вращающегося электрического диполя с моментом $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0)p\exp(i\omega t)$.

9.3. Точечный заряд q вращается в пустоте с постоянной скоростью $v \ll c$ по окружности радиуса a.

1) Найти вектор дипольного момента $\mathbf{p}(t)$ и тензор квадрупольного момента $D_{ik}(t)$ данного заряда (см. решение задачи 1.31), считая начало координат помещенным в центр окружности.

2) Найти и сравнить между собой средние по периоду мощности излучения заряда на первой (P_ω) и второй ($P_{2\omega}$) гармониках частоты вращения $\omega = v/a$.

Указание: использовать выражения для мгновенных значений мощностей дипольного ($P_d(t) = (2/3c^3)\ddot{\mathbf{p}}^2(t')$) и квадрупольного ($P_q(t) = (1/180c^5)\dddot{D}_{ik}^2(t')$) излучения ($t'$ обозначает «запаздывающее» время).

9.4. Изобразить (качественно) картину силовых линий электрического поля $\mathbf{E}$ в зоне квазистатики и диаграмму направленности излучения в полярных координатах для линейных токов $I(z)\exp(i\omega t)$, заданных на оси z следующим образом: а) $I(z) = C_1\delta(z)$; б) $I(z) = C_2\delta'(z)$; в) $I(z) = C_3\delta''(z)$ ($\delta(z)$ — дельта-функция Дирака; штрихами обозначены производные по z; C_1, C_2, C_3 — константы).

9.5. В круглой рамке радиуса a циркулирует переменный ток $I = I_0\exp(i\omega t)$. Радиус рамки a мал по сравнению с длиной волны ($a\omega/c \ll 1$); окружающая среда — вакуум.

1) Используя принцип перестановочной двойственности и решение задачи (9.1(1)), найти отличные от нуля компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на расстояниях от рамки $r \gg a$.

2) Найти сопротивление излучения рамки $R_r^{(m)}$ и величину его отношения α к сопротивлению излучения $R_r^{(e)}$ прямого электрического вибратора (см. задачу 9.1(3)) той же длины $l = 2\pi a$.

3) Как изменятся поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и сопротивление излучения $R_r^{(m)}$ рамки с переменным током, если заполнить все пространство однородной средой с проницаемостями ε и μ?

9.6. Найти диаграммы направленности следующих элементарных излучателей, находящихся на малом по сравнению с длиной волны расстоянии от бесконечной идеально проводящей плоскости:

а) электрический диполь, перпендикулярный плоскости;

б) электрический диполь, параллельный плоскости;

в) магнитный диполь, перпендикулярный плоскости;

г) магнитный диполь, параллельный плоскости.

9.7. Излучение источника распределено равномерно внутри сектора углов $-\alpha < \varphi < \alpha$, $90° - \beta < \theta < 90° + \beta$ (φ – азимутальный, θ — полярный углы в сферической системе координат). Вне этого сектора излучение отсутствует. Найти амплитуду электрического поля в дальней зоне на расстоянии R от источника, если излучаемая им мощность равна P. Найти численное значение амплитуды в единицах В/см при $\alpha = \beta = 5°$, $R = 100$ км, $P = 100$ кВт.

9.8. Плотность переменного электрического тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}$ отлична от нуля в ограниченной области пространства. Показать, что в точке P, удаленной на достаточно большое расстояние R от лежащего внутри этой области начала координат O, векторный потенциал $\mathbf{A}$ и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ определяются выражениями

$$\mathbf{A} = (\mu/cr)\, e^{i(\omega t - kr)}\mathbf{N};\ \mathbf{H} = (\mu)^{-1}[-i\mathbf{k}\mathbf{A}];\ \mathbf{E} = \sqrt{\mu/\varepsilon}[\mathbf{H}\mathbf{n}];$$

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}\, dv';\ \ \mathbf{k} = k\mathbf{n};\ \ k = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega/c;$$

$\mathbf{n}$– единичный вектор, направленный из точки O в точку P; интегрирование проводится по всей области, где $\mathbf{j} \neq 0$.

9.9. Вдоль оси z течет переменный линейный ток $I\, e^{i\omega t}$, амплитуда которого одинакова ($I = \text{const} \neq 0$) во всех точках отрезка $|z| \leq L$ и равна нулю вне этого отрезка.

1) Начиная с каких расстояний r от начала координат можно считать сформированной диаграмму направленности данного излучателя?

2) Получить выражения для векторного потенциала **A** и полей **E**, **H** в дальней зоне.

3) Исследовать и построить в полярных координатах диаграмму направленности $|H|^2(\theta)$ для случаев $kL \ll 1$ и $kL \gg 1$ (θ — сферический полярный угол).

9.10. Найти диаграмму направленности линейного излучателя, описанного в предыдущей задаче, для амплитуды тока $I(z) = I_0\, e^{-ihz}$ при $|z| \leq L$, $I = 0$ при $|z| > L$. Рассмотреть случаи: а) $kL \gg 1$, $(k - h)L \gg 1$; б) $kL \gg 1$, $h \gg k$; в) $kL \ll 1$, $hL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

9.11. То же, что и в 9.10, для токов:

а) $I(z) = I_0 \exp(-z^2/L^2)$ $(-\infty < z < \infty)$;

б) $I(z) = I_0 \exp(-z/L)$ при $z > 0$, $I = 0$ при $z < 0$.

9.12. Исследовать в коротковолновом приближении поле излучения текущего вдоль оси z переменного линейного тока $I(z)\exp(i\omega t)$, амплитуда которого $I(z)$ в нескольких точках z_m имеет разрыв производной n-го порядка. В промежутках между этими точками характерный масштаб неоднородности L функции $I(z)$ и всех ее производных много больше длины волны ($kL \gg 1$). При $z \to \pm\infty$ $I(z) \to 0$. Показать, что для направлений, не перпендикулярных оси z, поле излучения может быть представлено как суперпозиция сферических «краевых» волн, испускаемых из точек разрыва z_m.

9.13. Тонкий стержень длины $2L$, ориентированный вдоль оси x, имеет переменную поперечную электрическую поляризацию: дипольный момент единицы длины стержня $\mathbf{p} = \mathbf{z}_0 p_0 \exp(i\omega t)$. Найти поле излучения в дальней зоне. Изобразить диаграмму направленности излучения в плоскостях xz, yz, xy.

9.14. Найти векторный потенциал **A** и поля **E**, **H** в дальней зоне излучателя, представляющего собой прямоугольник $|x| < a$, $|z| < b$ в плоскости $y = 0$ с равномерно распределенным по нему поверхностным током $\mathbf{i} = \mathbf{z}_0 i_0 \exp(i\omega t)$. Изобразите диаграмму направленности излучения в плоскостях xy и yz при больших значениях параметров ka и kb. Как зависит угловая ширина основного лепестка диаграммы направленности в этих плоскостях от размеров излучателя и длины волны? Интерпретируйте многолепестковый характер диаграммы направленности при больших ka и kb как результат интерференции «краевых волн», испускаемых границами (линиями резкого обрыва) заданного распределения плотности тока.

9.15. По поверхности бесконечного цилиндра радиуса a течет поверхностный ток с плотностью $\mathbf{i} = \mathbf{z}_0 i_0 \, e^{\,i(n\varphi+\omega t)}$ (i_0 = const; n =0, 1, 2, 3, ...; $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор, параллельный оси цилиндра z; φ — азимутальный угол). Найти поля **E**, **H** во всем пространстве, выражая их через цилиндрические функции.

9.16. То же для поверхностного тока, текущего по поверхности цилиндра в азимутальном направлении: $\mathbf{i} = \boldsymbol{\varphi}_0 i_0 \, e^{\,i(n\varphi+\omega t)}$.

9.17. Показать, что потенциальный переменный ток $\mathbf{j} = \nabla\psi \, e^{\,i\omega t}$, отличный от нуля в ограниченной области пространства, не создает поля излучения.

9.18. Переменный ток $I_0 \, e^{\,i\omega t}$ течет по тонкому проводу, плотно и равномерно намотанному на поверхность круглого тора. Обмотка является однослойной и содержит N витков. Большой (a) и малый (b) радиусы тора и длина волны λ удовлетворяют условиям $b \ll a \ll \lambda$. Найти:

а) поля **H** и **E** внутри тора;

б) условие, при котором поле излучения данной системы имеет круговую поляризацию;

в) сопротивление излучения R_r.

9.19. Переменный электрический ток частоты ω течет по линейному контуру, представляющему собой отрезок спирали, намотанной в один слой с постоянным шагом h на цилиндр радиуса a. Расстояние между концами спирали (по прямой линии) L. Параметры h, a, L и длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ удовлетворяют условиям $h \ll a \ll L$, $L \ll \lambda$. Ток одинаков во всех участках спирали и скачком обрывается на ее концах. При каком соотношении между параметрами системы поле в волновой зоне имеет круговую поляризацию? Каково при этом сопротивление излучения R_r?

9.20. Колебательный контур образован плоским конденсатором и круговым проволочным витком, соединяющим его пластины. Расстояние между пластинами d, радиус витка a. Длина волны λ, отвечающая частоте собственных колебаний контура ω_0, много больше всех его характерных размеров.

1) При каком условии излучение данной системы близко к электро-дипольному?

2) Найти среднюю по периоду колебаний мощность этого излучения P и определяемую им радиадиационную добротность колебаний в контуре Q_r, если известны амплитуда колебаний заряда на пластинах конденсатора q и его емкость C.

3) Объясните, почему, несмотря на наличие переменного электрического дипольного момента, создаваемого зарядами, скапливающимися на противоположных сторонах емкостного зазора, не излучает закрытый квазистационарный колебательный контур, описанный в задаче 6.17 (рис. 6)?

9.21. На площадке S произвольной формы, лежащей в плоскости xy, плотность поверхностного тока $\mathbf{i}_s$ задана как «единичная» функция времени: $\mathbf{i}_s = \mathbf{x}_0 i_0 \Theta(t)$, где $\Theta = 0$ при $t < 0$, $\Theta = 1$ при $t > 0$. Вне площадки $\mathbf{i}_s = 0$. Доказать, что:

а) во внутренней области бесконечного цилиндра, поперечным сечением которого является данная площадка S, максимальная величина поперечной компоненты магнитного поля H_y, достигающаяся на переднем фронте излучаемого током электромагнитного импульса, не зависит от расстояния z до площадки и равна $H_{y\,\max} = 2\pi i_0/c$;

б) в случае, если площадка представляет собой круг радиуса a, то в точках, лежащих на его оси и удаленных от него на достаточно большое расстояние $z \gg a$, излученный импульс имеет прямоугольную форму; величина поля в импульсе $H_y = H_{y\,\max} = 2\pi i_0/c$, его длительность $\tau(z) = a^2/(2cz)$.

10. ПОЛЯ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ И ПОЛЫХ РЕЗОНАТОРАХ

10.1. В идеальном прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b ($a > b$) распространяется волна типа TE_{10} (низшая мода) с частотой ω и максимальной амплитудой электрического поля $E_{\max}$. Найти:

а) критическую частоту (ω_{cr}), длину волны в волноводе (λ_g), фазовую (v) и групповую (v_g) скорости; вычислить эти величины при $a = 2$ см, $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ 1/с;

б) максимальные амплитуды поперечной ($H_{\perp\max}$) и продольной ($H_{z\max}$) компонент магнитного поля;

10.2. С двух концов прямоугольного волновода запущены навстречу друг другу два радиоимпульса с высокочастотным заполнением: один — на волне TE_{10}, второй — на волне TE_{m0}. Центры импульсов встречаются точно посередине волновода. Каково соотношение между длинами волн обоих импульсов в свободном пространстве (λ_1/λ_2) и в волноводе ($\lambda_{g1}/\lambda_{g2}$)?

10.3. Длина волны в волноводе λ_g в два раза превышает критическую длину волны для данной моды λ_{cr}. Во сколько раз частота волны превышает критическую?

10.4. В прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения $a = 10$ см, $b = 7$ см на частоте f возбуждены две волны, бегущие в одном направлении. Нарисовать качественно графики зависимости электрического поля от продольной координаты z в различные моменты времени t на осевой линии волновода (пересечении диагональных плоскостей) для волн типов:

а) TE_{10} и TE_{30} при $f = 1700$ Мгц;

б) TE_{10} и TE_{20} при $f = 1700$ Мгц;

в) TE_{10} и TE_{30} с одинаковыми амплитудами поля на оси при $f = 10^5$ Мгц.

10.5. За какое время радиоимпульс с ВЧ заполнением на частоте ω пройдет отрезок линии передачи длины L, если:

а) это импульс первой распространяющейся волны в незаполненном прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b;

б) это импульс главной волны (TEM) в незаполненной коаксиальной линии.

10.6. Решить предыдущую задачу для линий передачи, заполненных плазмой (средой с проницаемостями $\mu = 1$, $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$).

10.7. Расстояние между ближайшими узлами стоячей волны TE_{11} в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a, b равно L. Найти частоту поля ω.

10.8. На входе в незаполненный прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками волна типа TE_{10} промодулирована по амплитуде на частоте Ω:

$$E = E_0(1 + m\cos\Omega t)\exp(i\omega t)\,.$$

Ширина волновода a удовлетворяет условиям

$$\pi c/\omega > a > \pi c/(\omega + \Omega).$$

Как зависит частотный спектр сигнала от продольной координаты z?

10.9. На входе в незаполненный прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками частотный спектр сигнала на волне типа TE_{10} представляет собой две линии: одна — высотой e^2 на частоте ω_1, другая — высотой e на частоте $\omega_2 > \omega_1$. На выходе волновода спектр этого сигнала представляет собой две линии одинаковой высоты, равной единице, на тех же частотах ω_1, ω_2. Найти длину (L) и ширину (a) волновода. Как преобразовал бы данный отрезок волновода спектральную линию на частоте $\omega_3 = 2\omega_2$?

10.10. При каком условии в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b могут существовать TE-волны с циркулярной поляризацией электрического поля на осевой линии? Изобразить картину силовых линий электрического поля для самой низкой моды такой волны.

10.11. Чему равен сдвиг фаз φ между поперечными компонентами полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ волноводной моды при: а) $\omega > \omega_{\mathrm{cr}}$; б) $\omega < \omega_{\mathrm{cr}}$?

Можно ли передать энергию через конечный отрезок запредельного (с $\omega_{\mathrm{cr}} > \omega$) волновода?

10.12. Для измерения распределений поля в волноводе в его стенке прорезается узкая щель, через которую внутрь волновода вводится измерительный зонд. Исходя из требования минимального искажения щелью структуры измеряемого поля, укажите:

а) каким образом должна быть ориентирована щель по отношению к вектору напряженности магнитного поля на стенке волновода;

б) в каком месте прямоугольного волновода следует прорезать продольную щель для измерения структуры стоячей волн типа TE_{10}.

10.13. Бесконечный круглый волновод разделен бесконечно тонким и бесконечно длинным продольным разрезом на две одинаковые половины.

1) Как влияет такой разрез на распространение волны типа TM_{01}?

2) С какой силой взаимодействуют между собой обе половины при распространении волны TM_{01}?

10.14. Получить дисперсионное уравнение для волн TE и TM-типов в волноводе, поперечное сечение которого представляет собой сектор круга радиуса a с углом α.

10.15. Найти критическую длину волну λ_{cr} для низшей моды Н-образного волновода, поперечное сечение которого представляет собой фигуру, изображенную на рис. 6 к задаче 6.17. Может ли величина λ_{cr} быть много больше размеров волновода b и h?

10.16. Рассчитать постоянную затухания h'' волны низшего типа (TE_{10}) в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a, b ($a > b$), если одна из его широких стенок имеет конечную проводимость σ, а остальные стенки идеально проводящие. Толщина неидеальной стенки много больше толщины скин-слоя.

10.17. Решить предыдущую задачу для случая, когда все стенки волновода имеют бесконечную проводимость, но внутрь него вставлен бесконечный слабо проводящий круглый стержень с проницаемостями $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ и проводимостью $\sigma \ll \omega$. Радиус стержня $r \ll a$; ось стержня параллельна оси волновода и находится на расстояниях a_1, b_1 соответственно от его узкой и широкой стенок.

10.18. Решить задачу, аналогичную 10.16:

а) для волны типа TE_{01} в круглом волноводе с неидеальной стенкой;

б) для главной волны TEM в неидеальной коаксиальной линии (проводимость $\sigma \neq \infty$); радиусы внутреннего и наружного проводников линии a и b.

10.19. Найти максимальные амплитуды электрического и магнитного полей E_m и H_m в идеальном прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b ($a > b$), если в нем распространяется волна низшего типа (TE_{10}) частоты ω, несущая вдоль волновода мощность P. Вычислить значения E_m и H_m при $a = 10$ см, $b = 5$ см, $\omega = 5 \cdot 10^{10}$ 1/с, $P = 1$ кВт.

10.20. Найти коэффициент отражения волны Г от скачка диэлектрической проницаемости в линии передачи: при $z < 0$ $\varepsilon = \varepsilon_1$, при $z > 0$ $\varepsilon = \varepsilon_2$ (z — продольная координата). Волна имеет поперечное волновое число κ и частоту ω. Рассмотреть волны: а) типа TE; б) типа TM.

10.21. Найти критическую частоту для низшего типа волны TE в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b ($a > b$), частично заполненном диэлектриком с проницаемостью ε. Граница диэлектрика параллельна узким стенкам волновода и отстоит от одной из них на расстояние $d < a$.

10.22. Рассчитать эквивалентные погонные параметры (коэффициент самоиндукции L и емкость C) и волновое сопротивление Z_W (определяемое как отношение напряжения к току в бегущей волне) для главных (TEM) волн в следующих линиях передачи без диэлектрического заполнения:

а) коаксиальная линия с радиусами проводников a и b;

б) полосковая линия, образованная двумя параллельными металлическими лентами ширины a с расстоянием между ними $d \ll a$.

10.23. Найти коэффициент отражения волны Γ от конца двупроводной линии и входной импеданс $Z(L)$ на расстоянии L от конца, если ее волновое сопротивление равно Z_W, расстояние между проводами много меньше длины волны, а к концу линии подключена следующая нагрузка:

а) емкость C;

б) индуктивность L;

в) сопротивление $R = Z_W$;

г) другая линия передачи бесконечной длины с волновым сопротивлением Z_{W1};

д) сопротивление $R = 0$ (линия закорочена);

е) сопротивление $R = \infty$ (линия разомкнута).

10.24. Найти коэффициент отражения волны от нагрузки, включенной в бесконечную двупроводную линию передачи с волновым сопротивлением Z_W. Нагрузка имеет импеданс Z_L и включена в линию:

а) последовательно (в разрыв одного из проводов);

б) параллельно (между проводами).

10.25. На основании решения предыдущей задачи оцените по порядку величины коэффициент отражения Γ главной

(TEM) волны в коаксиальном кабеле с поперечными размерами, много меньшими длины волны λ,

а) от металлической шайбы, надетой на внутренний проводник кабеля и перекрывающей наполовину просвет между его центральным и наружным проводниками;

б) от места крутого изгиба (излома) кабеля на угол больше или порядка 90°.

Толщина шайбы d (ее размер в направлении оси кабеля), радиус a центрального проводника и внутренний радиус b внешнего проводника удовлетворяют условиям: $d \sim b$, $\ln(b/a) \sim 1$.

10.26. Внутрь бесконечного прямоугольного волновода высоты l вставлена полубесконечная тонкая металлическая перегородка, разделяющая его на два одинаковых волновода высоты $l/2$. По одному из малых волноводов распространяется в направлении к краю разделяющей перегородки волна типа TE_{10} с электрическим полем, перпендикулярным перегородке (рис. 7). Амплитуда этой волны в центре поперечного сечения волновода равна E_0; частота волны ниже критической для всех остальных типов волн большого волновода. Найти действительные амплитуды отраженной волны ($|E_r|$) и волн, прошедших в другой малый ($|E_1|$) и в большой ($|E_2|$) волноводы.

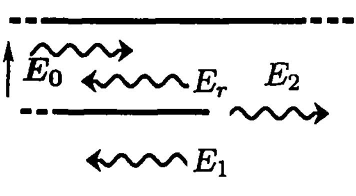


Рис. 7

10.27. Найти приближенно амплитуды и фазы отраженной и обеих прошедших волн в предыдущей задаче при произвольном соотношении между высотами верхнего (l_0) и нижнего (l_1) малых волноводов (по-прежнему равными в сумме высоте большого волновода l) для случая, когда длина волны $\lambda \gg l$, а размер широкой стенки волновода (в направлении, перепендикулярном к плоскости рис. 7) устремлен к бесконечности, так что волна переходит в чисто поперечную (TEM).

10.28. Замедляющая периодическая система типа «гребенка» представляет собой пластинчатую структуру в виде ряда тонких параллельных металлических полос (пластин) одинаковой ширины L, укрепленных одним краем на плоском металлическом основании перпендикулярно ему. Расстояния между соседними пластинами («период гребенки») $d \ll L$. Направляя оси декартовой системы координат x, y, z соответственно по внешней нормали к основанию, параллельно краям пластин и перпендикулярно плоскости пластин и рассматривая решение уравнений Максвелла в виде двумерной поверхностной TM волны с компонентами полей H_y, E_z, E_x $\sim$ $\exp\left(i(\omega t - hz) - \kappa x\right)$, найти в предположении $hd \ll 1$:

а) поверхностный импеданс $\zeta_s = E_z/H_y$ в плоскости $x = 0$, касающейся свободных краев пластин (на расстоянии L от основания);

б) условие существования медленной ($h > \omega/c$) волны и дисперсионное уравнение (связь h и ω).

10.29. Получить приближенное дисперсионное уравнение для медленной двумерной волны типа TE с симметричным по поперечной координате распределением поля $\mathbf{E}$, направляемой тонким плоским слоем среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > 1$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$; окружающая среда – вакуум. Толщина слоя d предполагается малой по сравнению с величиной $1/(k\sqrt{\varepsilon - 1})$; где $k = \omega/c$ - волновое число в вакууме.

10.30. Концы двух отрезков двупроводных линий длиной L_1, L_2 с волновыми сопротивлениями Z_{W1}, Z_{W2} нагружены на реактивные импедансы Z_{L1}, Z_{L2}. Свободные концы отрезков соединены между собой. Найти уравнение, определяющее собственные частоты полученного резонатора.

10.31. Указать самый низкий тип колебаний и найти его собственную частоту ω для цилиндрического резонатора высоты h и радиуса a в двух случаях: а) $h \gg a$; б) $h \ll a$.

10.32. Резонатор представляет собой плавно изогнутый и замкнутый сам на себя отрезок линии передачи длины L с известным спектром поперечных волновых чисел κ_n. Радиус кривизны линии много больше ее поперечных размеров. Найти спектр собственных частот такого резонатора в той области, где длина L содержит большое число пространственных периодов поля.

10.33. В пустом прямоугольном резонаторе с размерами ребер a, b, d ($a < b < d$) возбужден низший тип колебаний с максимальной амплитудой электрического поля E_0. Найти собственную частоту колебаний ω и полную запасенную энергию W. Рассчитать их значения при $a = 2$ см, $b = 3$ см, $d = 4$ см, $E_0 = 10$ В/см. Найти ω и W в случае, когда резонатор заполнен плазмой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ($\omega_p = \text{const}$).

10.34. Опираясь на решение задачи 7.25, найти низшую собственную частоту ω для сферического полого резонатора радиуса a.

10.35. Найти декремент затухания γ и добротность Q низшего типа колебаний в прямоугольном резонаторе с размерами ребер a, b, L ($a < b < L$). Одна из стенок резонатора имеет конечную проводимость σ (толщина стенки много больше толщины скин-слоя), остальные стенки идеально проводящие. Рассмотреть случаи, когда проводящая стенка имеет размеры: а) a и b; б) b и L.

10.36. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для резонатора с идеально проводящими стенками, заполненного средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_r - i\varepsilon_i$ ($\varepsilon_i > 0$).

10.37. Резонатор представляет собой отрезок идеально проводящей коаксиальной линии длины L, закрытый с обоих концов неидеальными перегородками с заданным коэффициентом отражения (по амплитуде поля) Γ. Найти декремент затухания γ для поперечных колебаний типа TEM, если $0 < 1 - |\Gamma|^2 \ll 1$.

10.38. Внутри бесконечного прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения a и b ($a > b$) задано следующее распределение плотности тока:

$$\mathbf{j} = \mathbf{y}_0 j_0 \sin(\pi x/a) \exp(i(\omega t - pz))$$

при $|z| < L$, $\mathbf{j} = 0$ при $|z| > L$; здесь $\mathbf{y}_0$ — единичный вектор, перпендикулярный широкой стенке волновода, x — расстояние до одной из узких стенок, z — продольная координата; $j_0 = \text{const}$; частота ω и число p связаны соотношением $p^2 = (\omega/c)^2 - (\pi/a)^2$. Найти отношение потоков энергии P_+/P_-, излучаемых данными токами в направлениях $+z$ и $-z$.

10.39. Внутрь бесконечного прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения a и $b = a/2$ помещен точечный переменный электрический диполь с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{y}_0 p_0 \exp(i\omega t)$, перпендикулярным широкой стенке волновода. Расстояния от диполя до узкой и широкой стенок волновода равны соответственно l и d. Найти поле внутри волновода на больших расстояниях от диполя $z \gg a$ и излучаемую мощность P для следующих диапазонов частот:

а) $\pi/a < \omega/c < 2\pi/a$;

б) $2\pi/a < \omega/c < \sqrt{5}\pi/a$;

в) $\omega/c < \pi/a$.

10.40. Найти решение предыдущей задачи, если диполь ориентирован вдоль оси волновода. Рассмотреть диапазоны частот:

а) $\sqrt{5}\pi/a < \omega/c < \sqrt{8}\pi/a$;

б) $\omega/c < \sqrt{5}\pi/a$.

10.41. Найти сопротивление излучения R_r дипольного штыря длины L, введенного внутрь прямоугольного волновода перпендикулярно его широкой стенке. Размеры поперечного сечения волновода a и b ($a > b$); расстояние от штыря до узкой стенки L_1. Ток распределен по длине штыря равномерно; его частота ω превышает критическую лишь для низшей волноводной моды TE_{10}.

10.42. Решить предыдущую задачу для случая, когда на расстоянии L_0 от штыря волновод закрыт с одной стороны идеально проводящей перегородкой. При каком расстоянии до перегородки L диполь не излучает в волновод (сопротивление излучения $R_r = 0$)?

10.43. Найти сопротивление излучения R_r маленькой круглой петли в волну типа TE_{10} бесконечного прямоугольного волновода с размерами стенок a и b ($a > b$). Петля расположена вблизи узкой стенки; нормаль к ее плоскости образует с осью волновода угол φ; радиус петли $r \ll b$.

10.44. Как с помощью двух дипольных штырей, запитываемых синфазными токами, возбудить в круглом волноводе волну типа TE_{11} с циркулярной поляризацией на оси?

10.45. Прямоугольный волновод возбуждается внешним источником через узкую щель, прорезанную в его узкой стенке. Как зависит мощность, излучаемая в волну типа TE_{10}, от угла наклона щели α к продольному ребру волновода (длина щели и напряжение на ней фиксированы)?

10.46. Волна типа TE_{11} в круглом волноводе возбуждается двумя синфазными продольными щелями. Какова поляризация волны? Как зависит уносимый ею поток энергии от угла α между меридиональными (проходящими через ось волновода) плоскостями, в которых лежат щели?

10.47. В центре полого резонатора, представляющего собой прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b, L ($a < b < L$), расположен точечный переменный диполь с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \exp(i\omega t)$, параллельным наименьшему ребру. Найти мощность, отдаваемую диполем, на резонансе низшей моды, если ее добротность равна Q.

10.48. Резонатор, описанный в предыдущей задаче, возбуждается изнутри заданным объемным распределением плотности переменного тока $\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 j(y, z) \exp(i\omega t)$. Оси x, y, z направлены соответственно вдоль ребер a, b, L. Построить (качественно) графики зависимости запасенной в резонаторе электромагнитной энергии W от частоты ω для следующих распределений тока $j(y, z)$:

а) $j = j_0 \sin(\pi y/b) \sin(\pi z/L)$; $(j_0 = \text{const})$

б) $j = j_0 \sin(\pi y/b)[\sin(\pi z/L) + \sin(2\pi z/L)]$.

10.49. Найти сдвиг собственной частоты $\Delta\omega_n$ колебания типа n в полом резонаторе при введении в него маленького идеально проводящего шарика радиуса a, если заданы поля этого типа колебания для невозмущенного резонатора $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$.

11. ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

11.1. Тело, помещенное в поле плоской электромагнитной волны, является источником расходящейся от него сферической *рассеянной* волны. Интенсивность рассеяния в различных направлениях характеризуется дифференциальным сечением рассеяния $\sigma_d = S_0^{-1} dP/d\Omega$, определяемым как отношение потока энергии, рассеиваемого в единицу телесного угла в данном направлении, к средней плотности потока энергии S_0 в падающей волне (dP – поток энергии в элементе телесного угла $d\Omega$).

1) Показать, что на достаточно большом расстоянии r от рассеивающего объекта средние по времени плотности потоков энергии в рассеянной (S_s) и падающей (S_0) волнах связаны соотношением $S_s = \sigma_d S_0/r^2$. Как при этом связаны между собой амплитуды электрического поля в рассеянной (E_s) и падающей (E_0) волнах?

2) Считая известными характерный размер тела L и волновое число рассеиваемого излучения $k = 2\pi/\lambda$, укажите, на каких расстояниях от тела r справедливо приведенное в п. (1) выражение для S_s?

3) Считая известной функцию $\sigma_d(\theta, \varphi)$, характеризующую распределение интенсивности рассеяния по направлениям в сферических координатах θ, φ, найти полное сечение рассеяния телом σ_t, определяемое как отношение полного

потока энергии рассеянной волны через замкнутую поверхность, окружающую тело, к S_0.

11.2. Идеально проводящая сфера радиуса a облучается плоской волной с вектором средней плотности потока энергии $\mathbf{S}_0$. Найти в приближении геометрической оптики:

а) дифференциальное сечение рассеяния сферы σ_d (см. задачу 11.1) для любого направления, не совпадающего с направлением $\mathbf{S}_0$;

б) поток энергии рассеянного излучения P_f (создаваемый токами, текущими по поверхности сферы) внутри бесконечно малого телесного угла в направлении $\mathbf{S}_0$;

в) полное сечение рассеяния сферы σ_t.

11.3. Найти дифференциальное сечение обратного рассеяния σ_b (определяемое как величина σ_d в задаче 11.1 для направления рассеяния, противоположного направлению распространения падающей волны) идеальным проводящим телом в приближении геометрической оптики, если известны главные радиусы кривизны поверхности тела R_1, R_2 в «блестящей» точке (точке, для которой отраженный луч совпадает с падающим).

11.4. Как изменится решение предыдущей задачи, если на границе тела задан поверхностный импеданс $\zeta_s = E_\tau/H_\tau$? Рассмотреть случаи: а) чисто реактивного ($\mathrm{Re}\,\zeta_s = 0$) и б) чисто активного ($\mathrm{Im}\,\zeta_s = 0$) импеданса.

11.5. Бесконечный идеально проводящий цилиндр радиуса a облучается плоской волной амплитуды E_0 с волновым вектором $\mathbf{k}_0$, перпендикулярным оси цилиндра. Найти в приближении геометрической оптики ($ka \to \infty$) поток энергии dP_φ, рассеиваемый единицей длины цилиндра в элемент полярного угла $d\varphi$ в направлении φ (угол φ отсчитывается вокруг оси цилиндра от направления $\mathbf{k}_0$).

11.6. Плоская волна амплитуды E_0 падает на металлический шар радиуса $a \gg \lambda$. Найти амплитуду поля E_r волны, отраженной в обратном направлении, как функцию расстояния r от центра шара ($a < r < \infty$). Вычислить E_r при $\lambda = 1$ см, $a = 1$ м, $r = 1$ км, $E_0 = 10$ В/см.

11.7. Найти в приближении геометрической оптики дифференциальное сечение обратного рассеяния σ_b бесконечного параболоида вращения, облучаемого по оси симметрии z с выпуклой стороны. Поверхность параболоида задана уравнением $z = C(x^2 + y^2)$. Параболоид находится в среде с проницаемостями ε_1, μ_1 и изготовлен:

а) из идеального проводника;

б) из материала с проницаемостями ε_2, μ_2.

11.8. Найти в приближении геометрической оптики дифференциальное сечение обратного рассеяния σ_b радиально неоднородного плазменного шара радиуса R в вакууме. Плотность плазмы n, определяющая ее диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 1 - (n/n_c)(1 - i\nu/\omega)$, является линейной функцией радиуса: $n/n_c = (R - r)/L$ $(r < R)$. Частота столкновений электронов $\nu \ll \omega$ и от радиуса не зависит. Размер неоднородности плазмы L велик по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ и мал по сравнению с радиусом шара R $(\lambda \ll L \ll R)$. Искривлением лучей в тонком прозрачном слое $R > r > R - L$ пренебречь.

11.9. Найти полное сечение поглощения σ_a плазменного шара, описанного в предыдущей задаче, при различных соотношениях между размером неоднородности L и эффективной длиной поглощения волны c/ν:

а) $L \gg c/\nu$;

б) $L \ll c/\nu$.

11.10. В задаче 11.5 найти при $ka \gg 1$ распределение поверхностной плотности тока $\mathbf{i}(\varphi)$ на цилиндре, если его образующая параллельна:

а) магнитному полю;

б) электрическому полю.

11.11. Найти дифференциальное сечение рассеяния σ_d (см. задачу 11.1) прямоугольной металлической пластинки с размерами a, $b \gg \lambda$ в кирхгофовском приближении (здесь приближение «зеркальных токов») в случае облучения по нормали. Выразить σ_d через углы φ и ψ, образуемые направлением рассеяния с осями x и y, направленными по сторонам пластинки, при $\varphi, \psi \approx \pi/2$

11.12. Двугранный уголковый отражатель облучается плоской волной амплитуды E_0 с волновым вектором $\mathbf{k}$, перпендикулярным к его ребру и наклоненным под углом φ к одной из его граней. Грани отражателя представляют собой одинаковые взаимно перпендикулярные металлические прямоугольные пластины с размерами a, b (рис. 8).

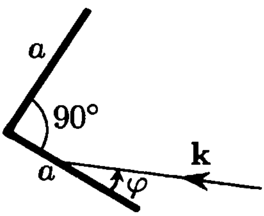


Рис. 8

1) Найти в приближении геометрической оптики величины и направления отраженных потоков энергии при $0 < \varphi < \pi/4$.

2) Найти в кирхгофовском приближении дифференциальное сечение обратного рассеяния σ_b при $0 < \varphi < \pi/4$. Построить (качественно) график зависимости σ_b от угла в области $0 \le \varphi \le 2\pi$).

11.13. Найти в кирхгофовском приближении дифференциальное сечение обратного рассеяния σ_b системы, образованной неотражающей линзой (диаметра d с фокусным расстоянием f), облучаемой вдоль оптической оси, и одним из следующих помещенных позади нее объектов:

а) круглая металлическая пластинка, помещенная в фокальной плоскости линзы перпендикулярно ее оси; диаметр пластинки d_1 удовлетворяет условиям $d \gg d_1 \gg \lambda f/d$;

б) металлический шар, центр которого совмещен с фокусом линзы; радиус шара $a \gg \lambda f/d$.

11.14. Круглая металлическая пластинка радиуса a облучается по нормали плоской волной амплитуды E_0; длина волны $\lambda \ll a$. Найти амплитуду поля отраженной волны E_r в точках, лежащих на оси симметрии пластинки и удаленных от нее на расстояние z, для случаев: а) $z \ll a^2/\lambda$; б) $z \gg a^2/\lambda$. Вычислить E_r при $\lambda = 1$ см, $a = 1$ м, $z = 10$ км, $E_0 = 10$ В/см.

11.15. Плоская волна падает на плоскую металлическую пластинку, имеющую форму равнобедренного прямоугольного треугольника с размером катета a. Волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}$ наклонен к плоскости треугольника под углом β. Полагая выполненным условие $ka\cos\beta \gg 1$, найти дифференциальное сечение обратного рассеяния пластинки σ_b в кирхгофовском приближении в случаях, когда проекция волнового вектора $\mathbf{k}$ на плоскость треугольника: а) перпендикулярна одному из катетов; б) параллельна гипотенузе. В каком случае величина искомого сечения больше? Чем объясняется сильное различие величин сечения в указанных случаях?

11.16. Показать, что при рассеянии плоской волны любым непоглощающим энергию объектом мнимая часть комплексной амплитуды рассеянного (созданного наведенными токами) электрического поля $\mathbf{E}_s$ в точках, удаленных от объекта на достаточно большое расстояние r в направлении волнового вектора падающей волны, связана с полным сечением рассеяния объекта σ_t и действительной амплитудой поля падающей волны $\mathbf{E}_0$ соотношением $\operatorname{Im}(\mathbf{E}_s\,\mathbf{E}_0) = -k\sigma_t E_0^2/(16\pi\, r)$ («оптическая теорема»).

11.17. Бесконечный идеально проводящий цилиндр радиуса a облучается плоской волной амплитуды E_0; длина волны $\lambda \gg a$; ось цилиндра параллельна магнитному полю волны.

1) Найти погонную плотность электрического дипольного момента $p^{(e)}$, наведенного в цилиндре.

2) Найти плотность наведенного циркуляционного поверхностного электрического тока i_0 и эквивалентный ему продольный магнитный ток $I^{(m)}$.

3) Сравнить мощности рассеянных волн $\Pi^{(e)}$ и $\Pi^{(m)}$, порождаемых указанными в пунктах (1) и (2) наведенными источниками.

11.18. Найти силу наведенного электрического тока I, текущего вдоль цилиндра, описанного в предыдущей задаче, в случае, если ось цилиндра параллельна электрическому полю волны. Как изменяются сила тока I и соответствующая рассеянная мощность Π при $a \to 0$?

11.19. Создает ли рассеянную волну бесконечно тонкий провод с бесконечной проводимостью, если он ориентирован: а) перпендикулярно электрическому полю падающей волны; б) параллельно этому полю?

11.20. Плоская волна с волновым числом $k = \omega/c$ рассеивается на диэлектрическом шаре малых размеров. Его радиус a и диэлектрическая проницаемость шара ε удовлетворяют условиям $ka \ll 1$, $ka\sqrt{\varepsilon} \ll 1$. Принимая во внимание лишь электро-дипольное излучение шара,

а) найти дифференциальное (σ_d) и полное (σ_t) сечения рассеяния в квазистатическом приближении, основанном на решении электростатической задачи;

б) найти те же величины в условиях дипольного резонанса шара ($\varepsilon = -2$), когда квазистатическое приближение оказывается недостаточным.

11.21. Найти полное сечение рассеяния σ_t: а) идеально проводящего шарика радиуса $a \ll \lambda$; б) свободного электрона с зарядом e и массой m (томсоновское сечение).

11.22. Плоская электромагнитная волна падает в свободном пространстве на область с характерным размером $L \gg \lambda$, заполненную диэлектриком с $\varepsilon \approx 1$ ($|\varepsilon - 1| \ll 1$). Как выглядит диаграмма направленности рассеянного излучения? Какова угловая ширина $\Delta\theta$ главного максимума этой диаграммы?

11.23. Границами идеальных проводников являются четыре полуплоскости (рис. 9): 1) $y = a, -\infty < x < 0$; 2) $y = -a$, $-\infty < x < 0$; 3) $x = 0, a < y < \infty$; 4) $x = 0, -\infty < y < -a$. Между параллельными плоскостями $y = \pm a$ в направлении к их краю ($x = 0$) распространяется плоская волна с вектором электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_0\, e^{i(\omega t - kx)}$. В плоскости $x = 0$ волна частично отражается в обратном направлении, частично излучается в полупространство $x > 0$. Найти диаграмму направленности излучения и полную излучаемую (в область $x > 0$) мощность при условии $a \ll \lambda$.

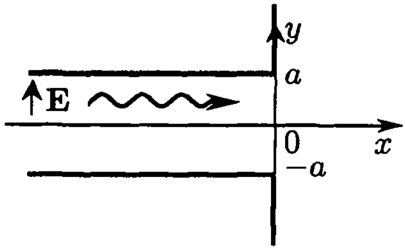


Рис. 9

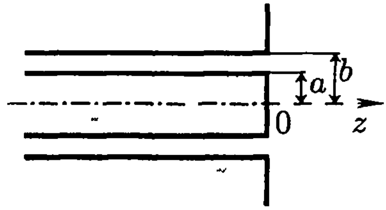


Рис. 10

11.24. В бесконечной идеально проводящей плоскости $z = 0$ вырезана кольцевая щель, совмещенная с выходным отверстием полубесконечной коаксиальной линии, лежащей в области $z < 0$ (рис. 10). По линии в направлении к ее концу ($z = 0$) распространяется TEM-волна. Радиусы внутреннего и внешнего проводников линии a и b (совпадающие соответственно с внутренним и внешним радиусами щели) и длина волны λ удовлетворяют условиям $b-a \ll a \ll \lambda$. Какая часть η мощности падающей волны излучается в область $z > 0$? Какова диаграмма направленности излучения?

11.25. Найти в кирхгофовском приближении дифференциальное сечение обратного рассеяния σ_b идеально проводящего цилиндра радиуса a, длины L, ориентированного перпендикулярно волновому вектору падающей волны. Длина волны $\lambda \ll a,\ L$.

11.26. Плоская волна с амплитудой U_0 и волновым числом k падает по нормали из области $z < 0$ на непрозрачный экран, занимающий полуплоскость $z = 0$, $-\infty < x < 0$, $-\infty < y < +\infty$. Исследовать поведение поля за экраном в переходной области вблизи границы области геометрической тени (плоскость $x = 0$), выражая медленно меняющуюся (в масштабе длины $1/k$) амплитуду поля $E_0(x, z)$ на основании решения скалярного параболического уравнения (см. задачу 7.27) через интегралы Френеля. Найти зависимость ширины переходной зоны Δx от расстояния до экрана z.

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ. УКАЗАНИЯ

1.1. 1) $\varphi = q/r$, $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$;

2)а) вне шара ($r > a$) $\varphi = (4\pi/3)a^3\rho/r$, $\mathbf{E} = (4\pi/3)a^3\rho\mathbf{r}/r^3$;
внутри шара ($r < a$) $\varphi = (2\pi/3)\rho(3a^2 - r^2)$, $\mathbf{E} = (4\pi/3)\rho\mathbf{r}$;
б) вне цилиндра ($r > a$) $\varphi = -2\pi\rho a^2(\ln r + C)$, $\mathbf{E} = 2\pi a^2\rho\mathbf{r}/r^2$,
внутри цилиндра ($r < a$) $\varphi = \pi\rho a^2[1 - 2(\ln a + C)] - \pi\rho r^2$,
$\mathbf{E} = 2\pi\rho\mathbf{r}$;

3) $\varphi = -2\kappa\ln r + C$, $\mathbf{E} = 2\kappa\,\mathbf{r}/r^2$;

4)а) вне сферы ($r > a$) $\varphi = 4\pi a^2\Omega/r$, $\mathbf{E} = 4\pi a^2\Omega\mathbf{r}/r^3$,
внутри сферы ($r < a$) $\varphi = 4\pi a\Omega$, $\mathbf{E} = 0$;
б) вне цилиндра ($r > a$) $\varphi = -4\pi a\Omega\ln r + C$, $\mathbf{E} = 4\pi a\Omega\mathbf{r}/r^2$;
внутри цилиндра ($r < a$) $\varphi = -4\pi a\Omega\ln a + C$, $\mathbf{E} = 0$;
в) $\varphi = -2\pi\Omega|x| + C$, $\mathbf{E} = \pm 2\pi\Omega\,\mathbf{x}_0$;

5) $\varphi = (\mathbf{p}\mathbf{r})/r^3$, $\mathbf{E} = 3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}/r^3$;

6) $\varphi = 2(\mathbf{p}_l\mathbf{r})/r^2$, $\mathbf{E} = 4(\mathbf{p}_l\mathbf{r})\mathbf{r}/r^4 - 2\mathbf{p}_l/r^2$;

Обозначения: $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки в пространстве (в трехмерных задачах (1), (2а), (4а), (5)) или на плоскости (в двумерных задачах (2б), (3), (4б), (6)); $r = |\mathbf{r}|$; C — произвольная константа в определении потенциала (в трехмерных задачах ее величина выбрана так, что при $r \to \infty$ потенциал $\varphi \to 0$); в одномерной задаче (4в) $\mathbf{x}_0$ — единичный вектор в направлении оси x, поверхностный заряд лежит в плоскости $x = 0$.

1.2. а) *Решение.* В сферических координатах r, θ, φ с центром в точке расположения диполя и полярной осью z, параллельной вектору дипольного момента $\mathbf{P} = \mathbf{z}_0 P$, выражения для проекций поля, согласно ответу к задаче 1.1.(5), имеют вид $E_r = 2P\cos\theta/r^3$, $E_\theta = P\sin\theta/r^3$, $E_\varphi = 0$. Из условия $[\mathbf{E}\times d\mathbf{r}] = 0$, которому удовлетворяет дифференциал радиуса-вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 dr + \boldsymbol{\theta}_0 r d\theta$ точек, принадлежащих силовой линии, находим, что силовые линии лежат в плоскостях $\varphi = \text{const}$ и описываются дифференциальным уравнением: $dr/E_r = rd\theta/E_\theta$. Решение этого уравнения, определяющее форму силовых линий: $r = C\sin^2\theta$, где $C = \text{const}$.

б) Силовые линии представляют собой окружности, задаваемые в полярных координатах на любой плоскости, перпендикулярной дипольной нити, уравнением $r = C\sin\theta$ (r — расстояние до нити, θ — угол, отсчитываемый от направления вектора $\mathbf{p}_l$).

1.3. 1) Поверхностный заряд с плотностью $\Omega = -C/2\pi$ в плоскости $x = 0$;

2) объемный заряд с плотностью $\rho = -\alpha^2 C\exp(-\alpha|x|)/4\pi$ и поверхностный заряд с плотностью $\Omega = \alpha C/2\pi$ при $x = 0$;

3) объемный заряд с плотностью $\rho = (\alpha^2 C/2\pi)\mathrm{sh}(\alpha x)\mathrm{ch}^{-3}(\alpha x)$;

4) поверхностные заряды с плотностью $\Omega = -C/4\pi$ при $x = 0$, $\Omega = C/4\pi$ при $x = x_1$ и двойной слой с мощностью $p_x = -Cx_1/4\pi$ при $x = x_2$.

1.4. 1) Поверхностные заряды с плотностью $\Omega = \pm(C/2\pi)\cdot$ $\cdot\sqrt{2x^2 \mp a^2}$ на поверхностях $x^2 - y^2 = \pm a^2$; электрическое поле $\mathbf{E} = 2C(-\mathbf{x}_0 x + \mathbf{y}_0 y)$; силовые линии — гиперболы $xy = \text{const}$;

2) поверхностные заряды с плотностью $\Omega = C/(4\pi b)$ и $\Omega =$ $= -C/(4\pi a)$ на цилиндрических поверхностях $r = b$ и $r = a$; $\mathbf{E} = 0$ при $r < a$ и $r > b$, $\mathbf{E} = -\mathbf{r}_0 C/r$ при $a < r < b$;

3) дипольная нить (линейный диполь) на оси z с дипольным моментом на единицу длины $\mathbf{p}_l = \mathbf{x}_0 C/2$; $\mathbf{E} = Cr^{-2}(\mathbf{r}_0\cos\theta + \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta)$; силовые линии — окружности $r = A\sin\theta$ ($A = \text{const}$), касающиеся оси x в начале координат (см. задачи 1.1(6), 1.2(б));

4) поверхностный заряд с плотностью $\Omega = (C/2\pi)\cos\theta$ на поверхности цилиндра $r = a$; при $r < a$ $\mathbf{E} = -C\mathbf{x}_0$, при $r > a$, как и в случае (3), имеем поле линейного диполя: $\mathbf{E} = Ca^2r^{-2}\times$ $\times(\mathbf{r}_0\cos\theta + \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta)$.

1.5. *Решение.* 1) На основании уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ и выражения для радиальной части оператора Лапласа $\Delta\varphi(r) =$ $= \partial^2\varphi/\partial r^2 + 2r^{-1}\partial\varphi/\partial r$ находим плотность объемного заряда при $r \neq 0$: $\rho = -\alpha^2 C/(4\pi r)\exp(-\alpha r)$. При $r \to 0$ потенциал $\varphi \to C/r$, т.е. имеет ту же особенность, что и потенциал точечного заряда, следовательно, в начале координат расположен точечный заряд $q = C$. 2) Заданная функция $\varphi(r,\theta)$ совпадает с потенциалом точечного диполя, помещенного в точку $r = 0$ и обладающего дипольным моментом $\mathbf{p} = \mathbf{z}_0 C$ (см. ответ к задаче 1.1(5)), следовательно, такой диполь и является источником данного потенциала. 3) Тем же способом, что и в случае (1), находим плотность объемного заряда: $\rho = -3C_1/2\pi$ при $r < a$; $\rho = 0$ при $r > a$. На поверхности $r = a$ потенциал φ и его нормальная производная $\partial\varphi/\partial r$ испытывают разрывы; следовательно, на этой поверхности одновременно располагаются: а) двойной слой зарядов, мощность которого (дипольный момент на единицу площади) $p_r = (\varphi_+ - \varphi_-)/4\pi = (C_2 - a^3C_1)/4\pi a$, и б) поверхностный заряд, плотность которого $\Omega = [(\partial\varphi/\partial r)_- - (\partial\varphi/\partial r)_+]/4\pi = (C_2 + 2a^3C_1)/4\pi a^2$ (индексами + и – помечены величины, определяемые соответственно при $r \to a + 0$ и $r \to a - 0$).

1.6. Внутри каждого квадранта плоскости xy поле однородно и параллельно соответствующей биссектрисе; величина поля $E = 2\sqrt{2}\pi\Omega$.

1.7. Поле имеет ту же величину, что и в предыдущей задаче, но направлено перпендикулярно биссектрисам углов, образованных координатными осями.

1.8. $\mathbf{E} = (4\pi/3)\rho\,\mathbf{d}$, где $\mathbf{d}$ – вектор, соединяющий центр шара с центром полости.

1.9. Внутри сферы $\mathbf{E} = -\pi b^2\,\Omega\,\mathbf{r}_1\,r_1^{-3}$, снаружи $\mathbf{E} = -\pi b^2\,\Omega\,\mathbf{r}_1\,r_1^{-3} + 4\pi a^2\,\Omega\,\mathbf{r}\,r^{-3}$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ — радиусы-векторы, начала которых лежат соответственно в центре сферы и в центре незаряженной площадки.

1.10. $\mathbf{E} = \pi b^2 p_r \nabla(\cos\theta/r^2)$; p_r — мощность двойного слоя, r и θ — сферические координаты (начало координат совпадает с центром незаряженной площадки, угол θ отсчитывается от полярной оси, проходящей через центр сферы).

1.11. *Решение.* Представим потенциал $\varphi(r, z)$ при малых r в виде суммы первых двух отличных от нуля членов степенного ряда по r: $\varphi = \varphi_0(z) + C(z)r^2$ (член первого порядка по r отсутствует, т.к. на оси симметрии, при $r = 0$, радиальная компонента поля $E_r = -\partial\varphi/\partial r = 0$). С помощью уравнения Лапласа $\Delta\varphi(r, z) = \partial^2\varphi/\partial r^2 + r^{-1}\partial\varphi/\partial r + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0$, находим $C(z) = -\dfrac{1}{4}d^2\varphi_0/dz^2$.

1.12. $f(x) = C_1 \exp(kx) + C_2 \exp(-kx)$ ($C_1, C_2 = \mathrm{const}$).

1.13. $f(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$ ($C_1, C_2 = \mathrm{const}$).

1.14. $E_y = x\partial f/\partial y$, $E_z = x\partial f/\partial z$.

1.15. *Доказательство.* Возможность существования максимума или минимума любой дважды дифференцируемой функции координат $\psi(x, y, z)$ во внутренней (не принадлежащей границе) точке O некоторой области определяется знаком величины

$\Delta\psi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$ в окрестности этой точки: если $\Delta\psi < 0$, возможен только максимум; если $\Delta\psi > 0$, возможен только минимум; если $\Delta\psi = 0$, экстремумы вообще невозможны. В самом деле, пусть в т. O достигается максимум ψ. Тогда существует некоторая сферическая δ-окрестность этой точки, всюду внутри которой производная $\partial\psi/\partial r$ по направлению радиуса-вектора, проведенного из т. O, отрицательна. При этом для любого сферического объема V, ограниченного сферой S радиуса $r < \delta$ с центром в т. O, на основании теоремы Гаусса–Остроградского имеем $\iiint\limits_V \Delta\psi\, dv = \iint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n} ds < 0$. Это условие может быть выполнено для всех $r < \delta$ лишь в том случае, если $\Delta\psi < 0$. Аналогично доказывается, что минимум ψ возможен лишь при условии $\Delta\psi > 0$. Из сказанного сразу следует, что потенциал электростатического поля φ внутри области, свободной от источников, где $\Delta\varphi = 0$, не может иметь ни максимумов, ни минимумов.

Определим знак $\Delta(E^2)$, производя дифференцирование в декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\Delta(E^2) = \frac{\partial^2(E_k^2)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(2E_k\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right) = 2\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_i^2}E_k$$

(знаки двойного суммирования по индексам $i, k = 1, 2, 3$ здесь опущены). Первое слагаемое в правой части записанного выражения не отрицательно, а второе, в силу соотношений $E_k = -\partial\varphi/\partial x_k$, $\partial^2\varphi/\partial x_i^2 = \Delta\varphi = 0$, равно нулю. Следовательно, $\Delta(E^2) \geq 0$ и величина E^2 не может иметь максимумов.

1.16. $E_r = 4\pi r^{-2}\int\limits_0^r r^2\rho(r)\,dr.$

1.17. а) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{(q_1 + q_2)/q_1}\cos\frac{\beta}{2}$;

б) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{|q_2|/q_1}\cos\frac{\beta}{2}$.

Указание. Задачу легко решить, используя равенство нулю потока вектора электрической индукции через не содержащую зарядов замкнутую осесимметричную поверхность, образующуюся при пересечении следующих трех поверхностей: 1) поверхность, получаемая в результате вращения рассматриваемой силовой линии вокруг оси симметрии AB; 2) сфера бесконечно малого радиуса, в центре которой лежит заряд q_1; 3) в случае (а) — бесконечно удаленная сфера, в случае (б) — сфера бесконечно малого радиуса, в центре которой лежит заряд q_2.

1.18. $\varphi = q(a^2+z^2)^{-1/2}$; $E_z = qz(a^2+z^2)^{-3/2}$; поле на оси имеет максимум в точке $z = a/\sqrt{2}$, где $\varphi = \sqrt{2/3}q/a \simeq 3,7\cdot 10^3$ В, $E_z = 2q/(3\sqrt{3}a^2) \simeq 866$ В/см.

1.19. 1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = 2\pi^2 Ca(a^2+z^2)^{-1/2}$.

1.20. *Решение.* Искомый потенциал определяется линейным интегралом по контуру, на котором распределен заряд: $\varphi(z) = \int (\kappa/R)\,dl$. Здесь $R = (r^2+z^2)^{1/2}$ — расстояние от точки на контуре до точки с координатой z на оси; $dl = (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{1/2}$ — элемент длины контура. Для заданных в условии зависимостей $r(\theta)$, $\kappa(\theta)$ имеем: $dl = \sqrt{2}dr$, $\kappa = \kappa_0 r/r_0$,

$$\varphi(z) = \sqrt{2}\frac{\kappa_0}{r_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \sqrt{2}\frac{\kappa_0}{r_0}\left(\sqrt{r_2^2+z^2} - \sqrt{r_1^2+z^2}\right),$$

где $r_{1,2} = r_0 \exp(\theta_{1,2})$.

1.21. $\varphi = \kappa\sqrt{1+(a/b)^2}\ln\dfrac{z_2 - z + [(z_2-z)^2+a^2]^{1/2}}{z_1 - z + [(z_1-z)^2+a^2]^{1/2}}$.

1.22. $\varphi = \dfrac{q}{2l}\ln(g_+/g_-)$; $g_{+,-} = r_1 + r_2 \pm 2l$.

1.23. $\varphi = p_l x(x^2+y^2)^{-1}[1 - z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}]$; вблизи оси z: $\varphi = 2p_l x(x^2+y^2)^{-1}$ при $z < 0$, $\varphi = p_l x/2z^2$ при $z > 0$.

1.24. а) $\varphi = 2\pi\Omega[(a^2+z^2)^{1/2} - |z|]$,

$$E_z = 2\pi\Omega\, z\left[\frac{1}{|z|} - (a^2+z^2)^{-1/2}\right];$$

б) *Решение.* Потенциал и напряженность поля в любой точке P определяются поверхностными интегралами:

$$\varphi = \iint\frac{\Omega\, ds}{R} \qquad \mathbf{E} = \iint\frac{\Omega\mathbf{R}\, ds}{R^3},$$

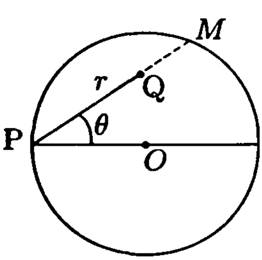


Рис. 11

где $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из точки интегрирования Q на поверхности в точку P; $R = |\mathbf{R}|$. Если точка P лежит на границе заряженного круга, эти интегралы легко вычислить, используя полярную систему координат r, θ, начало которой совпадает с точкой P, а полярный угол θ отсчитывается от диаметра круга (рис. 11).

При этом $R = PQ = r$, $ds = rd\theta dr$, $\varphi = \Omega \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{r_m} dr\, d\theta$,

$E_P = \Omega \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{r_m} r^{-1} \cos\theta\, dr\, d\theta$. Здесь E_P – проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление радиуса OP (другие проекции равны нулю в силу симметрии); верхний предел интегрирования по радиусу $r_m = PM = 2a\cos\theta$. Выполняя интегрирование, находим $\varphi = \Omega \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a\cos\theta\, d\theta = 4a\Omega$. Интеграл, определяющий E_P, имеет логарифмическую расходимость на нижнем пределе $r = 0$, т.е. при приближении точки наблюдения к границе круга $E_P \to \infty$.

1.25. 1) $\varphi = q/a$ при $r \le a$; $\varphi = q/r$ при $r \ge a$.

2) Вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости $z = 0$.

3) $\varphi(z) = \dfrac{q}{a\,z}(\sqrt{a^2 + z^2} - |z - a|)$.

4) $\varphi(\mathbf{r}) = \dfrac{q\,a\,\cos\theta}{2\,|\mathbf{r}|^2}$, где θ — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и осью z.

1.26. $\varphi(z) = 2\pi C \int\limits_{z_1}^{z_2} [(\zeta - z)^2 + f^2(\zeta)]^{-1/2}\, d\zeta$.

1.27. Потенциал остается конечным, а поле неограниченно возрастает (как логарифм расстояния до края площадки).

1.28. Поле будет иметь логарифмическую особенность.

1.29. *Доказательство.* Воспользуемся представлением потенциала φ и вектора напряженности поля $\mathbf{E}$ в виде поверхностных интегралов, записанных в решении задачи 1.24(б). Радиальная компонента поля E_r в тех точках Q на поверхности сферы S, где $\Omega = 0$, непрерывна и равна $E_r = \iint\limits_S \dfrac{\Omega \cos\theta\, ds}{R^2}$, где θ — угол между отрезком R, соединяющим точку интегрирования на сфере с точкой Q, и радиусом сферы a, проведенным к точке Q. Потенциал φ в точке Q равен $\varphi = \iint\limits_S \dfrac{\Omega\, ds}{R}$. Используя очевидное равенство $R = 2a\cos\theta$, приходим к соотношению $E_r = \varphi/2a$, которое требовалось доказать.

1.30. $\mathbf{p} = \mathbf{z}_0(4\pi/3)a^2\Omega_0$ ($\mathbf{z}_0$ — единичный вектор в направлении полярной оси).

1.31. Если ось z направлена вдоль отрезка, тензор $D_{ik} = \int \rho(3x_i x_k - \delta_{ik}r^2)\,dv$ имеет только диагональные компоненты: $D_{xx} = D_{yy} = -D_{zz}/2 = ql^2/3$; на расстояниях $r \gg l$ потенциал $\varphi = -ql^2(3\cos^2\theta - 1)/6r^3$ (θ — полярный угол, отсчитываемый от оси z).

1.32. В главных осях $D_{xx} = D_{yy} = -D_{zz}/2 = -qa^2/4$ (z — ось симметрии системы); при $r \gg a$ имеем $\varphi = (qa^2/8)(3\cos^2\theta - 1)r^{-3}$.

1.33. Октуполь; при возрастании r потенциал убывает как $1/r^4$.

1.34. *Решение.* Пусть поле достигает максимума в некоторой точке O и направлено в этой точке против оси z (рис. 12). Искомая граничная поверхность тела обладает следующим экстремальным свойством: поля, создаваемые в точке O любыми одинаковыми элементарными (бесконечно малыми) заряженными объемами dv, прилежащими изнутри к этой поверхности, имеют одинаковые проекции dE_z на ось z (в противном случае поле в точке можно было бы увеличить переносом объемов dv с одной части поверхности тела на другую).

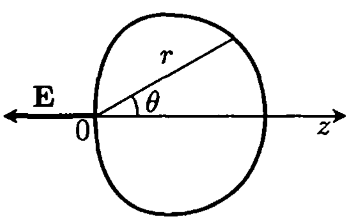


Рис. 12

Поскольку $dE_z = -\rho\,dv\,r^{-2}\cos\theta$ (θ — угол между осью z и радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из точки O в точку на поверхности тела; $r = |\mathbf{r}|$), из условия $dE_z = \mathrm{const}$ следует, что границей тела является осесимметричная поверхность, определяемая в сферических координатах r, θ уравнением $r = a\sqrt{\cos\theta}$, где $a = \mathrm{const}$, $0 \le \theta \le \pi/2$. Кривая $r(\theta)$, определяющая форму этой поверхности в сечении, проходящем через ось z, изображена на рис. 12.

Константа a определяется величиной заданного объема тела: $V = \int dv = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\cos\theta}} 2\pi r^2 \sin\theta\,dr = 4\pi a^3/15$, откуда $a = (15V/4\pi)^{1/3}$. Максимум поля достигается в точке $r = 0$ на границе тела и равен

$$E_{\max} = \int \rho r^{-1} \cos\theta \, dv = \rho \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\cos\theta}} 2\pi \sin\theta \cos\theta \, dr = 4\pi\rho a/5.$$

2.1. *Решение.* Потенциал любой точки P на поверхности провода может быть представлен в виде линейного интеграла $\varphi = \int\limits_P^{\infty} (\mathbf{E}\, d\mathbf{l})$, где $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $d\mathbf{l}$ — направленный элементарный отрезок контура интегрирования, соединяющего точку P с бесконечно удаленной точкой. Совместим начальный участок этого контура (от точки P до некоторой точки Q) с проходящей через точку P радиальной прямой в плоскости поперечного сечения провода. Введем на этой прямой радиальную координату r и предположим, что радиусы точек P и Q ($r(P) = a$, $r(Q) = R$) малы по сравнению с радиусом кривизны R_c осевой линии провода: $a < R \ll R_c$ ($R_c \neq 0$). Тогда на участке PQ ($a < r < R$) электрическое поле приближенно (тем точнее, чем меньше отношение R/R_c) совпадает с радиальным полем $E_r = 2\kappa_p/r$ прямого бесконечного провода, заряженного равномерно с той же линейной плотностью заряда κ_p, что и рассматриваемый искривленный провод в точке P. Путь интегрирования в выражении для φ разобьем на два участка: от P до Q и от Q до ∞; тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где

$$\varphi_1 = \int\limits_a^R 2(\kappa_p/r)\, dr = 2\kappa_p \ln(R/a), \quad \varphi_2 = \int\limits_Q^{\infty} (\mathbf{E}\, d\mathbf{l}).$$

Если раднус провода $a \to 0$ (при $R = \text{const}$), то φ_2 стремится к некоторой конечной (зависящей от R) величине, а $\varphi_1 \to \infty$ и $\varphi/\varphi_1 \to 1$. При этом требование постоянства потенциала по всей длине провода (величина φ не должна зависеть от положения точки P) может быть выполнено лишь при условии $\kappa_p = \text{const}$. Таким образом, во всех точках бесконечно тонкого провода любой формы линейная плотность заряда должна быть одинакова. Исключение могут составлять лишь точки излома, где $R_c = 0$, точки самопересечения и концы провода (если он не замкнут).

2.2. *Указания.* 1) Выразить поверхностные плотности заряда на разных сторонах проводящей части сферы через соответствующие радиальные компоненты поля: $\Omega^{(e)} = E_r^{(e)}/4\pi$, $\Omega^{(i)} = -E_r^{(i)}/4\pi$ (значками (e) и (i) помечены величины, относящиеся соответственно к наружной и внутренней сторонам сферы). 2) Представить величины $E_r^{(e,i)}$ в произвольной точке сферы в виде суперпозиции разрывной (изменяющейся скачком при переходе с внутренней стороны на внешнюю) части $E_{r1}^{(e,i)} = \pm 2\pi(\Omega^{(e)}+\Omega^{(i)})$, создаваемой бесконечно малым (и поэтому плоским) элементом сферы, содержащим данную точку, и непрерывного поля $E_{r2} = E_{r2}^{(e)} = E_{r2}^{(i)}$, создаваемого зарядами всей остальной части проводника. 3) Воспользоваться соотношением между E_{r2} и потенциалом проводника ($\varphi = \mathrm{const}$), доказанным в задаче 1.29.

2.3. Поток $\Phi = qS/(2a^2)$.

2.4. *Решение.* Поле над проводником представляет собой векторную сумму полей данного точечного заряда q и его зеркального изображения в плоской границе проводника $-q$. Нормальная компонента суммарного поля в любой точке P на границе равна $E_n = -2\dfrac{q\cos\theta}{R^2}$ (нормаль внешняя; R – расстояние от точки P до любого из зарядов; θ — угол, образуемый нормалью и отрезком, соединяющим точку P и заряд q). Обозначая через r расстояние от точки P до проекции заряда на плоскость, имеем: $\cos\theta = l/R$, $R = (r^2+l^2)^{1/2}$, $E_n = -2ql(r^2+l^2)^{-3/2}$. Плотность поверхностного заряда на плоскости: $\Omega = E_n/4\pi = -(ql/2\pi)(r^2+l^2)^{-3/2} \simeq$ $\simeq -10^{-7}$Кл/м^2.

2.5. Методом изображений задача сводится к 1.7.

2.6. С точностью до членов порядка a/l, a/h имеем:

$$U = (2q/a)[1 - (a/l) - (a/2h) + a(l^2+4h^2)^{-1/2}].$$

2.7. $\varphi = \dfrac{4}{\pi}\rho_0 L^2 \sin\dfrac{\pi x}{L}$, $\;E_x = -4\rho_0 L\cos\dfrac{\pi x}{L}$.

2.8. *Указание.* Нужно показать, что потенциал указанной системы зарядов $\varphi = \dfrac{q}{r} + \dfrac{q'}{r'}$ (r и r' — растояния до зарядов q и q') на поверхности сферы удовлетворяет граничному условию $\varphi = 0$.

2.9. В центр сферы надо поместить дополнительный точечный заряд $-q'$.

2.10. Сила направлена по радиусу от центра сферы и равна $F = q^2ab(a^2-b^2)^{-2}$.

2.11. а) Точечный диполь с моментом $\mathbf{p}' = \mathbf{p}a^3/b^3$ в инверсной точке внутри сферы (на расстоянии $b' = a^2/b$ от центра) и два точечных заряда: $q' = |\mathbf{p}|a/b^2$ в инверсной точке и $-q'$ в центре сферы;

б) точечный диполь с моментом $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}a^3/b^3$ в инверсной точке.

Указание. Представить диполь как совокупность двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на конечном расстоянии l друг от друга. Найти изображения каждого из зарядов, пользуясь результатами решения задач 2.8, 2.9. Выполнить предельный переход: $q \to \infty$, $l \to 0$, $ql = |\mathbf{p}| = \text{const}$.

2.12. $\varphi = -2\pi\Omega\sqrt{a^2+z^2} + 2\pi\Omega a^2 \dfrac{1}{|z|}\left(\sqrt{1+\dfrac{a^2}{z^2}} - 1\right) + \text{const};$

$$E_z = \frac{2\pi\Omega z}{(a^2+z^2)^{1/2}} + \frac{2\pi\Omega a^2}{z^2}\left(\frac{2a^2+z^2}{z(a^2+z^2)^{1/2}} - \frac{z}{|z|}\right);\ (z \geq a).$$

2.13. $\varphi = 2\pi\Omega[(a^2+z^2)^{1/2} - |z|] + \dfrac{2\pi\Omega a^3}{z^2}[1 - \dfrac{(a^2+z^2)^{1/2}}{a}];$

$$E_z = 2\pi\Omega\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}} + \frac{2a^3}{z^3} - \frac{a^2(2a^2+z^2)}{z^3(a^2+z^2)^{1/2}}\right);\ (z \leq a).$$

2.14. Точка равновесия лежит на оси симметрии; ее расстояние b до центра сферы и радиус сферы a связаны соотношением

$$ab^3[(a^2-b^2)^{-2} + (a^2+b^2)^{-2}] = \frac{1}{4}.$$

2.15. Система изображений для данного заряда q образована зарядом $q' = -qa/b$ в инверсной точке внутри сферы (a — радиус сферы, b — расстояние от ее центра до заряда q) и зеркальными изображениями зарядов q и q' (с противоположными знаками) в плоскости.

2.16. Пусть заряд расположен в среде с проницаемостью ε_1. Тогда в этой среде $\varphi = q(\varepsilon_1 r)^{-1} + q(\varepsilon_1 r')^{-1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-1}$; в среде с проницаемостью ε_2: $\varphi = 2q[r(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]^{-1}$; r и r' – соответственно расстояния до точки, где находится заряд q, и до ее зеркального изображения в граничной плоскости.

Указание. Поле в том полупространстве, где расположен заряд, ищется как поле двух зарядов (данного заряда q и его зеркального отражения в границе q'), расположенных в однородной среде. Поле в другом полупространстве ищется как поле одного заряда q'' (также в однородной среде), расположенного в той точке, где находится данный заряд q. Величины фиктивных зарядов q' и q'' определяются из условий непрерывности тангенциальной компоненты напряженности электрического поля (или потенциала φ) и нормальной компоненты электрической индукции (или величины $\varepsilon\partial\varphi/\partial n$) на границе.

2.17. $\varphi = q/b$.

2.18. $q_i = -qa/b$.

2.19. *Решение*. Согласно теореме взаимности, потенциал незаряженного проводника в поле точечного заряда совпадает с потенциалом той точки, где находится заряд, если сам заряд перенесен из нее на проводник. Отсюда, используя принцип суперпозиции, находим, что искомая разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ между первой и второй пластинами конденсатора, создаваемая точечным зарядом q, помещенным в некоторую точку P, равна потенциалу этой точки $\varphi(P)$, создаваемому конденсатором, первая и вторая пластины которого несут соответственно заряды $+q$ и $-q$. В случае (1), когда точка P находится внутри конденсатора на расстоянии l от пластины 1, $U = \varphi(P) = \dfrac{q}{2C}\left(1 - \dfrac{2l}{d}\right)$. В случае (2) потенциал точки P близок к потенциалу пластины 1, т.е. $U = \dfrac{q}{2C}$ (в обоих случаях учтено, что в плоскости симметрии, отстоящей на расстояние $d/2$ от каждой из пластин, потенциал равен нулю). В случае (3) при расчете потенциала удаленной точки $\varphi(P)$ заряженный конденсатор можно рассматривать как точечный диполь с моментом $\mathbf{p} = \mathbf{n}qd$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали от пластины *2* к пластине *1*); при этом $U = qd\cos\theta/r^2$.

2.20. $U = q/2C$.

2.21. $I = qv/d$.

2.22. 1) $\varphi = \varphi_0 \dfrac{\operatorname{sh} kx \sin ky}{\operatorname{sh} kL}$;

$$2)\ \varphi = \varphi_0 \left[\frac{2x}{\pi L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\operatorname{sh}(2nkx)\cos(2nky)}{\pi(4n^2-1)\operatorname{sh}(2nkL)}\right].$$

Решение для случая 2. Представим потенциал на границе $x = L$ в виде ряда Фурье:

$$\varphi(L,y)/\varphi_0 = |\sin ky| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2kny). \qquad (*)$$

Ищем решение $\varphi(x,y)$ в виде бесконечной суммы, составленной из частных решений уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$, получаемых методом разделения переменных в координатах x, y и зависящих от y так же, как члены ряда (*):

$$\varphi(x,y) = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2kny)[a_n \exp(2knx) + b_n \exp(-2knx)].$$

Удовлетворяя граничным условиям при $x = 0$ и $x = L$, находим коэффициенты a_0, a_n, b_n: $a_0 = \frac{2\varphi_0}{\pi L}$, $\frac{a_n}{\varphi_0} = \frac{-b_n}{\varphi_0} = -\frac{2}{\pi}[(1-4n^2)\cdot$ $\cdot \operatorname{sh}(2nkL)]^{-1}$ и получаем для φ выражение, приведенное в ответе.

2.23. $\varphi = \frac{4}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r)(2n-1)^{-1} \sin(2n-1)\theta;$

а) $f_n(r) = (r/a)^{2n-1}$; б) $f_n(r) = (a/r)^{2n-1}$.

2.24. а) $\varphi(r < b) = 2\pi\Omega_0 b n^{-1}[1 - (b/a)^{2n}](r/b)^n \cos n\theta$, $\varphi(b < r < a) = 2\pi\Omega_0 b n^{-1}[(b/r)^n - (br/a^2)^n] \cos n\theta$;

б) $\varphi(r < b) = -2\pi p_0[1 + (b/a)^{2n}](r/b)^n \cos n\theta$, $\varphi(b < r < a) = 2\pi p_0[(b/r)^n - (br/a^2)^n] \cos n\theta$.

2.25. $\varphi = 2\Omega_0 L \sin\frac{\pi x}{L} \exp\left(-\frac{\pi}{L}|z|\right)$.

2.26. *Решение.* На стенках бесконечной металлической трубы потенциал $\varphi = 0$. Частные решения уравнения Лапласа, получаемые разделением переменных в декартовых координатах x, y, z и удовлетворяющие граничному условию $\varphi = 0$ на плоскостях $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, имеют вид: $\varphi_{mn} = C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\cdot$ $\cdot \exp(\pm k_{mn} z)$, где C_{mn} — произвольные константы, $k_{mn}^2 =$ $= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $m, n = 1, 2, 3, \ldots$. На плоскости $z = 0$ должны выполняться граничные условия $\varphi_1 = \varphi_2$, $(\partial\varphi/\partial z)_1 - (\partial\varphi/\partial z)_2) =$ $= 4\pi\Omega = 4\pi\Omega_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$ (индексы 1 и 2 относятся соответственно к областям $z < 0$ и $z > 0$), которым может удовлетворять лишь частное решение с $m = 1$, $n = 1$. Знаки в показателе экспоненты этого решения в областях $z > 0$ и $z < 0$ должны быть выбраны таким образом, чтобы потенциал оставался конечным при $z \to \pm\infty$. Определяя константу C_{11} на основании приведенных граничных условий, находим: $\varphi = 2\Omega_0\, k_{11}^{-1} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \exp(-k_{11}|z|)$, где $k_{11}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$.

2.27. *Решение.* Отличие данной задачи от предыдущей состоит лишь в том, что распределение эквивалентной поверхностной плотности заряда Ω в том поперечном сечении трубы ($z = 0$), где расположен заряд q, представляет собой здесь не одну синусоидальиую гармонику, а бесконечный ряд таких гармоник:

$$\Omega = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \sum_{m,n} \Omega_{mn}; \quad \Omega_{mn} \sim \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(обозначения осей координат те же, что и в задаче 2.26; x_0, y_0 — координаты точечного заряда на плоскости $z = 0$). В соответствии с этим потенциал φ по обе стороны от плоскости $z = 0$ ищем в виде суперпозиции тех же (убывающих с ростом $|z|$) частных решений φ_{mn}, каждое из которых связывается при помощи граничных условий со «своей» гармоникой Ω_{mn}:

$$\varphi = \sum_{m,n}\varphi_{mn}; \quad \varphi_{mn} \sim \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\exp(-k_{mn}|z|).$$

При больших $|z|$ в этой сумме можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого (с $m = n = 1$), в котором коэффициент $k_{11} = \pi(a^{-2} + b^{-2})^{1/2}$ в показателе экспоненты наименьший. Это слагаемое и определяет вид решения на больших расстояниях от заряда (при $|z| \gg a, b$):

$$\varphi = \varphi_1 \sim \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\exp(-k_{11}|z|).$$

2.28. При $|z| \gg a$ $\quad \varphi \sim J_0(\kappa r)\exp(-\kappa|z|)$, где r — расстояние до оси трубы, z – продольная координата, $J_0(\kappa r)$ — функция Бесселя нулевого порядка, $\kappa = \nu/a, \nu \simeq 2,4$ — наименьший корень уравнения $J_0(x) = 0$.

2.29. *Решение.* Пусть данный заряд q лежит в точке с координатой $z = z_0$ на оси z, перпендикулярной металлическим плоскостям, координаты которых $z = 0$ и $z = L$. Погонную плотность $\kappa(z) = q\delta(z - z_0)$ эквивалентного линейного заряда на оси z разложим в ряд Фурье по синусам:

$$\kappa = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi z}{L}; \quad \frac{a_n}{q} = \frac{2}{L}\int_0^L \delta(z - z_0)\sin\frac{n\pi z}{L}\,dz = \frac{2}{L}\sin\frac{n\pi z_0}{L}.$$

Ищем потенциал φ как функцию координат z, r (r — расстояние до оси z) в виде суммы частных решений уравнения $\Delta\varphi = 0$, получаемых методом разделения переменных при граничном условии $\varphi = 0$ на плоскостях $z = 0$ и $z = L$:

$$\varphi(z,r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi z}{L} K_0\left(\frac{n\pi r}{L}\right). \qquad (*)$$

Здесь $K_0(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя — решение уравнения

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial K_0}{\partial\xi}\right) - K_0 = 0,$$

убывающее при $\xi \to \infty$. На оси z (при $r \to 0$) каждое частное решение φ_n должно иметь логарифмическую особенность: $\varphi_n = -2\kappa_n \ln r$, отвечающую n-й гармонике линейного заряда κ_n. Отсюда с учетом того, что при $\xi = n\pi r/L \to 0$ функция $K_0(\xi) \to -\ln\xi$, можно найти коэффициенты C_n: $\dfrac{C_n}{q} = -\dfrac{4}{L}\sin\dfrac{n\pi z_0}{L}$. При $\xi = n\pi r/L \gg 1$ функция $K_0(\xi)$ может быть заменена ее асимптотикой: $K_0(\xi) = \sqrt{\pi/2\xi}\exp(-\xi)$. Отсюда следует, что на больших расстояниях от заряда ($r \gg L/\pi$) в сумме (*) можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого, убывающего при увеличении r медленнее всех остальных:

$$\frac{\varphi}{q} = \frac{\varphi_1}{q} = -\frac{4}{L}\sin\frac{\pi z_0}{L}\sin\frac{\pi z}{L}\left(\frac{L}{2r}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\pi r}{L}\right).$$

2.30. $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pm n}\,\varphi_n(\mathbf{r}_\perp)\exp(\pm\kappa_n z)$,

$$a_{\pm n} = \frac{2\pi}{\kappa_n N_n}\int_{z_1}^{z_2} dz \iint_S \rho(\mathbf{r}_\perp, z)\varphi_n(\mathbf{r}_\perp)\,ds\,\exp(\mp\kappa_n z),$$

$$N_n = \iint_S \varphi_n^2(\mathbf{r}_\perp)\,ds;$$

заряды лежат в области $z_1 < z < z_2$; верхние и нижние знаки выбираются соответственно при $z < z_1$ и $z > z_2$; поверхностные интегралы берутся по площади поперечного сечения трубы S.

Указания. 1) Потенциал вне области зарядов ищется в виде $\varphi = \sum\limits_n a_n\psi_n(\mathbf{r}_\perp)\exp(\pm\kappa_n z)$, где $\psi_n(\mathbf{r}_\perp)$ и κ_n — собственные функции и собственные значения в соответствующей мембранной задаче ($\Delta_\perp\psi_n + \kappa_n^2\psi_n = 0$, $\psi_n = 0$ на граничном контуре); знаки $+$ и $-$ в показателе экспоненты соответствуют областям $z < z_1$ и $z > z_2$. 2) С помощью теоремы Грина доказываются соотношения ортогональности для функций ψ_n: интегралы $\iint\limits_S \psi_n\psi_m\,ds$ отличны от нуля лишь при $n = m$. 3) С помощью теоремы Грина и соотношений ортогональности определяются коэффициенты a_n.

2.31. В полярных координатах r, θ потенциал $\varphi = Cr^n\sin n\theta$; компоненты поля $E_\theta = -\dfrac{nC}{r^{1-n}}\cos n\theta$; $E_r = -\dfrac{nC}{r^{1-n}}\sin n\theta$; во внутренней области угла ($0 < \theta < \theta_0$) $n = \pi/\theta_0$;
во внешней области ($\theta_0 < \theta < 2\pi$) $n = \dfrac{\pi}{2\pi - \theta_0}$.

2.32. Для $0 < \theta < \theta_0$: $\varphi(\theta) = V\theta/\theta_0$, $E_\theta = -V/r$, $E_r = 0$; для $\theta_0 < \theta < 2\pi$: $\varphi(\theta) = V\dfrac{2\pi - \theta}{2\pi - \theta_0}$, $E_\theta = \dfrac{V}{(2\pi - \theta_0)r}$, $E_r = 0$.

2.33. Потенциал $\varphi = V\left(2\ln \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^{-1}\ln \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$;

электрическое поле $E_\theta = -V\left(2\ln \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^{-1}(r\sin\theta)^{-1}$.

2.34. 1) $U = q\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$; 2) $U = q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{r_2}\right)$; 3) $U = 0$.
При заданных значениях параметров U =750 В.

2.35. 1) $\varphi = \dfrac{q}{r}$; 2) $\varphi = q\left[\dfrac{1}{\varepsilon r} + \dfrac{1}{b}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right]$;

3) $\varphi = q\left[\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right]$.

2.36. $\varepsilon = 1 + 4\pi Na^3$.

2.37. $\varepsilon_\parallel = 1 + 2\pi Nal^2$; $\varepsilon_\perp = 1 + 4\pi Na^3$.

2.38. На полусфере $\Omega = 3\Omega_0\cos\theta$ (θ — угол между радиусом и осью симметрии); на плоскости $\Omega = \Omega_0\left[1 - \left(\dfrac{a}{r}\right)^3\right]$ (r – расстояние до центра).

2.39. $\Omega = \dfrac{3}{4\pi}E_0\cos\theta$ (θ — угол между радиусом сферы и направлением внешнего поля).

2.40. *Решение.* Рассматриваем потенциал φ электрического поля как функцию сферических координат r, θ с началом координат, помещенным в центр проводящей сферы, и полярной осью z, направленной вдоль заданного невозмущенного поля $\mathbf{E}_0$; от азимутального угла решение не зависит в силу осевой симметрии системы. Функцию $\varphi(r,\theta)$ ищем в виде $\varphi = R(r)\cos\theta$ (ее зависимость от полярного угла θ должна быть той же, что у потенциала невозмущенного поля $\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$, с которым должно совпадать решение при $r \to \infty$). Из уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0,$$

которому удовлетворяет потенциал внутри каждой из однородных областей ($a < r < b$ и $r > b$), получаем уравнение для функции $R(r)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2R}{r^2} = 0.$$

Его общее решение содержит по две произвольные постоянные для каждой из указанных областей: при $a < r < b$: $R = R_i = C_1 r + \dfrac{C_2}{r^2}$, при $r > b$: $R = R_e = C_3 r + \dfrac{C_4}{r^2}$. Из условия $R \to -E_0 r$ при $r \to \infty$ находим $C_3 = -E_0$. Из условий на границах оболочки $R_i(a) = 0$, $R_i(b) = R_e(b)$, $\varepsilon\dfrac{dR_i(b)}{dr} = \dfrac{dR_e(b)}{dr}$ находим остальные константы:

$$C_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon f + 2g},\quad C_2 = \frac{3E_0 a^3}{\varepsilon f + 2g},\quad C_4 = E_0 b^3\frac{\varepsilon f - g}{\varepsilon f + 2g},$$

где $f = 1 + 2(a/b)^3$, $g = 1 - (a/b)^3$. Таким образом, в диэлектрике $\varphi(a < r < b) = 3E_0(\varepsilon f + 2g)^{-1}(a^3 - r^3)r^{-2}\cos\theta$. Во внешней области $\varphi(r > b) = -E_0 r\cos\theta + C_4 r^{-2}\cos\theta$, т.е. к невозмущенному полю E_0 добавляется поле точечного диполя с моментом $p = C_4$.

2.41. *Доказательство.* Дипольный момент шара

$$\mathbf{P} = \iint \Omega\mathbf{r}\,ds;$$

электрическое поле в центре шара, создаваемое зарядами, индуцированными на его поверхности,

$$\mathbf{E}_\Omega = -\iint \Omega(\mathbf{r}/r^3)\,ds = -(1/r^3)\iint \Omega\mathbf{r}\,ds = -\mathbf{P}/r^3$$

(здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точек на поверхности шара, $r = |\mathbf{r}|$ — радиус шара, Ω — плотность поверхностного заряда). Поскольку поле $\mathbf{E}_\Omega$ равно с противоположным знаком полю $\mathbf{E}_0$, создаваемому в центре шара внешними зарядами, получаем отсюда $\mathbf{P} = r^3\mathbf{E}_0$, что и требовалось доказать.

2.42. *Доказательство.* Поскольку любое внешнее поле можно считать созданным совокупностью элементарных зарядов, из принципа суперпозиции и соображений симметрии следует, что сформулированное утверждение достаточно доказать для случая, когда это поле создается единственным точечным зарядом q, расположенным в произвольной точке M на расстоянии r от центра шара O. Пусть этот заряд индуцирует на шаре дипольный момент $\mathbf{P}$. Согласно теореме взаимности, потенциал φ_N, создаваемый данной системой в некоторой точке N на прямой OM (рис. 13), равен потенциалу φ_M точки M в случае, когда заряд q находится не в точке M, а в точке N. Имея в виду последующий предельный переход $R = ON \to \infty$, запишем выражения для каждого из потенциалов φ_M и φ_N с учетом вкладов от точечного заряда и дипольного момента шара (вклады от высших мультиполей при $R \to \infty$ исчезают):

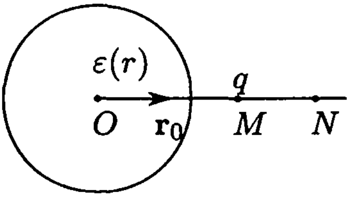


Рис. 13

$$\varphi_N = \frac{q}{|R-r|} + \frac{(\mathbf{P}\mathbf{r}_0)}{R^2}; \quad \varphi_M = \frac{q}{|R-r|} + \frac{(\mathbf{P}_N\mathbf{r}_0)}{r^2}.$$

Здесь $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор, направленный из точки O в точку M; $\mathbf{P}_N$ — дипольный момент шара, индуцируемый точечным зарядом q, расположенным в точке N. При $R \to \infty$ электрическое поле $\mathbf{E} = -\mathbf{r}_0 q/R^2$, создаваемое этим зарядом в окрестности шара, становится однородным; дипольный момент шара в таком поле определяется выражением $\mathbf{P}_N = \alpha\mathbf{E}$, где α — коэффициент поляризуемости. Учитывая, что электрическое поле, создаваемое в точке O в отсутствие шара точечным зарядом q, лежащим в точке M, равно $\mathbf{E}_0 = -\mathbf{r}_0 q/r^2$, из равенства $\varphi_N = \varphi_M$ находим: $(\mathbf{P}\mathbf{r}_0) = (R/r)^2(\mathbf{P}_N\mathbf{r}_0) = -\alpha q/r^2 = \alpha(\mathbf{E}_0\mathbf{r}_0)$. Поскольку, как ясно из симметрии рассматриваемой системы, векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{r}_0$ параллельны, из последнего равенства следует $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}_0$, что и требовалось доказать.

2.43. Поле вне диэлектрика равно сумме полей следующих источников в вакууме: данный заряд q, его зеркальное изображение $-q$ в плоскости и точечный диполь в центре основания полушара с моментом $\mathbf{p} = -2\,\mathbf{n}\,q\,\dfrac{a^3(\varepsilon-1)}{b^2(\varepsilon+2)}$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к плоскости. Внутри диэлектрика $\mathbf{E} = -\mathbf{n}\dfrac{6q}{b^2(\varepsilon+2)}$.

2.44. 1) $\mathbf{P} = \dfrac{\varepsilon-1}{4}\,a^2 l\left(\mathbf{E}_\parallel + \dfrac{2}{\varepsilon+1}\mathbf{E}_\perp\right); a \ll l, a^2(\varepsilon-1) \ll l^2;$

2) $\mathbf{P} = \dfrac{\varepsilon-1}{4}\,a^2 d\left(\mathbf{E}_\parallel + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}_\perp\right); \quad d \ll a, d(\varepsilon-1) \ll a;$

$\mathbf{E}_\parallel$ и $\mathbf{E}_\perp$ — компоненты поля $\mathbf{E}$, параллельные и перпендикулярные оси стержня или плоскости диска;

3) $\mathbf{P} = \dfrac{1}{3}a^2 d(\varepsilon-1)\left(2+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\mathbf{E}; d \ll a, d(\varepsilon-1) \ll a.$

2.45. $\varphi = 6qa(\varepsilon+2)^{-1}r^{-2}\cos\theta$; r, θ — сферические координаты; полярная ось z направлена от $-q$ к $+q$.

2.48. 1) $C = \dfrac{b}{4\pi d}\displaystyle\int_0^a \varepsilon(x)\,dx$; 2) $C = \dfrac{ab}{4\pi}\left[\displaystyle\int_0^d \dfrac{dy}{\varepsilon(y)}\right]^{-1}$.

3) *Решение.* При данном типе зависимости $\varepsilon(x,y) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(y)$ уравнение для потенциала

$$\varepsilon\Delta\varphi + (\nabla\varepsilon\nabla\varphi) = 0 \qquad (*)$$

имеет решение, зависящее лишь от одной переменной y, т.е. автоматически удовлетворяющее граничному условию $\varphi = \text{const}$ на каждой из пластин конденсатора. Это решение описывается получаемым из (*) для $\varphi = \varphi(y)$ уравнением

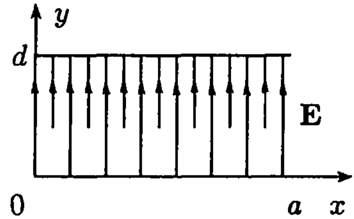


Рис. 14

$$\varepsilon_2(y)\varphi''(y) + \varepsilon_2'(y)\varphi'(y) = 0,$$

которое легко интегрируется: $\varphi'(y) = -A/\varepsilon_2(y)$, где $A = \text{const}$. Таким образом, электрическое поле внутри конденсатора перпендикулярно пластинам и не зависит от координаты x: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \mathbf{y}_0 A/\varepsilon_2(y)$ (рис. 14). Помещая начало координат на краю одной из пластин и направляя ось x вдоль стороны a, находим разность потенциалов между пластинами $U = \varphi(0) - \varphi(d) = A\int\limits_0^d \frac{dy}{\varepsilon_2(y)}$, вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 A\varepsilon_1(x)$, заряды на пластинах $Q = \pm\frac{b}{4\pi}\int\limits_0^a D_y\,dx = \pm\frac{Ab}{4\pi}\int\limits_0^a \varepsilon_1(x)\,dx$ и емкость конденсатора $C = \frac{|Q|}{U} = \frac{b}{4\pi}\int\limits_0^a \varepsilon_1(x)dx\left[\int\limits_0^d \frac{dy}{\varepsilon_2(y)}\right]^{-1}$.

2.49. 1) $C = \left[\int\limits_a^b r^{-2}\varepsilon^{-1}(r)\,dr\right]^{-1}$;

2) $C = \frac{b-a}{2ab}\int\limits_0^\pi \varepsilon(\theta)\sin\theta\,d\theta$;

3) $C = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \varepsilon_2(\theta)\sin\theta\,d\theta\left[\int\limits_a^b r^{-2}\varepsilon_1^{-1}(r)\,dr\right]^{-1}$.

2.50. 1) $\mathbf{E} = q\,\mathbf{r}\,\varepsilon^{-1}(r)\,r^{-3}$;

2) $\mathbf{E} = 2q\,\mathbf{r}\,r^{-3}\left[\int\limits_0^\pi \varepsilon(\theta)\,\sin\theta\,d\theta\right]^{-1}$;

3) $\mathbf{E} = 4\pi q\,\mathbf{r}\,r^{-3}\left[\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^\pi \varepsilon(\theta,\varphi)\,\sin\theta\,d\theta\right]^{-1}$;

4) $\mathbf{E} = 4\pi q\,\mathbf{r}\,r^{-3}\,\varepsilon_1^{-1}(r)\left[\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^\pi \varepsilon_2(\theta,\varphi)\,\sin\theta\,d\theta\right]^{-1}$.

2.51. $\mathbf{E} = q\,\mathbf{r}\,r^{-3}\left[1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i - 1)\left(1 - \cos\frac{\alpha_i}{2}\right)\right]^{-1}$.

2.52. 1) $\varphi_0 = 2qb^{-1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{-1}$; 2) $q_0 = -qa/b$.

2.53. В полярных координатах r, θ на плоскости, перпендикулярной ребру клина, интересующие нас решения уравнения Лапласа для потенциала φ (удовлетворяющие условиям непрерывности φ и $\varepsilon\,\partial\varphi/\partial\theta$ на гранях клина $\theta = \pm\alpha$ и требуемым условиям предельного перехода при $\alpha \to \pi/2$) имеют следующий вид а) Симметричное решение ($\varphi(\theta) = \varphi(-\theta)$): внутри клина ($-\alpha < \theta < \alpha$) $\varphi = C_1 r^\nu \cos(\nu\theta)$; вне клина ($\alpha < \theta < 2\pi - \alpha$) $\varphi = C_2 r^\nu \cos[\nu(\pi - \theta)]$, где $C_2 = C_1 \cos(\nu\alpha) \cos^{-1}[\nu(\pi - \alpha)]$, ν — наименьший положительный корень уравнения

$$\varepsilon \operatorname{tg}(\nu\alpha) = \operatorname{tg}[\nu(\alpha - \pi)].$$

В области параметров, где $\nu \simeq 1$, разность

$$1 - \nu \simeq \frac{(\varepsilon - 1)\sin 2\alpha}{2\alpha(\varepsilon - 1) + 2\pi}.$$

б) Антисимметричное решение ($\varphi(\theta) = -\varphi(-\theta)$): внутри клина ($-\alpha < \theta < \alpha$) $\varphi = C_1 r^\nu \sin(\nu\theta)$; вне клина ($\alpha < \theta < 2\pi - \alpha$) $\varphi = C_2 r^\nu \sin[\nu(\pi - \theta)]$, где $C_2 = C_1 \sin(\nu\alpha) \sin^{-1}[\nu(\pi - \alpha)]$, ν — наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(\nu\alpha) = \varepsilon \operatorname{tg}[\nu(\alpha - \pi)].$$

В области параметров, где $\nu \simeq 1$, разность

$$1 - \nu \simeq \frac{(1 - \varepsilon)\sin 2\alpha}{2\alpha(1 - \varepsilon) + 2\pi\varepsilon}.$$

При $\theta = \text{const}$ компоненты поля $E_r, E_\theta \sim r^{\nu-1}$; при $r \to 0$ обе они обращаются в нуль или в бесконечность в зависимости от знака разности $\nu - 1$. При $\varepsilon > 1$ поле на ребре обращается в бесконечность ($\nu < 1$) в симметричном случае (а), если $\alpha < \pi/2$, и в антисимметричном случае (б), если $\alpha > \pi/2$.

2.54. $\varphi = q|z|^{-1} - \pi q b^2 (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^{-1}(a^2 + z^2)^{-3/2}$.

2.55. К внешнему полю $\mathbf{E}_0$ добавляется поле диполя с моментом $\mathbf{p} = \dfrac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1)V\mathbf{E}_0$.

2.56. $\mathbf{p} = \dfrac{1}{4}(\varepsilon - 1)\, q\, a\, \mathbf{z}_0$ ($\mathbf{z}_0$ — единичный вектор в направлении оси симметрии).

3.1. $j_{n1} = j_{n2}$. **3.2.** $\Omega = \dfrac{1}{4\pi} j_n \left(\dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)$.

3.3. $R = \varepsilon/(4\pi C \sigma)$.

3.4. *Решение.* Исходным дифференциальным уравнениям ($\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$) и граничным условиям на поверхности электролита (непрерывность тангенциальной компоненты напряженности поля $\mathbf{E}$ и равенство нулю нормальной компоненты плотности тока $\mathbf{j}$) в данной задаче удовлетворяет простейшее (радиально симметричное) решение $\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 A/r^2$ ($A = \text{const}$, r — расстояние до центра сферического электрода, $\mathbf{r}_0$ — соответствующий единичный радиус-вектор). Отсюда находим: плотность тока в электролите $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \mathbf{r}_0\sigma A/r^2$, полный ток $I = 2\pi r^2(\mathbf{j}\,\mathbf{r}_0) = 2\pi\sigma A$, потенциал электрода

$$\varphi = \int\limits_a^\infty E_r\,dr = A/a$$

и сопротивление электролита $R = = \varphi/I = (2\pi\sigma a)^{-1}$. При заданных в условии значениях параметров $R \simeq 5,3 \cdot 10^{-2}$ Ом.

3.5. *Решение.* С помощью метода изображений задача сводится к отысканию распределений поля и тока, создаваемых в однородной безграничной среде с проводимостью σ двумя одинаковыми идеально проводящими сферическими электродами: тем, который задан в условии задачи (нижний электрод на рис. 15) и его зеркальным изображением в границе электролита $z = 0$. Знаки и величины токов I, стекающих с обоих электродов, одинаковы (именно в этом случае будет выполнено требуемое граничное условие $j_n = 0$ для нормальной компоненты плотности тока на границе). Данная задача полностью аналогична электростатической задаче расчета поля двух одноименно заряженных металлических сфер (с радиусами $a \ll h$) в однородном диэлектрике.

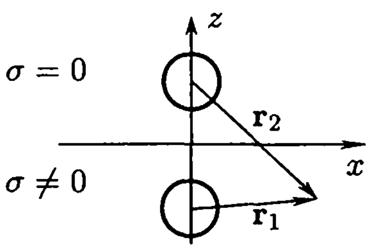


Рис. 15

Согласно принципу суперпозиции, потенциал φ любой точки пространства равен сумме потенциалов φ_1, φ_2, создаваемых каждым электродом по отдельности, причем благодаря условию $a \ll h$ при расчете каждого из этих потенциалов присутствием другого электрода можно пренебречь (его учет дал бы в решении поправки порядка $(a/h)^3$, обусловленные наведенными дипольными моментами шаров). В системе координат, изображенной на рис. 15, для области $z < 0$ имеем: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_{1,2} = Q/r_{1,2}$, где $Q = \text{const}$, $r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm h)^2}$ (центры электродов лежат в точках $z = \mp h$ на оси z; ось y перпендикулярна плоскости рисунка); напряженность поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_{1,2} = Q\mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}^3$

($\mathbf{r}_{1,2}$ — радиусы-векторы, соответствующие расстояниям $r_{1,2}$); плотность тока $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_{1,2} = \sigma Q\,\mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}^3$. Полный ток, протекающий через любую замкнутую поверхность, окружающую электрод: $I = 4\pi r_1^2 |\mathbf{j}_1| = 4\pi\sigma Q$; потенциал электрода: $\varphi_0 = \varphi_1(a)+\varphi_2(2h) = (Q/a)+(Q/2h)$; сопротивление среды между электродом и бесконечностью: $R = \varphi_0/I = (4\pi\sigma a)^{-1}\left(1 + \dfrac{a}{2h}\right)$.

3.6. $\mathbf{j} = \dfrac{I}{2\pi}\left(\dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right)$; $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы, начала которых лежат в точках касания проволочек с электролитом.

3.7. $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma a}\left[1 + \dfrac{a}{4h_1} + \dfrac{a}{4h_2} - \dfrac{a}{l} - a(l^2 + 4h_1h_2)^{-1/2}\right]$.

3.8. $R = \dfrac{1}{4\pi\sigma a}\left[1 + \dfrac{a}{2h} - \dfrac{a}{2l} - \dfrac{a}{2}(l^2 + h^2)^{-1/2}\right]$.

3.9. Система изображений представляет собой набор одинаковых источников I, расположенных в вершинах правильного $2n$-угольника со стороной $2h$ в однородной проводящей среде; $\mathbf{j} = \mathbf{r}\,n\,I/(2\pi r^3)$.

3.10. $\mathbf{E} = \dfrac{I}{2\pi\sigma}\left(\dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \dfrac{a}{b}\dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right)$; $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – радиусы-векторы, начала которых лежат соответственно в точке касания проволочки с электролитом P и в «инверсной» с ней точке Q, лежащей на прямой OP на расстоянии $b' = a^2/b$ от центра плоской поверхности электролита O.

3.11. $\mathbf{j} = \dfrac{\sigma U r_1 r_2 \mathbf{r}}{(r_2 - r_1)r^3}$, $R = \dfrac{r_2 - r_1}{2\pi\sigma r_1 r_2(1 - \cos\theta)}$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор с началом в вершине конуса.

3.12. *Решение.* Напряженность поля внутри слоя (при $|y| < L$): $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma = \mathbf{x}_0(j/\sigma_0)(1 + a\cos kx)$. Потенциал $\varphi(x, y)$ вне слоя (при $|y| > L$) определяется как решение уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$, удовлетворяющее при $y = \pm L$ граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{j}{\sigma_0}(1 + a\cos kx)$$

(вытекающему из требования непрерывности тангенциальной компоненты поля на границах слоя) и условию ограниченности ($\varphi \neq \infty$) при $y \to \pm\infty$. Такое решение представляет собой сумму двух частных решений уравнений Лапласа, отыскиваемых методом разделения переменных:

$$\varphi = -\frac{j}{\sigma_0}x - \frac{ja}{\sigma_0 k}\sin kx\, \exp(\pm ky + kL).$$

Соответствующее выражение для напряженности поля вне слоя:

$$\mathbf{E} = \frac{j}{\sigma_0}[\mathbf{x}_0 + a(\mathbf{x}_0 \cos kx \pm \mathbf{y}_0 \sin kx)\exp(\pm ky + kL).$$

(знаки + и − относятся соответственно к областям $y < -L$ и $y > L$).

3.13. а) $\varphi = -(U/2b)y, \quad j_y = \sigma U/2b;$

б) $\varphi = -(U/\pi b)\int\limits_0^\infty k^{-2} \sin kb \sin ky \exp(\pm k|x| + ka)\, dk.$

3.14. а) $\varphi = (U/2\pi)(\theta - \pi),\ j_\theta = -(\sigma U/2\pi r);$

б) $R = (2\pi/\sigma)\ln^{-1}(b/a);$

в), г) $\varphi = -(U/\pi)\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin n\theta\, f_n(r),$

$f_n(r < a) = (r/a)^n, \quad f_n(r > b) = (b/r)^n.$

3.15. а) $Y = 2\pi\sigma/\ln(b/a).$

б) *Решение.* Запишем уравнения для компонент электрического поля $\mathbf{E}$ и плотности тока $\mathbf{j}$, выражающие потенциальность вектора $\mathbf{E}$ ($\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$) и закон сохранения заряда ($\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$), в цилиндрических координатах z, r (r — расстояние до оси симметрии z):

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial E_r}{\partial z}, \quad r\frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial (r i_r)}{\partial r}. \tag{1}$$

Из условий непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля E_z и нормальной компоненты плотности тока j_r на границах металла и изолятора ($r = a, r = b$) при заданном в условии задачи соотношении между их проводимостями следует, что в металле поле и ток направлены почти точно по оси z ($E_z \gg E_r$), а внутри изолятора — по радиусу ($E_r \gg E_z$). Это позволяет, интегрируя по радиусу в пределах от $r = 0$ до $r = b$ уравнения (1) и используя соотношения

$$U(z) = \int\limits_a^b E_r\, dr = 2\pi a j_r(a) Y^{-1},\ I(z) = \int\limits_0^a 2\pi r j_z\, dr = E_z(a)\,\rho^{-1},$$

определяющие напряжение $U(z)$, силу тока $I(z)$ и погонные параметры кабеля ρ и Y, получить следующие дифференциальные уравнения для функций $U(z)$, $I(z)$:

$$\frac{dU}{dz} = -2\rho I, \quad \frac{dI}{dz} = -YU. \tag{2}$$

Выражение для входящей сюда погонной проводимости утечки Y приведено в ответе к предыдущему пункту этой задачи. Решение уравнений (2) при заданном напряжении на входе $U(0) = U_0$ имеет вид: $U = U_0 \exp(-\kappa z)$, $I = U_0\sqrt{Y/2\rho}\,\exp(-\kappa z)$, где $\kappa = \sqrt{2\rho Y}$. Сопротивление на входе кабеля (как и в любом другом его сечении $z = \text{const}$)

$$R = U/I = \sqrt{2\rho/Y} = \sqrt{(\rho/\pi\sigma)\ln(b/a)}.$$

3.16. *Решение*. Пользуясь равенствами

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{a}] = \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

помещая источник в начало координат и направляя оси x, y, z вдоль главных осей тензора S_{ik}, из уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \partial j_i/\partial x_i = I\delta(\mathbf{r})$$

получаем следующее уравнение для потенциала:

$$S_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + S_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + S_3\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -I\delta(\mathbf{r}).$$

В новых переменных $x' = x/\sqrt{S_1}$, $y' = y/\sqrt{S_2}$, $z' = z/\sqrt{S_3}$ это уравнение и его решение имеют тот же вид, что и в изотропной среде:

$$\Delta'\varphi = -I(S_1S_2S_3)^{-1/2}\delta(\mathbf{r}').$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{I}{4\pi(S_1S_2S_3)^{1/2}r'} = \frac{I}{4\pi(S_1S_2S_3)^{1/2}}\left(\frac{x^2}{S_1} + \frac{y^2}{S_2} + \frac{z^2}{S_3}\right)^{-1/2}.$$

Как видим, потенциал определяется лишь симметричной частью тензора проводимости и не зависит от вектора $\mathbf{a}$.

Определяя на основании полученного выражения для φ проекции плотности тока при $\mathbf{a} = 0$

$$j_x = -S_1 \partial\varphi/\partial x, \;\; j_y = -S_2 \partial\varphi/\partial y, \;\; j_z = -S_3 \partial\varphi/\partial z,$$

получаем $\mathbf{j} = \mathbf{r} I \left[4\pi\sqrt{S_1 S_2 S_3}(r')^3\right]^{-1}$, где $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 x + \mathbf{y}_0 y + \mathbf{z}_0 z$, т.е. вектор $\mathbf{j}$ при $\mathbf{a} = 0$ имеет только радиальную компоненту.

3.17. $E_\theta = 0, \;\; E_r = (U/r)\ln^{-1}(b/a), \;\; j_r = \sigma_{rr} E_r, \;\; j_\theta = \sigma_{r\theta} E_r.$

3.18. а) $q(x) = \dfrac{CU^2}{16a\sqrt{|x|}}$; б) $R = \dfrac{4\sqrt{a}}{C}, \; Q = \dfrac{CU^2}{4\sqrt{a}}$.

3.19. *Решение.* Воспользуемся известным решением аналогичной задачи электростатики. Напряженность поля $\mathbf{E}_i$ внутри шара с диэлектрической проницаемостью ε, помещенного в среду с проницаемостью ε_0, равна $\mathbf{E}_i = 3\varepsilon_0 \mathbf{E}_0/(\varepsilon + 2\varepsilon_0)$, где $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$ — напряженность поля на большом расстоянии от шара. Ввиду совпадения уравнений и граничных условий для векторов плотности тока $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ и электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, поле внутри проводящего шара определяется путем замены ε на σ и ε_0 на σ_0: $\mathbf{E}_i = 3\sigma_0 \mathbf{E}_0/(\sigma + 2\sigma_0)$. Мощность джоулевых потерь в проводящем шаре $Q = \sigma|\mathbf{E}_i|^2 = 9\sigma\sigma_0^2|\mathbf{E}_0|^2/(\sigma + 2\sigma_0)^2$. Максимум этой величины (при фиксированных σ_0 и $|\mathbf{E}_0|$) достигается при $\sigma = 2\sigma_0$.

3.20. $\mathbf{j} = \dfrac{I}{2\pi}\left(\dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2^2}\right)$; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — двумерные радиусы-векторы в плоскости поперечного сечения системы, начала которых лежат соответственно на оси провода и в «инверсной» с ним точке на расстоянии $b' = a^2/b$ от оси цилиндра.

Указание. Задача может быть решена методом изображений. Как нетрудно показать, граничному условию $\varphi = 0$ на поверхности цилиндра удовлетворяет потенциал, создаваемый двумя тонкими параллельными проводами в однородной безграничной среде. Один из этих проводов — тот, который задан в условии задачи, другой — его «изображение» в цилиндре; ось цилиндра и оба провода лежат в одной плоскости; расстояния от оси до первого провода b и до его изображения b' связаны преобразованием инверсии: $bb' = a^2$; ток I (приходящийся на единицу длины системы), стекающий в среду с первого провода, полностью замыкается на втором.

3.21. $\mathbf{j} = \dfrac{I}{2\pi}\left(\dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} + \dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} - \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}\right)$, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — те же двумерные радиусы-векторы, что и в предыдущей задаче, $\mathbf{r}$ — двумерный радиус-вектор, начало которого лежит на оси цилиндра.

Указание. Задача, как и предыдущая, решается методом изображений. Потенциал на поверхности цилиндра удовлетворяет граничному условию $\partial\varphi/\partial n = 0$, вытекающему из условия отсутствия на границе проводника и изолятора нормальной компоненты плотности тока. Выполнение этого граничного условия в однородной проводящей среде обеспечивается тремя двумерными источниками: два из них — те же, что и в предыдущей задаче, но стекающие с них в среду токи I одинаковы как по величине, так и по знаку; третий источник — нить, лежащая на оси цилиндра; стекающий с нее ток равен $-I$.

3.22. $\varphi \sim J_1(\kappa r)\cos\theta$; r, θ — полярные координаты на поверхности электролита (r - расстояние до центра, θ — угол, отсчитываемый от диаметра, параллельного отрезку, соединяющему центры электродов); $J_1(\kappa r)$ — функция Бесселя; $\kappa = \nu/a$; в случае (1) $\nu \simeq 1,84$ — первый корень уравнения $J_1'(x) = 0$; в случае (2) $\nu \simeq 3,83$ — первый корень уравнения $J_1(x) = 0$.

Указания. Строя последовательно зеркальные изображения данной пары источников (электродов) в дне сосуда и в поверхности электролита, приходим к задаче отыскания потенциала, создаваемого бесконечным рядом таких источников в бесконечной круглой трубе, заполненной однородной средой. Эта задача аналогична электростатическим задачам 2.28, 2.30. Ее решение представляется в виде суммы частных решений уравнения Лапласа вида $\varphi_{mn} \sim J_m(\kappa_{mn}r)\cos m\theta \exp(-\kappa_{mn}|z - z_k|)$, где z_k — координаты плоскостей, в которых лежат источники и их изображения. Собственные значения κ_{mn} зависят от вида граничного условия на боковой стенке сосуда ($r = a$): в случае (1) $\partial\varphi_{mn}/\partial r = 0$, в случае (2) $\varphi_{mn} = 0$.

4.1. $H_z = \dfrac{4\pi}{c} j_0 L \arctan\dfrac{y}{L}$.

4.2. $H_\varphi = \dfrac{2\pi j_0}{\alpha c r}\left(1 - \exp(-\alpha r^2)\right)$.

4.3. в) $r < a$: $\quad H_z = \dfrac{4\pi}{c} i \sin\alpha, \quad A_\varphi = \dfrac{2\pi}{c} i r \sin\alpha$; $\quad r > a$:

$$H_\varphi = \frac{4\pi}{cr} i a \cos\alpha,\ A_z = -\frac{4\pi}{c} i a \cos\alpha \ln\frac{r}{a},\ A_\varphi = \frac{2\pi}{cr} i a^2 \sin\alpha.$$

При заданных в условии значениях параметров $H_\varphi = 2,5\cdot 10^{-4}$ А/м.

4.4. Поле $\mathbf{H}$ не изменится: во внутренней области $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \dfrac{4\pi}{c} i$, во внешней $\mathbf{H} = 0$.

4.5. Поле совпадает с полем прямого линейного тока $I = cp_0^{(m)}$, текущего по оси z: $H_\varphi = 2I/(cr) = 2p_0^{(m)}/r$, где r — расстояние до оси z.

4.6. $\dfrac{I_1}{I_2} = \ln\left|\dfrac{l - r_2}{l + r_1}\right| \cdot \ln^{-1}(r_2/r_1)$.

4.7. $H_x = -\dfrac{2i}{c}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a+x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{a-x}{y}\right)$,

$H_y = \dfrac{i}{c}\ln\dfrac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$. (Лента лежит в плоскости $x\,z$, координаты ее краев $x = \pm a$, ток течет в направлении оси z).

4.8. Круг. *Указание*: использовать тот же метод, что при решении задачи 1.34.

4.9. $H_z = \dfrac{2\pi}{c} a^2\, I(a^2 + z^2)^{-3/2}$.

4.10. $H(0) = \dfrac{\alpha}{c} I\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$; при $r \gg r_2$ в плоскости контура $H(r) = \dfrac{\alpha I}{2cr^3}(r_2^2 - r_1^2)$.

4.11. *Решение*. Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ в любой точке P определяется интегралом по площади кольца: $\mathbf{A} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\iint(\mathbf{i}/R)\,ds$, где $\mathbf{i}$ — вектор поверхностной плотности тока, $R = |\mathbf{R}|$, $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из точки Q на поверхности интегрирования в точку P. Вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\iint[\mathbf{i}\times\mathbf{R}]R^{-3}\,ds$$

(при вычислении $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ учтено, что $\nabla R^{-1} = -\mathbf{R}R^{-3}$, а вектор $\mathbf{i}$ от координат точки P не зависит). а) На оси симметрии z поле имеет единственную компоненту

$$B_z = \frac{2\pi i}{c}\int\limits_a^b \frac{\sin\theta}{R^2} r\,dr = \frac{2\pi i}{c}\int\limits_a^b \frac{r^2\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

где r и z — расстояния от центра кольца до точек Q и P соответственно, θ — угол, образуемый вектором $\mathbf{R}$ с осью z. Выполняя интегрирование, находим

$$B_z = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} + \ln\frac{b+\sqrt{b^2+z^2}}{a+\sqrt{a^2+z^2}}\right).$$

б) При $|\mathbf{r}| >> b$ имеем поле магнитного диполя с моментом

$$\mathbf{m} = (2c)^{-1}\iint \mathbf{r}'\times\mathbf{i}\, ds' = \mathbf{z}_0(\pi i/3c)(b^3 - a^3)$$

4.12. $H_z = \dfrac{2\pi i}{c}\left(\dfrac{L-z}{\sqrt{a^2+(L-z)^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$

(одно из оснований цилиндра лежит в плоскости $z = 0$).

4.13. а) $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0(4\pi/c)i_0$;

б) $H_z(r < a) = (2\pi/c)i_0$, $H_z(r > a) = 0$;

в) вне цилиндра $\mathbf{H} = \mathbf{r}\dfrac{\pi a^2 i_0}{cr^3}$;

внутри цилиндра $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0\dfrac{4\pi i_0}{c} + \mathbf{r}\dfrac{\pi a^2 i_0}{cr^3}$;

г) $\Phi_0 = 2\pi^2 a^2 i_0/c$.

4.14. а) $j_r = \dfrac{I}{2\pi r^2(1-\cos\theta_0)}$;

б) $\theta > \theta_0$: $H_\varphi = \dfrac{2I}{cr\sin\theta}$,

$\theta < \theta_0$: $H_\varphi = \dfrac{2I}{cr(1-\cos\theta_0)}\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$.

Указание. Использовать уравнение Максвелла, определяющее циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру, и осевую симметрию задачи.

4.15. а) $H_\varphi = \dfrac{I}{cr}\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$;

б) $\theta < \pi/2$: $H_\varphi = \dfrac{I}{cr}\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$, $\theta > \pi/2$: $H_\varphi = -\dfrac{I}{cr}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}$;

в) $\mathbf{H} = 0$;

r, θ, φ — сферические кординаты; полярная ось z в случае (а) совмещена своей отрицательной частью с полупрямой, по которой течет ток, а в случае (б) перпендикулярна плоскости, по которой течет ток.

Указание. Использовать тот же метод, что и в предыдущей задаче 4.14, учитывая наряду с заданными токами проводимости также и токи смещения, обусловленные накоплением заряда в точке O. Скорость изменения величины этого заряда $dq/dt = I$. Порождаемое им электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q(t)\,\mathbf{r}/r^3$; плотность тока смещения $\mathbf{j}_d(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = = \mathbf{r}I/(4\pi r^3)$ ($\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки).

4.16. $H_z(\varphi) = -\dfrac{2i}{c}(\pi - \varphi)$; ось z совмещена с краем полуплоскости; φ — угол между полуплоскостью и прямой, перпендикулярной оси z ($0 < \varphi < 2\pi$).

4.17. $H_z = \dfrac{(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})I}{cxy}$ (ток течет по положительным полуосям y и x в $-y$ и $+x$ направлениях).

4.18. а) Поле можно рассчитать по закону Био-Савара, заменяя лист вторым полубесконечным проводом, перпендикулярным плоскости листа и расположенным со стороны, противоположной той, где ищется поле; б) поле над проводящим полупространством такое же, как в случае (а), а внутри него такое же, как в области $\theta < \theta_0 = \pi/2$ в задаче 4.14; в) поле над сверхпроводником рассчитывается как поле, создаваемое током, текущим по данному проводу и его зеркальному изображению в границе.

4.19. В цилиндрической системе координат r, φ, z (ось z совмещена с осью симметрии коаксиальной линии; линия лежит в области $z < 0$) имеем:

а) $j_r = \dfrac{I}{2\pi r l}$, $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma l}\ln\dfrac{b}{a}$;

б) $E_r = \dfrac{I}{2\pi\sigma l r}$;

в) внутри втулки ($-l < z < 0$) $H_\varphi = -\dfrac{2Iz}{crl}$, $S_z = -\dfrac{z}{\sigma}\left(\dfrac{I}{2\pi l r}\right)^2$; вне втулки ($z < -l$) $H_\varphi = \dfrac{2I}{cr}$, $S_z = \dfrac{1}{\sigma l}\left(\dfrac{I}{2\pi r}\right)^2$.

4.20. а) $\mathbf{H} = \mathbf{b}_0\dfrac{\pi\sqrt{2}I}{ca}$; б) поле магнитного диполя с моментом $\mathbf{m} = \mathbf{b}_0\,\pi a^2 I/(\sqrt{2}\,c)$, где $\mathbf{b}_0$ — единичный вектор в направлении биссектрисы угла, образованного плоскостями полуокружностей.

4.21. $\mathbf{m} = \dfrac{\pi}{c} n a^2 I\left(\mathbf{z}_0 + \mathbf{y}_0\dfrac{2b}{a}\right)$, где $\mathbf{y}_0$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости $\varphi = 0$.

4.22. $H_r = -\dfrac{1}{2} r \dfrac{\partial H_z}{\partial z}$. *Указание*: см. решение задачи 1.11.

4.23. $H_x = \dfrac{2\pi i_0 z}{c|z|}\cos kx \exp(-k|z|)$,

$$H_z = -\frac{2\pi i_0}{c}\sin kx \exp(-k|z|).$$

4.24. В области $r < a$:

$$H_r = -\frac{2\pi\, i_0}{c}\sin n\varphi\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1},\ H_\varphi = -\frac{2\pi\, i_0}{c}\cos n\varphi\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1};$$

в области $r > a$:

$$H_r = -\frac{2\pi\, i_0}{c}\sin n\varphi\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1},\ H_\varphi = \frac{2\pi\, i_0}{c}\cos n\varphi\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1};$$

Указания. Ищем вектор-потенциал в виде $\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 R(r)\cos n\varphi$. Функцию $R(r)$ определяем в областях $r < a$ и $r > a$ с помощью уравнения $\Delta A_z = 0$, требуя, чтобы при $r \to 0$ и $r \to \infty$ величина A_z оставалась конечной. Выражаем через A_z компоненты вектора напряженности магнитного поля H_r, H_φ и определяем вошедшие в решение неизвестные константы, удовлетворяя условию непрерывности нормальной составляющей H_r и условию скачка тангенциальной составляющей H_φ на границе $r = a$.

4.25. $r > a$: $\mathbf{H} = \dfrac{2m\cos\theta}{r^3}\mathbf{r}_0 + \dfrac{m\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{\theta}_0$; $m = \dfrac{4\pi}{3c}a^3 i_0$;

$r < a$: $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0\dfrac{8\pi\, i_0}{3c}$.

4.26. Поле $\mathbf{H}$ не изменится, т.к. оно удовлетворяет граничным условиям непрерывности тангенциальной компоненты H_τ и нормальной компоненты $B_n = \mu H_n = 0$ на поверхности шара.

4.27. а), б) $H_\varphi = \dfrac{2I}{cr}$; в) $H_\varphi = \dfrac{4\pi}{cr}I\left[\mu(\varphi)\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\mu(\varphi)}\right]^{-1}$.

г) *Решение.* Ищем вектор магнитной индукции в виде $\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}_0 B_\varphi(r)$ (от азимутального угла φ величина B_φ не зависит в силу уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi} = 0$). При этом вектор напряженности поля $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varphi}_0 B_\varphi(r)[\mu_1(\varphi)\mu_2(r)]^{-1}$. Применяя уравнение $\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \dfrac{4\pi}{c}I$ (теорема о циркуляции вектора $\mathbf{H}$) к контуру, представляющему собой окружность радиуса r с центром на оси z, лежащую в плоскости $z = \text{const}$ ($d\mathbf{l} = \boldsymbol{\varphi}_0 r\, d\varphi$), получаем

$$B_\varphi = \frac{4\pi}{cr}I\,\mu_1(r)\left[\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\mu_2(\varphi)}\right]^{-1},\ H_\varphi = \frac{B_\varphi}{\mu_1(r)\mu_2(\varphi)}.$$

4.28. $B_\varphi = \dfrac{4I}{cr} \cdot \dfrac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.

4.29. $H_z = \dfrac{4\pi}{c} n I_1$ (внутри соленоида); $H_z = 0$ (вне соленоида),

$$H_\varphi = \frac{4\pi I_2}{c r \mu(\varphi)} \left[\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\mu(\varphi)} \right]^{-1} \quad \text{(во всем пространстве).}$$

4.30. Пусть контур с током I расположен в среде 1. Тогда поле в этой области пространства совпадает с полем данного контура и его зеркального изображения с током $I' = I \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$ в однородном пространстве с $\mu = \mu_1$. Поле по другую сторону границы совпадает с полем одного данного контура с током $I'' = I \dfrac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ в однородной среде с $\mu = \mu_2$.

4.31. а) Линии тока (и их направления) отражаются зеркально симметрично; б) линии тока отражаются зеркально симметрично, но их направления меняются на противоположные.

4.32. а) $\mathbf{m} = a^3 \mathbf{H}_0$; б) $\mathbf{m} = -\dfrac{1}{2} a^3 \mathbf{H}_0$.

4.33. К внешнему полю $\mathbf{H}_0$ добавляется (вне оболочки) поле магнитного диполя с моментом

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 b^3 \frac{a^3(2\mu + 1) + 2b^3(1 - \mu)}{a^3(\mu - 1) - b^3(\mu + 2)}.$$

4.34. В области, окруженной оболочкой, ($r < a$):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \frac{9\, b^3\, \mu}{b^3(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2a^3(\mu - 1)^2}.$$

Указания. Задачи 4.33, 4.34 решаются методом, использованным при решении сходной задачи электростатики 2.40. Отличия заключаются лишь в конкретном виде граничных условий, которым удовлетворяет в рассматриваемых системах скалярный потенциал ψ магнитного поля ($\mathbf{H} = -\nabla\psi$) на поверхностях магнетика: в задаче 4.33 на внутренней границе оболочки, совпадающей с границей сверхпроводника, $\partial\psi/\partial n = 0$; в задаче 4.34 нужно находить решения в трех областях, «сшивая» на их границах потенциал ψ и нормальную компоненту вектора магнитной индукции $B_n = -\mu \partial\psi/\partial n$ (со своим значением μ в каждой области).

4.36. б) $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r}_1) = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1(\mathbf{r}_2)$; $\mathbf{H}_i(\mathbf{r}_k)$ — поле, созданное диполем i в точке расположения диполя k.

4.37. *Решение.* На большом расстоянии от шара поле определяется величиной магнитного дипольного момента данной системы $\mathbf{m}$, направленного по оси ее симметрии z:

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi, \;\; \psi = \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{r^3}, \;\; \mathbf{m} = \mathbf{z}_0\, m$$

($\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки). Величину дипольного момента найдем с помощью теоремы взаимности. Пусть на большом расстоянии от шара $r \gg b$ в той же плоскости, что и рамка, заданная в условии задачи, (назовем ее рамкой S_1) лежит еще одна рамка S_2 того же радиуса a, в которой течет такой же ток I. Рамка S_1 создает в окрестности рамки S_2 поле с индукцией $\mathbf{B}_{21} = -\dfrac{\mathbf{m}}{r^3}$, поток которой через площадь S_2 равен $\Phi_{21} = \pi a^2 \dfrac{m}{r^3}$. Рамка S_2 создает внутри шара однородное (ввиду условия $r \gg b$) поле с индукцией

$$\mathbf{B}_{12} = -\frac{3\,\mu\mathbf{m}_2}{(\mu+2)\,r^3},$$

где $\mathbf{m}_2 = \mathbf{z}_0\,\dfrac{\pi}{c}\,a^2 I$ — магнитный дипольный момент рамки S_2. Поток вектора $\mathbf{B}_{12}$ через площадь рамки S_1 равен

$$\Phi_{12} = \frac{3\,\pi^2\,a^4\,\mu\, I}{c(\mu+2)r^3}.$$

Согласно теореме взаимности, $\Phi_{21} = \Phi_{12}$, откуда

$$m = \frac{3\,\pi\, a^2\,\mu\, I}{c(\mu+2)}.$$

4.38. а) *Решение.* Вектор магнитной индукции внутри шара $\mathbf{B} = \dfrac{3\,\mu}{\mu+2}\mathbf{H}_0$. Полагая $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и используя теорему Стокса, запишем искомый магнитный поток в виде:

$$\Phi = \iint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}, \qquad (*)$$

где циркуляция вектора $\mathbf{A}$ вычисляется по заданному в условии задачи контуру. Разложим вектор $\mathbf{B}$ на продольную (параллельную полярной оси z) и поперечную (лежащую в плоскости $z = \mathrm{const}$) компоненты: $\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 B_z + \mathbf{B}_\perp$. Соответственно этому вектор-потенциал представим в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, определяя $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ из условий $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1 = \mathbf{z}_0 B_z$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_\perp$ и соображений максимальной простоты вычисления контурного интеграла (*):

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_0 B_z a \sin\theta; \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{z}_0(y\,B_x - x\,B_y)$$

(оси x и y направляем соответственно перпендикулярно плоскостям $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 0$). Используя равенства $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi$, $dl_\varphi = a\sin\theta d\varphi = 2\,a\,n\,\sin\theta d\theta$, $dl_z = -a\,\sin\theta d\theta$, вычисляем контурные интегралы

$$\oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} = \frac{\pi}{2}\,a^2\,n\,B_z, \quad \oint \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{\pi}{2}\,a^2\,B_y\,f(n),$$

$$f(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta\cos 2n\theta\,d\theta,$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -1/2, \quad f(n > 1) = 0,$$

и находим магнитный поток $\Phi = \dfrac{3\,\pi\,\mu\,a^2}{2(\mu+2)}\,[nH_{0z} + f(n)H_{0y}]$;

б) $m_z = \dfrac{3\,\pi\,a^2\,\mu\,n\,I}{2c(\mu+2)}$, $m_y = \dfrac{3\,\pi\,a^2\,\mu\,I}{2c(\mu+2)}f(n)$, направления осей координат и функция $f(n)$ те же, что в пункте (а).

4.39. Внутри шара $\mathbf{H} = -\dfrac{4\pi}{3}\mathbf{M}$; вне шара — поле диполя с моментом $\mathbf{m} = \dfrac{4\pi}{3}a^3\mathbf{M}$.

4.40. а), б) $H(0) = 4\,M_0\left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}$; в случае (а) поле направлено по биссектрисе угла α; в случае (б) — перпендикулярно биссектрисе;

в) поле направлено вдоль стороны BC и равно $H(0) = 2\,M_0\ln\dfrac{r_2}{r_1}\sin\alpha$.

4.41. $\mathbf{H}_0 = 2\pi\mathbf{M}\cos\theta\sin^2\theta\ln\dfrac{r_2}{r_1}$.

Указание к задачам 4.40, 4.41. Найти поверхностную плотность связанного магнитного заряда на границах тел и рассчитать создаваемые этим зарядом поля.

4.42. а) $H \sim \ln r$; б) оптимальные углы: для клина $\alpha_0 = \pi/2$, для конуса $\theta_0 = \arccos(1/\sqrt{3}) \simeq 55°$; для конуса коэффициент перед $\ln r$ в выражении для H больше, чем для клина, в $2\pi/(3\sqrt{3}) \simeq \simeq 1,21$ раз.

4.43. С каждой стороны слоя поле совпадает с полем удвоенного линейного тока в вакууме. Бесконечность магнитного потока Φ внутри слоя следует из расходимости (при любом r) интеграла $\int_r^\infty H_n\,dx \sim \int_r^\infty \frac{1}{x}\,dx$, определяющего поток, выходящий из слоя через каждую из его границ в области $r < x < \infty$ ($H_n \sim 1/x$ — нормальная компонента поля с внешней стороны границы, x — расстояние до провода).

4.44. $\Phi \sim r^{-1}$.

4.45. *Решение.* Пренебрегая в первом приближении потоком рассеяния, будем считать, что векторы напряженности поля $\mathbf{H}_i$ и магнитной индукции $\mathbf{B}_i$ внутри магнитопровода однородны и имеют только продольные компоненты $H_{il} = \dfrac{4\pi}{cL} N I$, $B_{il} = \mu H_{il}$ (I — сила тока в катушке, N — полное число витков, L — длина магнитпровода). Вне катушки поле $\mathbf{H}$ потенциально: $\mathbf{H} = -\nabla\psi$, и, поскольку $H_{il} = \mathrm{const}$, потенциал ψ внутри магнитопровода и на его поверхности является линейной функцией продольной координаты l, отсчитываемой от одного конца катушки: $\psi(l) = \left(\frac{1}{2}L - l\right) H_{il}$ (полагаем для определенности $\psi = 0$ при $l = L/2$, т.е. в наиболее удаленном от катушки сечении S). Как и в аналогичных задачах электростатики и токовой статики, при $a \ll L$ величина $\psi(l)$ на границе магнитопровода связана с линейной плотностью κ_m эквивалентного магнитного заряда и с радиальной компонентой H_r вектора $\mathbf{H}$ на внешней стороне границы универсальными приближенными соотношениями (тем более точными, чем больше величина $\ln(L/a)$): $\psi(l) \simeq -2\kappa_m(l)\ln(a/L)$; $H_r \simeq 2\kappa_m(l)/a \simeq -a^{-1}\psi(l)\ln^{-1}(a/L)$. Последнее равенство позволяет рассчитать поток рассеяния $\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi(S)$ на участке $0 < l < L/2$, обусловленный наличием радиальной компоненты поля H_r: $\Delta\Phi = 2\pi a \int\limits_0^{L/2} H_r\,dl \simeq \frac{\pi}{4} L^2 H_{il} \ln^{-1}(L/a)$. Продольный магнитный поток внутри катушки $\Phi_0 = \pi a^2 \mu H_{il}$; искомое отношение

$$\alpha = \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = \left(\frac{L}{2a}\right)^2 \left(\mu \ln \frac{L}{a}\right)^{-1}.$$

5.1. а) $W = q^2/2a$; б) $W = 3q^2/5a$.

5.2. *Решение.* Искомая энергия взаимодействия w равна разности полной энергии системы и собственной энергии внешних источников в отсутствие тела:

$$w = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dv - \frac{1}{2}\int \rho\varphi_0\, dv = \frac{1}{2}\int \rho\varphi_i\, dv.$$

Здесь $\rho(\mathbf{r})$ — плотность внешних зарядов, $\varphi(\mathbf{r})$ — полный потенциал, $\varphi_0(\mathbf{r})$ — потенциал, создаваемый внешними зарядами в отсутствие тела, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки, $\varphi_i(\mathbf{r}) = \varphi - \varphi_0$ – потенциал, создаваемый зарядами (свободными или связанными), индуцированными на теле внешним полем $\mathbf{E} = -\nabla\varphi_0$. Обозначая плотность этих зарядов через ρ_i, на основании теоремы взаимности имеем $w = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \rho_i\varphi_0\, dv$. В области, где $\rho_i \neq 0$, поле $\mathbf{E}$ по условию задачи однородно и, следовательно, $\varphi_0 = -(\mathbf{rE}) +$ const. Отсюда, с учетом равенства нулю полного заряда тела, находим $w = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{pE})$, где $\mathbf{p} = \displaystyle\int \rho_i \mathbf{r}\, dv$ — дипольный момент тела.

Если диполь «жесткий», т.е. величина $\mathbf{p}$ не зависит от $\mathbf{E}$, для подсчета энергии взаимодействия w из полной энергии системы необходимо, наряду с собственной энергией внешних зарядов, вычесть также собственную энергию сторонних зарядов тела, ответственных за образование его дипольного момента:

$$w = \frac{1}{2}\int (\rho'\varphi - \rho\varphi_0 - \rho_1\varphi_1)\, dv = \frac{1}{2}\int \rho\varphi_1\, dv + \frac{1}{2}\int \rho_1\varphi_0\, dv.$$

Здесь $\rho_1(\mathbf{r})$ — плотность сторонних зарядов на теле, создающих его дипольный момент $\mathbf{p} = \displaystyle\int \rho_1 \mathbf{r}\, dv$; $\varphi_1(\mathbf{r})$ — потенциал, создаваемый этими зарядами; $\rho' = \rho + \rho_1$. В силу теоремы взаимности оба слагаемых в последнем выражении для w равны друг другу и, следовательно, $w = \displaystyle\int \rho_1\varphi_0\, dv = -(\mathbf{pE})$.

5.3. а) $\mathbf{F} = \mathbf{p}\, q\, r^{-3} - 3\mathbf{r}\, q\, (\mathbf{pr}) r^{-5}$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор «заряд — диполь»;
б) $\mathbf{F} = 0$.

5.4. а) $w = -q^2/(4h)$, $F = -(q/2h)^2$;
б) $w = -(1/2)q^2a(b^2 - a^2)^{-1}$, $F = -q^2\,a\,b(b^2 - a^2)^{-2}$;
в) $w = -(1/2)q^2a^3b^{-2}(b^2 - a^2)^{-1}$,
$F = -q\,a\,b[(b^2 - a^2)^{-2} - b^{-4}]$;
г) $w = -(1/2)q^2a^3b^{-4}(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)^{-1}$,
$F = -2q^2\,a^3\,b^{-5}(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)^{-1}$;
(знак «минус» в выражении для силы F означает, что заряд притягивается к телу, с которым взаимодействует).

Указание. Энергия w и сила F взаимодействия точечного заряда с каждым из данных объектов определяются выражениями: $w = q\varphi/2$, $F = q\mathbf{E}$, где φ и $\mathbf{E}$ — потенциал и напряженность поля, создаваемые в точке расположения заряда всеми индуцированными в объекте распределенными зарядами (как свободными, так и связанными). В случаях (а), (б), (в) величины φ и $\mathbf{E}$ находятся методом изображений. В случае (г) поле, создаваемое шариком, представляет собой поле точечного диполя с моментом $\mathbf{p} = a^3(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)^{-1}\mathbf{E}_0$, где $\mathbf{E}_0 = \mathbf{z}_0 q/b^2$, $\mathbf{z}_0$ – единичный вектор в направлении от заряда к центру шарика.

5.5. а) $A = -\pi a^2 q\rho$; б) $A = \dfrac{1}{2}\pi^2\rho^2a^2b^3\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$.

5.6. в) $w = -\dfrac{1}{16}p^2h^{-3}(1 + \cos^2\theta)$.

5.7. $M = \dfrac{1}{4\pi}\varepsilon\, s\, l\, E_0^2 \sin\theta\cos\theta \qquad (1 \ll \varepsilon \ll l^2/s)$.

5.8. а) $A = \dfrac{1}{2}q^2b^2r_1^{-1}(r_1^2 - b^2)^{-1}$; б) $A = \dfrac{1}{2}q^2\left(\dfrac{r_1}{r_1^2 - b^2} - \dfrac{1}{r_2}\right)$.

5.9. $F = -6\,\pi^2a^6\Omega^2b^{-4} \simeq 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ Н.

5.10. Во внешнем поле полушария отталкиваются с силой $F = \dfrac{9}{16}a^2E_0^2$; после выключения внешнего поля они притягиваются с силой $F = \dfrac{9}{8}a^2E_0^2$.

Указание. Силу, действующую на каждое полушарие во внешнем поле, можно найти, учитывая, что на единицу площади проводника действует в направлении внешней нормали сила натяжения $T_n = \dfrac{1}{8\pi}E_n^2$. Величина нормальной компоненты поля E_n определяется из решения известной задачи о проводящем шаре во внешнем поле. После выключения внешнего поля полушария притягиваются как разноименно заряженные пластины плоского конденсатора.

5.11. $v_0 = E_0\sqrt{a^3/m}$. **5.12.** $\Delta C = a^3 d^{-2}(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)^{-1}$.

5.13. $F_n = -\dfrac{1}{8\pi} U^2 a\,(b - x)\,d^{-2}$; $F_x = -\dfrac{1}{8\pi} U^2\, a/d$.

5.14. $h = U^2(\varepsilon - 1)\,(8\,\pi\, d^2 \tau\, g)^{-1}$. *Указание.* Выразить полную (электрическую и потенциальную в поле тяжести) энергию системы W как функцию h. Величина h в положении равновесия определяется из условия $dW/dh = 0$ (производная берется при постоянном заряде пластин).

5.15. *Решение.* Объемная плотность силы в газе

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - 1)\nabla E^2 = \frac{1}{8\pi}\alpha\, n\,\nabla\, E^2$$

(E — напряженность поля). Сила, действующая на одну частицу, потенциальна:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{f}}{n} = \frac{\alpha}{8\pi}\nabla\, E^2 = -\nabla\Phi,\quad \Phi = -\frac{\alpha}{8\pi}E^2.$$

В поле этой силы газ в состоянии равновесия с постоянной температурой T имеет Больцмановское распределение:

$$n = n_0 \exp\,(-\Phi/kT),$$

(k — постоянная Больцмана). Внутри конденсатора

$$n = n_0 \exp\,(\alpha\, E_0^2/8\pi kT).$$

5.16. $F = -6\pi^2\left(\dfrac{a_1 a_2}{c}\right)^2 I_1 I_2 h(h^2 + a_2^2)^{-5/2}$;

$L_{12} = 2\pi^2 a_1^2 a_2^2 (h^2 + a_2^2)^{-3/2}$.

5.17. $L_1 = \dfrac{1}{2} + 2\,\ln\,(b/a)$.

5.18. $L = 4\pi^2 a^2 N^2 l^{-1}$.

5.19. *Решение.* Пусть по проводу течет ток I, создающий в пространстве поле с напряженностью $\mathbf{H}$. Энергия этого поля

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V H^2\, dv = \frac{1}{2c^2} L I^2.$$

Для определения величин W и L разобьем весь (бесконечный) объем интегрирования на три области: V_1, V_2, V_3. Область V_1

заключена между границей провода и поверхностью некоторой охватывающей его трубки, радиус которой R удовлетворяет условиям: $a \ll R \ll l$, $\ln(R/a) \gg \ln(l/R)$. Область V_2 – внутренняя область провода. Область V_3 — все остальное пространство. В области V_1 магнитное поле близко к полю бесконечного прямого провода с током: $H(r) \simeq 2I/(cr)$ (r — расстояние до осевой линии провода). Энергия поля в этой области

$$W_1 \simeq \frac{l\,I^2}{c^2}\int\limits_a^R \frac{dr}{r} = \frac{l\,I^2}{c^2}\ln\frac{R}{a},$$

или, ввиду условия $\ln(R/a) \gg \ln(l/R)$, $W_1 \simeq \dfrac{l\,I^2}{c^2}\ln\dfrac{l}{a}$. Оценим приближенно величины полей и запасенных энергий в областях V_2 и V_3. В области V_2 максимум поля $H_{\max} \sim I/(ca)$, запасенная энергия $W_2 \sim l\,I^2/c^2$. В области V_3 поле при увеличении r сначала (до значений $r \sim l$) изменяется приблизительно по тому же закону, что и в области 1 ($H \sim 2I/(cr)$), а затем (при $r > l$) убывает быстрее, чем $1/r$; энергия поля в этой области $W_3 \sim (l\,I^2/c^2)\ln(l/R)$. Таким образом, $W_1 \gg W_{2,3}$, так что полная энергия поля $W \simeq W_1$ и коэффициент самоиндукции $L = 2c^2W/I^2 \simeq 2l\ln(l/a)$.

5.20. $L = (\mu_1 + \mu_2)L_0/2$.

5.21. $L = 2\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)^{-1}L_0$.

5.22. $\Delta L = -\pi^2a^4/(4h^3)$.

5.23. *Решение*. Энергия взаимодействия внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ с телом, приобретающим в этом поле магнитный дипольный момент $\mathbf{m}$, равна $w_m = \dfrac{1}{2}(\mathbf{mH})$. Эта величина добавляется к собственной энергии тока I, создающего поле $\mathbf{H}$, и определяет поправку к коэффициенту самоиндукции $\Delta L = 2c^2w_m/I^2 = c^2(\mathbf{mH})/I^2 = c^2\alpha H^2/I^2$, где α – коэффициент магнитной поляризуемости тела ($\mathbf{m} = \alpha\mathbf{H}$). Невозмущенное поле в центре витка, согласно закону Био-Савара, $H = 2\pi I/(ca)$, так что $\Delta L = 4\pi^2\alpha/a^2$. Для шарика с магнитной проницаемостью μ коэффициент $\alpha = b^3\dfrac{\mu-1}{\mu+2}$; в случае (а) следует положить $\mu = 0$; при этом $\alpha = -b^3/2$ и $\Delta L = -2\pi b^3/a^2$; в случае (б) $\alpha = b^3$ и $\Delta L = 4\pi^2b^3/a^2$.

5.24. $F_z = \dfrac{1}{c}I\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -\dfrac{2\pi}{c}aIH_r$.

5.25. а) $F = 2\,s\,I_1\,I_2\,(c\,r)^{-2}$, $M = 0$; сила направлена к проводу, если в ближайшей к нему стороне рамки ток течет в ту же сторону;

б), в) $F = 0$, $M = 2\,s\,I_1\,I_2\,(c^2\,r)^{-1}$.

5.26. а) $F = \dfrac{2}{c^2} I_1 I_2 \left(\dfrac{a}{l}\right)^2 \left(1 - \dfrac{a^2}{4l^2}\right)^{-1}$;

б) $F = \dfrac{4}{c^2} I_1 I_2 \ln\left(1 - \dfrac{a^2}{4l^2}\right)$.

5.27. *Решение.* Коэффициент самоиндукции кольца $L = 2l\ln(l/r)$, где $l = 2\pi a$ (см. задачу 5.19). Сила натяжения проволоки, из которой изготовлено кольцо,

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial l}\right)_{I=\mathrm{const}} = (I^2/2c^2)\frac{\partial L}{\partial l} \simeq (I/c)^2\ln(l/r)$$

($W = LI^2/(2c^2)$ — магнитная энергия кольца); отсюда $I \simeq c\sqrt{F/\ln(l/r)}$. При заданных в условии значениях параметров $I \simeq 4900$ А.

5.28. $j_z \sim r^{-1/2}$.

5.29. $p = \dfrac{9}{32\pi} H_0^2 \sin^2\theta$; θ — угол между радиусом и вектором $\mathbf{H}_0$.

5.30. $p_i = \dfrac{8\pi^3 a^2 I^2 N^2}{c^2 l^2 (4\pi^2 a^2 + l^2)}$, $p_e = p_i \dfrac{l^2}{4\pi^2 a^2}$;

$p_e = p_i$ при $\alpha = \pi/4$.

5.31. $h = (3\,m^2/8\,M\,g)^{1/4}$, магнит ориентирован параллельно границе.

5.32. а), в) При $\mu < 1$ и для сверхпроводника положениями устойчивого равновесия являются минимумы абсолютной величины поля H;

б) при $\mu > 1$ устойчивое равновесие невозможно.

Указание. Определить силу, действующую на шарик, в дипольном приближении (дипольный момент $\mathbf{m} = \alpha\mathbf{H}$; сила $\mathbf{F} = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{H} = \frac{1}{2}\alpha\nabla H^2$); доказать утверждение, аналогичное сформулированному в задаче (1.15): вне области источников величина H^2 не может иметь максимумов.

6.1. *Решение.* Из уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \ \ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{D}, \ \ \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

получаем уравнение для ρ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0, \text{ откуда } \rho = \rho_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t\right).$$

При этом уравнениям Максвелла и начальным условиям удовлетворяют поля: $\mathbf{H} \equiv 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t\right)$.

6.2. $j_{n1} - j_{n2} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div}_s \mathbf{i}$, где $\operatorname{div}_s \mathbf{i}$ — поверхностная (двумерная) дивергенция поверхностной плотности тока $\mathbf{i}$.

6.3. *Решение.* Действуя оператором «div» на правую и левую части уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, учитывая, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и что векторы $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ и $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ зависят только от x и t, получаем уравнение $\partial \mathbf{j}_t/\partial x = 0$, где $\mathbf{j}_t = \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ – плотность полного тока (сумма тока проводимости $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ и тока смещения $\mathbf{j}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E})$). Из этого уравнения и условия $\mathbf{j}_t(x_0) = 0$ следует $\mathbf{j}_t(x,t) \equiv 0$, т.е. (в проекции на ось x) $\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E) + 4\pi\sigma E = 0$, что и является искомым уравнением для поля $E(x,t)$. Решение этого уравнения

$$E = \frac{\varepsilon(x,\,0)}{\varepsilon(x,\,t)}E(x,\,0)\exp\left(-4\pi\int\limits_0^t \frac{\sigma}{\varepsilon}\,dt\right).$$

Поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, из уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ получаем $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$; если при $t = 0$ $\mathbf{B} = 0$, то $\mathbf{B} \equiv 0$.

6.4. $U = U_0\left[1 - \frac{d}{l}f(t)\right]$, $\Omega = \pm\frac{q}{S}f(t)$, где $U_0 = \frac{4\pi q l}{\varepsilon S}$,

$$f(t) = 1 - \exp\left(-4\pi\frac{\sigma}{\varepsilon}t\right).$$

6.5. а) $I = 4\pi\, q\,\frac{\sigma}{\varepsilon}\exp\left(-4\pi\,\frac{\sigma}{\varepsilon}\,t\right)$; б) $\mathbf{H} = 0$.

6.6. Квазистационарное магнитное поле в однородной проводящей среде описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}.$$

Его частное решение, получаемое методом разделения переменных и удовлетворяющее заданному начальному условию, имеет вид

$$H_y = H_0 \sin kx \exp\left(-\frac{k^2c^2}{4\pi\sigma}t\right).$$

6.7. $\tau \sim 4\pi\sigma L^2/c^2$.

6.8. *Решение.* Комплексная амплитуда $\mathbf{E}$ переменного электрического поля удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0,$$

где $k^2 = (\omega/c)^2\varepsilon_c\mu$, $\varepsilon_c = -i\,4\pi\sigma/\omega$ – комплексная диэлектрическая проницаемость среды (действительной частью ε_c пренебрегаем в силу условия $\sigma \gg \omega$). Из этих уравнений следует, что рассматриваемое в задаче одномерное поле $\mathbf{E}(x)$ должно быть чисто поперечным: $E_x = 0$. Отличная от нуля поперечная компонента поля E_y описывается уравнением

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} + k^2E_y = 0,$$

решение которого при заданных граничных условиях представляет собой симметричную функцию x:

$$E_y = E_0 \operatorname{ch}^{-1}\left[\frac{a}{\delta}(1+i)\right] \cdot \operatorname{ch}\left[\frac{x}{\delta}(1+i)\right],$$

где $\delta = \sqrt{-2i/k^2} = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ — глубина проникновения поля в проводник (толщина скин-слоя).

6.9. а) $H_z = \dfrac{(i-1)c}{\omega\mu\delta} E_0 \operatorname{ch}^{-1}\left[\dfrac{a}{\delta}(1+i)\right] \cdot \operatorname{sh}\left[\dfrac{x}{\delta}(1+i)\right]$;

б) $\varphi(-a) = \pi/4$, $\varphi(a) = 5\pi/4$;

в) $\zeta(-a) = -\zeta(a) = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}} = \dfrac{1+i}{2}\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\pi\sigma}}$; г) $i_0 = (1-i)\sigma\delta E_0$;

д) $S_x = \dfrac{1}{2}\sigma\delta E_0^2 \exp\left(-\dfrac{2a}{\delta}\right)\left(-\sin\dfrac{2x}{\delta} - \operatorname{sh}\dfrac{2x}{\delta}\right)$; е) $Q = \dfrac{1}{2}\sigma\delta E_0^2$.

6.10. а) $E_y = -E_0\dfrac{\operatorname{sh}(\beta x)}{\operatorname{sh}(\beta a)}$; б) $E_y = E_0\dfrac{g(x)}{g(-a)}$,

где $g(x) = \operatorname{sh}(\beta x) + \dfrac{(i-1)c}{\omega\delta}\operatorname{ch}(\beta x)$, $\beta = \dfrac{1+i}{\delta}$, $\delta = \dfrac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$.

6.11. Уменьшится на 1/2.

6.12. $H_\varphi = \dfrac{\omega U_0 r}{2cd}\cos\omega t$ (r — расстояние до оси).

6.13. $E_\varphi = \dfrac{2\pi}{c^2} I_0 n\omega r \cos\omega t$ (r — расстояние до оси).

6.14. $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varphi}_0 \dfrac{i\omega p_0}{cr^2}\sin\theta \exp(i\omega t)$ (r, θ, φ – сферические координаты; диполь находится в начале координат, вектор $\mathbf{p}_0$ параллелен полярной оси z).

6.15. а) Магнитное поле такое же, как при постоянном токе;
б) Электрическое поле при $r \gg a$ совпадает с полем электрического диполя с моментом $p = \pi A a b^2 N/2c^2$, параллельным оси симметрии

6.16. а) $H_\varphi = -\dfrac{qv}{c} r\left\{[r^2+(z-z_1)^2]^{-3/2} + [r^2+(z+z_1)^2]^{-3/2}\right\}$. ($r$, φ, z — цилиндрические координаты, z_1 — координата заряда (расстояние от заряда до плоскости));

б) $\mathbf{i} = -\dfrac{1}{2\pi} q v \mathbf{r}(r^2 + z_1^2)^{-3/2}$ ($\mathbf{r}$ — раднус-вектор в плоскости $z = 0$).

6.17. $\omega = c\left(\dfrac{a^2 h}{2d}\ln\dfrac{b}{a}\right)^{-1/2}$.

6.18. $\omega = c\left(al\ln\dfrac{l}{b}\right)^{-1/2}$.

6.19. а) $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \dfrac{a^3}{2}\nabla\left(\dfrac{\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)$;

б) $p = \dfrac{9H_0^2}{32\pi}[1 - \sin^2\theta\cos^2(\omega t - \varphi)]$;

предполагается, что вектор $\mathbf{H}_0$ вращается в плоскости xy: $\mathbf{H}_0 = H_0(\mathbf{x}_0\cos\omega t + \mathbf{y}_0\sin\omega t)$; θ и φ — полярный и азимутальный углы в сферической системе координат с полярной осью z.

Указания. Идеально проводящий шар возмущает внешнее магнитное поле так же, как шар с магнитной проницаемостью $\mu = 0$. При условии $\omega \ll c/a$ поле вне шара в каждый данный момент времени может быть найдено из решения соответствующей статической задачи и представляет собой сумму однородного внешнего поля $\mathbf{H}_0$ и поля магнитного диполя с моментом $\mathbf{m} = -\dfrac{1}{2}a^3\mathbf{H}_0$. Магнитное давление p в каждой точке поверхности шара определяется тангенциальной компонентой напряженности поля H_τ: $p = \dfrac{1}{8\pi}H_\tau^2$.

6.20. $\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 a^3 E_0\, e^{i(\omega t - kz_0)}$, $\mathbf{m} = -\mathbf{y}_0\dfrac{a^3}{2}E_0\, e^{i(\omega t-kz_0)}$, z_0 – координата центра шара.

6.21. *Решение.* Переменное поле с комплексным вектором индукции $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\, e^{i\omega t}$ наводит в каждой рамке ток силой $I = -\dfrac{i\omega}{c} B S Z^{-1}$, где $S = \pi a^2$, $Z = \dfrac{i\omega}{c^2}L + R$ — комплексный импеданс рамки. Такой ток создает магнитный момент $\mathbf{m} = -\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{B}\,S^2\,Z^{-1}$. Магнитный дипольный момент единицы объема (вектор намагниченности) $\mathbf{M} = \mathbf{m}\,n$; вектор средней напряженности магнитного поля (по определению) $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{B}\left(1 + 4\pi i\frac{\omega}{c^2}\,n\,S^2\,Z^{-1}\right)$, откуда $\mu \simeq 1 - \alpha$, где $\alpha = \frac{i\,4\pi^3\,n\,a^4\,\omega}{c^2\,R + i\,\omega\,L}$ (решение верно при условии $|\alpha| \ll 1$).

6.22. $\mathbf{m} = \frac{1}{8}k_0^2\,(\varepsilon - 1)\,a^3\,s\left[1 + \frac{1}{8\pi}\,k_0^2\,(\varepsilon - 1)\,s\,\ln(a/\sqrt{s})\right]^{-1}$ $(k_0 = \omega/c,\ k_0^2\,\varepsilon\,s \ll 1)$.

6.23. *Решение.* Рассмотрим электромагнитные колебания симметричного типа, в которых силовые линии электрического поля представляют собой окружности с центрами на оси симметрии кольца. Циркуляция напряженности электрического поля по силовой линии, лежащей внутри кольца, равна

$$\oint E_l\,dl = 2\,\pi\,a\,E_l = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\Phi}{\partial l},$$

где Φ — магнитный поток, создаваемый текущим по кольцу током поляризации $I = s\,\partial p_l/\partial t$, p_l — проекция вектора поляризации на направление касательной к силовой линии. Учитывая соотношения $\Phi = \frac{1}{c}\,L\,I$, $p_l = \frac{1}{4\pi}\,(\varepsilon - 1)\,E_l$ и используя выражение для коэффициента самоиндукции $L = 4\pi\,a\,\ln(a/\sqrt{s})$ (см. решение задачи 5.19), получаем следующее уравнение для силы тока I: $\frac{d^2I}{dt^2} + \omega^2\,I = 0$, где $\omega = \sqrt{2\pi}\,c\,[\varepsilon\,s\,\ln(a/\sqrt{s})]^{-1/2}$ – искомая частота собственных колебаний. Решение верно при выполнении условий квазистационарности $a\,\omega/c \ll 1$, $\sqrt{\varepsilon\,s}\,\omega/c \ll 1$, требующих выполнения неравенств $\varepsilon \gg a^2[s\,\ln(a/\sqrt{s}]^{-1} \gg 1$.

6.24. $\mathbf{m} = \frac{\omega^2(\varepsilon - 1)}{30\,c^2}\,a^5\,\mathbf{H}_0\exp(i\omega t)$.

6.25. *Решение.* Напряженность электрического поля внутри шара с диэлектрической проницаемостью ε, внесенного во внешнее однородное поле $\mathbf{E}_0$, равна $\mathbf{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}_0$; дипольный момент шара $\mathbf{p} = a^3\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}_0$. Эти формулы, полученные для электростатического поля, при оговоренных в задаче условиях квазистационарности $(a \ll \lambda,\ a \ll \delta)$ верны и для проводящего шара в переменном поле, если под ε понимать комплексную диэлектрическую проницаемость проводника $\varepsilon_c = -i\,4\pi\,\sigma/\omega$ (действительной частью ε_c пренебрегаем ввиду условия $\sigma \gg \omega$), а $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{p}$ рассматривать как комплексные векторы, пропорциональные фактору $\exp(i\omega t)$ (физический смысл имеют их действительные части).

а) Пусть действительный вектор $\mathbf{E}_0$ вращается в плоскости xy, т.е. $\mathbf{E}_0 = E_0(\mathbf{x}_0\cos\omega t + \mathbf{y}_0\sin\omega t)$, где $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ — единичные векторы. Соответствующий ему комплексный вектор $\mathbf{E}_{0c} = E_0(\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0)\cdot$ $\cdot\exp i\omega t$ ($\mathrm{Re}\mathbf{E}_{0c} = \mathbf{E}_0$). Поле внутри шара (с точностью до членов $\sim\omega^2/\sigma^2$)

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\,\mathbf{E}_{0c}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{3i\omega}{4\pi\sigma}\mathbf{E}_{0c}\right) =$$
$$= \frac{3\omega}{4\pi\sigma}E_0\left[\mathbf{x}_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\mathbf{y}_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= \frac{3\omega}{4\pi\sigma}\mathbf{E}_0\left(t+\frac{\pi}{2\omega}\right),$$

т.е. вектор $\mathbf{E}(t)$ вращается в той же плоскости и с той же угловой скоростью, что и вектор $\mathbf{E}_0(t)$, опережая его на четверть оборота (на угол $\varphi_1 = \pi/2$). Поле вне шара представляет собой сумму заданного поля $\mathbf{E}$ и поля вращающегося электрического диполя, помещенного в центр шара. Вектор дипольного момента (с той же точностью)

$$\mathbf{p}(t) = \mathrm{Re}\left(a^3\frac{\varepsilon_c-1}{\varepsilon_c+2}\,\mathbf{E}_{0c}\right) = \mathrm{Re}\left[a^3\left(1-\frac{3i\omega}{4\pi\sigma}\right)\mathbf{E}_{0c}\right] =$$
$$= a^3E_0\,\mathrm{Re}\left[(\mathbf{x}_0 - i\mathbf{y}_0)\;e^{i(\omega t-\varphi_2)}\right] = a^3\mathbf{E}_0\left(t-\frac{\varphi_2}{\omega}\right),$$

где $\varphi_2 = \dfrac{3\omega}{4\pi\sigma}$ — угол, на который отстает в своем вращении вектор $\mathbf{p}$ от вектора $\mathbf{E}_0$.

б) Вращающий момент, действующий на шар,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\times\mathbf{E}_0] = \mathbf{z}_0\,a^3\,E_0^2\,\sin\varphi_2 = \mathbf{z}_0\frac{3\omega a^3}{4\pi\sigma}E_0^2$$

($\mathbf{z}_0$ — единичный вектор, направление которого связано правилом правого винта с направлением вращения поля).

6.26. *Решение*. Направим ось x декартовой системы координат вертикально вниз, ось y — вдоль магнитного поля, ось z — перпендикулярно плоскости пластинки. На каждый свободный заряд q

проводника, падающего со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{x}_0 v$ в магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 H$, действует сила Лоренца $\mathbf{F} = \frac{1}{c} q\,[\mathbf{V} \times \mathbf{H}]$, что эквивалентно присутствию перпендикулярного пластинке внешнего электрического поля $\mathbf{E}' = \frac{1}{c}[\mathbf{V} \times \mathbf{H}] = \mathbf{z}_0 \frac{v}{c} H$. В этом поле пластинка поляризуется: на ее плоских гранях скапливаются заряды $\pm Q = \pm \frac{1}{4} R^2 E'_z = \pm \frac{v}{4c} H R^2$ (их величина определяется из условия равенства нулю полного электрического поля внутри проводника). Поскольку величина Q (пропорциональная скорости v) зависит от времени, внутри пластинки в направлении оси z течет электрический ток силой

$$I = dQ/dt = \frac{1}{4c} H R^2 dv/dt,$$

на который в заданном магнитном поле $\mathbf{H}$ действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} dI[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}] = -\mathbf{x}_0 \frac{d}{c} IH = -\frac{d}{4c^2} R^2 H^2 (d\mathbf{V}/dt).$$

Уравнение движения пластинки:

$$m\, d\mathbf{V}/dt = m\mathbf{g} - (d/4c^2) R^2 H^2 (d\mathbf{V}/dt)$$

($\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести). Отсюда ускорение пластинки:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = \mathbf{g}\left(1 + \frac{R^2 d}{4mc^2} H^2\right)^{-1}.$$

6.27. $\mathbf{a} = \mathbf{g}\left(1 + \dfrac{al^2}{2mc^2} H^2\right)^{-1}.$

7.1. 1) $E_x = (k_z/k)\,|\mathbf{E}_0| \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]$;
$E_z = -(k_x/k)\,|\mathbf{E}_0| \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]$;
$H_y = |\mathbf{E}_0| \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)]$; $(k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2})$;
2) $\lambda_x = \lambda_0/\sin\alpha$; $\lambda_z = \lambda_0/\cos\alpha$; $\lambda_0 = 2\pi c/(\omega\sqrt{\varepsilon\mu})$;
3) $\lambda_x = \lambda_z[(\omega\lambda_z/2\pi c)^2 \varepsilon\mu - 1]^{-1/2}$;
4) $\omega = (2\pi c/\lambda_x)[\varepsilon\mu - (c/v^{(z)})^2]^{-1/2}$.

7.2. $\zeta_{\perp TE} = \sqrt{\mu/\varepsilon}(\cos\alpha)^{-1}$; $\zeta_{\perp TM} = \sqrt{\mu/\varepsilon}\cos\alpha$;
$\zeta_{\perp TEM} = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

7.3. $E_0 = \left(\dfrac{8\pi}{c}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\, S\right)^{1/2} \simeq 868$ В/см;

$H_0 = \left(\dfrac{8\pi}{c}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\, S\right)^{1/2} \simeq 2{,}89$ Э. $\simeq 2{,}3 \cdot 10^2$ А/м.

7.4. $\varepsilon = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$; $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$;

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}; \ v = \frac{c\,\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}};$$

$\omega_p^2 = 4\pi e^2 n/m$; e и m — заряд и масса электрона; n — концентрация электронов.

7.5. а) $\varepsilon_r = \dfrac{c^2}{v_0^2} - \dfrac{c^2}{\omega^2 L^2}$; $\varepsilon_\imath = -\dfrac{2c^2}{v_0\omega L}$;

б) $\varepsilon_r = \dfrac{\cos 2\varphi}{p^2}$; $\varepsilon_\imath = -\dfrac{\sin 2\varphi}{p^2}$.

7.6. 1) $v^{(z)} > c$: $E,\ H \sim \cos(h\,x + \varphi_0)$, $h = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1 - (c/v^{(z)})^2}$;

2) $v^{(z)} < c$: $E,\ H \sim \exp(\pm p\,x)$, $p = (\omega/c)\sqrt{(c/v^{(z)})^2 - 1}$;

3) $v^{(z)} = c$: $E,\ H \sim C_1 + C_2\,x$ $(C_1,\ C_2,\ \varphi_0 = \mathrm{const})$.

7.7. $H_y = 0$, $H_x = -\dfrac{ch}{\omega\mu}E_y$, $H_z = -\imath\dfrac{c\kappa}{\omega\mu}E_y$;

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = h^2 - \kappa^2.$$

Вектор $\mathbf{H}$ имеет поляризацию, близкую к круговой в плоскости xz, при условии $(\omega/c)^2\varepsilon\mu \ll h^2$.

7.8. а) $\varepsilon_\parallel = \varepsilon_3$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\mathbf{g} = \mathbf{z}_0\,\varepsilon_2$; б) $k_\pm^2 = k_0^2(\varepsilon \pm g_z)$.

7.9. $\Delta\varphi = (k_- - k_+)\,L/2$ (положительное направление отсчета угла $\Delta\varphi$ образует правый винт с направлением падения волны).

7.10. $\mathbf{B} = \mu_\parallel \mathbf{z}_0\,H_z + \mu\mathbf{H}_\perp + i[\mathbf{H}\times\mathbf{f}]$, где $\mu_\parallel = \mu_{zz} = \mu_3$, $\mu = \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_1$, $\mathbf{f} = \mathbf{z}_0\,\mu_2$, $\mu_2 = -i\mu_{xy} = i\mu_{yx}$; $k_\pm^2 = k_0^2(\mu \pm f_z)$.

7.11. Поперечная волна: $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$;

продольная волна: $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 v_T^2$.

7.12. Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд гармонических полей может быть записана в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{i\,\omega}{c}\,\mathbf{D}', \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{i\,\omega}{c}\,\mathbf{B},$$

где $\mathbf{D}' = \mathbf{D} - i\,k_0^{-1}\mathrm{rot}\,(\mathbf{B} - \mathbf{H})$ — «новый» вектор электрической индукции. Используя уравнения $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ и второе из записанных выше уравнений Максвелла, получаем материальное уравнение, связывающее векторы $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{E}$: $\mathbf{D}' = \varepsilon\,\mathbf{E} + (c/\omega)^2\,(1 - \mu^{-1})\cdot$ $\cdot\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$. Для поперечной плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ имеем $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -k^2\,\mathbf{E}$, и материальное уравнение принимает вид $\mathbf{D}' = \varepsilon'(\omega, k)\,\mathbf{E}$, где $\varepsilon'(\omega, k) = \varepsilon(\omega) + (1 - \mu^{-1})(k\,c/\omega)^2$.

7.13. $E_x = E_0 \cos kz \cos\omega t$; $H_y = \sqrt{\varepsilon/\mu}\, E_0 \sin kz \sin\omega t$.

7.14. $E_x = 2E_0 \cos k_{1y}y \exp[i(\omega t - k_{1z}z)]$;
$H_y = (k_{1z}/k)\sqrt{\varepsilon/\mu}\, E_x$;
$H_z = 2iE_0\,(k_{1y}/k)\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\sin k_{1y}y \exp[i(\omega t - k_{1z}z)]$;
$k = \sqrt{k_{1y}^2 + k_{1z}^2}$.

7.15. $\lambda_z = 2\pi c(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\cos\alpha)^{-1}$; $v^{(z)} = c(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\cos\alpha)^{-1}$;
$L = \pi c(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,\sin\alpha)^{-1}$; $\zeta_\perp = \sqrt{\mu/\varepsilon}(\cos\alpha)^{-1}$;
$\nabla W_m = 0$ при $\alpha = \pi/4$.

7.16. а) $E = H = E_0\,(z - ct)$; б) $E = -H = E_0\,(z + ct)$;
в) $E = \frac{1}{2}[E_0(\xi) + E_0(\eta)]$; $H = \frac{1}{2}[E_0(\xi) - E_0(\eta)]$;
$\xi = z - ct$; $\eta = z + ct$;

г) $$E = \frac{1}{2}\left[E_0(\xi) + E_0(\eta) - \frac{1}{c}\int_0^{\xi} G(\xi)\,d\xi + \frac{1}{c}\int_0^{\eta} G(\eta)\,d\eta\right];$$

$$H = \frac{1}{2}\left[E_0(\xi) - E_0(\eta) - \frac{1}{c}\int_0^{\xi} G(\xi)\,d\xi - \frac{1}{c}\int_0^{\eta} G(\eta)\,d\eta\right].$$

7.17. а) $E = E_0\left(t \mp \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\,z\right)$, $H = \pm\sqrt{\varepsilon/\mu}\,E$;
б) $E = E_0\left(t \pm \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\,z\right)$, $H = \mp\sqrt{\varepsilon/\mu}\,E$.

7.18. *Решение.* Рассмотрим замкнутый неподвижный контур L, образованный сторонами прямоугольника $ABCD$, пересекающего в некоторый момент времени t движущуюся плоскость с током $z = z_0(t) = vt$ в точках M и N (рис. 16). Стороны AB и CD параллельны оси y, стороны AD и BC параллельны оси z; размеры сторон $AB = CD = h$, $AD = BC = l$; положительное направление на контуре указано стрелками; ось x, вектор положительной нормали к площади прямоугольника S и вектор плотности тока $\mathbf{j}$ направлены перпендикулярно плоскости рисунка (на читателя).

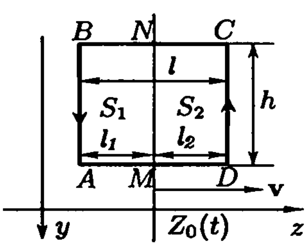


Рис. 16

Плоскость с током $z = z_0(t)$ разбивает площадь $S = hl$ на две части: $S_1(t) = hl_1(t)$ и $S_2(t) = hl_2(t)$ ($l_1 = AM = BN$, $l_2 = DM = CN$). Применим к данному контуру L и ограничиваемой им площади S интегральное уравнение Максвелла

$$\oint_L (\mathbf{H}\, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} \iint_S (\mathbf{j}\, d\mathbf{s}) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}). \tag{1}$$

Если размеры прямоугольника h и l достаточно малы, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в уравнении (1) по обе стороны плоскости $z = z_0(t)$ можно считать однородными и постоянными (меняющимися лишь при переходе через эту плоскость). Тогда

$$\iint_S (\mathbf{E}\, d\mathbf{s}) = E_{1x} S_1 + E_{2x} S_2, \quad \oint_L (\mathbf{H}\, d\mathbf{l}) = h(H_{1y} - H_{2y})$$

(индексами 1 и 2 помечены проекции полей соответственно в областях $z < z_0$ и $z > z_0$) и уравнение (1) принимает вид

$$h(H_{1y} - H_{2y}) = \frac{4\pi}{c} ih + \frac{\varepsilon}{c}\left(E_{1x}\frac{\partial S_1}{\partial t} + E_{2x}\frac{\partial S_2}{\partial t}\right).$$

Отсюда с учетом равенств $\partial S_1/\partial t = h\partial l_1/\partial t = hv$, $\partial S_2/\partial t = h\partial l_2/\partial t = -hv$ получаем

$$H_{1y} - H_{2y} = \frac{4\pi}{c} i + \frac{\varepsilon v}{c}(E_{1x} - E_{2x}). \tag{2}$$

Аналогичным образом, применяя второе интегральное уравнение

$$\oint_L (\mathbf{E}\, d\mathbf{l}) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\mathbf{H}\, d\mathbf{s})$$

к прямоугольному контуру, пересекающему плоскость $z = z_0(t)$ и лежащему в плоскости xz, получаем еще одно соотношение, связывающее разности проекций полей по обе стороны плоскости $z_0(t)$:

$$E_{1x} - E_{2x} = \frac{\mu v}{c}(H_{1y} - H_{2y}). \tag{3}$$

Из (2) и (3) находим

$$H_{1y} - H_{2y} = \frac{4\pi}{c} i \left(1 - \frac{\varepsilon\mu v^2}{c^2}\right)^{-1};$$

$$E_{1x} - E_{2x} = \frac{4\pi\mu v i}{c^2}\left(1 - \frac{\varepsilon\mu v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

7.19, 7.20. *Указания.* Использовать дисперсионное уравнение $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$, выражения для фазовой ($v = \omega/k$) и групповой ($v_g = d\omega/dk$) скоростей волны, а также выражения для средней по периоду плотности энергии поля в непоглощающей среде с дисперсией

$$w = \frac{1}{16\pi}\frac{d(\varepsilon\,\omega)}{d\omega}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{16\pi}\frac{d(\mu\,\omega)}{d\omega}|\mathbf{H}|^2,$$

средней плотности потока энергии $S = \dfrac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]$ и связь между амплитудами электрического и магнитного полей $\mathbf{E} = \sqrt{\mu/\varepsilon}[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]$ в бегущей плоской волне ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны).

7.21. *Решение.* Представляя комплексные поля $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)\exp[i\omega_0 t]$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0(t)\exp[i\omega_0 t]$ в виде интегралов Фурье:

$$\mathbf{E}_0 = \int \mathbf{E}_\omega \exp[i(\omega-\omega_0)t]\,d\omega,$$
$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_\omega \exp[i\omega t]\,d\omega,\ \mathbf{D} = \int \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega \exp[i\omega t]\,d\omega$$

и заменяя функцию $\varepsilon(\omega)$ в последнем интеграле первыми двумя членами степенного ряда $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\omega_0) + (d\varepsilon/d\omega)_0(\omega-\omega_0)$, находим $\mathbf{D} = \varepsilon(\omega_0)\mathbf{E}_0(t)\exp[i\omega_0 t] + \mathbf{F}$, где

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \int (\omega-\omega_0)\mathbf{E}_\omega \exp[i\omega t]\,d\omega =$$
$$= -i\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}_\omega \exp[i(\omega-\omega_0)t]\,d\omega \exp[i\omega_0 t] =$$
$$= -i\left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}\exp[i\omega_0 t].$$

Отсюда $\mathbf{D}_0(t) = \varepsilon(\omega_0)\mathbf{E}_0 - i\left(\dfrac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}$ (производная $\left(\dfrac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0$ берется в точке $\omega = \omega_0$).

7.22. $-i\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\right)_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \Delta\mathbf{E}_0 + \dfrac{\omega_0^2}{c^2}\varepsilon(\omega_0)\mathbf{E}_0 = 0.$

Указание. Уравнение Гельмгольца $\Delta\mathbf{E}_\omega + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega$ для комплексной амплитуды $\mathbf{E}_\omega$ фурье-компоненты поля умножить на $\exp(i\omega t)$ и проинтегрировать по частоте, заменив функцию $\varepsilon(\omega)$ двумя первыми членами степенного ряда (см. решение задачи 7.21).

7.23. а) $\Delta\omega \sim (\Delta\tau_0)^{-1}$; б) $v = c\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2}$;

в) $L = \Delta\tau_0 c\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$; $t = \dfrac{z}{c}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2}$;

г) *Решение*. Уравнение для "медленной"амплитудной огибающей $F(\tau, z)$ комплексного квазигармонического поля $E = F(\tau, z)\exp[i(\omega_0 t - k_o z)]$ ($k_0 = \dfrac{\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$, $\tau = t - \dfrac{z}{v_g}$, $v_g = \left(\dfrac{d\omega}{dk}\right)_0$) и решение этого уравнения при заданной начальной форме импульса $F(\tau, 0) = F_0(\tau)$ имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}ik''\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}, \quad F = \frac{1}{\sqrt{2\pi i k'' z}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_0(t')\exp\left[i\frac{(\tau - t')^2}{2k'' z}\right] dt',$$

где $k'' = \left(\dfrac{d^2 k}{d\omega^2}\right)_0 = -\dfrac{\omega_p^2}{c\omega_0^3}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)^{-3/2}$. В даной задаче начальную функцию $F_0(t')$ можно задать, полагая $F_0 = A = \text{const}$ при $|t'| < \Delta\tau_0/2$, $F_0 = 0$ при $|t'| > \Delta\tau_0/2$. Тогда в области $z \gg (\Delta\tau_0)^2/(2|k''|)$ имеем

$$F = A\frac{1}{\sqrt{2\pi i k'' z}}\exp\left(i\frac{\tau^2}{2k'' z}\right)\int\limits_{-\Delta\tau_0/2}^{\Delta\tau_0/2}\exp\left(-i\frac{\tau t'}{k'' z}\right) dt' =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi i}k'' z}\,\frac{A}{\tau}\exp\left(i\frac{\tau^2}{2k'' z}\right)\sin\frac{\Delta\tau_0\tau}{2k'' z}.$$

Действительная амплитуда $|F| \sim z^{-1/2}\left|\dfrac{\sin\Omega\tau}{\Omega\tau}\right|$, $\Omega = \dfrac{\Delta\tau_0}{(2k'' z)}$. Отсюда следует, что длительность импульса $\Delta\tau = 2\pi/|\Omega|$ заметно меняется на расстоянии $\tilde{z} = c(\Delta\tau_0)^2(\omega_0^2 - \omega_p^2)^{3/2}/\omega_p^2$; при $z \gg \tilde{z}$ $\Delta\tau = 4\pi\Delta\tau_0 z/\tilde{z}$.

7.24. $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$.

7.25. $\varphi = C r^{-1}\sin kr \quad (C = \text{const}, k = \omega/c)$.

$\mathbf{H} = [\mathbf{z}_0 \times \nabla\varphi] = \boldsymbol{\varphi}_0 C\sin\theta(kr\cos kr - \sin kr)r^{-2}$;

$\mathbf{E} = (ik)^{-1}\mathrm{rot}\mathbf{H} = C(ik)^{-1}[2\mathbf{r}_0\cos\theta(kr\cos kr - \sin kr)r^{-3} +$
$+ \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta(k^2r^2\sin kr + kr\cos kr - \sin kr)r^{-3}]$;

(r, θ, φ — сферические координаты); еще одно решение дает замена $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$.

7.26. $$\varphi(t > 0) = \frac{1}{2r}\left[\xi\varphi_0(|\xi|) - \frac{1}{c}\int\limits_0^{|\xi|} x\psi_0(x)\,dx\right] + \\ + \frac{1}{2r}\left[\eta\varphi_0(|\eta|) + \frac{1}{c}\int\limits_0^{|\eta|} x\psi_0(x)\,dx\right],$$

где $\xi = r - ct$, $\eta = r + ct$. На интервале $0 < t < \tau$ решение всюду представляет собой сходящуюся волну, если для всех r $(0 < r < \infty)$

$r\varphi_0(r) = \frac{1}{c}\int\limits_0^r r\psi_0(r)\,dr$ и для $r < c\tau$ $\psi_0(r) = \varphi_0(r) = 0$; при этом

$\varphi(0, t) = [\eta\varphi_0(\eta)]'_\eta + \frac{\eta}{c}\psi_0(\eta)$, где $\eta = ct$.

7.27. *Указание.* Подставить поле $E = E_0(x, y, z)\exp(-ikz)$ в уравнение Гельмгольца $\Delta E + k^2 E = 0$, пренебрегая при вычислении лапласиана членом, содержащим вторую производную медленно меняющейся амплитуды E_0 по z.

7.28. Оба свойства доказываются путем интегрирования по частям в поперечной плоскости с использованием уравнения $\frac{\partial}{\partial z}|E_0|^2 + \mathrm{div}_\perp\,(E_0\nabla_\perp E_0^* - E_0^*\nabla_\perp E_0)\,(2ik_0)^{-1} = 0$ (также доказываемого интегрированием по частям).

7.29. $$\mathbf{E}_0(r, z) = \mathbf{x}_0 E_0\left(1 + i\frac{z}{l}\right)^{-1}\exp\left[-\frac{r^2}{2a^2(z)}\left(1 + i\frac{z}{l_0}\right)\right],$$

где $l_0 = ka_0^2$, $a^2(z) = a_0^2\left(1 + \frac{z^2}{l_0^2}\right)$, a_0 и E_0 — константы.

7.30. а) $\theta_0 = (ka_0)^{-1}$; б) $a^2 = a_0^2 + (z/ka_0)^2$; в) $z = ka_0^2$; г) $E_0^2 = 8P/(ca_0^2)$.

7.31. $a_0 \sim f/(ka)$; $l_0 \sim f^2/(ka^2)$; $a_0 \ll a$ при $f \ll ka^2$.

8.1. *Решение.* 1) Электрическое и магнитное поля в среде ищем как суперпозицию полей падающей и отраженной волн:

$$E_x = E_0\exp[i(\omega t - kz)] + E_r\exp[i(\omega t + kz)]\,;$$

$$H_y = H_0\exp[i(\omega t - kz)] + H_r\exp[i(\omega t + kz)]\,.$$

Определяя коэффициент отражения Γ как отношение проекций электрического поля отраженной и падающей волн на границе ($\Gamma = E_r/E_0$) и используя соотношения $E_0/H_0 = \zeta_w$,

$E_r/H_r = -\zeta_w$ ($\zeta_w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — волновое сопротивление среды), преобразуем заданное на границе отношение $E_x/H_y = \zeta_s$ к виду

$$\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{E_0 + E_r}{H_0 + H_r} = \frac{1+\Gamma}{\zeta_w^{-1} - \Gamma\zeta_w^{-1}} = \zeta_s.$$

Отсюда $\Gamma = \dfrac{\zeta_s - \zeta_w}{\zeta_s + \zeta_w}$.

2) Импеданс суммарного поля в точке $z = -L$:

$$\zeta(L) = \frac{E_x(-L)}{H_y(-L)} = \frac{E_0 \exp(ikL) + E_r \exp(-ikL)}{E_0 \exp(ikL) + E_r \exp(-ikL)} =$$
$$= \frac{\exp(ikL) + \Gamma \exp(-ikL)}{\zeta_w^{-1}\exp(ikL) - \Gamma\,\zeta_w^{-1}\exp(-ikL)}.$$

Подставляя сюда найденное выше выражение для Γ, получим

$$\zeta(L) = \zeta_w \frac{\zeta_s + i\zeta_w\ \mathrm{tg}\,kL}{\zeta_w + i\zeta_s\ \mathrm{tg}\,kL}.$$

3) $|E_x|^2 = |E_0 \exp(-ikz) + E_r \exp(ikz)|^2 =$
$$= |E_0|^2 + |\Gamma E_0|^2 + 2\mathrm{Re}(|E_0|^2 \Gamma \exp(2ikz)) =$$
$$= |E_0|^2 \left[1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos(2kz + \varphi)\right],$$

где φ — фаза коэффициента отражения ($\Gamma = \Gamma_0 \exp(i\varphi)$). Отсюда $|E_x|^2_{\max} = |E_0|^2(1 + |\Gamma|)^2$, $|E_x|^2_{\min} = |E_0|^2(1 - |\Gamma|)^2$,

$$\text{КСВ} = \frac{|E_x|^2_{\max}}{|E_x|^2_{\min}} = \left(\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\right)^2.$$

4) КСВ = 1, если $|\Gamma| = 0$, т.е. $\zeta_s = \sqrt{\mu/\varepsilon}$;
КСВ = ∞, если $|\Gamma| = 1$, т.е. $\zeta_s = \infty$, либо $\mathrm{Re}\,\zeta_s = 0$.

8.2. *Решение.* Определим коэффициенты Γ и T соответственно как отношения тангенциальных компонент комплексных электрических полей отраженной и преломленной волн на границе к той же компоненте поля падающей волны. При помощи известных граничных условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей эти коэффициенты выражаются через поперечные характеристические импедансы сред $\zeta_{\perp 1}$, $\zeta_{\perp 2}$ таким же образом, как в частном случае нормального падения:

$$\Gamma = \frac{\zeta_{\perp 2} - \zeta_{\perp 1}}{\zeta_{\perp 2} + \zeta_{\perp 1}}, \quad T = \frac{2\zeta_{\perp 2}}{\zeta_{\perp 2} + \zeta_{\perp 1}}.$$

Величины $\zeta_{\perp 1}$ и $\zeta_{\perp 2}$, определяемые соответственно как отношения параллельных границе компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в падающей и преломленной волнах, в случае нормального падения совпадают с соответствующими волновыми сопротивлениями сред, а при наклонном падении зависят от типа поляризации волны: для волн типа TE

$$\zeta_{\perp 1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos^{-1}\theta_0, \quad \zeta_{\perp 2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos^{-1}\theta_t, \tag{1}$$

для волн типа TM

$$\zeta_{\perp 1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_0, \quad \zeta_{\perp 2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t, \tag{2}$$

где θ_t — угол преломления, определяемый на основании закона Снелля, т.е. из условия совпадения параллельных границе проекций волновых векторов падающей и преломленной волн:

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}} \sin\theta_0, \quad \cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2} \sin^2\theta_0}. \tag{3}$$

Для волн типа TM вместо величин Γ и T часто используются другие величины Γ', T', определяемые как аналогичные отношения магнитных, а не электрических полей. Выражения для них можно получить на основании принципа перестановочной двойственности, производя в выражениях Γ и T, записанных для волн типа TE, замены: $\varepsilon \to \mu$, $\mu \to \varepsilon$, $\zeta_w \to \zeta_w^{-1}$. В результате находим:

$$\Gamma' = \frac{\zeta_{\perp 1} - \zeta_{\perp 2}}{\zeta_{\perp 1} + \zeta_{\perp 2}} = -\Gamma; \quad T' = \frac{2\zeta_{\perp 1}}{\zeta_{\perp 1} + \zeta_{\perp 2}} = T\frac{\zeta_{\perp 1}}{\zeta_{\perp 2}}.$$

8.3. *Решение*. Направим ось z перпендикулярно слою по направлению распространения падающей волны и поместим начало отсчета $z = 0$ на выходной границе слоя, отделяющей его от среды 2. Поскольку поле в среде 2 представляет собой плоскую волну, бегущую в направлении $+z$ (от слоя), полевой импеданс (отношение поперечных полей E и H) во всех точках этой среды равен ее волновому сопротивлению $\zeta_{w2} = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$. Следовательно, этой же величине равен импеданс ζ_{s2} на выходной границе слоя $z = 0$: $\zeta_{s2} = \zeta_{w2}$. На основании формулы пересчета импеданса (см. ответ к задаче 8.1(2)) находим импеданс ζ_{s1} на входной границе слоя $z = -d$, облучаемой падающей волной:

$$\zeta_{s1} = \zeta_w \frac{\zeta_{w2} + i\zeta_w \operatorname{tg} kd}{\zeta_w + i\zeta_{w2} \operatorname{tg} kd},$$

где $\zeta_w = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ и $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$ — волновое сопротивление и волновое число в слое. Коэффициент отражения от слоя (отношение комплексных амплитуд электрического поля в отраженной и падающей волнах при $z = -d$) согласно решению задачи 8.1(1), равен

$$\Gamma = \frac{\zeta_{s1} - \zeta_{w1}}{\zeta_{s1} + \zeta_{w1}} = \frac{\zeta_w(\zeta_{w2} + i\zeta_w \operatorname{tg} kd) - \zeta_{w1}(\zeta_w + i\zeta_{w2} \operatorname{tg} kd)}{\zeta_w(\zeta_{w2} + i\zeta_w \operatorname{tg} kd) + \zeta_{w1}(\zeta_w + i\zeta_{w2} \operatorname{tg} kd)}.$$

Если волновые сопротивления сред 1 и 2 различны ($\zeta_{w1} \neq \zeta_{w2}$), то величина Γ обращается в ноль при выполнении условий $\zeta_w = \sqrt{\zeta_{w1}\zeta_{w2}}$, $kd = \frac{\pi}{2}(2n-1)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Если $\zeta_{w1} = \zeta_{w2}$, то $\Gamma = 0$ либо при $\zeta_w = \zeta_{w1}$ (и любых kd), либо при $kd = n\pi$ (и любых ζ_w).

8.4. $|\Gamma|$ не зависит от d, если ζ_w совпадает с одной из величин ζ_{w1}, ζ_{w2}.

8.5. $\omega_m^2 = \dfrac{c^2}{2\pi\sigma z^2}$; $\delta_m = z$.

8.6. $\omega_m = 0$; $\delta_m = \infty$.

8.7. *Решение.* Выражение для коэффициента отражения от слоя Γ, найденное в задаче 8.3 для случая нормального падения, как явствует из процедуры его вывода, может быть обобщено на случай наклонного падения, если заменить в нем волновое число $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$ нормальной к слою проекцией k_z волнового вектора $\mathbf{k}$ неоднородной плоской волны в слое, а волновые сопротивления сред ζ_w, ζ_{w1}, ζ_{w2} соответствующими поперечными характеристическими импедансами $\zeta_\perp$, $\zeta_{\perp 1}$, $\zeta_{\perp 2}$ (см. решение задачи 8.2). Такая замена дает:

$$\Gamma = \frac{\zeta_\perp(\zeta_{\perp 2} + i\zeta_\perp \operatorname{tg} k_z d) - \zeta_{\perp 1}(\zeta_\perp + i\zeta_{\perp 2} \operatorname{tg} k_z d)}{\zeta_\perp(\zeta_{\perp 2} + i\zeta_\perp \operatorname{tg} k_z d) + \zeta_{\perp 1}(\zeta_\perp + i\zeta_{\perp 2} \operatorname{tg} k_z d)}.$$

Для слоя с $\mu = 1$ и произвольной величиной ε, расположенного в вакууме и облучаемого волной типа TE: $k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta_0}$; $\zeta_{\perp 1,2} = \cos^{-1}\theta_0$; величина $\zeta_\perp$, как следует из формул (1) и (3) в решении задачи 8.2, равна $\zeta_\perp = (1/\sqrt{\varepsilon})(k_z/k) = (\varepsilon - \sin^2\theta_0)^{-1/2}$. При $\varepsilon = 0$: $k_z = i\dfrac{\omega}{c}\sin\theta_0$, $\zeta_\perp = -i\sin^{-1}\theta_0$, коэффициент отражения

$$\Gamma = \frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{\omega}{c}\,d\,\sin\theta_0\right)}{\operatorname{th}\left(\dfrac{\omega}{c}\,d\,\sin\theta_0\right)\cos 2\theta_0 - i\sin 2\theta_0}.$$

8.8. Из общего выражения для Γ, использованного в решении предыдущей задачи, в данном случае ($\zeta_\perp = \infty$) получаем $\Gamma = 1$.

8.9. $\dfrac{\omega}{c}d = \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $4\pi\sigma l = c$.

8.10. а) $E = \sqrt{i\omega/\pi\sigma}E_0$; $H = E_0(2 - \sqrt{i\omega/\pi\sigma})$;

б) $\Gamma = -1 + \sqrt{i\omega/\pi\sigma}$; в) $P = \dfrac{1}{4\pi}E_0^2(1 - \sqrt{\omega/2\pi\sigma})$.

8.11. $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

8.12. 1) $\operatorname{tg}^2\theta_B = \varepsilon$;

2) $\theta_m = 0$ при $\varepsilon > 1$; $\sin^2\theta_m = \varepsilon$ при $\varepsilon < 1$;

3) $\varepsilon \to 0$.

8.13. $G(z, z') = \dfrac{i}{2k}\exp\left(-ik|z - z'|\right)$,

$$u = \frac{i}{2k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z')\exp\left(-ik|z - z'|\right)dz'.$$

8.14. а) $E_x = \pm H_y = -\dfrac{2\pi}{c}i_0\exp\left[i(\omega t - k|z|)\right]$;

б) $E_x = -\dfrac{2\pi k}{ck_z}i_0\exp\left[i(\omega t - hy - k_z|z|)\right]$;

$H_y = \pm\dfrac{k_z}{k}E_x$; $H_z = -\dfrac{h}{k}E_x$;

в) $E_x = -\dfrac{2\pi i k}{c|k_z|}i_0\exp\left[i(\omega t - hy) - |k_z z|\right]$;

$H_y = \pm\dfrac{|k_z|}{ik}E_x$; $H_z = -\dfrac{h}{k}E_x$;

$k = \dfrac{\omega}{c}$; $k_z = \sqrt{k^2 - h^2}$.

8.15. $\mathbf{i}^m = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{i}^e]$.

8.16. $\Gamma = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha = -\dfrac{i k_0}{2}\displaystyle\int\limits_0^L(\varepsilon - 1)\,dz$, $T = 1 + \Gamma$.

8.17. а) $\mathbf{S} = \mathbf{z}_0\,\dfrac{c}{8\pi}\,E_0^2\,k_0\,L\,(\varepsilon - 1)\,\sin 2k_0 z_s$; б) $\mathbf{S} = 0$

8.18. а) $\Gamma = -2\pi\sigma d/(c + 2\pi\sigma d)$, $T = 1 + \Gamma$

б) $R = \Gamma^2$, $\Pi = T^2$, $Q = 4\pi\sigma d\, \Pi/c$

8.19. $\Gamma = \dfrac{i(1-\varepsilon)\,\mathrm{tg}\,kd}{2\sqrt{\varepsilon} + i(1+\varepsilon)\,\mathrm{tg}\,kd}$, $k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon = 1 - \dfrac{N}{N_c}$,

$N_c = \dfrac{m\omega^2 d}{4\pi e^2}$; при $d \to 0$ $\Gamma = \dfrac{4\pi\, i\, e^2 N}{2m\,\omega\, c - 4\pi\, i\, e^2 N}$.

8.20.
$$E_x(z<0) = \frac{E_0}{\varepsilon^{1/4}} \exp\left[i(\omega t + \varphi_0)\right] \times \left(\exp\left[-i\varphi(z)\right] + \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - 1}{\sqrt{\varepsilon_0} + 1} \exp\left[i\varphi(z)\right]\right),$$
$$E_x(z>0) = \frac{2E_0\,\varepsilon_0^{1/4}}{1 + \varepsilon_0^{1/2}} \exp\left[i(\omega t + \varphi_0 - k_0 z)\right],$$
$$\varphi(z) = k_0 \int\limits_0^z \sqrt{\varepsilon}\, dz, \quad \varphi_0 = k_0 \int\limits_{-\infty}^{0} (1 - \sqrt{\varepsilon})\, dz, \quad k_0 = \omega/c.$$

8.21. а) $E_x = \dfrac{E_0}{\varepsilon^{1/4}}\, e^{i(\omega t + \varphi_0 - \varphi(z))}$ $(-\infty < z < +\infty)$;

б) $E_x = \dfrac{2E_0}{\varepsilon^{1/4}}\, e^{i(\omega t + \varphi_0 - \pi/2)} \sin \displaystyle\int\limits_0^z k_0\sqrt{\varepsilon}\, dz$ $(z \le 0)$;

обозначения k_0, φ_0, $\varphi(z)$ — те же, что в ответе к предыдущей задаче.

8.22. *Решение.* Представим функцию $\varepsilon(z)$ в виде суммы «регулярной» части $\varepsilon_1(z)$, не имеющей разрывов производных и совпадающей с $\varepsilon(z)$ в области $z \le 0$, и поправки $\delta\varepsilon(z)$, имеющей в точке $z = 0$ разрывную n-ю производную: $\varepsilon(z) = \varepsilon_1(z) + \delta\varepsilon(z)$, $\delta\varepsilon(z) = 0$ при $z \le 0$; при $z = +0$ $\dfrac{d^m\delta\varepsilon}{dx^m} = 0$ для всех $m < n$, $\dfrac{d^n\delta\varepsilon}{dx^n} = \Delta\varepsilon^{(n)}$. Уравнение для коплексной амплитуды электрического поля запишем в виде ($k_0 = \omega/c$):

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2\varepsilon_1(z)E = -k_0^2\delta\varepsilon(z)E. \tag{1}$$

При расчете поля в малой (но содержащей достаточно большое число длин волн) окрестности точки $z = 0$ функцию $\varepsilon_1(z)$, мало меняющуюся на длине волны, можно заменить в этом уравнении константой $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_0$, переходя от (1) к более простому уравнению

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2\varepsilon_0 E = -k_0^2\delta\varepsilon(z)E, \tag{2}$$

решение которого будем искать методом последовательных приближений по малому параметру $(k_0L)^{-1}$. Полагая в первом приближении $\delta\varepsilon \equiv 0$, т.е. пренебрегая вообще существованием отражения, запишем решение уравнения (2) в виде бегущей (падающей) волны: $E^{(1)} = E_0 \exp\left[-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}\, z\right]$. Уравнение второго приближения получаем, заменяя поле E в правой части (2) полем падающей волны $E^{(1)}$, т.е. решением, полученным в первом приближении:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2\varepsilon_0 E = -k_0^2\delta\varepsilon(z)E_0 \exp\left[-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}\, z\right]. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) в области $z < 0$, определяющее поле отраженной волны E_r, т.е. удовлетворяющее при $z \to -\infty$ условию излучения ($E_r \sim \exp\left[ik_0\sqrt{\varepsilon_0}\, z\right]$), выражается через одномерную функцию Грина (см. задачу 8.13):

$$E_r = -\frac{i}{2k_0\sqrt{\varepsilon_0}} \int_0^\infty \Big\{ k_0^2\, \delta\varepsilon(z')E_0 \exp\left[-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}\, z'\right] \times$$

$$\times \exp\left[-(ik_0\sqrt{\varepsilon_0} + \alpha)\, |z' - z|\right] \Big\}\, dz'.$$

Здесь α — бесконечно малая положительная величина, введенная для того, чтобы сделать интеграл сходящимся на верхнем пределе. Интегрируя $n + 1$ раз по частям с использованием равенства $\exp\left(-2ik_0\sqrt{\varepsilon_0}\, z\right) = i(2k_0\sqrt{\varepsilon_0})^{-1}\dfrac{d}{dz}\exp\left(-2ik_0\sqrt{\varepsilon_0}\, z\right)$, получаем (с точностью до членов более высокого порядка малости по параметру $(k_0L)^{-1}$) следующее выражение для коэффициента отражения $\Gamma = E_r/E_0$ в точке $z = 0$:

$$\Gamma = -\Delta\varepsilon^{(n)}(4\varepsilon_0)^{-1}(2ik_0\sqrt{\varepsilon_0})^{-n}.$$

8.23. $\Gamma = i(\sqrt{\pi}/2)\varepsilon_0\, k_0\, L \exp\left(-k_0^2L^2\right)$.

8.24. $\Delta E_z + k_0^2\, \varepsilon E_z = 0, \quad k_0 = \omega/c)$.

8.25. $\nabla\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\nabla H_z\right) + k_0^2\, H_z = 0$.

8.26. $(\nabla\varphi)^2 = k_0^2\, \varepsilon' + |E|^{-1}\,\Delta|E|;\ \nabla(|E|^2\,\nabla\varphi) = k_0^2\varepsilon''|E|^2$.

8.27. $n = n_c\, \mathrm{ch}^{-2}(\delta\, k_0\, z)$.

8.28. *Решение.* Комплексная амплитуда электрического поля удовлетворяет уравнению $d^2E/dz^2 + k_0^2\varepsilon E = 0 \quad (k_0 = \omega/c)$.

Решение этого уравнения в ВКБ приближении представляет собой (в области прозрачности $z < L$) стоячую волну:

$$E = 2E_0\varepsilon^{-1/4}\cos\left(k_0\int\limits_0^z \sqrt{\varepsilon}\,dz + \varphi\right),$$

где E_0 — амплитуда падающей волны, φ — постоянная величина, зависящая от фазы отраженной волны. Амплитуда поля растет (как $\varepsilon^{-1/4}$) с приближением к точке поворота $\varepsilon = 0$ до тех пор, пока не перестанет выполняться условие применимости ВКБ приближения $\dfrac{d}{dz}(k_0\sqrt{\varepsilon})^{-1} \ll 1$. При $\varepsilon = 1 - \dfrac{z}{L}$ это условие выполнено всюду, где $\varepsilon \gg (k_0L)^{-2/3}$, и при $k_0L \gg 1$ нарушается лишь в малой окрестности точки $z = L$. Максимальную амплитуду E_m можно оценить по порядку величины, используя приведенное выражение для поля E на границе его применимости, т.е. при $\varepsilon \sim (k_0L)^{-2/3}$, что дает $E_m \sim E_0(k_0L)^{1/6}$.

9.1. 1) $\mathbf{A} = \mathbf{z}_0\,\dfrac{i\omega}{cr}p_0\exp(i\varphi)$;

$$E_\theta = -\frac{p_0k^2}{r}\sin\theta\left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{k^2r^2}\right)\exp(i\varphi);$$

$$E_r = \frac{2p_0}{r^3}\cos\theta\,(1 - ikr)\exp(i\varphi);$$

$$H_\varphi = -\frac{p_0k^2}{r}\sin\theta\left(1 + \frac{i}{kr}\right)\exp(i\varphi);$$

$\varphi = \omega t - kr$; $E_\varphi = H_\theta = H_r = 0$;

2) $S \sim \dfrac{1}{r^2}\sin^2\theta$ при всех r.

3) $P = \dfrac{1}{3c^3}p_0^2\omega^4$; $R_r^{(e)} = \dfrac{2}{3c}(kl)^2 = 0{,}8$ Ом.

9.2. Плотность потока энергии $S \sim (1 + \cos^2\theta)$, где θ – угол между радиусом и осью z.

9.3. 1) Пусть координаты вращающегося заряда на плоскости xy: $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$. Тогда $\mathbf{p} = q\,a(\mathbf{x}_0\cos\omega t + \mathbf{y}_0\sin\omega t)$; $D_{ik} = q(3x_ix_k - \delta_{ik}r^2)$; $D_{xx} = q(2x^2 - y^2) = qa^2(2\cos^2\omega t - \sin^2\omega t)$; $D_{xy} = 3\,q\,x\,y = 3qa^2\cos\omega t\sin\omega t$; $D_{yy} = q(2y^2 - x^2) = qa^2(2\sin^2\omega t - \cos^2\omega t)$; $D_{zz} = -q(x^2 + y^2) = -qa^2$; $D_{xz} = D_{yz} = 0$;

2) $P_\omega = P_d = 2q^2a^2\omega^4/(3c^3)$; $P_{2\omega} = P_q = 8q^2a^4\omega^6/(5c^5)$; $P_{2\omega}/P_\omega = 12\omega^2a^2/(5c^2) = 12v^2/5c^2$.

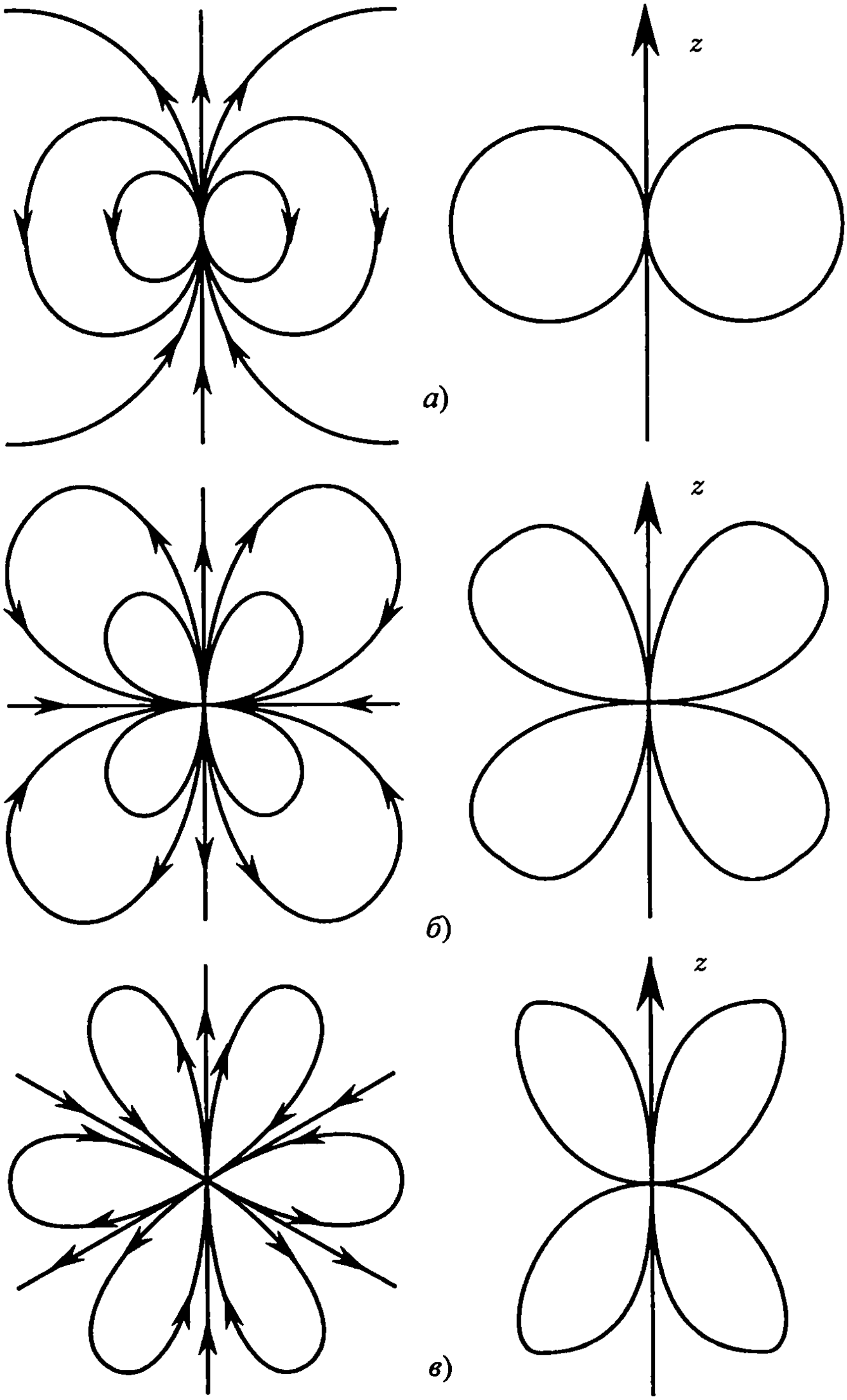


Рис. 17

9.4. Силовые линии электрического поля в зоне квазистатики и диаграммы направленности источников изображены соответственно на левой и правой половинах рис. 17. *Указания*. Поля данных источников в зоне квазистатики такие же, как у соответствующих статических осевых мультиполей (диполь, квадруполь, октуполь). Поля в волновой зоне $E_\theta = H_\varphi = ikA_z \sin\theta$ (см. соответствующие общие формулы в задаче 9.8) можно найти, вычисляя векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(z)\, R^{-1} \exp(-ikR)\, dz$$

либо путем прямого интегрирования (в случае (*а*)), либо путем интегрирования по частям (в случае (*б*) — однократного, в случае (*в*) — двукратного), что дает: *а*) $H_\varphi \sim \sin\theta$; *б*) $H_\varphi \sim \sin 2\theta$; *в*) $H_\varphi \sim \sin\theta \cos^2\theta$. Диаграмма направленности определяется в каждом случае функцией $|H(\theta)|^2$.

9.5. 1) $E_\varphi = m_0 \sin\theta\, (k_0^2\, r^{-1} - ik_0\, r^{-2}) \exp(-ik_0 r)$,
$H_\theta = m_0 \sin\theta\, (-k_0^2\, r^{-1} + ik_0\, r^{-2} + r^{-3}) \exp(-ik_0 r)$,
$H_r = m_0 \cos\theta\, (2ik_0\, r^{-2} + 2r^{-3}) \exp(-ik_0 r)$,
где $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, $m_0 = \dfrac{\pi}{c} a^2 I_0$; r, θ, φ — сферические координаты.

2) $R_r^{(m)} = \dfrac{2\pi^2}{3c} (k_0 a)^4$; $\alpha = (k_0 l)^2/(4\pi)^2$;

3) в выражениях для E_φ, H_θ, H_r надо произвести замену k_0 на $k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$, а выражение для E_φ, кроме того, умножить на $\sqrt{\mu/\varepsilon}$; при этом в зоне квазистатики ($kr \ll 1$) E_φ возрастает в μ раз, а H_r и H_θ не меняются; в волновой зоне ($kr \gg 1$) H_θ возрастает в $\varepsilon\mu$ раз, E_φ — в $\sqrt{\varepsilon\mu^3}$ раз, H_r – в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз; сопротивление излучения возрастает в $\sqrt{\varepsilon^3\mu^5}$ раз.

9.6. Эквивалентные источники в свободном пространстве и отвечающие им угловые распределения интенсивности излучения S:

а) электрический диполь, $S \sim \sin^2\theta$;

б) электрический квадруполь и магнитный диполь; $S \sim \cos^2\theta (1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi)$;

в) осевой магнитный квадруполь, $S \sim \sin^2 2\theta$;

г) магнитный диполь, $S \sim 1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi$. Полярный угол θ отсчитывается от прямой, проведенной через источник перпендикулярно к проводящей плоскости, а азимутальный угол φ в этой плоскости (в случаях (б) и (г)) — от направления вектора дипольного момента.

9.7. $E = \dfrac{1}{R} \left(\dfrac{2\pi P}{c\alpha \sin\beta} \right)^{1/2} \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ В/см.

9.9. 1) $r \gg kL^2$;

2) *Решение.* Используем выражения для векторов **A**, **E**, **H**, приведенные в задаче 9.8. Вектор-потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{cr}\exp\left[i(\omega t - kr)\right]\mathbf{N}, \quad \text{где } \mathbf{N} = \int\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')\exp\left[i(\mathbf{k}\mathbf{r}')\right]dv' =$$

$$= \mathbf{z}_0 I\int\limits_{-L}^{+L}\exp\left[ikz'\cos\theta\right]dz' = \mathbf{z}_0 2LI\,\frac{\sin\xi}{\xi},\ \xi = kL\cos\theta,\ \mathbf{k} = \mathbf{r}_0 k;$$

начало сферической системы координат r, θ, φ с полярной осью z помещено в центр отрезка, по которому течет ток; $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{z}_0$ – единичные векторы, направленные соответственно по радиусу-вектору точки наблюдения и по оси z.

Вектор $\mathbf{H} = -\dfrac{i}{\mu}[\mathbf{k}\times\mathbf{A}] = -\dfrac{ik}{\mu}A_z[\mathbf{r}_0\times\mathbf{z}_0] = \boldsymbol{\varphi}_0\dfrac{ik}{\mu}\sin\theta\,A_z$.

Вектор $\mathbf{E} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{H}\times\mathbf{r}_0] = \boldsymbol{\theta}_0\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\dfrac{ik}{\mu}\sin\theta\,A_z$.

3) В случае $kL \ll 1$ диаграмма направленности как у точечного диполя ($|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\theta$); в случае $kL \gg 1$ диаграмма многолепестковая; направление главного максимума $\theta_0 = \pi/2$, его угловая ширина $\Delta\theta \sim (kL)^{-1}$.

9.10. $|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\theta\,\dfrac{\sin^2(kL\cos\theta - hL)}{(kL\cos\theta - hL)^2}$

(θ — сферический полярный угол);

а) один главный максимум шириной $\Delta\theta \sim (kL\sin\theta_0)^{-1}$ в направлении $\theta_0 = \arccos\dfrac{h}{k}$ и множество более слабых боковых лепестков;

б) многолепестковая диаграмма, вписанная в огибающую максимумов $\sin^2\theta$;

в) диаграмма квадруполя ($|H_\varphi|^2 \sim \sin^2 2\theta$).

9.11. а) $|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\theta\exp\left(-\dfrac{1}{4}k^2L^2\cos^2\theta\right)$;

б) $|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\theta\,[1 + k^2L^2\cos^2\theta]^{-1}$;

(θ – сферический полярный угол).

9.12. *Решение.* Вектор-потенциал в дальней зоне (см. задачи 9.8, 9.9)

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0\frac{\mu}{cr}\exp(-ikr)\,N, \quad \text{где } N = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(z)\exp(ikz\cos\theta)\,dz.$$

Интегрируя по частям $n+1$ раз с учетом соотношений

$$ik\cos\theta\exp(ikz\cos\theta) = \frac{d}{dz}\exp(ikz\cos\theta), \quad I^{(p)}(\pm\infty) = 0$$

$$\left(p = 0, 1, 2, 3, \ldots n; \quad I^{(p)}(z) = \frac{d^p I}{dz^p}; \quad I^{(0)}(z) = I(z)\right)$$

и разбивая перед последним интегрированием область переменной $-\infty < z < \infty$ на интервалы, границами которых являются точки разрыва z_m функции $I^{(n)}(z)$ (началом первого и концом последнего интервалов являются точки $z = \pm\infty$), находим

$$N = \left(\frac{i}{k\cos\theta}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I^{(n)}(z)\exp(ikz\cos\theta)\,dz = \left(\frac{i}{k\cos\theta}\right)^{n+1} F;$$

$$F = \sum_{m=1}^{u} \Delta I^{(n)}(z_m)\exp(ikz_m\cos\theta) + {} + \sum_{m=1}^{u+1} \int\limits_{z_{m-1}}^{z_m} I^{(n+1)}(z)\exp(ikz\cos\theta)\,dz.$$

Здесь $\Delta I^{(n)}(z_m) = I^{(n)}(z_m+0) - I^{(n)}(z_m-0)$; u — число точек разрыва; $z_0 = -\infty$, $z_{u+1} = \infty$. Для направлений, не слишком близких к $\theta = \pi/2$, вторым слагаемым в выражении для F, имеющим более высокий (по сравнению с первым) порядок малости по параметру $(kL\cos\theta)^{-1} \ll 1$, можно пренебречь, записывая окончательное выражение для вектора-потенциала в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0\frac{\mu}{cr}\left(\frac{i}{k\cos\theta}\right)^{n+1}\sum_{m=1}^{u}\Delta I^{(n)}(z_m)\exp\left[-ik(r - z_m\cos\theta)\right].$$

Поскольку в дальней зоне разность $r - z_m\cos\theta$ можно принять равной расстоянию от точки наблюдения (с координатами r, θ) до точки z_m на оси z, каждое слагаемое в этой сумме в области $kL\cos\theta \gg 1$, $r \gg kL^2$ описывает расходящуюся от точки z_m сферическую волну.

9.13. $H_\varphi = E_\theta = -2k^2 p_0 L\sin\theta \times \frac{\sin(kL\sin\theta\cos\varphi)}{kL\sin\theta\cos\varphi} r^{-1}\exp\left[i(\omega t - kr)\right].$

(r, θ, φ — сферические координаты с началом в центре стержня и полярной осью z).

9.14. $A_z = \dfrac{4}{c} i_0 a\, b \dfrac{\sin\xi \, \sin\eta}{\xi\,\eta} r^{-1} \exp[i(\omega t - kr)]$,

$H_\varphi = E_\theta = i\,k\,A_z \sin\theta,\ \xi = kb\cos\theta, \eta = ka\sin\theta\cos\varphi;$

(r, θ, φ – сферические координаты с полярной осью z). Ширина основного лепестка диаграммы направленности

в плоскости xy: $\Delta\varphi \sim (ka)^{-1}$;

в плоскости yz: $\Delta\theta \sim (kb)^{-1}$.

9.15. $r < a$: $E_z = AJ_n(kr)\exp(in\varphi)$,

$$H_\varphi = -iAJ'_n(kr)\exp(in\varphi),\ H_r = -\frac{n}{kr}E_z;$$

$r > a$: $E_z = BH_n^{(2)}(kr)\exp(in\varphi)$,

$$H_\varphi = -iBH_n^{(2)\prime}(kr)\exp(in\varphi),\ H_r = -\frac{n}{kr}E_z;$$

$A = -(2\pi^2 ka/c)i_0 H_n^{(2)}(ka)$; $B = -(2\pi^2 ka/c)i_0 J_n(ka)$;
$J_n(kr)$, $N_n(kr)$ — функции Бесселя и Неймана
(с вронскианом $J(x)N'(x) - J'(x)N(x) = 2/\pi x$);
$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - iN_n(kr)$ — функция Ханкеля 2-го рода;
штрихами обозначены производные по аргументу;
множитель $\exp(i\omega t)$ в выражениях для полей опущен.

Указание. Поле $\mathbf{E} = \mathbf{z}_0 E_z(r, \varphi)$ ищется в областях $r < a$ и $r > a$ как частное решение уравнения Гельмгольца $\Delta E_z + k^2 E_z = 0$, получаемое методом разделения переменных в цилиндрических координатах и удовлетворяющее: 1) условию ограниченности в области $r < a$ (при $r \to 0$ $E_z \neq \infty$); 2) условию излучения в области $r > a$ (при $r \to \infty$ $E_z \sim \dfrac{1}{\sqrt{r}}\exp[-ikr]$); 3) известным граничным условиям для тангенциальных компонент полей E_z и H_φ при $r = a$: $E_z(a+0) = E_z(a-0)$, $H_\varphi(a+0) - H_\varphi(a-0) = \dfrac{4\pi}{c} i_z$. Поле $\mathbf{H}$ выражается через $\mathbf{E}$ с помощью уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -ik\mathbf{H}$ ($k = \omega/c$).

9.16. $r < a$: $H_z = AJ_n(kr)\exp(in\varphi)$,

$$E_\varphi = iAJ'_n(kr)\exp(in\varphi),\ E_r = \frac{n}{kr}H_z;$$

$r > a$: $H_z = BH_n^{(2)}(kr)\exp(in\varphi)$,

$$E_\varphi = iBH_n^{(2)\prime}(kr)\exp(in\varphi),\ E_r = \frac{n}{kr}H_z;$$

$A = (2\,i\,\pi^2\,k\,a/c)i_0\, H_n^{(2)\prime}(ka)$; $B = (2\,i\,\pi^2\,k\,a/c)i_0\, J'_n(ka)$;
обозначения те же, что в 9.9.

9.17. *Доказательство.* Комплексная амплитуда **H** напряженности магнитного поля описывается уравнением

$$\Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j},$$

решение которого, удовлетворяющее условию излучения, в случае потенциальной векторной функции $\mathbf{j} = \nabla\varphi$ $(\mathrm{rot}\,\mathbf{j} = 0)$есть тождественный нуль. При этом электрическое поле $\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{i\omega}\mathbf{j}$; плотность потока энергии во всем пространстве $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] = 0$.

9.18. *Решение.* а) Магнитное поле внутри тора является квазистатическим. Вектор напряженности поля **H** можно найти, применяя уравнение магнитостатики

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\,I\,N \qquad (1)$$

к контуру L_1, который представляет собой окружность, лежащую внутри тора и имеющую с ним общую ось симметрии z. Используя осевую симметрию поля, находим $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varphi}_0 H_\varphi$, $H_\varphi = \frac{2}{ca}\,N\,I_0\,e^{i\omega t}$, где $\boldsymbol{\varphi}_0$ — единичный вектор в направлении отсчета азимутального угла φ в плоскости экваториального (перпендикулярного оси z) сечения тора.

Индукционное электрическое поле внутри тора и вблизи него можно найти, зная квазистатическое магнитное поле **H**, с помощью другого интегрального уравнения Максвелла

$$\oint\limits_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{i\omega}{c}\iint\limits_S \mathbf{H}\,ds. \qquad (2)$$

Применим это уравнение к контуру L_2, который представляет собой окружность, лежащую в меридиональной (проходящей через ось z) плоскости и имеющую общий центр с малым круговым сечением тора. Пренебрегая, ввиду условия $a \gg b$, кривизной силовых линий магнитного поля, т.е. заменяя тор бесконечным прямым соленоидом с тем же полем **H**, находим (см. задачу 6.13): $\mathbf{E} = \boldsymbol{\psi}_0 E_\psi$, $E_\psi = -i\frac{\omega}{2c}\,r\,H_\varphi$, где r и ψ – полярные координаты в малом круговом сечении тора; направление отсчета $\boldsymbol{\psi}_0$ угла ψ совпадает с положительным направлением тока в обмотке.

б) Поле излучения данной системы можно рассматривать как суперпозицию полей, создаваемых эквивалентными источниками двух типов: магнитным диполем и электрическим диполем. Магнитный дипольный момент создается φ-компонентой тока, перпендикулярной плоскости меридионального сечения тора. При любом конечном шаге обмотки через каждое такое сечение протекает ток $I = I_0 \exp(i\omega t)$ и, следовательно, магнитный дипольный момент равен $\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 \pi a^2 I/c$, где $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор в направлении оси симметрии z. Лежащая в меридиональной плоскости (и определяющая так называемый анапольный или тороидный момент) ψ-компонента тока создает излучение электро-дипольного типа. Чтобы убедиться в этом и найти величину эквивалентного электрического дипольного момента $\mathbf{p}$, заметим, что изменение магнитного потока внутри тора, определяющее правую часть уравнения (2), эквивалентно наличию некоторого фиктивного замкнутого магнитного тока

$$I^{(m)} = \frac{i\omega}{4\pi} \iint\limits_S \mathbf{H}\, ds = \frac{i\omega}{2ca} b^2 N I,$$

текущего в направлении $\boldsymbol{\varphi}_0$ (здесь $S = \pi b^2$ — площадь меридионального кругового сечения тора). Из принципа перестановочной двойственности следует, что такой магнитный ток излучает как электрический диполь с моментом

$$\mathbf{p} = \mathbf{z}_0 \frac{\pi}{c} a^2 I^{(m)} = \mathbf{z}_0 \frac{\pi i}{2c^2} \omega a b^2 N I.$$

Найденные магнитный и электрический моменты $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ сдвинуты по фазе на 90°. Поскольку создаваемые ими поля взаимно перпендикулярны, суммарное поле излучения в общем случае имеет эллиптическую поляризацию, которая превращается в круговую при условии $\mathbf{p} = i\mathbf{m}$, т.е. при выполнении равенства $(\omega/c)b^2 N = 2a$.

в) Вследствие ортогональности полей, создаваемых данными дипольными источниками, излучаемая системой средняя мощность P равна сумме мощностей излучения каждого из двух источников по отдельности: $P = \dfrac{\omega^4}{3c^3}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{m}|^2)$. Подставляя сюда выражения для $\mathbf{p}$ и $\mathbf{m}$, из соотношения $P = \dfrac{1}{2} R_r |I|^2$ находим сопротивление излучения $R_r = \dfrac{2\pi^2}{3c}(ka)^2 \left[(ka)^2 + \dfrac{1}{4}(kb)^4 N^2\right]$.

9.19. $h = \pi k a^2$; $R_r = \dfrac{4}{3c}(kL)^2$.

9.20. 1) $d \gg \pi\omega a^2/c$; 2) $P = \omega^4 d^2 q^2/(3c^3)$; $Q = 3c^3/(\omega^3 C d^2)$.

9.21. *Указания.* Использовать выражения для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\iint\limits_S \frac{1}{R}\mathbf{i}_s(t')\,ds$$

и вектора магнитного поля

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{i_0}{c}\iint\limits_S [\mathbf{x}_0 \times \nabla R]\frac{d}{dR}[R^{-1}\,\Theta(t')]\,ds,$$

где R — расстояние от точки на площади интегрирования S до точки наблюдения P, $t' = t - R/c$. Записать выражение для проекции поля H_y и выполнить в нем интегрирование по участку площади S, представляющему собой круг, центром которого является проекция P' точки P на эту площадь, а радиус равен расстоянию от точки P' до ближайшей к ней точки Q на граничном контуре площади S. Полученный результат дает величину $H_y = H_{y\ \max}$, остающуюся постоянной на временном интервале между моментами прихода в точку наблюдения световых сигналов из точек P' и Q.

10.1. а) $\omega_{cr} = \dfrac{\pi c}{a} = 4,71\cdot 10^{10}\ \text{c}^{-1}$; $\lambda_{cr} = \dfrac{2\pi c}{\omega_{cr}} = 2a = 4$ см;
$\lambda_g = \dfrac{2\pi c}{\omega}\left(1 - \dfrac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} = 5,37$ см; $v = c\left(1 - \dfrac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} =$
$= 5,37\cdot 10^{10}$ см/с; $v_g = c^2/v = 1,68\cdot 10^{10}$ см/с;

б) $H_{\perp\,\max} = E_{\max}\left(1 - \dfrac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$; $H_{z\ \max} = E_{\max}\,\omega_{cr}/\omega$.

10.2. $\lambda_1/\lambda_2 = \lambda_{g1}/\lambda_{g2} = m$.

10.3. $\omega/\omega_{cr} = \sqrt{5/4}$.

10.5. а) $t = \dfrac{L}{c}\left(1 - \dfrac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}\right)^{-1/2}$ $(a > b)$; б) $t = \dfrac{L}{c}$.

10.6. а) $t = \dfrac{L}{c}\left(1 - \dfrac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2} - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$;

б) $t = \dfrac{L}{c}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$.

10.7. $\omega = \pi c(L^{-2} + a^{-2} + b^{-2})^{1/2}$.

10.8. Поле в волноводе содержит три спектральные компоненты с частотами $\omega - \Omega$, ω, $\omega + \Omega$. Амплитуды первых двух с ростом z убывают: $E_{\omega-\Omega} \sim \exp\left[-z\sqrt{(\pi/a)^2 - (\omega-\Omega)^2/c^2}\right]$;
$E_\omega \sim \exp\left[-z\sqrt{(\pi/a)^2 - (\omega/c)^2}\right]$;амплитуда $E_{\omega+\Omega}$ не изменяется.

10.9. $L = c\left(\dfrac{3}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\right)^{1/2}$; $a = \pi c\left(\dfrac{3}{4\omega_2^2 - \omega_1^2}\right)^{1/2}$. Высота спектральной линии $\omega_3 = 2\omega_2$ меняться не будет.

10.10. $a/b = m/n$, где m и n — нечетные числа.

10.11. а) $\varphi = 0$; б) $\varphi = \pi/2$; на запредельном отрезке конечной длины в общем случае реализуются два нормальных решения вида $\exp(-|h|z)$ и $\exp(|h|z)$, в суммарном поле которых сдвиг фаз φ между поперечными компонентами **E** и **H** не равен $\pi/2$, благодаря чему частичная передача энергии через такой отрезок оказывается возможной.

10.12. а) Щель должна быть перпендикулярна полю **H**;
б) посередине широкой стенки волновода.

10.13. 1) Не влияет. 2) Отталкиваются.

10.14. $h_{mn}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\nu_{mn}^2}{a^2}$, где h_{mn} — постоянная распространения волны (продольное волновое число), ν_{mn} — корни уравнений $J_{q_m}(x) = 0$ для волн типа TM ($m = 1, 2, 3, \ldots$) или $J'_{q_m}(x) = 0$ для волн типа TE ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$); $J_{q_m}(x)$ — функция Бесселя с индексом $q_m = m\pi/\alpha$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ — номер корня.

10.15. $\lambda_{cr} = 4\pi\sqrt{(b-a)ah/d}$; может при достаточно малой ширине емкостного зазора d.

10.16. $h'' = \dfrac{k}{2hb}\sqrt{\dfrac{\omega}{8\pi\sigma}}$ $\quad\left(k = \dfrac{\omega}{c},\ h^2 = k^2 - \dfrac{\pi^2}{a^2}\right)$.

10.17. $h'' = \dfrac{4\pi^2 r^2 \sigma k}{abhc}\sin^2\dfrac{\pi a_1}{a}$ $\quad\left(k = \dfrac{\omega}{c},\ h^2 = k^2 - \dfrac{\pi^2}{a^2}\right)$.

10.18. а) *Решение.* Постоянная затухания h'' (мнимая часть продольного волнового числа $h = h' - ih''$), определяющая скорость убывания комплексных амплитуд электрического и магнитного полей $\mathbf{E}, \mathbf{H} \sim \exp(-ih'z)\exp(-h''z)$ вдоль осевой координаты z, может быть рассчитана энергетическим методом как отношение среднего потока энергии P_s в стенку волновода (на отрезке единичной длины) к удвоенному среднему потоку энергии P, переносимому волной через поперечное сечение волновода: $h'' = P_s/2P$. Выражая P_s через тангенциальные компоненты полей $\mathbf{E}_\tau$, $\mathbf{H}_\tau$ на стенке волновода и используя связывающее их граничное условие Леонтовича $\mathbf{E}_\tau = \zeta_s[\mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n}]$, где $\zeta_s = (i\omega/4\pi\,\sigma)^{1/2}$ — поверхностный импеданс проводника, имеем

$$P_s = \frac{c}{8\pi}\oint \mathrm{Re}[\mathbf{E}_\tau \times \mathbf{H}_\tau^*]\,\mathbf{n}\,dl = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\zeta_s \oint |\mathbf{H}_\tau|^2\,dl$$

(интегрирование проводится по граничному контуру поперечного сечения волновода; $\mathbf{n}$ — нормаль к границе, направленная внутрь проводника; $\mathrm{Re}\,\zeta_s = \sqrt{\omega/8\pi\,\sigma}$). Поток энергии через поперечное сечение волновода (мощность волны) равен

$$P = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\iint [\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^*]\mathbf{z}_0\,ds = \frac{c}{8\pi}\,\zeta_\perp \iint |\mathbf{H}_\perp|^2\,ds,$$

где интеграл берется по площади поперечного сечения, $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор вдоль оси z, $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$ — поперечные (перпендикулярные z) компоненты векторов поля, связанные в бегущей волне соотношением $\mathbf{E}_\perp = \zeta_\perp\,[\mathbf{H}_\perp \times \mathbf{z}_0]$, $\zeta_\perp$ — поперечный характеристический импеданс волны. Полагая затухание волны достаточно слабым ($h'' \ll h'$), будем считать, что рассматриваемая волна в первом приближении имеет ту же поперечную структуру (в сечении $z = \mathrm{const}$), что и волна TE_{01} в круглом волноводе с идеально проводящими стенками без диэлектрического заполнения: $H_\tau = H_z = A\,J_0(\kappa r)$, $\mathbf{H}_\perp = -i(h'/\kappa^2)\nabla_\perp H_z$, $\zeta_\perp = k/h$, где $A = \mathrm{const}$, r — радиальная цилиндрическая координата (расстояние до оси волновода), $J_0(x)$ — функция Бесселя, $k = \omega/c$, $h' = \sqrt{k^2 - \kappa^2}$, $\kappa = \mu_{01}/a$ — поперечное волновое число, $\mu_{01} \simeq 3,83$ — первый не равный нулю корень уравнения $J_0'(x) = 0$. При этом, используя известные свойства функций Бесселя, (или непосредственно на основании приведенных выражений для поля и двумерного уравнения Гельмгольца $\Delta_\perp H_z + \kappa^2 H_z = 0$) записанное выше выражение для мощности волны P можно преобразовать к виду $P = (ckh'a^3/16\pi\mu_{01}^2)\oint |H_z|^2\,dl$. В результате для величины h'' получаем $h'' = P_s/2P = (\mu_{01}^2/kh'a^3)\sqrt{\omega/8\pi\sigma}$.

б) $h'' = \sqrt{\dfrac{\omega}{8\pi\sigma}}\dfrac{a+b}{2ab}\ln^{-1}\dfrac{b}{a}$.

10.19. $E_m = \left(\dfrac{16\pi kP}{abhc}\right)^{1/2}$ $(k = \omega/c,\ h^2 = k^2 - \kappa^2,\ \kappa = \pi/a)$; $H_m = \dfrac{1}{k}\,E_m \max\{h,\ \kappa\}$. При заданных в условии значениях параметров $E_m \simeq 175$ В/см, $H_m \simeq 0,575$ Э $\simeq 45,8$ А/м.

10.20. $\Gamma_{TE} = \dfrac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}$; $\Gamma_{TM} = \dfrac{\varepsilon_1 h_2 - \varepsilon_2 h_1}{\varepsilon_1 h_2 + \varepsilon_2 h_1}$;
$h_{1,2}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{1,2} - \kappa^2$.

10.21. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}d\right) = -\sqrt{\varepsilon}\operatorname{tg}\left[\dfrac{\omega}{c}(b-d)\right]$.

10.22. а) $L = 2\ln(b/a)$; $C = \dfrac{1}{2}\ln^{-1}(b/a)$; $Z_w = \dfrac{2}{c}\ln(b/a)$;
б) $L = 4\pi d/a$; $C = a/(4\pi d)$; $Z_w = 4\pi d/(ca)$.

10.23. $\Gamma = \dfrac{Z_l - Z_w}{Z_l + Z_w}$; $Z(L) = Z_w \dfrac{Z_l + iZ_w \operatorname{tg} kL}{Z_w + iZ_l \operatorname{tg} kL}$;
а) $Z_l = (i\omega C)^{-1}$, $|\Gamma| = 1$; б) $Z_l = i\omega L/c^2$, $|\Gamma| = 1$;
в) $Z_l = Z_w$; $\Gamma = 0$, $Z(L) = Z_w$; г) $Z_l = Z_{w1}$;
д) $Z_l = 0$, $\Gamma = -1$, $Z(L) = iZ_w \operatorname{tg} kL$;
е) $Z_l = \infty$, $\Gamma = 1$, $Z(L) = -iZ_w \operatorname{ctg} kL$.

10.24. а) $\Gamma = Z_L(Z_L + 2Z_w)^{-1}$; б) $\Gamma = -Z_w(2Z_L + Z_w)^{-1}$.

10.25. В обоих случаях эквивалентные параллельные емкости, включаемые в линию в месте расположения препятствия, вызывающего отражение волны, имеют величину порядка поперечного размера b; при этом с точностью до множителя порядка единицы коэффициент отражения $\Gamma \sim kb \ll 1$ $(k = 2\pi/\lambda)$.

10.26. *Решение.* Рассмотрим в качестве вспомогательного простейшее возможное распределение волнового поля в данной волноводной системе, которое реализуется, если в обоих малых волноводах по направлению к краю разделяющей их перегородки распространяются две одинаковые синфазные волны с равными амплитудами E_0. Очевидно, что тонкая идеально проводящая перегородка в этом случае вообще не влияет на поле, волна в большом волноводе имеет ту же амплитуду E_0, а встречные волны во всех трех волноводах отсутствуют. Это означает, что каждая из падающих волн малых волноводов по отдельности создает в большом волноводе волну с амплитудой $E_2 = \dfrac{1}{2}E_0$ (вклады обеих падающих волн вследствие их полной симметрии одинаковы, а в сумме дают E_0). Отсутствие встречных (бегущих от края перегородки) волн в малых волноводах означает, что отраженная волна, порождаемая в каждом из этих волноводов "своей"падающей волной, полностью погашается волной, частично прошедшей из другого малого волновода, и следовательно, амплитуды этих волн равны по величине и противоположны по знаку: $E_r = -E_1$.

Из закона сохранения энергии (в применении к исходной задаче с одной падающей волной) следует, что мощность падающей волны (средний по времени поток энергии, переносимый через поперечное сечение волновода) равен сумме мощностей отраженной и обеих прошедших волн. Учитывая, что мощность волны пропорциональна квадрату модуля ее амплитуды и площади поперечного сечения волновода и что площадь большого волновода вдвое превышает площадь малого, на основании полученных выше соотношений $|E_2| = \frac{1}{2}E_0$, $|E_r| = |E_1|$ находим: $E_0^2 = |E_r|^2 + |E_1|^2 + 2|E_2|^2 = 2|E_r|^2 + \frac{1}{2}E_0^2$, откуда $|E_r| = \frac{1}{2}E_0$. Таким образом, $|E_r| = |E_1| = |E_2| = \frac{1}{2}E_0$.

10.27. $E_r = E_0 l_1/l$; $E_2 = -E_1 = E_0 l_0/l$

10.28. а) $\zeta_s = i\,\mathrm{tg}\,kL$; б) $kL < \pi/2$; $h = k/\cos kL$ $(k = \omega/c)$.

10.29. $h^2 = k^2[1 + k^2d^2(\varepsilon - 1)^2/4]$.

10.30. $Z_{w1}\dfrac{Z_{L1} + iZ_{w1}\,\mathrm{tg}\,kL_1}{Z_{w1} + iZ_{L1}\,\mathrm{tg}\,kL_1} = -Z_{w2}\dfrac{Z_{L2} + iZ_{w2}\,\mathrm{tg}\,kL_2}{Z_{w2} + iZ_{L2}\,\mathrm{tg}\,kL_2}$, $k = \omega/c$.

10.31. а) TE_{111}; $\omega_1 = c\left[\left(\dfrac{\pi}{h}\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_{11}}{a}\right)^2\right]^{1/2}$;

б) TM_{010}; $\omega_1 = \dfrac{\nu_{01}}{a}$; $\mu_{11} \simeq 1,83$ и $\nu_{01} \simeq 2,4$ — соответственно первые корни уравнений $J_1'(x) = 0$ и $J_0(x) = 0$.

10.32. $\dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{(2\pi m)^2}{L^2} + \kappa_n^2$; $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

10.33. а) $\dfrac{\omega_1^2}{c^2} = \dfrac{\pi^2}{b^2} + \dfrac{\pi^2}{d^2}$; $W = \dfrac{1}{32\pi}a\,b\,d\,E_0^2$; при заданных в условии значениях параметров $\omega_1 = 3,92 \cdot 10^{10}$ c^{-1}, $W = 2,65 \cdot 10^{-11}$ Дж.

б) $\dfrac{\omega_1^2}{c^2} = \dfrac{\omega_p^2}{c^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2} + \dfrac{\pi^2}{d^2}$; W — то же, что в (а).

10.34. $k_1a = \dfrac{\omega_1}{c}a \simeq 2,74$ — наименьший корень уравнения $\mathrm{ctg}\; ka = (ka)^{-1} - ka$.

10.35. а) $\gamma = \sqrt{\dfrac{\omega_1}{8\pi\sigma}\dfrac{cb^2}{L(b^2 + L^2)}}$; б) $\gamma = \sqrt{\dfrac{\omega_1}{8\pi\sigma}\dfrac{c}{2a}}$; $Q = \dfrac{\omega_1}{2\gamma}$; $\omega_1 = \pi c(L^{-2} + b^{-2})^{1/2}$.

10.36. $\gamma = \omega_1\varepsilon_i/(2\varepsilon_r)$. **10.37.** $\gamma = (c/L)(1 - |\Gamma|^2)$.

10.38. $\dfrac{P_+}{P_-} = \left(\dfrac{2pL}{\sin 2pL}\right)^2$.

10.39. а) *Решение.* При $z \gg a$ поле в волноводе представлено одной модой TE_{10} — единственной распространяющейся в данном диапазоне частот (поля остальных мод экспоненциально малы). Комплексное электрическое поле этой моды $\mathbf{E} = a_{10}\mathbf{e}(x)\, e^{i(\omega t - h|z|)}$, где $\mathbf{e}(x) = \mathbf{y}_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}$, $h = \sqrt{k_0^2 - \dfrac{\pi^2}{a^2}}$, $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, z — продольная, x и y — поперечные координаты; предполагается, что диполь расположен в плоскости $z = 0$. Максимальная амплитуда поля a_{10} определяется как коэффициент возбуждения данной нормальной моды $\mathbf{e}(x)$:

$$a_{10} = \frac{1}{N_{10}} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}(x)\, e^{ihz}\, dv = \frac{1}{N_{10}} i\omega p_0 \sin\frac{\pi l}{a},$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 i\omega p_0\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$ — комплексная амплитуда плотности тока в источнике, $\mathbf{r}_p$ — радиус-вектор точки, в которой расположен диполь. Норма волны N_{10} выражается через средний поток энергии Π_{10}, отвечающий нормированному электрическому полю $\mathbf{e}(x)$, и зависит от поперечного характеристического импеданса TE-волны $\zeta_\perp = k_0/h$ (см. задачи 7.2, 8.2) и размеров волновода: $N_{10} = -4\Pi_{10} = -\dfrac{c}{2\pi\zeta_\perp} \displaystyle\int_0^a\!\!\int_0^b \sin^2\frac{\pi x}{a}\, dx\, dy = -\frac{cabh}{4\pi k_0}$. Таким образом, для величины a_{10} получаем: $a_{10} = -\dfrac{4\pi i\omega^2 p_0}{c^2 abh} \sin\dfrac{\pi l}{a}$. Поток энергии волны (в одну сторону) $\Pi = |a_{10}|^2 \Pi_{10}$; полная излучаемая диполем мощность $P = 2\Pi = \dfrac{2\pi\omega^3 p_0^2}{c^2\, a\, b\, h} \sin^2\dfrac{\pi l}{a}$.

б) К полю и мощности волны TE_{10}, найденным в (а), добавляются поле и мощность волны TE_{20}, выражения для которых получаются из (а) удвоением аргументов синусов и заменой $h = h_{10}$ на $h_{20} = \sqrt{k_0^2 - (2\pi/a)^2}$.

в) Поле экспоненциально убывает с ростом z; формальное выражение для $\mathbf{E}$ то же, что в (а); $P = 0$.

10.40. а) Диполь создает волны TM_{11}, уносящие полную мощность (в обе стороны) $P = \dfrac{4\,\omega\, \kappa_{11}^4\, p_0^2\, a\, b}{\pi(a^2 + b^2) h_{11}} \left(\sin\dfrac{\pi l}{a} \sin\dfrac{\pi d}{b}\right)^2$, где $h_{11} = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \kappa_{11}^2}$; $\kappa_{11}^2 = \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2$; б) $P = 0$.

10.41. $R_r = \dfrac{4\pi\omega L^2}{c^2 a b h_{10}} \sin^2\dfrac{\pi L_1}{a}$; $h_{10}^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$.

10.42. $R_r = R_r^{(0)}(1 - \cos 2h_{10}\tilde{L}_0)$, где $R_r^{(0)}$ — величина R_r, найденная в задаче 10.41; $\tilde{L}_0 = n\pi/h_{10}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

10.43. $R_r = \dfrac{4\pi^5 r^4 \omega}{c^2 a^3 b h_{10}} \cos^2\varphi$; $h_{10}^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2$.

10.44. Штыри должны быть перпендикулярны друг другу и стенкам волновода и разнесены в продольном направлении на расстояние, равное четверти длины волны в волноводе.

10.45. $P \sim \cos^2\alpha$.

10.46. Электрическое поле на оси волновода параллельно плоскости, в которой лежат щели; $P \sim \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

10.47. *Решение.* Комплексное электрическое поле вынужденных колебаний низшей моды TE_{011} записываем в виде $\mathbf{E} = a_0\mathbf{e}(y, z)\exp(i\omega t)$, где $\mathbf{e} = \mathbf{x}_0 \sin\dfrac{\pi y}{b}\sin\dfrac{\pi z}{L}$; оси координат x, y, z направлены соответственно вдоль ребер a, b, L; начало координат помещено в одной из вершин параллелепипеда. Коэффициент возбуждения a_0, согласно формулам теории возбуждения резонаторов заданными источниками, в общем случае равен

$$a_0 = \frac{i}{(\omega^2 - \omega_0^2)N_0}\left(\omega\int \mathbf{j}^e\mathbf{e}\,dv - \omega_0\int \mathbf{j}^m\mathbf{h}\,dv\right),$$

где $\omega_0 = \omega_0' + i\omega_0''$ — комплексная собственная частота данной моды, $\omega_0' = \pi c\sqrt{b^{-2} + L^{-2}}$, $\omega_0'' = \omega_0'/2Q$, Q – добротность, $N_0 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int(\mathbf{e})^2\,dv = \dfrac{abL}{16\pi}$ — норма данного типа колебаний, $\mathbf{j}^e$, $\mathbf{j}^m$ — комплексные амплитуды плотностей стороннего электрического и магнитного токов, $\mathbf{h}(y, z)$ — магнитное поле, отвечающее нормированному электрическому полю данной моды $\mathbf{e}(y, z)$. В рассматриваемом случае резонансного возбуждения ($\omega = \omega_0'$, $\omega_0'' \ll \omega_0'$) точечным электрическим диполем, расположенным в центре резонатора, ($\mathbf{j}^m = 0$, $\mathbf{j}^e = i\omega p_0\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$, $\mathbf{r}_p$ — радиус-вектор точки с координатами $\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}, \dfrac{L}{2}$) имеем $a_0 = -\dfrac{8\pi i\omega p_0}{abL\omega_0''}$. Отдаваемая диполем мощность

$$P = \frac{1}{2}\int \mathbf{j}^e\mathbf{E}^*\,dv = \frac{i\omega}{2}p_0\mathbf{x}_0\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_p) = \frac{8\pi\omega p_0^2 Q}{abL}.$$

10.49. *Решение.* Собственные колебания в присутствии шарика (на возмущенной частоте $\Omega_n = \omega_n + \Delta\omega_n$) можно рассматривать как вынужденные, создаваемые в пустом (невозмущенном) резонаторе переменными токами той же частоты Ω_n, текущими в шарике. Ввиду близости частот Ω_n и ω_n поле этих вынужденных колебаний (точнее, его резонирующая вихревая часть $\mathbf{E}'_n(\mathbf{r})$) близко к полю $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ собственного колебания типа n невозмущенного резонатора и, следовательно, коэффициент возбуждения a_n в соотношении $\mathbf{E}'_n = a_n\mathbf{E}_n$ (см. решение задачи 10.47) можно положить равным единице:

$$a_n = \frac{i}{(\Omega_n^2 - \omega_n^2)N_n}\left(\Omega_n \int \mathbf{j}^e\mathbf{E}_n\,dv - \omega_n \int \mathbf{j}^m\mathbf{H}_n\,dv\right) = 1.$$

При достаточно малом радиусе шарика a токи $\mathbf{j}^e, \mathbf{j}^m$ и входящие в a_n интегралы определяются его электрическим ($\mathbf{p}$) и магнитным ($\mathbf{m}$) дипольными моментами:

$$\int \mathbf{j}^e\mathbf{E}_n\,dv = i\Omega_n(\mathbf{p}\mathbf{E}_{n1}), \quad \int \mathbf{j}^m\mathbf{H}_n\,dv = i\Omega_n(\mathbf{m}\mathbf{H}_{n1}),$$

а сами дипольные моменты выражаются по квазистатическим формулам: $\mathbf{p} = a^3\mathbf{E}_{n1}$, $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}a^3\mathbf{H}_{n1}$ ($\mathbf{E}_{n1}$, $\mathbf{H}_{n1}$ — невозмущенные поля в центре шарика; проводимость шарика предполагается бесконечной). Полагая $\Omega_n^2 - \omega_n^2 \simeq 2\omega_n\Delta\omega_n$, из равенства $a_n = 1$ находим: $\Delta\omega_n = -\frac{1}{4}N_n^{-1}\omega_n a^3(2E_{n1}^2 + H_{n1}^2)$, где $N_n = \frac{1}{4\pi}\int E_n^2\,dv$. Использованные при получении этого результата приближения оправданы при выполнении двух условий: 1) радиус шарика a мал по сравнению с его расстоянием до стенки резонатора и по сравнению с характерным пространственным масштабом полей $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$; 2) сдвиг частоты $\Delta\omega_n$ мал по сравнению с разностью частот $\omega_n - \omega_{n+1}$ данного (n-го) и ближайшего к нему по частоте ($n + 1$-го) типов колебаний резонатора.

11.1. 1) $E_s = E_0\sqrt{\sigma_d}/r$. 2) Должны быть выполнены три условия: $r \gg a$, $kr \gg 1$, $r \gg kL^2$.

3) $\sigma_t = \int\limits_{(4\pi)} \sigma_d\,d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,\sigma_d(\theta,\varphi)\,d\theta.$

11.2. а) $\sigma_d = a^2/4$; б) $P_f = \pi a^2\,|\mathbf{S}_0|$; в) $\sigma_t = 2\pi a^2$.

11.3. $\sigma_b = R_1R_2/4$.

11.4. $\sigma_b = \frac{1}{4} R_1 R_2 \, |\Gamma|^2$; $\Gamma = \frac{\zeta_s - 1}{\zeta_s + 1}$; а) $|\Gamma| = 1$; б) $|\Gamma| < 1$.

11.5. $dP_\varphi = \frac{c}{16\pi} \, E_0^2 \, a \, \sin\frac{\varphi}{2} \, d\varphi$.

11.6. $E_r = a\,E_0/(2r - a) \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ В/см.

11.7. $\sigma_b = \frac{1}{(4C)^2} \, |\Gamma|^2$; а) $|\Gamma| = 1$; б) $\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_2} + \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1}}$.

11.8. *Решение.* Ослабление интенсивности отраженного луча, обусловленное поглощением волны при ее двукратном прохождении через прозрачную слабо поглощающую область на периферии плазмы (от границы шара $r = R$ до точки поворота $r = R - L$, где $\operatorname{Re}\varepsilon = 0$, и обратно), определяется в приближении геометрической оптики множителем $Q = \exp\left(-4\,k_0\,g\right)$, где

$$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda, \; g = -\int_0^L \operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon}\,dx, \; x = R - r.$$

Условия $\nu \ll \omega$, $\lambda \ll L$ позволяют пренебречь процессами поглощения в узкой области вблизи точки поворота, где приближение геометрической оптики неприменимо (см. решение задачи 8.28). Эти же условия позволяют при вычислении g заменить $\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon}$ в подинтегральном выражении первым членом разложения по степеням малого параметра ν/ω, полагая $\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon} = -(\nu/2\omega)\,(n/n_c)\cdot[1 - (n/n_c)]^{-1/2}$ и игнорируя наличие вблизи точки $x = L$ узкой области (шириной $\Delta x \sim (\nu/\omega)L$), где такая замена некорректна. Используя в качестве переменной интегрирования $t = \sqrt{1 - (n/n_c)} = \sqrt{1 - (x/L)}$, находим:

$$g = \frac{\nu L}{\omega} \int_0^1 (1 - t^2)\,dt = \frac{2\,\nu\,L}{3\,\omega}, \;\; Q = \exp\left(-\frac{8\,\nu\,L}{3\,c}\right).$$

Дифференциальное сечение обратного рассеяния, согласно результатам решения задач 11.3, 11.4, равно

$$\sigma_b = \frac{1}{4}\,R^2\,Q = \frac{1}{4}\,R^2 \exp\left(-\frac{8\,\nu\,L}{3\,c}\right).$$

11.9. а) $\sigma_a = \pi R^2$; б) $\sigma_a = \frac{32\,\pi}{5\,c}\,\nu\,L$.

11.10. На освещенной стороне цилиндра ($|\varphi| > \pi/2$):
а) $i_\varphi = \frac{c}{2\pi}\,H_0\,e^{-ika\cos\varphi}$; б) $i_z = -\frac{c}{2\pi}\,H_0\,\cos\varphi\,e^{-ika\cos\varphi}$;
на теневой стороне ($|\varphi| < \pi/2$) в обоих случаях $\mathbf{i} = 0$.

11.11. $\sigma_d = \dfrac{a^2b^2}{\lambda^2}\left[\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{2}ka\cos\varphi\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}kb\cos\psi\right)}{\dfrac{1}{2}ka\cos\varphi\,\dfrac{1}{2}kb\cos\psi}\right]^2.$

Указание. Определить плотность поверхностного электрического тока на пластинке $\mathbf{i}_s$ в приближении геометрической оптики (т.е. полагая размеры пластинки бесконечно большими) и рассчитать поле излучения этого тока в дальней зоне (см. задачу 9.14).

11.12. 1) От уголка отражаются два пучка параллельных лучей: один – строго в обратном направлении, с потоком энергии $\Pi_1 = \dfrac{c}{4\pi}E_0^2\,a\,b\sin\varphi$; второй – в направлении $-\varphi$ (по другую сторону от плоскости выбранной грани), с потоком энергии $\Pi_2 = \dfrac{c}{8\pi}E_0^2\,a\,b\,(\cos\varphi - \sin\varphi)$. 2) $\sigma_0 = \left(\dfrac{2\,a\,b}{\lambda}\right)^2\sin^2\varphi$.

11.13. а), б) $\sigma_b = \left(\dfrac{\pi d^2}{4\lambda}\right)^2$.

11.14. а) $E_r = E_0$; б) $E_r = \dfrac{\pi\,a^2}{\lambda\,z}E_0$; при заданных значениях параметров $E_r \simeq 0,314$ В/см.

11.15. а) $\sigma_b = (a/4\pi)^2\,\mathrm{tg}^2\beta$; б) $\sigma_b = (2\pi\,k\cos\beta)^{-2}\,\mathrm{tg}^2\beta\cdot$ $\cdot\sin^2(ka\cos\beta\,/\sqrt{2})$. В первом случае величина σ_b много больше, чем во втором (даже в том случае, если $\sin(ka\cos\beta\,/\,\sqrt{2}) = 1$, отношение первой величины ко второй равно $(ka\cos\beta\,/2)^2 \gg 1$). Это объясняется разным типом интерференции краевых волн, источниками которых являются точки, лежащие на граничном контуре площадки, где происходит скачкообразное изменение плотности наведенного поверхностного тока (см. задачи 9.12, 9.14). В первом случае краевые волны, испускаемые всеми точками катета, перпендикулярного волновому вектору падающей волны, складываются в одинаковой фазе; во втором случае ни одна из сторон треугольника не является синфазным источником, и все краевые волны сильно интерферируют.

Указание. Задача решается тем же методом, что и 11.11.

11.16. *Указание.* Воспользоваться теоремой Пойнтинга (законом сохранения энергии) для полного и рассеянного полей и выражениями для векторного потенциала и электрического поля в дальней зоне произвольного распределения токов (см. задачу 9.8).

11.17. 1) $p^{(e)} = \dfrac{1}{2}a^2 E_0$; 2) $i_\varphi = \dfrac{c}{4\pi} E_0$; $I^{(m)} = \dfrac{1}{4} i\,\omega\, a^2 E_0$.
3) $\Pi^{(m)} = \dfrac{\pi c}{32} (k a)^3 a E_0^2$; $\Pi^{(e)} = 2\Pi^{(m)}$ (рассеянные мощности на единицу длины цилиндра).

11.18. $I = \dfrac{i c E_0}{2 k \ln ka}$; при $a \to 0$: $\Pi \sim I^2 \sim \ln^{-2} ka \to 0$.

Указание. Удовлетворить граничному условию $E_\tau = 0$ на поверхности цилиндра, рассматривая электрическое поле $\mathbf{E}$ как сумму поля падающей волны и поля, создаваемого током I, равномерно распределенным по поверхности цилиндра. Воспользоваться результатом решения задачи 9.15.

11.19. а), б) Не создает.

11.20. а) $\sigma_d = |\alpha|^2 k^4 \sin^2\theta$; $\sigma_t = \dfrac{8\pi}{3} |\alpha|^2 k^4$,
где $\alpha = \dfrac{a^3(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)}$ — коэффициент статической поляризуемости шара во внешнем поле, θ — угол, образуемый направлением рассеяния с вектором электрического поля падающей волны;
б) $\sigma_d = \dfrac{9 \sin^2\theta}{4k^2}$; $\sigma_t = \dfrac{6\pi}{k^2}$;
Указание. Дипольный момент шара $\mathbf{p}$ по-прежнему может быть рассчитан на основании квазистатического выражения, но внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0$ (поле падающей волны) должно быть заменено в этом выражении суммой $\mathbf{E}_0$ и поля радиационного торможения $\mathbf{E}_r = \left(\dfrac{2}{3}c^3\right) \dddot{\mathbf{p}} = -i \left(\dfrac{2}{3}c^3\right) \omega^3 \mathbf{p}$.

11.21. а) $\sigma_t = \dfrac{10\pi}{3} a^2 (k a)^4$; б) $\sigma_t = \dfrac{8\pi}{3} \left(\dfrac{e^2}{m c^2}\right)^2$.

11.22. Рассеянное излучение имеет узкую диаграмму направленности с максимумом в направлении распространения падающей волны и угловой шириной $\Delta\theta \sim \lambda/L$.

11.23. В области $x > 0$ излучение равномерно распределено по направлениям; его мощность $P = \omega a^2 E_0^2/\pi$.

11.24. *Решение.* Ввиду условия $b \ll \lambda$ излучение из открытого конца линии является весьма слабым (излучаемая мощность составляет малую часть мощности падающей волны). В первом приближении, вовсе не учитывающем этого излучения, поле в линии представляет собой стоячую волну с пучностью электрического поля на конце. Амплитуда поля в пучности равна удвоенной амплитуде падающей волны E_0.

Таким образом, для определения поля в области $z > 0$ мы имеем следующее граничное условие для тангенциальной компоненты $\mathbf{E}_\tau$ электрического поля в плоскости $z = 0$: $\mathbf{E}_\tau = 0$ при $r < a$ и $r > b$; $\mathbf{E}_\tau = 2\,\mathbf{r}_0\,E_0\,e^{i\omega t}$ при $a < r < b$ (r — радиальная цилиндрическая координата, $\mathbf{r}_0$ — соответствующий ей единичный радиус-вектор, ω — круговая частота волны).

Данная граничная задача эквивалентна задаче отыскания поля, создаваемого кольцевым поверхностным магнитным током, заданным в области $a < r < b$ на сплошной идеально проводящей подложке. Поверхностная плотность этого тока

$$\mathrm{i}^{(m)} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}_\tau \times \mathbf{z}_0] = \boldsymbol{\varphi}_0\,\frac{c}{2\pi}\,E_0\,e^{i\omega t},$$

где $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор в направлении оси z, $\boldsymbol{\varphi}_0 = [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{z}_0]$; соответствующая полная сила тока в кольце

$$I^{(m)} = (b-a)\,(\mathrm{i}^{(m)}\,\boldsymbol{\varphi}_0) = \frac{c}{2\pi}\,(b-a)\,E_0\,e^{i\omega t}.$$

Последняя задача, в свою очередь, сводится (с помощью метода изображений) к отысканию поля удвоенного магнитного тока $\tilde{I}^{(m)} = 2\,I^{(m)}$ в свободном пространстве. Согласно принципу перестановочной двойственности, замкнутый магнитный ток эквивалентен электрическому диполю с моментом $\mathbf{p}^{(e)}=\mathbf{z}_0\,\dfrac{\pi\,a^2}{c}\,\tilde{I}^{(m)} = \mathbf{z}_0(b-a)a^2\,E_0\,e^{i\omega t}$. Средняя по периоду мощность W, излучаемая из открытого конца линии в полупространство $z > 0$, составляет половину полной средней мощности излучения этого диполя: $W = \dfrac{1}{6}\omega^4|\mathbf{p}^{(e)}|^2 = \dfrac{\omega^4}{6\,c^3}a^4(b-a)^2E_0^2$, а ее отношение к мощности падающей волны $\Pi = \dfrac{c}{4}\,a(b-a)\,E_0^2$ равно $\eta = W/\Pi = \dfrac{2}{3}\,k^4\,a^3\,(b-a)$.

11.25. $\sigma_b = a\,\dfrac{L^2}{2\,\lambda}$.

11.26. $E_0(x,z) = \dfrac{1}{2}U_0\{(1+i)[C(w) - iS(w)] + 1\}$, где U_0 — амплитуда падающей волны, $w = x\sqrt{\dfrac{k}{2z}}$, $C(w)$ и $S(w)$ — интегралы Френеля: $C - iS = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^w e^{-it^2}\,dt$. В области тени

($x < 0$) амплитуда E_0 с ростом $|x|$ монотонно убывает, приближаясь к нулю; в освещенной области ($x > 0$) с ростом x она испытывает затухающие колебания около среднего значения, равного U_0. Ширина переходной зоны $\Delta x \sim \sqrt{\dfrac{2z}{k}}$.

Указание. Записать решение параболического уравнения

$$2ik\frac{\partial E_0}{\partial z} = \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2}$$

с использованием известной функции Грина в виде

$$E_0(x,z) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}}\int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\xi,0)\exp\left[-ik(x-\xi)^2/2z\right]\,d\xi.$$

Функцию начального распределения амплитуды E_0 за экраном (при $z = +0$) определить на основании приближения геометрической оптики: $E_0(\xi,0) = 0$ при $\xi < 0$, $E_0(\xi,0) = U_0$ при $\xi > 0$.