

001100001001110

0101010111000011

011110100110111

001000101000010

101101001111110

110010010010110

111111001001101

010011001100000

001100011001010

001101001011111

110100010110001

1101010011001100

111100011111010

101000001101011

011011101100000

101101011111010

101010000001010

010101111001011

101110000001110

011101001001111

010111010100010

010000110011100

001011110110110

011010000111011

110000111111111

000001111011111

000101110011001

000001001010011

101101000111100

111110011011000

001100001001110

0101010111000011

011110100110111

001000101000010

101101001111110

110010010010110

111111001001101

010011001100000

001100011001010

001101001011111

110100010110001

1101010011001100

111100011111010

101000001101011

011011101100000

101101011111010

101010000001010

010101111001011

101110000001110

011101001001111

010111010100010

010000110011100

001011110110110

011010000111011

110000111111111

000001111011111

000101110011001

000001001010011

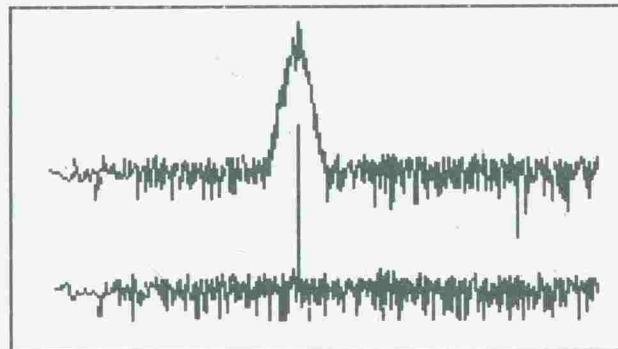
101101000111100

111110011011000



**В.А. Зверев,  
А.А. Стромков**

# **ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ИЗ ПОМЕХ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ**



**Н. Новгород  
2001**

УДК 621.391.8  
ББК 32.811.7

**Зверев В. А., Стромков А. А.**

3 43

Выделение сигналов из помех численными методами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2001. 188 с.

ISBN 5-8048-0026-4

Рассмотрены спектральные, корреляционные и кепстральные методы выделения сигналов из помех, использованные в оригинальных натуральных и численных опытах. Среди них: выделение и измерение параметров сигнала при локации объекта на про-свет; сжатие во времени узкополосного сигнала путем преобразования его спектра; устранение искажений сигнала, вызванных многолучевостью, с использованием лишь искаженного сигнала (слепая дереверберация); метод определения задержки импульса, флукутирующего по форме; исследование распространения волн с помощью *M*-последовательностей и другие. Приведены численные расчеты с программами – 37 программ в пакете *Mathcad 6 0 plus*.

Книга написана на основе лекционного курса и предназначена для студентов, аспирантов и специалистов, интересующихся численными методами выделения сигналов на фоне помех.

Ил. – 102, библиогр. – 52.

#### Рецензенты

доктор физико-математических наук  
*Н. С. Степанов,*  
кандидат физико-математических наук  
*Л. С. Долин*

## Предисловие

---

Книга написана на основе курса лекций, читаемых одним из авторов (В. А. Зверевым) студентам 5-го курса радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. Востребованность такого курса (и книги) связана с тем, что студенты и молодые специалисты после окончания университета должны получить достаточные практические навыки численного решения и моделирования физических задач. Курс лекций (и книга) предоставляют такую возможность.

В настоящее время существует много пакетов программ, приспособленных для численного решения и постановки разнообразных физических задач, например такие, как *Mathcad*, *Mathematica*, *Mathlab*, и ряд других. Имеются достаточно подробные руководства и примеры использования этих программ, но они слишком элементарны и зачастую сводятся к набору правил выполнения тех или иных действий. Получается такая картина. Есть мощный современный компьютер, на нем установлена современная программа, обладающая огромными возможностями, а студент или иной малоопытный пользователь не знает многих тонкостей и объема пользы этой программы. Основной причиной такого положения является отсутствие книг и пособий, посвященных подробному описанию приемов численного решения насущных и достаточно серьезных физических задач.

Авторы надеются, что настоящая книга поможет восполнить этот пробел. В ней детально описаны некоторые эффективные нестандартные методы выделения сигналов из помех, преимущественно опирающиеся на спектрально-корреляционный анализ и, как правило, изложенные лишь в разрозненных журнальных статьях, поэтому воспользоваться этими методами без специальных пояснений, содержащихся в книге, оказывается весьма трудным делом. В книге подробно проанализированы часто встречающиеся на практике ситуации, которым в имеющейся литературе не уделено должного внимания, – это случай мультипликативных помех, ситуация, в которой наблюдается подавление сильным сигналом более слабого, а также применение так называемой М-последовательности для исследования параметров сред.

Помимо своей "прагматической" направленности – знакомства читателя с нестандартными методами выделения сигналов из помех – книга должна иметь также "эвристический" смысл – стимулирование читателя на развитие используемых и "изобретение" новых эффективных методов выделения сигнала из помех.

Приведенные примеры взяты из статей авторов, опубликованных в последние годы в ведущих научных журналах. Ряд методов, описываемых в книге, являются оригинальными. К их числу относятся методы темного поля, обеспечивающие возможность нового вида локации – локации на просвет. Представляют научный интерес также оригинальные методы выделения сигналов на фоне мультипликативных помех, причем новые методы сочетаются с широко известными, что дает возможность выполнения оригинальных научных исследований, включающих эксперимент. В приведенных примерах имеются задачи, решаемые путем численного моделирования, и задачи, включающие натурный эксперимент. В тех случаях, когда задача целиком строится путем чис-

ленного моделирования, есть возможность привести и прокомментировать математическую программу. Такая возможность часто используется авторами. В книге приведены полностью с подробным описанием и комментариями 37 математических программ. К сожалению, авторы не нашли возможности точно так же поступить с задачами, включающими эксперимент. Проблема, которую пока преодолеть не удалось, состоит в том, что трудно внести в книгу базу подлинных данных эксперимента, имеющих до их обработки большой объем. Эту трудность удалось преодолеть лишь частично, включив в книгу наряду с натурными опытами опыты численные, в которых действуют те же программы в аналогичных ситуациях.

Книга содержит пять глав.

Первая глава посвящена изложению основ используемого в книге математического аппарата, включающего спектральный анализ Фурье, корреляционный анализ, кепстральный анализ, фильтрацию. Основное внимание здесь уделено особенностям использования этого аппарата при выполнении численных расчетов с помощью ЭВМ. Например, обращается внимание на то, что спектр функции  $A(x) = \cos(1,2271846x)$  при вычислении стандартным численным методом отличен от нуля всего в двух точках, а спектр функции  $A(x) = \cos(1,227x)$ , в которой округлено значение числа перед аргументом косинуса, оказывается отличным от нуля во всех точках спектра (см. далее рис. 1.1 и 1.2). В книге дан подробный анализ такого рода случаев.

Особо выделена и доказана теорема отсчетов, являющаяся фундаментом дискретизации непрерывных функций.

Показано, каким образом получается, что при численном счете число коэффициентов вычисляемого ряда Фурье конечно и равно числу дискретных отсчетов входной функции. Рассмотрены особенности представления спектров функций в пакете программ *Mathcad*. Приведена простая техника получения значений функции в промежуточных точках между отсчетами. Даны программы (см. далее рис. 1.3 и 1.4) дополнения спектра функции нулями, позволяющие получать промежуточные значения функции. Программы используются в дальнейшем при получении оригинальных результатов. Приведена и прокомментирована программа (рис. 1.5), позволяющая получать промежуточные значения спектра функции.

Специальный раздел посвящен свойствам так называемых линейных систем. Эти свойства успешно используются при выделении сигналов. Более того, вся линейная обработка сигналов с целью выделения нужных сигналов и подавления мешающих (шумов) основана на свойствах линейных систем.

Рассмотрены основы кепстрального анализа, который является математической основой нелинейных методов выделения сигналов. Особо выделены способы получения так называемого комплексного кепструма, которому, несмотря на его эффективность, в литературе почти не уделяется внимания. На конкретном примере математической программы (рис. 1.8), позволяющей получать аргумент функции далеко за пределами  $2\pi$  и без скачков фазы, анализируются свойства этого преобразования, необходимое и достаточное условие его осуществимости.

Рассмотрены численные методы представления случайных сигналов. Такая задача возникает при численном моделировании практически любого алгоритма выделения сигналов, всегда требуется определить, как на ситуацию влияет шум.

Последующие главы посвящены описанию конкретных оригинальных исследований авторов книги, в которых практически выделялись сигналы на фоне помех. Эта часть книги является одновременно как учебным пособием, так и монографией, содержащей оригинальные результаты. Это увеличивает эффективность учебной направленности книги.



## СПЕКТР И КЕПСТР

### 1.1. Ряд и интеграл Фурье

Разложение функций в ряд и интеграл Фурье является основой как линейных, так и нелинейных методов выделения сигналов. Важный аспект для дальнейших исследований – установление связи между тем, что известно о преобразовании Фурье из математики, и тем преобразованием Фурье, которое осуществляется численными методами. Этот вопрос нигде подробно не рассмотрен – в том объеме, который нам необходим для дальнейшего.

Ряд Фурье имеет бесконечное число членов, а при численном счете число членов этого ряда всегда конечно и равно числу дискретных значений задаваемой функции. Почему это так? Нет ли тут какой-либо неточности или приближения? Интеграл Фурье получается путем предельного перехода от ряда Фурье. Такой переход не может быть в точности выполнен численно. Тогда встает вопрос о соответствии результатов численного счета теоретическим формулам, основанным на интеграле Фурье. При численном счете наряду с действительным осуществляется комплексное преобразование Фурье. Откуда оно берется? Цель настоящего раздела книги – ответить на все эти и другие вопросы, которые будут возникать по мере изложения материала. Кроме того, этот раздел важен для выработки и понимания сущности терминологии, без чего немислимо никакое продвижение и никакое понимание.

Вот пример интересной и важной особенности получения спектра численным методом. Возьмем функцию  $A(x) = \cos(1,2271846x)$ . Применим к ней операцию `sfft`, которая означает численное комплексное преобразование Фурье. Функция, полученная в результате этого преобразования, показана на рис. 1.1. Это модуль спектра в логарифмическом масштабе. По горизонтали отложен аргумент преобразования, называемый частотой, по вертикали отложена интенсивность (дБ). Попробуем объяснить полученный результат, опираясь на известные читателю сведения о преобразовании Фурье. Известно, что фурье-преобразование от периодической функции, какой является косинус, должно иметь так называемый дискретный спектр. Это мы и видим на рис. 1.1. Спектр отличен от нуля всего в двух точках. Положение этих точек на оси без труда может быть объяснено на основе элементарных представлений о преобразовании Фурье.

Теперь слегка изменим заданную функцию. Под знаком косинуса стоит восьмизначное число. Округлим это число до четырех знаков и повторим операцию. Итак, на входе теперь стоит функция  $A(x) = \cos(1,227x)$ . От того, что мы округлили значение множителя при аргументе, функция не перестала быть периодической. Согласно тем же элементарным представлениям о преобразовании Фурье она должна иметь спектр той же формы, какая показана на рис. 1.1 с чуточку (не заметным на графике) измененным

расположением максимумов. На самом деле это не так! Спектр косинуса с округленным значением частоты показан на рис. 1.2. Спектр резко изменился. Он уже не дискретен, а представляет собой непрерывную функцию. Почему? Каков смысл полученной непрерывной функции? Откуда взялось магическое число 1,2271846, делающее спектр дискретным? На эти и другие подобные вопросы нам предстоит получить ответы.

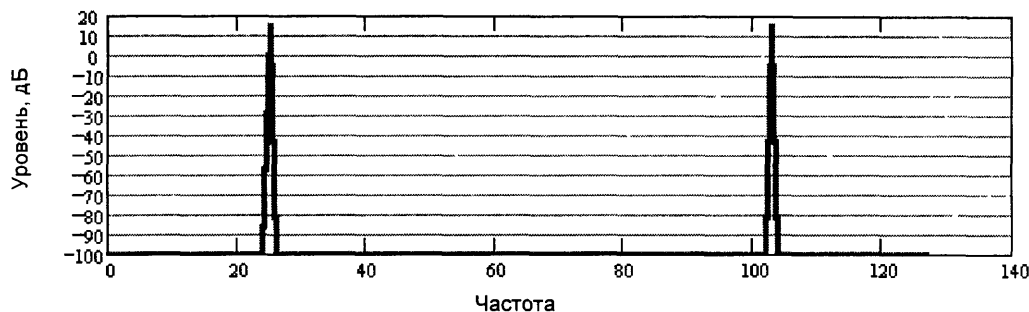


Рис. 1.1. Картина спектра функции  $A(x) = \cos(1,2271846x)$ .

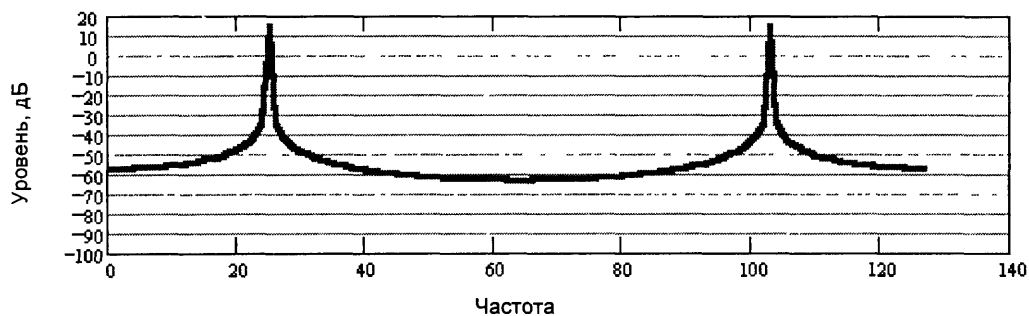


Рис. 1.2. Картина спектра функции  $A(x) = \cos(1,227x)$ .

Начнем с напоминания известных сведений о ряде и интеграле Фурье, а по мере изложения будем уточнять одно из самых фундаментальных понятий спектрального анализа – понятие частоты.

Ряд Фурье формально математически служит только для представления периодических функций. Функция  $F(x)$  является периодической, если она при любом  $x$  удовлетворяет следующему условию:

$$F(x) = F(x + kX). \quad (1.1.1)$$

Здесь  $k$  – любое целое число,  $X$  – период функции. Частота функции  $\nu$  при этом определяется как обратная величина ее периода:

$$\nu = \frac{1}{X}. \quad (1.1.2)$$

Введем еще и циклическую частоту  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{X}. \quad (1.1.3)$$

В условии (1.1.1)  $x$  означает аргумент функции, которому можно придать различный физический смысл. В дальнейшем будем рассматривать в основном функции

пространства или времени и в зависимости от этого под  $x$  будем понимать либо пространственную, либо временную координату.

Таким образом, мы уже ввели понятие частоты, определили его и дали понятие частоты циклической. Однако этим рассмотрение понятия частоты не заканчивается, а лишь начинается. Например, введенного нами понятия явно недостаточно, чтобы пояснить, что имеется в виду под словами частотная характеристика, фильтр низкой частоты, низкочастотный или высокочастотный сигнал и другие аналогичные часто употребляемые термины. Разберемся в этом подробнее.

Приведем известное классическое выражение для так называемого ряда Фурье, которым можно представлять периодические функции, удовлетворяющие условию (1.1.1):

$$F(x) = \sum_k [a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)]. \quad (1.1.4)$$

Здесь

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{X}, \quad (1.1.5)$$

$$a_k = \frac{2}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} F(x) \cos(\omega_k x) dx, \quad b_k = \frac{2}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} F(x) \sin(\omega_k x) dx. \quad (1.1.6)$$

Так выглядит классическое выражение для ряда Фурье. Нашей ближайшей задачей будет являться обобщение понятия ряда Фурье на случай произвольных (практически произвольных) непериодических функций. Такое обобщение приводит к так называемому интегралу Фурье. Для того чтобы подойти к нему, преобразуем выражение для ряда Фурье, ничего не изменяя в нем по сути.

Прежде всего, запишем (1.1.4) в виде

$$F(x) = \sum_k c_k \cos(\omega_k x - \varphi_k), \quad (1.1.7)$$

где

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (1.1.8)$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \left( \frac{b_k}{a_k} \right). \quad (1.1.9)$$

В формуле (1.1.7) сделаем еще одно тождественное преобразование. Запишем косинус в виде суммы двух комплексно сопряженных экспонент:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_k c_k \exp(i\omega_k x - i\varphi_k) + \frac{1}{2} \sum_k c_k \exp(-i\omega_k x + i\varphi_k). \quad (1.1.10)$$

Теперь следует самое важное тождественное преобразование. Изменим знак у  $k$  во второй сумме (1.1.10), благодаря чему обе экспоненты в (1.1.10) примут одинаковый вид. Тогда (1.1.10) можно будет записать в виде одной суммы, распространив суммирование в ней не только на положительные, но и на отрицательные числа  $k$ . Ряд Фурье будет выглядеть так:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{-k}^k c_k \exp(i\omega_k x - i\varphi_k). \quad (1.1.11)$$

Это еще не окончательное соотношение, необходимое нам. Чтобы его получить, надо вместо  $a_k$  и  $b_k$  ввести следующий комплексный коэффициент Фурье:

$$q_k = \frac{X}{2} (a_k - ib_k) = \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} F(x) \exp(-i\omega_k x) dx. \quad (1.1.12)$$

Тогда получим следующее окончательное выражение для ряда Фурье:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{X} \sum_{-k}^k q_k \exp(i\omega_k x). \quad (1.1.13)$$

Формулы (1.1.5), (1.1.12) и (1.1.13) полностью тождественны классическим выражениям (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6). Однако мы придали этим выражениям вид, удобный для обобщения этого преобразования на произвольные непериодические функции. Для этого следует произвести всего одно действие, включающее предельный переход. Устремим период нашей функции  $X$  к бесконечности. Любая непериодическая функция может рассматриваться как функция с бесконечно большим периодом. При таком переходе сумма (1.1.13) перейдет в интеграл, называемый интегралом Фурье:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(\omega) \exp(i\omega x) d\omega. \quad (1.1.14)$$

Выражение (1.1.12) как было интегралом, так им и останется, но пределы в этом интеграле будут бесконечными:

$$q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(-i\omega x) dx. \quad (1.1.15)$$

Выражение (1.1.5) вообще теряет силу, формально стремясь к нулю. Это учитывается при переходе суммы (1.1.13) к интегралу.

Итак, мы видели, как обобщается выражение для ряда Фурье на случай непериодических функций. Осталось выяснить, как быть с частотой. Обратим внимание на то, что теперь для частоты не годится определение, что частота – это обратная величина периода. Частотой теперь будем называть ту новую переменную  $\omega$ , которая появилась в формулах (1.1.14) и (1.1.15). Слова "частотная зависимость" и другие аналогичные термины означают зависимость функции  $q(\omega)$  от  $\omega$ .

Пара получившихся интегральных уравнений – (1.1.14) и (1.1.15) – называется преобразованием Фурье. Две функции, связанные этим преобразованием, называют функциями, сопряженными по Фурье. Это преобразование принято обозначать специальным символом. Например, вместо (1.1.14) и (1.1.15) можно написать

$$q(\omega) = \Phi[F(x)], \quad (1.1.16)$$

$$F(x) = \Phi^{-1}[q(\omega)]. \quad (1.1.17)$$

Соотношение (1.1.16) принято называть частотным спектром функции  $F(x)$ . Это соотношение, позволяющее получить частотный спектр функции, называется прямым преобразованием Фурье. Оно преобразует заданную функцию в другую функцию –

спектр. Соотношение (1.1.17), позволяющее восстановить функцию по ее частотному спектру, называется обратным преобразованием Фурье.

Преобразования Фурье обобщаются на случай многих переменных. Например, в случае двух переменных преобразование Фурье может быть выполнено по обоим переменным, получается так называемый двумерный спектр. Можно совершить преобразование Фурье только по одной переменной, оставив вторую переменную нетронутой. Это случай зависимости спектра от параметра. Параметром служит переменная, не затронутая преобразованием.

В заключение вернемся еще раз к понятию частоты. В том случае, когда переменная  $x$  означает пространственную координату, соответствующая ей частота называется пространственной частотой. В случае, если переменная  $x$  означает время, то соответствующая ей частота называется просто частотой. Понятие временная частота мало употребительно.

Значение преобразования Фурье во многом связано с его интереснейшими математическими свойствами, к обсуждению которых мы переходим.

## 1.2. Математические свойства преобразования Фурье

Приведем здесь основные математические свойства преобразования Фурье, не останавливаясь на их доказательствах.

1. Главное математическое свойство преобразования Фурье состоит в том, что оно однозначно. Каждой функции соответствует только ей присущий частотный спектр, по которому можно восстановить эту функцию однозначно. Отсюда следует, что преобразование Фурье, примененное к одной и той же функции дважды (сначала к самой функции, а затем к ее спектру), дает в результате исходную функцию. Так построены и математические специальные программы, позволяющие выполнять преобразование Фурье.

С помощью принятой нами символики математически это свойство преобразования Фурье может быть записано следующим образом:

$$\Phi[\Phi^{-1}[q(\omega)]] = q(\omega), \quad (1.2.1)$$

$$\Phi^{-1}[\Phi[F(x)]] = F(x). \quad (1.2.2)$$

2. Важнейшее свойство преобразования Фурье – это его аддитивность. Преобразование Фурье от суммы двух функций равно сумме преобразований Фурье от каждой из них в отдельности, или

$$\Phi[f(x) + g(x)] = \Phi[f(x)] + \Phi[g(x)]. \quad (1.2.3)$$

Когда складываются функции, то суммируются и их частотные спектры. Это свойство легко обобщается на любое число слагаемых.

3. Более сложным является выражение преобразования Фурье от произведения функций через преобразования Фурье от сомножителей. На этот счет существуют две теоремы свертки (прямая и обратная). Сверткой двух функций называется следующее интегральное преобразование:

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x-x')dx'. \quad (1.2.4)$$

Для преобразования (1.2.4) существует специальное обозначение в виде косоного крестика в кружочке. Вот как оно выглядит:

$$m(x) = f(x) \otimes g(x). \quad (1.2.5)$$

Прямая теорема свертки формулируется так: фурье-преобразование от свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье от этих функций:

$$\Phi[f_1(x) \otimes f_2(x)] = \Phi[f_1(x)] \Phi[f_2(x)], \quad (1.2.6)$$

$$\Phi^{-1}[q_1(\omega) \otimes \overline{q_2(\omega)}] = \Phi^{-1}[\overline{q_1(\omega)}] \Phi^{-1}[q_2(\omega)] 2\pi. \quad (1.2.7)$$

Черта сверху здесь и далее означает операцию перехода к комплексно сопряженному выражению. Обратная теорема свертки: фурье-преобразование от произведения функций равно свертке их преобразований Фурье:

$$\Phi[f_1(x) f_2(x)] = \frac{1}{2\pi} \Phi[f_1(x)] \otimes \Phi[f_2(x)], \quad (1.2.8)$$

$$\Phi^{-1}[q_1(\omega) q_2(\omega)] = \Phi^{-1}[q_1(\omega)] \otimes \Phi^{-1}[q_2(\omega)]. \quad (1.2.9)$$

4. Теорема смещения. Это свойство преобразования Фурье чрезвычайно широко используется в приложениях для смещения спектров функций. Свойство выглядит следующим образом:

$$\Phi[f(x) \exp(i\omega_0 x)] = q(\omega - \omega_0), \quad (1.2.10)$$

$$\Phi^{-1}[q(\omega) \exp(i\omega x_0)] = f(x + x_0). \quad (1.2.11)$$

5. Преобразования Фурье от некоторых специальных функций. В приложениях ряда и интеграла Фурье к практическим задачам существенную роль играют некоторые специальные функции. Эти функции обладают математическими особенностями в виде разрывов и расходимости. Поэтому они не могут быть вычислены непосредственно по формулам, описывающим преобразования Фурье. Во многих руководствах и математической литературе большое внимание уделяется преобразованиям Фурье от специальных функций. Учитывая, что это уже сделано и есть почти в каждой книге, посвященной преобразованиям Фурье, мы дадим эти свойства без доказательств.

Одна из самых употребительных функций – так называемая дельта-функция  $\delta(x)$ . Эту функцию мы определим через ее фурье-спектр. Фурье-спектр дельта-функции равен единице:

$$\Phi[\delta(x)] = 1, \quad (1.2.12)$$

$$\delta(x) = \Phi^{-1}[1]. \quad (1.2.13)$$

Из (1.2.12) и (1.2.13) следует, что  $\delta(x)$  всюду равна нулю за исключением всего одной точки, а именно нуля. В нуле функция  $\delta(x)$  обращается в бесконечность, но так, что интеграл от нее остается конечным и равным единице.

Следующей специальной функцией, которую мы рассмотрим, будет так называемая прямоугольная функция. Она определяется так:

$$\Pi(x) = 1 \text{ при } x \geq 0, \quad \Pi(x) = 0 \text{ при } x < 0. \quad (1.2.14)$$

Между прямоугольной и дельта-функцией существует связь:

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt. \quad (1.2.15)$$

6. В качестве следующего свойства преобразования Фурье отметим следствие определения дельта-функции. Хотя это простое и легко устанавливаемое следствие, однако ввиду его важности мы его выделяем. Это свойство касается результата свертки какой-либо функции с дельта-функцией:

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') f(x - x') dx' \quad \text{или} \quad m(x) = \delta(x) \otimes f(x). \quad (1.2.16)$$

Подвергая (1.2.16) преобразованию Фурье дважды (сначала прямому, а затем обратному) и пользуясь теоремой свертки, получим, что

$$m(x) = f(x). \quad (1.2.17)$$

Пользуясь этим свойством дельта-функции, легко доказывать другие. В качестве примера рассмотрим прямую теорему свертки.

Свертку функций запишем в виде (1.2.4). В этом выражении функцию  $g(x)$  заменим ее преобразованием Фурье. Получим

$$m(x) = \frac{1}{2\pi} \iint f(x') \exp(-i\omega x') g_{\omega} \exp(i\omega x) dx' d\omega. \quad (1.2.18)$$

Здесь мы употребили очень удобное обозначение для спектра функции  $g(x)$ , пометив его той же буквой с добавлением внизу индекса  $\omega(g_{\omega})$  – сразу видно, от какой именно функции взято прямое преобразование Фурье. Конечно, это видно и при символическом написании, но символическое написание ввиду его громоздкости и символичности не всегда удобно подставлять в формулы. В (1.2.18) можно выполнить интегрирование по переменной  $x'$ , в результате чего получается спектр функции  $f(x)$ :

$$m(x) = \int f_{\omega} g_{\omega} \exp(i\omega x) d\omega. \quad (1.2.19)$$

Поскольку нам надо найти спектр свертки, совершим прямое преобразование Фурье над обеими частями (1.2.19). Это преобразование надо совершить по переменной  $\omega'$ , так как переменная  $\omega$  у нас уже занята в (1.2.19). Совершив это преобразование, получим:

$$\Phi[f(x) \otimes g(x)] = \iint f_{\omega} g_{\omega'} \exp[i(\omega - \omega')x] dx d\omega'. \quad (1.2.20)$$

Интегрируя (1.2.20) по  $x$ , получаем дельта-функцию:

$$\Phi[f(x) \otimes g(x)] = \int f_{\omega} g_{\omega'} \delta(\omega - \omega') d\omega'. \quad (1.2.21)$$

Используя (1.2.16), получаем прямую теорему свертки.

### 1.3. Знаменитая теорема отсчетов

Окончательный вид преобразованию Фурье и возможность его использования для любых, а не только периодических функций, мы получили благодаря предельно-му переходу от ряда Фурье (1.1.13) к интегралу (1.1.14). Численный счет осуществляется на основе дискретной сетки значений, не допускающих, вообще говоря, предель-

ных переходов. Не потеряем ли мы всех плюсов и возможностей преобразования Фурье, записанного в интегральной форме, не имея реальной возможности осуществить предельный переход к бесконечному периоду? На этот вопрос мы пока ответим следующим замечанием. Численными методами можно практически с любой точностью оценивать интегралы. Поэтому преобразования Фурье можно представлять себе в удобной интегральной форме не только тогда, когда производятся вычисления на бумаге, но и тогда, когда подключаются численные методы. Однако в действительности дело обстоит куда проще. Чтобы пояснить это, необходима так называемая теорема отсчетов.

Теорема отсчетов тоже является одним из математических свойств преобразования Фурье. Выделим ее в специальный раздел и даже докажем, поскольку это одна из самых замечательных и наиболее используемых теорем 20 века. Она имеет три названия. В 1935 г. эту теорему сформулировал, доказал и показал ее выдающуюся роль в теории связи В. А. Котельников. Она получила название теоремы Котельникова. В 1945 г. известный ученый Клод Шеннон построил фундамент современной теории связи. В основу этого фундамента легла та же теорема, доказанная К. Шенноном независимо от Котельникова. После этого было обнаружено доказательство этой же теоремы в работах известного математика Уиттекера. Работа Уиттекера относится к 1915 г. Тогда в литературе эта теорема стала появляться как теорема Уиттекера – Шеннона, так как Уиттекер доказал теорему только как относящуюся к теории преобразования Фурье, не помышляя о том, что она станет фундаментом теории связи. Мы будем придерживаться названия, связанного с существом теоремы, называя ее теоремой отсчетов.

Чтобы сформулировать теорему и приступить к ее доказательству, необходимо ввести еще одно понятие, связанное с преобразованием Фурье. Это понятие о функции, обладающей ограниченным спектром. Функцией с ограниченным спектром называется такая функция, спектр которой по модулю обращается в нуль на всех частотах, начиная с частоты, которая называется граничной частотой. Теперь сформулируем теорему.

*Непрерывная функция, имеющая ограниченный спектр с граничной частотой  $\pm\omega_g$ , может быть представлена в любой точке на основании своих значений, взятых в дискретных точках отсчета этой функции. Расстояние между точками отсчета при этом не должно превышать значения  $\pi/\omega_g$ .*

Прежде чем доказывать эту теорему, обсудим ее практическое значение. Все функции, имеющие какой-то физический смысл, обладают ограниченным спектром. Поэтому по условиям теоремы отсчетов любая непрерывная функция представима дискретным рядом значений. Это позволяет представлять информацию о любых непрерывно протекающих явлениях в виде дискретного набора значений, используемого при численном счете. Без этого в условиях, когда любой конечный отрезок непрерывной функции определяется бесконечной совокупностью значений, численный счет и передача таких данных по каналам связи была бы невозможной.

Теперь докажем эту теорему. Доказательство привлекательно тем, что дает прекрасную возможность проиллюстрировать то, как практически при этом работают сформулированные выше математические свойства преобразования Фурье.

Пусть функция  $F(x)$  имеет ограниченный спектр. Запишем спектр этой функции в таком виде, чтобы ограничения ширины спектра функции были бы явно видны:

$$F_{\omega}(\omega) = F_{\omega}(\omega) \Pi(\omega_g + \omega) \Pi(\omega_g - \omega). \quad (1.3.1)$$



Здесь использована специальная функция  $\Pi(x)$ , определяемая (1.2.14). Эта запись (1.3.1) дает нам возможность доопределять спектр  $F(x)$  за пределами  $\pm\omega_g$  любым образом. Примем, что за пределами граничной частоты спектр  $F(x)$  является периодической функцией. Такое предположение мы имеем право делать, только пользуясь для спектра представлением (1.3.1). Теперь подвергнем обе части (1.3.1) преобразованию Фурье и получим выражение

$$F(x) = \Phi \left[ F_\omega(\omega) \Pi(\omega_g + \omega) \Pi(\omega_g - \omega) \right], \quad (1.3.2)$$

которое на основании обратной теоремы свертки (1.2.8) можно записать в виде

$$F(x) = \Phi^{-1} \left[ F_\omega(\omega) \right] \otimes \Phi^{-1} \left[ \Pi(\omega_g + \omega) \Pi(\omega_g - \omega) \right]. \quad (1.3.3)$$

Вычислим каждую функцию, входящую в свертку (1.3.3), а затем выполним преобразование свертки.

На основании предположения о периодичности функции  $F_\omega(\omega)$  обратное преобразование от нее будет содержать дельта-функцию:

$$\Phi^{-1} \left[ F_\omega(\omega) \right] = \frac{2\pi}{2\omega_g} \sum_{-k}^k F(x_k) \delta(x - x_k). \quad (1.3.4)$$

От второй функции обратное преобразование Фурье находится непосредственным вычислением:

$$\Phi^{-1} \left[ \Pi(\omega_g + \omega) \Pi(\omega_g - \omega) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} \exp(i\omega x) d\omega = \frac{2\omega_g \sin(\omega_g x)}{2\pi\omega_g x}. \quad (1.3.5)$$

Выполняя преобразование свертки с учетом свойств дельта-функции, окончательно получим следующий ряд Котельникова:

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(x_k) \frac{\sin(\omega_g(x - x_k))}{\omega_g(x - x_k)}. \quad (1.3.6)$$

Этот ряд позволяет вычислить с любой точностью значения непрерывной функции  $F(x)$  по ее значениям в дискретных точках отсчета, определяемых следующим образом:

$$x_k = k \frac{2\pi}{2\omega_g}. \quad (1.3.7)$$

Интегральные уравнения преобразования Фурье практически симметричны относительно функции и ее спектра. Поэтому существует еще одна симметричная теорема отсчетов, относящаяся к спектру функции. Она формулируется аналогично доказанной теореме и утверждает, что непрерывный спектр функции может быть задан дискретными отсчетами, если значения функции точно равны нулю вне конечной области ненулевых значений.

Введем понятие о степенях свободы сигнала, являющееся важнейшим для практики следствием теоремы отсчетов. Пусть спектр сигнала ограничен. На этом основании можно строго математически показать, что значения непрерывной функции достаточно знать лишь в точках отсчета. Число значений функции, которые надо вводить в вычислительное устройство, вроде бы существенно сократилось, но не совсем. Есть

же еще и спектр функции. Чтобы и спектр функции мог быть задан значениями в дискретных точках, значения самой функции должны быть заданы в пределах некоторого ограниченного отрезка области значений функции. Иными словами, задание функции значениями в дискретных точках еще не гарантирует нам возможности представления этой функции конечным набором чисел. Должна быть ограничена и область задания функции. Если это сделано, т. е. ограничен спектр функции и область ее задания ненулевыми значениями, то тогда непрерывная функция может быть задана конечным числом своих значений, взятых в точках отсчета. Это число называется числом степеней свободы функции, так как любые ее изменения должны быть связаны с изменением только этих конечных значений.

Пусть число степеней свободы функции будет  $N$ , ширина ее спектра, простирающаяся от одной граничной частоты до другой, будет  $\Delta\omega$ , а область задания значений функции обозначим  $\Delta x$ . Тогда число степеней свободы функции, равное отношению интервала  $\Delta x$  к расстоянию между отсчетными точками, определится как

$$N = \frac{\Delta x \Delta \omega}{2\pi}. \quad (1.3.8)$$

Выражение (1.3.8) является настолько важным в приложениях, что одно его существование среди всех математических свойств преобразования Фурье обеспечивало бы этому преобразованию широкое применение в исследованиях.

#### 1.4. Как выполняется преобразование Фурье численно

Преобразования Фурье (1.1.16) и (1.1.17) настолько широко используются в физике, математике и других точных науках, что для их выполнения численными методами созданы специальные программы. Непосредственно по формулам (1.1.14), (1.1.15) численное преобразование Фурье не выполняется, так как эти формулы получены в результате предельного перехода от интегральных сумм (1.1.13) к интегралам, чего численными методами точно сделать нельзя. Нам предстоит выяснить, каковы особенности преобразования Фурье, совершаемые численно.

Численными методами осуществляется представление функций в виде ряда Фурье, но так, что результаты могут быть истолкованы точно так же, как если бы совершалось точное интегральное преобразование Фурье. Достигается это следующими приемами.

Входные данные поступают в виде набора действительных или комплексных (в ряде программ, в частности тех, которые мы предполагаем использовать в дальнейшем) чисел. Эти числа можно трактовать как значения непрерывной функции, взятые в точках отсчета. Совокупность всех введенных значений образует вектор. Форму этого вектора можно представить себе в виде графика или таблицы значений.

Пусть имеется  $L$  значений, отстоящих одно от другого через единицу. Таким образом, длина числовой оси тоже равна  $L$ . Функция, представленная дискретными равноотстоящими друг от друга отсчетами, имеет ограниченный спектр, ее фурье-спектр состоит из бесконечного числа слагаемых. Он вовсе не конечен, но значения модуля спектра равны нулю вне некоторого интервала значений спектра. Границы этого интервала, согласно теореме отсчетов, равны

$$\omega_g = \pm\pi / \Delta x, \quad (1.4.1)$$

где  $\Delta x$  – интервал между точками отсчета. Полная ширина спектра (область возможных ненулевых членов) простирается от  $-\omega_g$  до  $+\omega_g$ , что составляет  $2\omega_g$ . С учетом (1.4.1) и того, что интервал  $\Delta x$  в нашем случае равен единице, размер области возможных ненулевых значений спектра будет равен  $2\pi$ .

Доопределим нашу функцию за пределы того интервала  $L$ , на котором она задана. Пусть это будет периодическая функция с периодом, равным интервалу ее задания, т. е.  $L$ . Периодическая функция раскладывается в дискретный ряд Фурье. Частоты этого ряда (значения  $\omega_k$ ) определяются на основании (1.5) как

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{L}. \quad (1.4.2)$$

Как мы уже выяснили, ненулевые значения располагаются только на интервале  $2\pi$ . Сколько ненулевых компонент будет содержать спектр функции? Для ответа на этот вопрос надо поделить интервал  $2\pi$  на расстояние между дискретными частотами спектра функции, равное  $2\pi/L$ . Тогда спектр нашей функции будет содержать  $L$  дискретных частот, т. е. ровно столько, сколько задано значений функции. Повторяем, что это есть следствие двух положений. Первое заключается в том, что мы задали функцию только дискретными значениями, а второе состоит в том, что мы продолжили заданную функцию за пределы ее задания периодически до бесконечности.

Сделаем еще один важный шаг – учтем дискретность при вычислении спектров. Примем, что мы вычисляем спектр лишь при тех значениях частот, которые записаны в формуле (1.4.2). Такова специфика дискретного счета. Вычисляем ровно  $L$  значений спектра, по числу заданных значений функции. Отсюда следует вывод: если функция задается дискретным рядом значений (не важно, спектр это или функция), то ее спектр ограничен. Спектр от спектра – это сама функция. Значит, сама функция должна быть ограничена и равна нулю вне области ее задания. Продолжать функцию можно только нулями, если мы ограничиваемся вычислениями только дискретных равноотстоящих друг от друга точек спектра. Значит, обе функции, как сама функция, так и ее спектр, являются ограниченными функциями. Это можно представить в таком виде, что первоначально периодическая функция, имеющая период  $L$ , умножается на такую функцию прямоугольной формы, которая на всем интервале задания функции равна единице, а за пределами этого интервала равна нулю.

Чрезвычайно важен вопрос: каков спектр чистой экспоненты? Выражение для экспоненты запишем, используя (1.4.2) в виде

$$F(k) = \exp\left(i \frac{2\pi}{L} fk\right). \quad (1.4.3)$$

В связи с тем, что спектр вычисляется только при целых значениях  $k$ , будут различаться две области возможных значений коэффициента  $f$ . Первая область значений, когда коэффициент  $f$  представлен целым числом. Это целое число в этом случае имеет смысл номера той единственной точки отсчета спектра, в которой будет наблюдаться спектр нашей экспоненты. Программа численного преобразования Фурье устроена так, что на картине, изображающей спектр, вдоль горизонтали отложены целые значения коэффициента  $f$ . Это является достаточным основанием для того, чтобы значение коэффициента  $f$  назвать частотой. Заметим, что если мы имеем дело с дискретной частотой, то, продолжая функцию периодически за пределы ее задания, получим чистую экспоненту бесконечной длительности. Ее разложение в ряд Фурье состоит всего из одного члена, который бесконечен в этой точке. Учтем теперь, что наша функция

умножена на прямоугольную функцию. Спектр произведения функций представляет собой свертку спектров, спектр прямоугольной функции – функцию (формула (1.3.5))

$$F(k) = \frac{\sin(\omega_g k)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k}. \quad (1.4.4)$$

Эта функция при  $k = 0$  равна единице, а при всех остальных целых значениях  $k$  она равна нулю. Умножение прямоугольной функции на экспоненту смещает ее спектр, определяемый формулой (1.4.4), на  $f$ . В случае целочисленной частоты спектр сдвинется на целое число отсчетных точек спектра. По-прежнему в одной точке будет значение единица, а во всех остальных отсчетных точках будет нуль.

Вторая область значений коэффициента  $f$ , или частоты, представляет собою все остальные дробные значения. Эту область значений частоты будем называть дробной. Как будет выглядеть спектр в этом случае? Спектр (1.4.4) сместится на дробное число отсчетных точек, а значения спектра будут определяться по-прежнему лишь в отсчетных точках. Теперь уже нигде не будет нулевых значений, а значения во всех отсчетных точках определятся формулой (1.4.4) при смещении ее на величину частоты, включая ее дробную часть.

Заметим, что введенное нами определение частоты как номера соответствующей отсчетной точки спектра удобно лишь в случае численного счета. В иных задачах принято частотой считать не коэффициент  $f$  в (1.4.3), а значение другого коэффициента, стоящего перед  $k$ .

Поясним это подробнее для весьма употребительного случая, когда переменная  $k$  трактуется как номер отсчета точки во времени. Интервал времени в секундах между последовательно взятыми точками составляет в этом случае  $1/F$ , где  $F$  – это частота временного квантования в циклах в секунду. Разделим и умножим показатель экспоненты в (1.4.3) на  $F$ , тогда (1.4.3) можно переписать в виде функции времени  $t$  следующим образом:

$$S(t) = \exp\left(i \frac{2\pi}{L} f F t\right). \quad (1.4.5)$$

Частотой, измеряемой в радианах в секунду, будет являться весь коэффициент, стоящий перед  $t$ , исключая мнимую единицу, а частотой, измеряемой в герцах, будет  $f \frac{F}{L}$ .

Другая важная особенность численного преобразования Фурье состоит в использовании так называемого быстрого преобразования Фурье. Если число значений  $N$  равно  $2^n$ , где  $n$  – любое положительное целое число, то при вычислении спектра функции многие действия в точности повторяются. Существует специальная математическая программа, позволяющая исключить повторы и тем самым существенно сократить объем вычислений. Эта программа называется быстрым преобразованием Фурье (БПФ). Пользуясь БПФ, мы осуществляем только логарифм от общего числа необходимых операций. Поэтому выигрыш от использования БПФ быстро растет с ростом  $N$ .

Число операций можно дополнительно сократить вдвое при вычислении спектра от действительной функции. В случае действительной функции члены ряда Фурье с положительными и отрицательными частотами равны друг другу, и тогда можно ограничиться вычислениями коэффициентов ряда только при положительных частотах. Такая программа тоже имеется в пакете программ БПФ.

В пакете программ *Mathcad* преобразование Фурье от комплексной функции (с вычислением всех  $N$  коэффициентов Фурье) обозначается как *cffft* (обозначение функции в виде вектора или матрицы значений). Преобразование от действительной функции (с вычислением  $0,5N$  коэффициентов) обозначается как *fft* (с указанием вектора или матрицы). Преобразование от комплексной функции (*cffft*) устроено так, что выдает значения коэффициентов Фурье сначала для частот одного знака в порядке возрастания значений частот. Затем к ним пристраиваются значения частот другого знака в порядке убывания. Итак, оказывается, что по краям картины спектра располагаются низкие частоты, а высокие частоты занимают середину спектра. В центре спектра оказываются самые высокие частоты. Этот порядок размещения частот можно изменить только путем построения соответствующей программы. Ниже будут даны примеры таких программ. В пакете *Matlab* можно получить сразу спектр с желательным размещением частот (в центре либо высокие, либо низкие частоты).

Из вышеизложенного следует, что для задания непрерывной комплексной функции на конечном участке  $X$  необходимо задать на этом участке  $N$  значений комплексных чисел, разделенных интервалом  $\Delta x$ . При этом спектр функции вычисляется тоже в  $N$  точках в виде комплексных коэффициентов Фурье. Исходя из условия, что спектр функции ограничен интервалом  $\Delta\omega$ , можно получить значения заданной функции в промежуточных точках. Такая операция необходима и часто используется в дальнейшем как при численном моделировании сигналов, так и при их выделении, поэтому остановимся на ней подробнее.

Для получения промежуточных значений функции можно действовать двумя путями. Наиболее естественный путь – применение для этой цели формулы (1.3.6), определяющей значение функции в любой точке посредством ряда. Такая программа приведена на рис. 1.3.

В начале программы обозначены так называемые диапазонные переменные [1], которые используются в вычислениях. Далее идет процедура задания исходных 16 дискретных значений, которые должны быть дополнены промежуточными значениями. В качестве исходных могут быть взяты любые числа, но при этом сравнивать полученные промежуточные значения будет не с чем. Чтобы иметь возможность сравнить полученные нами промежуточные значения функции с истинными промежуточными значениями той же функции, она задана в виде непрерывной функции  $F(u)$  переменной  $u$ . Эта функция не может быть полностью произвольной, а должна иметь ограниченный спектр. Это условие обеспечивается тем, что функция составлена из суммы синусоид, каждая из которых низкочастотна. Далее в программе приведен ряд Котельникова (1.3.6) в виде некоторой функции переменной  $u$ . Коэффициентами этого ряда являются исходные 16 значений функции. Придавая какое-то конкретное значение переменной  $u$ , являющейся аргументом ряда  $F(u)$ , можно получить любое промежуточное значение функции, заданной лишь дискретными значениями. Далее определяются 256 промежуточных значений  $C_m$  путем их подстановки в ряд (1.3.6). Поясним подробнее получившийся конечный результат и форму его представления. Обе функции, как первоначальная, так и дополненная промежуточными значениями, приведены на одном графике. Чтобы это сделать в пакете *Mathcad*, обе функции вдоль горизонтали должны иметь одну и ту же переменную, т. е. вдоль горизонтали у обеих функций должно быть равное число значений. Чтобы удовлетворить этому условию, пришлось первоначальные 16 значений функции дополнить нулями, они помещены в промежуточных точках функции с помощью специальной программы. Эта программа содержит условие [1], которое помещено в скобках в самом начале и отделено запятой. После запятой приведено

значение функции, которое она должна принять при выполнении этого условия, это значение также отделено запятой. После второй запятой приведено значение функции, которое она должна принять в случае нарушения условия. Знак суммы необходим, чтобы задействовать диапазонную переменную  $k$ , которая не входит в левую часть программы и поэтому не может быть задействована иначе. Приведенный прием полезен при необходимости представить в пакете *Mathcad* две или более функций с разным числом значений вдоль оси абсцисс. На том же рисунке приведен график исходной заданной функции, определенной для всех 256 значений посредством формулы  $Fu(u)$ . Разность между восстановленными промежуточными значениями и истинными приведена на отдельном графике.

Следующая программа, ведущая к той же цели иным путем, приведена на рис. 1.4. Это гораздо более быстрая программа, так как она не содержит суммирования. В ее основе лежит ограничение спектра восстанавливаемой функции. Для получения промежуточных значений функции достаточно выполнить три операции: 1) вычислить спектр функции в  $L$  точках; 2) дополнить получившийся спектр нулями, получив  $LN$  точек спектра; 3) совершить обратное преобразование Фурье. Из этих операций новой для нас является вторая – добавление нулей в спектр. Остановимся на ней подробнее.

Нули следует вставлять взамен высоких частот, которые выше уже представленных в спектре. Если значения частот выведены так, как это принято в пакете *Mathcad* (низкие частоты по краям интервала, а высокие в центре), то нули следует добавлять в центральную область спектра, не трогая уже выведенных значений. Вот как выглядит программа добавления нулей в спектр в пакете *Mathcad 6 0 plus* (удобство пакета *Mathcad* состоит в том, что используемая символика приближена к обычной практике математической записи формул):

$$O(F, m, n) = \begin{cases} F_{m,n} \sqrt{N} & \text{if } m < 0,5L \\ 0 & \text{otherwise} \\ f_{m-LN+L,n} \sqrt{N}, & \text{if } LN - 0,5L \leq m. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Здесь  $O(F, m, n)$  – специальная функция, обеспечивающая вставление нужного числа нулей в спектр,  $F$  – матрица спектра функции. В этой матрице  $m$  столбцов и  $n$  строк. В столбцах располагаются значения спектра функции (комплексные коэффициенты Фурье), а в строках значения некоторого параметра, от которого может зависеть спектр функции. Если такого параметра нет, а есть только спектр функции, то переменную  $n$  надо исключить из формулы (1.4.6). Первоначальное число точек в спектре  $L$ . За счет добавления нулей требуется расширить спектр в  $N$  раз. Нижняя и верхняя строки в правой части (1.4.6) обеспечивают сохранение значений спектра функции с неизменной амплитудой (изменение амплитуд в  $\sqrt{N}$  раз обеспечивает сохранение амплитуды сигнала после выполнения обратного преобразования Фурье по увеличенному в  $N$  раз числу точек).

Действие этой программы (см. рис. 1.4) покажем на том же исходном массиве значений, использовавшемся в программе, представленной на рис. 1.3. В каждый промежуток между этими 16 значениями вставим 16 дополнительных точек.

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных: начальный; конечный

$$L = 16 \quad N = 16 \quad L \cdot N = 256$$

Диапазонные переменные

$$k = 0..L \quad 1 \quad m = 0..L \cdot N - 1$$

Исходная функция

$$Fu(u) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{256} \cdot 3 \cdot u\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{256} \cdot 4 \cdot u + 0.25 \cdot \pi\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{256} \cdot 1 \cdot u\right)$$

Получение исходных данных

$$A_k = Fu(k \cdot N)$$

Ряд Котельникова (1.3.6)

$$F(u) = \sum_k A_k \cdot \text{if} \left( u \neq k, \frac{\sin\left[2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot (u - k) \cdot \frac{L}{2}\right]}{\left[2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot (u - k) \cdot \frac{L}{2}\right]}, 1 \right)$$

Дополнение функции промежуточными значениями с помощью ряда (1.3.6)

$$C_m = F\left(\frac{m}{N}\right)$$

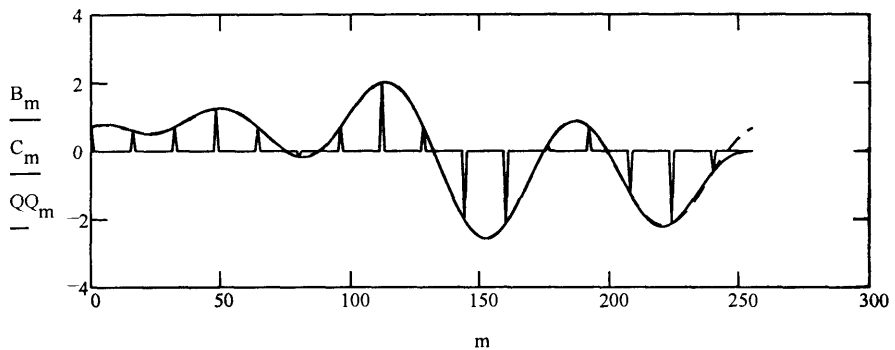
Добавление нулей к первоначально заданным значениям

$$B_m = \sum_k \text{if}(m = k \cdot N, A_k, 0)$$

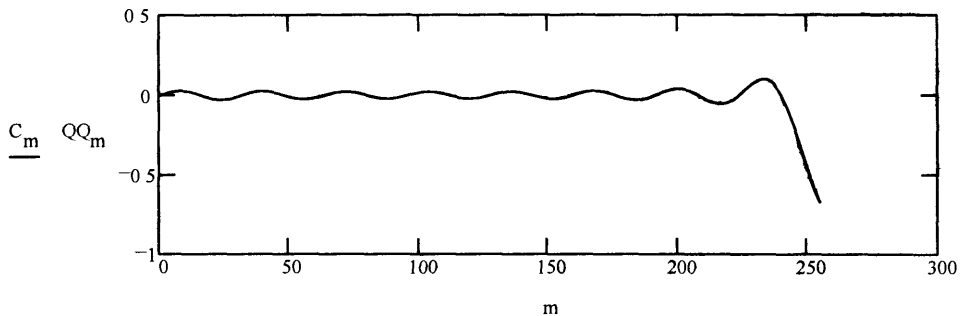
Добавление промежуточных значений в исходную функцию

$$QQ_m = Fu(m)$$

Представление результата в виде графиков



Разность истинных и восстановленных значений



**Рис. 1.3.** Дополнение функции промежуточными значениями с использованием ряда (1.3.6)

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных: начальный; конечный

$$L = 16 \quad N = 16 \quad L \cdot N = 256$$

Диапазонные переменные

$$k = 0..L - 1$$

$$m = 0..L \cdot N - 1$$

Исходная функция

$$Fu(u) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{256} \cdot 3 \cdot u\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{256} \cdot 4 \cdot u + 0.25 \cdot \pi\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{256} \cdot 1 \cdot u\right)$$

Получение исходных данных

$$A_k = Fu(k \cdot N)$$

Спектр функции

$$F = \text{cfft}(A)$$

Функция, которая добавляет нули в спектр

$$O(F, m) = \begin{cases} F_m \cdot \sqrt{N} & \text{if } m < 0.5 \cdot L \\ 0 & \text{otherwise} \\ F_{(m-L \cdot N) + L} \cdot \sqrt{N} & \text{if } L \cdot N - 0.5 \cdot L - m \end{cases}$$

Спектр с добавленными в него нулями

$$FD_m = O(F, m)$$

Обратное преобразование Фурье

$$AD = \text{icfft}(FD) \quad C_m = \text{Re}(AD_m)$$

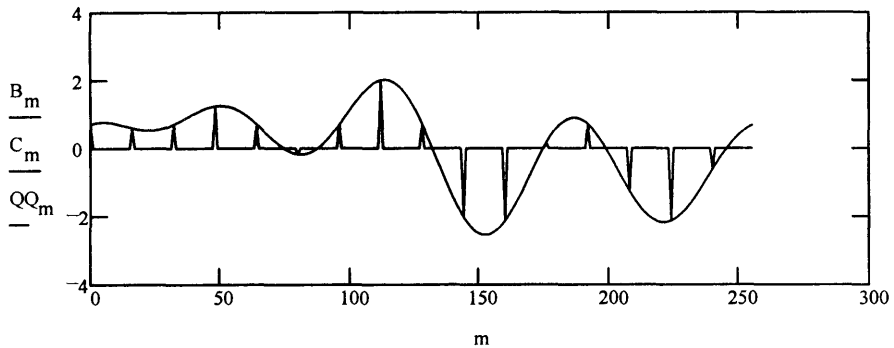
Добавление нулей к первоначально заданным значениям

$$B_m = \sum_k \text{if}(m=k \cdot N, A_k, 0)$$

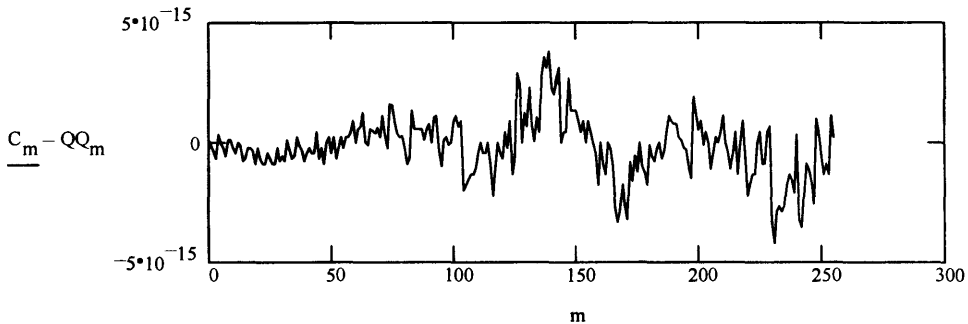
Добавление промежуточных значений в исходную функцию

$$QQ_m = Fu(m)$$

Представление результата в виде графиков



Разность истинных и восстановленных значений



**Рис. 1.4.** Дополнение функции промежуточными значениями с использованием спектра



После получения исходных данных следуют иные действия, чем в предыдущей программе. Исходные данные представляются в виде спектра, который дополняется нулями по формуле (1.4.6). В результате обратного преобразования Фурье к исходным данным добавляются промежуточные значения.

Этот способ восстановления промежуточных значений оказывается не только более быстродействующим, но и гораздо более точным, как видно из приведенного графика в конце программы.

На рис. 1.5 приведена программа, позволяющая получать промежуточные значения в спектре функции. В качестве примера взята экспоненциальная функция от мнимого аргумента при целочисленной частоте. В этом случае спектр функции, не дополняемый промежуточными точками, содержит всего одну точку. Все остальные значения приходятся точно на нули функции  $\sin x/x$ .

Для получения промежуточных значений спектра функции она должна быть дополнена нулями, что и сделано в прилагаемой программе (см. рис. 1.5).

Заметим, что спектр чистой экспоненты всегда определяется по формуле (1.4.3) как  $\sin x/x$ . При целочисленных частотах отдельные точки приходятся на нули этой функции. Иногда бывает важно не делать кардинальной разницы между целочисленными и дробными частотами, для чего достаточно спектр дополнить промежуточными значениями, т. е. функцию в пределах ее задания следует дополнить нулями. Сколько нулей мы вставим в функцию, столько промежуточных значений получим.

Теперь мы можем ответить на все вопросы, поставленные в разд. 1.1 (см. рис. 1.1 и 1.2).

*Первый.* Что отложено вдоль горизонтальной оси рисунка, на котором изображен спектр? На этот вопрос выше ответ уже был дан, но здесь остановимся подробнее. Вдоль горизонтальной оси отложено целое число  $f$ , являющееся номером отсчетной точки спектра. К отрицательным значениям  $f$  в пакете программ "Mathcad 6 plus" прибавляется число равное половине длины массива данных, в результате чего они оказываются во второй половине спектра. Положительные значения  $f$  откладываются в самом начале спектра до его середины. Такое представление спектра в упомянутом пакете программ получается по умолчанию. Это представление можно преобразовать в иное, являющееся в ряде случаев более удобным, как показано на рис. 1.6, где программа представлена в виде спектра функции единица плюс косинус целочисленной частоты, равной 25. На верхней картинке изображен спектр таким, каким он обычно получается в пакете Mathcad Plus 6.0. Все частоты положительные, их число в точности равно числу заданных дискретных значений самой функции. На нижнем графике координаты преобразованы. Левая часть рисунка до его середины перемещена в правую посредством прибавления к номеру числа  $0,5L$ . Правая часть рисунка передвинута в левую путем вычитания из номеров чисел того же числа  $0,5L$ . Тем самым мы поместили нулевую частоту в центр, от которого идет в обе стороны увеличение частот. Чтобы придать правильный знак частотам, включив отрицательные значения, следует от значений  $k$  отнять то же число  $0,5L$ . Таким образом, используя три раза число  $0,5L$ , мы получили представление спектра, показанное на нижнем графике рис. 1.6, вдоль горизонтальной оси отложены как отрицательные, так и положительные частоты.

*Второй.* О магическом числе 1,2231856, при округлении которого происходит качественное изменение картины спектра. Это магическое число равно с точностью до восьми знаков  $(2\pi/L)25$ . Таким образом, это число представляет собою целое значение частоты, равное 25, что и видно на рисунке. Если это число округлить всего до четырех знаков, то частота будет целой лишь приблизительно, т. е. она будет дробной, что и сказывается на виде спектра.

## Mathcad Plus 6.0

Начальный массив данных

$$L = 16$$

Конечный массив данных

$$N = 32 \quad L \cdot N = 512$$

Диапазонные переменные

$$k = 0..L-1 \quad m = 0..L \cdot N-1$$

Пространственная частота

$$f = 4$$

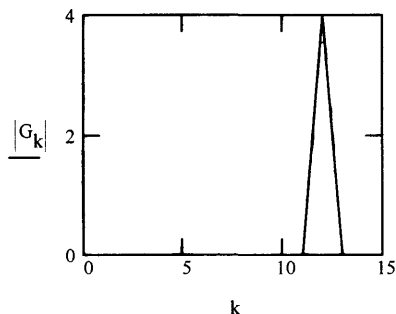
Исходная функция

$$A_k = \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot f \cdot k\right)$$

Спектр исходной функции

$$G = \text{cfft}(A)$$

График спектра



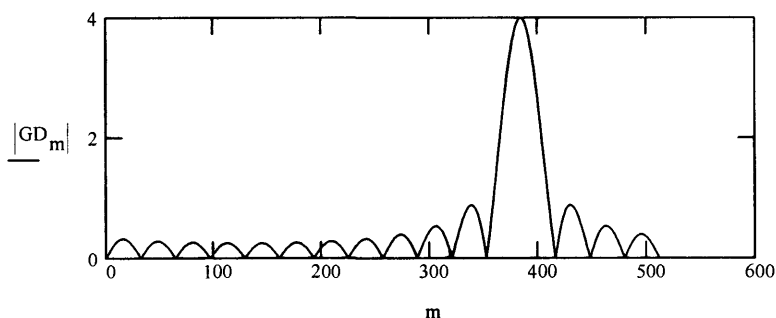
Дополнение функции нулями

$$AD_m = \begin{cases} A_m \cdot \sqrt{N} & \text{if } m < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Спектр с промежуточными значениями

$$GD = \text{cfft}(AD)$$

График модуля спектра с промежуточными значениями

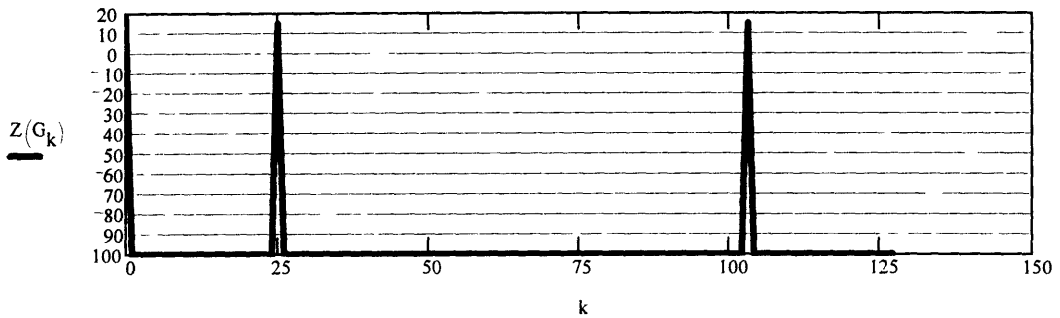


**Рис. 1.5.** Дополнение спектра функции дополнительными значениями

Mathcad Plus 6.0

Массив и диапазонные переменные		Частота
L = 128	$k = 0..L - 1$	$\omega = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot 25.0$
	$kk = 0..0.5 \cdot L - 1$	$p = 5$
Функция	Спектр	Логарифмирование модуля функции
$a_k = 1 + \cos(\omega \cdot k)$	$G = \text{cfft}(a)$	$Z(u) = \text{if}( u  > 10^p, 20 \cdot \log( u ), 20 \cdot p)$

Спектр в обычном представлении (по умолчанию)



Преобразование координат

$$G1_{kk} = G_{0.5L + kk} \quad G1_{kk + 0.5L} = G_{kk}$$

Представление спектра с нулем посередине с частотами обоих знаков

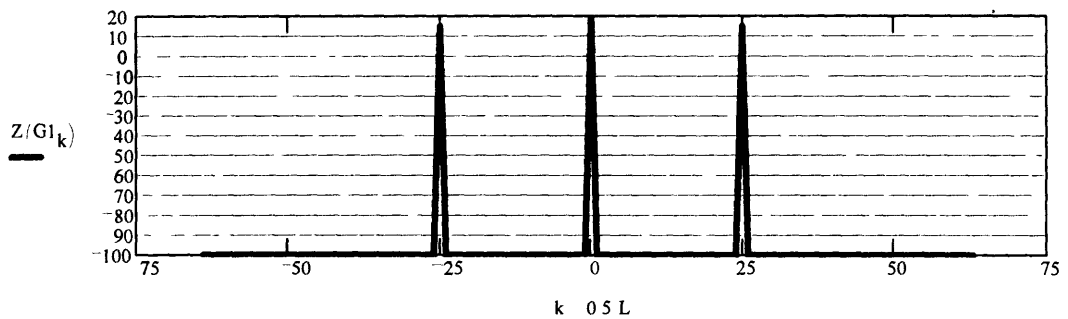


Рис. 1.6. Два представления спектра

## 1.5. Линейные системы

Свойства так называемых линейных систем успешно используются при выделении сигналов. Более того, вся линейная обработка сигналов с целью выделения нужных сигналов и подавления ненужных (шумов) основана на свойствах линейных систем. Поэтому выделим свойства линейных систем в отдельный раздел.

Свое название описываемые нами системы получили вследствие того, что они математически описываются системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. К таким системам относятся радиотехнические устройства, осуществляющие усиление или фильтрацию сигналов, механические устройства (рычаги, пружины, диссипативные элементы), оптические устройства (объективы, многоканальные антенные решетки) и многое другое. Рассмотрим математические свойства подобных систем, общие для всех случаев.

Чтобы сразу перейти к свойствам, дадим иное определение линейных систем. Систему, способную совершать колебания под действием внешней силы, будем называть линейной, если она обладает следующими двумя математическими свойствами. Чтобы перейти к ним дадим два определения. Определим, что будем называть выходом системы, а что – входом. С точки зрения линейных дифференциальных уравнений, описывающих систему, выход системы – это та переменная или те переменные (если их несколько), которые являются переменными, входящими в левую часть уравнения, которые надо найти, решая уравнения. Входом системы является переменная или совокупность многих переменных, входящих в правую часть уравнения, которые являются заданными и их искать не надо.

Определим это на примере линейного радиотехнического фильтра, выполненного в виде четырехполосника. У этого устройства два полюса представляют собою вход, а два других – выход. Сигнал, поданный на вход четырехполосника, будем называть входным сигналом, он не зависит от того, как устроен четырехполосник. Сигнал, снимаемый с других двух полюсов этого четырехполосника, назовем выходным сигналом. Этот сигнал изменяется при изменении параметров четырехполосника.

Итак, систему будем считать линейной, если она удовлетворяет свойству суперпозиции и свойству транспозиции. Поясним, что мы имеем в виду под этими свойствами. Пусть система откликнется на входное воздействие вида  $x_k(t)$  откликом  $y_k(t)$  при любых  $t$ . Свойство суперпозиции заключается в том, что на сумму входных сигналов  $x_k(t)$  система откликается суммой выходных сигналов  $y_k(t)$ . Условимся обозначать действие системы стрелочкой  $\rightarrow$ . Тогда свойство суперпозиции можно записать следующим образом:

$$x_k(t) \rightarrow y_k(t), \quad (1.5.1)$$

$$\sum_k x_k(t) \rightarrow \sum_k y_k(t). \quad (1.5.2)$$

Заметим, что в этом определении существенны как (1.5.1), так и (1.5.2), т. е. важно, чтобы отклик мог быть представлен в виде суммы откликов, каждый из которых является откликом на соответствующее слагаемое в сумме входных сигналов.

Перейдем теперь к свойству транспозиции. Его можно дать сразу в виде математической формулы:

$$x_k(t + \tau) \rightarrow y_k(t + \tau). \quad (1.5.3)$$

Это равенство должно быть справедливо при любых  $t$  и  $\tau$ , которые участвуют в формулировке и решении задачи. Иными словами, форма любого отклика системы не должна зависеть от момента подачи входного воздействия. Иначе это свойство можно определить так: линейная система в процессе ее функционирования не стареет.

На практике оба этих свойства линейных систем выполняются приблизительно. Поэтому выводы, основанные на их свойствах, надо проверять и перепроверять. Однако есть существенное для нас исключение. Линейные системы, построенные численными методами, обладают этими свойствами с такой точностью, что ничего проверять не надо. Этим во многом объясняется преимущество в точности, достигаемое численными методами перед аналоговыми, действие которых основано на вышеприведенных свойствах линейных систем.

Исходя из сформулированных математических свойств линейных систем, можно связать их с преобразованием Фурье и ввести функцию, полностью определяющую отклик линейной системы на любое входное воздействие.

Сначала заметим, что отклик линейной системы на монохроматическое входное воздействие обязательно будет тоже монохроматическим, той же частоты. Это следует из того, что в системе все параметры постоянны (иначе будет несправедливо свойство транспозиции), и нет причин, по которым частота входного воздействия может измениться. Кроме того, если фаза входного воздействия изменится, то точно на эту же величину должна измениться и фаза выходного воздействия, что является прямым следствием свойства транспозиции, так как фаза монохроматического сигнала может быть сведена к его задержке на соответствующую долю периода. Это можно выразить следующей формулой:

$$\exp(i\omega t) \rightarrow z(\omega) \exp(i\omega t). \quad (1.5.4)$$

Здесь  $z(\omega)$  представляет собою комплексное число, модуль которого определяет изменение выходного сигнала с частотой, а аргумент определяет изменение фазы выходного сигнала с частотой. Соотношение (1.5.4) удастся записать в таком виде только благодаря свойству транспозиции. Если бы фаза выходного сигнала зависела от фазы входного, то понадобился бы еще третий параметр, появление которого изменило бы ситуацию кардинальным образом.

Теперь представим входное воздействие в виде разложения в частотный спектр по формуле (1.1.14):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_x(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (1.5.5)$$

Чтобы найти отклик системы на входное воздействие (1.5.5), воспользуемся формулой (1.5.4). Каждое слагаемое интеграла (1.5.5) будет иметь в виде отклика следующее выражение:

$$c_x(\omega) \exp(i\omega t) \rightarrow c_x(\omega) z(\omega) \exp(i\omega t). \quad (1.5.6)$$

Здесь также использовано свойство транспозиции. Изменения фаз и амплитуд входного сигнала, вызванные комплексным множителем  $c_x(\omega)$ , переходят без изменений в выходное воздействие. Воспользуемся свойством суперпозиции, чтобы написать выражение для отклика системы на весь интеграл:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_x(\omega) z(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (1.5.7)$$

Полученное соотношение важно вдвойне. Во-первых, оно определяет функцию  $z(\omega)$ , называемую частотной характеристикой линейной системы, которая, в свою очередь, определяет отклик этой системы на любое входное воздействие. Во-вторых, отклик линейной системы представлен в виде преобразования Фурье, следовательно, он обладает математическими свойствами этого преобразования.

Воспользуемся последним обстоятельством, чтобы представить отклик линейной системы иначе. Заметим, что выражение (1.5.7) представляет собою преобразование Фурье от произведения двух функций. На основе обратной теоремы о свертке (1.2.8) выражение (1.5.7) может быть представлено как свертка спектров функций множителей. Для этого введем спектр частотной характеристики, называемой откликом линейной системы, посредством равенства

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (1.5.8)$$

$$z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (1.5.9)$$

Тогда на основе (1.2.8) и (1.2.4) запишем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt'. \quad (1.5.10)$$

Пользуясь (1.5.10), можно интерпретировать отклик линейной системы как выходной сигнал системы при подаче на вход  $\delta$ -функции. В самом деле, вместо  $x(t)$  подставив в (1.5.10)  $\delta(t)$ , на основании (1.2.17) получим  $y(t) = h(t)$ .

На рис. 1.7 приведен пример численного формирования частотных характеристик линейных систем и метод численного их определения. В начале программы помещены 2 массива данных. Массив  $L$  определяет количество частот, участвующих в определении частотной характеристики. Массив  $E$  определяет длительность временного отклика системы в процессе формирования и определения частотной характеристики. Ниже идут диапазонные переменные:  $k$  – частотная;  $n$  – временная;  $s$  – переменная, используемая для получения систем, имеющих частотные характеристики различной формы. На следующей строке программы формируется сигнал, используемый для определения формы частотной характеристики. По определению (1.5.4) частотная характеристика содержится в виде множителя в отклике системы на экспоненциальный сигнал от мнимого аргумента. В соответствующей строке программы и формируется такой сигнал, в котором есть коэффициент, зависящий от времени, и множитель, зависящий от частоты. Далее в программе формируются три линейные системы с различными частотными характеристиками: система однократного вычитания, в которой выходной сигнал образуется в результате вычитания входных сигналов через фиксированный интервал времени  $ts$ ; система двукратного вычитания, в которой вычитанию через тот же фиксированный интервал  $ts$  подвергается выход системы однократного вычитания; система, образованная вычитанием из входного сигнала скользящего среднего значения того же сигнала.

## Mathcad Plus 6.0

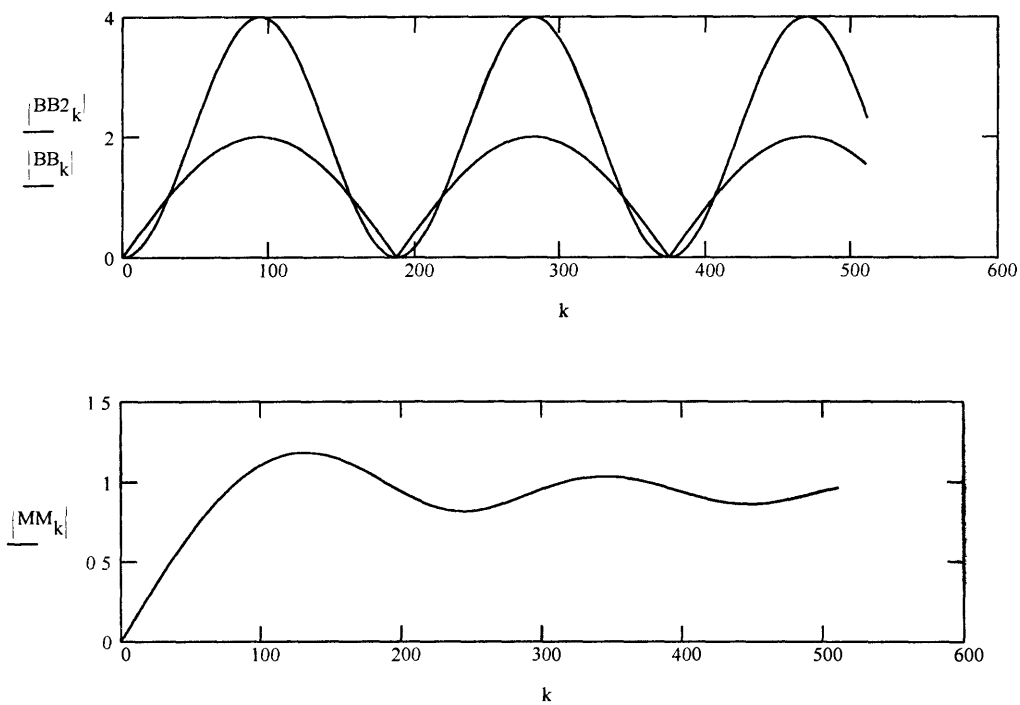
Массив данных

L 512            E 150

Диапазонные переменные

kk 0..0.5·L 1            k 0..L - 1            n = 0..E - 1            ts = 8            s = 0..ts - 1

Частота	Коэффициент	Входной сигнал	Расширение области
$f_k = 0.1 \cdot k$	$y_n = 2 \cdot \frac{\pi}{E} \cdot n$	$A_{k,n} = \exp(i \cdot y_n \cdot f_k)$	$A_{k,E+s} \cdot A_{k,s}$
Однократное вычитание	Частотная характеристика однократного вычитания		Сглаживание
$B_{k,n} = A_{k,n} \cdot A_{k,n+ts}$	$BB_k = B_{k,3} \cdot A_{k,3}$		$M_{k,n} = A_{k,n} \cdot \frac{1}{ts} \sum_s A_{k,n+s}$
Расширение области	Двукратное вычитание		Частотная характеристика сглаживания
$B_{k,E+s} = B_{k,s}$	$B2_{k,n} = B_{k,n} \cdot B_{k,n-ts}$		$MM_k = M_{k,3} \cdot A_{k,3}$
Частотная характеристика двукратного вычитания			
$BB2_k = B2_{k,3} \cdot A_{k,3}$			



**Рис. 1.7. Частотные характеристики фильтров**

Формирование этих систем требует расширения области определения входных данных, что показано в программе. Сама частотная характеристика, в соответствии с формулой (1.5.4), получается в результате деления отклика системы на экспоненциальное входное воздействие от комплексного аргумента на само это входное воздействие. Это показано в программе в виде умножения отклика на комплексно сопряженный входной сигнал (что эквивалентно делению на него). Таким путем в программе получаются частотные характеристики всех 3 формируемых систем. Получаемая частотная характеристика не зависит от времени  $n$ , поэтому ее можно получать при произвольном значении этой переменной. В программе взято значение  $n = 3$ . На графиках приведены модули частотных характеристик всех трех систем.

На рис. 1.8 приведен наиболее употребительный способ формирования заданных частотных характеристик. Частотная характеристика формируется с помощью преобразования Фурье на основании соотношения (1.5.7). Согласно (1.5.7) спектр на выходе линейной системы равен произведению спектра входного сигнала на частотную характеристику системы. Формирование входного сигнала, за исключением ряда обозначений, совпадает с программой, показанной на рис. 1.7. Частотная характеристика формируется в виде спектрального окна, которое пропускает частоты в некоторой области, определяемой комбинацией чисел  $gr1$  и  $br1$ . Спектр выходного сигнала формируется перемножением спектра входного сигнала и "спектрального окна". Затем восстанавливается выходной сигнал и определяется частотная характеристика получившейся линейной системы точно так же, как это сделано в программе, показанной на рис. 1.7. Форма характеристики получилась в точности повторяющей форму заданного спектрального окна. Возможность формирования частотных характеристик заданной формы весьма привлекательна. Благодаря этому свойству спектральный метод формирования частотных характеристик получил большое распространение, хотя это свойство в более общих условиях выполняется лишь приблизительно, так как спектр экспоненты от мнимого аргумента при дробной частоте простирается весьма широко. Об этом идет речь в следующей программе.

Форма частотной характеристики, сформированной в спектре, при использовании дробных значений частоты показана в программе, приведенной на рис. 1.9. Эта программа отличается от предыдущей тем, что в процессе определения формы частотной характеристики используются и дробные частоты, и форма получившейся частотной характеристики уже не совпадает полностью с формой "спектрального окна". Это объясняется тем, что спектр комплексной экспоненты в случае дробной частоты занимает всю частотную ось. Поэтому дробные частоты "пролезают" в "окно прозрачности" фильтра, находясь далеко за пределами этого окна. Это обстоятельство следует учитывать при спектральном способе формирования фильтров.

Для нас особое значение будут иметь свойства линейных систем как согласованных фильтров. Фильтром, согласованным с сигналом  $f(t)$ , называется линейная система, частотная характеристика которой равна комплексно сопряженному спектру  $f(t)$

Рассмотрим ряд свойств согласованных фильтров. Отклик фильтра на сигнал, с которым он согласован, выглядит так:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_f(\omega) \overline{c_f(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega, \quad (1.5.11)$$



## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных      Диапазонные переменные

$$M = 256$$

$$t = 1$$

$$n = 0..M - 1 \quad n_n = 0..0.5 \cdot M - 1$$

$$x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \quad j = 0..0.5 \cdot \frac{M}{t} - 1$$

$$h_j = t \cdot j$$

Входной сигнал

$$A_{n,j} = \exp(i \cdot x_n \cdot h_j)$$

$$G^{<j>} = \text{cfft}(A^{<j>})$$

Переход к децибелам

$$Z(u) = \text{if}[|u| > 10^{-9}, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot (-9)]$$

Формирование фильтра "спектральное окно"

$$gr1 = 20 \quad br1 = 5$$

$$GE4 = gr1 + br1$$

$$GE1 = gr1 + br1$$

$$GE2 = gr1 - br1$$

$$GE3 = gr1 - br1$$

$$F(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } (M - GE1 < u < M - GE2) + (GE3 < u < GE4) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Модуль входного сигнала

$$BW_j = A_{3,j} \cdot \overline{A_{3,j}}$$

Сформированный  
выходной спектр

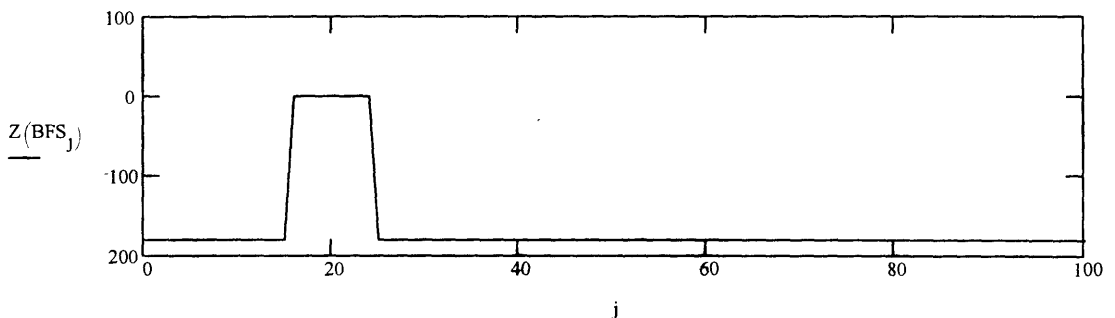
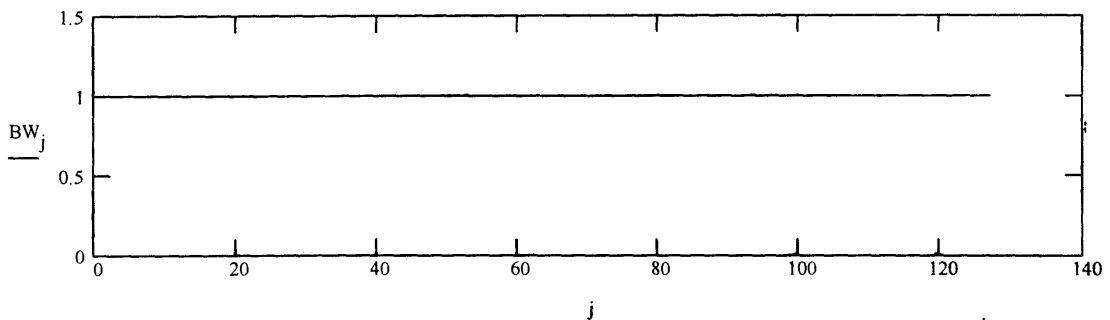
Выходной сигнал

Частотная характеристика

$$G1_{n,j} = G_{n,j} \cdot F(n)$$

$$B1^{<j>} = \text{icfft}(G1^{<j>})$$

$$BFS_j = B1_{3,j} \cdot \overline{A_{3,j}}$$



**Рис. 1.8. Частотная характеристика фильтра в виде "спектрального окна"  
по целым частотам**

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных

Диапазонные переменные

$$M = 256$$

$$t = 0.5$$

$$n = 0..M-1 \quad nn = 0..0.5 \cdot M-1$$

$$x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \quad j = 0..0.5 \cdot \frac{M}{t} - 1$$

Переход к децибелам

$$h_j = t \cdot j$$

Входной сигнал

$$Z(u) = \text{if} \left[ |u| > 10^{-9}, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot (-9) \right]$$

$$A_{n,j} = \exp(i \cdot x_n \cdot h_j)$$

$$G^{<j>} = \text{cfft}(A^{<j>})$$

Формирование фильтра "спектральное окно"

$$gr1 = 20 \quad br1 = 5$$

$$GE4 = gr1 + br1$$

$$GE1 = gr1 + br1$$

$$GE2 = gr1 - br1$$

$$GE3 = gr1 - br1$$

$$F(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } (M - GE1 < u < M - GE2) + (GE3 < u < GE4) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Модуль входного сигнала

$$BW_j = A_{3,j} \cdot \overline{A_{3,j}}$$

Сформированный  
выходной спектр

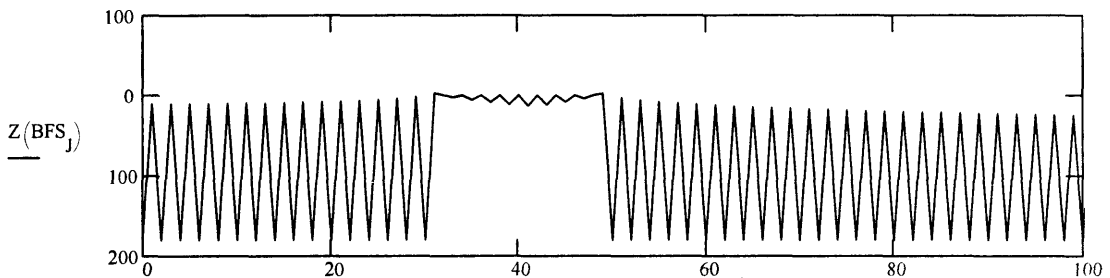
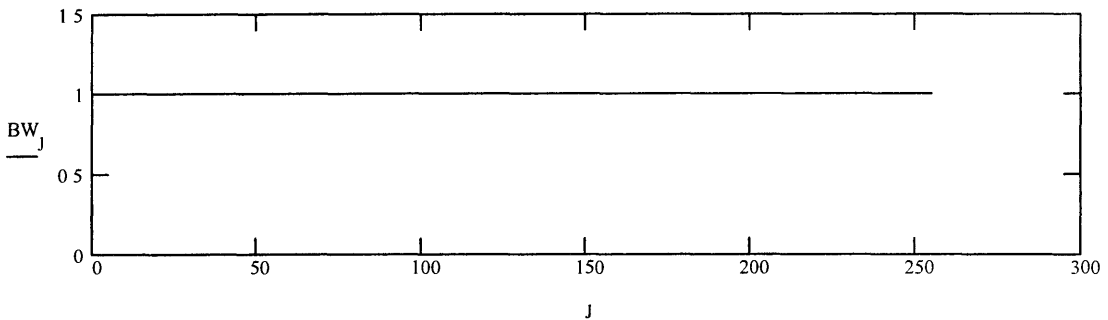
Выходной сигнал

Частотная характеристика

$$G1_{n,j} = G_{n,j} \cdot F(n)$$

$$B1^{<j>} = \text{icfft}(G1^{<j>})$$

$$BFS_1 = B1_{3,j} \cdot \overline{A_{3,j}}$$



**Рис. 1.9. Частотная характеристика фильтра в виде "спектрального окна"  
не только по целым частотам**

## Mathcad Plus 6.0

Ввод данных

Генераторы случайной последовательности чисел

$$L = 1024 \quad k = 0..L-1 \quad n = 0..0.5 \cdot L-1 \quad U = \text{rnorm}(L,0,1) \quad V = \text{rnorm}(L,0,1)$$

Формирование входных сигналов

$$x_k = U_k \quad y_k = V_k$$

Формирование частотной характеристики фильтра, согласованного с сигналом  $x(k)$ 

$$g = \text{cfft}(x) \quad G_k = \overline{g_k}$$

Отклик фильтра  $G$  на "свой" сигнал

$$gg_k = g_k \cdot G_k \quad X = \text{icfft}(gg)$$

Отклик фильтра на "чужой" сигнал

$$gy = \text{cfft}(y) \quad ggy_k = gy_k \cdot G_k \quad Y = \text{icfft}(ggy)$$

Смесь "своего" и "чужого" сигналов

$$r = 3$$

Отклик фильтра на смесь сигналов

$$s_k = g_k + r \cdot gy_k$$

$$E_k = s_k \cdot G_k \quad E = \text{icfft}(E)$$

Преобразование матриц к виду, удобному для наблюдения формы отклика

$$X1_n = X_{n+0.5 \cdot L}$$

$$X1_{n+0.5 \cdot L} = X_n$$

$$Y1_n = Y_{n+0.5 \cdot L}$$

$$Y1_{n+0.5 \cdot L} = Y_n$$

$$E1_n = E_{n+0.5 \cdot L}$$

$$E1_{n+0.5 \cdot L} = E_n$$

$$t_k = k - 0.5 \cdot L$$

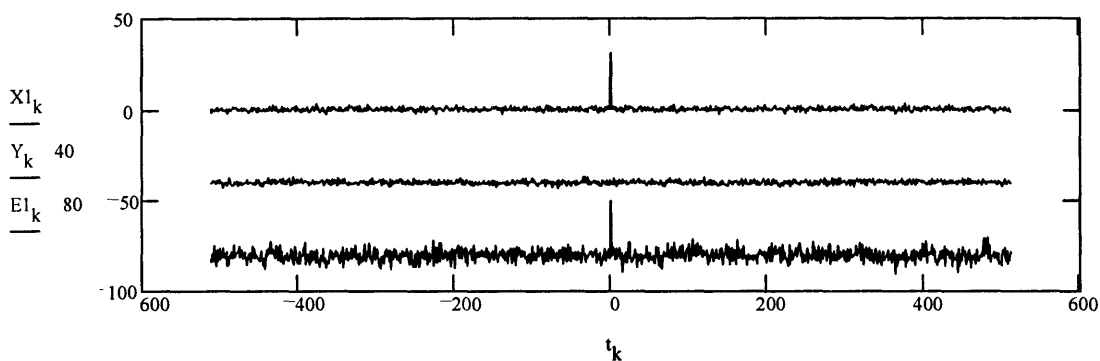


Рис. 1.10. Согласованная фильтрация

где выход фильтра представлен как спектр от произведения двух функций (здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение). Преобразовав это выражение на основании обратной теоремы свертки (1.2.8), получим

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \overline{f(t'-t)} dt'. \quad (1.5.12)$$

Функция в правой части (1.5.12) называется корреляционной функцией. В отличие от свертки у нее переменные, по которым ведется интегрирование, в обоих сомножителях одного знака.

На основе (1.5.12) рассмотрим выход согласованного фильтра на сигнал, имеющий равные амплитуды  $a$  во всех точках отсчета, а знак – случайный. При  $t = 0$  величина  $s(0) = Na^2$ . Далее будем перемещаться на одну отсчетную точку и смотреть выход фильтра. При сдвиге из-за случайности знаков сумма будет стремиться в среднем к нулю, который проделывает абсолютно пьяный человек за  $N$  шагов. Эта величина в среднем равна  $\sqrt{N}$ . Учитывая это, а также то, что число членов последовательности при каждом сдвиге сокращается на единицу, получим  $s(1) = \sqrt{N-1} \cdot a^2$ . Этот результат не зависит от величины смещения, поэтому в нуле в одной точке отсчета сигнал превышает средние значения во всех иных точках в  $\sqrt{N}$  раз. Примерно такая же картина получается при сигнале, обладающем случайной амплитудой.

Выход согласованного фильтра на сигнал, с которым он согласован, и сигнал, с которым он не согласован, показан на рис. 1.10, на котором приведена и программа расчета.

## 1.6. Кепструм

Кепстральный анализ является математической основой нелинейных методов выделения сигналов. Остановимся на тех математических свойствах этого преобразования сигналов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Кепструм – это такое математическое преобразование, когда спектральному преобразованию подвергается спектр функции. Если взять спектр от спектра в виде (1.2.2), то получится сама первоначальная функция. Это неинтересно. Чтобы был иной результат, имеющий какой-то смысл, надо не просто взять спектр от спектра, а предварительно преобразовать этот спектр.

В качестве такого преобразования принято логарифмировать спектр. Логарифм можно взять от модуля спектра – при таком преобразовании спектра получается обычный кепструм. Можно взять логарифм от комплексного спектра – получится комплексный кепструм. Примем, что логарифм берется при основании  $e$ .

Остановимся сначала на математических особенностях преобразования "обычный кепструм". Математическое определение операции "кепструм" следующее:

$$K[F(x)] = \Phi \left[ \ln \left( \left| \Phi^{-1} [F(x)] \right| \right) \right], \quad (1.6.1)$$

где  $K[F(x)]$  означает вводимую нами функциональную операцию – кепструм от функции  $F(x)$ . Остальные обозначения те же, что и в разд. 1, посвященном ряду и интегралу Фурье.

Название функциональной операции "кепструм" происходит от латинского слова *spectrum*. Если в этом слове первые четыре подчеркнутые буквы поставить в обратном порядке, то получится *cepstrum*. Такой принцип применяется для обозначения всех операций, в которых используется второе преобразование Фурье. Так, частота, полученная в результате второго спектрального преобразования, называется "сачтота". Также поступают и с другими терминами, относящимися ко второму спектральному анализу. Это упрощает описание процедуры, придавая ему точность. Сразу становится ясно, о какой частоте идет речь, о той, которая еще должна подвергнуться спектральному преобразованию, или о той, которая уже получена в результате второго преобразования Фурье.

Выделим существенные для нас математические свойства кепструма.

1. Главное – это кепструм от произведения спектров двух функций. На основе свойства логарифма превращать произведение в сумму и аддитивности преобразования получается, что, если  $\Phi[F(x)] = \Phi[F_1(x)]\Phi[F_2(x)]$ , то

$$K[F(x)] = K[F_1(x)] + K[F_2(x)]. \quad (1.6.2)$$

Это очень важное свойство. Именно из-за него в операцию вводится логарифмирование.

2. Пусть

$$\Phi[F(x)] = 1 + \alpha(x), \quad (1.6.3)$$

где  $\alpha(x)$  – комплексная функция, но такая, что

$$|\alpha(x)| \ll 1. \quad (1.6.4)$$

Тогда

$$K[F(x)] = \Phi[\operatorname{Re}(\alpha(x))]. \quad (1.6.5)$$

Это тоже чрезвычайно полезное свойство преобразования.

3. Кепструм суммы спектров двух функций через кепструмы слагаемых не выражается. Однако на основании свойства 2, выраженного (1.6.5), можно оценить кепструм суммы спектров двух функций, из которых один спектр много меньше другого по модулю.

Пусть

$$|\Phi[F(x)]| \gg |\Phi[H(x)]|, \quad (1.6.6)$$

тогда

$$K[F(x) + H(x)] = K[F(x)] + \Phi\left[\operatorname{Re}\left(\frac{H(x)}{F(x)}\right)\right]. \quad (1.6.7)$$

4. Если частота образует гармонический ряд, состоящий из суммы гармоник, то такому ряду соответствует единственная сачтота кепструма. Это свойство очень важно в приложениях для выделения гармонических составляющих.

5. Каждой частоте, имеющей период  $\Omega$ , в колебании, модулирующем спектр функции, соответствует частота

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (1.6.8)$$

Теперь перейдем к комплексному кепструму. Его отличает то, что логарифм берется не от модуля спектра, а от самого комплексного спектра. Логарифм от комплексной функции определяется как

$$\ln(|z|\exp(i \arg(z))) = \ln(|z|) + i \arg(z). \quad (1.6.9)$$

Свойства первого слагаемого (1.6.9) мы уже рассмотрели. Теперь посмотрим на второе слагаемое – аргумент функции.

Здесь основная проблема состоит в том, чтобы суметь вычислить этот аргумент. Многие математические программы предоставляют возможность вычислять аргументы комплексных функций. Этими возможностями обладают и используемые нами пакеты программ *Mathcad* и *Matlab*.

Вычисление аргумента функции основано на его выражении через арктангенс отношения мнимой части комплексного числа к его действительной части. При этом в пакете *Mathcad* значение аргумента, вычисляемого по команде  $\arg(c_k)$ , дает значение аргумента только в пределах  $\pm\pi$ , поэтому вычисляемый аргумент испытывает скачки на  $+2\pi$  или  $-2\pi$ . Такие скачки влияют на спектр аргумента, а следовательно, на кепструм. Скачки следует устранять. Как это сделать – мы рассмотрим на примере конкретной программы, изображенной на рис. 1.11.

На этом рисунке верхняя строка отведена массиву данных, диапазоном переменным и числовым значениям параметров функций, используемых для вычислений. На следующей строке помещено выражение для истинного аргумента функции. Значения входящих в это выражение констант выбраны таким образом, чтобы значения аргумента существенно превосходили интервал от  $-\pi$  до  $+\pi$ . На следующей строке приведено выражение для комплексной функции, аргументом которой является заданная нами функция. Задача заключается в определении значения аргумента этой функции, пользуясь лишь ее значениями. Решив эту задачу, можно сравнить полученное решение с той функцией, которая была задана в качестве аргумента. Для успешной работы алгоритма область значений функции расширена на одно значение, принятое равным нулю. На следующей строке показана команда аргумент, входящая в пакет *Mathcad*, примененная ко всем значениям функции. График, полученный в результате выполнения этой программы, показан в центре большого рисунка сплошной линией. Внизу показан фрагмент этого же рисунка. Результат выполнения команды "аргумент" виден на рисунке в виде кривой, имеющей множество зубцов. Эта кривая явно не соответствует заданным значениям аргумента функции. Результат этой операции в данном случае (большого значения аргумента) нельзя использовать для получения комплексного кепструма.

## Mathcad Plus 6.0

Величина массива данных, диапазонные переменные и числовые значения

$$L = 1024 \quad k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1 \quad x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \quad f1 = 8 \quad f2 = 20 \quad a1 = 1 \quad a2 = 0.6 \quad att = 24$$

Аргумент функции

$$w_k = (a1 \cdot \sin(f1 \cdot x_k) + a2 \cdot \sin(f2 \cdot x_k)) \cdot att$$

Определение функции

$$C_k = \exp(i \cdot w_k)$$

Расширение области определения функции

$$C_L = 0$$

Стандартная команда нахождения

$$\text{аргумента} \quad AR_k = \arg(C_k)$$

Вычисление аргумента без скачков

Функция, аргумент которой равен

разности аргументов в точках отсчета

Стандартная команда вычисления аргумента,

работающая при аргументе в точности равном нулю

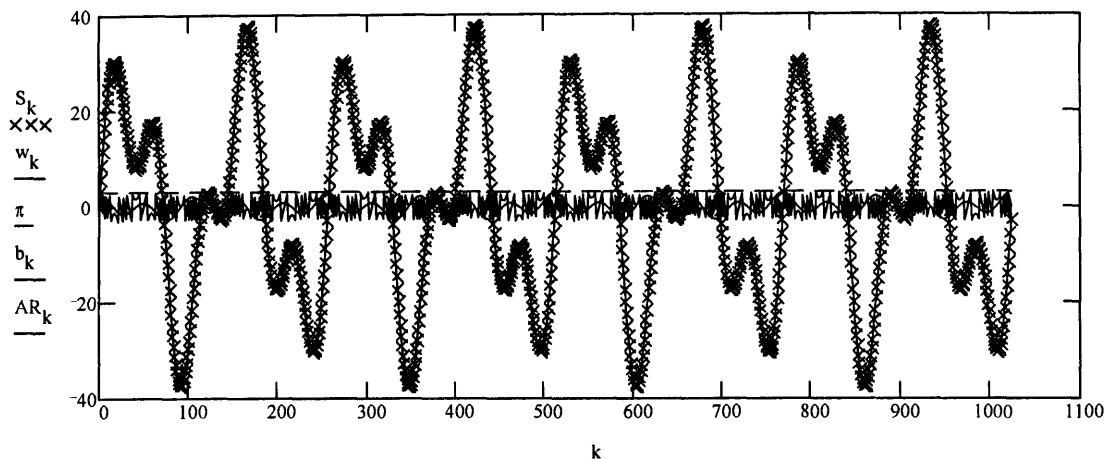
$$H_k = C_k \cdot C_{k+1}$$

$$b_k = \text{if}(|H_k| > 10^{-15}, \arg(H_k), 0)$$

Операция суммирования в виде функции от верхнего предела суммы

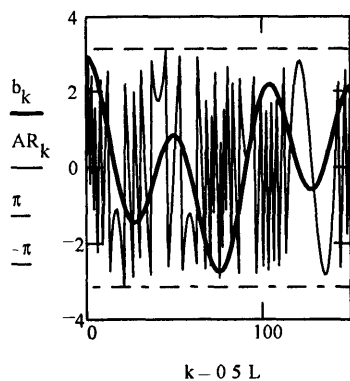
$$S_0 = 0 \quad S_{k+1} = S_k + b_k$$

График аргумента (сплошная линия с нанесенными на нее точками вычисленного аргумента), в центре в пределах  $\pi$ -аргумент со скачками и его уменьшенное значение

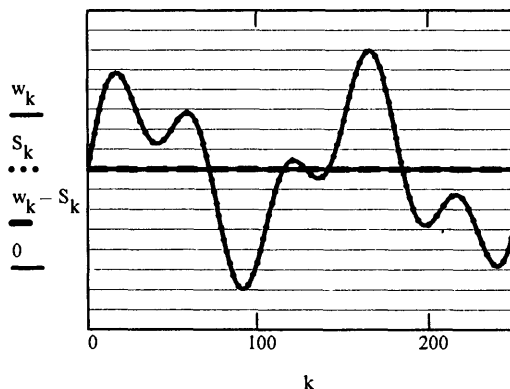


Фрагмент центра

Фрагмент фазы



$k = 0..5L$



$k$

**Рис. 1.11. Вычисление аргумента функции в пакете Mathcad**

Программа, позволяющая получить значение аргумента без скачков, включает три операции. Первая операция заключается в образовании новой функции, аргумент которой существенно уменьшен и не выходит за рамки  $+\pi$  и  $-\pi$ . Это делается путем умножения значений функции на ее же комплексно сопряженное значение (чтобы их аргументы вычитались), взятое в соседней точке отсчета функции. Взять в той же точке нельзя, так как аргумент будет тождественно равен нулю. Взять через большее число точек отсчета, а не в соседней отсчетной точке нежелательно, так как это увеличит значение аргумента. К этой новой функции применяется стандартная операция вычисления аргумента. В результате получается совокупность значений разностей аргументов. Чтобы получить само значение аргумента, требуется сложить эти разности как функцию верхнего предела. В пакете *Mathcad* есть такая стандартная операция, она работает, но крайне медленно. Дело в том, что стандартная процедура нахождения суммы как верхнего предела устроена так, что для нахождения следующего члена суммы, который равен предыдущей плюс еще одно значение, это значение почему-то не прибавляется, а вся сумма вычисляется вновь. В предлагаемой программе этот недостаток исправлен. Она составлена так, что к предыдущей сумме добавляется всего одно следующее слагаемое. Результат фиксируется каждый раз после прибавления нового слагаемого. Эта программа работает очень быстро.

Результат вычислений по этой программе приведен в виде точек, нанесенных на график функции, которая задавалась в качестве аргумента. Совпадение результата вычисления аргумента функции с его заданным значением получается очень хорошим при любых значениях аргумента, включающих большие. На фрагменте этого графика приведена разность между вычисленными и заданными значениями аргумента функции. Эта разность обращается в нуль.

Все, вроде бы, хорошо. Однако обратите внимание на рис. 1.12, на котором приведена та же самая программа. Увеличено значение всего одного параметра функции, заданной в виде аргумента. На рис. 1.11 – параметр  $f2 = 20$ , а на рис. 1.12 – параметр  $f2 = 25$ . Совпадения вычисленного и заданного значений аргумента уже не наблюдаются. В чем дело? Обычно в нашем распоряжении нет никакой заданной функции и проверить правильность вычислений нельзя. Надо найти условие, гарантирующее правильность результата. Для нахождения этого условия полезно обратиться к программе, изображенной на рис. 1.13. На нем значение параметра  $f2 = 30$ , т. е. оно еще больше увеличено. Если такое значение параметра придать рис. 1.12, то получающееся несоответствие должно существенно возрасти. Однако на рис. 1.13 этого не наблюдается. Почему? Дело в том, что на рис. 1.13 увеличено вдвое значение еще одного параметра – массива данных  $L$ . Увеличение массива данных привело к сокращению вдвое расстояния между точками отсчета функции. При этом существенно уменьшилось значение аргумента, получаемого в результате второй операции – получения значений аргумента между соседними точками отсчета.

Необходимое и достаточное условие правильной работы вышеприведенного алгоритма (и всех иных тоже) заключается в том, чтобы спектр функции был ограничен, а расстояние между точками отсчета функции удовлетворяло бы условиям теоремы отсчетов. Это можно показать, пользуясь рассмотренным примером. На рис. 1.14 показан результат вычисления спектра функции, аргумент которой мы ищем, в зависимости от значений параметра  $f2$ , отложенных на рис. 1.14 вдоль горизонтали. Вдоль вертикали отложена ширина спектра функции в числах точек отсчета, нормированных на число степеней свободы функции, длительность которой  $L = 1024$ .



## Mathcad Plus 6.0

Величина массива данных, диапазонные переменные и числовые значения

$L = 1024$   $k = 0..L - 1$   $kk = 0..0.5 \cdot L - 1$   $x_k = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{L}$   $f1 = 8$   $f2 = 25$   $a1 = 1$   $a2 = 0.6$   $att = 24$

Аргумент функции

$$w_k = (a1 \cdot \sin(f1 \cdot x_k) + a2 \cdot \sin(f2 \cdot x_k)) \cdot att$$

Определение функции

$$C_k = \exp(i \cdot w_k)$$

Расширение области определения функции

$$C_L = 0$$

Стандартная команда нахождения аргумента

$$AR_k = \arg(C_k)$$

Вычисление аргумента без скачков

Функция, аргумент которой равен разности аргументов в точках отсчета

Стандартная команда вычисления аргумента, работающая при аргументе в точности равном нулю

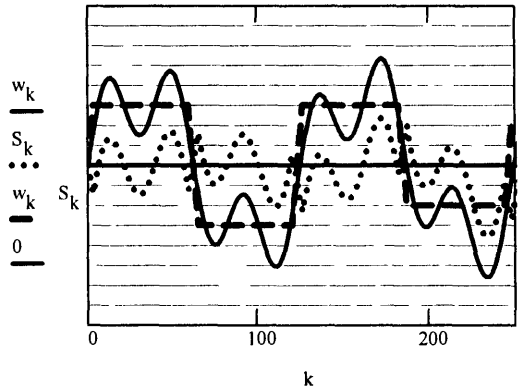
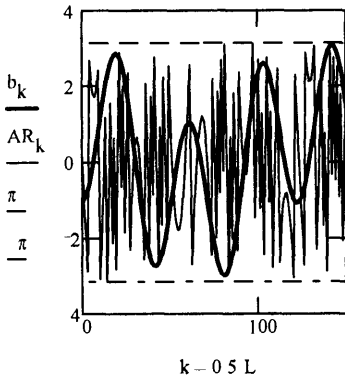
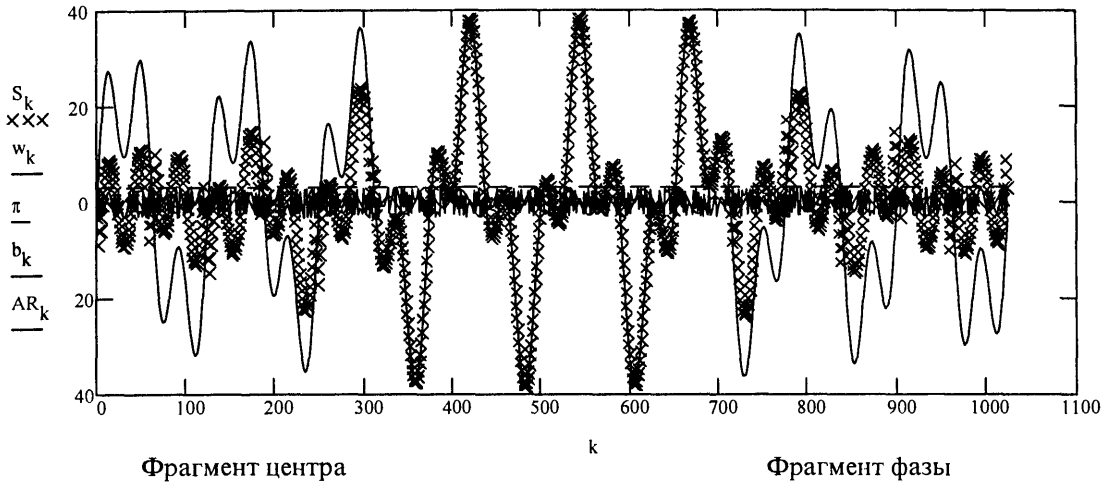
$$H_k = C_k \cdot C_{k+1}$$

$$b_k = \text{if}(|H_k| > 10^{-15}, \arg(H_k), 0)$$

Операция суммирования в виде функции от верхнего предела суммы

$$S_0 = 0 \quad S_{k+1} = S_k + b_k$$

График аргумента (сплошная линия с нанесенными на нее точками вычисленного аргумента), в центре в пределах  $\pi$ -аргумент со скачками и его уменьшенное значение



**Рис. 1.12. Вычисление аргумента функции в пакете Mathcad**

## Mathcad Plus 6.0

Величина массива данных, диапазонные переменные и числовые значения

$$L = 2048 \quad k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1 \quad x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \quad f1 = 8 \quad f2 = 30 \quad a1 = -1 \quad a2 = 0.6 \quad att = -24$$

Аргумент функции

$$w_k = (a1 \cdot \sin(f1 \cdot x_k) + a2 \cdot \sin(f2 \cdot x_k)) \cdot att$$

Определение функции

Расширение области определения функции

$$C_k = \exp(i \cdot w_k) \quad C_L = 0 \quad \text{Стандартная команда нахождения аргумента} \quad AR_k = \arg(C_k)$$

Вычисление аргумента без скачков

Функция, аргумент которой равен

Стандартная команда вычисления аргумента,

разности аргументов в точках отсчета

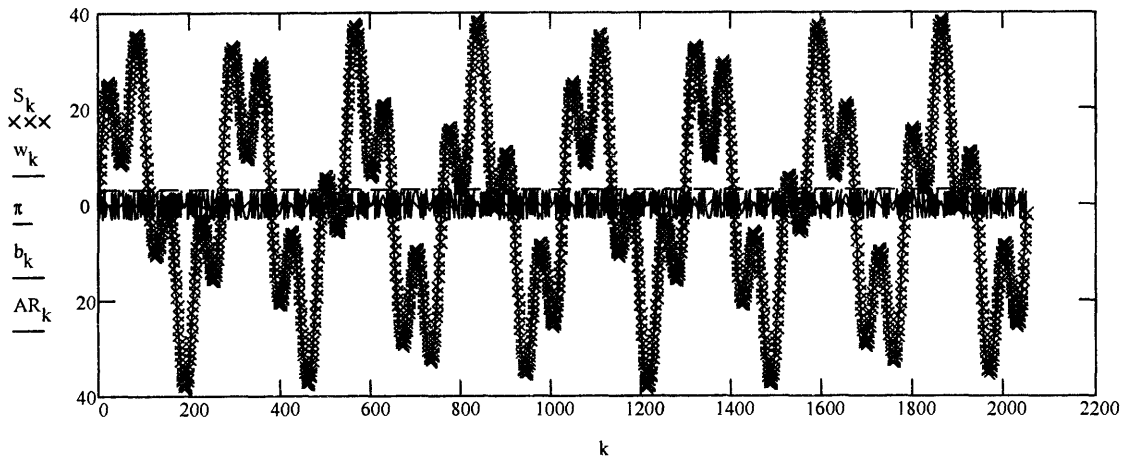
работающая при аргументе в точности равном нулю

$$H_k = \overline{C_k} \cdot C_{k+1} \quad b_k = \text{if}(|H_k| > 10^{-15}, \arg(H_k), 0)$$

Операция суммирования в виде функции от верхнего предела суммы

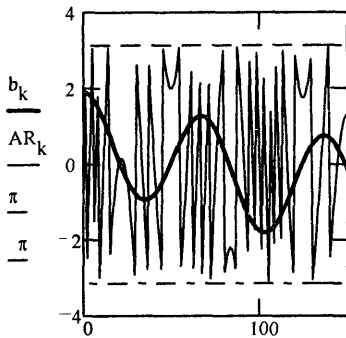
$$S_0 = 0 \quad S_{k+1} = S_k + b_k$$

График аргумента (сплошная линия с нанесенными на нее точками вычисленного аргумента), в центре в пределах  $\pi$ -аргумент со скачками и его уменьшенное значение

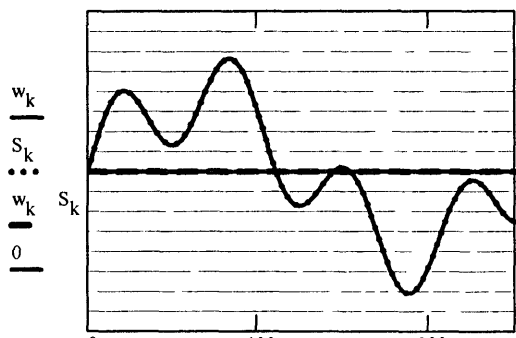


Фрагмент центра

Фрагмент фазы



$k - 0.5 L$



$k$

**Рис. 1.13.** Вычисление аргумента функции в пакете *Mathcad*

Это означает, что функция, ширина спектра которой единица, удовлетворяет условию теоремы отсчетов при  $L = 1024$ , а если ширина спектра превышает единицу, то не удовлетворяет. Из рисунка видно, что значения параметра  $f_2 = 20$  еле-еле удовлетворяют условию, а при  $f_2 = 25$  или тем более  $f_2 = 30$  не удовлетворяют. Очень важно отметить, что увеличивать число значений функции путем вставления промежуточных значений в этом случае бесполезно, необходимо увеличивать число дискретных отсчетных точек, представляющих функцию.



**Рис. 1.14.** Ширина спектра функции, аргумент которой определяется в зависимости от параметра  $f_2$  (см. рис. 1.11).

Это положение имеет простое физическое истолкование: дискретные точки отсчета должны быть так близко друг от друга, чтобы между ними не происходило скачков фазы более чем на  $\pi$ .

Возможен другой способ нахождения истинного значения аргумента. Этот способ основан на исключении уже получившихся скачков, для чего может служить программа, содержащая несколько операций. Первая – стандартное вычисление аргумента со скачками. Вторая операция определяет функцию, равную величине скачка фазы. Эта программа в пакете *Mathcad 6.0 plus* выглядит следующим образом:

$$c_k := \begin{cases} (-2 \cdot \pi) & \text{if } b_{k+1} - b_k > \pi \\ (2 \cdot \pi) & \text{if } b_{k+1} - b_k < -\pi \\ 0 & \text{if } -\pi \leq b_{k+1} - b_k \leq \pi. \end{cases} \quad (1.6.10)$$

Третья операция представляет собою сложение значений функции (1.6.10) до верхнего предела, осуществляемое посредством

$$S_0 = 0, \quad (1.6.11)$$

$$S_{k+1} = S_k + c_k. \quad (1.6.12)$$

Заключительная операция представляет собою исключение скачков аргумента функции посредством

$$SA_k = S_k + \arg(C_k), \quad (1.6.13)$$

где в качестве второго слагаемого входит аргумент функции со скачками. Сложение этой функции с (1.6.12) устраняет скачки. Как уже говорилось выше, условие того, что этот алгоритм работает, остается прежним. Необходимо, чтобы спектр функции был ограничен, а точки отсчета расположены достаточно часто (в соответствии с требованиями теоремы отсчетов).

В пакете программ *Matlab* имеется программа, позволяющая получать значения аргумента функции без скачков.

### 1.7. Численное представление случайных сигналов

Такая задача возникает при численном моделировании многих алгоритмов выделения сигналов, так как всегда требуется определить, как на ситуацию влияет шум.

Основу получения случайных сигналов составляют генераторы случайных числовых последовательностей. Такие генераторы входят в математическое обеспечение компьютерных математических программ, предназначенных для физических исследований. Например, в пакете программ *Mathcad* есть ряд генераторов случайных последовательностей, описанных в [1] (стр. 299–300). Каждое число случайной последовательности является статистически независимым от других. Такая последовательность представляет собой "белый шум". Закон распределения и его параметры определяются выбором конкретной программы. В программу, описанную в [1], входит набор более 10 различных законов распределения, включающих нормальное, Пуассона, равномерное и ряд других.

**Эмпирический закон распределения.** С одной из задач – получением эмпирического закона распределения случайных величин – познакомимся на конкретном примере. Допустим, надо определить, как изменяется распределение вероятностей после согласованной фильтрации. Программа, решающая эту задачу, приведена на рис. 1.15.

На первой строчке программы, как всегда, приведены массив данных и диапазонная переменная. Рядом помещены генераторы двух независимых случайных последовательностей, позволяющие получить нормально распределенные значения (*rnorm*) последовательности чисел длиной, равной исходному массиву данных *L* (первое число в скобках), со средним, равным нулю (второе число в скобках), и дисперсией (последнее число в скобках), равной единице. Сами случайные последовательности, одна из которых (A) сигнал, а вторая (A1) шум, показаны строчкой ниже. Далее показан процесс согласованной фильтрации, совпадающий с приведенным на рис. 1.10. Ниже на графике – последовательность, служащая сигналом (вверху), и последовательность, получающаяся в результате согласованной фильтрации смеси сигнала с шумом в пропорции 1: 1 (внизу). На этом графике точка, соответствующая максимальному отклику согласованного фильтра, принята равной нулю, чтобы она не влияла на вид гистограммы.

## Mathcad Plus 6.0

Массив данных и диапазонные переменные Генератор случайной последовательности  
 $L = 1024$ ,  $k = 0..L-1$ ,  $kk = 0..0.5 \cdot L - 1$   $U = \text{norm}(L, 0, 1)$     $V = \text{norm}(L, 0, 1)$

Случайная последовательность

Сигнал      Шум

Согласованная фильтрация

$$A_k = U_k \quad A1_k \quad V_k$$

$$G1 = \text{cfft}(A1) \quad G = \text{cfft}(A)$$

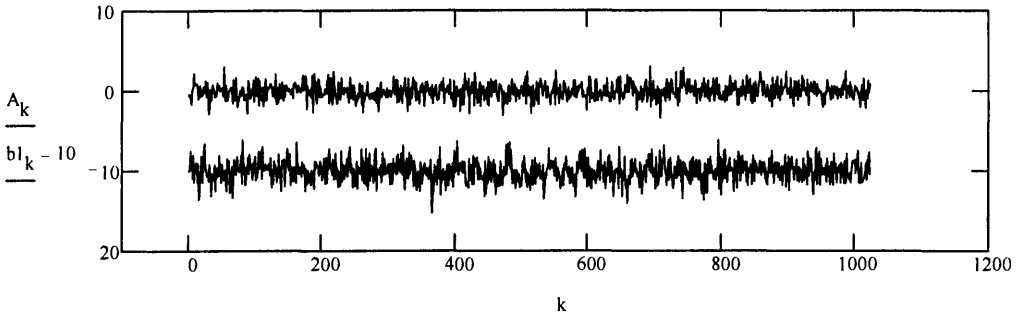
$$g_k = (G1_k + 1 \cdot G_k) \cdot \bar{G}_k \quad B = \text{icfft}(g)$$

Выход согласованного фильтра

Выход согласованного фильтра с исключением максимума

$$b_k \quad \text{Re}(B_k)$$

$$b1_k = \text{Re}(B_k) \cdot \Phi(k-1)$$



Массив и диапазонные переменные для построения гистограммы

$QS = 20$ ,  $j = 0..QS$ ,  $m = 0..QS-1$ ,  $int_j = 10 + j \cdot 1$

Гистограмма исходного сигнала

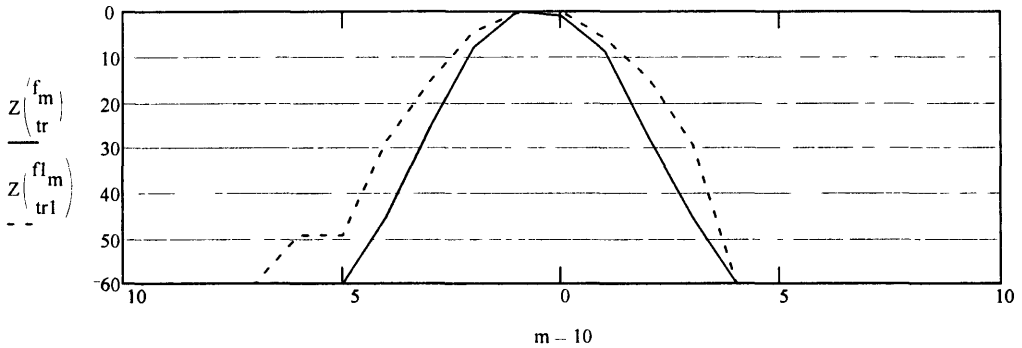
Гистограмма выхода фильтра

$f = \text{hist}(int, A)$        $tr = \text{max}(f)$

$fl = \text{hist}(int, b1)$        $tr1 = \text{max}(fl)$

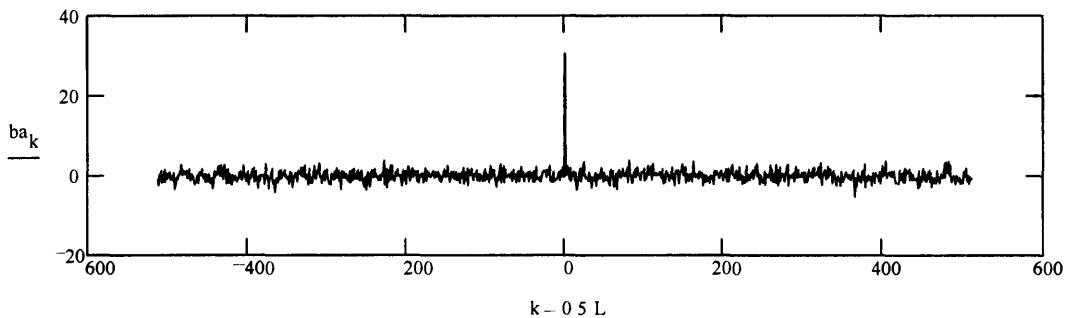
Переход к децибелам

$$p = 3 \quad Z(u) = \text{if } |u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p$$



$$ba_{kk} \quad b_{kk+0.5L} \quad ba_{kk, 0.5L} = b_{kk}$$

Отклик согласованного фильтра



**Рис. 1.15.** Изменение распределения вероятностей при согласованной фильтрации

Ниже этого графика расположена специальная программа, служащая для составления гистограммы распределения. Гистограммой называется такой график, на котором показано распределение значений по их величинам. Вдоль горизонтальной оси гистограммы отложены значения амплитуд величин, а по вертикали показано число членов последовательности, попавших в определенный интервал значений. Параметры гистограммы показаны в первой строчке после графика. Параметр  $QS$  означает число интервалов значений. В соответствии с этим числом вводятся две диапазонные переменные:  $j$  и  $m$ . Диапазонная переменная  $j$  используется для разбиения всего интервала значений функции на те интервалы, для которых должна быть построена гистограмма. Переменная  $m$  используется для построения графика. Функция  $int$  служит для выделения интервалов значений. Принятые параметры этой функции обеспечивают разбиение всех значений исследуемой функции от  $-10$  до  $QS$  через единицу. Выбранные таким образом параметры позволяют охватить весь диапазон изменения исходных величин.

Сама гистограмма образуется в пакете *Mathcad 6.0 plus* по команде *hist*. В скобках стоят следующие параметры. Спереди стоит переменная  $int$ , которая определяет границы интервалов значений, а затем обозначение функции, для которой строится гистограмма. В этом примере по одинаковым параметрам строятся две гистограммы, одна из которых относится к первоначальному сигналу ( $f$ ), а другая ( $f1$ ) – для выхода согласованного фильтра с исключенным максимумом, принадлежащим сигналу.

Результат показан на графике (см. рис. 1.15). Сплошная линия – гистограмма, относящаяся к сигналу, а пунктир – гистограмма сигнала на выходе согласованного фильтра. Графики даны в логарифмическом масштабе в децибелах. Формула, позволяющая получить такой масштаб, приведена на рисунке. Она позволяет логарифмировать данные, превышающие установленный порог (десять в степени  $p$ ). Для всех остальных данных, в числе которых могут быть и нули, принято значение логарифма установленного порога.

Полученный результат интересен тем, что показывает, как изменяется распределение вероятностей на выходе согласованного фильтра. После фильтра возрастает вероятность получения больших выбросов, что уменьшает эффективность применения согласованной фильтрации к шумоподобным последовательностям.

**Случайный сигнал с заданной формой спектра.** Остановимся на методах получения случайных последовательностей с заданной формой спектра [2].

Наша задача – придать спектру заданную форму. Для этого построим не одну последовательность, а так называемый статистический ансамбль, включающий в себя ряд статистически независимых последовательностей, спектр каждой будет представлять собой одну заданную функцию.

Обратимся к рис. 1.16. В его верхней строчке массив данных ( $L$ ) и диапазонные переменные ( $k; kk$ ). Далее справа показаны параметры спектра. Это положение спектра ( $h$ ), параметр, определяющий ширину спектра ( $D$ ), амплитуда дискретной спектральной составляющей ( $ZO$ ), которая может входить в состав спектра. Слева приведена формула, описывающая желательную форму спектра. В данном случае спектр имеет форму гауссовой кривой, возможны и иные формы спектра. Справа приведен параметр ( $M$ ), определяющий число случайных реализаций в общем ансамбле случайных функций. Там же приведена диапазонная переменная ( $m$ ), соответствующая этому ансамблю. Конкретное значение  $m$  показывает номер отдельной реализации ансамбля.

### Mathcad Plus 6.0

Параметры

Массив данных Диапазонные переменные положение ширина дискретная компонента  
 $L$  64  $k$  0.. $L$  1  $kk$  0..0.5· $L$  1  $h$  38  $D$  4  $ZO$  0

Заданная форма спектра Преобразование спектра к форме, принятой в Mathcad Число реализаций случайного сигнала  
 $M = 128$   $m$  0.. $M$  1

$GT_k$   $\exp\left[\frac{(|k-h|)^2}{D}\right]$   $GT1_{kk}$   $GT_{0.5L, kk}$   $GT1_{0.5L, kk}$   $GT_{kk}$  Генераторы случайных значений

Добавление дискретной компоненты к спектру  $Q$  -  $norm(L \cdot M, 0, 1)$   $Q1$   $norm(L \cdot M, 0, 1)$

$GTP_k$   $GT_k + \Phi(k-h) \cdot \Phi(h-k) \cdot ZO$  Матрица комплексных случайных чисел (МКСЧ)

$Q2_{k,m}$   $Q_k$   $L_m$   $\cdot$   $Q1_{k+Lm}$

Спектр МКСЧ Спектр искомого сигнала Искомый случайный сигнал  
 $MQ^{<m>}$   $cfft(Q2^{<m>})$   $S_{k,m} = MQ_{k,m} \cdot GT1_k$   $AA^{<m>}$   $icfft(S^{<m>})$  Шкала яркости

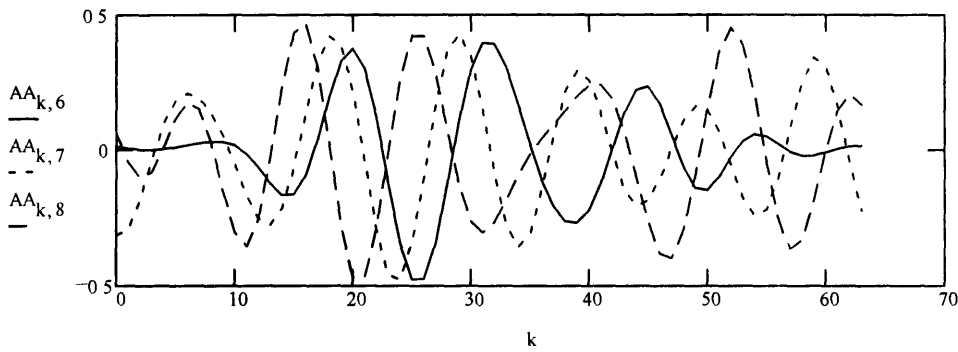
Сдвиг спектра сигнала Спектр сигнала  $O_{m,k} = L - k$

$AA1_{k,m}$   $AA_{k,m} \cdot \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot 0.43\right)$   $S1^{<m>}$   $cfft(AA1^{<m>})$   $O1_{m,k} = k$

$S2_{kk,m}$   $S1_{kk+0.5L,m}$   $S2_{kk+0.5L,m} = S1_{kk,m}$

Модуль спектра Максимум спектра Негатив спектра  
 $J_{m,k}$   $|S2_{k,m}|$   $MJ$   $\max(J)$   $JM$   $MJ - J$

Три реализации сигнала



Картина спектра

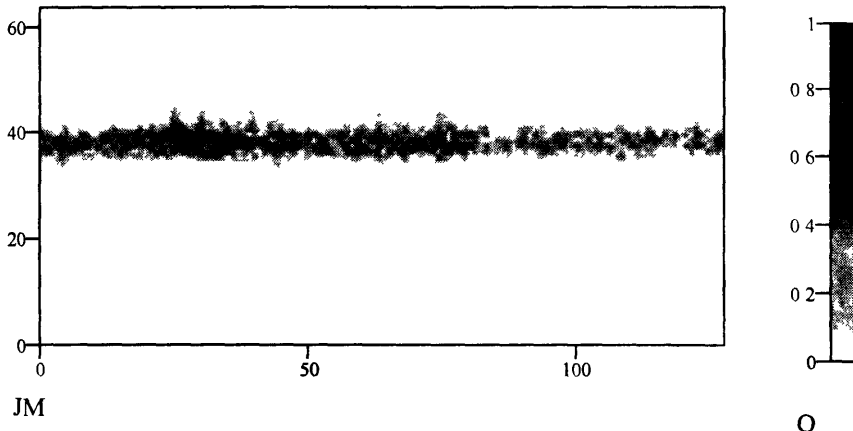


Рис. 1.16. Случайный сигнал с заданной формой спектра

Далее полученная форма спектра преобразуется к той, в которой спектр отображается в пакете программ *Mathcad* (высокие частоты – в центре, а низкие – по краям). Ниже приведена программа, обеспечивающая вставку в нужное место дискретной составляющей.

Далее в программе готовится случайная функция. Задействованы два генератора случайных последовательностей ( $Q1$ ;  $Q$ ). Два генератора используются для формирования последовательности комплексных чисел. Последовательности генерируются длиной  $LM$ , чтобы их хватило для образования ансамбля случайных функций. Образуется случайная последовательность комплексных случайных чисел ( $Q2$ ), она формируется в виде матрицы значений, в строках которой  $L$  чисел, а в столбцах  $M$ . Далее берется спектр этой последовательности, в каждой строке с сохранением столбцов в качестве параметра преобразования, путем использования верхнего индекса, как показано в программе, изображенной на рисунке.

Наконец, все случайное и регулярное соединяется в единой формуле. Происходит это путем перемножения спектров. В результате спектр случайной функции приобретает заданную форму. Дальнейшая часть программы посвящена индикации результатов моделирования. Показан вид трех реализаций сформированного сигнала.

В заключение приведены модули спектров всех реализаций в яркостном виде (для удобства – в негативном изображении, переход к негативу также показан на рисунке). Приведена специальная программа (в данную версию *Mathcad* она не встроена), позволяющая ввести калибровку яркости сигнала. Из рисунка видно, что мы получили настоящую случайную функцию. Дискретной линии тут нет, так как умножению на случайную функцию подвергается весь сигнал. Чтобы ввести настоящую дискретную линию, надо на случайную функцию умножить лишь  $CT$ , и только после этого прибавить к результату дискретную линию  $CT1$ .

Таким образом получается спектр, включающий только целые частоты в силу того, что задаются значения частот лишь в дискретных точках отсчета. Каждая спектральная компонента обладает целочисленным значением частоты. В этом можно убедиться с помощью программы, показанной на рис. 1.17, которая вначале повторяет программу, приведенную на рис. 1.16, кроме того, что в этой программе формируется только одна реализация ансамбля случайных функций с заданной формой спектра. Сформированный спектр показан на рисунке в логарифмическом масштабе в виде функции  $S1(k)$  (левый график). На правом графике – спектр, получающийся при сдвиге спектра левого графика на 0,43 отсчетной точки. Такой сдвиг спектра выполнен в функции  $AA1(k)$ . Крохотное смещение частоты вызывает резкое изменение формы спектра, что характерно для целых частот. Такой фокус мы уже демонстрировали на рис. 1.1 и 1.2. Теперь то же самое – на спектре произвольной формы.

\* Зададимся вопросом: каким образом "размыть" спектр так, чтобы получались дробные частоты. Это может быть поучительно, позволит подчеркнуть особенности численного спектрального анализа, и по-настоящему "размытые" спектры понадобятся нам в дальнейшем.



## Mathcad Plus 6.0

Параметры спектра  
положение    ширина  
h    38                    D    4

Массив данных    Диапазонные переменные

L    64    k    0..L    1    kk    0..0.5·L    1

Заданная форма спектра

Преобразование спектра к форме,  
принятой в *Mathcad*

$$GT_k = \exp\left[-\frac{(|k-h|)^2}{D}\right] \quad GT1_{kk} = GT_{0.5L+kk} \quad GT1_{0.5L+kk} \quad GT_{kk}$$

Генераторы случайных значений

Q    rnorm(L,0,1)    Q1    rnorm(L,0,1)

Переход к децибелам

$$Z(u) = \text{if}(|u| > 10^{-8}, 20 \cdot \log(|u|), 8 \cdot 20)$$

Комплексные случайные числа (КСЧ)

$$Q2_k = Q_k + i \cdot Q1_k$$

Спектр КСЧ

Спектр искомого сигнала

Искомый случайный сигнал

$$MQ = \text{cfft}(Q2)$$

$$S_k = MQ_k \cdot GT1_k$$

$$AA = \text{icfft}(S)$$

Сдвиг спектра сигнала

Спектр сигнала

$$AA1_k = AA_k \cdot \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot 0.43\right)$$

$$SS = \text{cfft}(AA1)$$

$$SS1_{kk}$$

$$SS_{kk+0.5L}$$

$$SS1_{kk+0.5L}$$

$$SS_{kk}$$

$$S1_{kk} = S_{kk+0.5L}$$

$$S1_{kk+0.5L}$$

$$S_{kk}$$

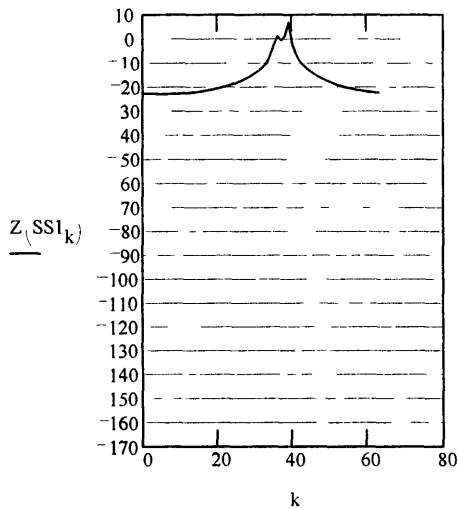
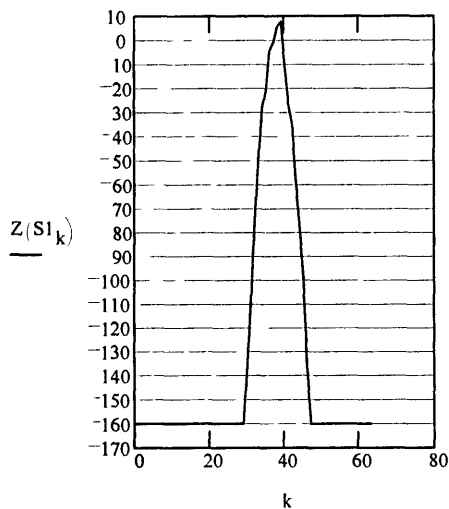


Рис. 1.17. Целочисленность частот спектра, сформированного по рис. 1.16

Программа, позволяющая "размывать" спектры в пределах одной отсчетной точки, т. е. формировать дробные частоты, показана на рис. 1.18. Эта программа полностью повторяет предыдущую (см. рис. 1.17), для увеличенного в 8 раз массива данных. В результате мы вновь получаем "целочисленный" спектр, который без изменения формы превращается в дробный посредством чрезвычайно простого приема, показанного в программе под названием "искомая функция". Прием заключается в том, что, вводя новую переменную  $n$ , обладающую в 8 раз меньшей областью значений, мы сокращаем область существования нашей функции в 8 раз, причем число значений спектра функции тоже станет в 8 раз меньше, а сама форма спектра при этом не изменится, останется прежней, какой она была у первоначальной функции, занимавшей в 8 раз большую область. Это свойство преобразования Фурье, не имеющее отношения к тому, делается это преобразование численно или иным способом. А теперь учтем специфику численного преобразования. Она состоит в том, что одну и ту же форму спектра надо отобразить сначала большим числом отсчетов, а затем числом отсчетов, уменьшенным в 8 раз. Если в первом случае все точки спектра точно попали на свои отсчеты, то во втором случае это уже невозможно, значения спектральных компонент попадают с неизбежностью в промежуточные точки, порождая дробные частоты. В этом позволяет убедиться приведенная программа. Теперь небольшое смещение положения спектра как целого уже никак не сказывается на виде спектра.

На следующих двух программах показано как целый и "размытый" узкополосные процессы проходят через фильтр, сформированный в виде "спектрального окна". На рис. 1.19 показана программа прохождения через фильтр спектра, использующего только целые частоты. Вначале эта программа повторяет предыдущую, показанную на рис. 1.18, за исключением расширения области  $L$  в 8 раз. Эта область значений не расширяется, в результате чего спектр получится только целым. Сформированный узкополосный спектр смещается по частоте при изменении значения переменной  $j$ . Фильтр "спектральное окно" формируется точно так, как это показано и описано в программе на рис. 1.8. Полученный выход фильтра в виде функции времени  $n$  и смещения частоты  $j$  усредняется по интенсивности по времени  $n$ . Получившийся результат изменения интенсивности входного и выходного сигналов при смещении частоты узкополосного сигнала  $j$  показан на рисунках. На других двух рисунках показаны спектр входного сигнала при одном фиксированном значении его сдвига  $j$  и форма частотного окна фильтра.

В результате узкополосный сигнал проходит через систему только тогда, когда его частота  $j$  попадает в "спектральное окно", а если  $j$  вне "окна", то сигнала на выходе системы нет.

На рис. 1.20 показано то же самое, но при "размытом" спектре узкополосного сигнала. Изменение спектра сигнала достигнуто путем расширения области значений  $L$  в 8 раз. Теперь сигнал частично проходит через "спектральное окно", даже находясь далеко от него. Это обстоятельство следует учитывать при фильтрации сигналов.

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных      Диапазонные переменные

$$L = 256 \cdot 8 \quad M = 256$$

$$k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L-1 \quad n = 0..M-1 \quad nn = 0..0.5 \cdot M-1$$

Параметры спектра

частота

$$h = 0.5 \cdot L + 240$$

ширина

$$x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n$$

Форма спектра  $D^{-3}$

$$GT_k = \exp \left[ \frac{(|k-h|)^2}{D} \right]$$

Переход к децибелам

$$Z(u) = \text{if} [ |u| > 10^7, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot (-7) ]$$

Преобразование спектра к его виду в Mathcad

Случайные функции

$$GT1_{kk} = GT_{0.5L+kk} \quad GT1_{0.5L+kk} = GT_{kk}$$

$$Q1 = \text{norm}(L, 0, 1)$$

$$Q = \text{norm}(L, 0, 1)$$

$$Q2_k = Q_k + i \cdot Q1_k$$

$$MQ = \text{cfft}(Q2)$$

$$S_k = MQ_k \cdot GT1_k$$

$$AA = \text{icfft}(S)$$

Искомая функция

$$A_n = \overline{AA_n}$$

Искомые спектры

$$AA1_n = AA_n \cdot \exp \left( i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \cdot 0.43 \right)$$

$$SS = \text{cfft}(AA1) \quad G = \text{cfft}(A)$$

$$SS1_{nn} = SS_{nn+0.5M}$$

$$SS1_{nn+0.5M} = SS_{nn}$$

$$G1_{nn} = G_{nn+0.5M}$$

$$G1_{nn+0.5M} = G_{nn}$$

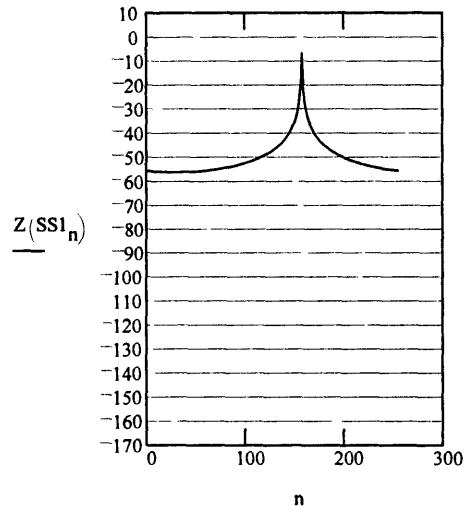
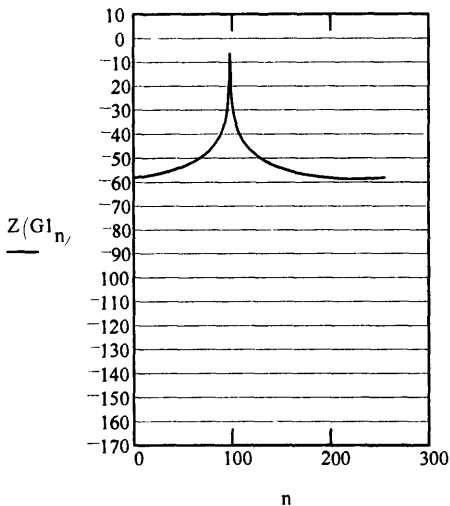


Рис. 1.18. Формирование узкополосной помехи с "размытым" спектром

## Mathcad Plus 6.0

$$t = 1$$

Массивы данных      Диапазонные переменные

$$L = 128 \quad M = 128 \quad k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L-1 \quad n = 0..M-1 \quad nn = 0..0.5 \cdot M-1$$

Параметры спектра

частота                      ширина                       $x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n$                        $j = 0..0.5 \cdot \frac{L}{t} - 1$

$$h_j = t \cdot j + 0.5 \cdot L \quad D = 3$$

Переход к децибелам

Форма спектра

$$GT_{k,j} = \exp \left[ - \frac{(|k - h_j|)^2}{D} \right]$$

$$Z(u) = \text{if} \left[ |u| > 10^{-9}, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot (-9) \right]$$

Преобразование спектра к его виду в "Mathcad"

$$GT1_{kk,j} = GT_{0.5 \cdot L + kk,j} \quad GT1_{0.5 \cdot L - kk,j} = GT_{kk,j}$$

Случайные функции

$$Q1 = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad Q = \text{rnorm}(L, 0, 1)$$

$$Q2_k = Q_k + i \cdot Q1_k$$

$$MQ = \text{cfft}(Q2) \quad S_{k,j} = MQ_k \cdot GT1_{k,j}$$

$$AA^{<j>} = \text{icfft}(S^{<j>}) \quad \text{Искомая функция}$$

Формирование фильтра "спектральное окно"

$$A_{n,j} = \frac{AA_{n,j}}{AA_{n,j}} \quad gr1 = 20 \quad br1 = 5 \quad G^{<j>} = \text{cfft}(A^{<j>})$$

$$GE4 = gr1 + br1 \quad GE1 = gr1 - br1 \quad GE2 = gr1 - br1 \quad GE3 = gr1 - br1$$

$$F(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } (M - GE1 < u < M - GE2) + (GE3 < u < GE4) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Интенсивность на входе

$$BW_j = \frac{1}{M} \sum_n (|A_{n,j}|)^2$$

$$G1_{n,j} = G_{n,j} \cdot F(n)$$

Интенсивность на выходе

$$B1^{<j>} = \text{icfft}(G1^{<j>})$$

$$BFS_j = \frac{1}{M} \sum_n (|B1_{n,j}|)^2$$

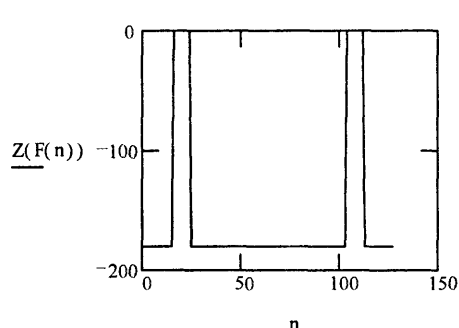
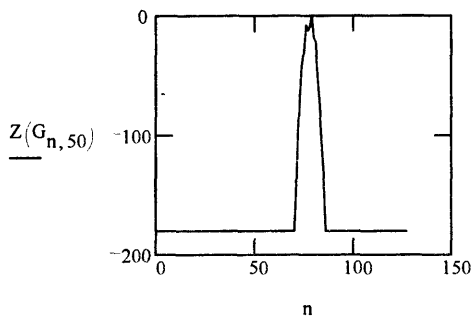
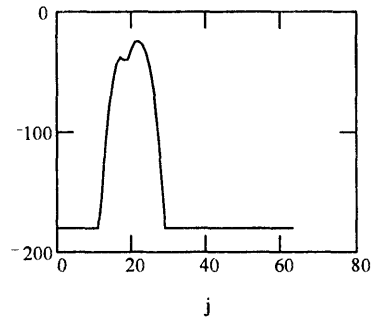
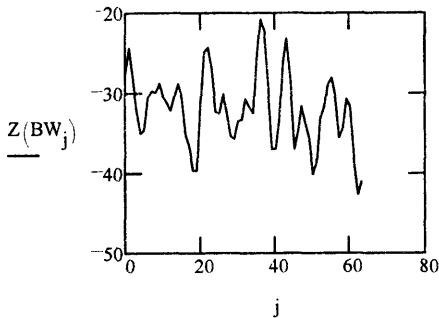


Рис. 1.19. Прохождение сигнала с "целым" спектром через фильтр в виде "спектрального окна"

### Mathcad Plus 6.0

t = 4

Массивы данных Диапазонные переменные  
 L = 128·8 M = 128 k = 0..L 1 kk = 0..0.5·L 1 n = 0..M - 1 nn = 0..0.5·M - 1

Параметры спектра

частота ширина  $x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n$   $j = 0..0.5 \cdot \frac{L}{t} - 1$

$h_j = t \cdot j + 0.5 \cdot L$  D = 3

Переход к децибелам

Форма спектра

$$Z(u) = \text{if} \left[ |u| > 10^9, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot (9) \right]$$

$$GT_{k,j} = \exp \left[ \frac{(|k - h_j|)^2}{D} \right]$$

Преобразование спектра к его виду в "Mathcad"

$$GT1_{kk,j} = GT_{0.5L+kk,j} \cdot GT_{0.5L+kk,j} - GT_{kk,j}$$

Случайные функции

$$Q1 = \text{norm}(L, 0, 1) \quad Q = \text{norm}(L, 0, 1)$$

$$Q2_k = Q_k + i \cdot Q1_k$$

$$MQ = \text{cfft}(Q2)$$

$$S_{k,j} = MQ_k \cdot GT1_{k,j}$$

$$AA^{<j>} = \text{icfft}(S^{<j>})$$

Искомая функция

$$A_{n,j} = \overline{AA_{n,j}}$$

Формирование фильтра "спектральное окно"

$$gr1 = 20 \quad br1 = -5 \quad G^{<j>} = \text{cfft}(A^{<j>})$$

$$GE4 = gr1 + br1 \quad GE1 = gr1 + br1 \quad GE2 = gr1 - br1 \quad GE3 = gr1 - br1$$

$$F(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } (M - GE1 < u < M - GE2) \text{ (} GE3 < u < GE4 \text{)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Интенсивность на входе

$$G1_{n,j} = G_{n,j} \cdot F(n)$$

$$BW_j = \frac{1}{M} \cdot \sum_n (|A_{n,j}|)^2$$

Интенсивность на выходе

$$B1^{<j>} = \text{icfft}(G1^{<j>})$$

$$BFS_j = \frac{1}{M} \cdot \sum_n (|B1_{n,j}|)^2$$

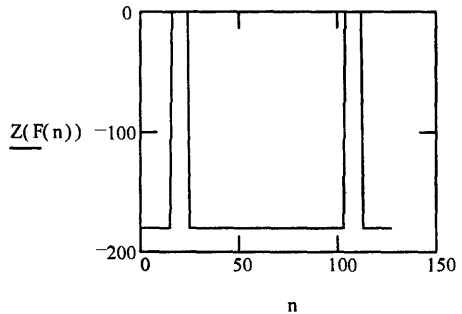
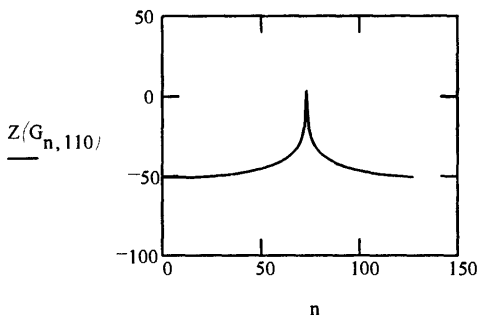
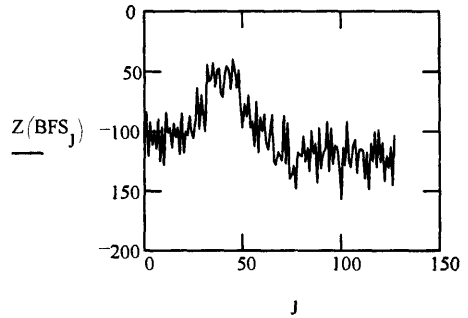
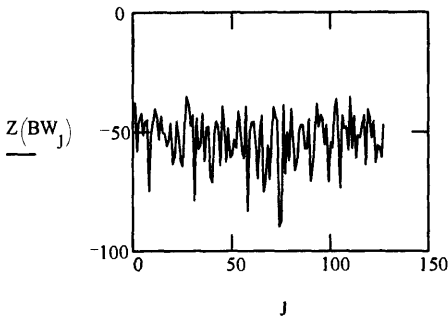


Рис. 1.20. Прохождение сигнала с "размытым" спектром через фильтр в виде "спектрального окна"

**Восстановление картины морского волнения по его спектру.** В предыдущем разделе рассмотрен спектр функции, сформированной на основе спектра, в настоящем разделе нас будет интересовать сама функция, сформированная точно так же. Будем исходить из того, что эмпирически известна форма двумерного спектра морского волнения. Одна из таких зависимостей приведена в программе на рис. 1.21 – вполне регулярная зависимость двух компонент пространственной частоты от координат. Спектр является усредненной величиной и регулярной, включающей зависимости степенные, экспоненциальные, а также синусы и косинусы. Вид этой функции убеждает в ее регулярности.

Между тем само морское волнение случайно. Для решения целого ряда задач требуется знать не только спектр морского волнения, но и другие статистические характеристики поверхности, которые можно найти, располагая видом отдельных реализаций самой поверхности еще до момента усреднения. Такого рода задачи являются как бы обратными задачами по отношению к статистике, лишь усредняющей данные в их определенной комбинации. Метод, использованный в предыдущем разделе, позволяет решить подобную обратную задачу статистики в виде нахождения отдельных не усредненных реализаций по усредненным характеристикам.

Рассмотрим решение такой задачи на конкретном примере восстановления формы морского ветрового волнения по его спектру. Такая задача решена в программе, изображенной на рис. 1.21. Вначале идут диапазонные переменные по две для двух измерений спектра и функции. Затем приведена формула морского волнения с включаемыми в нее многочисленными параметрами, которые можно изменять в зависимости от условий. Этот спектр приводится к виду, в котором принято представлять спектры в программе *Mathcad*, когда высокие частоты помещаются внутрь спектральной области. Все частоты являются целыми положительными числами. Далее формируется матрица случайных чисел, имеющих некоторые характеристики в виде среднего значения и дисперсии. В данном случае использовано нормальное распределение вероятностей. Спектры случайных реализаций чисел умножаются на двумерный спектр морского волнения, чтобы придать последнему случайный характер. Для получения реализаций самого случайного морского волнения теперь достаточно использовать обратное преобразование Фурье. И вот одна из реализаций морского волнения перед вами! Для получения следующей реализации, независимой от существующей, достаточно еще раз вычислить программу по команде: "*calculate worksheet*".

**Сопоставление статистик.** Одна из основных целей этого раздела (он основан на результатах работы [2]) – показать, насколько приведенные выше элементарные расчеты способны существенно облегчить численное моделирование сложных физических задач.

В качестве примера рассмотрим численное моделирование акустического волнового поля в условиях волноводного распространения монохроматического звука в мелком море с учетом рассеяния от взволнованной морской поверхности. Рассеяние от взволнованной морской поверхности придает процессу динамику. Акустические поля вследствие этого существенно изменяются как от одной точки до другой, так и во времени. Каждая пространственная или временная реализация вследствие интерференции волн обладает достаточно сложной структурой. Минимумы и максимумы интерференционной структуры поля весьма глубоки и соседствуют друг с другом, придавая каждой реализации вид шума. Типичная картина акустического поля, рассеянного некоторой площадкой статистически однородной взволнованной поверхности, показана на рис. 1.22.

### Mathcad Plus 6.0

Массив данных и диапазонные переменные

$$L = 128 \quad k = 0..L-1 \quad n = 0..L-1 \quad v = 0..0.5 \cdot L \quad u = 0..0.5 \cdot L \quad 1$$

Параметры спектра морского волнения и формула, его описывающая

$$a = 7 \quad p = 7 \quad M = 0.86 \cdot 9.8 \cdot a^2 \quad u1_k = (k - 0.5 \cdot L + 0.01) \cdot 0.02 \quad u2_n = (n - 0.5 \cdot L + 0.01) \cdot 0.02$$

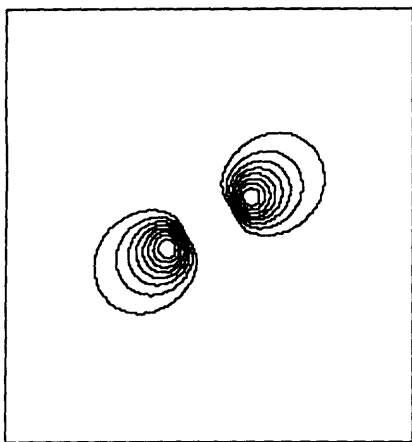
$$s = \frac{\pi}{180} \cdot 30 \quad U_{k,n} = \sqrt{(u1_k)^2 + (u2_n)^2}$$

$$A_{k,n} = (U_{k,n})^4 \cdot \exp \left[ \frac{M}{(u1_k)^2 + (u2_n)^2} \cdot \left( \left| \frac{u1_k \cdot \cos(s) + u2_n \cdot \sin(s)}{U_{k,n}} \right| \right)^p \right] \quad EB_{k,n} \quad A_{k,n}$$

Запись спектра в виде "Mathcad"

$$E_{v,u} = A_{v+0.5L,u} \quad E_{v+0.5L,u} = A_{v,u+0.5L} \quad E_{v,u} \quad A_{v+0.5L,u+0.5L} \quad E_{v+0.5L,u+0.5L} = A_{v,u}$$

Спектр волнения



Случайные числа

$$R = \text{rnorm}(L^2, 0, 1)$$

Матрица случайных чисел (МСЧ)

$$GD_{k,n} = R_{k+Ln}$$

Спектр МСЧ

$$GF = \text{cfft}(GD)$$

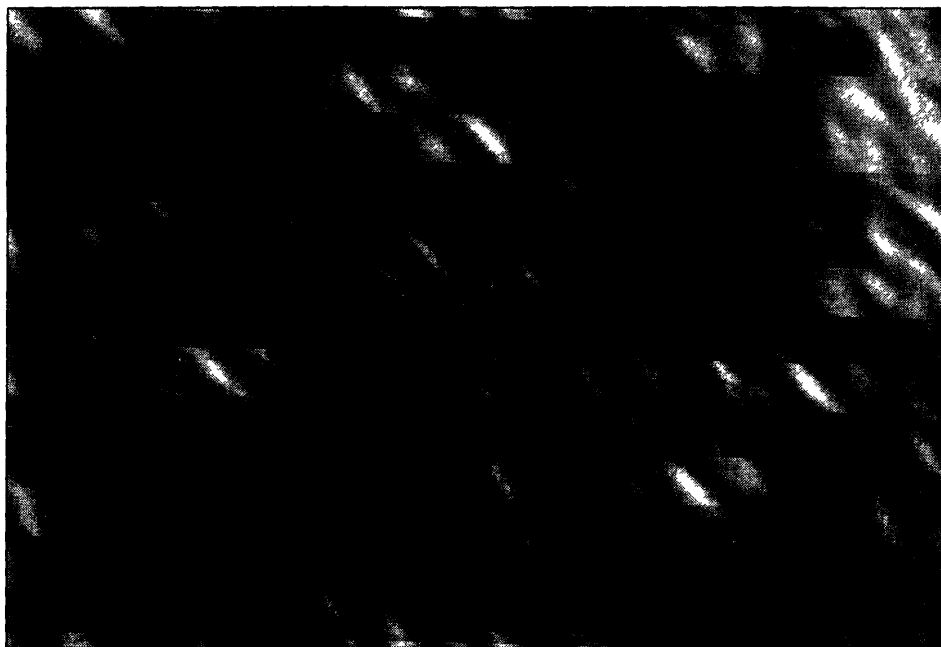
Умножение матриц

$$TG_{k,n} = GF_{k,n} \cdot E_{k,n}$$

Восстановление картины волнения

$$MW = \text{icfft}(TG) \quad MW1_{k,n} = \text{Re}(MW_{k,n})$$

EB



MW1

Рис. 1.21. Определение вида морского волнения по его спектру

На нем приведена картина поля, полученного в результате точного расчета. Чтобы иметь возможность рассчитывать точно, надо существенно упрощать задачу, отбрасывая ряд параметров, условий, сокращая дистанции и т.п. На этом рисунке поле сочитано не в волноводе, а в свободном пространстве в непосредственной близости (на расстоянии нескольких длин волн) от рассеивающей поверхности ограниченных размеров (квадрат со стороной 128 отсчетных точек). На поверхности поле принимает всего два значения нуль или единица по случайному закону (использован генератор случайного процесса *rmd* в пакете *Mathcad 6.0 plus*). С помощью этих упрощений расчет удалось провести точно. На рис. 1.22 приведен угловой, или пространственный, спектр рассеянного волнового поля. Показано только рассеянное поле. Прямая волна, вызывающая рассеяние, исключена.

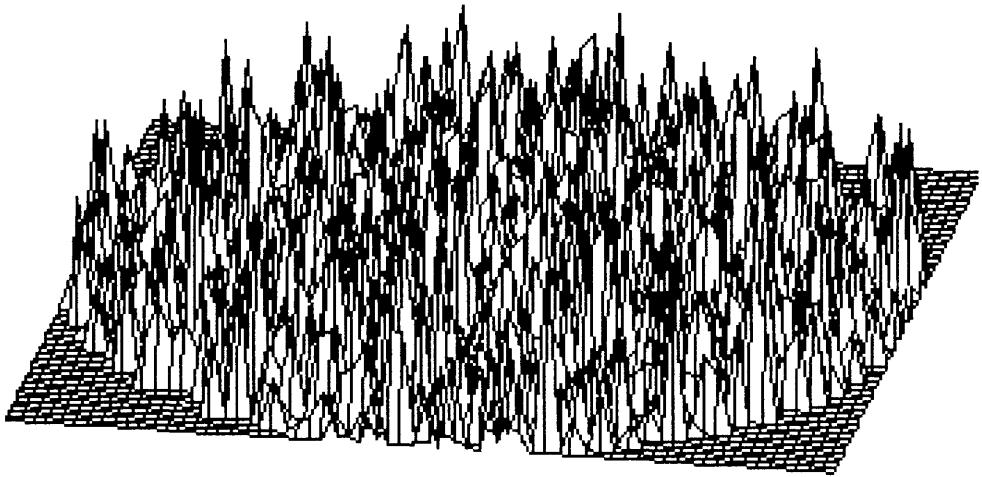


Рис. 1.22. Картина волнового поля, полученная точным расчетом

Как видно из рисунка, спектр поля сильно изрезан максимумами и минимумами. Видно также, что угловой спектр ограничен. Ограничение связано с тем, что поле распространяется лишь в пределах  $\pm 90^\circ$  от нормали к поверхности. Поле, рассеянное под более крутыми углами, не является распространяющимся и быстро затухает.

Основные особенности интерференции (частые смены глубоких минимумов и больших максимумов) сопутствуют и другим условиям. В случае больших дистанций точный расчет требует столь большой памяти и быстродействия, что становится невозможным. Кроме того, ряд условий очень трудно точно учесть, так как не всегда известны детали (например, точная форма поверхности и дна волновода). Сложность и неопределенность задачи делает точный расчет во многих случаях практически неосуществимым. Задумаемся над тем, есть ли в нем настоящая необходимость, ведь точная реализация не всегда нужна. Во многих случаях гораздо важнее иметь ансамбль реализаций, т. е. вполне достаточно иметь реализации, принадлежащие к ансамблю, включающему точное решение. Чтобы реализация принадлежала к тому же ансамблю, она должна иметь одинаковое с точным решением пространственное распределение вероятностей значений и одинаковые средние характеристики.

Средние характеристики вычислить гораздо проще, чем всю интерференционную картину во всех ее деталях. Будем считать средние характеристики известными. Остается вопрос о принадлежности случайного сигнала, созданного численно, кото-



рому приданы требуемые средние характеристики того же статистического ансамбля, к которому принадлежит точное решение. В пользу того, что принадлежит, свидетельствует следующее.

Во-первых, в силу физических условий интерференционная изрезанность отдельных реализаций получается максимальной, ограничиваемой только общей шириной спектра сигнала. Используемый нами метод построения случайных сигналов обеспечивает получение именно таких реализаций. Во-вторых, реальный процесс является суммой большого числа слагаемых, что при условии их статистической независимости и в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей обеспечивает вполне определенные статистические свойства совокупности интерференционных картин, рассматриваемых как случайный процесс [5]. Такой процесс должен иметь нормальное или гауссово распределение, которое (в силу равенства нулю среднего значения) определяется всего одним параметром – дисперсией. Моделируемые нами реализации получаются в результате преобразования Фурье, которое фактически представляет собою суммирование. Следовательно, в силу центральной предельной теоремы можно ожидать получение нормального распределения. Однако применение центральной предельной теоремы требует отдельного строгого математического обоснования, которым мы пока не располагаем, но надеемся, что физические условия при максимальной изрезанности интерференционной картины обеспечивают нормализацию рассматриваемого нами процесса.

Необходимо убедиться, что моделируемые реализации случайного процесса можно считать принадлежащими тому же статистическому ансамблю, что и те, которые получаются при точном расчете. Поступим следующим образом. Точный расчет сделаем по такому массиву данных, который допускает возможность точного решения задачи, затем эту же задачу с тем же массивом данных решим иначе – с помощью простой процедуры численного моделирования отдельных реализаций случайного процесса. Полученные результаты оценим по известному статистическому критерию на соответствие их гауссовому закону распределения вероятностей.

Для вычисления распределения поля с учетом интерференции (точное решение задачи) используется метод примененный и изложенный в работе [6]. Вычисляется сигнал, рассеянный ограниченным участком неровной поверхности, в массиве данных  $128 \times 128$  числовых значений. Плоскость, в которой вычисляется поле, отстоит от исходной плоскости на несколько длин волн. Поверхность освещается плоской волной, падающей на поверхность под малым углом к ней. Этот расчет включает три операции: 1) задание комплексной амплитуды волнового монохроматического поля на выбранном участке поверхности; 2) получение двумерного спектра этого поля; 3) умножение полученного спектра на комплексную двумерную функцию, называемую частотной характеристикой свободного пространства. Вид этой функции известен из теории. Этот расчет назовем сокращенно расчетом А.

Упрощенное численное моделирование задачи, которое назовем расчетом Б, повторит все вышеуказанные операции, упрощая одну из них. Пространственный спектр поверхности умножается не на комплексную частотную характеристику свободного пространства, а только на ее модуль. При таком решении задачи не получается реальной интерференционной картины и выпадает из рассмотрения такой параметр задачи, как расстояние до плоскости наблюдения, поскольку этот параметр входит лишь в фазу частотной характеристики свободного пространства и трудится вовсю, изменяя фазы интерферирующих между собою спектральных компонент. Именно эта работа может быть точно выполнена лишь в редких случаях, один из которых мы рассматриваем.

Картина спектра при расчете А представлена выше на рис. 1.22. На рис. 1.23 показан спектр, получающийся в результате расчета Б.

Визуально эти картинки напоминают различные реализации случайного процесса, относящиеся к одному ансамблю значений. Однако одной визуальной оценки недостаточно. Проведем количественное сопоставление.

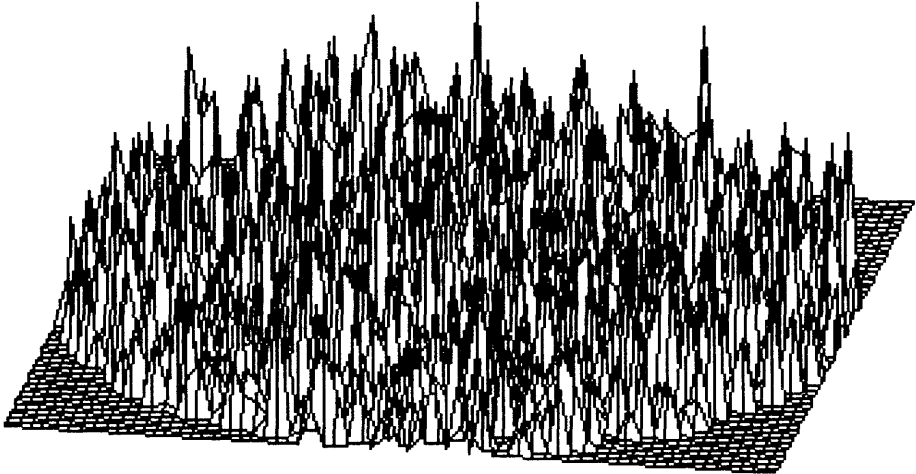


Рис. 1.23. Картина волнового поля, полученная упрощенно

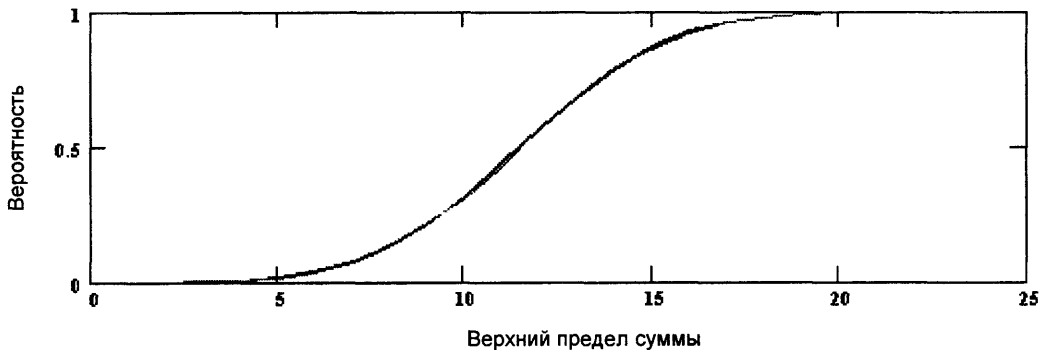


Рис. 1.24. Эмпирические распределения вероятностей значений полей, показанных на рис. 1.22, 1.23, и нормальное распределение вероятностей

Из полученных точного (А) и модельного (Б) спектров полей выберем по 1024 значения действительных частей комплексных спектров (они могут иметь нормальное распределение с нулевым средним) с одинаковыми номерами. Эти последовательности уравнием по интенсивностям и исследуем на соответствие нормальному закону распределения с помощью критерия согласия Колмогорова [7]. Для этого эмпирические гистограммы чисел в последовательностях А и Б проинтегрируем по интервалам значений гистограммы до изменяющегося верхнего предела. В результате получим эмпирические функции распределения последовательностей А и Б, приведенные на рис. 1.24. На том же рисунке показана функция распределения нормально распределенной случайной величины, полученная путем интегрирования выражения

$$\Phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 x^2),$$

где  $h = 1/\sqrt{2}\sigma$ ,  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение, найденное по эмпирическим данным.

Определим значения максимальных отклонений эмпирических функций распределения последовательностей А и Б от теоретической. Согласно теореме Колмогорова [7, стр. 284] и таблице [7, стр. 384], максимальные отклонения эмпирической функции распределения от теоретической могут превысить полученные нами значения для А и Б с вероятностями 0,97 и 0,999 соответственно. Эти вероятности так близки к единице, что такие события осуществляются почти всегда. Значит, практически нельзя получить лучшего совпадения эмпирических законов распределения с теоретическим, чем то, которое представлено на рис. 1.24. На этом основании критерий согласия Колмогорова позволяет считать оба эмпирических закона соответствующими гауссову закону распределения. Заметим, что исходная поверхность, которая задавалась численно, имела не гауссово, а равномерное распределение.

Таким образом, для получения совокупности случайных реализаций сигналов достаточно учесть лишь изменения в модулях функций, которые регулярным образом изменяют вид сигналов. Тонкие трудно учитываемые фазовые изменения при этом можно брать в расчет, что упрощает решение задач, требующих статистической обработки, и расширяет возможности их математического моделирования.

## ФИЛЬТРАЦИЯ ПОМЕХ И ЛОКАЦИЯ НА ПРОСВЕТ

### 2.1. Устранение узкополосной помехи

Помехой мы условимся называть такой сигнал, который нам не нужен, не интересен, но такой, который своим присутствием затрудняет обнаружение или измерение параметров интересующего нас сигнала. Первое, что при этом мешает, – это отсутствие установившейся терминологии. И то, что интересно, – это сигнал, и то, что мешает, – это тоже сигнал. Такая ситуация с терминами в кепстральном анализе успешно решилась сменой названия второй операции спектрум на кепструм. К сожалению, в проблеме помехоустойчивости такой четкой терминологии нет. Иногда можно вместо слов "мешающий сигнал" употреблять "шум". Так это и делается в тех случаях, когда сигнал помехи широкополосен. В нашем случае помеха представляет собою узкополосный сигнал, к которому термин "шум" применим со слишком большой натяжкой. Чтобы не запутаться в терминологии, условимся тот сигнал, который только мешает, называть просто помехой, стараясь не употреблять к такому сигналу термин "сигнал". Пусть это будет именоваться помехой и только помехой.

Поясним, как возникает такая помеха. Один из самых распространенных путей – это модуляция сильного сигнала слабым. Такая модуляция происходит, когда сильное излучение, распространяющееся в виде волны, испытывает рассеяние на неоднородностях среды, в результате возникают, большей частью, весьма слабые волны иных направлений. Сигналом в данном случае является только рассеянное поле, а вызывающее это рассеяние сильное поле является помехой. Этот пример демонстрирует происхождение помехи и ее роль. Сигнал возникает только благодаря тому, что есть помеха. Нельзя в данном случае бороться с помехой в ее источнике, так как, прекратив излучать помеху, мы полностью потеряем сигнал. В приведенном примере помеха может иметь узкий пространственный спектр, а сигнал может обладать широким пространственным спектром, лежащим как вне, так и в области спектра помехи. Однако, каким бы узким ни был спектр помехи, он может занять весь спектральный диапазон.

Насколько узкополосной может быть помеха? Допустим, что мы можем влиять на спектр помехи. В подавляющем большинстве случаев устранять помеху тем легче и тем эффективнее, чем уже ее спектр. Сделаем помеху такой, чтобы ее спектр занимал всего одну отсчетную точку. Это условие определяет вид помехи однозначно, так как форма спектра однозначно определяет функцию, чей спектр задан. В этом случае помеха имеет вид экспоненты от мнимого аргумента:

$$W(x) = \exp(ibx), \quad (2.1.1)$$

где

$$b = \frac{2\pi}{L} f, \quad (2.1.2)$$

$L$  – величина общего массива данных;  $f$  – частота, являющаяся непременно целым числом. Это число, как уже отмечалось выше, определяет номер той единственной отсчетной точки спектра, которой принадлежит помеха. С такой помехой очень просто бороться, если она чему-то мешает. Надо просто исключить из рассмотрения одну точку спектра сигнала, приняв значение спектра в этой точке равным нулю. Помеха при этом исчезнет полностью, а спектр сигнала в остальных отсчетных точках останется нетронутым. Такой способ устранения узкополосной помехи является идеальным. Его применению мешают два фактора, один из которых устраним, а другой устранить не удастся.

Начнем с первого. Этот устранимый фактор состоит в том, что частота  $f$  может являться одним, но необязательно целым числом. К чему это приводит, видно из программы, показанной на рис. 2.1, где приведены результаты спектрального представления функций вида (2.1.1) с частотами 450 – целое число и 450,457 – нецелое число. Спектр функции, содержащей целую частоту, занимает всего одну отсчетную точку 450. Более ничего нет. Если эту единственную точку исключить, то от помехи не останется ничего. Иное дело, если частота представлена тоже всего одной цифрой, но эта цифра содержит дробь. Тогда заняты все точки спектра. Исключить такой сигнал путем исключения одной точки невозможно, так как во всех иных точках помеха останется и может мешать обнаружению и измерению слабого сигнала.

Как устранить влияние этого фактора и исключить монохроматическую помеху, если она имеет дробную частоту? Частоту помехи можно изменять путем умножения ее на экспоненту вида (2.1.1), что приводит к смещению всех частот спектра. Таким путем, сместив частоту всего спектра на дробную часть величины  $f$  помехи, можно привести помеху, содержащую нецелую частоту, к виду, в котором частота целая, и исключить ее.

Для этого сначала надо определить частоту помехи с точностью до целого числа. Это можно сделать при условии, что интенсивная помеха всего одна, на основе спектра помехи по положению максимума спектра. В случае единственного сильного сигнала положение максимума его спектра является несмещенной оценкой его частоты. Дробная часть частоты помехи может быть определена путем подбора такого смещения спектра, в результате которого частота становится целым числом. Такой способ универсален и годится в случае, если помеха не одна, можно поочередно исключить ряд помех. Если же помеха одна, то определение ее частоты и последующее исключение можно осуществить автоматически, ничего не подбирая, посредством следующих операций.

Помеха в сумме с сигналом умножается на комплексно сопряженную экспоненту вида (2.1.1), в которой в качестве частоты  $f$  взята частота помехи, определенная с точностью до целого числа. В результате такого умножения получается функция, которую назовем  $E$ . Она по-прежнему имеет вид суммы, основное самое большое по модулю слагаемое которой имеет вид экспоненты (2.1.1) с частотой  $f$ , равной лишь дробной части частоты помехи. Величина этой дробной части определяется по аргументу экспоненты, входящей в  $E$ . Аргумент этой экспоненты меньше единицы, а следовательно, и меньше  $\pi$ . Поэтому при вычислении аргумента можно не применять приемов исключения скачков фазы, описанных в разделе 1.6 и в программе, изображенной на рис. 1.8.

## Mathcad Plus 6.0

Массив данных; диапазонная переменная

Частоты

$$L = 128 \quad k = 0..L - 1$$

$$f = 38 \quad f1 = 38.457$$

$$f2 = 30$$

Функции

$$B_k = \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot f2\right)$$

$$A_k = \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot f\right)$$

$$A1_k = \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot f1\right)$$

$$C_k = A_k + 0.01 \cdot B_k$$

Спектры функций

Переход к децибелам  $p = 5$

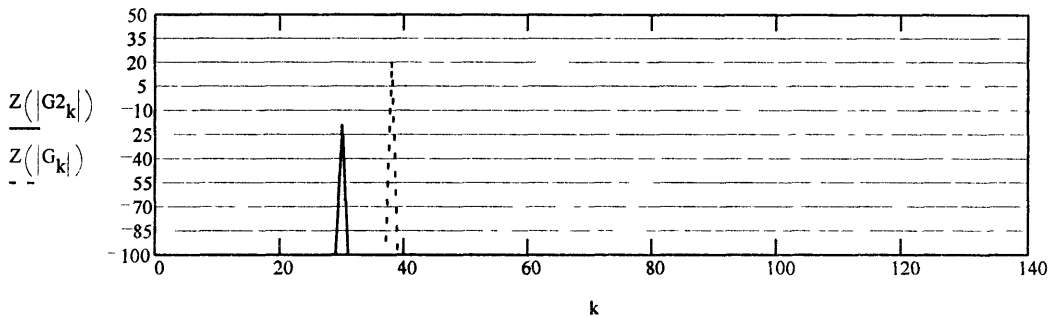
$$G = \text{cfft}(C)$$

$$G1 = \text{cfft}(A1)$$

$$Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$$

$$G2_k = G_k \cdot (1 - \Phi(f - k) \cdot \Phi(k - f))$$

Частота равна целому числу



Частота не равна целому числу

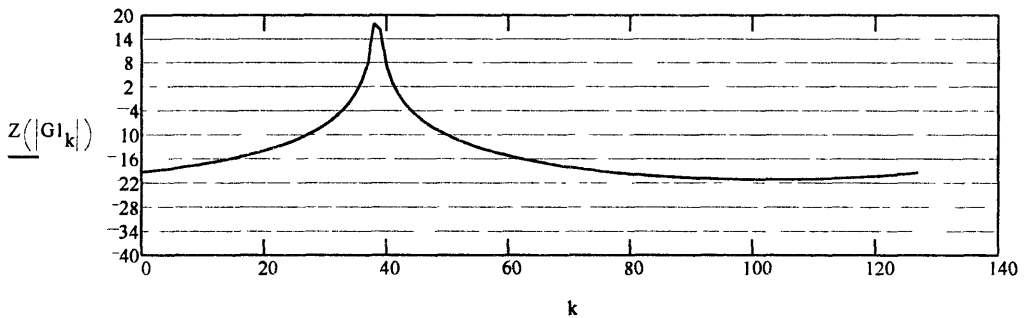


Рис. 2.1. Частота не равна целому числу

Определив значение дробной части спектра по наклону фазы, можно произвести сдвиг всего спектра на величину этой дробной части в такую сторону, чтобы спектр помехи принял целочисленное значение. После этого помеха исключается. Как конкретно совершаются все эти операции, показано в программе, приведенной на рис. 2.2. Прежде чем переходить к описанию этой программы, сделаем одно замечание. Вычисление аргумента функции  $E$  проводится с целью исключения влияния на результат слагаемого, содержащего сигнал. Функцию  $E$  нельзя непосредственно использовать для сдвига всего спектра на величину дробной части спектра помехи, так как в эту функцию входит сигнал. Нелинейная операция по взятию аргумента исключает влияние слабого сигнала на сдвиг спектра. Это тоже показано в программе.

На рис. 2.2 в качестве примера показана программа, которая автоматически определяет частоту, приводит ее к ближайшему целому числу и убирает помеху.

Первая строчка программы содержит массив данных, диапазонную переменную и ряд параметров. Среди них – безразмерное время и дробное число, определяющее положение помехи среди точек отсчета ее спектра. Далее идет усиление вводимого сигнала. Фактически это не усиление, а ослабление, так как множитель много меньше единицы. Затем приведена частота сигнала.

Анализируемая функция обозначена буквой  $A$ . Она представляет собой сумму двух экспонент, одна из которых представляет собою помеху, а вторая – слабый сигнал. Спектр анализируемой функции –  $G1$ , а  $B$  – его логарифм, нормированный на максимальное значение. На графике, помещенном внизу, показан вид функции  $B$ . Дробная частота приводит к тому, что спектр помехи занимает все точки отсчета и с таким уровнем, что сигнала на этом графике не видно совсем. Далее следует программа, автоматически приводящая дробное значение частоты к целому числу путем сдвига всего частотного спектра на величину дробной части частоты помехи. Этому предшествует программа, определяющая дробную часть частоты и состоящая из 4 операций, расположенных в одной строке программы. Строится опорная функция ( $AO$ ), представляющая собой экспоненту целой частоты, которая определяется автоматически по положению максимума спектра  $A$ . Программа нахождения этого максимума помещена строчкой выше, она использует встроенную функцию  $\Phi$ , значения которой равны нулю для отрицательных значений ее аргумента и единице для нуля и всех положительных значений. В данном случае аргументом функции  $\Phi$  является разность между значениями функции и ее максимумом, разность обращается в нуль только в той точке, в которой ее значение достигает максимума, во всех остальных точках значение аргумента отрицательно. Поэтому функция  $\Phi$  от аргумента, указанного в программе, равна единице в точке максимума функции, а в иных точках она равна нулю. В программе функция  $\Phi$  умножается на значение аргумента, поэтому значение  $\Phi$ , равное в точке максимума единице, умножается на значение, равное координате максимума. Это значение является максимальным, так как во всех остальных точках функция  $\Phi$  равна нулю. Следующим действием определяется максимум  $M1$ , в который входит произведение  $\Phi$  на координату. Этот максимум представляет собою координату максимума спектра ( $G1$ ). Программа спектрального анализа *cffft в пакете Mathcad 6.0 plus* устроена так, что наш сигнал попадает во вторую часть спектра, в которой представлены положительные частоты. Поэтому для сопоставления полученного значения координаты максимума спектра с заданной координатой требуется взять разность между полученным значением координаты максимума и длиной всего массива данных  $L$ , что и сделано в программе.

## Mathcad Plus 6.0

Массив	Безразмерное время	Частота помехи	Усиление сигнала	Частота сигнала
$L = 256$		$f = 40.812$	$att = 0.001$	$f1 = 65.8$

$k = 0..L-1$       $x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k$   
 Анализируемая функция (АФ)

$$A_k = \exp(i \cdot x_k \cdot f) + att \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot f1)$$

Переход к децибелам  $p = -7$   
 $Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$

Спектр АФ

$G1 = \text{cfft}(A)$

$$B_k = Z\left(\frac{G1_k}{\max(G1)}\right)$$

Программа поиска максимума спектра АФ

Максимум спектра АФ

$$ky1_k = (k) \cdot \Phi(B_k \max(B))$$

$$fm1 = \max(ky1)$$

$$L \quad fm1 = 41$$

$$fm1 = 215$$

Опорная функция

Операция сравнения фаз

Дробная часть частоты помехи

$$AO_k = \exp[i \cdot x_k \cdot (L - fm1)]$$

$$SR_k = A_k \cdot \overline{AO_k}$$

$$ar_k = \arg(SR_k)$$

$$X = \frac{ar_{10}}{X_{10}} - \frac{ar_{200}}{X_{200}}$$

Приведение частоты помехи к целому числу

$$AC_k = A_k \cdot \overline{\exp(i \cdot x_k \cdot X)}$$

$$AC_k = A_k \cdot \overline{SR_k}$$

Исключение помехи

Определение коэффициента

Операция вычитания помехи

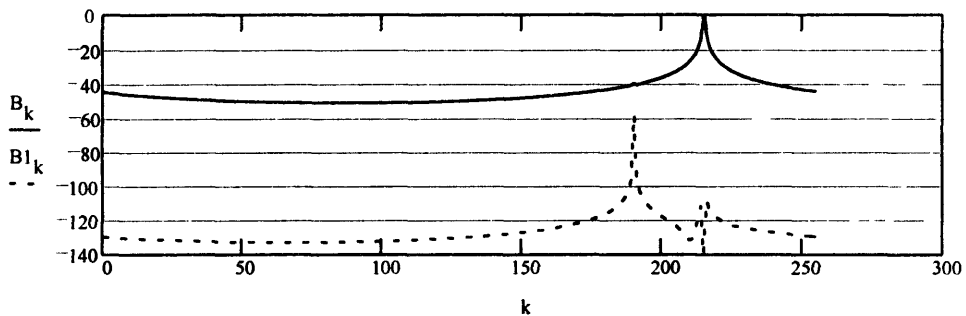
$$T = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k AC_k \cdot \overline{\exp\left[i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot (L - fm1)\right]}$$

$$AC2_k = AC_k - \frac{T}{\sqrt{L}} \cdot \exp\left[i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot (L - fm1)\right]$$

Спектр сигнала без помехи

$$G2 = \text{cfft}(AC2) \quad B1_k = Z\left(\frac{G2_k}{\max(G1)}\right)$$

Исходный спектр сигнала с помехой (сплошная линия)  
и он же после удаления помехи (пунктир)



**Рис. 2.2. Спектральный анализ с адаптивным исключением сильной помехи**



Итак, мы сформировали опорную функцию ( $AO$ ), частота которой равна ближайшему целому числу к заданной дробной частоте  $f$ . Далее проводится умножение комплексно сопряженной опорной функции на анализируемую. В результате мы получаем функцию  $SR(k)$ , в нее входит экспонента от мнимого аргумента, которым является разность аргументов анализируемой и опорной функции, пропорциональная дробной части частоты помехи. С учетом того, что коэффициентом пропорциональности является безразмерное время ( $x$ ), следующим действием, показанным на рисунке, определяется дробная часть частоты помехи.

За этим следует сдвиг всего спектра на величину дробной части частоты помехи, в результате чего спектр помехи приводится к целому числу. Рядом – операция, в которой для смещения частоты спектра используется комплексно сопряженная функция  $SR(k)$ . Эта операция в данной программе не задействована, о чем говорит маленький прямоугольник, стоящий рядом с обозначением соответствующего действия. На рис. 2.3 прямоугольник с этой операцией убран, что привело к тому, что эта операция совершается, а против операции смещения спектра такой прямоугольник поставлен. Это означает, что программа, показанная на рис. 2.3, использует функцию  $SR(k)$  для сдвига частоты спектра, во всем остальном эта программа полностью совпадает с программой, показанной на рис. 2.2.

Помеха исключается вычитанием ее из анализируемого сигнала. Для этого определяется значение коэффициента ряда Фурье (по тем же формулам, которые использует пакет *Mathcad 6.0 plus* для выполнения операции *cfft*) на частоте помехи, приведенной к целому числу. Далее, из всей функции вычитается часть, формирующая один член ряда Фурье, который и соответствует помехе. Таким путем из всего спектра анализируемой функции удаляется спектральная составляющая помехи.

Окончательный результат показан на графике (см. рис. 2.2) пунктирной линией. На этом рисунке видна высокая эффективность данного метода. Вывод можно сделать такой: чисто монохроматическая помеха, даже очень интенсивная, не опасна, ее можно убрать.

На рис. 2.3 окончательный результат несколько иной. Он отличается тем, что сигнал имеет смещенный спектр. Чтобы избежать такого смещения спектра сигнала, надо действовать по программе, показанной на рис. 2.2.

Приведенной выше программой нельзя воспользоваться для последовательного, поочередного исключения ряда монохроматических помех, потому что спектр каждой монохроматической помехи, если она не целочисленная, занимает все точки отсчета. При помехах одинаковой интенсивности достаточно, чтобы оценки положения частот по положению максимумов получались смещенными. Смещения оценок приводят к неточностям, устранение которых возможно лишь путем подбора правильных значений. Приведенная выше программа в случае ряда помех может быть использована с целью сокращения области подбора правильных значений. Примером такой узкополосной множественной помехи является помеха одной частоты, заданная в виде действительной функции синуса или косинуса, каждая из которых в спектре содержит не одну, а две экспоненты. Эти две экспоненты взаимно влияют на положение максимумов спектра так, что устранить одну составляющую спектра полностью автоматически не удастся, действуя по приведенной выше программе.

Перейдем теперь к главному неустранимому фактору, которым является немонохроматичность помехи. Помеха может быть исключительно узкополосной. Ее спектр может быть существенно уже расстояния между точками отсчета спектра, однако он все-таки шире одной точки. В этом случае в спектре всегда присутствует нецелая частота, и сдвиг спектра помехи не приводит к появлению целочисленной частоты при любом сдвиге. Убедимся, что это действительно серьезный фактор, влияние которого нельзя устранить вышеописанными приемами.

### Mathcad Plus 6.0

Массив	Безразмерное время	Частота помехи	Усиление сигнала	Частота сигнала
$L = 256$		$f = 40.812$	$att = 0.001$	$f1 = 65.8$

$k = 0..L - 1$       $x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k$   
 Анализируемая функция (АФ)

$A_k = \exp(i \cdot x_k \cdot f) + att \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot f1)$       $Z(u) = \begin{cases} 1 & |u| < 10^p \\ 20 \cdot \log(|u|) & |u| > 10^p \end{cases}$

Спектр АФ

$G1 = \text{cfft}(A)$       $B_k = Z\left(\frac{G1_k}{\max(G1)}\right)$      **Максимум спектра АФ**

Программа поиска максимума спектра АФ

$ky1_k = (k) \cdot \Phi(B_k, \max(B))$	$fm1 = \max(ky1)$	$L \cdot fm1 = 41$	$fm1 = 215$
Опорная функция	Операция сравнения фаз	Дробная часть частоты помехи	
$AO_k = \exp(i \cdot x_k \cdot (L - fm1))$	$SR_k = \overline{A_k \cdot AO_k}$	$ar_k = \arg(SR_k)$	$X = \frac{ar_{10} - ar_{200}}{x_{10} - x_{200}}$

Приведение частоты помехи к целому числу

$AC_k = \overline{A_k \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot X)}$       $AC_k = A_k \cdot SR_k$

Исключение помехи

Определение коэффициента

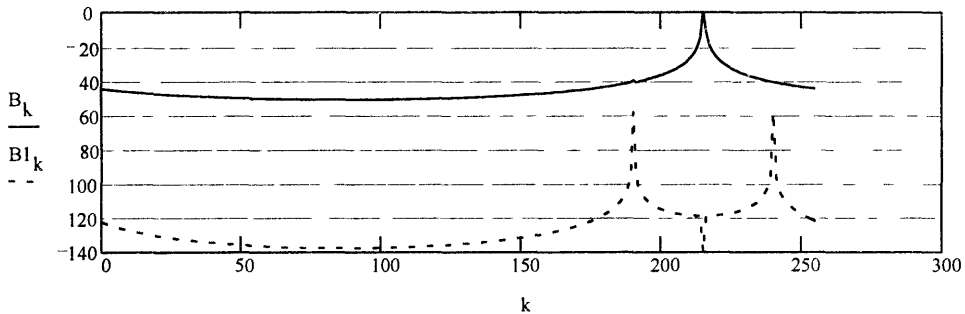
Операция вычитания помехи

$T = \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \sum_k AC_k \cdot \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot (L - fm1)\right)$       $AC2_k = AC_k - \frac{T}{\sqrt{L}} \cdot \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot (L - fm1)\right)$

Спектр сигнала без помехи

$G2 = \text{cfft}(AC2)$       $B1_k = Z\left(\frac{G2_k}{\max(G1)}\right)$

Исходный спектр сигнала с помехой (сплошная линия)  
и он же после удаления помехи (пунктир)



**Рис. 2.3. Спектральный анализ с адаптивным исключением сильной помехи**

## Mathcad Plus 6.0

Формирование помехи по рис. 1.15

Массивы данных      Диапазонные переменные

$$L = 256 \cdot 8 \quad M = 256 \quad k = 0..L - 1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1 \quad n = 0..M - 1$$

$$h = 0.5 \cdot L + 240 \quad D = 3 \quad x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \quad nn = 0..0.5 \cdot M - 1 \quad p = 7$$

$$GT_k = \exp \left[ \frac{(|k - h|)^2}{D} \right]$$

$$Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$$

$$GT1_{kk} = GT_{0.5L + kk} \quad GT1_{0.5L + kk} = -GT_{kk}$$

$$Q1 = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad Q = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad Q2_k = Q_k + i \cdot Q1_k$$

$$MQ = \text{cfft}(Q2) \quad S_k = MQ_k \cdot GT1_k \quad \text{Аддитивный шум}$$

$$AA = \text{icfft}(S) \quad \text{Анализируемая функция (АФ)} \quad N_n = 10^4 \cdot Q2_n$$

$$A_n = \overline{AA_n} + 2 \cdot 10^4 \cdot \exp(i \cdot x_n \cdot 15.8) \cdot N_n \quad G1 = \text{cfft}(A)$$

$$\text{Исключение помехи методом, показанным на рис. 2.2} \quad B_n = Z \left( \frac{G1_n}{\max(G1)} \right)$$

$$ky1_n = (n) \cdot \Phi(B_n - \max(B)) \quad fm1 = \max(ky1) \quad L \cdot fm1 = 1.822 \cdot 10^3 \quad fm1 = 226$$

$$AO_n = \exp[i \cdot x_n \cdot (L - fm1)] \quad SR_n = A_n \cdot \overline{AO_n} \quad ar_n = \arg(SR_n) \quad X = \frac{ar_{10} - ar_{200}}{x_{10} - x_{200}}$$

$$AC_n = A_n \cdot \overline{\exp(i \cdot x_n \cdot X)}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \sum_n AC_n \cdot \overline{\exp \left[ i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \cdot (M - fm1) \right]} \quad AC2_n = AC_n - \frac{T}{\sqrt{M}} \cdot \exp \left[ i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \cdot (M - fm1) \right]$$

$$G2 = \text{cfft}(AC2) \quad B1_n = Z \left( \frac{G2_n}{\max(G1)} \right) \quad BB_{nn} = B_{nn + 0.5M} \quad BB_{nn + 0.5M} = B_{nn} \\ BB1_{nn} = B1_{nn + 0.5M} \quad BB1_{nn + 0.5M} = B1_{nn}$$

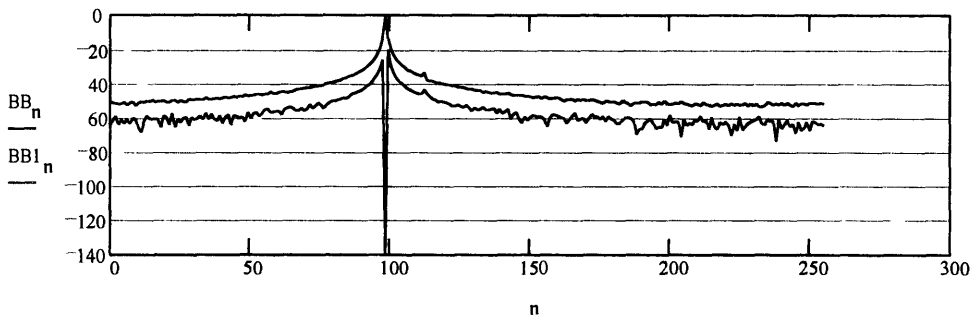


Рис. 2.4. Исключение узкополосной помехи методом, показанным на рис. 2.2

## Mathcad Plus 6.0

Формирование помехи по рис. 1.15

Массивы данных      Диапазонные переменные

$$L \quad 256 \cdot 8 \quad M \quad -256 \quad k \quad 0..L-1 \quad kk \quad -0..0.5 \cdot L-1 \quad n \quad 0..M-1$$

$$h \quad 0.5 \cdot L + 240 \quad D \quad -3 \quad x_n \quad -2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \quad nn \quad -0..0.5 \cdot M-1 \quad p \quad 7$$

$$GT_k \quad \exp \left[ \frac{(|k-h|)^2}{D} \right]$$

$$Z(u) \quad \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$$

$$GT1_{kk} = GT_{0.5L+kk} \quad GT1_{0.5L+kk} \quad GT_{kk}$$

$$Q1 \quad \text{norm}(L, 0, 1) \quad Q = \text{norm}(L, 0, 1) \quad Q2_k \quad Q_k + i \cdot Q1_k$$

$$MQ \quad \text{cfft}(Q2) \quad S_k \quad MQ_k \cdot GT1_k \quad \text{Аддитивный шум}$$

$$AA \quad \text{icfft}(S) \quad \text{Анализируемая функция (АФ)} \quad N_n \quad 10^4 \cdot Q2_n$$

$$A_n \quad \overline{AA_n} \quad 2 \cdot 10^4 \cdot \exp(i \cdot x_n \cdot 15.8) \cdot N_n \quad G1 \quad \text{cfft}(A) \quad B_n \quad Z \left( \frac{G1_n}{\max(G1)} \right)$$

Приведение частоты помехи к целочисленному значению

$$ky1_n \quad (n) \cdot \Phi(B_n \cdot \max(B)) \quad fm1 = \max(ky1) \quad L \quad fm1 = 1.822 \cdot 10^3 \quad fm1 = 226$$

$$AO_n \quad \exp[i \cdot x_n \cdot (M \cdot fm1)] \quad SR_n \quad \overline{A_n \cdot AO_n} \quad ar_n \quad \arg(SR_n) \quad X \quad \frac{ar_{10}}{x_{10}} - \frac{ar_{200}}{x_{200}}$$

$$AC_n \quad \overline{A_n \cdot \exp(i \cdot x_n \cdot X)}$$

Формирование широкого фильтра

$$EW \quad 10 \quad v \quad -0..EW-1 \quad fr_v \quad (v \cdot 0.5 \cdot EW) \cdot 1$$

"Вырезание" части спектральных компонент

$$T_v \quad \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \sum_n AC_n \cdot \exp \left[ i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \cdot (M \cdot fm1 + fr_v) \right] \quad AC2_n \quad AC_n - \sum_v \frac{T_v}{\sqrt{M}} \cdot \exp \left[ i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n \cdot (M \cdot fm1 + fr_v) \right]$$

$$G2 = \text{cfft}(AC2) \quad B1_n = Z \left( \frac{G2_n}{\max(G1)} \right) \quad BB_{nn} = B_{nn+0.5M} \quad BB_{nn+0.5M} \quad B_{nn} \quad BB1_{nn} = B1_{nn+0.5M} \quad BB1_{nn+0.5M} \quad B1_{nn}$$

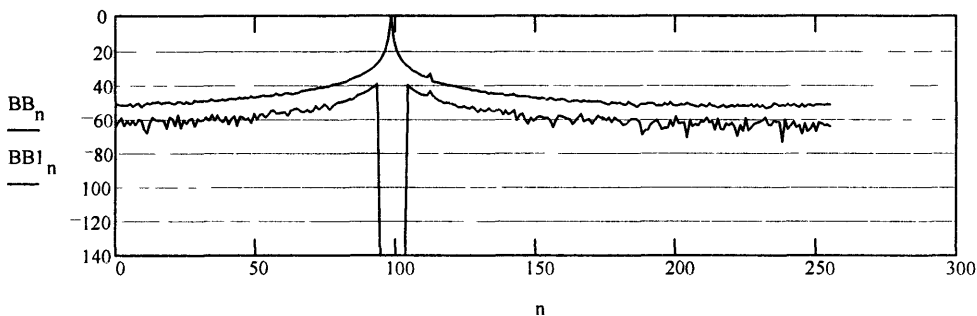


Рис. 2.5. Исключение узкополосной помехи широким фильтром

На рис. 2.4 показано действие программы, успешно подавившей помеху на рис. 2.2, сформированную по программе рис. 1.15 так, чтобы эта помеха имела узкополосный, а не монохроматический спектр. Как следует из этого рисунка, в этом случае программа малоэффективна.

Как же исключить не монохроматическую, но узкополосную помеху? Попробуем сначала усовершенствовать программу, показанную на рис. 2.4. Уберем помеху не в одной точке, а в целом ряде точек, исключая те, в которых может быть сигнал. Может быть, мы потеряем 32 точки, но спасем остальные! Не спасем, и иллюстрацией этому служит программа, показанная на рис. 2.5. Опишем ее только в той части, в которой она не повторяет программу рис. 2.4. Это всего лишь две строчки, которые следуют после текста: "Формирование широкого фильтра". Фильтр строится точно так же, как тот, который применен для исключения одной спектральной компоненты на рис. 2.4. Разница состоит в том, что в программе рис. 2.5 таких компонент не одна, а 10. Результат такого действия очевиден и неутешителен. Те компоненты помехи, которые маскировали сигнал, остались нетронутыми и по-прежнему маскируют сигнал. Возникает вопрос: "А можно ли вообще что-либо предпринять в такой ситуации, когда помеха маскирует сигнал на его собственной частоте?"

Оказывается, можно. Это осуществляется путем обработки смеси сигнала и помехи методом, называемым нами "методом темного поля".



Рис. 2.6. Устранение узкополосной помехи методом темного поля. Сверху показан результат обычного спектрального анализа, внизу — результат анализа этого же сигнала методом темного поля.

Пример такой обработки смеси сигнала и шума, использованной в программе и показанной на рис. 2.5, приведен на рис. 2.6, на котором отчетливо виден сигнал, расположенный близко от помехи, и существенно очищенный от помехи спектр, что заметно по поведению шума. На рис. 2.6 отчетливо просматриваются минимумы шумов, в то время как на графике программы 2.5 этого нет.

## 2.2. Метод темного поля

Поясним сущность метода темного поля. Существуют два метода устранения нежелательных спектральных компонент. Поясним это на простом примере. Есть очень распространенная узкополосная помеха — это наводка на провода помехи от силовой сети частотой 50 Гц и ее гармоник. С этой помехой принято бороться в источнике путем экранирования проводов. Давайте временно забудем об этом и рассмотрим другие способы. Их два: оба они называются фильтрацией для запутывания ситуации. С одним из них мы уже знакомы. Сигнал одной частоты 50 Гц, если он меша-

ет, можно вычесть из общего сигнала, подобрав соответствующим образом его амплитуду и фазу. Подбор амплитуды и фазы можно делать автоматически. Чтобы различать два метода фильтрации, назовем фильтрацию, основанную на автоматическом определении амплитуды и фазы помехи для того, чтобы ее вычесть, адаптивной фильтрацией. Метод адаптивной фильтрации применен в программах, приведенных на рис. 2.4 для одной спектральной компоненты и на рис. 2.5 для ряда компонент. Принципиально иной способ фильтрации, который мы назовем просто фильтрацией, основан на использовании классических линейных фильтров. В них производится умножение спектра сигнала на некоторый частотно зависимый множитель, называемый частотной характеристикой фильтра. Форма частотной характеристики фильтра подбирается лишь на основе частотного спектра помехи без учета амплитуды и фазы помехи. Метод темного поля основан именно на такой фильтрации. Покажем, что такой способ фильтрации в некоторых случаях приводит к лучшим результатам по сравнению с методом адаптивной фильтрации. Здесь мы следуем результатам работы [8]. Метод фильтрации, с которым мы начинаем знакомство, при его создании назван методом темного поля. Название заимствовано из оптики, где давно существует метод темного поля. Этот оптический метод натолкнул автора на создание аналогичного численного метода фильтрации. Суть этого метода такова: спектр помехи расширяется так, что равномерно "растекается" по всем отсчетным точкам. После этого спектр монохроматической помехи занимает всего две отсчетные точки. Если в этих точках положить сигнал равным нулю, то монохроматическая помеха удаляется полностью, а узкополосная становится пропорциональной ширине полосы частот.

Теперь перечислим операции, совершаемые с сигналом в этом методе. Первая операция – это фильтрация сигнала фильтром, частотная характеристика которого согласована с формой спектра гармонического сигнала. Для этого совершается спектральный анализ с последующим умножением спектра на частотную характеристику фильтра. После этого совершается обратное преобразование Фурье. Затем осуществляется вторая фильтрация. Здесь ситуация аналогична кепстральному анализу; там дважды берется спектр сигнала, и на этом основании введена специальная терминология. Это следовало бы сделать и при описании метода темного поля, в котором операция фильтрации осуществляется дважды, однако вторая фильтрация не повторяет первую. При второй фильтрации на частотную характеристику фильтра, которая является общей для любых сигналов, умножается не спектр первоначального сигнала, а результат восстановления этого спектра после первого фильтра. Если целью фильтрации является получение реализации сигнала с ослабленной помехой, то эта операция оказывается заключительной. Если целью является (как в нашем случае) получение спектра сигнала с ослабленной помехой, то следует сделать еще одно преобразование Фурье. Это все.

Теперь познакомимся с тем, что представляют собою фильтры, почему они действуют столь эффективно и зачем применяется целый каскад операций.

Чтобы все это разъяснить, нам нужна формула, показывающая, как численно представляется спектр гармонического сигнала. Формулу получим, применив операцию преобразования Фурье к сигналу, определяемому выражением (2.1.1). Результат будет следующим:

$$G(\omega) = \exp \left[ i(b - \omega) \frac{M-1}{2} \right] \frac{\sin \left[ \frac{M}{2}(b - \omega) \right]}{\sin \left( \frac{b - \omega}{2} \right)}. \quad (2.2.1)$$

Здесь учтено, что длина всего массива  $L$ , а внутри этого массива функция (2.1.1) занимает всего  $M$  точек, а остальные точки общего массива представляют собою нули. Это сделано, чтобы были видны промежуточные точки спектра, как если бы проводилось настоящее интегрирование, а не суммирование. Полностью перейти к интегрированию нельзя, так как массив точек дискретен, что учтено в форме спектра, в знаменателе которого не аргумент (что было бы при непрерывном заполнении всего массива точками), а синус аргумента.

В соответствии с формулой (2.2.1) определяется частотная характеристика первого фильтра. Если  $b$  – это частота помехи, то частотная характеристика первого фильтра запишется следующим образом:

$$Z(\omega) = \exp\left[-i(b-\omega)\frac{M-1}{2}\right] \sin\left(\frac{b-\omega}{2}\right). \quad (2.2.2)$$

В результате умножения (2.2.1) на (2.2.2) останется только чистый синус от целочисленного аргумента, значение которого не зависит от помехи, а определяется только протяженностью задания функции. В результате следующей операции обратного преобразования Фурье получим спектр синуса от целочисленного аргумента (при четном  $M$ ). Это будут две спектральные линии, частоты которых зависят только от  $M$ . При второй фильтрации фильтр настраивается на вырезание именно этих спектральных компонент. В результате от помехи не остается ничего. А если помеха не монохроматическая, а имеет в своем составе несколько спектральных компонент? Пользуясь линейностью задачи, для которой справедливо свойство суперпозиции, рассмотрим эту ситуацию на примере всего одной компоненты, весьма близкой к  $b$ . Представим себе, что в выражении (2.2.1) вместо  $b$  стоит  $c$ , а в (2.2.2) по-прежнему стоит  $b$ . Ограничимся случаем такого частотного диапазона, когда можно в (2.2.1) синус в знаменателе заменить его аргументом. Такое же приближение рассмотрим и в (2.2.2). В этом случае с помощью тождества  $b-\omega = b-c+c-\omega$  получим

$$G(\omega)Z(\omega) = \exp\left[i(b-c)\frac{M-1}{2}\right] \left[ \sin\left[\frac{M}{2}(c-\omega)\right] + \frac{(b-c)}{2} \frac{\sin\left[\frac{M}{2}(c-\omega)\right]}{\frac{c-\omega}{2}} \right]. \quad (2.2.3)$$

Что можно получить, применив обратное преобразование Фурье к выражению (2.2.3)? Экспоненциальный множитель останется прежним. Первый член в квадратных скобках даст тот же спектр, что и помеха, присоединится к ней и уберется полностью вторым фильтром. Последний член в квадратных скобках представляет собою спектр сигнала, ослабленный множителем:

$$R = \frac{b-c}{2}, \quad (2.2.4)$$

который по условию мал. Этот член восстановится в первоначальном виде, а при последующем преобразовании Фурье даст свой спектр, ослабленный множителем (2.2.4). Наличие этого множителя очень важно, так как именно он ослабляет спектральные компоненты помехи, близкие к ее основной частоте.

Теперь легко себе представить, что будет с сигналом, если он близок по частоте к помехе (сигнал при этом ослабится множителем (2.2.4)) и если он далек от нее. В последнем случае синус близок к единице, поэтому никакой фильтрации нет, а есть ряд последовательно выполняемых преобразований Фурье, не влияющих на спектр сигнала.

Все это проиллюстрировано рис. 2.7 и 2.8. На рис. 2.7 обращено внимание на суть преобразований, поэтому в качестве исходных сигналов взяты синусоидальные

## Mathcad Plus 6.0

<b>Массивы данных</b>	<b>Диапазонные переменные</b>	<b>Частоты</b>	
$L = 512 \cdot 1 \quad M = 64$	$k = 0..L - 1$	$x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k$	$n = 0..M - 1 \quad f_1 = 20.0 \quad f_2 = 25.0$
<b>Анализируемая функция (АФ)</b>		$f_3 = L - f_2 \cdot \frac{L}{M}$	
$A_n = \exp\left(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{M} \cdot f_1\right) \cdot 1 + \exp\left(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{M} \cdot f_2\right) \cdot 0.002$			
<b>Дополнение функции нулями</b>		<b>Спектр</b>	
$P_k = \text{if}(k < M, A_k, 0)$		$G = \text{cfft}(P)$	$GM_k =  G_k $
<b>Определение максимума спектра</b>			$G1_k = \frac{G_k}{\max(GM)}$
$xm_k = k \cdot \Phi(GM_k - \max(GM))$		$dd = \max(xm)$	$dd = 352.000$
<b>Частотная характеристика фильтра</b>		<b>Корректирующее звено фильтра (КЗФ)</b>	
$t_k = \sin\left[2 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5 \cdot (k - dd)}{L}\right]$		$ww_k = \exp\left[i \cdot 2 \cdot \pi \cdot (M - 1) \cdot \frac{k - dd}{2 \cdot L}\right]$	
<b>Фильтрация с КЗФ</b>		<b>Выход фильтра</b>	
$GG_k = G_k \cdot t_k \cdot ww_k$		$V = \text{icfft}(GG)$	
<b>Вторая фильтрация</b>		$V1_k =  V_k $	$UE = \max(V1)$
$O(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } V1_x > 0.3 \cdot UE \\ V_x & \text{otherwise} \end{cases}$		<b>Результирующий спектр</b>	
<b>Нормировка спектра</b>		$ff = \text{cfft}(FV)$	
$FV_k = \frac{O(k)}{ t_{dd} - t_{f3} }$		$ t_{ dd - f3}  = 0.942$	
$Rf_k = \frac{ff_k}{\max(GM)}$		$f_3 = 312.000$	$dd - f_3 = 40.000$

Спектр АФ (сплошная линия) и частотная характеристика фильтра (пунктир)

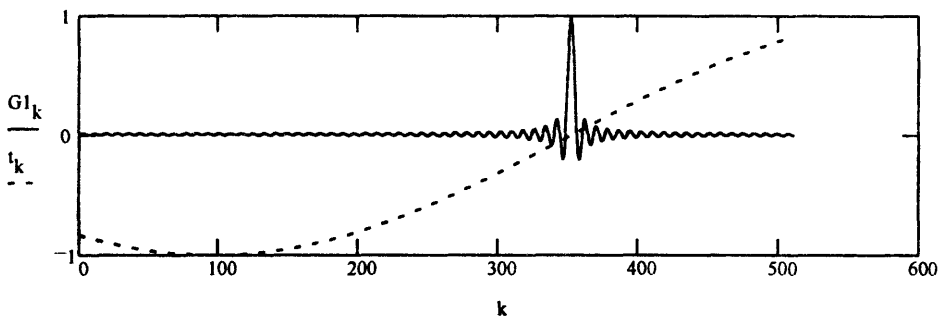
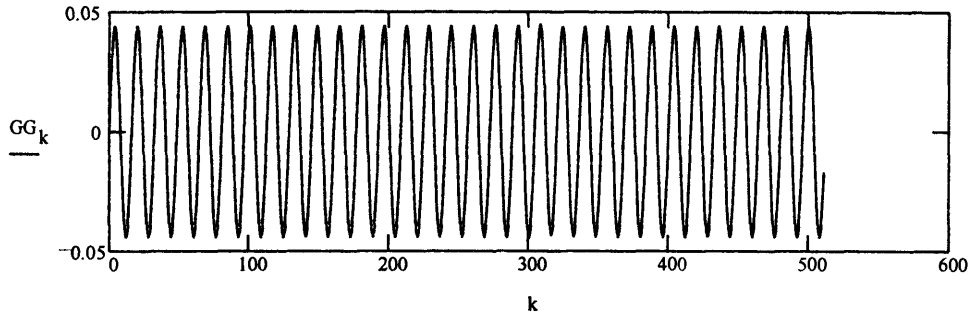


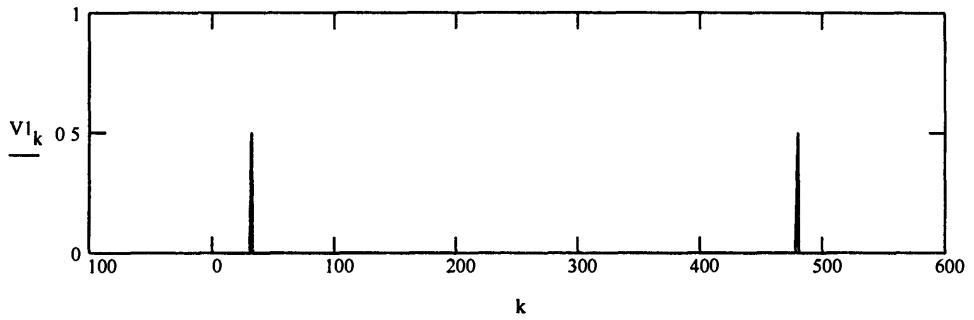
Рис. 2.7. Суть метода темного поля (начало)



Первая фильтрация с КЗФ



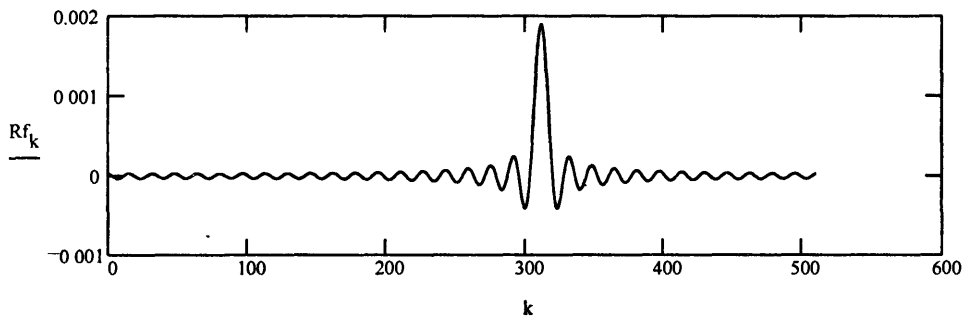
Модуль выхода фильтра



$Rf_{312} = 0.002 \ 0.000i$

Результирующий спектр

$f3 = 312.000$



Окончание рис. 2.7

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных      Диапазонные переменные

$$L = 256 \cdot 8 \quad M = 256 \quad k = 0..L - 1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1 \quad n = 0..M - 1$$

$$h = 0.5 \cdot L + 240$$

$$D = 3$$

$$x_n = 2 \cdot \frac{\pi}{M} \cdot n$$

$$nn = 0..0.5 \cdot M - 1 \quad p = 7$$

$$GT_k = \exp \left[ \frac{(|k - h|)^2}{D} \right]$$

$$Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$$

$$GT1_{kk} = GT_{0.5 \cdot L + kk}$$

$$GT1_{0.5 \cdot L + kk} = GT_{kk}$$

$$Q1 = \text{norm}(L, 0, 1)$$

$$Q = \text{norm}(L, 0, 1)$$

$$Q2_k = Q_k + i \cdot Q1_k$$

$$MQ = \text{cfft}(Q2)$$

$$S_k = MQ_k \cdot GT1_k$$

Аддитивный шум

$$AA = \text{icfft}(S)$$

Анализируемая функция (АФ)

$$N_n = 10^4 \cdot Q2_n$$

$$A_n = \overline{AA_n} + 2 \cdot 10^4 \cdot \exp(i \cdot x_n \cdot 15.8) + N_n$$

Дополнение функции нулями

Спектр

Модуль спектра

$$P_k = \text{if}(k < M, A_k, 0)$$

$$G = \text{cfft}(P)$$

$$GM_k = |G_k|$$

Определение максимума спектра

$$xm_k = k \cdot \Phi(GM_k - \max(GM))$$

$$dd = \max(xm)$$

$$dd = 1.807 \cdot 10^3$$

Частотная характеристика фильтра

Корректирующее звено фильтра (КЗФ)

$$t_k = \sin \left[ 2 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5 \cdot (k - dd)}{L} \right]$$

$$ww_k = \exp \left[ i \cdot 2 \cdot \pi \cdot (M - 1) \cdot \frac{k - dd}{2 \cdot L} \right]$$

Фильтрация с КЗФ

Выход фильтра

$$GG_k = G_k \cdot t_k \cdot ww_k$$

$$V = \text{icfft}(GG)$$

Вторая фильтрация

$$V1_k = |V_k|$$

$$UE = \max(V1)$$

$$O(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } V1_x > 0.3 \cdot UE \\ V_x & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FV_k = O(k)$$

Результирующий спектр

$$ff = \text{cfft}(FV)$$

Нормировка спектра

$$ct_k = \text{if}(|t_{dd} - t_k| > 0.1, |t_{dd} - t_k|, 0.1)$$

$$B = \text{cfft}(A) \quad BB_n = |B_n|$$

$$Rf_k = \frac{ff_k}{\max(GM) \cdot ct_k}$$

$$Rfl_{kk} = Rf_{kk+0.5 \cdot L}$$

$$Rfl_{kk+0.5 \cdot L} = Rf_{kk}$$

$$B1_{nn} = B_{nn+0.5 \cdot M}$$

$$B1_{nn+0.5 \cdot M} = B_{nn}$$

Результирующий спектр

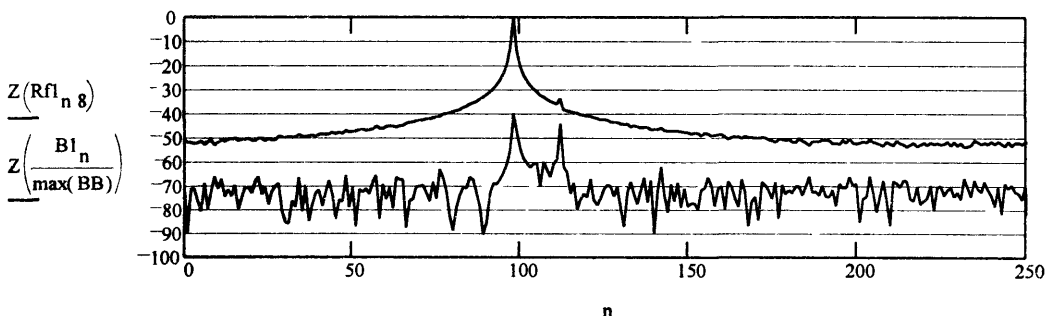


Рис. 2.8. Фильтрация помехи (рис. 2.5) методом темного поля

сигналы, для которых можно прогнозировать результат и сравнивать его с полученным в программе. На рис. 2.8 по той же программе (с теми же пояснениями) обработан сигнал, использованный в программе, приведенной на рис. 2.5. В программе, показанной на рис. 2.8, получен результат, показанный выше на рис. 2.6.

Теперь расскажем, что общего у приведенной выше программы с оптическим методом темного поля. В оптике метод темного поля используется при обнаружении слабого рассеянного излучения, рассеянного вперед, в поле мощного источника подсветки. Источник подсветки фокусируется в малую область пространства, которая перекрывается непрозрачным экраном. Рассеянное излучение фокусируется в другой плоскости, а в месте нахождения экрана пучок света от рассеивателя широкий и почти полностью проходит мимо экрана. В результате получается возможным сфокусировать рассеиватель в плоскости, расположенной за экраном, куда свет от мощного источника почти не попадает. Получается изображение рассеивателя на затемненном поле. В нашем методе роль фокусировки играет преобразование Фурье от синусоиды с целочисленным аргументом, в которую превращается помеха. Вторая фильтрация эквивалентна постановке непрозрачного экрана в месте фокусировки помехи. Эта аналогия дала возможность построить столь сложный многоступенчатый процесс фильтрации.

Метод разрабатывался с целью обеспечения приема слабых рассеянных акустических сигналов на просвет. Схема акустического опыта примерно повторяет схему оптического метода темного поля. Сигнал мощного излучателя освещает область расположения рассеивателей. Схема такого опыта показана на рис. 2.9.

Под каким углом относительно направления излучения выгоднее всего наблюдать рассеянное излучение? Ответ на этот вопрос зависит от свойств рассеивателей. Для малых рассеивателей, размеры которых много меньше длины волны, интенсивность рассеяния не зависит от угла наблюдения. В неоднородностях, поперечные размеры которых много больше длины волны, наибольшее рассеяние наблюдается в направлении, совпадающем с на-

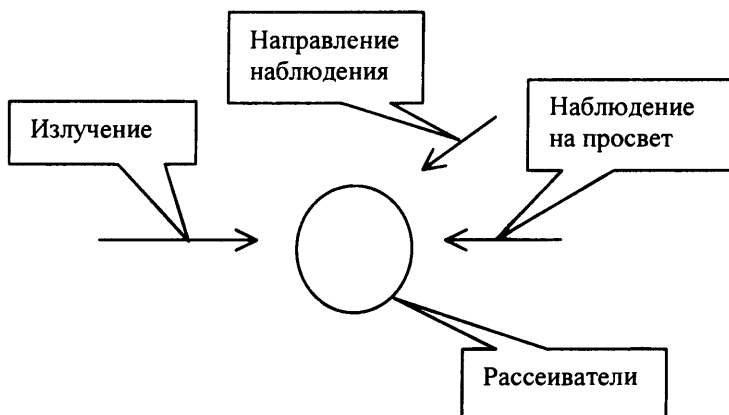


Рис. 2.9. Схема наблюдения рассеивателей

правлением излучения, – возбуждающее рассеяние. Учитывая только это обстоятельство, выгоднее всего наблюдать рассеянное излучение в направлении, отмеченном на рис. 2.9 как наблюдение на просвет. Однако такому наблюдению слабого рассеянного излучения мешает поле мощного излучателя, которое светит в эту же сторону.

Однако прямое поле излучателя может иметь узкий пространственный спектр, в то время как рассеянное излучение обладает широким угловым спектром. Получается только что рассмотренная задача по отделению узкополосной помехи (прямое поле излучателя) от слабого сигнала иной, но весьма близкой пространственной частоты. В акустике такая задача особо актуальна, так как таким путем можно обнаруживать большие плавные неоднородности, которые рассеивают волны исключительно вперед.

В то время, о котором идет речь (начало 90-х годов), существовал мощнейший метод устранения узкополосной помехи в пространственных спектрах – это метод так

называемых адаптивных антенн. Метод работает по тому же принципу адаптивной фильтрации, основы которого излагались выше. В радиодиапазоне с помощью этого метода удавалось практически ослабить помеху с достаточно узким пространственным спектром на 90–100 дБ. Было решено применить этот метод к акустике для создания метода акустической локации на просвет.

Однако прежде чем ставить эксперимент, было решено посмотреть, что этот метод может дать в акустике. Результат был неожиданным и неутешительным. В случае однородной акустической среды результат был вполне обнадеживающим, но стоило учесть влияние неоднородностей, как все становилось настолько резко хуже, что ни о каком эксперименте нечего было и думать. Неоднородности среды задавались численно на основе книг, в которых изложены основы распространения волн в средах, содержащих случайные неоднородности. Достаточно было чуточку "размыть" пространственный спектр излучения, возбуждающего рассеяние, как помеха возрастала на десятки децибелл, существенно превосходя ожидаемое рассеянное поле. Для этого было вполне достаточно такого "размытия" пространственного спектра излучения, которое еще нельзя было заметить по отклику на него антенной решетки, которая использовалась в расчетах.

На акустической локации на просвет был поставлен "крест". Тогда был придуман метод подавления узкополосной помехи, который получил название метода темного поля. Этот метод легко справлялся со всеми помехами, взятыми из литературы, обеспечивая достаточную помехозащищенность для локации на просвет. Это послужило основанием для постановки эксперимента [9].

Эксперимент был осуществлен по схеме рис. 2.6, но без рассеивателя. Роль рассеивателя выполнял специальный излучатель, частота излучения которого была чуточку смещена относительно частоты мощного прямого сигнала. При обработке эксперимента сигнал второго излучателя можно было полностью отфильтровать, а затем подмешивать к прямому сигналу в любой пропорции. При обработке результатов эксперимента применялись самые современные и лучшие адаптивные методы, метод темного поля и комбинации адаптивных методов с методом темного поля. Благодаря уникальности методов обработки статья [9] была опубликована в одном из самых престижных мировых журналов по методам обработки сигналов.

Сами результаты были неутешительны. Сигнал слабого излучателя выделялся на фоне прямого сигнала только тогда, когда его уровень был больше минус 20–30 дБ от прямого сигнала. Однако эксперимент был поставлен, его итоги объяснены [10, 11]. В результате был создан метод [12], позволяющий принимать рассеянные сигналы на просвет на уровне порядка минус 50–60 дБ от прямого сигнала в реальном эксперименте, поставленном в более жестких условиях, чем предыдущий. Изложению результатов [12] посвящен следующий раздел.

### 2.3. Эксперимент по наблюдению точечного рассеивателя

Эксперимент, в котором эффективно устранялась помеха, ставился по схеме локации на просвет. Эксперимент проводился на одном из живописнейших озер Владимирской области – озере Санхар. Размеры озера и его глубина позволяли иметь акустическую трассу длиной порядка 300 м при глубине водоема около 20 м. Подробнее о том, что представляла собою трасса, каковы ее акустические характеристики и какое применялось оборудование, сказано в работах [13, 14].

В акустику можно перенести оптический метод темного поля [15]. Для этого нужны акустические антенны большого размера – так называемые фокусируемые ан-

тенны [15]. На низких частотах, на которых возможно исследование океанических неоднородностей, фокусируемая антенна представляет собою гигантское, "циклопическое" сооружение. Несмотря на гарантированный и выверенный в оптике успех такого сооружения, строительство таких антенн, судя по литературе, нигде не планируется.

Выше уже описывался акустический метод фильтрации сильного узкополосного сигнала, названного нами методом темного поля, поскольку он, в принципе, позволяет решить те же задачи. С его помощью можно затемнить поле мощного достаточно узкополосного источника и наблюдать малые возмущения среды на фоне сигнала от этого источника [12]. Для реализации этого метода достаточно малой антенны, фокусируемая антенна больших размеров не требуется. Размер антенны должен обеспечивать требуемое угловое разрешение наблюдаемых неоднородностей. Однако этот метод эффективно работает, когда существуют лишь большие объемные неоднородности, создающие малоугловые пространственные возмущения поля. Большую роль в условиях мелкого моря играет рассеяние волн взволнованной поверхностью и неровностями дна моря. Такие структуры рассеивают падающее излучение в широком секторе углов.

Задача о рассеянии акустических волн в мелком море поверхностью и дном моря имеет наглядную оптическую аналогию. Она заключается в явлении синего цвета неба, не позволяющего нам видеть звезды днем. Флуктуации молекул воздуха рассеивают свет под такими же широкими углами, как и поверхность моря. В космосе, где рассеивателей почти нет, звезды видны и днем, так как наш зрительный аппарат в состоянии хорошо отфильтровать прямой солнечный свет. Днем же у поверхности земли это сделать не удается.

По той же причине в условиях мелкого моря становится почти бесполезным тот метод темного поля, который был изложен выше.

Здесь идет речь о модификации метода фильтрации сильного узкополосного сигнала. Описываемый модифицированный метод темного поля основан на использовании узкого спектра помехи во временной области. Такой фильтр может быть реализован различными методами. Мы остановились на использовании вычитания значений сигналов в точках отсчета его во времени, расположенных через некоторое дискретное расстояние  $h$ . Конкретно использовались два фильтра, в одном из которых  $h$  составило минимальное значение единицу, а в другом случае был использован фильтр с  $h = 8$  единиц. Эти фильтры позволили получить разные результаты при практически одинаковой помехозащищенности. Фильтр с малым временем дал возможность рассмотреть рассеивающую поверхность, на которой имеются точечные рассеиватели, а фильтр с большим временем позволил рассмотреть большую неоднородность. В этом разделе ограничимся случаем точечного рассеивателя, а наблюдение протяженного рассеивателя рассмотрим в следующей главе.

Описанный метод в натуральных условиях интенсивной реверберации позволил получить затемнение поля флуктуирующего прямого сигнала и сопутствующих ему помех по отношению к прямому полю излучателя, освещающего антенну, на 60 дБ. Заметим, что лучшие из существующих адаптивные методы оказались способными затемнить акустическое поле излучателя в условиях интенсивной реверберации не более чем на 30 дБ [9].

Суть метода покажем на конкретном примере. В акустический волновод поместим мощный излучатель монохроматического сигнала для освещения неоднородностей. Для наблюдения неоднородностей на некотором расстоянии от излучателя разместим акустическую антенну. Пусть это будет линейная горизонтальная антенна, состоящая из ряда эквидистантно расположенных приемных элементов (антенная ре-

шетка). У монохроматического колебания есть всего два параметра, которые могут изменяться от точки к точке и во времени, – это амплитуда и фаза. Оба параметра можно записать в виде одного комплексного числа, называемого комплексной амплитудой. Его модуль равен амплитуде колебания в акустическом поле, а аргумент – фазе [3]. Эксперимент проводился в два этапа. На первом велась запись значений комплексных амплитуд сигналов во всех 64 элементах акустической антенной решетки в течение некоторого интервала времени. На втором этапе производилась обработка зафиксированных на первом этапе акустических сигналов.

Первый этап включал следующие операции. Во-первых, сигналы, принимаемые каждым гидрофоном, фильтровались в полосе  $\pm 3$  Гц от каждой дискретной частоты, идущей от излучателя. Во-вторых, профильтрованные сигналы смешивались с сигналом излучаемой частоты, образуя при этом сигналы разностной частоты в двух квадратурных каналах [3]. В одном квадратурном канале сигнал представлял собою  $A \cos \varphi$ , а в другом  $A \sin \varphi$ , где  $A$  – амплитуда принимаемого сигнала, а  $\varphi$  – его фаза. Сигналы с обоих квадратурных каналов фиксировались в цифровом виде с помощью компьютера. Такая предварительная обработка сигналов позволяла получать запись сигналов с антенны в виде, эквивалентном комплексным амплитудам, рассматриваемым в [3], – запись полного поля или голограмму принимаемого акустического сигнала, позволяющую при последующей обработке получать те же результаты, что и при соответствующей обработке непосредственно принимаемого акустического поля.

Остановимся на зависимости сигналов от времени, так как именно она используется при фильтрации. Как уже было отмечено выше, излучался чисто монохроматический сигнал. Это не означает, что точно такой же сигнал будет принят приемным элементом антенны. Такой рассеиватель, каким является поверхность моря, не является неподвижным. Движение рассеивателя приводит к смещению частоты принимаемого сигнала в соответствии с эффектом Доплера. Так как сигнал принимается от множества рассеивателей, находящихся под разными углами к трассе распространения сигнала и по-разному двигающихся, то временная частота принимаемого сигнала будет размыта. Мы сохраняли эту информацию путем выбора частоты квантования записываемых сигналов. Чтобы при этом избежать неоднозначности при приеме колебаний, проводилась фильтрация с шириной полосы в 3 Гц (при несущей частоте порядка 3 кГц).

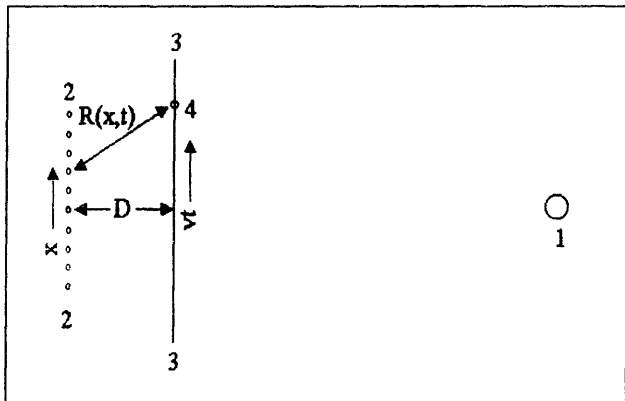


Рис. 2.10. Схема опыта: 1 – излучатель, 2–2 – линия расположения приемных элементов антенной решетки, 3–3 – линия перемещения рассеивателя.

получить калибровочный сигнал, необходимый для оценки величины наблюдаемых неоднородностей). Пусть между излучателем 1 и приемной антенной 2–2 по трассе 3–3 движется рассеиватель 4 с постоянной скоростью  $v$  (см. рис. 2.10). Найдем ком-

В качестве простейшей модели выберем наблюдение одиночного рассеивателя, освещаемого плоской волной, движущегося по прямолинейной траектории, как это показано на рис. 2.10. Объект, подлежащий наблюдению, являющийся рассеивателем, двигался в направлении поперек трассы, что приводило к смещению частоты. Найдем это смещение частоты исходя из параметров движения объекта. (Эта модель позволит нам не только показать действие преобразования, но и

плексную амплитуду рассеянного поля, излученного движущимся рассеивателем на каждом элементе приемной антенны. Введем следующие геометрические параметры:

- расстояние от рассеивателя до точки приема  $R(x, t)$ , где  $x$  – координата приемного элемента антенны (см. рис. 2.10);
- длину пути  $vt$ , пройденного рассеивателем при его движении вдоль траектории 3–3;
- дистанцию от траектории рассеивателя до антенны  $D$  (см. рис. 2.10).

В принятых обозначениях и предположениях получим

$$R(x, t) = \sqrt{D^2 + (vt - x)^2}, \quad (2.3.1)$$

где  $t$  – время.

Фаза сигнала, поступающего от рассеивателя в каждую точку приема, в результате изменения расстояния  $R(x, t)$  будет зависеть от времени как

$$\varphi(x, t) = \frac{2\pi}{\lambda} R(x, t), \quad (2.3.2)$$

где  $\lambda$  – длина волны.

Предположим, что излучатель расположен так далеко от антенны, что создаваемое им прямое поле имеет разность фаз между соседними элементами антенной решетки, не зависящую от номера антенного элемента (следствие того, что антенна не фокусируемая). Пусть эта фаза не зависит от времени (излучатель и антенна неподвижны) и для определенности равна нулю. Искомую комплексную амплитуду мы получим (с точностью до постоянной фазы и постоянного амплитудного множителя, не влияющих на алгоритм обработки) с помощью следующей формулы:

$$A(x, t) = \exp[i\varphi(x, t)] + A_0, \quad (2.3.3)$$

где  $A_0$  – прямое поле излучателя на антенне.

Выражение (2.3.3) представляет собою математическую модель сигнала, приходящего от точечного объекта рассеяния. Она может быть использована не только для пояснения ситуации, но и для математического моделирования объекта рассеяния. Из полученного выражения следует возможность фильтрации рассеянного сигнала, так как его спектр вследствие эффекта Доплера отличается от спектра прямого сигнала. Есть ли такая возможность в условиях натурного опыта и какова она, может дать ответ только эксперимент, в котором в качестве метода обработки применена фильтрация сигналов во времени.

Перейдем к обработке сигнала. На элементе антенны, имеющем номер  $k$  в дискретный момент времени  $n$ , комплексная амплитуда будет  $A_{k,n}$ . Алгоритм фильтрации поля включает выполнение следующих действий с комплексными амплитудами поля, принимаемыми отдельными приемными элементами антенной решетки:

$$S_{k,n} = \ln \left( \frac{|A_{k,n+h}|}{|A_{k,n}|} \right) + i \left( \arg(A_{k,n+h}) - \arg(A_{k,n}) \right), \quad (2.3.4)$$

где  $h$  – целое число, являющееся параметром фильтра.

Действие преобразования (2.3.4) сначала покажем на чистой математической модели (2.3.3), которая позволит нам не только показать действие преобразования (2.3.4), но и получить калибровочный сигнал, необходимый для оценки величины наблюдаемых движущихся рассеивателей.

На рис. 2.11, *a* показан результат наблюдения движущегося рассеивателя с помощью антенны без использования временной фильтрации. В данном случае это удалось, так как никаких посторонних рассеивателей или никакой реверберации нет. Обработка сигнала состоит в следующем. Функция  $A(x, t)$ , определяемая (2.3.3), подвергается спектральному анализу только по координате  $x$  (вдоль линии расположения антенны), оставаясь при этом функцией времени  $t$  [3]. На рис. 2.11, *a* по горизонтали отложен пространственный спектр функции  $A(x, t)$  по координате  $x$ . Связь между значениями пространственной частоты  $U$ , являющейся аргументом графика, и углом  $\theta$ , по которому сканируется зона наблюдения антенной решеткой, следующая [3]:

$$U = U_{\max} \frac{\lambda}{2d} \sin \theta, \quad (2.3.5)$$

где  $U_{\max}$  – максимальное значение пространственной частоты, равное половине общего числа точек спектрального разложения Фурье;  $d$  – расстояние между приемными элементами антенной решетки. При моделировании предполагалось, что  $2d = \lambda$ . Интервал пространственных частот, показанный на графиках, простирается в пределах  $\pm U_{\max}$ .

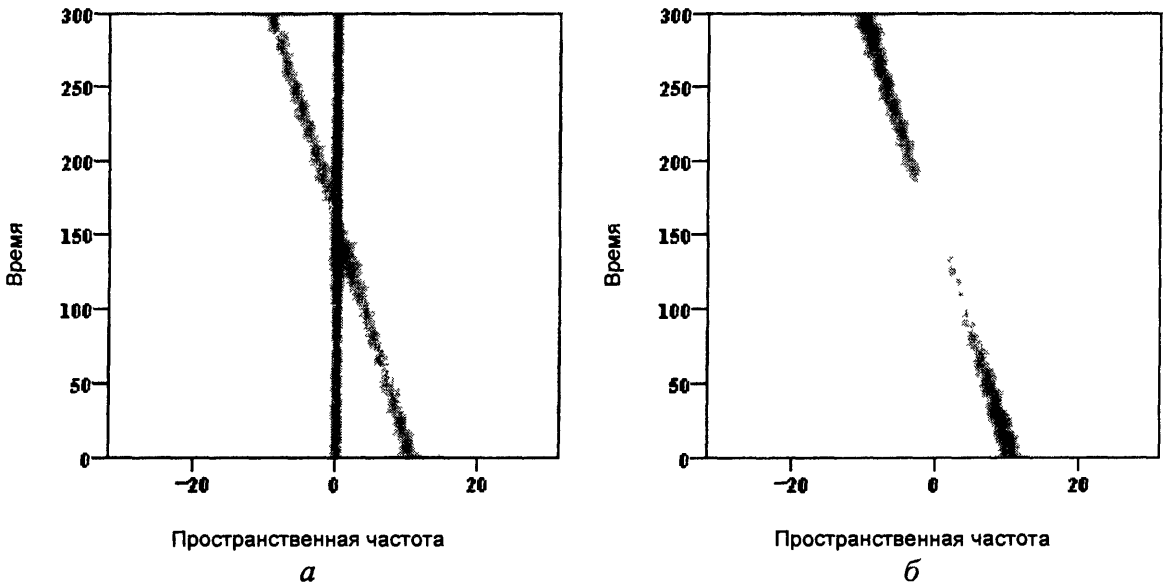


Рис. 2.11. Движение рассеивателя на плоскости "время и пространственная частота" (*a*) с применением темного поля (*б*).

На рис. 2.11, *a* в виде вертикальной линии в центре (при  $\theta = 0$ ) виден излучатель. Имитируемый рассеиватель отображен наклонной линией, так как согласно (2.3.3) направление на рассеиватель изменяется примерно пропорционально времени.

На рис. 2.11, *б* показан результат точно такой же обработки сигнала с применением фильтра с параметром  $h = 1$ , но только не для сигнала  $A(x, t)$ , а для сигнала  $S(x, t)$ , прошедшего дополнительную обработку по формуле (2.3.4). В результате сигнал излучателя не виден (поле затемнено), сигнал рассеивателя наблюдается под теми же углами, что и на рисунке *a* с интенсивностью, зависящей от величины его доплеровского смещения частоты в соответствующий момент времени и частотной характеристики фильтра.

Предлагаемый нами алгоритм обработки сигнала содержит нелинейную операцию – логарифмирование. Это дань кепстральному анализу. Логарифмирование –



единственное математическое преобразование, позволяющее свести мультипликативную помеху к аддитивной и в таком виде фильтровать ее. Здесь это обстоятельство не имеет особого значения, так как в (2.3.4) логарифм очень хорошо линеаризуется.

На рис. 2.12 показана математическая программа, приводящая к получению рис. 2.11. Верхняя строчка программы представляет массив данных и диапазонные переменные. Переменная  $k$  – пространственная. Единица составляет половину длины волны. Переменная  $n$  – время. Единица равна одной секунде. Далее следует программа, моделирующая движение точечного рассеивателя. Расстояние  $z$  указано в метрах. Длина волны – тоже в метрах. Для разности хода лучей определена специальная функция, в которой параметру  $u$  можно придавать любое значение, зависящее от пространства и времени. По сути дела,  $C(u)$  выражает теорему Пифагора, в которой один из катетов – это  $u$ , а другой катет – это  $z$ . Скорость  $VO$  – это скорость (в метрах в секунду) перемещения рассеивателя вдоль его траектории. На следующей строчке программы определено  $y(k, n)$  – изменение в пространстве (вдоль антенны) и во времени разности хода лучей, прямого и рассеянного. Определен временной интервал  $ts$  в точках отсчета по времени.

Следом идет выражение для комплексной амплитуды волнового поля, принимаемого каждым элементом антенной решетки во времени. (Это формула (2.3.3)). Далее программа разветвляется на две части: та, что слева, приводит к рис. 2.11, а, та, что справа, ведет к рис. 2.11, б. Обе ветви программы почти совпадают, кроме небольших, но очень существенных отличий. Общее в этих программах – их финальная часть – это представление результата в виде трехмерной функции в переменных угол – время – амплитуда сигнала. Отличия состоят в алгоритмах фильтрации. Слева фильтрация только пространственная. Такой фильтр позволяет выделить сигнал рассеивателя только при отсутствии флуктуаций прямого сигнала. Слева показан фильтр, построенный по формуле (2.3.4), включающий не только пространственную, но и временную фильтрацию.

Описываемый эксперимент имел целью выяснение возможностей наблюдения природных факторов, под действием которых рассеивается акустическое поле. Сначала опишем ту часть эксперимента, в которой в поле зрения антенны не перемещались никакие предметы, а работали только излучатель и приемная антенна. Поэтому для определения силы цели рассеянных сигналов, к сигналу, считываемому с антенны, при его обработке добавлялся сигнал, имитирующий поле точечного рассеивателя, перемещающегося поперек трассы распространения акустического сигнала. Имитация сигнала движущегося рассеивателя производилась путем добавления к сигналу, принимаемому антенной, его же (при этом пренебрегаем рассеянным полем, так как оно мало по сравнению с прямым полем излучателя, и считаем, что прибавляем только прямое поле) с внесенными в него следующими изменениями. Сигнал был ослаблен на известное число децибел (например, 40 дБ) и умножен на функцию вида (2.3.3) без постоянной составляющей. Тем самым в сигнал, в котором доминирует прямое поле излучателя, вводится доплеровское смещение частоты, пропорциональное пространственной частоте (угловому смещению). Благодаря этой операции прямое поле излучателя в добавленном ослабленном сигнале, получив доплеровское и угловое смещения, играет роль движущегося рассеивателя. Его уровень по отношению к излучателю известен. Используемый нами метод моделирования движущегося рассеивателя позволяет получить его математическую модель, обладающую известными параметрами и таким уровнем флуктуаций уровня и фазы, которым обладает прямое поле излучателя в условиях проводимого эксперимента.

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных и диапазонные переменные

$$L = 64 \quad E = 300 \quad k = 0..L - 1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1 \quad n = 0..E - 1$$

Моделирование движения точечного рассеивателя

Расстояние	Длина волны	Разность хода лучей	Скорость
$z = 300$	$\lambda = 0.75$	$C(u) = \sqrt{(z^2 + u^2)} - z$	$VO = 0.68$

Постоянная величина

Расстояние между рассеивателем и каждым антенным элементом в любой момент времени

$$EA = 10$$

Временной

интервал

$$ts = 1$$

$$y_{k,n} = C((k - 0.5 \cdot L) \cdot 0.5 \cdot \lambda + (n - 0.5 \cdot E) \cdot VO)$$

Сигнал, принимаемый каждым антенным элементом

Расширение  
области значений

$$A_{L,n} - A_{L-1,n}$$

$$A_{k,n} = \exp\left(i \cdot y_{k,n} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \pi\right) + EA$$

Формирование картины угол - время

Пространственный фильтр

$$G^{<n>} = \text{cfft}(A^{<n>})$$

Фильтрация

$$\text{fltr}_k = \Phi(k - 1) + 0.2$$

Антенна темного поля во временной области

$$M_{k,n} = |G_{k,n}| \cdot \text{fltr}_k$$

$$B_{k,n} = \left(1 - \frac{|A_{k,n}| \cdot |A_{k+1,n}|}{|A_{k,n}| \cdot |A_{k+1,n}|}\right) + \ln\left(\frac{|A_{k+1,n}|}{|A_{k,n}|}\right)$$

Преобразование координат

$$M1_{kk,n} = M_{0.5L+kk,n}$$

Формирование картины угол - время

$$M1_{0.5L+kk,n} = M_{kk,n}$$

$$GB^{<n>} = \text{cfft}(B^{<n>})$$

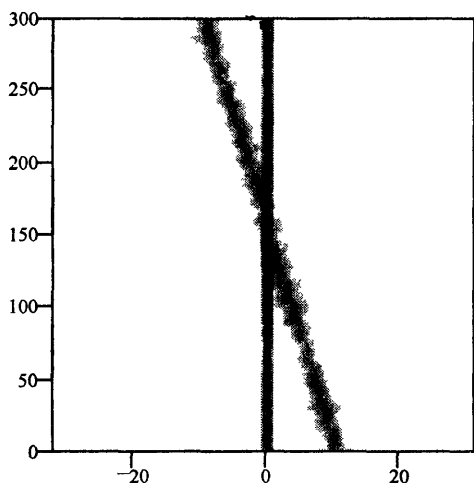
Преобразование координат

$$MB_{kk,n} = |GB_{0.5L+kk,n}| \quad MB_{0.5L+kk,n} = |GB_{kk,n}|$$

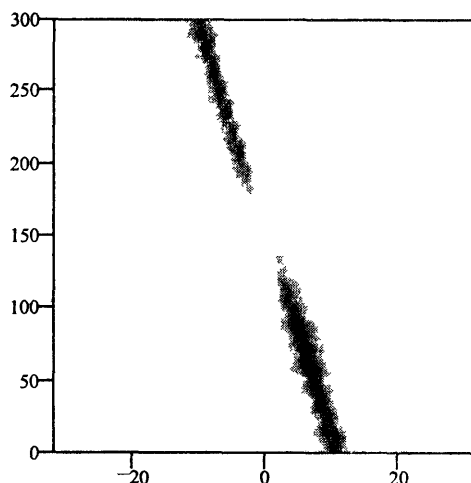
Формирование негативных изображений

$$Q = \max(M1) \quad N_{k,n} = Q - M1_{k,n}$$

$$QB = \max(MB) \quad N1_{k,n} = QB - MB_{k,n}$$



N



N1

Рис. 2.12. Фильтрация в антенной решетке

Конкретизируем задачу эксперимента посредством привлечения рис. 2.13. На нем показан временной спектр акустических сигналов, принятых отдельными гидрофонами антенны. Эти спектры имеют вид, очень похожий на спектры, приведенные в монографии [16, стр. 214]. На спектре виден максимум при нулевой частоте. На эту частоту было смещено поле излучателя. Частоты выше частоты излучателя на графике положительные, а отрицательные частоты – это те, которые лежат ниже частоты излучателя. В спектре видны еще максимумы на частотах около  $\pm 2$  Гц. Такие максимумы спектра акустических сигналов, распространяющихся в море, объясняются рассеянием волн при поверхностном волнении, модулирующем сигнал и тем самым смещающем его спектр [16]. В книге [16] рассматривается метод диагностики состояния морской поверхности на основе таких спектров. Конкретная задача настоящего эксперимента состояла в том, чтобы попытаться с помощью антенны увидеть те поверхностные волны, которые модулируют сигнал излучателя.

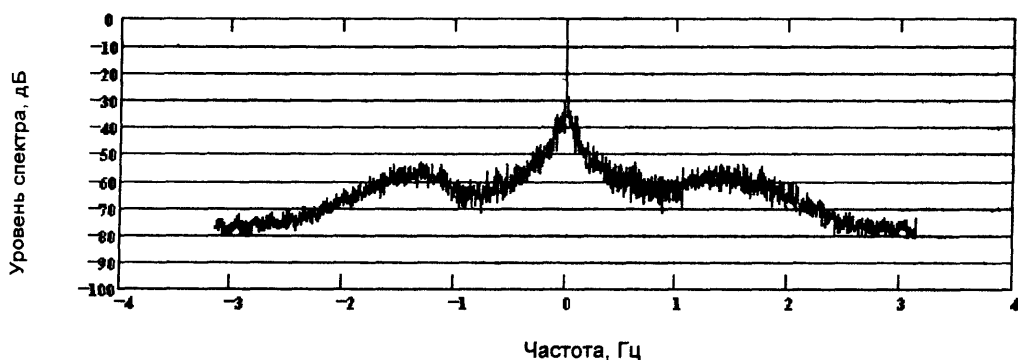


Рис. 2.13. Временной спектр сигнала в элементах антенной решетки, усредненный по всем элементам.

На рис. 2.14 показаны результаты обработки сигнала, принятого антенной решеткой. Чтобы на рисунках было меньше черного, показаны негативы, в которых черное поле соответствует максимальному сигналу, а белое – минимальному. Обработка заключалась в получении пространственных спектров вдоль линии расположения приемных гидрофонов антенны. Сигналы, показанные на рис. 2.14 (*a-z*), обрабатывались дополнительно. Осуществлялось затемнение поля антенны по формуле (2.3.4) и дополнительная фильтрация сигналов во времени.

На рис. 2.14, *a* сигнал, принятый антенной, обрабатывался во всей полосе временных частот, показанной на рис. 2.13. На рис. 2.14, *б* показан результат обработки профильтрованного сигнала с исключением обеих боковых частот, отстоящих от несущей частоты по абсолютной величине более чем на 1 Гц, тем самым были существенно подавлены сигналы, вызванные рассеянием на ветровом волнении. Таким образом, сравнивая рисунки *a* и *б*, можно видеть вклад рассеяния поверхностью водоема в совокупный рассеянный сигнал. Например, на рисунке *a* излучатель виден в виде интенсивной линии, а на рисунке *б* он едва заметен, т. е. антенна видит отражение излучателя на поверхности водоема так, как мы привыкли видеть "лунную" или "солнечную" дорожку на взволнованной водной поверхности. На рис. 2.14, *a* видно угловое распределение уровня сигнала, рассеиваемого поверхностью. Волны, рассеиваемые взволнованной поверхностью водоема, уверенно наблюдаются. Видно, что при наблюдении с затемненным полем рассеяние поверхностью составляет заметную долю рассеянного сигнала. Это ясно видно по различию заметности наклонной линии, являющейся результатом добавления сигнала, имитирующего рассеиватель. На рисун-

как *a* и *б* заметность имитированного сигнала существенно различается, хотя его уровень на этих двух рисунках одинаков.

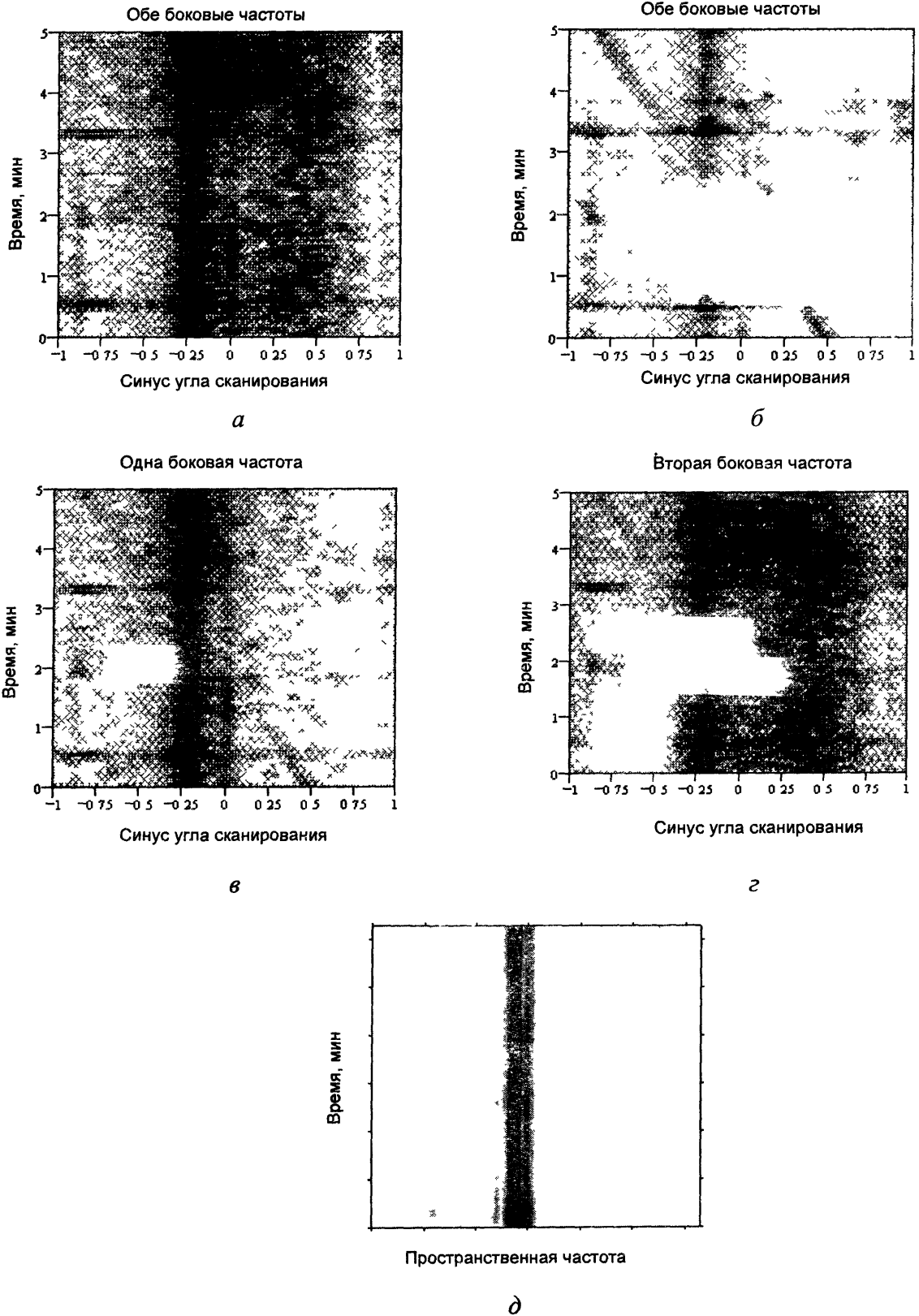


Рис. 2.14. Сигнал в зависимости от угла сканирования и времени в полосе частот от  $-3$  до  $+3$  Гц (*a*), в полосе частот от  $-0,8$  до  $+0,8$  Гц (*б*), от  $-0,8$  до  $+3$  Гц (*в*), от  $-3$  до  $+0,8$  Гц (*г*) и без темного поля (*д*).

На рис. 2.14, *в* и 2.14, *г* приведены результаты, полученные при исключении лишь одной из боковых частот – нижней (*в*) или верхней (*г*). На этих рисунках видны волны, рассеянные поверхностью либо только с увеличением частоты Доплера, либо только с ее уменьшением. Анализ пространственного распределения рассеяния акустического сигнала на ветровом волнении с учетом знака эффекта Доплера в этом опыте был проведен впервые.

На рис. 2.14, *д* показан результат обработки того же сигнала, обработанного без использования формулы (2.3.4), создающей темное поле. В сигнале, показанном на рис. 2.14, *д*, тоже имитировался рассеиватель, имеющий по отношению к излучателю на 10 дБ более высокий уровень. Однако его еще не видно. Чтобы сделать имитируемый сигнал заметным, надо увеличить его уровень еще на 10 дБ. Фильтрация доплеровских составляющих также не оказывает влияния на вид рисунка *д*, т. е. на фоне реверберации локализовать очаги рассеяния сигнала на ветровом волнении без затемнения поля антенны не удастся.

Рисунки 2.14 носят качественный характер, на них отчетливо видны временные изменения сигналов. По таким яркостным картинкам трудно судить о количественной стороне показанных результатов. Количественная сторона явления показана с помощью рис. 2.15, на котором изображены значения модуля отклика антенны, показанные на рис. 2.14, относящиеся к одному моменту времени. Как видно из рис. 2.15, метод темного поля без дополнительной фильтрации позволяет достичь эффективности порядка 60 дБ, а последующая временная фильтрация дает еще около 10 дБ дополнительно. Это весьма существенно!



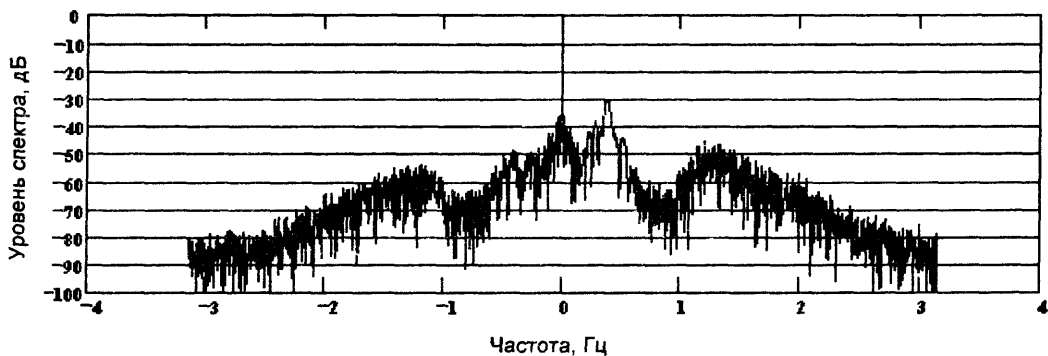
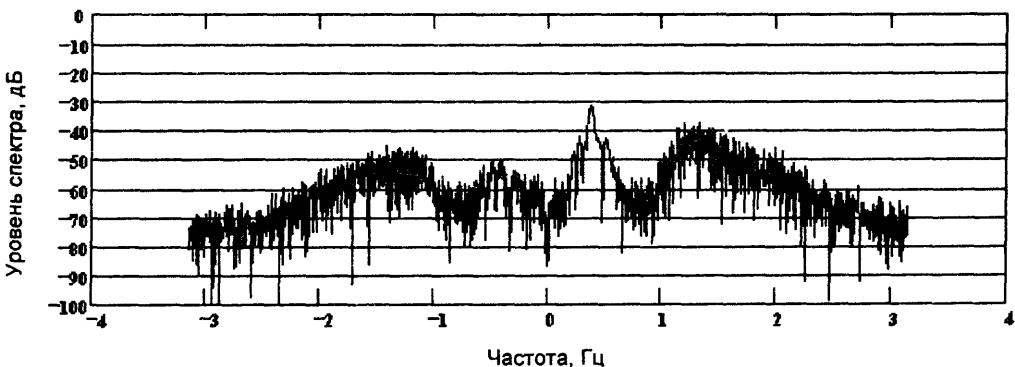
Рис. 2.15. Акустическое темное поле (натурный эксперимент на озере Санхар).

На рис. 2.15 виден отклик антенны на сигнал, имитирующий рассеиватель, – это максимальный отклик на жирной линии (временной срез рис. 2.14, *б*) под углом порядка  $-40$  градусов. Его уровень составляет примерно  $-57$  дБ по отношению к сигналу излучателя, в то время как он задавался  $-40$  дБ относительно этого уровня. Разница

объясняется тем, что моделируемый сигнал слишком медленно смещается, вследствие чего его доплеровское смещение даже при максимальном угле существенно ослабляется фильтром, затемняющим поле зрения антенны. По временному сечению рис. 2.14, *д*, показанному на рис. 2.15, видно, что реверберация в озере оказывает более существенное влияние на форму отклика антенны, чем при аналогичных экспериментах в море [6]. Это объясняется тем, что в море более ровное дно и совсем нет отражений от берегов, которые отчетливо видны на рис. 2.15 под углами, близкими к 90 градусам.

Эффективность фильтрации может быть показана также с помощью временных спектров сигналов с антенны, приведенных на рис. 2.16. На рис. 2.16, *а* приведен временной спектр сигнала на одной пространственной частоте без фильтрации. Пространственная частота (угол наблюдения) выбрана так, чтобы в нее попал имитируемый сигнал на своей максимальной доплеровской частоте. Его уровень на 20 дБ ниже уровня сигнала излучателя. На рисунке уровень этого сигнала ниже уровня излучателя на 30 дБ, хотя сигнал излучателя на этой пространственной частоте (этом значении угла) далеко не максимален. Это различие уровней связано с тем, что имитируемый сигнал присутствует на этой пространственной частоте лишь в немногих реализациях, а сигнал излучателя накапливается во всех 2048 временных реализациях когерентно, возрастая на 66 дБ.

На рис. 2.16, *б* показан спектр на той же пространственной частоте, но при использовании фильтрации. Здесь сигнал излучателя затемнен так, что и 66 дБ ему не помогают. Сравнение рисунков *а* и *б* позволяет судить об эффективности использования предлагаемого метода фильтрации в натуральных условиях.

*а**б*

**Рис. 2.16.** Временной спектр сигнала в элементах антенной решетки на одной пространственной частоте (*а*) и в темном поле (*б*).

Результаты эксперимента показывают, что с помощью предлагаемого метода акустического темного поля возможно наблюдение за структурой водной поверхности и ее изменениями. Можно локализовать области интенсивного поверхностного волнения, узнать скорости волн, направление ветра и другие параметры, а можно, убрав доплеровские частоты, связанные с поверхностным волнением, тем самым отфильтровать его. В этом случае появляется возможность следить за внутренними движущимися неоднородностями, течениями, видеть их так, как это позволяет применяемая антенная система. Появляется возможность поставить опыт в соответствии с расчетами рассеяния от взволнованной поверхности океана, выполненными, например, в работах [11, 17]. В связи с предлагаемой методикой измерения актуальными могут стать расчеты не только обратного рассеяния [18] от объектов, представляющих интерес, но и прямого рассеяния вперед, которое может быть существенно больше.

## УВЕЛИЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЛИ ВРЕМЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ

В этой главе рассмотрены методы, позволяющие повысить пространственное или временное разрешение сигналов на примере решения конкретных задач. Первая задача – об увеличении пространственного разрешения при акустической локации на просвет. Для решения применен синтез апертуры антенны за счет движения рассеивателя, затем рассмотрены методы увеличения временного разрешения сигналов при локации путем сжатия во времени узкополосного сигнала, что получается при использовании зондирующего сигнала, длительность которого составляет много интервалов временного квантования. В результате обработки, заключающейся в выравнивании амплитуд и фаз спектра сигнала, длительность зондирующего сигнала сокращается до одного интервала временного квантования. Условия и тонкости этого метода показаны на примере задачи, решенной с помощью математического моделирования. Рассмотрена помехоустойчивость такого метода сжатия зондирующего сигнала. В заключение главы рассмотрена задача, решенная как с помощью математического моделирования, так и экспериментально, – это задача о локации на просвет с отделением прямого и дифрагированного на цели сигналов по времени их прихода.

### 3.1. Наблюдение протяженного рассеивателя

В предыдущем разделе была сформулирована и решена задача о наблюдении точечного рассеивателя путем локации на просвет при непрерывном излучении. В этом разделе, написанном на основе [19], задачей является наблюдение протяженного рассеивателя. Основное отличие от предыдущего раздела заключается в математической модели сигнала. На основе этой модели построен метод обработки сигнала, позволяющий существенно увеличить пространственное разрешение.

Выше было показано, что в условиях эксперимента на озере удается подавить мультипликативную помеху, вызванную флуктуациями амплитуды и фазы сигнала излучателя, на 60 дБ [12]. В результате появилась принципиальная возможность не только выделить рассеянный сигнал, но и рассмотреть форму протяженного рассеивателя. Здесь предлагается дополнить предложенную выше методику фильтрации специальной обработкой выделенного рассеянного сигнала с целью определения размеров рассеивателя и оценки акустических параметров трассы. Основная особенность обработки сигнала, позволяющая решить поставленную задачу, состоит в таком фазировании протяженной акустической антенны, при котором она все время нацелена на



движущийся акустический экран. Условие постоянной нацеленности антенны на экран позволяет сделать процедуру помехоустойчивой и дает дополнительное уравнение для определения акустических параметров эксперимента.

Поясним общую схему опыта и методику обработки полученных в его ходе экспериментальных данных. Принципиальная возможность визуализации акустического поля на протяженном рассеивателе вытекает из следующих очевидных соображений. Волновое поле в плоскости, включающей поверхность акустического экрана, может быть вычислено по полю, наблюдаемому в плоскости, находящейся на расстоянии  $R$  от него. Успех решения такой задачи на основе измеренного поля определяется двумя факторами: первый заключается в достаточной точности измерений; второй – в том, что значения должны быть зафиксированы на большой пространственной протяженности (достаточной апертуре).

Опыт состоял в том, что акустически непрозрачный экран протягивался между акустическим излучателем и приемной антенной, содержащей 64 приемных элемента, расположенных горизонтально в линию на апертуре размером  $A = 12$  м. Расстояние  $R$  от трассы движения экрана до антенны составляло 150 м. При размере экрана порядка 4 м, а длине акустической волны порядка 0,5 м это обеспечивало выполнение условий дифракции Фраунгофера для поля за экраном в месте расположения антенны. Антенна в пределах своей апертуры также была в зоне дифракции Фраунгофера, что не позволяло непосредственно с помощью антенны определять распределение поля вдоль экрана, антенна позволяла определять лишь направление на экран, представлявшийся в виде точечного объекта. Однако экран двигался, и значения поля на антенне многократно фиксировались за время перемещения экрана. Эти данные можно было использовать для увеличения эффективной апертуры антенны путем ее синтеза.

С целью проверки этой возможности было выполнено математическое моделирование процесса измерения. Волновое поле на движущемся экране было математически смоделировано и вычислено на антенне в пределах ее апертуры  $A$  для всех фиксируемых в ходе эксперимента 1024 положений экрана. При этом была учтена геометрия эксперимента и сделаны предположения, что волна распространяется в свободном пространстве, а поле непосредственно за акустически непрозрачным экраном в соответствии с известным правилом Кирхгофа равно нулю, а вне экрана остается невозмущенным. Такие правила, подменяющие решение дифракционной задачи, в дальнейшем будем называть правилом Кирхгофа. Правило Кирхгофа является хорошим приближением для экранов больших волновых размеров в пределах малых углов дифракции. По вычисленным  $64 \times 1024$  значениям волнового поля в дальней зоне была численно решена задача о восстановлении значений волнового поля в непосредственной близости за экраном. Результат решения этой задачи показан на рис. 3.1 и напоминает форму экрана, предполагавшегося в расчетах прямоугольным.

Это не означает, что столь же успешным будет реальный эксперимент. В реальном эксперименте волна распространяется не в свободном про-

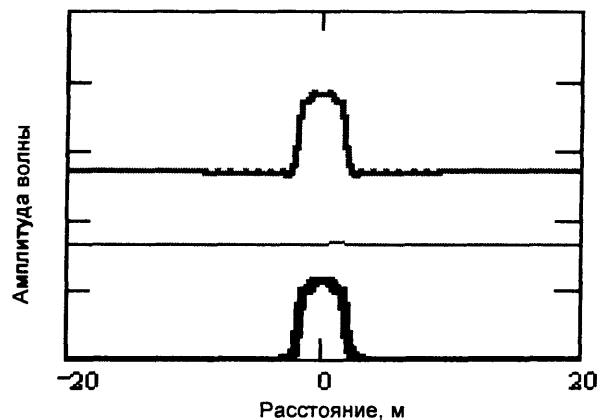


Рис. 3.1. Изображение поля на рассеивателе. Сверху – действительная часть поля, в середине – мнимая часть, внизу – модуль.

странстве, а в природном волноводе, отражаясь от дна и поверхности озера. На результат может оказать влияние межмодовая интерференция, модуляция сигнала поверхностным волнением, внутренние волны и ряд других факторов. Кроме того, трудно ожидать, что справедливо правило Кирхгофа, так как экран обладает волновым размером, который меньше 10 длин волн.

Вышеперечисленные факторы в состоянии исказить результат. Однако существует большая трудность решения обратной задачи с использованием синтеза апертуры, которая препятствует получению хоть какого-то результата. Эту основную трудность иллюстрирует рис. 3.2, на нем пунктиром показан вид отклика антенны на принимаемый ею сигнал для одного момента времени в реальных условиях эксперимента. Акустически непрозрачный экран затемняет лишь малую часть всего поля, принимаемого антенной, поэтому на рисунке видны только направление на излучатель и сигналы, рассеянные дном водоема, его поверхностью и берегами. Сигнал от экрана практически не заметен. Вид отклика антенны почти не изменяется со временем (при перемещении экрана). Естественно, что по такому сигналу апертурный синтез невозможен из-за большого уровня помех в виде посторонних сигналов. Чтобы убрать посторонние сигналы, выше был рассмотрен алгоритм фильтрации, образующий так называемое "темное поле", на котором заметны только движущиеся рассеиватели. На рис. 3.2 жирной линией показан сигнал, полученный методом, описанным выше [12]. На этом рисунке четко видно угловое положение экрана во времени с превышением относительно окружающего реверберационного фона достаточным, чтобы попытаться практически решить обратную волновую задачу в естественных условиях.

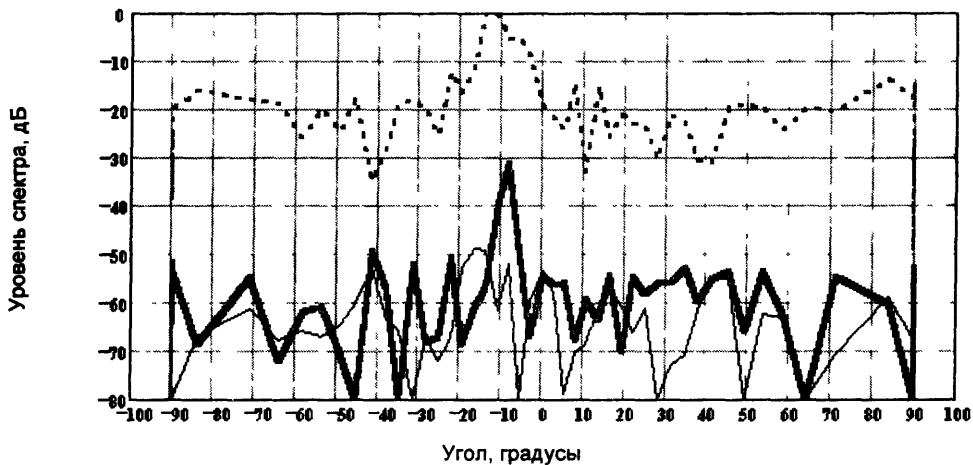


Рис. 3.2. Угловые спектры сигналов в один момент времени. Пунктир – сигнал без обработки методом темного поля. Толстой (рассеиватель двигался, находясь под углом  $-9^\circ$ ) и тонкой (рассеиватель не двигался, находясь в крайнем положении) линиями показаны результаты, полученные с применением метода темного поля.

Необходимость использования алгоритма фильтрации в эксперименте вынуждает и теоретический расчет выполнять с применением этого же алгоритма. Результат расчета приведен на рис. 3.3. Частотная характеристика примененного фильтра имеет пропускание, пропорциональное частоте сигнала, что приводит к тому, что изображение поля на экране дифференцируется по пространству, поэтому выделяются лишь края прямоугольного экрана. Результат эксперимента, выполненного с применением алгоритма темного поля, следует сравнивать с результатом расчета, показанным на рис. 3.3.

Остановимся на некоторых деталях решения как прямой, так и обратной задач и приведем основные соотношения. В рассматриваемом случае экран обладает столь малыми размерами, что на расстоянии  $R$  от него выполняются условия дифракции Фраунгофера в виде [3]

$$D \ll \sqrt{R\lambda}, \quad (3.1.1)$$

где  $D$  – размер экрана,  $\lambda$  – длина волны. В этом случае поле за экраном (решение прямой задачи в малоугловом приближении) выглядит следующим образом [3]:

$$p(x, y, R) = \frac{\exp\left[ikR + i\frac{k}{2R}(x^2 + y^2)\right]}{i\lambda R} g\left(-\frac{kx}{R}, -\frac{ky}{R}\right). \quad (3.1.2)$$

Здесь  $p(x, y, R)$  – комплексная амплитуда волнового поля;  $x, y$  – координаты прямоугольной системы координат;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $g(u_1, u_2)$  – пространственный фурье-спектр

формы экрана, в котором  $u_1, u_2$  – пространственные частоты. В таком виде формула (3.1.2) приведена в работе [3] (стр. 28, формула (1.35)). В рассматриваемом нами случае формула (3.1.2) может быть упрощена. Задачу можно считать одномерной и не рассматривать координату  $y$ . Кроме того, можно не учитывать постоянный сдвиг фаз, зависящий лишь от расстояния  $R$ , предполагающегося постоянным, и постоянные величины. В результате на основе выражения (3.1.2), сделав в нем необходимые возможные упрощения, получим следующее исходное соотношение:

$$P(x) = \exp\left(i\frac{k}{2R}x^2\right) g\left(-\frac{k}{R}x\right). \quad (3.1.3)$$

Соотношение (3.1.3) справедливо для плоской волны, освещающей экран. В нашем случае экран освещается точечным источником, расположенным на расстоянии  $R_1$  от линии перемещения экрана, а приемная антенна расположена на расстоянии  $R_2$  от этой же линии, но по другую сторону от нее. В этом случае учет сферичности сводится к тому, что вводится некоторое приведенное расстояние  $R$ , определяемое из следующего выражения [3]:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (3.1.4)$$

Учтем теперь, что экран движется горизонтально вдоль траектории, совпадающей с нормалью к линии, соединяющей излучатель и приемную антенну, со скоростью  $v$ . Тогда поле в  $n$  дискретных точках отсчета по времени общего массива данных  $M$ , взятых с частотой  $f$ , запишется следующим образом:

$$P(n) = \exp\left(iK_2(n - 0,5M)^2\right) g\left(-\frac{k}{R} \frac{v}{f}(n - 0,5M)\right), \quad (3.1.5)$$

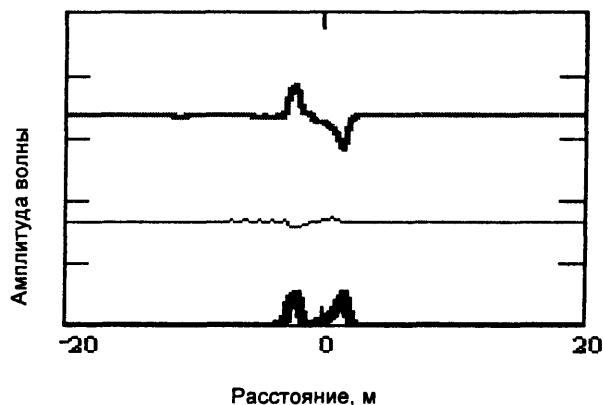


Рис. 3.3. Изображение поля на рассеивателе, полученное с применением алгоритма темного поля.

где

$$K_2 = \frac{k}{2R} \left( \frac{v}{f} \right)^2. \quad (3.1.6)$$

Выражение (3.1.5) справедливо для одиночного приемника излучения. В нашем случае прием осуществляется с помощью ряда отдельных гидрофонов акустической антенны. Соотношение (3.1.5) справедливо для каждого гидрофона антенны при учете фаз принимаемых ими сигналов, определяемых геометрией расположения гидрофонов.

Ниже показано, как сделать так, чтобы сигналы с отдельных гидрофонов антенны суммировались с такими фазовыми соотношениями, которые обеспечивают синфазное сложение сигналов, принимаемых от движущегося экрана при любом  $n$ . Пока примем, что это условие выполнено. Оно обеспечивает помехоустойчивость обработки сигнала. Кроме того, при его выполнении антенна по отношению к сигналу, рассеянному экраном, становится эквивалентной ненаправленному гидрофону. Последнее очень важно, так как направленность приема ограничивает разрешающую способность, достигаемую путем синтеза апертуры. К сигналу антенны, сфазированному указанным выше образом, применима формула (3.1.5).

Получим требуемое условие фазировки сигналов, принимаемых отдельными гидрофонами антенны. Поле от экрана в пределах апертуры антенны представляет собою плоскую волну (в этом состоит условие дифракции Фраунгофера) вида

$$P(e) = \exp \left[ i \frac{2\pi}{L} u (e - 0,5L) \right], \quad (3.1.7)$$

где  $L$  – число гидрофонов антенны, совпадающее с числом дискретных отсчетов, приходящихся на апертуру антенны  $A$ ;  $e$  – номер дискретного отсчета волнового поля, взятого вдоль апертуры антенны, или номер приемного гидрофона, расположенного в этой точке;  $u$  – пространственная частота, определяемая углом, под которым плоская волна падает на антенну, нормированная на  $\frac{2\pi}{A}$ :

$$\sin(\theta_e) = \frac{\lambda_a}{A} u. \quad (3.1.8)$$

Через  $\lambda_a$  обозначена длина волны, которая в условиях градиента скорости звука в воде имеет место на горизонте антенны. В нашем случае угол, под которым от антенны наблюдается движущийся экран, можно записать следующим образом:

$$\theta \approx \frac{v}{f} \frac{n - 0,5M}{R_2} \cos \Psi, \quad (3.1.9)$$

где  $\Psi$  – угол в вертикальной плоскости, под которым сигнал от экрана подходит к антенне.

Считая угол  $\theta$  малым, подставляя (3.1.9) в (3.1.8), а (3.1.8) в (3.1.7), получим

$$P(e, n) = \exp \left[ i K_1 (n - 0,5M)(e - 0,5L) \right], \quad (3.1.10)$$

где

$$K_1 = \frac{2\pi A v \cos \Psi}{\lambda_a R_2 f L}. \quad (3.1.11)$$

Сделаем следующее замечание. Формула (3.1.2), а следовательно и (3.1.3), справедлива в условиях малоуглового приближения [3]. Множитель  $\cos \Psi$  уменьшает эквивалентный угол падения волны на антенну в горизонтальной плоскости, облегча

выполнение условия малоуглового приближения по сравнению с распространением волны в свободном пространстве.

Для фазировки антенны на экран следует сигнал, принятый антенной и представленный в виде матрицы от переменных  $e$  и  $n$ , умножить на комплексно сопряженную матрицу для матрицы (3.1.10).

По формулам (3.1.5) и (3.1.10) были получены  $64 \times 1024$  значения комплексных амплитуд поля, имитирующих экспериментальные данные.

Решение обратной задачи производилось в два этапа. На первом этапе антенна "нацеливалась" на перемещающийся экран. Эта операция очень важна, и именно ею применяемая методика отличается от синтеза апертуры, используемого в радиолокации [3, 20]. Там антенна имеет постоянную ориентировку относительно линии, вдоль которой производится синтезирование апертуры, что приводит к ограничению разрешающей способности метода. Интервал пространственного разрешения на местности не может превышать апертуры приемной антенны [3]. Примененная нами процедура позволяет в любой момент времени нацеливать антенну на движущийся рассеиватель. Благодаря такому постоянному нацеливанию антенны она по отношению к рассеивателю является ненаправленным приемником, который не ограничивает разрешающей способности.

При моделировании опыта для нацеливания антенны на экран можно воспользоваться формулами (3.1.10) и (3.1.11). Возникает вопрос, как нацеливать антенну на экран в процессе обработки данных натурального эксперимента? Постоянное нацеливание антенны на движущийся рассеиватель возможно благодаря тому, что движущийся рассеиватель хорошо заметен в виде перемещающейся точечной цели в координатах "пространственная частота – время" и без примененной нами процедуры (рис. 3.4).

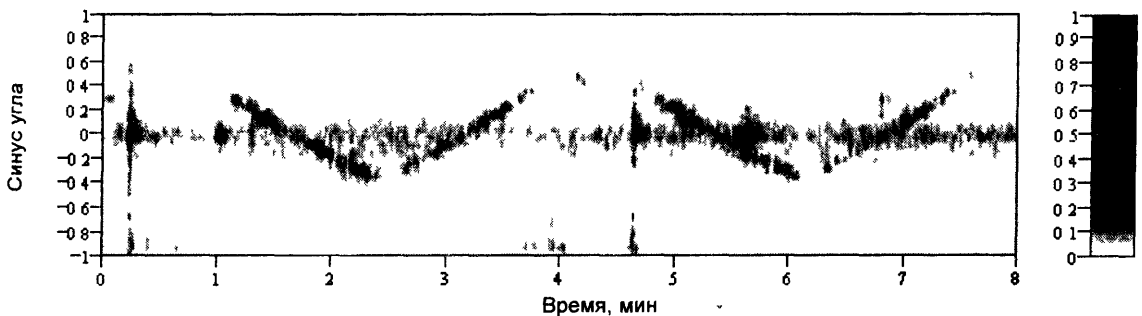


Рис. 3.4. Отклик антенны в координатах угол – время. Сигнал обработан методом темного поля по формуле (3.1.12) без дополнительной временной фильтрации.

Фазировка антенны на экран получается в результате следующих операций. Принятый всеми гидрофонами антенны сигнал для всех моментов времени представляется в виде матрицы, в столбцах и строках которой – переменные  $e$  и  $n$ . Результат такой операции представлен на рис. 3.4, на котором изображен модуль этой матрицы. Как было сказано выше, для постоянного "нацеливания" антенны на экран следует полученную матрицу умножить на матрицу, комплексно сопряженную с матрицей, определяемой (3.1.10). Проблема заключается в том, что значение коэффициента  $K_1$  в (3.1.10) определяется путем подбора, его критерием служит вид матрицы сигнала, изображенной на рис. 3.4 после умножения ее на комплексно сопряженную матрицу, в которую введен подбираемый коэффициент в качестве  $K_1$ . При правильном значении этого коэффициента трасса движения экрана должна расположиться точно вдоль оси

времени. Для получения сфазированного сигнала остается считать значения сигнала вдоль той строки оси времени получившейся матрицы, вдоль которой наблюдается сигнал от экрана. Указанная процедура применима в случае достаточного превышения сигнала от экрана над уровнем шумов и помех. В нашем случае, как показывает количественно рис. 3.1.2 и качественно рис. 3.1.5, это условие выполняется.

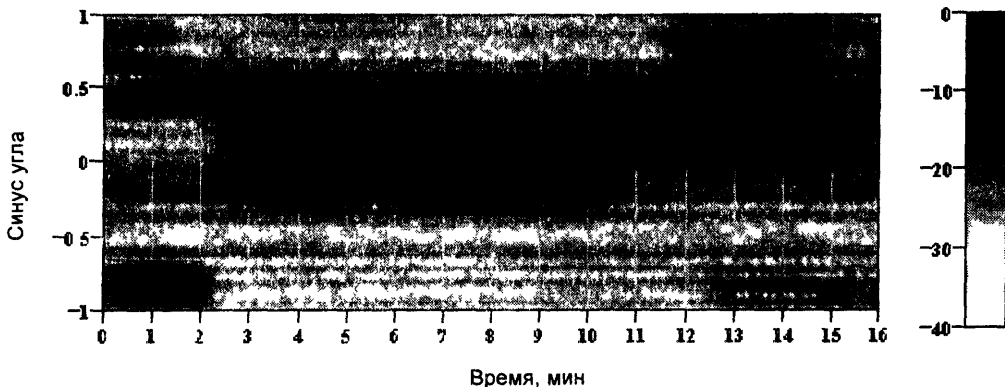
На втором этапе обработки используем из всей матрицы значений лишь одну строку, содержащую сигнал, зависящий только от времени. Вид этого сигнала определяется формулой (3.1.5). Обработка сигнала предполагает его умножение на экспоненту, комплексно сопряженную с экспонентой, входящей в (3.1.5). После этого, как следует из (3.1.5), форма волнового поля непосредственно за экраном определяется с помощью преобразования Фурье.

Использование метода темного поля заключалось в преобразовании матрицы исходных данных  $p(x_e, t_n)$  по формуле, приведенной выше с увеличенным интервалом вычитания (см. гл. 2):

$$S_{e,n} = \ln \left( \frac{|p(x_e, t_{n+8})|}{|p(x_e, t_n)|} \right) + i \{ \arg [p(x_e, t_{n+8})] - \arg [p(x_e, t_n)] \}. \quad (3.1.12)$$

Эксперимент проводился на озере Санхар во Владимирской области. Излучатель располагался на расстоянии 300 метров от приемной антенны и излучал в непрерывном режиме монохроматический сигнал. Данные с антенны считывались так, как описано в работе [12]. Экран протягивался с постоянной скоростью по трассе, расположенной посередине между излучателем и приемной антенной.

Отклик антенны в виде функции времени без использования темного поля показан на рис. 3.5. На этом рисунке, являющемся экспериментальной реализацией результата численного расчета, показанного на рис. 2.11, а при отсутствии реверберационных помех должно быть видно движение рассеивателя в координатах "пространственная частота – время". Как видно из рисунка, этого не получается. На рисунке преобладает реверберационная помеха, в результате чего отклик антенны от времени практически не зависит, что исключает возможность применения к этому сигналу апертурного синтеза. На рис. 3.4 показан отклик антенны с применением алгоритма темного поля – итог обработки сигнала, без помех приводящий к результату, показанному на рис. 2.11, б. Использование темного поля ослабляет реверберационную помеху настолько, что позволяет наблюдать за перемещениями экрана по углу в координатах "пространственная частота – время".



**Рис. 3.5.** Отклик антенны в координатах угол – время. Сигнал никакой специальной обработке не подвергался.

На рис. 3.6 показан результат восстановления формы волнового поля в непосредственной близости за экраном на основе данных, взятых с первого прямолинейного участка траектории движения экрана, показанной на рис. 3.4. На рис. 3.6, *а* показан результат восстановления формы волнового поля с применением алгоритма, использовавшегося при численных расчетах. Полного соответствия формы полученного поля с той, которая была вычислена и показана на рис. 3.3, в данном случае нет. Соответствие – примерное, что тоже весьма неожиданный результат, если учесть, что математическая модель и алгоритм восстановления естественного сигнала не учитывают влияния целого ряда факторов, которые упоминались выше. На рис. 3.6, *б* показан результат контрольного опыта – тем же путем восстановленное изображение, но при использовании данных, взятых в другой момент времени, когда вдоль трассы ничего не протягивалось. Антенна принимала только прямой сигнал и многочисленные его отражения от поверхности, дна и берегов озера. Из этого рисунка следует, что лишние сигналы не образуют изображения, сравнимого по величине с показанным на рис. 3.6, *а*.

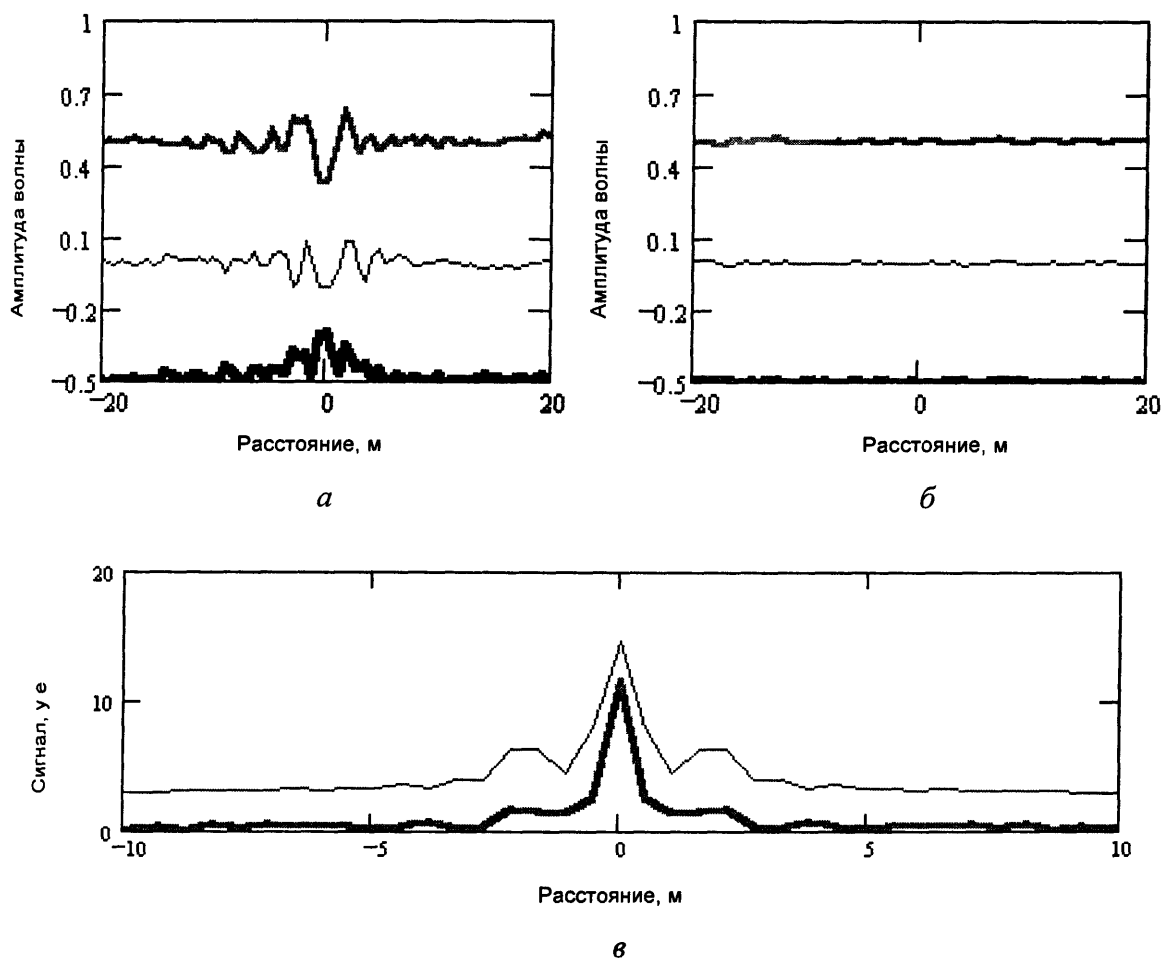


Рис. 3.6. Изображение поля на рассеивателе, полученное в опыте (сверху – действительная часть поля, в середине – мнимая, внизу – модуль) – *а*, результат контрольного опыта без рассеивателя – *б*, изображение рассеивателя, полученное некогерентным синтезом апертуры, опытным путем (толстая линия) и расчет (тонкая) – *в*.

На рис. 3.6, *в* – модуль волнового поля в непосредственной близости за экраном, но полученный другим способом. Преобразование Фурье на последнем этапе обработки сигнала осуществлялось не от комплексного сигнала, а от его модуля. При этом

исключаются некоторые фазовые соотношения. На рисунке показаны одновременно как результаты теоретического расчета, так и результаты обработки данных эксперимента. Видно, что они удовлетворительно согласуются. Очевидно, что при такой обработке влияние факторов распространения сигнала не является существенным. Такой некогерентный апертурный синтез не дает возможности восстановления формы экрана, позволяя судить о его размерах, что также существенно.

Некогерентный апертурный синтез возможен не всегда. В нашем случае он получается благодаря тому, что антенна хорошо выделяет сигнал, рассеиваемый движущимся экраном на фоне сигнала излучателя и других рассеивателей. Без соблюдения этого условия некогерентный апертурный синтез из-за влияния интерференции ряда рассеивателей приведет к иному результату, который трудно сопоставить с теорией.

На основе эксперимента удалось оценить ряд интересных параметров, характеризующих акустические условия, в которых проводился опыт. Ключом к этому являются экспоненты, входящие в формулу (3.1.5) и (3.1.10). Из эксперимента оцениваются безразмерные коэффициенты, входящие в выражения под знаком экспонент. В формуле (3.1.10) – это коэффициент  $K_1$ , определяемый (3.1.10). В формуле (3.1.5) – коэффициент  $K_2$  перед множителем  $(n - 0,5M)^2$ , определяемый (3.1.6).

Коэффициент  $K_2$  на основании формулы (3.1.6) следующим образом связан с параметрами эксперимента:

$$K_2 = \pi \frac{v^2}{\lambda R f^2}. \quad (3.1.13)$$

Из двух уравнений, (3.1.11) и (3.1.13), можно определить два входящих в эти уравнения параметра при условии, что остальные параметры известны. Алгоритмы, использовавшиеся ранее [21, 22], позволяют оценивать параметры эксперимента только на основе формулы (3.1.5).

В нашем случае параметры  $v$ , а также  $R_1$  и  $R_2$  известны. Поэтому нами оценивались другие акустические параметры трассы распространения волн, входящие в (3.1.11) и (3.1.13).

Известные и измеренные параметры приведены в таблице.

Известные параметры							Измеренные	
$v$ , м/с	$f$ , Гц	$F$ , Гц	$A$ , м	$L$ , м	$R_1$ , м	$R_2$ , м	$\lambda R$ , м <sup>2</sup>	$\cos \Psi$
0,68	6,36	2498,627	12	64	150	150	68,1	0,734 $\Psi = 42,8^\circ$

Точность определения величин коэффициентов путем их подбора в этом опыте получается порядка 10%.

Интересно оценить точность, с которой горизонтально ориентированная антенна селективирует излучение, приходящее к ней, в вертикальном направлении. Имеем

$$\Delta[\cos \Psi] = \sin \Psi \cdot \Delta \Psi. \quad (3.1.14)$$

В нашем случае  $\sin \Psi = 0,679$ . Следовательно, в этом опыте горизонтальная антенна способна селективировать излучение в вертикальном направлении примерно с вдвое меньшей точностью, чем в горизонтальном.

Итак, проведенное экспериментальное исследование позволяет сделать некоторые выводы.

Алгоритм акустического темного поля обеспечивает выделение движущегося слабого рассеивателя на уровне, достаточном для использования специальной проце-



дуры апертурного синтеза. Специальная процедура апертурного синтеза, примененная в настоящей работе, отличается тем, что позволяет использовать весь потенциал акустической антенны без потери разрешающей способности.

Направленная антенна с ее полным потенциалом по разрешению и помехоустойчивости позволяет применить некогерентный апертурный синтез. Проведенный эксперимент показал реальную возможность оценки двух параметров эксперимента. Эти возможности являются новыми сравнительно с существующими. В частности, показано, что есть возможность определения и селекции излучения, приходящего к горизонтальной антенне в вертикальной плоскости.

Предлагаемая методика может применяться в томографическом режиме. Имеется в виду режим согласованного перемещения излучателя и приемника, так что может быть определена форма рассеивателей, находящихся внутри трассы движения, а также оценены некоторые акустические параметры трассы.

В последнее время появились работы, в которых теоретически уточняются дифракционные явления на телах простой формы [7, 8, 9]. Методы, использованные в этой работе, могут оказаться полезными при экспериментальной проверке выводов теории.

Мы не можем здесь привести математическую программу, работающую с данными натурного эксперимента по двум причинам. Во-первых, данные эксперимента занимают большой объем, сравнимый с общим объемом книги. Во-вторых, в книге невозможно привести эти данные в такой форме, чтобы их можно было автоматически ввести в компьютер. Поэтому приводим точно такую же программу, работающую с данными, получаемыми путем математического моделирования задачи. Все особенности программирования обработки реальных данных при этом сохраняются, а сами исходные данные получаются в самом компьютере.

Эта программа приведена на рис. 3.7. На первой странице помещена полная программа получения и обработки данных, на второй странице помещены графики (они приведены и в тексте настоящего раздела (это рис. 3.1, 3.3, частично 3.6).

Как обычно, дадим некоторые комментарии к приведенной программе. Вначале приведены массивы используемых данных и диапазонные переменные. Затем идут параметры эксперимента, существенные для моделирования. Апертура антенны  $AP$  12 м; расстояния  $z_1$  в метрах от излучателя  $l$  (см. рис. 2.10 в гл. 2) до линии 3–3 200 м и от линии 3–3 до линии 2–2 ( $z_2$ ) 206,5 м; длина волны, на которой производился опыт, равнялась 0,584 м; величина интервала между приемниками антенны –  $kf$ ; скорость протяжки рассеивателя вдоль линии 3–3  $vel = 0,68$  м/с; частота квантования  $f$ ; размер рассеивателя  $S = 4$  м; параметр фильтра  $ts$ , определяющий интервал в отсчетных точках, через который производится вычитание логарифмов значений поля. Введено приведенное расстояние по формуле (3.1.4). Далее приведено выражение для координаты вдоль антенны и смещение рассеивателя вдоль линии его движения в метрах.

Далее программа строится в точном соответствии с теоретическими формулами. Приведена функция  $g$ , входящая в (3.1.2) и в (3.1.3). Приведены формулы для коэффициентов, входящих в формулы (3.1.5) и (3.1.10). Согласно этим формулам численно создается такой сигнал, который может быть получен экспериментально. При обработке сигнала модуляция, определяемая как коэффициентом, входящим в (3.1.5), так и коэффициентом, входящим в (3.1.10), убирается путем умножения на комплексно сопряженный множитель. Для обработки сигнала, полученного в эксперименте, иного пути нет. В условиях эксперимента приходится подбирать коэффициенты соответствующих выражений. В условиях моделирования все коэффициенты точно известны. Поэтому вроде бы нет смысла сначала умножить функцию на какую-то функцию, а потом

## Mathcad Plus 6.0

<p>Массивы и диапазонные переменные</p> <p><math>L = 64</math>   <math>k = 0..L - 1</math>   <math>M = L \cdot 16</math>   <math>n = 0..M - 1</math></p> <p><math>kk = 0..0.5 \cdot L - 1</math>   <math>nn = 0..0.5 \cdot M - 1</math></p> <p>Параметр фильтра</p> <p><math>ts = 8</math>   <math>ts1 = 0..ts</math></p> <p>Координата вдоль антенны</p> <p><math>x_k = (k - 0.5 \cdot L - 1) \cdot kf</math></p> <p>Фурье-образ антенны (функция <math>g</math> в (3.1.3))</p> $F(x) = if \left( x \neq 0, \frac{\sin\left(\frac{S}{2} \cdot x\right)}{x}, \frac{S}{2} \right)$ <p>Фаза экспоненты в (3.1.5)</p> <p><math>t_n = (n - 0.5 \cdot M)^2 \cdot KOR2</math></p> <p>Волновое поле на антенне согласно (3.1.5)</p> <p><math>P_{k,n} = F(u_{k,n}) \cdot \exp(i \cdot t_n) \cdot AE_{k,n}</math></p> <p>Программа фильтрации согласно рис. 2.12</p> <p><math>FM_{k,n} = (P_{k,n} - 10 \cdot MM)</math>   <math>FM_{k,M-1}   ts1</math>   <math>FM_{k,M-1}</math></p> $BMF_{k,n} = 1 - \left( \frac{FM_{k,n}}{ FM_{k,n} } \cdot \frac{FM_{k,n+ts}}{ FM_{k,n+ts} } \right) + \ln \left( \frac{ FM_{k,n+ts} }{ FM_{k,n} } \right)$ <p><math>BMB_{k,n} = BMF_{k,n} \cdot \exp(i \cdot t_n) \cdot AE_{k,n}</math></p> <p>Выделение одной строки</p> <p><math>GZ_n = GD_{0,n}</math></p> <p>Преобразование спектра к форме <i>Mathcad</i></p> <p><math>GZ1_{nn} = GZ_{nn+0.5M}</math>   <math>GZ1_{0.5M+nn} = GZ_{nn}</math></p> <p>Восстановление сигнала</p> <p><math>FG = icfft(GZ1)</math></p> <p><math>FG1_{nn} = FG_{nn+0.5M}</math>   <math>FG1_{nn+0.5M} = FG_{nn}</math></p> <p>Некогерентное синтезирование</p> <p><math>NGZ_n =  GZ1_n </math>   <math>SZ = icfft(NGZ)</math></p> <p><math>FZ_{nn} = SZ_{nn+0.5M}</math>   <math>FZ_{nn+0.5M} = SZ_{nn}</math></p>	<p>Апертура антенны (м)</p> <p><math>AP = 12</math></p> <p>Скорость протяжки (м/с)</p> <p><math>vel = 0.68</math></p> <p>Частота квантования (Гц)</p> <p><math>f = 6.35783</math></p> <p>Смещение рассеивателя</p> <p><math>y_n = \frac{vel}{f} \cdot (n - 0.5 \cdot M)</math></p> <p>Аргумент функции <math>g</math> в (3.1.3)</p> <p><math>u_{k,n} = 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{(x_k - y_n)}{r}</math></p> <p>Функция смещения азимута цели</p> <p><math>AE_{k,n} = \exp(i \cdot (k - 0.5 \cdot L - 1) \cdot (n - 0.5 \cdot M) \cdot KOR1)</math></p> <p>Модуль поля</p> <p><math>MEP_{k,n} =  P_{k,n} </math>   <math>MM = \max(MEP)</math></p> <p>Обработка без фильтрации</p> <p><math>BMP_{k,n} = P_{k,n} \cdot \exp(i \cdot t_n) \cdot AE_{k,n}</math></p> <p><math>GP^{&lt;n&gt;} = cfft(BMP^{&lt;n&gt;})</math></p> <p>Выделение одной строки</p> <p><math>PZ_n = GP_{0,n}</math></p> <p>Преобразование спектра к форме <i>Mathcad</i></p> <p><math>PZ1_{nn} = PZ_{nn+0.5M}</math>   <math>PZ1_{0.5M+nn} = PZ_{nn}</math></p> <p>Восстановление сигнала</p> <p><math>WG = icfft(PZ1)</math></p> <p><math>WG1_{nn} = WG_{nn+0.5M}</math>   <math>WG1_{nn+0.5M} = WG_{nn}</math></p> <p>SP = icfft(NGP)</p> <p><math>FP_{nn} = SP_{nn+0.5M}</math>   <math>FP_{nn+0.5M} = SP_{nn}</math></p>	<p>Расстояния (м)</p> <p><math>z1 = 200</math>   <math>z2 = 206.5</math></p> <p>Приведенное расстояние (м)</p> <p><math>r = z1 \cdot \frac{z2}{z1 + z2}</math></p> <p>Длина рассеивателя (м)</p> <p><math>S = 4</math></p> <p>Коэффициент (3.1.11) в (3.1.10)</p> <p><math>KOR1 = 2 \cdot \frac{\pi}{r \cdot \lambda} \cdot \frac{kf \cdot vel}{f}</math></p> <p>Коэффициент (3.1.6) в (3.1.5)</p> <p><math>KOR2 = \frac{\pi}{\lambda \cdot r} \cdot \left( \frac{vel}{f} \right)^2</math></p>
---	--	--

**Рис. 3.7. Синтезирование апертуры антенной решетки с помощью протяженного рассеивателя (начало)**

Графики функций, полученных при моделировании

Програженность рассеивателя (м)  $S = 4.000$

Расстояния (м)  $z_1 = 200.000$   $z_2 = 206.500$

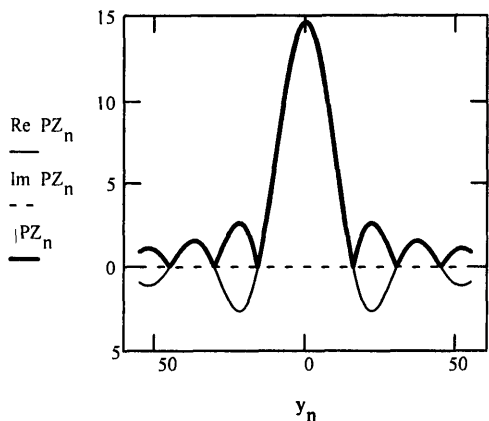
Апертура антенны (м)  $AP = 12.000$

Скорость рассеивателя (м/с)  $vel = 0.680$

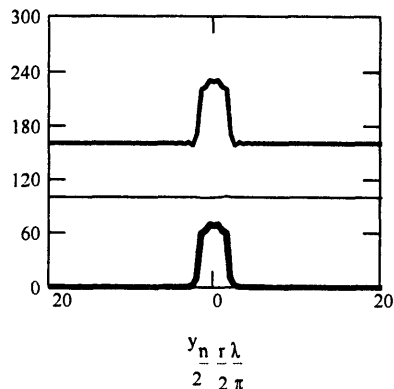
Длина волны (м)  $\lambda = 0.584$

Волновое поле, принимаемое антенной, направленной на движущийся рассеиватель

Изображение движущегося рассеивателя, полученное на основе принятого от него волнового поля

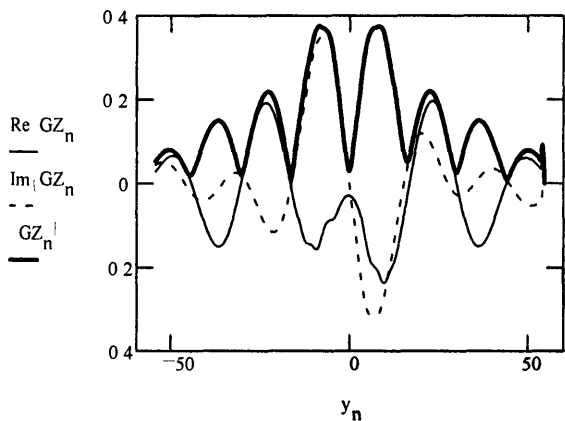


$Re\ WG1_n + 160$   
 $Im\ WG1_n + 100$   
 $|WG1_n|$

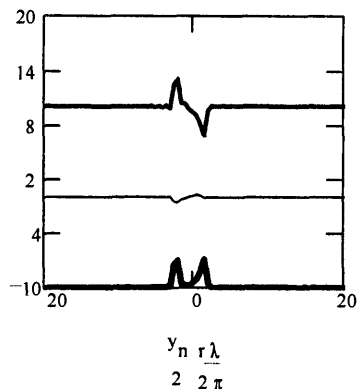


Повторяет верхний рисунок после фильтрации, способствующей выделению сигнала

Повторяет верхний рисунок после фильтрации, способствующей выделению сигнала



$Re\ FG1_n + 10$   
 $Im\ FG1_n$   
 $|FG1_n| + 10$



Результат некогерентного синтеза апертуры без фильтрации (линия) и после нее (пунктир)

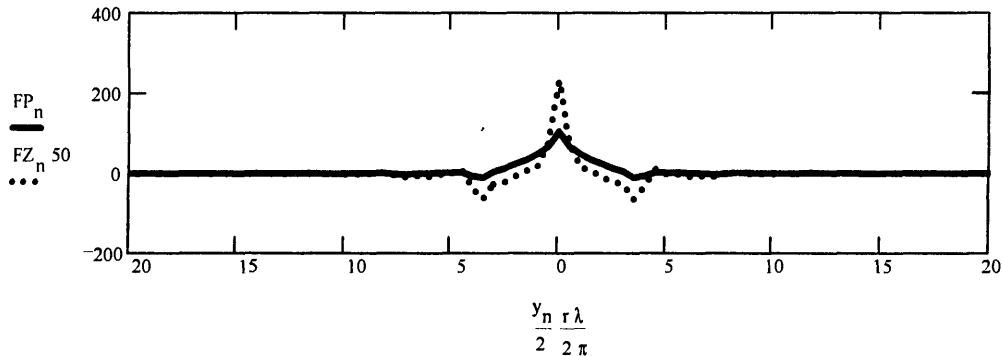


Рис. 3.7 (окончание)

ликвидировать результат этой операции умножением на комплексно сопряженную функцию. Эти, казалось бы, бессмысленные действия, результат которых не должен зависеть от того, как точно мы промоделируем ситуацию, на самом деле присутствуют в программе. Почему? Если бы сигнал не подвергался в ходе обработки фильтрации, то разумного ответа на этот вопрос не было бы. В программе есть две параллельно идущие ветви, одна из которых включает фильтрацию (она слева), а другая (правая) обходится без нее. В правой ветви действительно можно обойтись без точного соблюдения формул (3.1.5) и (3.1.10) и даже игнорировать их. Однако этого ни в коем случае нельзя делать в левой части программы, включающей фильтрацию. Предлагаем в этом убедиться, изменив значения коэффициентов, входящих в формулы (3.1.5) и (3.1.10). В правой части программы не произойдет ничего, а результат левой изменится. Это происходит оттого, что для фильтрации важен спектр функции, а он в результате модуляции сильно изменяется. Устранение модуляции путем умножения на комплексно сопряженный множитель происходит после прохождения сигнала через фильтр. Чтобы моделируемый сигнал фильтровался точно так же, как и экспериментальный, необходимо строгое соблюдение значений всех параметров, входящих в формулы (3.1.5) и (3.1.10).

Две последние строчки программы посвящены операции некогерентного апертурного синтеза.

### 3.2. Увеличение временного разрешения сигналов

Мы рассмотрели фильтрацию узкополосной помехи. Теперь на основе работы [23] рассмотрим фильтрацию уже не помехи, а сигнала. Цель такой фильтрации, примененной к сигналу, состоит в изменении его комплексного спектра, которое придает ему свойства, полезные для использования этого сигнала при локации в качестве зондирующего. Прежде всего мы рассмотрим задачу, в которой все параметры будут определяться нами численно. На этом этапе можно наиболее эффективно показать задачи и возможности их решения, а затем рассмотреть и эксперимент, который относится к локации на просвет. И здесь дадим другой подход к ее успешному решению, основанный не на фильтрации помехи, а на фильтрации зондирующего сигнала.

На заре развития радиолокации в качестве зондирующего сигнала использовался прямоугольный импульс с монохроматическим заполнением. Разрешающая способность локатора по времени тогда определялась длительностью импульса: чем короче импульс, тем выше разрешающая способность локатора. На следующем этапе развития локации разрешение отраженных сигналов во времени стало получаться существенно меньше длительности импульса. Чтобы увеличить разрешение, зондирующий сигнал модулировался внутри импульса по частоте, что расширяло его спектр, увеличивая временное разрешение. Величина интервала временного разрешения лоцируемых объектов равна обратной величине ширины спектра зондирующего импульса [24]. Это справедливо как для импульса с монохроматическим заполнением, который для расширения полосы должен быть достаточно коротким, так и для импульса с широкополосным заполнением.

Универсальное соотношение между интервалом временного разрешения  $\Delta t$  и шириной спектра зондирующего сигнала  $\Delta \omega$  имеет следующий простой вид [24]:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta \omega}. \quad (3.2.1)$$

Соотношение (3.2.1) непосредственно следует из математического определения спектра на основе преобразования Фурье и поэтому нерушимо. В рамках этого соот-

ношения возможна еще одна модификация зондирующего сигнала. Речь идет о зондирующем сигнале, имеющем вид затухающего синусоидального сигнала (ЗСС). Типичным примером ЗСС является отклик колебательного контура на импульсное воздействие. ЗСС справедливо считается узкополосным, так как медленная по сравнению с периодом высокой частоты модуляция амплитуды слабо расширяет его спектр. Если не иметь в виду специальную математическую обработку ЗСС, а ограничиться только теми видами обработки, которые применяются для сигналов с монохроматическим заполнением и широкополосным заполнением, то под шириной спектра такого сигнала  $\Delta\omega$  в формуле (3.2.1) следует понимать эффективную ширину его спектра по уровню 3 дБ. Эта ширина определяется скоростью спада уровня сигнала и при достаточно медленном спаде высокого временного разрешения не обещает.

Полная ширина спектра ЗСС по его самому низкому уровню теоретически бесконечна, а практически (как это следует из теоремы отсчетов) определяется той частотой, с которой этот сигнал проквантован при вводе в вычислительное устройство. Среди методов выделения сигналов существуют такие, для которых в соотношении (3.2.1) входит не эффективная ширина спектра зондирующего сигнала, а его полная ширина. В результате применения этих методов может быть получено высокое разрешение при использовании зондирующего сигнала, считающегося узкополосным. Ниже рассматриваются и сравниваются между собой два способа обработки принятого локационного сигнала, для которых в соотношении (3.2.1) работает полная ширина спектра зондирующего сигнала.

Чтобы привязать известные методы обработки сигналов к задаче обработки локационных сигналов, введем ряд определений. Условимся зондирующий сигнал локатора считать откликом на импульсное воздействие некоторого фильтра. Пусть вид зондирующего сигнала будет  $h(t)$ . Спектр сигнала  $h(t)$  является частотной характеристикой фильтра  $z(\omega)$ . Идеальный сигнал локатора является откликом на бесконечно узкий  $\delta$ -импульс. Этот сигнал будем считать сигналом  $x(t)$  на входе фильтра. Его спектр будет  $C_x(\omega)$ . Принимаемый локатором отраженный сигнал является откликом отражателей на зондирующий импульс. Этот сигнал будем считать откликом фильтра  $y(t)$  на входной сигнал  $x(t)$ . Спектр этого отклика будет  $C_y(\omega)$ . Между спектрами входного и выходного сигналов фильтра существует следующее известное соотношение:

$$C_y(\omega) = C_x(\omega)z(\omega). \quad (3.2.2)$$

В соотношении (3.2.2) известны  $C_y(\omega)$  и  $z(\omega)$ , так как известны форма зондирующего сигнала и результат зондирования. На основе двух известных функций можно определить третью – спектр входного сигнала. Для этого надо произвести фильтрацию выходного сигнала, умножив его спектр (3.2.2) на частотную характеристику фильтра, обратного  $z(\omega)$ . Важно отметить, что речь идет о комплексных частотных характеристиках. Обратный фильтр корректирует не только модуль спектра выходного сигнала, но и его фазу. По спектру входного сигнала можно восстановить сам входной сигнал, его формула выглядит как

$$x(t) = \Phi^{-1} \left\{ \frac{C_y(\omega)}{z(\omega)} \right\}, \quad (3.2.3)$$

где  $\Phi^{-1}\{f(\omega)\}$  означает обратное преобразование Фурье от функции  $f(\omega)$ .

На рис. 3.8 представлен результат математического моделирования, выполненного по формуле (3.2.3). Вдоль горизонтальной оси отложено время в единицах квантования. По вертикали отложены для  $x(t)$  – его уровень в децибелах, а для  $y(t)$  –



**Рис. 3.8.** Отклик локатора. Вверху в линейном масштабе показан отклик локатора на узкополосный зондирующий импульс, внизу – результат обработки этого отклика путем расширения его спектра (дБ).

линейная шкала. В качестве зондирующего сигнала была взята экспоненциально затухающая косинусоида – отклик резонансного контура на импульсное воздействие. На рисунке вверху показан сигнал  $y(t)$ , являющийся откликом локатора, ниже – сигнал  $x(t)$ , являющийся результатом обработки по формуле (3.2.3) сигнала  $y(t)$ . Сигнал  $x(t)$  был смоделирован несколькими импульсами, различающимися положениями во времени и амплитудами. На рисунке как положения импульсов, так и их амплитуды получились в точности такими, какими были заданы. Длительность импульсов составляла один интервал квантования, что эквивалентно  $\delta$ -импульсу. На этом же рисунке виден широкополосный шум, добавленный к сигналу  $y(t)$ . На рис. 3.9 приведена математическая программа в пакете *Mathcad 6.0 plus*, которая приводит к получению рис. 3.8. В этой программе формируется входной сигнал локатора, отмечены места дискретных отражений и их интенсивности. Затем формируется узкополосный зондирующий сигнал, с помощью которого производится локация. Этот сигнал фильтруется обратным по отношению к спектру зондирующего сигнала фильтром.

Покажем, что зондирующий сигнал вида ЗСС является действительно узкополосным сигналом при существующих традиционных способах обработки принятого сигнала [24]. Будем это доказывать от противного. Пусть сигнал ЗСС в силу того, что он модулирован по амплитуде, является широкополосным сигналом. Основанием для такого допущения является то, что спектр ЗСС не обращается в нуль ни в одной точке всего рассматриваемого спектрального интервала. Обрабатываем его так, как принято обрабатывать широкополосные сигналы [24], а именно – путем определения взаимной корреляции зондирующего сигнала и принятого сигнала по формуле

$$W(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)h(t-\tau) dt. \quad (3.2.4)$$

### Mathcad Plus 6.0

Массив данных; диапазонные переменные Параметры зондирующего сигнала  
 $L = 1024$   $k = 0..L$   $1$   $kk = 0..0.5 \cdot L - 1$   $k1 = 0..L$   $1$   $f2 = 80$   $a = 0.003$   $x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k$   
 Величины задержек отраженных сигналов Входной сигнал  
 $d1 = 12$   $d2 = d1 + 50$   $d3 = -150$   $d4 = -200$   $EL_k = \Phi(0, k) \cdot 1$

Зондирующий сигнал Формирование задержек Уровень шума  
 $A_k = \cos(x_k \cdot f2) \cdot \exp(-a \cdot k)$   $O(F, x, y) = \begin{cases} F_x \cdot y & \text{if } x = y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$   $att = 10^4$

Входной сигнал локатора при дискретных отражениях  
 $B2_k = EL_k \cdot 1 + O(EL, k, d1) \cdot 0.3 \cdot (1) + O(EL, k, d2) \cdot 0.03 + O(EL, k, d3) \cdot 0.01 + O(EL, k, d4) \cdot 0.1$

Получение спектра шума Спектр зондирующего сигнала  
 $U = \text{norm}(L, 0, 1)$   $GU = \text{cfft}(U)$   $zc = \text{cfft}(A)$

Спектр входного сигнала локатора Спектр выходного сигнала локатора  
 $GB2 = \text{cfft}(B2)$   $UR_k = |GB2_k|$   $GE_k = GB2_k \cdot zc_k$   $max(UR) = 0.044$

Применение обратного фильтра

Восстановление формы сигнала  
 $zm_k = \frac{GE_k}{max(UR) \cdot zc_k} + att \cdot \frac{GU_k}{zc_k}$   $wz = \text{icfft}(zm)$   $wu_k = \text{Re}(wz_k)$   $M2 = max(wu)$

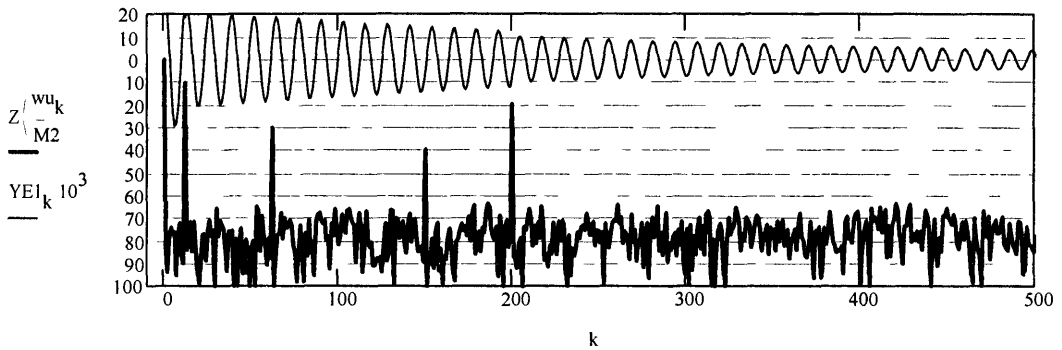
Выходной сигнал локатора без фильтрации

Переход к децибелам  
 $p = 5$

$YE = \text{icfft}(GE)$   $YE1_k = \text{Re}(YE_k)$

$Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$

Выходной сигнал локатора до фильтрации (вверху) и после (внизу)



Зондирующий сигнал локатора

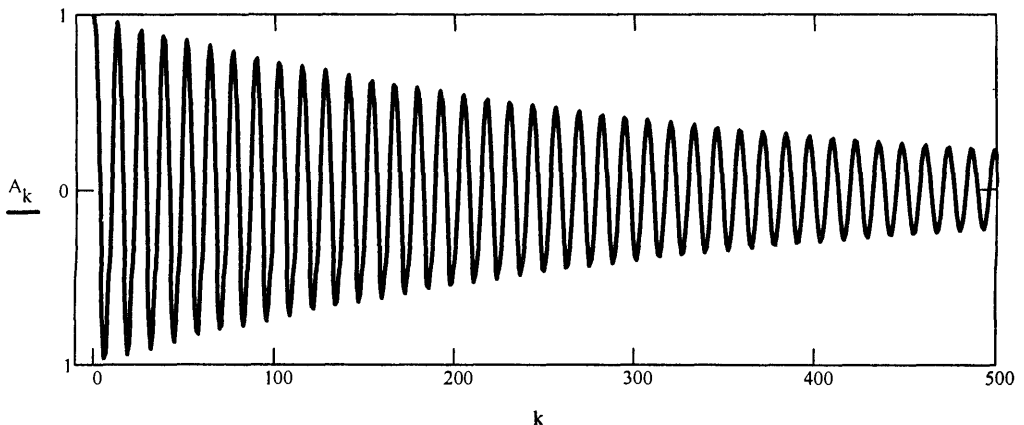


Рис. 3.9. Локация узкополосным сигналом

На рис. 3.10 изображен результат обработки сигнала по формуле (3.2.4) в том случае, когда в качестве зондирующего использовался шумоподобный сигнал, имеющий равномерный спектр в пределах всего используемого спектрального интервала. Вдоль горизонтальной оси отложено время  $\tau$ . По вертикали отложен уровень сигнала (дБ). На этом рисунке четко видны два импульса, соответствующие положению моделируемых отражателей сигнала, причем шум не добавлялся. Внизу видна не шумовая дорожка, а боковые лепестки, получающиеся при корреляционной обработке сигналов [24]. На рис. 3.11 изображен результат такой же обработки так же моделированных сигналов, но с одним существенным изменением. В качестве зондирующего сигнала использовался сигнал ЗСС. Как видно из сравнения рис. 3.10 и 3.11, сигнал ЗСС не дает тех результатов, которые следует ожидать при корреляционной обработке действительно широкополосного сигнала. Значит, для традиционной корреляционной обработки ЗСС должен рассматриваться как узкополосный. На рис. 3.12 приведен результат обработки тех же сигналов по формуле (3.2.3). Здесь ЗСС является безусловно широкополосным сигналом.

Соотношение (3.2.2) можно использовать иначе, не прибегая к операции деления спектра на спектр. Как принято поступать при комплексном спектральном анализе [25], прологарифмируем (3.2.3):

$$\ln(C_y(\omega)) = \ln(C_x(\omega)) + \ln(z(\omega)). \quad (3.2.5)$$

Используемый здесь логарифм от комплексной функции  $S$  означает следующую операцию [25]:

$$\ln(S) = \ln(|S|) + i \arg(S). \quad (3.2.6)$$

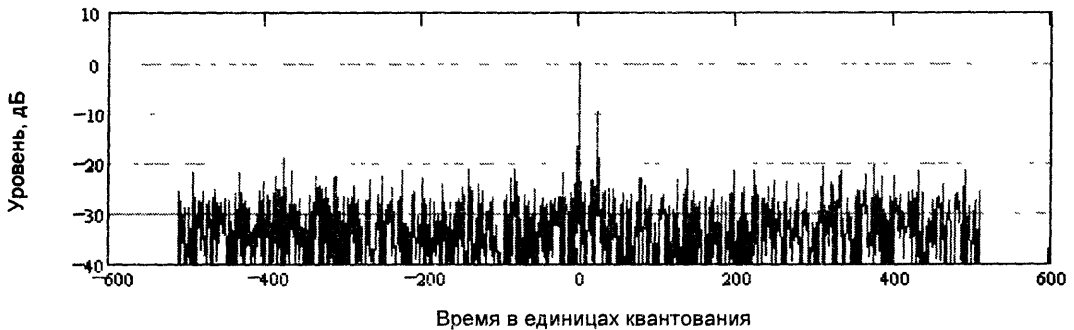


Рис. 3.10. Отклик локатора, обладающего длительным, широкополосным шумовым зондирующим сигналом, получен путем свертки сигнала, принятого локатором, с зондирующим сигналом. Моделировались две цели.

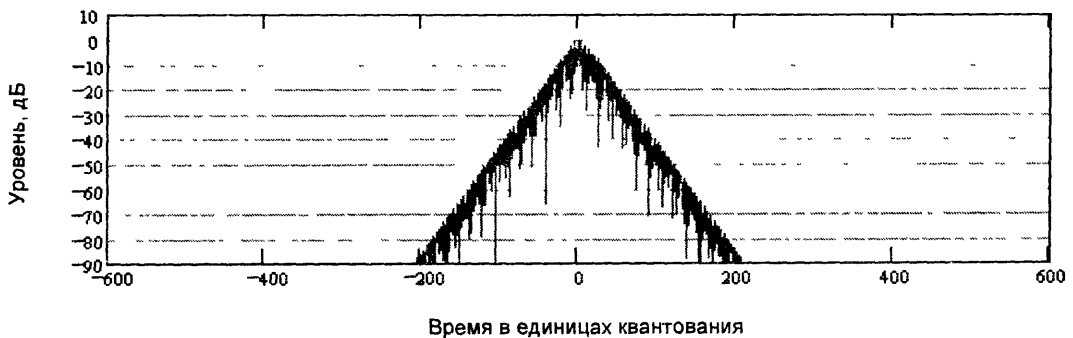


Рис. 3.11. Отклик локатора, обладающего узкополосным зондирующим сигналом, полученный путем свертки сигнала, принятого локатором, с зондирующим сигналом. Моделировались две цели.



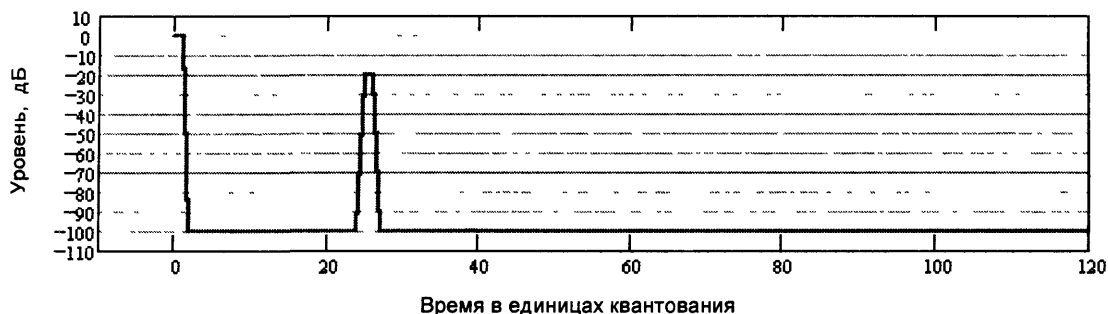


Рис. 3.12. Отклик локатора, обладающего узкополосным зондирующим сигналом, полученный путем расширения спектра сигнала. Моделировались две цели.

Далее, при кепстральном анализе полагается использовать различия в спектрах (кепстрах) двух слагаемых (3.2.5) с целью их разделения путем фильтрации [25]. В нашем случае разные спектры (кепстры) должны иметь логарифмы спектров отклика и принятого сигнала локатора. Это можно обеспечить специальными приемами. Основным из них является выбор такого значения аргумента в функции (3.2.6), которое обеспечивает постоянное нахождение на одном листе этой многолистной многозначной периодической функции [25]. Для этого надо в соответствующие моменты достижения этой функцией границ добавлять к ней или убавлять от нее постоянное слагаемое величиной в  $2\pi$ , как уже было сказано выше в разд. 1.7. Эта операция позволяет сделать спектры (кепстры) максимально низкочастотными. Однако этого недостаточно, чтобы кепстры разделились по частоте. Можно применить следующий прием. Перед логарифмированием принятого сигнала его надо задержать, дополнив нулями, и прибавить зондирующий сигнал такой амплитуды, чтобы его максимальное значение превышало максимум принятого задержанного сигнала. В результате такой операции кепстр сигнала смещается вверх по частоте на величину задержки, а по своей форме становится идентичным сигналу  $x(t)$ .

Сдвиг кепстра по частоте объясняется свойством преобразования Фурье превращать сдвиг функции в смещение ее частоты. Кепстр приобретает вид сигнала  $x(t)$  в результате добавления к задержанному сигналу достаточно интенсивного зондирующего сигнала  $h(t)$ . При этом аргумент суммарного сигнала становится близким к аргументу  $h(t)$ , изменяясь относительно него с частотой сигнала  $x(t)$ .

В результате кепстр суммы сигналов имеет вид, показанный на рис. 3.13, где приведены один под другим два кепстра, отличающиеся скоростью убывания со временем амплитуды зондирующего сигнала. Вдоль горизонтали отложена частота (сачтота) (с нулем в центре рисунка). Вдоль вертикали отложен уровень кепстра в децибелах. Кепстр, имеющий более быстрый спад зондирующего сигнала, увеличен на 80 дБ. Низкочастотная часть кепстра содержит кепстр зондирующего сигнала, который в силу того, что аргумент превращен в однолиственную функцию, максимально узок. Выше по частоте (сачтоте), начиная с частоты (сачтоты), соответствующей задержке сигнала, виден кепстр входного сигнала, представляющего спектр от его спектра, равный  $x(t)$ . Кепстр входного сигнала отделяется от кепстра зондирующего сигнала фильтром. После этого каждый кепстр может быть подвергнут обратным преобразованиям (спектральному и потенцированию). Результат такого восстановления локационного сигнала приведен на рис. 3.14, на нем изображен также модуль зондирующего сигнала в логарифмическом масштабе (дБ).

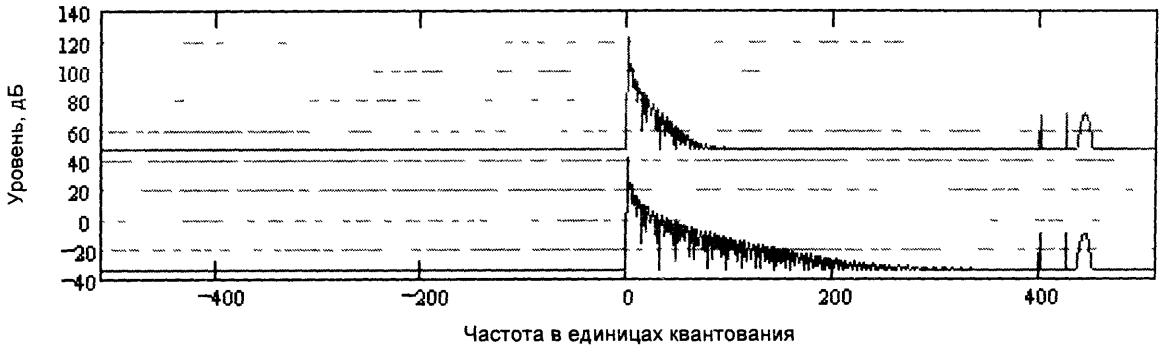


Рис. 3.13. Кепстр отклика лоатора, обладающего узкополосным зондирующим сигналом. Две кривые отличаются шириной спектра зондирующего сигнала, одна из кривых смещена вверх.

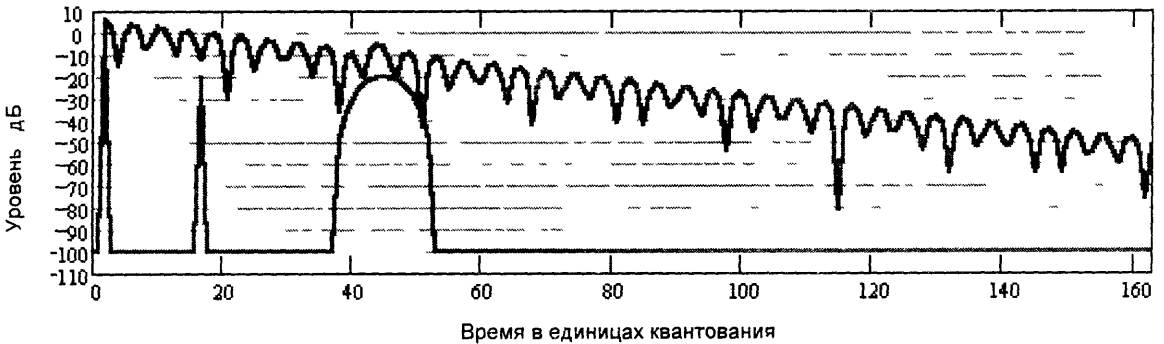


Рис. 3.14. Отклик лоатора, обладающего узкополосным зондирующим сигналом. Вверху – отклик без расширения спектра. Внизу – отклик, кепстр которого выделен путем фильтрации из кепстра, показанного на рис. 3.13.

Полученный таким образом результат не отличается от результата, полученного путем фильтрации спектров ни по виду сигнала, ни по отношению сигнала к шуму. Отличие заключается только в самой процедуре получения исходного локационного отклика. Принципиальным отличием использованных процедур является то, что деление спектра требует для своего осуществления отдельного канала, содержащего функцию  $h(t)$  или ее спектр. Кепстральная процедура основана на фильтрации. Ее применение не требует отдельного канала для зондирующего сигнала, его следует только добавить к задержанному сигналу ради изменения формы кепстра сигнала. В принципе, возможна такая ситуация, когда достаточно сильный зондирующий сигнал присутствует среди принятых отраженных сигналов, отличаясь от них временем прихода, достаточным для отделения его кепстра от кепстра других отраженных сигналов. Это очень существенное обстоятельство. Дело в том, что спектр самого излучаемого зондирующего сигнала неизвестен, так как его форма существенно корректируется в процессе усиления и излучения самого сигнала. Например, сигнал (и его спектр), излучаемый громкоговорителем, не соответствует с нужной степенью точности подаваемому на него электрическому возбуждающему сигналу.

Существует весьма близкая аналогия между рассмотренным способом нахождения исходного локационного сигнала и теми преобразованиями полей, которые осуществляются при формировании изображений [3]. Для описания изображения в монохроматическом волновом поле воспользуемся так называемой комплексной амплитудой волнового поля  $p(x, y, z)$  [3]. Здесь  $x, y, z$  – координаты точек пространства, модуль  $p(x, y, z)$  является амплитудой волнового поля, а ее аргумент – фазой. Если эту функцию

задать на плоскости  $z = 0$ , то дальнейшее распространение поля вдоль свободного пространства при  $z > 0$  можно описать с помощью процесса фильтрации следующим образом [3]:

$$G_z(u_1, u_2) = G_0(u_1, u_2) \zeta_z(u_1, u_2), \quad (3.2.7)$$

где  $u_1, u_2$  – пространственные частоты, соответствующие координатам  $x, y$ .  $G_z(u_1, u_2)$  – фурье-спектр комплексной амплитуды в плоскости  $z = z$ ,  $G_0(u_1, u_2)$  – фурье-спектр комплексной амплитуды в плоскости  $z = 0$ , а  $\zeta_z(u_1, u_2)$  – так называемая частотная характеристика свободного пространства, равная [3]:

$$\zeta_z(u_1, u_2) = \exp \left\{ iz \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} - (u_1)^2 - (u_2)^2} \right\}. \quad (3.2.8)$$

Здесь  $\lambda$  – длина волны. Формула (3.2.7) полностью эквивалентна соотношению (3.2.2). В силу этого она может быть использована для нахождения одного поля по известному другому. Это облегчается тем, что частотная характеристика свободного пространства, определяемая (3.2.8), известна. Примеры применения алгоритма (3.2.3) для нахождения волновых полей приведены в [3, 6].

Особенностью, отличающей задачу распространения волн от локационной, является не только то, что частотная характеристика свободного пространства является заданной функцией и всегда известна, но и вид этой функции (3.2.8). У нее модуль равен единице для всех распространяющихся волн, и спектр ее расширяется за счет фазы. В ЗСС дело обстоит как раз наоборот: фаза практически постоянна (изменение фазы во всем спектре укладывается в интервал  $2\pi$ ), а спектр расширяется за счет изменения амплитуды. Поэтому сигнал ЗСС для традиционной локации является узкополосным сигналом. Для определения функции  $x(t)$  нельзя использовать традиционный алгоритм свертки (3.2.4). В случае определения распределений комплексных амплитуд (изображений [3]) применимы оба алгоритма, как (3.2.4), так и (3.2.3). Поэтому для описания распространения волн в свободном пространстве (все наиболее интересные случаи преобразования изображений могут быть сведены к этому [3]) применим метод, основанный на соотношении (3.2.4), с таким же успехом, как и метод, основанный на соотношении (3.2.3). Следствием этого является существование двух различных трактовок получения радиоизображений с помощью синтезируемой апертуры. Подход, основанный на соотношении (3.2.4), ближе радиоспециалистам и весьма широко распространен. В работах [3, 26], и по-видимому только там, изложен подход к формированию радиоизображений с помощью апертурного синтеза на основе соотношения (3.2.3), который должен быть ближе оптикам.

Очень существенным для использованного преобразования является изменение соотношения сигнала к шуму. Рассмотрим это подробнее.

Эффект сжатия достигается благодаря выравниванию спектра сигнала по всей его ширине вплоть до частоты временного квантования. При этом длительность сжатого сигнала составляет один интервал временного квантования, в то время как длительность первоначального сигнала может составлять сотни и тысячи таких точек. При "выпрямлении" спектра области малых спектральных амплитуд, которые присутствуют в основном в спектрах рассматриваемых узкополосных сигналов, приходится умножать на относительно большие множители. Эта операция происходит в присутствии шумов, которые тоже умножаются на те же множители. Возникает вопрос о степени помехоустойчивости такой процедуры.

Начнем с уточнения понятия помехоустойчивости. От этого зависит знак полученного результата. Целесообразно дать определение помехоустойчивости, специфическое для целей локации. Определение отношения сигнала к шуму оперирует со статистическими характеристиками как сигнала, так и шума. Основной статистической характеристикой является так называемое стандартное отклонение, определяемое как

$$S = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_i (x_i - a)^2}, \quad (3.2.9)$$

где  $x_i$  – совокупность  $N$  значений сигнала или шума,  $a$  – среднее значение этой совокупности значений. В рассматриваемых нами случаях  $a = 0$ , так что  $S$  приобретает физический смысл корня квадратного от мощности рассматриваемого процесса. Введя стандартные отклонения для сигнала  $S_S$  и шума  $S_N$ , отношение сигнала к шуму запишем в виде

$$A = \frac{S_S}{S_N}. \quad (3.2.10)$$

Выражение (3.2.10) определяет обычное отношение сигнала к шуму. В локации отношение (3.2.10) много меньше единицы, так как узкий импульс, применяемый в локации, содержит очень мало энергии. Однако в этом случае сигнал отчетливо виден на экране локатора, если в наблюдаемом нами импульсе его максимальное значение  $S_{\max}$  много больше шума. При этом для нас не имеет значения, каково здесь отношение (3.2.10). Локационное отношение сигнала к шуму запишем в виде

$$B = \frac{S_{\max}}{S_N}. \quad (3.2.11)$$

Отношение (3.2.11) положим в основу наших расчетов. Результат расчета в первую очередь зависит от того, на каком этапе обработки сигнала поступает шум, и от того, какой из этих этапов берется для сравнения. Есть зависимость и от формы импульса. Для начала рассмотрим такой случай, когда шум подается туда же, где помещается объект локации. На практике это соответствует так называемой реверберационной помехе, которая образуется вследствие рассеяния зондирующего импульса на случайных неоднородностях среды (каплях дождя, кустах, облаке пассивных помех и т. п.). Такой тип помехи является преобладающим в низкочастотной гидроакустике. В этом предположении спектр принимаемого локатором шума имеет тот же вид, что и спектр принимаемого сигнала. Такой шум, обладающий равномерным спектром, можно получить, пропустив его через фильтр, имеющий частотную характеристику  $z(\omega)$ , форма которой совпадает со спектром зондирующего импульса локатора.

Процедура обработки сигнала с целью его сжатия заключается в том, что каждая мгновенная реализация комплексного фурье-спектра принятого сигнала вместе со спектром шума делится на комплексный спектр зондирующего сигнала  $z(\omega)$ , после чего выполняется обратное преобразование Фурье. Эта цепочка преобразований обратима. Соотношение максимальных амплитуд в начальном импульсе и в сжатом не зависит от того, сжимаем ли мы импульс путем деления его спектра на  $z(\omega)$  или, наоборот, растягиваем его путем умножения спектра предельно короткого импульса на то же  $z(\omega)$ . Пользуясь обратимостью преобразования, будем обсуждать последний случай.

Пусть форма зондирующего импульса до сжатия имеет вид затухающей косинусоиды. Такую форму принимает отклик колебательного контура на короткий импульс. Для нас существенно, что максимум отклика контура не будет изменяться в зависимости от добротности контура или от скорости затухания в нем свободных колебаний. Под действием короткого возбуждения контур будет совершать колебания от той амплитуды, которой он успел достичь за время толчка. Шум при сделанном нами предположении представляет собою толчки столь же малой длительности, но следующие хаотично один за другим. Примем, что средняя амплитуда одного толчка шума равна величине толчка  $S_{\max}$ , который на контур оказывает сигнал. Это равносильно предположению, что отношение  $B$ , определяемое (3.2.11) в результате сжатия сигнала становится равным единице. Толчки от шума суммируются контуром в течение длительности его отклика  $T$ . Условимся измерять  $T$  числом интервалов временного квантования до спада амплитуды зондирующего сигнала на 2 дБ. Величина интервала  $T$ , измеренная в точках отсчета, будет означать и величину сжатия узкополосного сигнала, поскольку он сжимается до одной точки отсчета. Стандартное отклонение колебаний в контуре под действием случайных толчков запишется следующим образом:

$$S_N = S_{\max} \sqrt{T}. \quad (3.2.12)$$

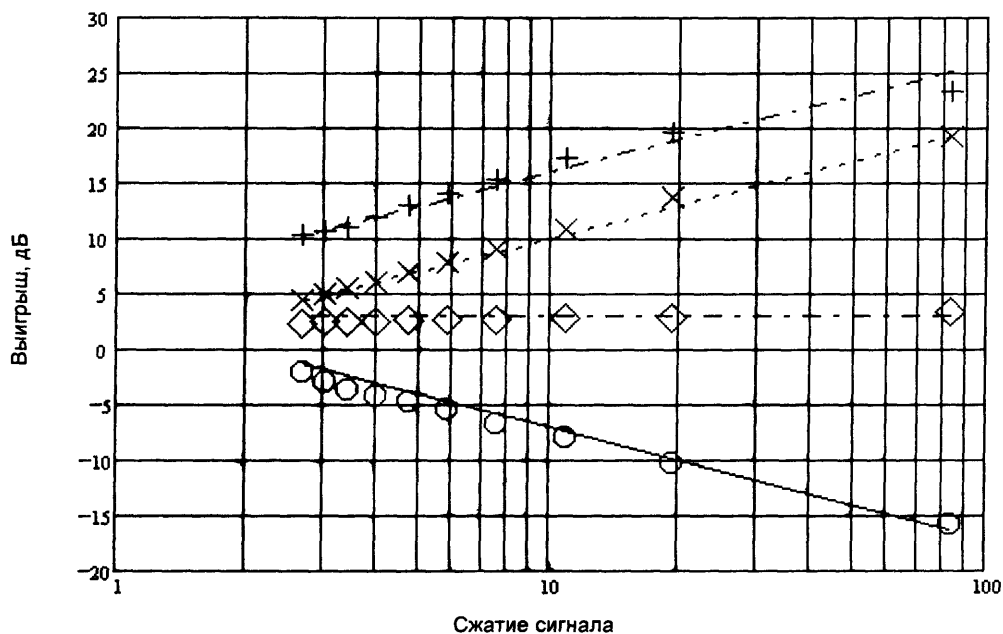
На основании (3.2.12) локационное отношение сигнала к шуму, если оно после сжатия сигнала равно 1, на начальном этапе до сжатия сигнала будет равно  $\sqrt{T}$ . Следовательно, переход к конечному этапу со сжатием сигнала в  $T$  раз должен сопровождаться увеличением помехоустойчивости как  $10 \lg T$ .

На рис. 3.15 представлен результат теоретического расчета и численного моделирования. По осям отложено: вдоль горизонтали – сжатие сигнала  $T$  (в логарифмическом масштабе), а вдоль вертикали – увеличение отношения сигнала к шуму  $B$ , определяемое (3.2.11), которое произошло в результате сжатия сигнала. Сплошными линиями показаны результаты аппроксимации, выполненной в соответствии с расчетами, а точками отмечены результаты численного моделирования задачи при различных условиях. На рис. 3.15, *a* показан выигрыш, получаемый при зондирующем импульсе, имеющем форму затухающего косинусоидального сигнала, а на рис. 3.15, *б* – то же для импульса прямоугольной формы.

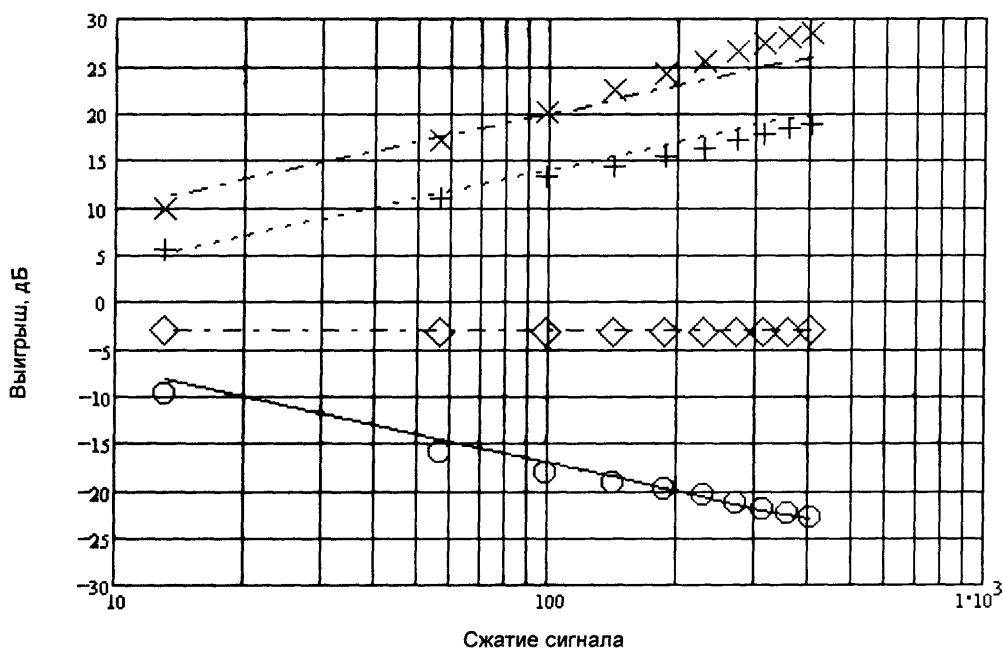
Рассмотренный выше случай показан на рис. 3.15, *a* точками в виде косых крестиков. Аппроксимирующая прямая (пунктир) проведена по закону:  $10 \lg T$ , что согласуется с формулой (3.2.12).

Точками в виде прямых крестиков на рисунке *a* показан выигрыш, полученный в результате сжатия импульса после двукратного прохождения через фильтр, имеющий частотную характеристику колебательного контура. В этом случае выигрыш возрастает на 6 дБ. Увеличение выигрыша произошло в результате деформации формы отклика на одиночный начальный импульс. Отклик приобретает форму, при которой отношение максимума отклика к его стандартному отклонению убывает на 6 дБ.

Рассмотрим случай, когда шум, имеющий равномерный спектр, поступает в локагор вместе с отраженными сигналами от целей. Если приемный тракт локатора широкополосный, то в процессе обработки сигнала с целью его сжатия принятый сигнал и шум делятся на одну общую для них функцию  $z(\omega)$ . Эта функция почти на всем спектре убывает как  $1/\omega$ . В результате при такой подаче шума отношение сигнала к шуму практически не зависит от величины сжатия сигнала и близко к единице. Соответствующий график показан на рис. 3.15. Точки, соответствующие вышеописанной схеме подачи шума, показаны косыми квадратами. Штрих-пунктирная линия проведена на уровне 3 дБ.



а



б

Рис. 3.15. Выигрыш в отношении сигнала к шуму, получаемый в результате сжатия узкополосного импульса экспоненциальной формы (а) и в результате прямоугольного узкополосного импульса (б):

- +++ – реверберационный шум, дважды подвергшийся фильтрации;
- xxx – тот же шум при однократной фильтрации;
- ddd – широкополосный шум;
- ooo – узкополосный шум.

Однако приемный тракт локатора не следует делать широкополосным. Различие в форме спектров сигнала и шума можно использовать для увеличения отношения сигнала к шуму, пропустив принятый локатором сигнал через фильтр с частотной ха-

рактической  $z(\omega)$ . Тогда в этом сигнале соотношение сигнала к шуму возрастет примерно как  $10 \lg T$ , а соотношение сигнала к шуму в сжатом сигнале остается прежним. В соответствии с этим выигрыш, получаемый при сжатии сигнала, уменьшается, превращаясь в проигрыш. На рис. 3.15, а точки, показывающие результат численного моделирования этого случая, отмечены кружочками, сплошной линией показана зависимость:  $-10 \lg T + 3$  дБ.

На рис. 3.15, б линия, помеченная прямыми крестиками, проведенная для случая двукратного прохождения сигнала через фильтр, лежит ниже линии, показанной прямыми крестиками. Это объясняется тем, что для прямоугольного импульса, превращающегося в треугольный, отношение максимума к стандартному отклонению не убывает, а возрастает примерно на 5 дБ. Аппроксимирующие прямые на рис. 3.15, б проведены следующим образом (сверху вниз):  $10 \lg T$ ;  $10 \lg T - 6$ ;  $-3$ ;  $-10 \lg T + 3$ .

Особого пояснения требует график, помеченный косыми квадратиками. Он приобретает вид, показанный на рис. 3.15, б, только в том случае, если форма зондирующего сигнала не совсем прямоугольная, т. е. импульс сформирован так, что не обращается в нуль сразу по истечении его длительности, а имеет крутой экспоненциальный спад. Если же оставить форму импульса в точности прямоугольной, то этот график приобретет форму, показанную на рис. 3.16. На этом рисунке вдоль горизонтали отложена длительность импульса в точках отсчета в линейном масштабе. По вертикали отложен выигрыш, получаемый при сжатии прямоугольного сигнала до одной отсчетной точки. Получающаяся на графике зависимость выигрыша от длительности импульса обязана преобразованию величины только шума. Сигнал сжимается без каких-либо особенностей. Причудливая регулярная зависимость выигрыша сжатия от длительности импульса объясняется тем, что в спектре импульса появляются нули, которые попадают (или не попадают) на дискретные точки отсчета спектра. Отметим, что это обстоятельство сказывается только на одной зависимости, все остальные получены при идеально прямоугольной форме импульса.

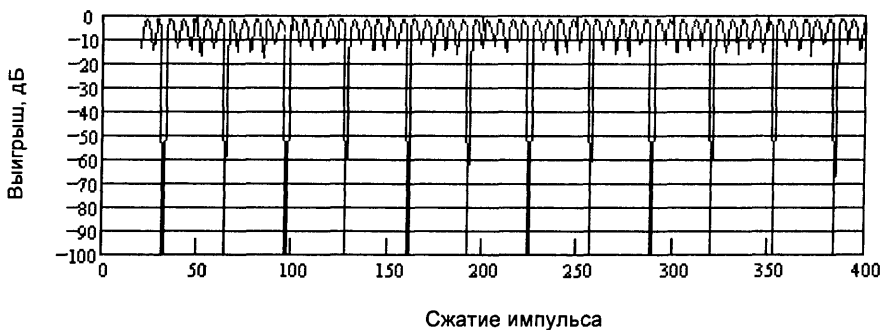
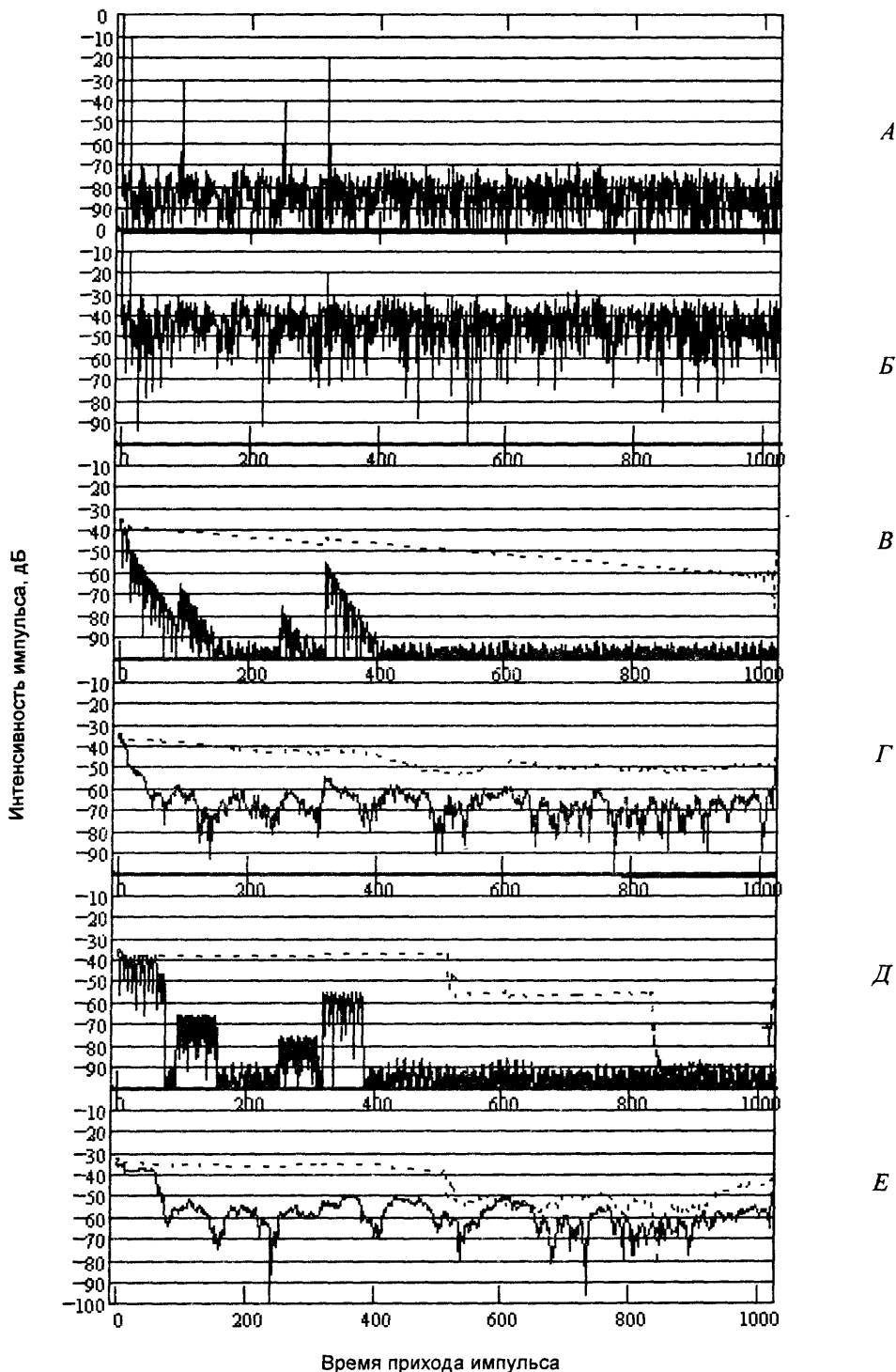


Рис. 3.16. Выигрыш в отношении сигнала к шуму при сжатии идеально прямоугольного импульса и белого шума на входе локатора.

Процедуру сжатия узкополосного сигнала целесообразно использовать не только в том случае, когда получается выигрыш в отношении сигнала к шуму. Для локации несравненно более существенным оказывается выигрыш в разрешающей способности. Иллюстрацией этого может служить рис. 3.17, на котором приведены примеры картин на экране локатора, наблюдавшихся при численном моделировании. Вдоль горизонтали отложено время в точках отсчета, а по вертикали отклик локатора на сигнал и шум относительно максимального уровня сигнала локатора. Показаны отклики сигнала после сжатия при большом (А) и малом (Б) отношениях сигнала к шуму; откли-

ки локатора до сжатия (*В, Г*) для импульса в виде затухающей косинусоиды при большой длительности (несколько сотен точек) (пунктир) и малой длительности (15 точек) (сплошная линия).



**Рис. 3.17.** Осциллограммы сигналов локатора: *А, Б* – осциллограммы сжатых импульсов для большого и малого отношений сигнала к шуму; *В, Г* – осциллограммы до сжатия для тех же отношений сигнала к шуму. Сплошная линия – короткие импульсы, пунктир – длинные. *Д, Е* – то же, что и *В, Г*, но для прямоугольных импульсов.



## Mathcad Plus 6.0

Массив данных; диапазонные переменные  
 $L = 1024$   $k = 0..L-1$   $kk = 0..0.5 \cdot L - 1$   $q = 0..9$

Параметры зондирующего сигнала  
 $f2 = 80$   $a_q = 0.003 + 0.01 \cdot q$

Величины задержек отраженных сигналов

$$d1 = 12 \quad d2 = d1 + 50 \quad d3 = 150 \quad d4 = 200$$

Входной сигнал

$$EL_k = \Phi(0, k) \cdot 1 \quad x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k$$

Зондирующий сигнал

$$A_{k,q} = \cos(x_k \cdot f2) \cdot \exp(-a_q \cdot k)$$

Формирование задержек

$$O(F, x, y) = \begin{cases} (F_x - y) & \text{if } x = y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Уровень шума

$$att = 10^4$$

$$U = \text{rnorm}(L, 0, 1) \cdot zc^{<q>} \quad \text{cfft } A^{<q>}$$

Входной сигнал локатора при дискретных отражениях

$$B_k = EL_k \cdot 1 + O(EL, k, d1) \cdot 0.3 \cdot (1) + O(EL, k, d2) \cdot 0.03 + O(EL, k, d3) \cdot 0.01 + O(EL, k, d4) \cdot 0.1$$

$$B2_k = B_k + att \cdot U_k \quad GS = \text{cfft}(B) \quad GSY_{k,q} = GS_k \cdot zc_{k,q} \cdot \sqrt{L} \quad \text{Узкополосный зондирующий}$$

$$LB_k = 20 \cdot \log(|B2_k|) \quad mGS_k = |GS_k| \quad rq = \text{mean}(mGS)$$

Спектр шума Спектр зондирующего сигнала Зонд. сигнал

$$GU = \text{cfft}(U) \quad GUY_{k,q} = GU_k \cdot zc_{k,q} / L$$

Спектр и сигнал локатора с узкополосным зонд.

$$G2_{k,q} = GSY_{k,q} + att \cdot GUY_{k,q} \quad SYN^{<q>} = \text{icfft}(G2^{<q>}) \quad UY^{<q>} = \text{icfft}(GUY^{<q>})$$

$$Z(u) = \text{if}(u > 10^5, 20 \cdot \log(u), 5 \cdot 20) \quad SYN1_{k,q} = \text{Re } SYN_{k,q} \quad UY1_{k,q} = \text{Re } UY_{k,q}$$

Дисперсия шума на выходе локатора

$$W_q = \frac{1}{L} \cdot \sum_k (UY1_{k,q})^2$$

Эффективная длительность узкополосного зонд. сигнала

$$WU_q = \frac{1}{a_q \cdot 4}$$

$$\max(SY1) = 1.000$$

$$SY1_{0,9} = 1.000$$

Отношение сигналов к шуму

$$\max(B) = 1.000$$

$$SW_q = \frac{\max(B)}{\text{stdev}(U) \cdot SY1_{0,q}} \cdot \sqrt{W_q}$$

$$T_q = -10 \log(WU_q)$$

Укороченный отклик локатора

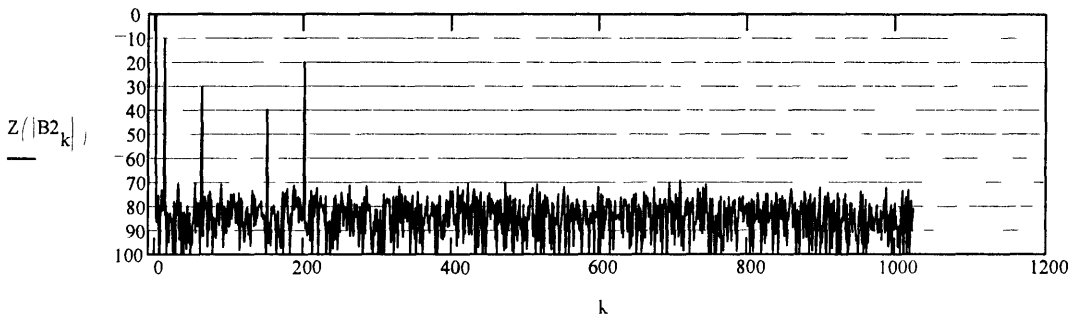
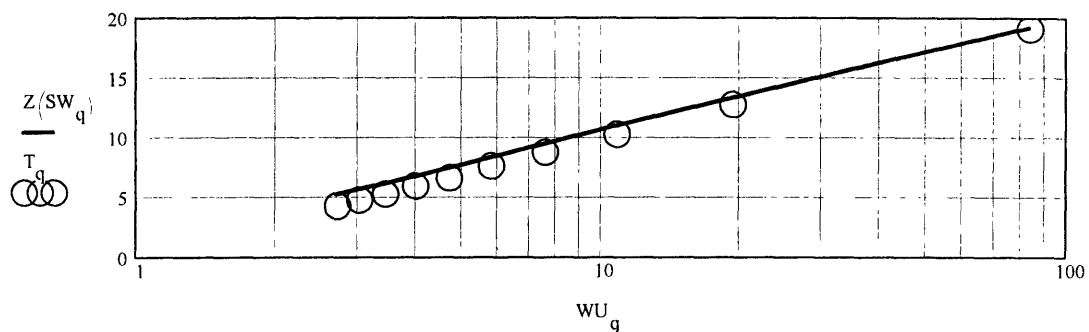
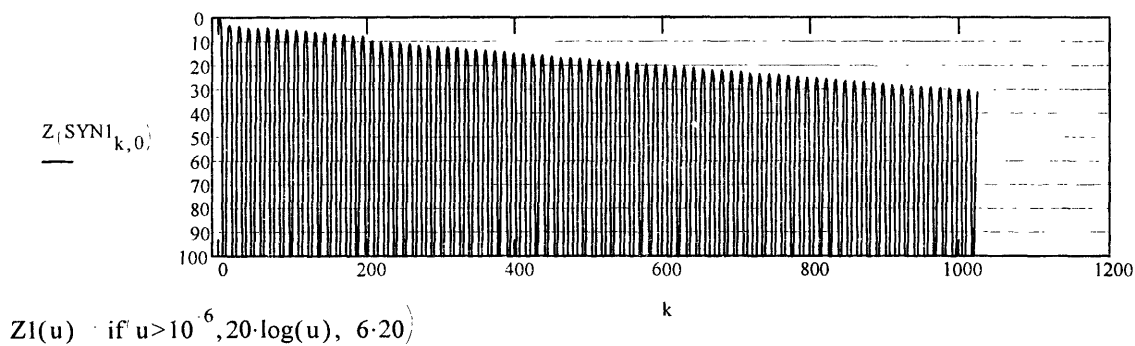


Рис. 3.18. Отношение сигнала к шуму при локации узкополосным сигналом (начало)

Выигрыш в отношении сигнала к шуму в результате  
укорочения зондирующего сигнала



Выходной сигнал локатора без укорочения зондирующего сигнала  
при минимальной эффективной ширине спектра зонда



Выходной сигнал локатора без укорочения зондирующего сигнала  
при максимальной эффективной ширине спектра зонда

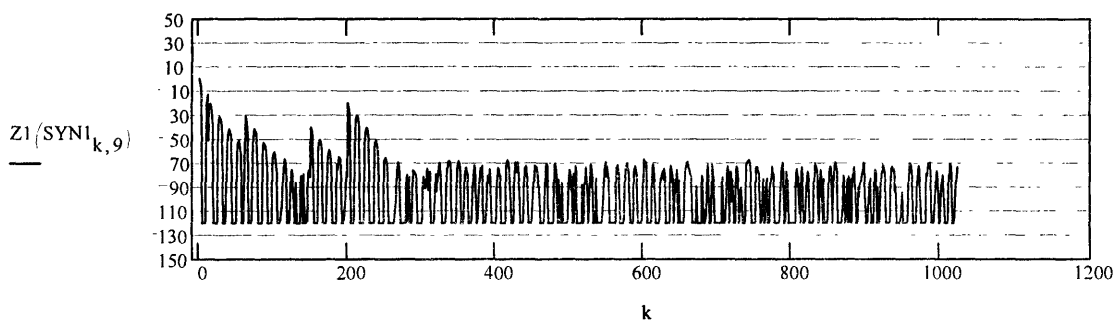


Рис. 3.18 (окончание)

На рисунке *В* (см. рис. 3.17) отношение сигнала к шуму такое, как и на рисунке *А*. На рисунке *Г* сигнал к шуму такой, как на рисунке *Б*. На рисунке *Д* и *Е* показано то же, но для импульса, который до сжатия имел прямоугольную форму. Рисунок 3.17 показывает, что процедура сжатия качественно изменяет наблюдаемую локационную картину. В этом состоит главное преимущество рассматриваемой процедуры обработки локационных сигналов, которое трудно адекватно охарактеризовать количественно. Что касается отношения сигнала к шуму, то его, если это требуется для компенсации проигрыша, можно увеличить, сделав более интенсивным зондирующий сигнал. Отметим, что в том случае, когда рассматриваемая процедура приводит к выигрышу в отношении сигнала к шуму, увеличить этот выигрыш за счет роста интенсивности зондирующего сигнала, как правило, нельзя, так как здесь помеха носит характер реверберации, уровень которой по отношению к сигналу не зависит от уровня зондирующего сигнала. Это обстоятельство делает получаемый в этом случае выигрыш особо привлекательным.

Заметим, что принятый локационный сигнал может быть обработан так, что применение рассмотренной процедуры сжатия будет крайне неэффективным. Например, можно с целью выравнивания формы спектров сигнала и шума применить фильтр, полностью обрезающий (превращающий в нуль) большую часть частотного диапазона. Такая процедура возможна, она увеличит обычное наблюдаемое отношение сигнала к шуму примерно также, как и рассмотренное умножение спектра на  $z(\omega)$ . Однако процедура с занулением части спектра делает невозможной эффективное (во всей полосе частот) сжатие спектра.

Существенно, что величина сжатия сигнала, достигаемая при процедуре деления спектров, не зависит от шума. Сигнал при увеличении шума может "утонуть" в нем, но он при этом не расширяется, сохраняя достигнутую малую длительность при увеличении шума.

Соответствующая программа приведена на рис. 3.18.

### **3.3. Локация на просвет с разделением прямого и дифрагированного сигналов по времени**

Выше рассмотрены методы фильтрации сигнала, позволяющие увеличивать временное разрешение сигналов в локации. В этом разделе, основанном на результатах работы [27], описывается эксперимент, позволивший подобным методом осуществить локацию на просвет без подавления прямого сигнала, воспользовавшись тем, что последний приходит и уходит чуточку раньше, чем приходит сигнал, рассеянный лоцируемой неоднородностью.

Как известно, наибольший, рассеянный целью сигнал, получается в направлении, совпадающем с направлением распространения зондирующего сигнала. Локацию, использующую такие сигналы, назовем локацией на просвет (ЛП). Кроме максимальной величины рассеянного сигнала, существенным преимуществом ЛП является отсутствие влияния поглощения на соотношение между прямым и дифрагированным сигналами. В связи с этим разработаны и получили распространение методы ЛП, основанные на непрерывном режиме излучения. Выделение лоцируемой цели основывается при этом на использовании ее движения в поле непрерывно излучаемого сигнала. Выше уже описывалось, как эта операция выполняется путем обращенного синтеза апертуры в темном акустическом поле [4, 12, 19, 22]. Эти методы применимы не всегда по причинам, которые нельзя устранить путем совершенствования метода, основанного на непрерывном излучении сигнала. Во-первых, непрерывный режим

излучения приводит к сильной реверберации, на фоне которой трудно и не всегда возможно обнаружить слабо рассеивающую цель. Во-вторых, необходимость использования апертурного синтеза для выделения цели накладывает жесткие условия на стабильность параметров ее движения. Без соблюдения этих условий цель выделить нельзя. В опытах, которые были выше описаны, экран перемещался поперек акустической трассы прямолинейно и с хорошо выдержанной постоянной скоростью.

Импульсный режим локации с разрешением целей по времени прихода рассеянных ими сигналов не имеет вышеперечисленных ограничений. Однако использование импульсной локации в ЛП сопряжено с принципиальными трудностями. Для отделения рассеянного сигнала от прямого, распространяющегося почти в одном направлении с рассеянным, требуется большая временная разрешающая способность. Для ее реализации необходима столь широкая полоса частот, которая оказывается много шире технических возможностей мощного акустического излучающего комплекса.

В предыдущем разделе и в работе [23] показано, что возможно получение высокого пространственного разрешения с использованием синусоидального зондирующего импульса. Эффективная полоса приема сигнала может быть увеличена в процессе совместной обработки принятого и зондирующего сигналов [23]. Метод эффективен, если зондирующий сигнал известен точно. Это бывает при математическом моделировании задачи, а в реальной ситуации этого может и не быть. Достаточно большую неопределенность может внести частотная характеристика излучающего тракта. В настоящей работе предлагается способ увеличения эффективной полосы приема сигнала, не опирающийся на известную форму зондирующего сигнала.

Для расширения полосы приема предлагается использовать совместную обработку принятых эхо-сигналов с одним из них, а не с зондирующим. В отличие от приема, использованного выше и в [23], это приводит к тому, что локация становится интерференционной, позволяя определять лишь интервал задержек между наибольшим из принятых сигналов и всеми остальными, а не абсолютную задержку принятых сигналов по отношению к времени посылки. В случае ЛП самым большим сигналом является прямой сигнал. В силу этого интерференционная локация позволяет определить наличие слабого относительно прямого рассеянного сигнала и величину задержки относительно него. Другим плюсом предлагаемого способа осуществления временной селекции сигналов в ЛП является возможность селекции движущейся цели. Цель становится заметной (в отличие от апертурного синтеза), если она движется по произвольной траектории и не обязательно равномерно.

Суть метода и его возможности иллюстрируются численными расчетами, выполненными путем математического моделирования задачи. Полученные при этом результаты сопоставляются с результатами натурального эксперимента, проведенного с помощью звуковых волн.

Геометрическая разность хода между прямым и рассеянным сигналами определяется на основе схемы ЛП, показанной на рис. 3.19. Пусть расстояние между излучателем и приемным микрофоном будет  $D$ , а рассеиватель отстоит от центра линии, соединяющей излучатель и приемный микрофон, на расстояние  $d$ . Тогда разность хода между прямым и рассеянным сигналами будет

$$\Delta = 2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + d^2} - D \approx 2\frac{d^2}{D}. \quad (3.3.1)$$

Заметим, что величина  $\frac{d}{D}$  при условии, что она мала, представляет собой угол, под которым принимается дифрагированный на рассеивателе сигнал, отсчитанный относительно направления распространения прямого сигнала. Чем этот угол меньше, тем рассеянное излучение интенсивнее. Поэтому следует стремиться к возможности наблюдать рассеиватель при как можно меньшем отношении  $\frac{d}{D}$ , что связано с необходимостью разделять по времени сигналы,

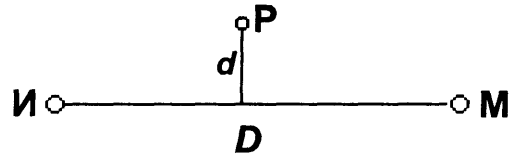


Рис. 3.19. Схема эксперимента: И – излучатель, М – микрофон, Р – рассеиватель, сплошная линия – воображаемая линия (осевая линия), соединяющая излучатель и микрофон;  $D$  – расстояние между излучателем и микрофоном;  $d$  – отклонение рассеивателя от осевой линии.

обладающие весьма малой разностью хода. Пусть  $d$  и  $D$  в (3.3.1) таковы, каковы требуются для успешного осуществления ЛП. Тогда длительность соответствующего интервала времени между приходами прямого и рассеянного сигналов определяется соотношением (3.2.1), из которого следует, что универсальное соотношение между временем разрешения сигналов и требуемой для этого полосой частот  $\Omega$  выглядит следующим образом:

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (3.3.2)$$

Соотношение (3.3.2), как это уже упоминалось выше, нерушимо. Требуемое временное разрешение, казалось, можно осуществить, только располагая излучателем и средой излучения, способными пропустить полосу частот  $\Omega$  без существенного ослабления входящих в нее частот. Однако это не совсем так. Ввиду линейности задачи можно в мощном зондирующем сигнале иметь сильную неоднородность излучаемого спектра, которая компенсируется при приеме сигналов [23].

В случае приема прямого и идентичного ему задержанного сигнала на время  $\tau$ , спектр суммы таких сигналов как функция частоты  $\omega$  будет

$$S(\omega) = S_0(\omega)[1 + a \exp(i\omega\tau)], \quad (3.3.3)$$

где  $S_0(\omega)$  – спектр зондирующего сигнала, который может быть существенно неравномерным;  $a$  – доля рассеянного сигнала относительно прямого.

Для существенного расширения полосы частот, участвующей в обработке сигнала, спектр  $S(\omega)$  принимаемого сигнала преобразовывался по следующей формуле [23]:

$$SP(\omega) = \frac{S(\omega)}{SR(\omega)}, \quad (3.3.4)$$

где  $SR(\omega)$  – спектр сигнала сравнения, изменяющий спектр сигнала  $S(\omega)$  так, что он становится равномерным. Наилучшим сигналом сравнения является сигнал, спектр которого (с точностью до постоянной задержки) совпадает с  $S_0(\omega)$ . Вопрос состоит в том, откуда взять такой сигнал. При математическом моделировании вопроса нет, а практически  $S_0(\omega)$  представляет собой произведение двух функций – это спектр электрического сигнала, поданного на излучающий тракт (этот спектр может быть

известен), и частотной характеристики самого излучающего тракта, которая не известна с необходимой точностью во всем частотном диапазоне.

В работе [27] предлагается в качестве сигнала сравнения использовать сигнал, принимаемый локатором в какой-то конкретный момент времени. Чтобы показать, что этого достаточно, представим себе, что в знаменателе формулы (3.3.4) стоит принятый сигнал ЛП в тот момент, когда рассеиватель находится между излучателем и приемником, располагаясь при этом точно на линии, их соединяющей. Спектр сигнала, принятого в момент такого "затмения" излучателя рассеивателем, будет согласно (3.3.3) (в котором следует положить  $\tau = 0$ ) как раз искомым  $S_0(\omega)$ , идеально подходящим для того, чтобы служить сигналом сравнения в (3.3.4).

Рассмотрим ситуацию в более общем случае, когда в знаменателе формулы (3.3.4) стоит спектр сигнала, принятого в произвольный момент времени. Пусть в формуле (3.3.3) задержка рассеянного сигнала  $\tau$  является функцией времени  $t$ . Пусть задержка будет достаточно медленно изменяющейся функцией, такой, что изменение  $\tau$  за время длительности импульса не превышает  $2\pi/\Omega$  (интервала временного разрешения задержек). Тогда можно в (3.3.3) вместо  $\tau$  положить  $\tau(t)$ . Взяв в качестве сигнала сравнения (3.3.3) в момент  $t = t_1$ , выражение (3.3.4) запишем в виде

$$SP(\omega, t) = \frac{S_0(\omega) \{1 + a \exp[i\omega\tau(t)]\}}{S_0(\omega) \{1 + a \exp[i\omega\tau(t_1)]\}}. \quad (3.3.5)$$

Как правило,  $|a| \ll 1$ , что позволяет упростить выражение (3.3.5), приведя его к следующему виду:

$$SP(\omega, t) = 1 + a \exp[i\omega\tau(t)] - a \exp[i\omega\tau(t_1)]. \quad (3.3.6)$$

Так, в текущем спектре функции (3.3.6) будут наблюдаться с временным разрешением  $2\pi/\Omega_p$  две гармонические компоненты, одна из которых сохраняет постоянное значение, а другая перемещается в соответствии с движением рассеивателя. Частота  $\Omega_p$  определяется интервалом временного квантования сигналов. Для получения достаточного разрешения при осуществлении ЛП необходимо, чтобы выполнялось условие:  $\Omega_p \geq \Omega$ .

Численный эксперимент проводился в соответствии с рассказанным в предыдущем разделе и в [23]. Моделировался как сигнал, так и шум. К сигналу прибавлялся задержанный сигнал. Принималось, что задержанный сигнал получается в результате рассеяния на неоднородности, движущейся по траектории, показанной на рис. 3.18. Рассмотрен случай движения рассеивателя по гармоническому закону, что соответствует натурному опыту, а кроме того, убеждает, что возможность выделения сигнала в данном случае весьма слабо зависит от характера его движения.

Изменение задержки во времени приведено на рис. 3.20, *a*, на рисунке *б* – график изменения угла рассеяния в зависимости от изменения величины задержки, показанной на рисунке *a*.

На рис. 3.21, *a* показана форма численно смоделированного зондирующего импульса (на рис. 3.21, *б* то же самое, но в опыте). К сигналу, как и в [23], добавлен шум, его уровень на 40 дБ меньше максимума сигнала. На рис. 3.22 показан результат численного эксперимента с применением разных методов обработки сигнала. На рисунке *a* – обработка сигнала тем же методом, что и в [23]. Сигналом сравнения являлась функция  $S_0(\omega)$ , которая при математическом моделировании задачи известна. На ри-

сунке *б* – результат обработки с использованием в качестве сигнала сравнения одной из реализаций эхо-сигнала. Момент выбран таким, при котором задержка равна нулю (на рисунке *б* он проявился в виде светлой горизонтальной линии). По сравнению с рисунком *а* здесь шум удваивается. Добавленный шум соответствует одному моменту времени и поэтому полностью коррелирован вдоль вертикали. Отношение сигнала к шуму на рис. 3.22, *а* составляет 20 дБ, т. е. рассеянный сигнал задавался во всех случаях меньшим на 20 дБ зондирующего сигнала. Показанная на рис. 3.22, *а* обработка сигнала наиболее помехоустойчивая. При других вариантах обработки помехоустойчивость хуже на 5–7 дБ.

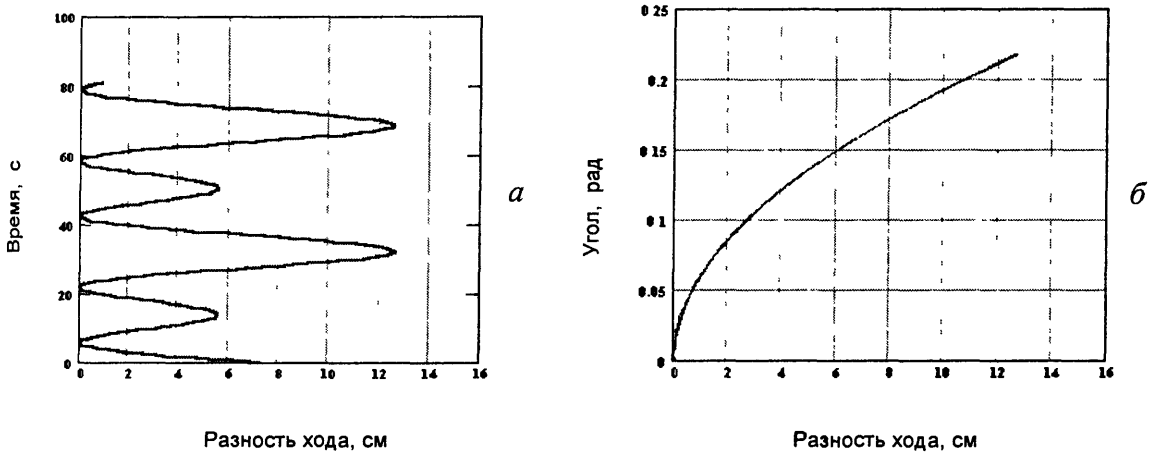


Рис. 3.20. Расчетные зависимости разности хода между прямым и дифрагированным лучами от времени при качании рассеивателя (*а*) и угла между лучами от разности хода между ними (*б*).

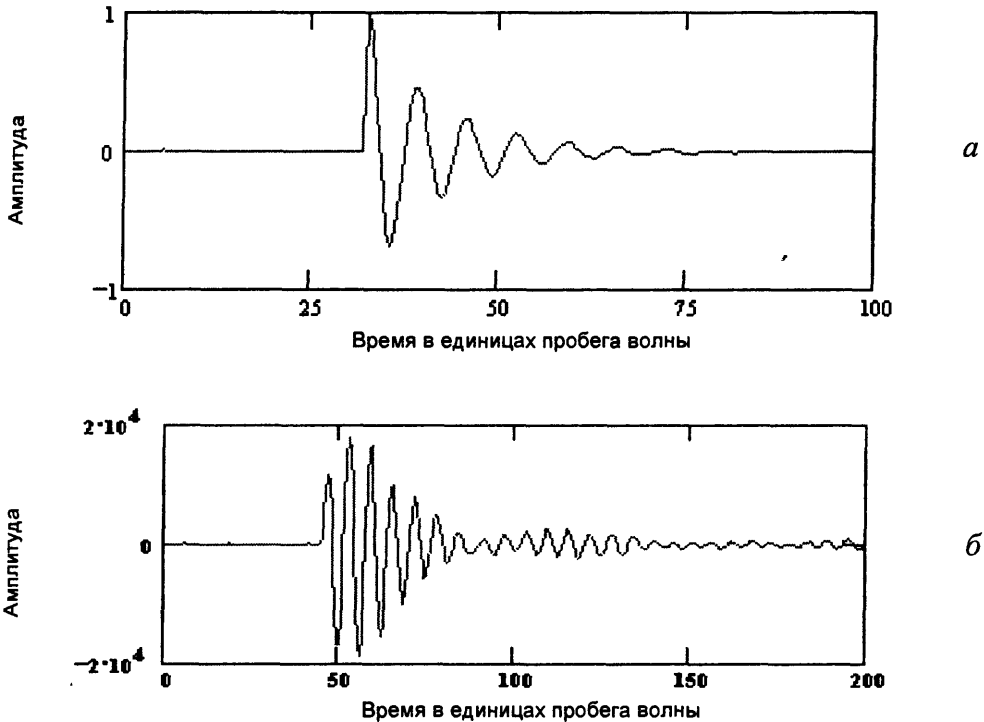


Рис. 3.21. Форма зондирующего импульса, принятая в расчетах (*а*), и импульса, использованного в опыте (*б*).

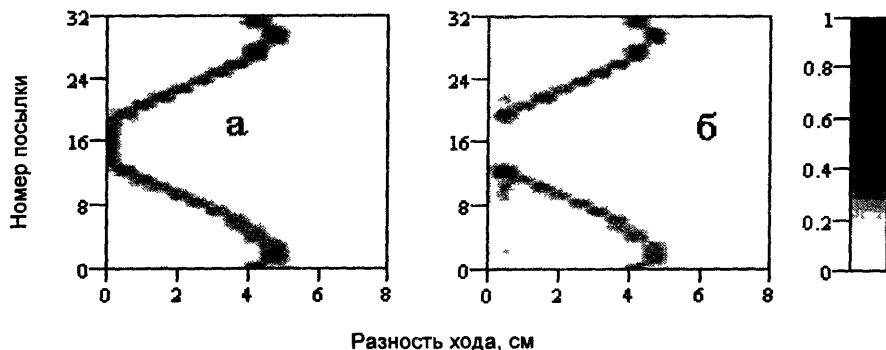


Рис. 3.22. Результат математического моделирования опыта при разных методах обработки сигнала: нормировке на зондирующий импульс (а) и на принятый сигнал (б).

На рис. 3.23 показана математическая программа в пакете *Mathcad 6.0 plus* всех описанных выше действий. Необходимые пояснения приведены в тексте программы.

В эксперименте использовался электродинамический громкоговоритель, на который подавался электрический импульс постоянной амплитуды длительностью 1 мс с частотой заполнения 5,3 кГц. Приемный микрофон был удален примерно на 3 метра от излучателя. Форма сигнала, принимаемого микрофоном, показана на рис. 3.21, б. Используемый нами громкоговоритель имел довольно сложную частотную характеристику, что видно по длинному "хвосту" принятого сигнала. Рассеивателем служила сфера радиусом 10 см. Рассеиватель с помощью мягкого подвеса висел вертикально (вдоль образующей цилиндра) на высоте около 2 м. В ходе опыта рассеиватель свободно качался на подвесе с амплитудой около 30 см, пересекая при этом линию, соединяющую излучатель и приемный микрофон (СИП).

Отношение сигнала к шуму в этом опыте благодаря недостаточной мощности громкоговорителя получилось меньше того, при котором был получен рис. 3.22. В результате рассеиватель был хорошо заметен только в те моменты, когда он находился вблизи линии СИП. Отношение сигнала к шуму удалось увеличить, пожертвовав при этом временным разрешением, путем сокращения спектра (3.3.7) вдвое. Из всего спектра отношения эхо-сигналов протяженностью 62,5 кГц был исключен участок спектра, содержащий высокие частоты (выше 30 кГц), как наиболее зашумленные.

Чтобы изменения в обработке не влияли на сравнение результатов математического моделирования и натурального эксперимента, моделирование было повторено в соответствии с тем, как обрабатывался результат натурального опыта, т. е. из него были убраны те же частоты. На рис. 3.24 приведен результат математического расчета (а) и результат обработки натурального опыта (б), здесь исключен сигнал, представляющий собою спектр второго слагаемого (3.3.7). Селекция произведена на основе различия знаков этих сигналов (исключены отрицательные компоненты спектра). Это было полезно сделать, так как в качестве компенсирующего эхо-сигнала при получении рис. 3.24 была использована сумма двух эхо-сигналов. В результате на этом рисунке отношение сигнала к шуму меньше, но зато отсутствуют светлые полосы, соответствующие тем номерам посылок, которые используются в знаменателе (3.3.6).

Как видно из приведенных рисунков, теория и эксперимент удовлетворительно согласуются. Отличия состоят в том, что в натурном эксперименте сигнал убывает с удалением рассеивателя от линии СИП, а при математическом моделировании этого нет. Возможность использования максимального рассеяния является главным плюсом



## Mathcad Plus 6.0

**Массив**  $L = 1024 \cdot 4$       **Период качания цели**  $T = 3.5$

**Параметры зондирующего сигнала**

**Укорочение посылки**  $N = 2$        $L1 = \frac{L}{N}$       **Частота квантования**  $F = 62500$        $f2 = 80$        $a = 0.005$       **Число посылок**  $M = 32$

$k = 0..L1 - 1$        $kk = 0..0.5 \cdot L1 - 1$        $n = 0..M - 1$        $k1 = 0..L1 - 1$        $ek = 0..15$

**Параметры и закон движения объекта локации**

$ED = 270$        $ED1 = 50$        $EB_{k,n} = ED1 \cdot \cos\left[2 \cdot \frac{\pi}{T \cdot F} \cdot (k + L \cdot n) - 0.08 \cdot \pi\right]$

**Формирование шума**

$U = \text{norm}(L \cdot M, 0, 1)$        $V_{k,n} = U_{k+L \cdot n}$        $GV^{<n>} = \text{cfft}(V^{<n>})$

**Амплитуды сигнала цели шума**

$dif = 0.1$        $att = 10^{2 \cdot 0.3}$

**Разность хода между прямым и рассеянными лучами**       $x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L1} \cdot k$       **Переход к децибелам**  $p = -5$

$er_{k,n} = 2 \cdot \left[\sqrt{ED^2 + (EB_{k,n})^2}\right]$       **Зондирующий сигнал (ЗС)**  $Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$

$u_{k,n} = \text{ceil}(er_{k,n})$        $A_k = \cos(x_k \cdot f2) \cdot \exp(-a \cdot k)$       **Спектр ЗС**  $zc = \text{cfft}(A)$

**Спектр сигнала лоатора**

$GJ_{k,n} = (\exp(i \cdot x_k \cdot u_{k,n}) \cdot dif + \exp(i \cdot x_k \cdot ED \cdot 2)) \cdot zc_k + att \cdot GV_{k,n}$

**Сигнал лоатора без фильтрации**

$J^{<n>} = \text{icfft}(GJ^{<n>})$        $JG_{k,n} = \text{Re}(J_{k,n})$        $MJ = \max(JG)$

**Фильтрация сигнала лоатора**

**Положительная часть сигнала лоатора**

$S_{k,n} = \frac{GJ_{k,n}}{GJ_{k,15}}$        $BA^{<n>} = \text{icfft}(S^{<n>})$        $BA1_{ek,n} = \text{Re}(BA_{ek+1,n}) \cdot \Phi[\text{Re}(BA_{ek+1,n}) \cdot (1)]$

**Формирование шкалы яркостей**       $cA_{k,n} = n$        $cA2 = \max(cA) - cA$

**Формирование негатива**

$MB = \max(BA1)$        $BA2 = MB - BA1$

Сигнал лоатора с фильтрацией (положительная часть сигнала)

Сигнал лоатора без фильтрации

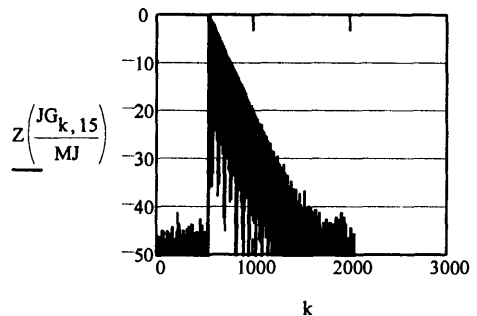
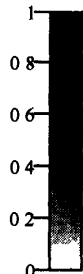
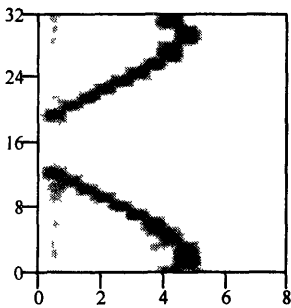


Рис. 3.23. Расчет эффекта в импульсной локации на просвет

применения ЛП. Этот плюс хорошо виден по результатам эксперимента. Видно также, что зависимость наблюдаемых эхо-сигналов от времени на рис. 3.24 при приближении рассеивателя к линии СИП существенно различна – это следствие того, что

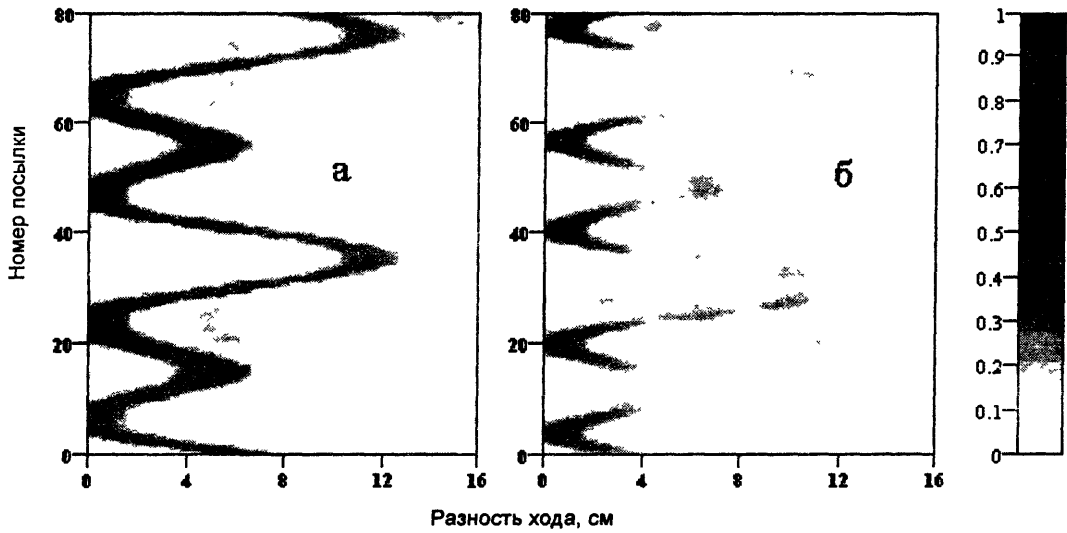


Рис. 3.24. Результат математического моделирования (а) и результат самого опыта (б)

при моделировании использовалась модель точечного рассеивателя, а в эксперименте наблюдался дифрагированный сигнал на сфере конечного радиуса. Возможность наблюдения явления дифракции в акустических экспериментах на просвет позволяет надеяться на возможность экспериментальным путем решить задачу, блестяще решенную теоретически в [28].

## ФАЗОВЫЕ ШУМЫ И РЕВЕРБЕРАЦИЯ

### 4.1. Фильтрация мультипликативно связанных сигналов

До сих пор мы рассматривали так называемую линейную фильтрацию, здесь коснемся другой области фильтрации – нелинейной фильтрации, основанной на кепстральном анализе сигналов.

Существуют два вида мультипликативно связанных сигналов. Могут быть мультипликативно связаны сами сигналы или же их спектры. Примером первого вида мультипликативной связи служат флуктуации амплитуды и фазы волны, возникающие при ее распространении в среде, обладающей неоднородностями. Флуктуации при распространении волны в такой среде можно описать посредством некоторого множителя, изменяющего амплитуду и фазу исходного волнового поля. К этому же виду относятся шумы, возникающие в многоканальных антенных решетках в результате разброса чувствительности и положения элементов решетки. К настоящему времени хорошо изучена физическая природа таких флуктуаций, они и их воздействие на сигнал могут быть оценены практически во всех интересных случаях. Иногда воздействие на сигнал бывает столь сильным, что в нем почти не остается полезной информации, тогда и возникает задача об отделении флуктуаций от сигнала.

Другим видом мультипликативной связи является связь сигналов через их спектры. Примером такой связи служит связь между спектром сигнала и формой комплексной частотной характеристики фильтра, через который прошел этот сигнал. Если частотную характеристику фильтра считать тоже сигналом, то получатся два мультипликативно связанных сигнала. Разделение так связанных сигналов позволяет решить задачу, которая кажется невозможной, а именно: по спектру на выходе фильтра определить, какой сигнал был подан на его вход и частотную характеристику самого этого фильтра.

Поясним, какой смысл мы вкладываем в слово "спектральный", говоря о разделении сигналов. Поясним это на аддитивно связанных сигналах. Пусть два сигнала  $f(x)$  и  $g(x)$  связаны через сигнал  $S(x)$  так, что

$$S(x) = f(x) + g(x). \quad (4.1.1)$$

Задача заключается в том, чтобы по известной функции  $S(x)$  определить каждое слагаемое  $f(x)$  и  $g(x)$  в отдельности. Она имеет решение при соблюдении хотя бы одного из двух условий. Одно из них тривиально и состоит в том, что либо функция  $f(x)$ , либо  $g(x)$  должна быть известна. Но существует и второе, гораздо более мягкое условие, выполнение которого тоже необходимо и достаточно для успешного решения за-

дачи. Это условие не предполагает знания ни  $f(x)$ , ни  $g(x)$ . Оно состоит в том, что спектры  $f(x)$  и  $g(x)$  не перекрываются, чего можно и не знать заранее, а установить на основе спектра известной функции  $S(x)$ , который должен содержать две не перекрывающиеся между собой области. При этом условии задача раздельного определения  $f(x)$  и  $g(x)$  по известной функции  $S(x)$  решается частотной фильтрацией.

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  связаны через сигнал  $S(t)$  мультипликативно:

$$S(x) = f(x)g(x). \quad (4.1.2)$$

Поставим для связанных таким образом функций ту же задачу. Способ ее решения на основе известных  $f(x)$  или  $g(x)$  при мультипликативной связи работает при выполнении дополнительного условия:  $f(x)$  и  $g(x)$  нигде не обращаются в нуль по отдельности. Нас интересует метод, аналогичный спектральному методу для аддитивной связи, позволяющий определять каждый сомножитель в отдельности на основе известной функции  $S(x)$ , основываясь на некоторых общих свойствах спектров функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Такой метод решения задачи мы называем спектральным методом разделения сигналов, связанных мультипликативно.

Поясним, при каких условиях возможно спектральное разделение мультипликативно связанных сигналов, и покажем на конкретных примерах, какими приемами это достигается и каких успехов можно добиться в решении ряда конкретных задач.

Одно из первых решений задачи о разделении мультипликативно связанных сигналов содержится в работе [25], где предложен общий метод решения подобных задач, а в качестве примера приведена задача, упоминавшаяся выше как кажущаяся невозможной: определен сигнал, генерируемый голосовыми связками и поступающий на вход низкочастотного фильтра, формируемого гортанью. Частотная характеристика фильтра гортани тоже была определена.

Предложенный в [25] метод внешне выглядит весьма просто. Он состоит в том, что мультипликативная связь (4.1.2) превращается в аддитивную (4.1.1) посредством ее логарифмирования. После логарифмирования сигналы разделяются при очевидном условии, что спектры их логарифмов не перекрываются. После успешной фильтрации логарифмов сигналы могут быть приведены к первоначальному виду путем их потенцирования. Эта операция в [25] предлагалась только к такому случаю, когда мультипликативная связь осуществлялась через спектры сигналов. Сами сигналы при этом связаны преобразованием свертки. Поэтому процесс разделения сигналов, мультипликативно связанных через спектры, эквивалентен решению интегрального уравнения свертки, что подчеркивается в заголовке работы [25]. Особенностью спектрального решения уравнения свертки в этом случае является то, что ядро интегрального уравнения неизвестно.

С проблемами и методами решения поставленной задачи лучше всего познакомиться на конкретных примерах, следуя работам [29, 30, 31]. Начнем с задачи, решение которой ближе всего к классическому образцу, рассмотренному в [25].

Пусть мы имеем антенную решетку, обладающую сильными отличиями фаз в отдельных элементах решетки. Для простоты примем, что решетка представляет собою прямую линию. Распределение фаз вдоль этой линии может быть таким, как показано на рис. 4.1. На этом рисунке по осям отложены фазовые искажения в элементах антенны. По горизонтали – координаты элементов, а по вертикали – изменения фазы. Горизонтальные линии проведены через интервалы, равные  $\pi$ . Антенна, обладающая такими фазовыми искажениями, в качестве линейного пространственного фильтра работать не может. Например, антенна, фазовые искажения в которой показаны на рис. 4.1, откликается на сигнал, представляющий собой три плоские волны,

так, как показано на рис. 4.2, *а*. На нем вдоль горизонтали отложены пространственные частоты, пропорциональные синусам углов волн, приходящих к антенне. По вертикали отложен выход антенны в логарифмическом масштабе в децибелах. Если же эти фазовые искажения убрать, то ее отклик выглядел бы так, как показано на рис. 4.2, *б*.

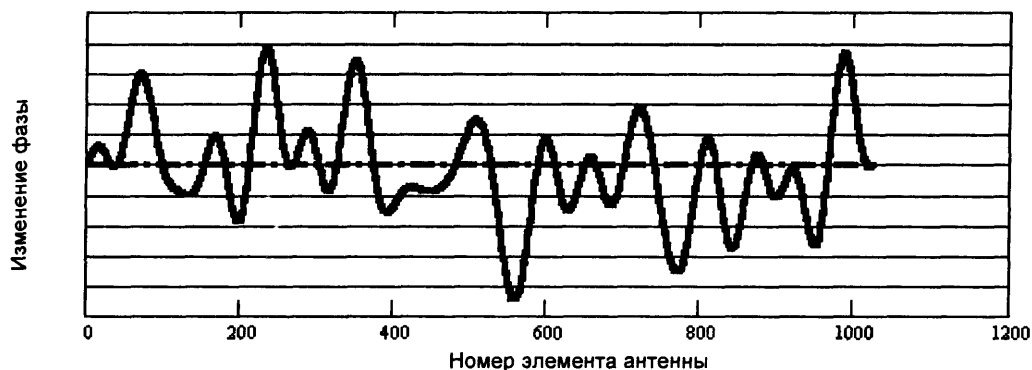


Рис. 4.1. Фазовые искажения в антенне. Горизонтальные линии проведены через  $\pi$ -радиан

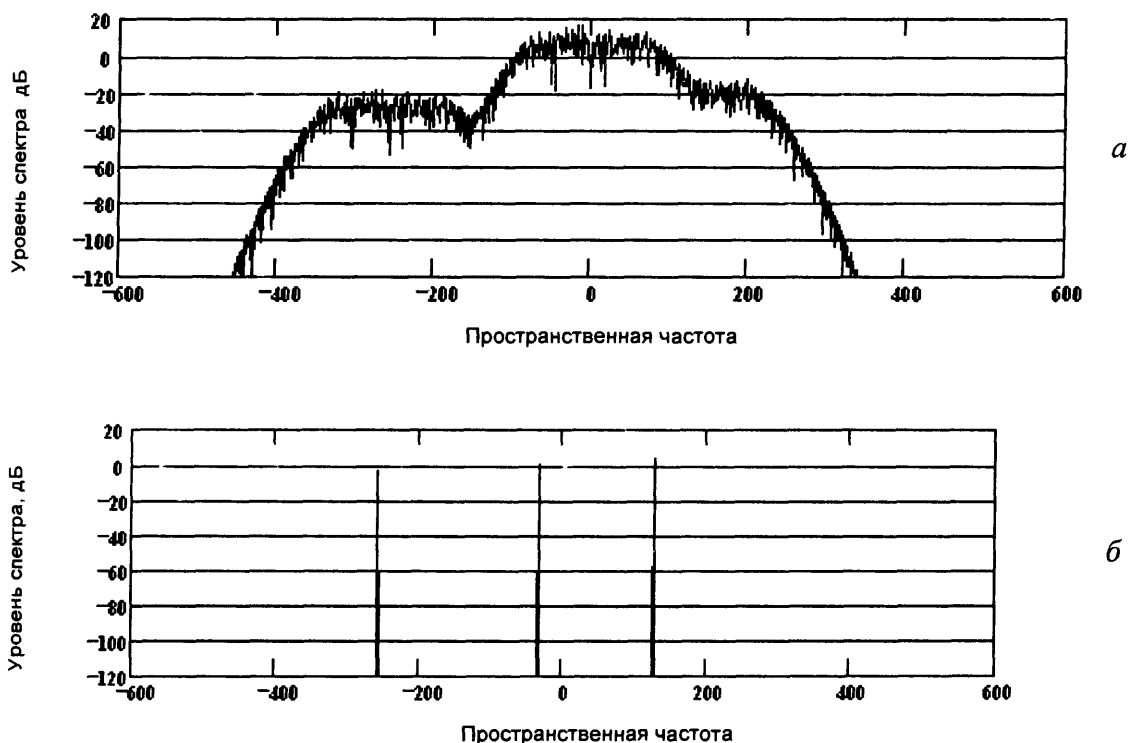


Рис. 4.2. Отклик антенны, обладающей фазовыми изменениями (*а*), показанными на рис. 4.1, и без фазовых искажений на три плоские волны разных направлений распространения.

Рассмотрим, каковы возможности обработки сигнала, цель которой – обеспечить нормальное функционирование антенны в качестве линейного пространственного фильтра в условиях сильных фазовых флуктуаций. Ограничимся монохроматическим волновым полем. Это дает возможность считать, что каждый элемент антенной

решетки принимает комплексный сигнал, модуль которого совпадает с амплитудой принимаемого сигнала, а аргумент – с его фазой. Сигнал, принимаемый антенной, может быть представлен в виде

$$P(x) = M(x) \exp[i\Phi(x)], \quad (4.1.3)$$

где  $M(x)$  – комплексный сигнал, принятый прямолинейной антенной, при отсутствии фазовых сдвигов, а  $\Phi(x)$  – случайные сдвиги фазы. Предполагается, что  $|\Phi(x)| \gg 2\pi$  почти для всех значений  $x$ .

Прологарифмируем (4.1.3), учитывая, что логарифм от комплексной функции определяется (1.6.9) как

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z). \quad (4.1.4)$$

Получим

$$\ln(P(x)) = \ln(|M(x)|) + i \{ \arg[M(x) + \Phi(x)] \}. \quad (4.1.5)$$

Практически преобразование (4.1.5) осуществляется следующим образом. Логарифм модуля функции вычисляется. Аргумент функции определяется по арктангенсу отношения мнимой части функции к действительной. На этой основе аргумент комплексной функции определяется с точностью до  $2\pi$ , что связано с многозначностью экспоненты от мнимого аргумента. Через каждые  $\pm\pi$  найденный таким образом аргумент будет испытывать скачок на  $2\pi$ . В результате таких скачков спектр аргумента сильно расширится, и ни о какой последующей фильтрации не может быть и речи. Скачки необходимо исключить так, как было описано выше, в разделе 1.6, посвященном кепстральному анализу. Исключив скачки, получим значение аргумента функции.

В результате логарифмирования комплексного сигнала, принимаемого антенной решеткой, мы получили действительную компоненту, в виде невозмущенного фазовыми сдвигами в элементах антенны логарифма распределения амплитуд сигналов антенной решетки, и мнимую часть, представляющую собою *сумму* фаз сигнала и шума. Задача о разделении сигнала и шума свелась к аддитивной. Если аргументы сигнала и шума имеют не перекрывающиеся спектры, то их можно разделить. Тем самым в принципе возможно отделить сигнал от шума, после чего можно использовать антенну в качестве линейного пространственного фильтра так, как будто бы нет никаких случайных сдвигов фаз в ее элементах.

Проблема заключается в том, возможно ли (а если да, то всегда ли), чтобы спектры аргументов сигнала и шума не перекрывались. Спектр второго слагаемого (4.1.5) по условию низкочастотный. Это слагаемое можно отфильтровать. Сложнее обстоит дело с первым слагаемым мнимой части (4.1.5) (полезным сигналом). Запишем его в виде суммы плоских волн, взяв для конкретности 4 волны:

$$M(x) = 1 + a_1 \exp(i\alpha_1 x) + a_2 \exp(i\alpha_2 x) + a_3 \exp(i\alpha_3 x). \quad (4.1.6)$$

Здесь  $\alpha_k$  представляет собой не только пространственную частоту сигнала, принимаемого антенной, но и угол падения плоской волны на антенну. Единица означает нулевую пространственную частоту и волну, падающую под нулевым углом к антенне. Аргумент суммы (4.1.6) представляет собою угол, под которым наблюдается сумма векторов слагаемых, которыми могут быть представлены отдельные члены суммы (4.1.6). Интересующий нас спектр этого аргумента определяется скоростью вращения результирующего вектора (с ростом  $x$ ) вокруг начала координат. Отметим, что если результирующий вектор вращается вкруговую, делая один или несколько оборотов

вокруг начала координат, то спектр аргумента (4.1.6) будет достаточно интенсивным в низкочастотной области, несмотря на то что спектр каждого слагаемого (4.1.6) высокочастотный. В этом случае спектры аргументов сигнала и шума не разделятся. Если же результирующий вектор не вращается, то спектр колебаний его положения определяется скоростями вращения отдельных слагаемых вокруг конца результирующего вектора. В этом случае спектр аргумента (4.1.6) будет лежать там же, где находится спектр сигнала. Эта область целиком определяется углом, под которым волна приходит к антенне. Спектры аргументов суммы волн, приходящих к антенне под достаточно крутыми углами, и шума в этом случае могут быть разделены.

Чтобы получить это разделение, необходимо и достаточно, чтобы сумма (4.1.6) непременно включала бы единицу, а модуль суммы всех оставшихся членов суммы (4.1.6) не превышал бы единицы. Одно из этих условий может быть заменено более мягким требованием. Сумма (4.1.6) может не содержать единицы, но она должна содержать одну плоскую волну, амплитуда которой превышает при любом  $x$  сумму всех остальных слагаемых. В этом случае следует перед обработкой сигнала сдвинуть его спектр, умножив его на экспоненту от мнимого аргумента такой величины, при которой наибольшее слагаемое обращается в единицу. Такой волной на практике может быть излучение дополнительного достаточно мощного источника, специально помещенного в среду для этой цели.

При выполнении вышеперечисленных условий фильтрация не затронет тех компонент сигнала, чей пространственный спектр выше верхней границы среза фильтра. При этом будут отфильтрованы и потеряны низкочастотные компоненты фазы сигнала. Это означает, что антенна будет лишена возможности полного кругового обзора, из области наблюдения выпадет некоторый сектор углов. Но все оставшиеся сигналы, приходящие под более крутыми углами к антенне, будут свободны от влияния искажений фазы. После фильтрации следует вернуться к исходному представлению сигнала посредством преобразования, обратного (4.1.5), имеющего вид

$$Q(x) = \exp[\ln(P(x))]. \quad (4.1.7)$$

После такого преобразования сигналы, принятые антенной в секторе углов, не затронутых фильтрацией, будут наблюдаться так, как показано на рис. 4.2.

Вышеописанная обработка сигнала антенной решетки применима лишь к случаю сдвига фаз между элементами антенны, не зависящего от направления принимаемого антенной сигнала. В том случае, когда сдвиги фаз в антенной решетке вызваны случайными изменениями положений ее элементов, такая обработка неприменима. При изменении положений элементов антенны фазовый набег зависит от угла, под которым сигнал подходит к антенне. Поэтому отдельные плоские волны не имеют общего сомножителя, как в (4.1.3).

Для того чтобы "выпрямить" изогнутую антенну путем соответствующей обработки сигнала, следует добавить некоторые действия к тем, которые были описаны выше. Рассмотрим это на примере приема только одного сигнала.

Пусть антенна принимает одну плоскую волну произвольного направления. Тогда выражение (4.1.6) примет следующий вид:

$$M(x) = a_1 \exp(ia_1 x). \quad (4.1.8)$$

Умножим (4.1.3), в который подставлено (4.1.8), на множитель, который назовем опорным сигналом:

$$Q(x) = \exp(-ia_1 x) + 0,9. \quad (4.1.9)$$

Чтобы сделать эту дополнительную операцию, надо знать угол  $\alpha_1$ . Его значение грубо определяется на основе отклика изогнутой антенны, а затем уточняется путем подбора. Подбор осуществляется на основе получения минимальной ширины спектра отклика антенны в результате обработки сигнала. Дальнейшая обработка сигнала осуществляется точно так, как это уже описано выше. В результате перемножения (4.1.8) и (4.1.9) получим необходимые и достаточные условия успешности обработки сигнала, которые мы выяснили выше. Действительно, перемножение комплексно сопряженных экспонент дает необходимую единицу, а сигнал добавляется к этой единице уменьшенным до 0,9, чего при одном сигнале вполне достаточно, чтобы результирующий вектор не крутился, а лишь колебался бы вокруг единицы.

Таким образом, для одного сигнала осуществляются все необходимые и достаточные условия для успешной обработки. При этом никакого специального сигнала прибавлять не надо, уровень сигнала может быть любым, а фазовые набегги могут быть вызваны изменением положения элементов антенной решетки или ее изгибами. Единственным условием успешной обработки сигнала в этом случае является узкий пространственный спектр фазовых изменений, позволяющий их отфильтровать.

На рис. 4.3 показан результат численного моделирования описанной обработки сигнала: вверху – отклик случайно изогнутой антенны на плоскую волну вида (4.1.6) до обработки, внизу – вид этого отклика после обработки (он сдвинут по вертикали на 60 дБ).

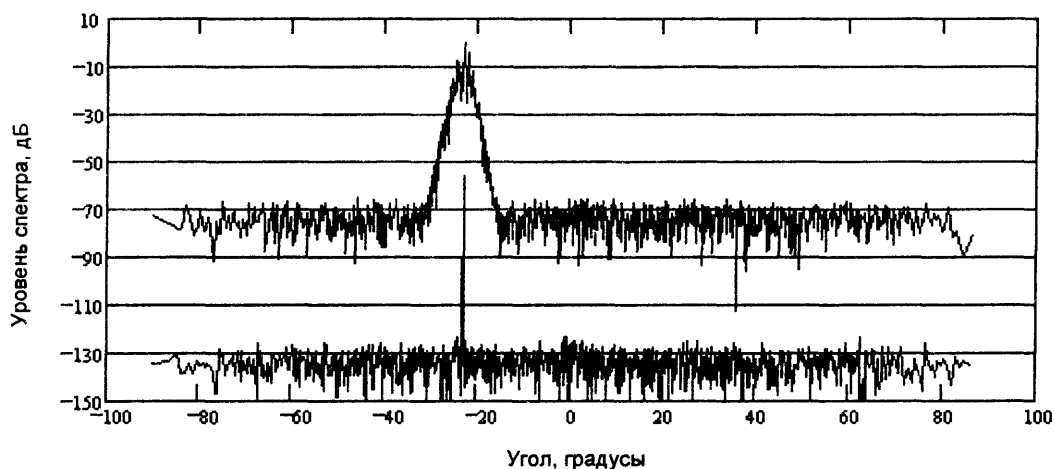


Рис. 4.3. Отклик искривленной антенны на плоскую волну вида (4.1.8). Вверху – до обработки, внизу – сдвинутый вниз на 60 дБ отклик после обработки.

Если сигнал не один, следует осуществить предварительную селекцию волн по направлениям, пользуясь откликом изогнутой антенны, имеющим вид, показанный на рис. 4.3 вверху. Среди этих откликов надо найти хотя бы один, который в результате обработки даст отклик, показанный на рис. 4.3 внизу. На основе этого сигнала можно определить форму антенны, чтобы затем воспользоваться ею для правильного фазирования всех элементов решетки применительно ко всем возможным направлениям прихода сигналов.

Для определения формы антенны следует при фильтрации фаз отделить низкие частоты от высоких и восстановить только низкие. Если эта операция проделана с одним источником излучения, то она дает истинную форму антенной решетки. Результат этой операции по данным, приведшим к рис. 4.3, показан на рис. 4.4. Толстой ли-



нией показаны величины фазовых сдвигов, которые получены в результате вышеописанной обработки сигнала, принятого антенной. Тонкой линией (она близка к нулю) показана разность значений, задававшихся при моделировании и полученных в результате восстановления формы антенны.

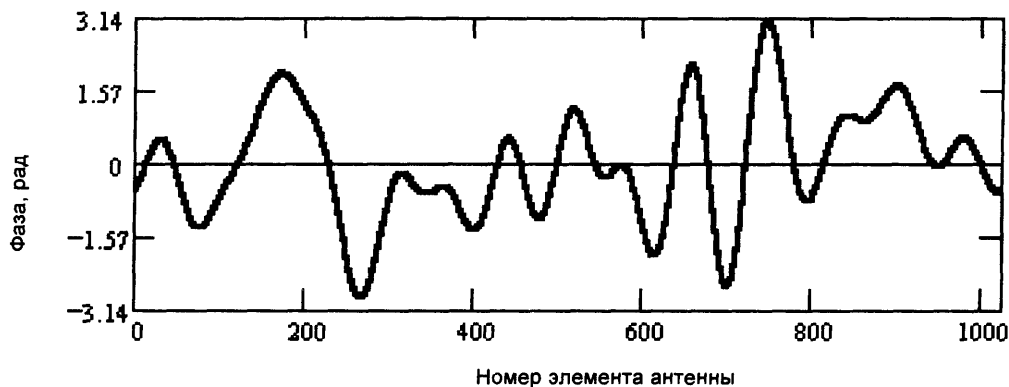


Рис. 4.4. Восстановленная форма изменения фазы (толстая линия) и разность между заданной формой и восстановленной (тонкая линия).

Рассмотренная задача актуальна в акустике. Многие задачи гидроакустики могут быть успешно решены с помощью антенн, обладающих большой апертурой. Такие антенны, с большим числом элементов, могут представлять собою длинный кабель, обладающий нейтральной плавучестью, в который вмонтированы акустически активные элементы. Нейтральная плавучесть такого устройства допускает практически неограниченное развитие антенны в длину, позволяя создавать антенны колоссальной апертуры, расстояния между соседними элементами фиксированы. Для успешной работы такому устройству необходимо придать жесткость, исключающую изгибы. Требования к жесткости конструкции протяженной антенны существенно возрастают с увеличением длины антенны и становятся препятствием для создания гибких антенн с большой апертурой.

Допустим, мы имеем возможность создать гибкую антенну, обладающую необходимой жесткостью до апертуры  $A$ . Представим себе, как будет работать антенна, имеющая существенно большую апертуру, например  $10A$ . Она может случайно изгибаться, но пространственный спектр ее изгибов будет ограничен некоторой полосой пространственных частот, лежащих ниже, чем  $2\pi/A$ . Применив вышеописанную обработку сигнала, получим возможность создавать антенны неограниченной апертуры.

При этом возникает еще один вопрос. Как быть, если источником сигнала является не плоская волна, а точечный источник акустического поля? При больших размерах апертуры антенны источник может оказаться в ближней зоне такой антенны. В этом случае, чтобы сфокусировать антенну и определить не только направление на источник, но и расстояние до него, требуется еще один, дополнительный этап обработки сигнала.

Дополнительная фазовая модуляция, связанная с тем, что источник находится в ближней зоне антенны, является низкочастотной. Она исключается при вышеописанной обработке почти целиком. Отклик от точечного сигнала, находящегося в ближней зоне антенны, приведен в верхней части рис. 4.5, который построен в тех же координатах, что и рис. 4.3. В верхней части рисунка показан отклик антенны на точечный источник, находящийся в ближней зоне антенны. Не скомпенсированы ни изгибы антенны, ни сферическое расхождение волны от источника.

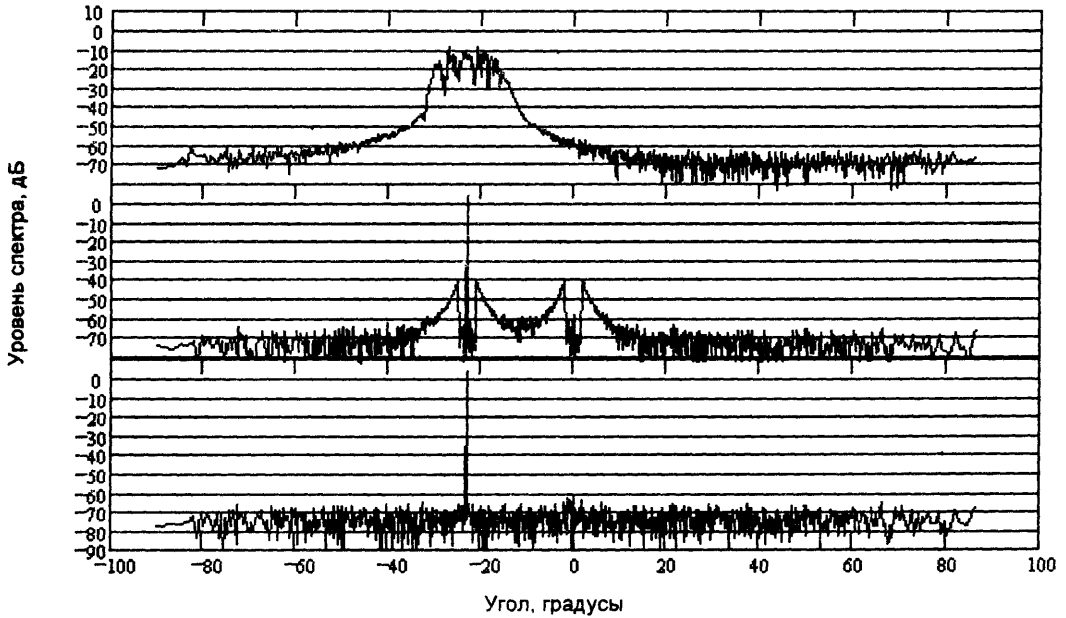


Рис. 4.5. Отклик искривленной антенны на плоскую волну вида (4.1.8) для источника, находящегося в ближней зоне антенны. Вверху – без компенсации, в центре – с компенсацией изгибов, внизу – с компенсацией и изгибов антенны, и кривизны фронта волны.

В средней части рисунка приведен отклик антенны после фильтрации ее изгибов. Сферическое расхождение волны скомпенсировано частично. Внизу – отклик антенны, полученный после фильтрации изгибов и полной компенсации сферического расхождения волны от источника. Из рисунка видно, что частичная компенсация сферического расхождения волны расширяет спектр принимаемого сигнала за пределы фильтра, что дает необходимую индикацию для полной компенсации сферического расхождения волны и позволяет оценить расстояние до источника.

### *Программы численного моделирования задач по нелинейной фильтрации*

Дальнейшее изложение задач нелинейной фильтрации проведем на примере конкретных программ численного моделирования.

**Устранение случайных фазовых сдвигов в антенной решетке.** Соответствующая программа приведена на рис. 4.6. Ниже мы даем комментарии к этой программе в дополнение к тем, которые приведены на рисунке. Заметим, что это действующая программа. Чтобы она была такой, необходимо, чтобы сначала определялись все величины, задавались бы конкретные числовые значения всех параметров, а уже потом указывалось, что надо делать с этими величинами. В соответствии с этим в первой строчке программы помещены массивы данных, которые используются ниже, и диапазонные переменные. В этой же строке стоит параметр  $p$ , определяющий глубину логарифмирования. Затем идут параметры фильтров, используемых ниже, и формулы для этих фильтров. Фильтры построены так, чтобы отсекал или выделять низкие частоты спектра, которые помещены как в начале спектра, так и в самом его конце. Ширину пропускания (или отсекания) определяет всего один численно заданный параметр  $FX$ .

### Mathcad Plus 6.0

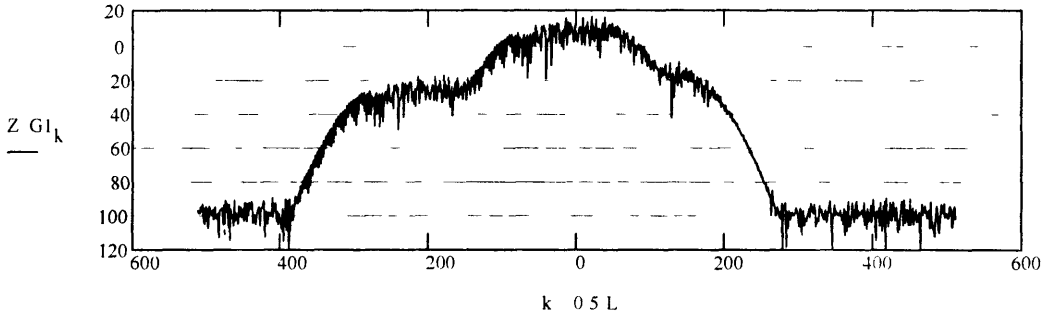
Массив и диапазонные переменные  
 L 1024 k 0..L 1 kk 0..0.5·L-1 j 0..3 p 6  
 Параметры фильтра  
 FX 15 FY - FX 1 FY1 FY 1  
 Фильтры  
 $E_k = \Phi(k \text{ FX}) \cdot \Phi((L - FY) k)$   
 Формирование случайной фазы  
 $V \text{ rnorm}(L, 0, 1)$  VA  $\text{rnorm}(L, 0, 1)$  VK<sub>k</sub> V<sub>k</sub> i · VA<sub>k</sub>  
 P<sub>k</sub> VK<sub>k</sub> 1 E<sub>k</sub> · (1 - Φ(k)) PS icfft(P) XC<sub>k</sub> Im PS<sub>k</sub>, Логарифмирование  
 Формирование аддитивного шума  
 $Z(u) - \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$   
 VR  $\text{rnorm}(L, 0, 1)$  VAR  $\text{rnorm}(L, 0, 1)$  SV<sub>k</sub> VR<sub>k</sub> i · VAR<sub>k</sub> att 10<sup>5</sup>  
 Внешнее поле на антенне  
 $w_k \sum_j a_j \cdot \exp(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \cdot f_j)$  Сигнал, принятый антенной  
 $s_k w_k \cdot \exp(i \cdot XC_k \cdot 10 \cdot \pi - \text{att} \cdot VK_k)$  Выход антенны  
 $s_L s_0$  A<sub>k</sub> s<sub>k</sub> G<sub>1kk</sub> G<sub>0.5L+kk</sub> G<sub>1kk+0.5L</sub> G<sub>kk</sub>  
 Программа вычисления аргумента выхода антенны (ABA) без скачков фазы  
 $S_k s_k \cdot s_{k+1}$  S<sub>1k</sub> arg S<sub>k</sub> H<sub>0</sub> 0 H<sub>k+1</sub> H<sub>k</sub> S<sub>1k</sub>  
 ABA  
 H<sub>1k</sub> H<sub>k</sub>  
 H<sub>4k</sub> H<sub>1k</sub> mean(H<sub>1</sub>) Фильтрация ABA, исключая случайные фазовые сдвиги  
 GHF cfft(H<sub>1</sub>) RFF<sub>k</sub> GHF<sub>k</sub> · E<sub>k</sub> SFS icfft(RFF) SFS<sub>1k</sub> Re SFS<sub>k</sub>

0.02	200
0.03	20
0.05	100
1	0

Восстановление сигнала с выхода антенны после фильтрации фазы

US<sub>k</sub> A<sub>k</sub> · exp(i · SFS<sub>1k</sub>) OX mean(US) US<sub>1k</sub> US<sub>k</sub> OX  
 GS cfft(US<sub>1</sub>) GS<sub>1kk</sub> GS<sub>0.5L+kk</sub> GS<sub>1kk+0.5L</sub> GS<sub>kk</sub>

Выход антенны до фильтрации фазовых изменений



Результат фильтрации изменений фазы в антенне

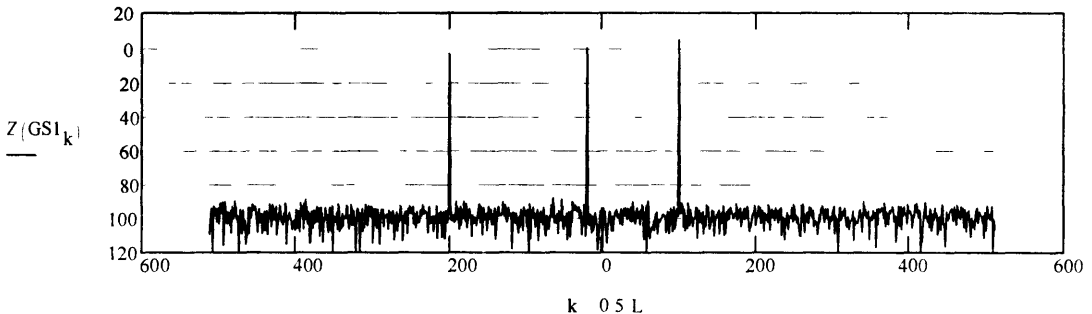


Рис. 4.6. Устранение случайных фазовых сдвигов в антенной решетке

Далее, на основе генераторов случайных последовательностей формируются случайная фаза на антенне и случайный аддитивный шум, добавляемый к выходу антенны. Величина добавляемого аддитивного шума определяется коэффициентом *att*.

В следующей строчке задается внешнее поле, приходящее к антенне в виде суммы плоских волн, согласно формуле (4.1.6). Параметры этих волн показаны в виде табличек в верхнем правом углу программы. Далее в этой же строчке формируется поле на антенне в таком виде, в каком оно должно восприниматься ее приемниками. Добавлены случайные изменения фазы и аддитивный шум. В той же строчке далее определен выход такой антенны без учета случайных изменений фазы. Внизу приведен график этого выхода. Фазовые изменения настолько искажают спектр, что никакого подобия плоских волн на этом графике не наблюдается. Если же в предыдущей формуле убрать фазовые изменения, то выход антенны приобретет вид, показанный на графике, расположенном ниже с добавлением к нему мощного отклика в нуле.

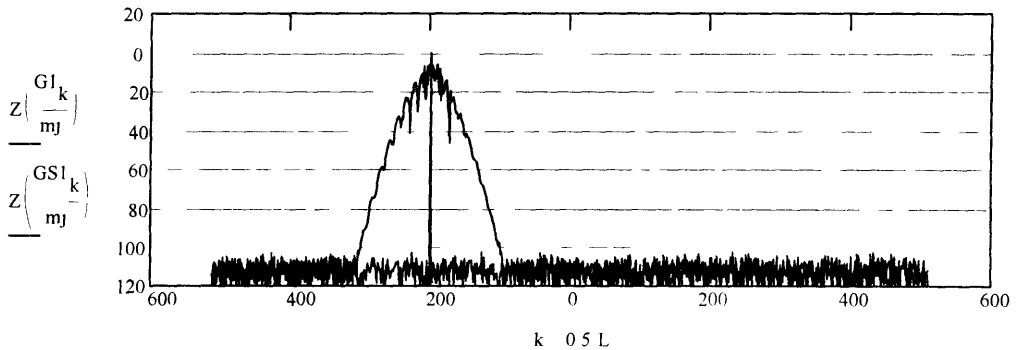
Далее идет программа, позволяющая на основе принятого сигнала, на который влияют фазовые сдвиги, получить отклик, на который эти фазовые сдвиги не влияют. Для этого выделяется однолистная фаза без скачков, которая затем фильтруется. Программа выделения фазы подробно обсуждена выше в разделе, посвященном кепстру. Программа в этой части ничем не отличается от приведенной на рис. 1.8. Устранение фазовых изменений происходит в результате фильтрации. Для этого используется фильтр, сформированный в верхней части программы, причем будут вырезаны любые фазовые изменения, лишь бы они были достаточно низкочастотными. Генератор случайных последовательностей при каждом запуске программы генерирует свою последовательность, но это не оказывает никакого влияния на работу программы. Далее сигнал восстанавливается согласно (4.1.7), и определяется выход антенны по той же программе, по которой выше был получен выход антенны с фазовыми искажениями. Результат представлен на рисунке.

**Фильтрация формы антенны.** Эта программа, приведенная на рис. 4.7, в своей начальной части полностью повторяет предыдущую, поэтому остановимся только на отличиях этих двух программ. Изменения касаются как исходных данных, так и самой программы. Самое существенное изменение исходных данных – это использование только одной плоской волны. Следующим изменением является уменьшение глубины случайной фазовой модуляции. В предыдущей программе этот параметр не имел никакого значения, существующую там глубину фазовой модуляции можно еще увеличить, что скажется только на виде сигнала без фильтрации фазовых искажений. Эффективность фильтрации фазовых искажений при принятой форме фильтра не зависит от величины удаляемых спектральных компонент. В этой программе считается, что необходимо использовать выход антенны без фильтрации изменений фазы не только для иллюстрации, но и для предварительного отбора поля. Сигнал не должен быть сильно искаженным, поэтому глубина фазовой модуляции уменьшена в 5 раз.

Отличий в самой программе два. Первое – это введение опорного сигнала, умножение на который дает возможность осуществить фильтрацию фазы без специального сигнала, как сказано выше. Второе – это получение формы самой антенны. Для этого полученная фаза без скачков фильтруется иначе. В ней не исключаются, а, наоборот, выделяются низкие частоты. Из этого сигнала получается форма антенны.

Массив и диапазонные переменные  
 $L$  1024  $k$  0..L 1  $kk$  0..0.5·L 1  $p$  - 6  
 Параметры фильтра  
 $FX$  15  $FY$   $FX+1$   $FY1$   $FY+1$   $E_k$  -  $\Phi(k$   $FX)$ · $\Phi((L$   $FY)$   $k)$   $\Phi$  поля  
 Формирование случайной фазы  
 $VC$   $mnorm(L, 0, 1)$   $Vg_k$  -  $VC_k$   $Ug$  -  $cfft(Vg)$   $EE_k$   $\Phi(k$   $FY)$ · $\Phi((L - FY1) - k)$   $a1$  1  
 $PS$   $icfft(P)$   $XC_k$   $Re(PS_k)$   $P_k$   $Ug_k$  1  $E_k$   $fl$  200  
 Формирование аддитивного шума  $Z(u)$  if  $u > 10^p, 20 \log(|u|), 20·p)$   $att$   $10^{4·0.3}$   
 $V$   $mnorm(L, 0, 1)$   $VA$   $mnorm(L, 0, 1)$   $VK_k$   $V_k$   $i$ · $VA_k$  Опорный сигнал (ОС)  
 Внешнее поле на антенне  
 $w_k$   $a1·exp(i·2·\pi·k·fl / L)$   $sb_k$   $w_k exp(i·XC_k·2·\pi)$   $att·VK_k$   $G$   $cfft(sb)$   $G1_{kk}$   $|G_{0.5L+kk}|$   $G1_{kk+0.5L}$   $G_{kk}$   
 Воздействие ОС на СПА  
 $s_k$   $sb_k·w_k$   $s_L$   $s_0$   $A_k$   $|s_k|$   $H_{k+1}$   $H_k$   $S1_k$   
 Программа вычисления аргумента выхода антенны (АВА) без скачков фазы  
 $S_k$   $s_k·s_{k+1}$   $S1_k$   $arg(S_k)$   $H_0$  0  $H_{k+1}$   $H_k$   $S1_k$   
 $H1_k$   $H_k$  АВА  
 $H4_k$   $H1_k$   $mean(H1)$  Фильтрация АВА, исключая случайные фазовые сдвиги  
 $GHF$   $cfft(H4)$   $RFf_k$  -  $GHF_k$   $EE_k$   $SFS$   $icfft(RFf)$   $SFS1_k$   $Re(SFS_k)$   
 Восстановление сигнала с выхода антенны после фильтрации фазы  
 $US_k$   $A_k·exp(i·SFS1_k)$   $OX$   $mean(US)$   $US1_k$   $US_k$   $OX$   $GS$   $cfft(US1)$   $mj$   $max(G1)$   
 Восстановление формы антенны  $GS1_{kk}$   $|GS_{0.5L+kk}|$   $GS1_{kk+0.5L}$   $GS_{kk}$   
 $FFf_k$   $GHF_k·i$   $EE_k·(1 - \Phi(k))$   $FFS$   $icfft(FFf)$   $FFS1_k$   $Re(FFS_k)$   
 $OSH_k$   $FFS1_k$   $XC_k·2·\pi$  0.4

Выход антенны до и после фильтрации фазовых изменений



Восстановленная форма антенны

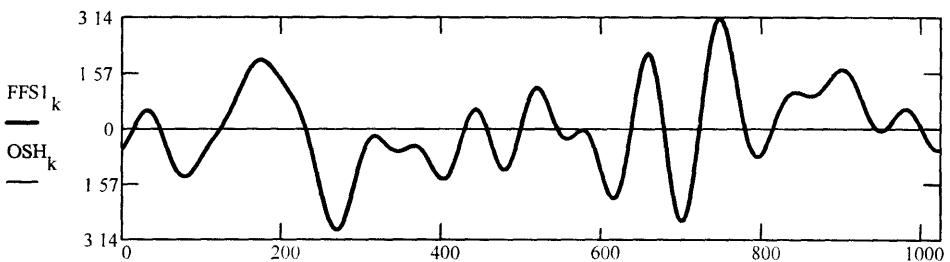


Рис. 4.7. Фильтрация формы антенны

Mathcad Plus 6.0

**Фокусируемая искривленная антенна.** Эта программа (рис. 4.8) повторяет предыдущую с некоторыми изменениями в исходных данных и программе.

Изменения в исходных данных связаны с тем, что в этой программе используется не плоская волна, а волна сферическая, приходящая от точечного источника излучения, находящегося в ближней зоне антенны. В этой зоне искривление волнового фронта вдоль антенны в пределах ее апертуры превышает длину волны. Такая волна с искривленным волновым фронтом моделируется в соответствующей строке программы. Расстояние от антенны до источника  $R$  измеряется в половинах размера апертуры. В этих единицах расстояние до источника обозначено  $rp$ . Соответственно с этим изменяется модель сигнала.

Следующее изменение касается опорного сигнала. Теперь в нем совсем не обязательно наличие постоянной составляющей, так как сферический фронт волны расширяет спектр сигнала так, что он проходит через фильтр, снимающий фазовые искажения в антенне. Фокусировка антенны осуществляется непосредственно в выражении для фазы НЗ, из которого вычитается кривизна волнового фронта.

В этой программе предусмотрен подбор той кривизны волнового фронта, которая требуется для компенсации сферичности. Последующая фильтрация фазовых изменений и формирования выхода антенны произведена сразу для двух значений кривизны волнового фронта, причем одно значение является истинным, а второе составляет 0,8 от него.

На результирующем графике показаны выход антенны без фильтрации фазовых изменений, выход антенны с фильтрацией фазовых изменений и полной компенсацией сферичности волнового фронта и то же, но с частичной компенсацией сферичности. Последний график приведен с целью показать возможность подобрать правильное значение компенсации сферичности вслепую.

**Темное поле с мультипликативной помехой.** На рис. 4.9 приведена еще одна программа, позволяющая осуществить метод темного поля для локации на просвет с изогнутой каким-либо образом антенной.

Первые два раздела программы, включая фильтр и шумы, повторяют предыдущие. В разделе "фокусируемая антенна" приведена программа, позволяющая перебирать с определенным шагом значения кривизны сферического фронта волны. Шаг выбран неравномерным по дистанции до центра сферического фронта, но равномерным по отношению к разрешению этого фронта антенной с определенной апертурой. Это позволяет представить окончательный результат в удобном масштабе. Раздел "параметры излучателя" повторяет соответствующий раздел предыдущей программы, приведенной на рис. 4.8.

Рассматриваются два сигнала, обладающие сферическими фронтами различной кривизны. Один сигнал с фазовым фронтом, определяемым  $Q$ , большой – это сигнал подсветки. Второй сигнал много меньше первого – это рассеянный сигнал. Направления на оба сигнала совпадают. Это случай локации на просвет для момента, когда рассеиватель находится прямо против излучателя подсветки, но ближе к антенне. Кривизна фронта рассеянного сигнала выбрана средней среди того набора, который обеспечивается разделом программы "фокусируемая антенна".

Далее следует программа извлечения фазы, повторяющая предыдущие. Для сигнала подсветки производится компенсация его сферического фронта, как это сделано в программе, показанной на рис. 4.8. В результате опорный сигнал станет монохроматическим сигналом нулевой частоты. В программе эта частота исключается и тем самым реализуется темное поле. После этого рассеянный сигнал фокусируется и определяется точка фокусировки.

### Mathcad Plus 6.0

Массивы данных и диапазонные переменные

$$L = 1024 \quad k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1$$

Логарифмирование

$$p = 6 \quad Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$$

Параметры фильтра

$$FX = 15 \quad FY = FX + 1 \quad FY1 = FY + 1$$

$$E_k = \Phi(k - FX) \cdot \Phi((L - FY) - k) \quad EE_k = \Phi(k - FY) \cdot \Phi((L - FY1) - k)$$

$$x_k = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{L}$$

Шумы

$$V = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad VR = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad VAR = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad SV_k = VR_k + i \cdot VAR_k \quad \text{att} = 0.001$$

$$P_k = V_k \cdot (1 - E_k) \cdot (1 - \Phi(k)) \quad PS = \text{icfft}(P) \quad XC_k = \text{Re}(PS_k)$$

Фокусируемая антенна

Дистанция

$$r_p = 10^2 \quad R = r_p \cdot 0.5 \cdot L \quad df = \frac{\sqrt{r_p^2 + 1} \cdot r_p \cdot 2 \cdot \pi}{L}$$

Фазовый фронт

$$Q_k = df \cdot (k - 0.5 \cdot L)^2$$

Параметры сигнала

$$a1 = 1 \quad f1 = 200$$

Модель сигнала

$$w_k = a1 \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot f1 + i \cdot Q_k) \cdot \exp(i \cdot XC_k \cdot 2 \cdot \pi) + \text{att} \cdot SV_k$$

Выход искривленной антенны

$$G = \text{cfft}(w)$$

Умножение на опорный сигнал

$$s_k = \left( \frac{\exp(i \cdot x_k \cdot f1)}{\exp(i \cdot x_k \cdot f1)} \right) \cdot w_k \quad s_L = s_0$$

$$G1_{kk} = |G_{0.5L+kk}| \quad G1_{kk+0.5L} = |G_{kk}| \quad m_j = \max(G1)$$

Извлечение фазы

$$S_k = \overline{s_k} \cdot s_{k+1}$$

$$S1_k = \arg(S_k) \quad H_0 = 0$$

$$H_{k+1} = H_k + S1_k$$

Точная и неточная фокусировки  
 $r = 0..1$   
 $GR_r =$

$$H1_k = H_k$$

Фокусировка антенны

$$OK_{k,r} = H1_k - Q_k \cdot GR_r$$

1
0.8

Фильтрация фазы

$$GHF^{<r>} = \text{cfft}(OK^{<r>}) \quad RFF_{k,r} = GHF_{k,r} \cdot EE_k \quad SFS^{<r>} = \text{icfft}(RFF^{<r>}) \quad SFS1_{k,r} = \text{Re}(SFS_{k,r})$$

Восстановление сигнала без влияния изгибов

$$US_{k,r} = |s_k| \cdot \exp(i \cdot SFS1_{k,r}) \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot f1) \quad GS^{<r>} = \text{cfft}(US^{<r>})$$

$$GS1_{kk,r} = |GS_{0.5L+kk,r}| \quad GS1_{kk+0.5L,r} = |GS_{kk,r}|$$

Отклики антенны с влиянием изгибов; без влияния изгибов с точной и неточной фокусировкой

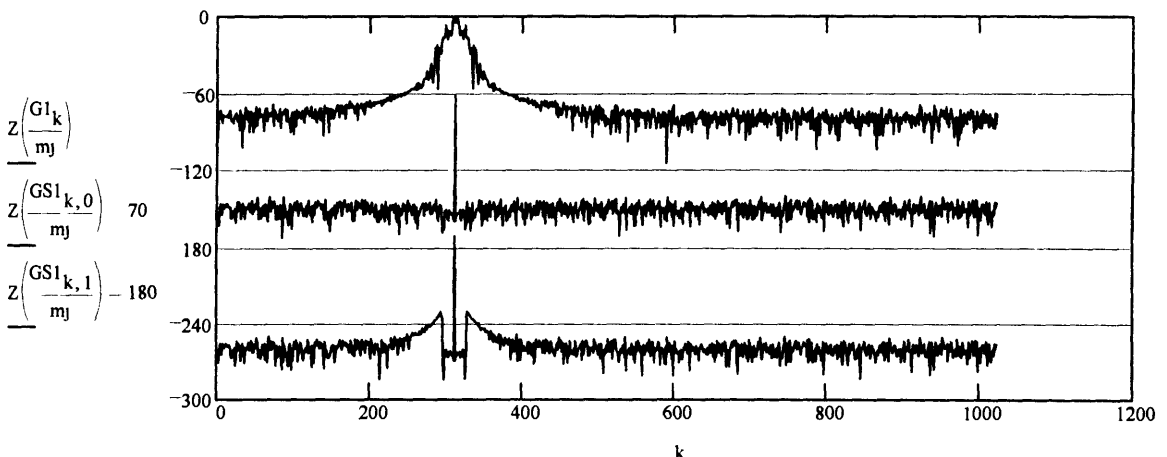


Рис. 4.8. Фокусируемая искривленная антенна

## Mathcad Plus 6.0

Массивы данных и диапазонные переменные

$$L = 1024 \quad k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L - 1 \quad M = 32 \quad t = 0..M-1 \quad N = 32 \quad m = 0..N-1$$

Параметры фильтра

Логарифмирование

$$FX = 15 \quad FY = FX + 1 \quad FY1 = FY + 1 \quad p = 6 \quad Z(u) = \text{if}(|u| > 10^p, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot p)$$

$$E_k = \Phi(k - FX) \cdot \Phi((L - FY) - k) \quad EE_k = \Phi(k - FY) \cdot \Phi((L - FY1) - k) \quad x_k = 2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k \quad \lambda = 2$$

Шумы

$$V = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad VR = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad VAR = \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad SV_k = VR_k + i \cdot VAR_k \quad \text{att} = 0.001$$

$$P_k = V_k \cdot (1 - E_k) \cdot (1 - \Phi(-k)) \quad PS = \text{icfft}(P) \quad XC_k = \text{Re}(PS_k)$$

Параметры поиска рассеянного сигнала

Координаты фокусировки

$$y_{d_t} = (30 + 1 \cdot t) \cdot 0.5 \quad x_{y_k} = (k - 0.5 \cdot L) \cdot 1 \quad ba_t = \frac{(0.5 \cdot L)^2 - (y_{d_t})^2}{2 \cdot y_{d_t}} \quad y_{b_{(k,t)}} = \sqrt{(x_{y_k})^2 + (ba_t)^2} \quad ba_t$$

Фаза волнового фронта

$$QS_{k,t} = y_{b_{k,t}} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda}$$

Параметры излучателя подсветки

Частота

Амплитуда

Дистанция

Волновой фронт

$$f_l = 200 \quad a_l = 1 \quad r_p = 10^2 \quad R = r_p \cdot 0.5 \cdot L \quad df = \frac{\sqrt{r_p^2 + 1}}{L} \cdot r_p \cdot 2 \cdot \pi \quad Q_k = df \cdot (k - 0.5 \cdot L)^2$$

Доля рассеяния

$$rt = 10^{-3}$$

Сигнал, принятый изогнутой антенной

$$w_k = (a_l \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot f_l + i \cdot Q_k) + rt \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot f_l + i \cdot QS_{k,0.5M})) \cdot \exp(i \cdot XC_k \cdot 2 \cdot \pi) \cdot \text{att} \cdot SV_k$$

Умножение на опорный сигнал

Выход изогнутой антенны

$$s_k = w_k \cdot \overline{\exp(i \cdot x_k \cdot f_l)}$$

$$G = \text{cfft}(w)$$

$$G1_{kk} = |G_{0.5L+kk}| \quad G1_{kk+0.5L} = |G_{kk}| \quad m_j = \max(G1)$$

$$s_L = s_0$$

Извлечение фазы

$$S_k = \overline{s_k} \cdot s_{k+1} \quad S1_k = \arg(S_k) \quad H_0 = 0$$

$$H_{k+1} = H_k + S1_k$$

$$H1_k = H_k$$

Фокусировка излучателя

$$OK_k = H1_k - Q_k$$

Фильтрация фазы

$$GHF = \text{cfft}(OK) \quad Rf_k = GHF_k \cdot EE_k \quad SFS = \text{icfft}(Rf) \quad SFS1_k = \text{Re}(SFS_k)$$

$$US_k = |s_k| \cdot \exp(i \cdot SFS1_k) \quad OX = \text{mean}(US)$$

Фокусировка рассеивателя

$$US1_{k,t} = (US_k \cdot OX) \cdot \exp(i \cdot QS_{k,t})$$

Построение графиков сфокусированного рассеянного сигнала

$$SSN^{<t>} = \text{cfft}(US1^{<t>})$$

$$SSN1_{kk,t} = |SSN_{0.5L+kk,t}| \quad SSN1_{kk+0.5L,t} = |SSN_{kk,t}|$$

$$aa = \max(SSN1)$$

$$SDS_{m,t} = SSN1_{m+0.5L,0.5N,t}$$

$$CH = \max(SDS) = SDS \quad y_{m,t} = t \cdot \Phi(SDS_{m,t} \cdot \max(SDS)) \quad y_u = \max(y) \quad y_u = 11$$

Рис. 4.9. Темное поле с мультипликативной помехой (начало)



Основные параметры задачи

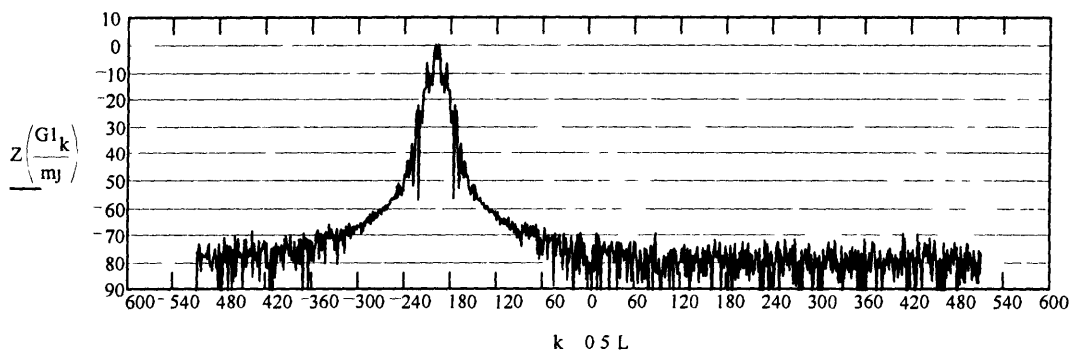
Отношение сигнала к шуму (дБ)  $Z(\text{att}) = -60$       Ширина фильтра FX = 15

Отношение рассеянного сигнала к прямому (дБ)  $Z(\text{rt}) = -60$

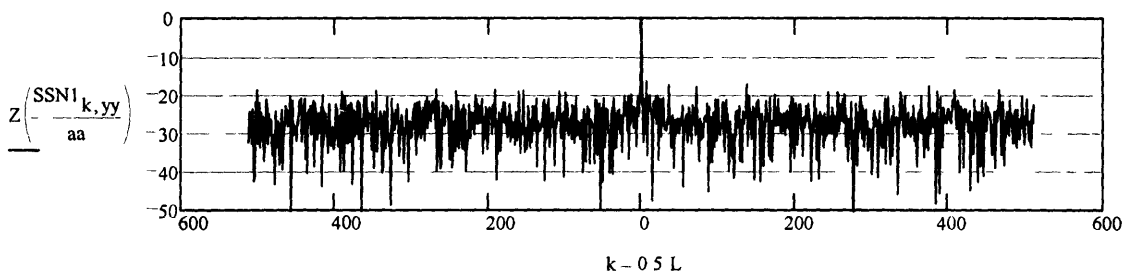
Изгибы антенны в длинах волн  $\max(\text{XC}) \quad \min(\text{XC}) = 0.315$

Длина антенны в полуволнах  $L = 1.024 \cdot 10^3$

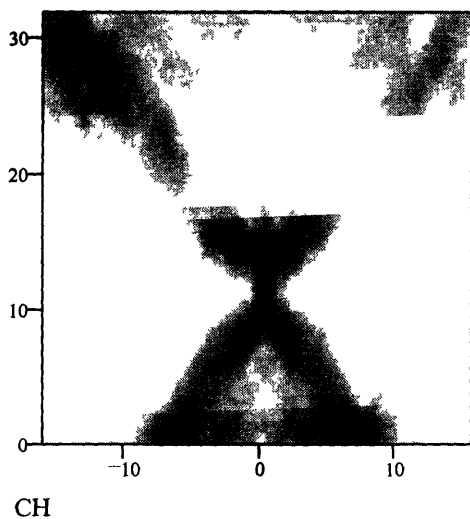
Отклик изогнутой антенны на сигнал излучателя



Отклик антенны на рассеянный сигнал



Фрагмент поля зрения антенны. Вдоль вертикали 32 отсчета дистанции. Вдоль горизонтали 32 отсчета азимута. В поле зрения - рассеиватель.



Расстояние до рассеивателя

$$ba_{0.5 M} = 5.687 \cdot 10^3$$

Расстояние до излучателя

$$R = 5.12 \cdot 10^4$$

Рис. 4.9. (окончание)

В начале 2-й страницы рис. 4.9 помещены основные параметры задачи, которые выдает сама машина. Далее следуют три графика. На первом помещен отклик антенны без фильтрации изгибов антенны, откуда следует, что нечего и думать, чтобы с таким сигналом организовать что-то вроде темного поля. Спектр сигнала существенно расширен. На самом нижнем графике показан фрагмент поля зрения антенны размером  $32 \times 32$  элемента. По вертикали отложено расстояние в единицах разрешающей способности антенны по дальности. По горизонтали отложен азимут рассеивателя относительно излучателя в единицах разрешения антенны по азимуту.

На среднем графике изображен в логарифмическом масштабе (в децибелах) разрез нижнего графика по азимуту при настройке по дальности, обеспечивающей максимум рассеянного сигнала.

## 4.2. Устранение влияния фазовых шумов в параметрическом микрофоне

Приведем еще один пример задачи, решаемой тем же методом. Этот пример интересен тем, что в нем необходимые условия для успешного решения задачи всегда существуют, не надо о них заботиться. Это задача осуществления помехоустойчивого детектирования колебания, модулированного по фазе, т. е. помехоустойчивость к большим медленным изменениям фазы.

Такая задача возникает при создании акустического параметрического микрофона [32, 33], в котором звук модулирует по фазе высокочастотный ультразвуковой луч. Модуляция является весьма малой, ее амплитудное значение имеет порядок величины менее, чем 0,001 радиана. Ультразвуковой луч, являющийся приемником колебаний, может модулироваться на много радиан изменениями условий распространения звука (флуктуациями температуры и скорости потока воздуха). Эти флуктуации весьма внушительны по своей величине, но они низкочастотны.

Путем предварительной обработки сигналу на выходе ультразвукового приемника можно придать вид (4.1.3):

$$P(t) = \exp[i(\omega t + \alpha\varphi(t))] \exp[i\Phi(t)]. \quad (4.2.1)$$

Здесь  $t$  – время;  $\omega$  – несущая частота ультразвука;  $\alpha$  – весьма малый индекс модуляции;  $\varphi(t)$  – принимаемый полезный звуковой сигнал;  $\Phi(t)$  – глубокая низкочастотная модуляция, вызванная флуктуациями ультразвукового луча при его распространении в среде. Соотношение (4.2.1) отличается от (4.1.3) лишь наличием несущей частоты. В данном случае именно несущая частота при малом индексе модуляции полезным сигналом обеспечивает выполнение всех условий, необходимых и достаточных для устранения низкочастотной помехи. Несущая частота является в данном случае полностью известным параметром, поэтому множитель, соответствующий этой частоте, легко превращается в единицу путем умножения (4.2.1) на комплексно сопряженный ему множитель.

Результаты математического моделирования выделения сигнала, принятого параметрическим микрофоном в условиях исключительно сильных флуктуаций, приведены на рис. 4.10. На рисунке *a* показан сигнал  $\varphi(t)$ , представляющий собою произнесенную фразу: "Устранение мультипликативной помехи". Этот сигнал был выделен из выражения вида (4.2.1) при уровне мультипликативной помехи, превышающем сигнал на 60 дБ. При таком уровне помех выделить сигнал с помощью обычного фазового детектора и фильтра не удастся. На рис. 4.10, *б* показан результат применения

к выражению (4.2.1) процедуры обычного фазового детектирования и фильтрации. Такая процедура приводит к нужному результату только на верхней осциллограмме, на которой отражен случай малых фазовых шумов, уровень их сравним с величиной индекса модуляции полезного сигнала.

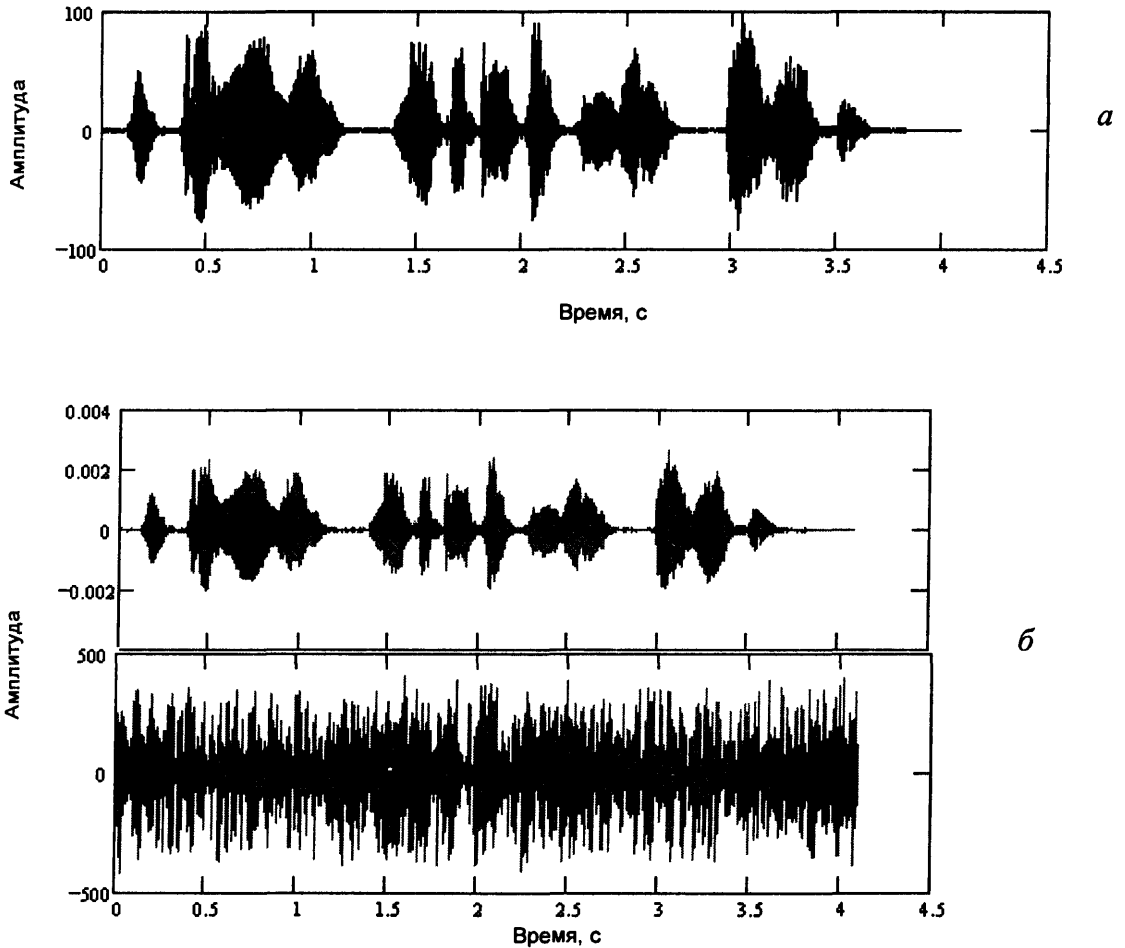


Рис. 4.10. Осциллограмма фразы: "Устранение мультипликативной помехи", выделенной из выражения (4.2.1) путем кепстрального анализа и фильтрации (а) и путем обычного фазового детектирования и фильтрации (б).

На нижней осциллограмме рис. 4.10, б – результат той же операции, но при шуме, увеличенном на 60 дБ. Именно при таком высоком уровне шума произведено выделение сигнала, показанного на рисунке а. Сравнение рисунка а с верхним рисунком б показывает, какой высокой степени помехоустойчивости при детектировании фазовой модуляции удастся добиться с помощью процедуры выделения фазы, являющейся основой комплексного кепстрального анализа.

### 4.3. Слепая дереверберация

Попробуем разделить мультипликативно связанные сигналы. Речь пойдет о помехе в виде повторяющегося сигнала, такая помеха называется реверберационной.

Примем следующую математическую модель реверберационной помехи. Имеется первоначальный сигнал  $F(t)$ , который повторяется через времена  $\tau_n$  с амплитудами

ми  $a_n$ , которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Эта модель может быть усложнена введением изменения фазы, одинаковой для всех частот спектра  $F(t)$ . Согласно этой модели принимаемый сигнал  $P(t)$  можно записать в следующем виде:

$$P(t) = F(t) + \sum_n a_n F(t - \tau_n). \quad (4.3.1)$$

Выражение (4.3.1) является частным случаем следующего общего соотношения:

$$P(t) = \int_{-\infty}^t F(\tau) S(t - \tau) d\tau, \quad (4.3.2)$$

где  $S(t)$  представляет собою отклик некоторого линейного фильтра на импульсное воздействие в виде  $\delta$ -функции. В нашем случае, при принятой нами модели сигнала,  $S(t)$  представляет собою следующую сумму  $\delta$ -функций:

$$S(t) = \delta(0) + \sum_n a_n \delta(t - \tau_n). \quad (4.3.3)$$

Из теории линейных фильтров следует, что спектр  $P(t)$  представляет собой произведение спектров  $F(t)$  и  $S(t)$ , что можно записать в виде

$$G_p(\omega) = G_f(\omega) G_s(\omega). \quad (4.3.4)$$

Здесь под спектром понимается результат комплексного преобразования фурье-функции, являющейся индексом  $G$ . На основании выражения (4.3.3) спектр  $S(t)$  будет выглядеть как

$$G_s(\omega) = \left[ 1 + \sum_n a_n \exp(i\varphi_n) \exp(i\omega\tau_n) \right]. \quad (4.3.5)$$

В формуле (4.3.5) сделано обещанное выше обобщение модели сигнала путем введения фазы задержанного сигнала  $\varphi_n$ , одинаковой для всех значений  $\omega$ .

Проблема состоит в том, чтобы выделить спектр чистого, не искаженного реверберацией сигнала, пользуясь лишь сигналом (4.3.1), не прибегая к другим измерениям (слепая дереверберация). Заметим, что рассмотренный выше способ разделения сигналов после их логарифмирования в данном случае неприменим, так как спектры логарифмов сомножителей (4.3.4) перекрываются.

Покажем, как можно отделить эти сомножители другим способом, основанным на принятой модели реверберации (4.3.1). Из соотношения (4.3.5) следует, что для определения значения частотной характеристики реверберации достаточно определить значения параметров  $\tau_n$ ,  $a_n$  и  $\varphi_n$ .

Прежде всего надо с максимальной точностью определить значения величин задержек сигналов —  $\tau_n$ . Эта операция производится путем логарифмирования выражения (4.3.4) с последующим спектральным анализом логарифма. В данном случае этим приемом нельзя воспользоваться для разделения сигналов, так как спектры перекрываются. Однако спектр одного из сомножителей состоит из дискретных составляющих, и этим можно воспользоваться. Логарифмируя модуль (4.3.4), с учетом (4.3.5) получим

$$\ln(|G_p(\omega)|) = \ln(|G_f(\omega)|) + \ln \left( \left| 1 + \sum_n a_n \exp(i\varphi_n) \exp(i\omega\tau_n) \right| \right). \quad (4.3.6)$$

Как следует из (4.3.6), в спектре (кепстре) от логарифма модуля спектра принятого сигнала должны наблюдаться спектральные линии на частотах (сачтотах), рав-

ных величинам задержек сигналов. Хотя спектры слагаемых в (4.3.6) не разделяются, дискретный характер спектра (4.3.5) позволяет на фоне другого слагаемого этот спектр увидеть и определить его параметры. Необходимым условием для этого является достаточно большая длина реализации сигнала (4.3.6), подвергающегося спектральному анализу. Таким путем можно с необходимой точностью определить как факт существования дискретных задержек сигнала по наличию соответствующего максимума в спектре (4.3.6), так и времена задержек сигнала по положению этого максимума. При этом могут наблюдаться и ложные максимумы, принадлежащие первому слагаемому (4.3.6). Это выясняется на описываемом ниже этапе обработки сигнала при определении значений коэффициентов.

Значения коэффициентов  $a_n$  и  $\varphi_n$  определяются для каждой задержки в отдельности. С этой целью составляется ряд опорных функций. Поясним этот этап обработки на примере определения одного коэффициента  $a_1$ . В качестве опорной берется следующая функция:

$$W_1(t) = P(t) - kP(t - \tau_1), \quad (4.3.7)$$

где  $k$  – пока произвольное число, а  $\tau_1$  – уже определенная ранее задержка сигнала.

В работе [30] показано, что логарифм спектра (4.3.7) не содержит частот (счетов)  $\tau_1$  при условии достаточной малости амплитуд ревербирующих сигналов и равенства нулю величины  $B_1$ , определяемой посредством соотношения

$$B_1 = a_1 \exp(i\varphi_1) - k. \quad (4.3.8)$$

Придавая различные комплексные значения коэффициенту  $k$ , можно добиться того, что  $B_1$  либо обратится в нуль, либо достигнет некоторого минимума по модулю. Таким образом, поочередно для каждой задержки находятся все параметры частотной характеристики реверберации, входящие в (4.3.5).

Определяющим условием применимости рассматриваемого метода является то, что условие малости амплитуд ревербирующих сигналов имеет резкую границу. Следуя [30], получим это определяющее условие численным методом. Используемая математическая модель, ход вычислений и их результат показаны в программе, приведенной на рис. 4.11. Основой для вычисления является выражение (4.3.7) при условии, что  $B_1$ , определяемое (4.3.8), равно нулю. При выполнении этого условия кепстр от (4.3.7) не должен содержать счастоты задержки  $\tau_1$ , для которой (4.3.8) обращается в нуль. Моделировалось только одно слагаемое кепстра (4.3.8), которое не содержит спектра сигнала, содержит лишь параметры реверберации, которые задаются таблицами, приведенными в программе рис. 4.11. Спектр той задержки, для которой соотношение (4.3.8) равно нулю, выписан отдельно, а сумма спектров остальных задержек умножена на общий множитель  $q_2$ , который варьируется в широких пределах. Вычисляется кепстр (4.3.7) на одной счастоте, соответствующей  $\tau_1$ , в зависимости от параметра  $q_2$ . Полученный результат показан на рис. 4.12. На нем вдоль горизонтали отложено значение параметра  $q_2$ , а по вертикали в логарифмическом масштабе в децибелах отложено значение кепстра (4.3.7) на одной счастоте  $\tau_1$ . Из рисунка видно, что имеется резкая граница в значениях амплитуд задержек, меньше которой сигнал той счастоты, для которой выполнено условие  $B_1 = 0$ , действительно отсутствует. То, что эта граница резкая, – весьма существенный факт, свидетельствующий о том, что малости величин задержек достаточно для правильного нахождения амплитуды и фазы задержек предлагаемым нами способом.

## Mathcad Plus 6.0

Массив данных

Диапазонные переменные

Таблицы параметров

$$L = 1024 \quad k = 0..L-1 \quad kk = 0..0.5 \cdot L-1 \quad v = 0..3 \quad n = 0..127$$

задержек амплитуд

Переменный коэффициент

Коэффициент

$q_v$

$s_v$

$$q2_n = 0.005 \cdot n$$

$$q1 = 0.3 \quad \text{Единица частота}$$

38
59
77
83

1
0.8
0.5
0.3

Логарифмирование

$$x_k = -2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot k$$

$$Z(u) = \text{if}(|u| > 10^3, 20 \cdot \log(|u|), 20 \cdot 3)$$

Спектр задержанного сигнала

Спектр задержанных сигналов с переменным коэффициентом

$$a_k = q1 \cdot \exp(i \cdot x_k \cdot 25)$$

$$b_{k,n} = q2_n \cdot \sum_v \exp(i \cdot x_k \cdot q_v) \cdot s_v$$

Единичный сигнал с реверберацией

Опорная функция для определения параметра

Кепстр

$$w_{k,n} = 1 - a_k + b_{k,n}$$

$$AS_{k,n} = \ln(w_{k,n} - a_k \cdot w_{k,n})$$

$$GS1^{<n>} = \text{cfft}(AS^{<n>})$$

Кепстр на частоте задержки с искомыми параметрами

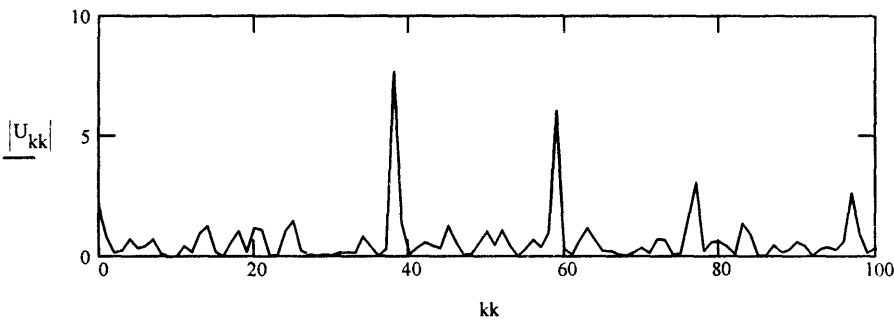
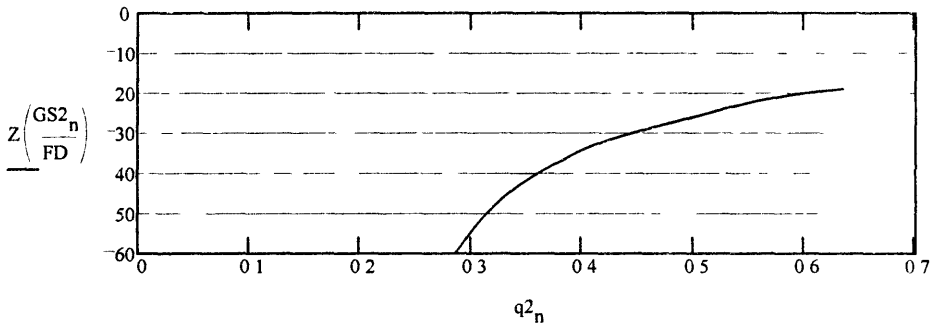
Нормировка на максимум

$$GS2_n = \frac{|GS1_{25,n}|}{\max(GS1)}$$

$$F_k = \text{Re}(AS_{k,120}) \quad U = \text{fft}(F)$$

$$FD = \max(GS1)$$

Величина нарушения условия правильного подбора параметров



**Рис. 4.11.** Принципиальная возможность применения алгоритма подбора параметров только для одного из задержанных сигналов

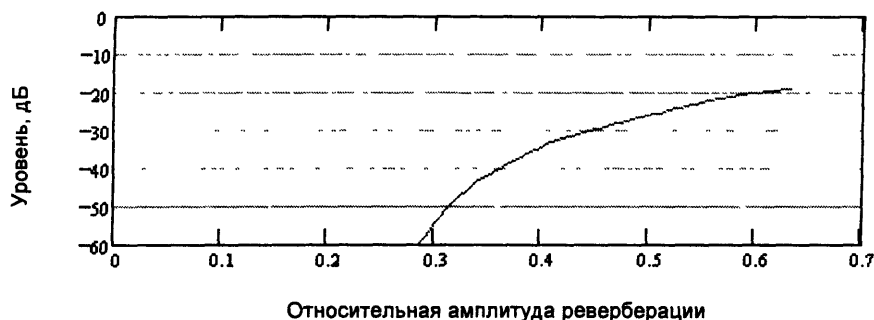


Рис. 4.12. Уровень исключаемой частоты в зависимости от амплитуды реверберации

Для устранения реверберационных искажений спектр принятого сигнала следует поделить на частотную характеристику с подставленными в нее найденными параметрами задержанных сигналов, после чего сделать обратное преобразование Фурье. Окончательно убедиться, что задача решена правильно и полностью, можно опять с помощью кепстра. Кепстр восстановленного сигнала не должен содержать интенсивных дискретных компонент.

Метод проверен как в численном, так и в натурном эксперименте. Результат численного эксперимента, проведенного в 4 этапа, показан на рис. 4.13. На первом этапе решается задача численного моделирования экспериментальных данных, которые могут включать не целочисленные значения задержек. По разд. 1 программы видно, что такая задача "в лоб" не решается. Формально в математические формулы программы можно подставлять не только целочисленные значения, но и дробные, так как сигнал моделируется в спектральном виде по формуле (4.3.4). Если все сделать таким образом (что и проделано в программе), то ожидаемого результата не получается. Дробная задержка не может существовать в приготовленном для нее массиве данных. Это редкий случай, когда компьютер не выполняет требуемой команды и не бьет по этому поводу никакой тревоги. Уникальный случай. Программа правильная, в этом можно убедиться, если взять целочисленное значение задержки, программа правильно моделирует сигнал с реверберацией. В следующем разд. 2 программы приводится обходной маневр, позволяющий построить математическую модель сигнала с реверберацией при дробной задержке в первоначальном массиве данных. Реальные данные тоже могут иметь дробную задержку, и этот факт нельзя не учитывать. В программе видно, как это сделано. Взят новый массив данных, который настолько больше первоначального массива, что задержка в нем получается целой. В этом массиве данных никаких проблем с моделированием сигнала не возникает. После этого можно перейти к старому массиву данных путем простого исключения части отсчетных точек. После этой операции мы получаем сигнал с реверберацией при дробной задержке. Дальнейшая работа производится именно с этим сигналом, являющимся математической моделью эксперимента.

В 3-м разделе программы определяются параметры реверберации вслепую, т. е. только по сигналу с реверберацией без привлечения других данных. Сначала определяется величина задержки сигнала. Для этой цели в программе используется кепстр модуля сигнала. Задержка определяется по максимуму кепстра модуля. Если задержек много, то каждой из них соответствует свой максимум. Так могут быть определены все задержки, но в программе участвует только одна. Далее определяется амплитуда задержанного сигнала в единицах основного сигнала с помощью опорной функции (4.3.7). Чтобы построить эту функцию, введена специальная программа, осуществляющая сдвиг данной последовательности вправо на любое число отсчетных точек.





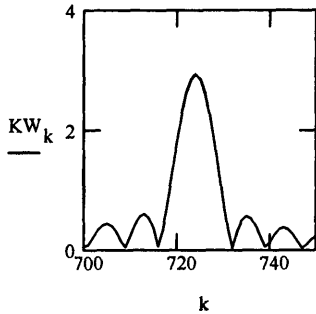
**3. Определение параметров реверберации вслепую**

Логарифм модуля спектра (ЛМС)  
 $EL_m = OU(GRZ_m)$

Спектр ЛМС  
 $KG = \text{fft}(EL)$

Модуль спектра ЛМС с фильтрацией  
 $KW_k = |KG_k| \cdot \Phi(k - 40)$

График модуля спектра ЛМС



Определение максимума ЛМС (величины задержки)

$$OQ_k = k \cdot \Phi(KW_k - \max(KW)) \quad MT = \max(OQ)$$

Функция, сдвигающая последовательность

$$OD(F, x, y) = \begin{cases} F_{x-y} & \text{if } x - y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Диапазонная переменная

$$jg = 0..19 - 1 \quad AM_{jg} = 0.1 \cdot (jg - 9)$$

Опорная функция для определения амплитуды

$$BCH_{m,jg} = BRZ_m - AM_{jg} \cdot OD(BRZ, m, MT)$$

$$GCH^{<jg>} = \text{cfft}(BCH^{<jg>}) \quad BL_{m,jg} = OU(GCH_{m,jg})$$

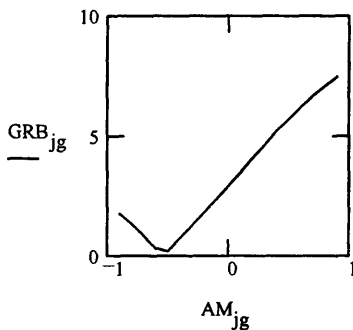
Кепстр опорной функции (КОФ)

$$KBL^{<jg>} = \text{fft}(BL^{<jg>})$$

Определение минимума КОФ на сачтоте MT

$$GRB_{jg} = |KBL_{MT,jg}| \quad NAF = \min(GRB)$$

Поиск минимума



$$URA = \sum_{jg} AM_{jg} \cdot (GRB_{jg} = NAF)$$

Сопоставление заданных и найденных значений параметров реверберации

задано:

найдено:

$$AT = -0.5$$

$$URA = -0.5$$

$$T = 90.5$$

$$MT = 724$$

$$\frac{MT}{N} = 90.5$$

**4. Устранение реверберации с найденными параметрами**

$$G2_m = \frac{GRZ_m}{1 + \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L \cdot N} \cdot m \cdot MT\right) \cdot URA}$$

$$C = \text{icfft}(G2) \quad CR_m = \text{Re}(C_m)$$

Сигнал с устраненной реверберацией

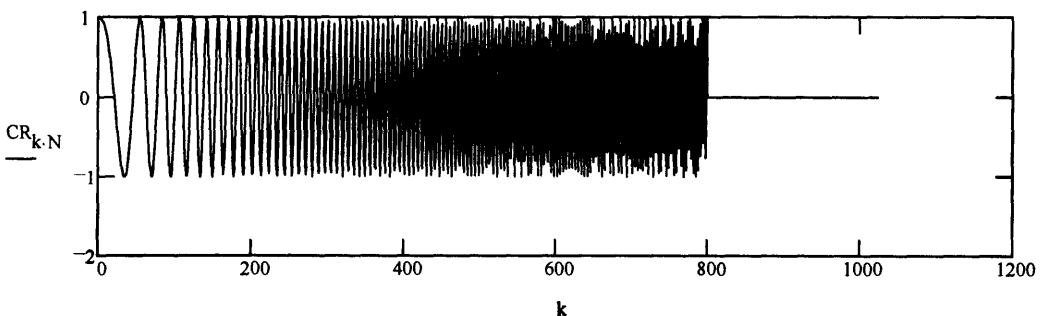


Рис. 4.13 (окончание)

## Mathcad Plus 6.0

### 1. Моделирование реверберации, не кратной интервалу квантования

Массив и диапазонные переменные  
 $L = 1024$   $k = 0..L - 1$   $n = 0..0.5 \cdot L - 1$

Параметры сигнала  
 $a = 0.2$   $f = 8$   $p2 = 800$

Функция формирования сигналов

Параметры задержанного сигнала

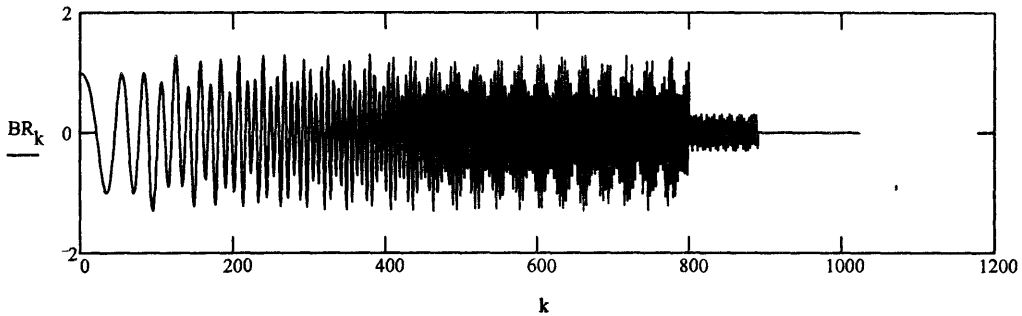
$$F(u, D) = \begin{cases} \cos\left[2 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \left[u \cdot 8 + (u)^2 \cdot 0.2\right]\right] & \text{if } 0 \leq u < D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

амплитуда      задержка

$$AT = 0.3 \quad T = 90.5$$

Сигнал      Задержанный сигнал      Сигнал с реверберацией      Спектр сигнала с реверберацией

$$A_k = F(k, p2) \quad B_k = F(k - T, p2) \quad BR_k = A_k + AT \cdot B_k \quad G = \text{cfft}(BR)$$



Новая диапазонная переменная

$$N = 8 \quad m = 0..L \cdot N - 1$$

Функция дополнения спектра нулями

$$O(F, m) = \begin{cases} F_m \cdot \sqrt{N} & \text{if } m < 0.5 \cdot L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Логарифмирование  $pe = 10$

$$OU(u) = \text{if}(|u| > e^{pe}, \ln(|u|), 0)$$

Сигнал с реверберацией, дополненный промежуточными значениями

$$F_{m-L \cdot N + L} \cdot \sqrt{N} \quad \text{if } L \cdot N - 0.5 \cdot L \leq m$$

$$GRZ_m = O(G, m) \quad BRZ1 = \text{icfft}(GRZ) \quad BRZ_m = \text{Re}(BRZ1_m)$$

### 2. Определение параметров реверберации вслепую

Логарифм модуля спектра (ЛМС)      Спектр ЛМС

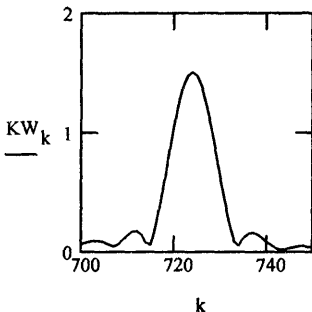
$$EL_m = OU(GRZ_m) \quad KG = \text{fft}(EL)$$

Модуль спектра ЛМС с фильтрацией

$$KW_k = |KG_k| \cdot \Phi(k - 400)$$

График модуля спектра ЛМС

Определение максимума ЛМС (величины задержки)



$$OQ_k = k \cdot \Phi(KW_k - \max(KW)) \quad MT = \max(OQ)$$

Функция, сдвигающая последовательность

$$OD(F, x, y) = \begin{cases} F_{x-y} & \text{if } x - y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Рис. 4.14. Устранение реверберационной помехи (начало)**

Диапазонная переменная

$$jg = 0..19 - 1 \quad AM_{jg} = 0.1 \cdot (jg - 9)$$

Опорная функция для определения амплитуды

$$BCH_{m,jg} = BRZ_m - AM_{jg} \cdot OD(BRZ, m, MT) \quad GCH^{<jg>} = \text{cfft}(BCH^{<jg>}) \quad BL_{m,jg} = \text{OU}(GCH_{m,jg})$$

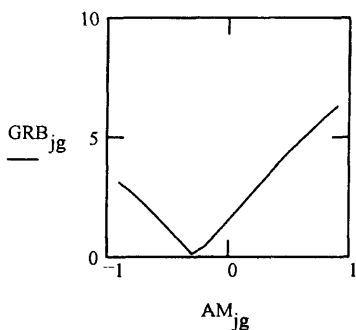
Кепстр опорной функции (КОФ)

$$KBL^{<jg>} = \text{fft}(BL^{<jg>})$$

Определение минимума КОФ на частоте MT

$$GRB_{jg} = |KBL_{MT,jg}| \quad NAF = \min(GRB)$$

Поиск минимума



$$URA = \sum_{jg} AM_{jg} \cdot (GRB_{jg} - NAF)$$

Сопоставление заданных и найденных значений параметров реверберации

Задано: Найдено:

AT = 0.3      URA = -0.3

T = 90.5      MT = 724       $\frac{MT}{N} = 90.5$

3. Устранение реверберации с найденными параметрами

$$G2_m = \frac{GRZ_m}{1 + \exp\left(i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{L \cdot N} \cdot m \cdot MT\right) \cdot URA}$$

$$C = \text{icfft}(G2) \quad CR_m = \text{Re}(C_m)$$

Сигнал с устраненной реверберацией

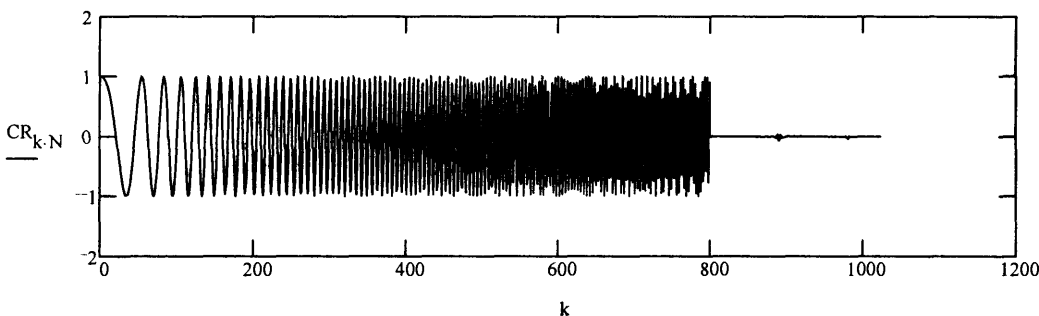


Рис. 4.14 (окончание)

Построение опорной функции для дробной задержки требует дополнения спектра функции нулями, что уже было сделано выше. Далее измеряется величина  $k$ , обращающая формулу (4.3.8) в нуль. Эта операция осуществляется тоже с помощью кепстра. Программа повторяет с опорной функцией все те действия, которые совершались с реверберирующим сигналом для определения величины задержки, но до определенного момента. В зависимости от величины  $k$  в формуле (4.3.8) значение кепстра определяется на сачтоте задержки. Этот минимум получается при значении  $k$  в (4.3.8), равном искомому значению амплитуды сигнала реверберации, выраженной в единицах основного сигнала.

В заключительной части программы производится устранение реверберации с помощью фильтрации сигнала фильтром с найденными значениями параметров.

На рис. 4.14 приведена программа, повторяющая программу, показанную на рис. 4.13, за одним исключением, состоящим в методике численного моделирования сигнала с реверберацией. Метод численного моделирования, использованный в программе на рис. 4.13, позволяет моделировать только такие задержки, которые содержат добавки к значениям интервала квантования, выражающиеся формулой  $\Delta t \frac{h}{2^n}$ , в которой  $\Delta t$  – интервал квантования, а  $h$  и  $n$  – непременно целые числа. В программе, показанной на рис. 4.14, применен принцип моделирования, позволяющий вводить значения задержек, содержащие любые доли интервала квантования. Это сделано (и возможно) для моделирования реверберации путем задания исходного сигнала в виде математического выражения, записанного в программе так, что она позволяет определить значения функции в любых точках этой функции. Заметим, что представление функции в виде ряда Котельникова (1.3.6) дает возможность вводить любые задержки через значения функции в дискретных точках.

Натурный эксперимент проведен по шуму излучателя, буксируемого в глубоком море в условиях многолучевого распространения звука. В этом опыте на основе реализации принятого шума методом, изложенным выше, были определены параметры 7 задержанных сигналов, два из которых оказались с противоположными фазами, а остальные – в фазе с наиболее быстрым и интенсивным сигналом. Амплитуды задержанных сигналов были в пределах 20–30% от амплитуды максимального сигнала. В результате применения фильтра, обратного реверберации, удалось существенно ослабить наблюдаемую интерференционную картину.

Текущий спектр шума излучателя в координатах частота – время представлен на рис. 4.15. На текущем спектре (рис. 4.15, а) видны интерференционные полосы, свидетельствующие о том, что имеется реверберация. На рис. 4.15, б приведен кепстр (логарифм модуля спектра) этого же сигнала (по оси ординат отложено время, а по оси абсцисс – сачтота в пределах от 0 до 100 мс), где четко видны линии, соответствующие временам запаздывания прихода сигналов относительно того, который приходит первым.

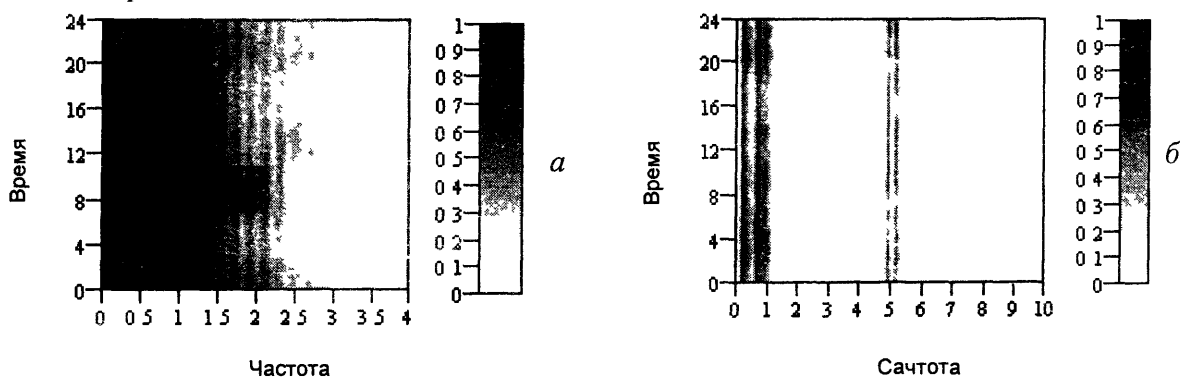


Рис. 4.15. Текущий спектр (а) и кепстр (б) сигнала

На рис. 4.16 приведены спектр и кепстр сигнала после операции по его дереверберации. На рис. 4.17 приведены сечения спектров, показанных на рис. 4.15 (до обработки – толстая линия) и рис. 4.16, *a* (после обработки – тонкая линия).

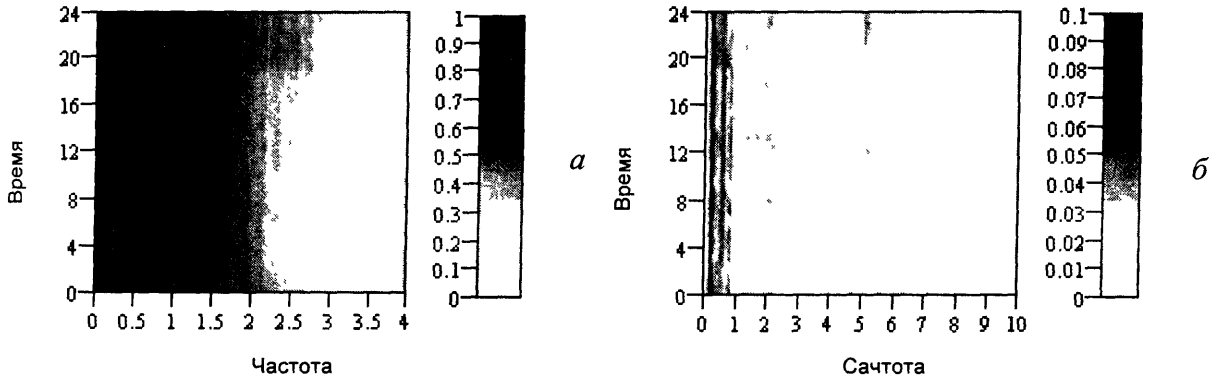


Рис. 4.16. Текущий спектр (*a*) и кепстр (*б*) сигнала после устранения отраженных сигналов

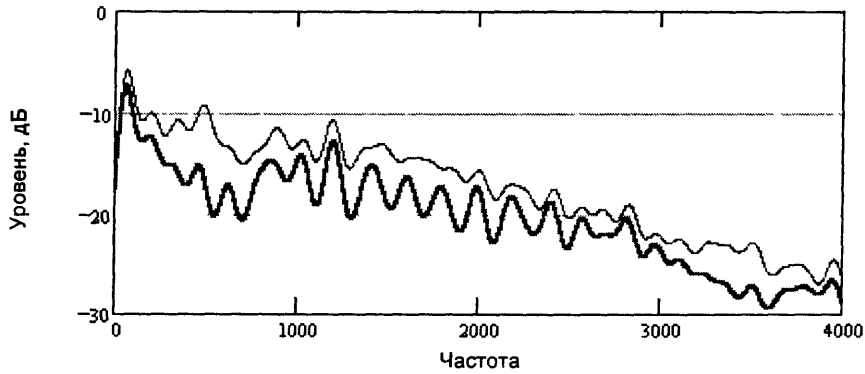


Рис. 4.17. Спектр сигнала, показанный на рис. 4.15, усредненный по времени (толстая линия) и спектр сигнала, показанный на рис. 4.16 (*a*), усредненный по времени (тонкая линия).

Показанные на вышеупомянутых рисунках результаты подтверждают возможность осуществления слепой дереверберации описанным способом в условиях натурального эксперимента.

## ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ТРАСС С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ М-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 5.1. Акустические задачи, решаемые с помощью М-последовательности

В этой главе представлено описание некоторых результатов применения методов и алгоритмов обработки сигналов, о которых рассказывалось выше. Большинство описанных экспериментов проводилось в рамках крупных международных и российских научных программ и грантов, что характеризует их значимость.

К таким программам следует отнести в первую очередь одну из наиболее известных программ – программу *Акустической термометрии океанского климата* (АТОК). Основная задача АТОКа – наблюдение тенденций глобального изменения климата на основе измерения вариаций времени распространения сигнала, вызванных изменением средней температуры океана на сверхдлинных акустических трассах. Как известно, увеличение средней температуры Земли всего на один градус может привести к катастрофическим последствиям. Но контроль температуры во многих точках Земли через интервалы времени достаточные для измерения средней температуры вряд ли возможен технически. Океан же является гигантским аккумулятором тепла. Поэтому измерение температуры океана вдоль сверхбольших трасс акустическими методами в настоящее время представляется подходящим средством и позволяет отказаться от измерения температуры повсеместно.

В книге представлены результаты обработки акустических данных с трассы Гавайи – Камчатка. На Камчатке принимался сигнал от Гавайского акустического источника, излучавшего несущую, модулированную М-последовательностью. В результате обработки такого сигнала, несмотря на то что отношение сигнал/шум в нем было много меньше единицы, удалось не только выделить сигнал из шума, но и измерить и идентифицировать медленные и быстрые вариации времени распространения сигнала [34].

Другим известным международным экспериментом была программа THETIS-II, проведенная в 1994 году в Средиземном море. Целью исследований было длительное измерение флуктуаций времени распространения сигнала, вызванных как естественными, так и техногенными причинами между 7 автономными стационарными приемо-передающими акустическими станциями. Основная задача российских участников этой программы состояла в отработке методики измерений. Эти измерения проводились с дрейфующего судна с помощью вертикальной антенны. Целью научно-исследовательского судна в этой программе было измерение поля скоростей звука на

исследуемой акватории. Одновременно с выполнением этой задачи проводился прием сигналов. Обработка полученных данных дала возможность уверенно выделить и идентифицировать отдельные крутые лучи или, по крайней мере, их группы, даже в условиях нестационарной трассы [35]. Более того, применение кепстральной обработки позволило повысить точность измерения периода следования импульсов на приемной системе в условиях многолучевого распространения и, следовательно, повысить точность измерения вариаций времени распространения, вызванных движением приемного судна и волновыми процессами в океане.

Еще один акустический эксперимент, приведенный в этой работе, представляет несомненный интерес, как и предыдущие. Это эксперимент по межскважинной томографии в нефтесодержащей среде, имеющий целью разработку методов акустического видения в неоднородной среде. В этом эксперименте также удалось выделить и идентифицировать отдельные траектории лучей только благодаря применению сигнала на основе *M*-последовательности [36].

Все эти с виду различные эксперименты объединяет схожесть применяемых методик их проведения и обработки полученных данных. Во-первых, во всех экспериментах применялся тестовый (зондирующий) сигнал одного типа – это псевдослучайный сигнал на основе *M*-последовательности. Во-вторых, применяемая обработка иллюстрирует практическое применение алгоритмов, в основном, описанных в предыдущей части книги. В-третьих, решение всех этих задач требует идентификации, то есть нахождения соответствия теоретической модели и экспериментальных данных.

В этой главе будет показано, что применение сигналов на основе *M*-последовательности позволяет решать задачи не только измерения параметров исследуемой системы, но и задачи идентификации. Важно и то, что применение тестовых сигналов на основе *M*-последовательности практически не требует использования сложных методов обработки. Вся обработка базируется на преобразовании Фурье, понятии корреляционной функции и их свойствах, подробно описанных в предыдущих главах. Такие сигналы, позволяя сразу определять все характеристики исследуемых систем, могут заменить использование тональных и чисто случайных сигналов, каждый из которых легко обеспечивает измерение только определенного круга параметров. Например, измерение частотной или импульсной характеристики системы с помощью тонального сигнала проводится за большое число циклов, тогда как применение случайного сигнала обеспечивает их измерение за один цикл. И наоборот, измерение малых флуктуаций времени распространения сигнала через систему достаточно просто выполняется с помощью тонального сигнала, что непросто осуществить с помощью случайного сигнала. Применение *M*-последовательности позволяет измерять частотную или импульсную характеристики системы за один цикл (как и с помощью случайного сигнала), имея при этом существенно меньшую погрешность. Эти возможности *M*-последовательности будут описаны ниже с соответствующими пояснениями.

## 5.2. Выбор оптимальной методики анализа линейной системы

Задача экспериментального исследования любой системы обычно заключается в изучении её свойств по входному и выходному сигналам. Термин "система" мы употребляем как сокращенный вариант термина "линейная система", т. е. звено, совершающее с сигналом только такие операции, которые могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, не содержащими нелинейных членов. Общие свойства таких систем были описаны выше, а здесь пойдет речь об измерении параметров таких систем. Как было сказано выше

(см. п. 1.5), исчерпывающей характеристикой системы, в которую входят все ее параметры, является отклик системы на импульсное воздействие или же спектр этого отклика, называемый частотной характеристикой.

Любой эксперимент по измерению параметров системы включает этапы измерения сигнала или его характеристик в условиях помех. Иными словами, эксперимент есть выделение сигнала из шума. Корректная реализация всех этапов измерений во многом определяет правильность полученных результатов.

Несомненно, правильный выбор инструментов измерения (датчиков, усилителей, измерительных и вычислительных приборов) играет важную роль. Однако настоящая книга в первую очередь посвящена методическим вопросам, а не вопросам выбора правильных аппаратных средств. Более того, в этой главе рассматривается вопрос активного измерения характеристик линейных систем.

Активные измерения означают, что измерения параметров системы осуществляются путем воздействия некоторыми сигналами на вход системы и наблюдения и анализа получающихся выходных сигналов. Из-за наличия шумов и помех, практически всегда присутствующих в наблюдаемых сигналах, этого может оказаться недостаточно для измерения искомым параметров с нужной точностью. Тогда возникает потребность в использовании стохастической природы помех и усреднения полученных результатов измерения.

Воспользовавшись априори известной теоретической моделью системы, для увеличения точности можно сравнивать предполагаемую реакцию системы и измеренную. Проведя оценку отличий экспериментально измеренных реакций и полученных из теоретических соображений, совершенствуя теоретическую модель системы, следует добиваться минимального различия реакций. Таким путем можно построить оценку истинной модели среды в тех случаях, когда в качестве системы служит исследуемая среда, в которой распространяются волны.

Однако зачастую оказывается, что возникает задача измерения характеристик систем за очень ограниченный интервал времени, что может быть вызвано нестационарностью исследуемой системы, или ограниченностью энергетических ресурсов источника воздействия на вход системы, или административных ограничений на время подачи воздействия на вход системы. Бывает и такое! Примером может быть проект АТОК. Тогда длительность работы источника на Гавайях ограничивалась требованиями экологических организаций.

Поэтому оптимальность методики измерения может выйти на первый план, и очевидно, что оптимальность методики в целом зависит и от оптимальности её частей.

Это относится и к этапу проведения измерений реакции системы, результаты которого во многом зависят от правильного выбора вида воздействия на вход системы (это воздействие будем называть *тестовым сигналом*).

Очевидно, что не всякий сигнал может подходить для решения этой задачи. Например, гармонический сигнал в виде синусоиды частоты  $\omega_0$  позволяет измерять частотную характеристику только в одной точке  $\omega_0$  и не подходит для измерения импульсной характеристики. Однако, если исследователь может в процессе измерения перестраивать частоту входного сигнала, то, проведя множество циклов измерений на разных частотах, он сможет получить достаточно точную оценку частотной характеристики и, воспользовавшись преобразованием Фурье, вычислить импульсную характеристику. Но в этом случае резко увеличиваются временные затраты на измерения (много циклов измерения), что не всегда допустимо. Воспользовавшись достаточно простыми соотношениями, рассмотрим возможные алгоритмы исследования систем и определим желательные свойства тестовых сигналов.



Пусть  $x_i(t)$  – сигнал на  $i$ -входе,  $y_j(t)$  – сигнал на  $j$ -выходе,  $h_y(t)$  – импульсная характеристика системы. Эти функции связаны между собой интегралом Дюамеля, уже упоминавшимся в этой книге (см. п. 1.5) и описывающим операцию свертки входного сигнала и импульсного отклика системы:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt' = x(t) \otimes h(t). \quad (5.2.1)$$

Отсутствие влияния одного канала на другой в линейной системе позволяет рассматривать один вход и один выход. Кроме того, для упрощения выражений анализ проведем при условии бесконечных времени и диапазона частот.

В пространстве частот выражение (5.2.1) будет выглядеть как

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega). \quad (5.2.2)$$

Эти два соотношения позволяют получить два метода измерения характеристик линейных систем.

Первый метод следует прямо из интеграла Дюамеля и заключается в подаче на вход сигнала типа дельта-импульса  $x(t) = \alpha\delta(t)$ . Тогда интеграл (5.2.1) примет вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\delta(t')h(t-t')dt' = \alpha h(t). \quad (5.2.3)$$

То есть, достаточно на вход системы подать дельта-импульс, на выходе системы получим сигнал, пропорциональный искомой импульсной характеристике системы.

Отметим недостатки этого метода. Первый состоит в том, что реализация дельта-импульса физически невозможна. Можно лишь создать короткий импульс с конечной длиной и конечной амплитудой. Отсюда следует второй недостаток, заключающийся в том, что максимальная амплитуда импульса ограничена для всех систем диапазоном линейности и при конечной длительности ограничена энергия импульса. В результате невозможно достигнуть хорошей точности измерения, поскольку в выходном сигнале практически всегда присутствует шум, распределенный по времени и, следовательно, имеющий большую энергию. Пусть на входе прибора, регистрирующего сигнал с выхода системы, мы имеем отношение сигнал/шум  $\eta$  – отношение квадрата максимально допустимой амплитуды сигнала в линейном режиме к дисперсии  $\sigma_n^2$  аддитивного шума, внесенного неконтролируемыми помехами и самим измерительным прибором. Этим соотношением и будет определяться относительная погрешность измерения импульсной характеристики, поскольку в каждой точке измеренной импульсной характеристики будет присутствовать шум с дисперсией  $\sigma_n^2$ . Если же по этой импульсной характеристике мы определим частотную характеристику, то для нее отношение сигнала к шуму станет хуже. В соответствии с теоремой Парсевала квадрат значений сигнала равен квадрату значений коэффициентов Фурье. Чем более широкополосна исследуемая система, тем хуже будет отношение сигнал/шум в измеренной частотной характеристике. Безусловно, это соблюдается для помех в виде белого шума. Например, для помехи в виде синусоиды с частотой, лежащей вне полосы пропускания системы при условии априорного знания об этой помехе, соотношение сигнал/шум в измеренной частотной характеристике возрастет. Однако рассмотрение таких вырожденных случаев не имеет особого смысла, поскольку в основном помехи имеют стохастическую природу и априорные их характеристики либо неизвестны, либо известны недостаточно точно. Например, в случае белого шума сигнал/шум для измеряемой частотной характеристики уменьшится в  $N$  раз, где  $N$  – число степеней свободы исследуемого сигнала.

Во втором методе на вход системы подается сигнал со спектром в виде дельта-функции, т. е. просто гармонический сигнал  $x(t) = \exp(i\omega_0 t)$ . Запишем выходной сигнал в этом случае как

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_0 t') h(t-t') dt'.$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье и сделав ряд простых преобразований, получим спектр выходного сигнала:

$$Y(\omega) = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_0 t) \exp(-i\omega t) dt = H(\omega) \delta(\omega - \omega_0) = H(\omega_0).$$

Обратное фурье-преобразование даст выходной сигнал:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = H(\omega_0) \exp(i\omega_0 t). \quad (5.2.4)$$

Выходной сигнал в этом случае представляет собой входной гармонический сигнал, умноженный на значение частотной характеристики системы  $H(\omega_0)$  на частоте входного сигнала.

Особенность измерения  $H(\omega_0)$  в этом случае состоит в том, что значение  $H(\omega_0)$  комплексное и необходимо измерить как модуль, так и фазу. Модуль  $H(\omega_0)$  может быть измерен линейным детектором, а фаза — фазовым с использованием входного сигнала в качестве опорного. Измерение фазы представляет более серьёзную техническую проблему, чем измерение амплитуды. Поэтому в ряде случаев, используя метод перестраиваемой частоты, ограничиваются измерением только модуля частотной характеристики.

Путем перестройки частоты сигнала можно измерить значения частотной характеристики в требуемом диапазоне частот. Правда, для этого потребуется значительное время, что является основным недостатком описанного метода. Помехозащищенность данного метода значительно выше, чем первого, поскольку энергия синусоиды при одинаковой амплитуде намного больше (следствие той же теоремы Парсеваля), чем энергия дельта-импульса, и при измерении частотной характеристики вся эта энергия сосредоточена в одной частотной точке. Поэтому этот метод нашел широкое распространение, и на его основе построено большое количество измерителей частотных характеристик и анализаторов спектра. Однако в подавляющем большинстве с их помощью определяется лишь модуль частотной характеристики.

Рассмотренные нами способы измерения характеристик систем, как мы видим, не являются идеально подходящими. К счастью, существует, хотя и менее распространенный, но более удобный и помехоустойчивый способ измерения параметров систем, получающий распространение в последнее время как благодаря своим характеристикам, так и благодаря развитию вычислительной техники. Представленные далее примеры обработки данных экспериментов основаны именно на этом способе.

Перепишем (5.2.2), умножив правую и левую часть на  $X^*(\omega)$ . Комплексно-сопряженное произведение двух спектров называется взаимным спектром мощности, а если оба спектра от одного сигнала, то такое произведение называют автоспектром мощности или спектральной плотностью мощности:

$$Y(\omega) X^*(\omega) = X(\omega) X^*(\omega) H(\omega) = |X(\omega)|^2 H(\omega).$$

Из этого выражения видно, что если модуль спектра входного сигнала  $|X(\omega)|^2$  равен константе, взаимный спектр выходного и входного сигналов пропорционален частотной характеристике системы.

Таким образом, если входной (тестовый) сигнал для определения параметров системы сформировать так, чтобы его спектральная плотность мощности была как можно ближе к константе в исследуемом диапазоне частот, то взаимный спектр выходного и входного сигналов будет равен частотной характеристике системы, умноженной на эту константу. Если модуль спектра входного сигнала известен, частотная характеристика системы определяется делением взаимного спектра на квадрат модуля входного. Для того чтобы реализовать этот способ, необходимо просто иметь сигналы одновременно на входе и на выходе системы и вычислить взаимный спектр, как комплексно-сопряженное произведение входного и выходного спектров. Выполнив обратное преобразование Фурье от обеих частей уравнения, получим

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \otimes h(\tau),$$

где  $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega$  – взаимно-корреляционная функция,

$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega$  – автокорреляционная функция.

Отсюда следует, что, если автокорреляционная функция входного сигнала равна дельта-функции, то взаимная корреляционная функция выходного и входного сигналов пропорциональна импульсной переходной характеристике исследуемой системы:

$$R_{xy}(\tau) = k\delta(\tau) \otimes h(\tau) = kh(\tau). \quad (5.2.5)$$

Соотношение (5.2.5) позволяет предложить алгоритм исследования систем с использованием пробных сигналов с корреляционной функцией в виде одного узкого пика. Такие сигналы могут (благодаря отсутствию неперенной локализации во времени как у  $\delta$ -функции) иметь значительную энергию, не выходя за пределы линейности. Вследствие этого такой метод измерения может быть достаточно помехоустойчивым.

При подаче на вход системы тестового сигнала в виде короткого импульса его энергия распределяется по импульсному отклику системы. То же происходит и с энергией сигнала с корреляционной функцией в виде дельта-импульса, однако его энергия будет во столько раз больше, во сколько раз тестовый сигнал длиннее импульса. Это отношение приближенно равно  $N$ . И что очень важно, при достаточно хорошей помехозащищенности метода измерения всей характеристики системы производится за один цикл измерений, тогда как измерение с тональным сигналом требует многих циклов измерения по одному на каждой частоте. Если у экспериментатора есть возможность повторить несколько циклов, то они могут быть направлены на снижение шумов, то есть на повышение точности измерения.

Выбор наилучшего тестового сигнала определяется множеством различных факторов, таких как простота реализации, точная повторяемость, малые аппаратные ошибки (ошибки, связанные со свойствами самого тестового сигнала) и т. п.

Класс сигналов, имеющих корреляционную функцию близкую дельта-функции, обширен, однако далеко не все они удобны в реализации и применении. Хорошим тестовым сигналом для метода измерения характеристик линейных систем мог бы быть белый шум, имеющий корреляционную функцию в виде узкого пика. Но стохас-

тическая природа шума приводит к тому, что измеренная за конечное время корреляционная функция сама является случайной реализацией и такая корреляционная функция кроме основного пика содержит и некоторый шум вне этого пика (рис. 5.1). Эта и ряд других причин не позволяют использовать реализацию белого шума в качестве хорошего тестового сигнала.

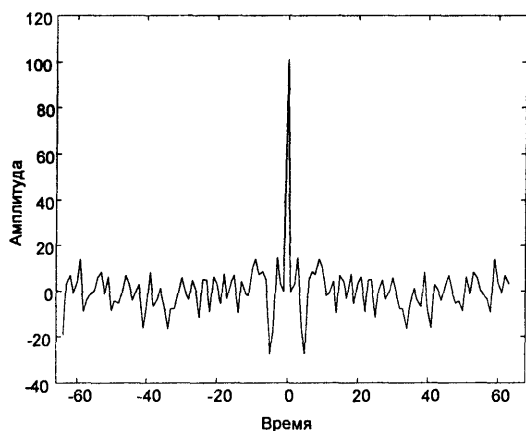


Рис. 5.1. Автокорреляционная функция реализации белого шума.

Эти проблемы заставили исследователей обратить внимание на частотно-модулированные и псевдослучайные сигналы, позволяющие значительно снизить уровень шума вне основного пика. В результате ошибки измерения импульсных и частотных характеристик определяются только помехами или стохастичностью измеряемой системы, но не тестовым сигналом.

С нашей точки зрения, наиболее подходящими тестовыми сигналами являются кодовые последовательности, называемые кодами максимальной длины ( $M$ -последовательность) [37] и сигналы,

построенные на их основе. Интересно, что в MatLab'e, наряду с традиционными функциями формирования синусоидальных прямоугольных сигналов, есть функция ('mlbs'-maximum length binary sequence) формирования  $M$ -последовательности [38]. Повторяемость такого сигнала не вызывает никаких затруднений. Точность восстановления может ограничиваться только точностью повторения частоты сигнала (интервалов времени) в точке приема. Без применения прецизионных приборов относительная погрешность воспроизведения частоты сигнала может быть не более  $10^{-6}$  (точность простейших наручных электронных часов), а при использовании специальных стандартов частоты —  $10^{-12}$  и менее. Это позволяет обеспечить когерентность излученного сигнала и его образа (реплики) на приемной стороне в течение длительных интервалов времени (даже годами). Такая высокая когерентность позволила провести долговременный эксперимент (продолжительностью около двух лет) с использованием автономных приемо-передающих станций, установленных в Средиземном море. Синхронизовать их часы можно было только при постановке, в дальнейшем они работали по заданному графику излучений и приема. При этом отклонение от заданного момента излучения после года работы не должно было превышать 30 мкс, что эквивалентно 5 градусам периода несущей частоты 400 Гц.

Таким образом, можно утверждать, что наилучшей методикой измерения может служить метод, основанный на формуле (5.2.5), с использованием  $M$ -последовательности. Что представляет собой  $M$ -последовательность, рассмотрим далее.

### 5.3. $M$ -последовательность — идеальный тестовый сигнал для анализа систем. Ее генерация и свойства

Под  $M$ -последовательностью понимают бинарную (принимающую два значения) последовательность импульсов, характеризуемую рядом свойств, из которых для нас основным будет то, что автокорреляционная функция её, измеренная за конечный интервал времени, представляет собой один узкий треугольник. Такая последовательность представляет собой последовательность импульсов и интервалов

между ними разной ширины. Длина импульсов и интервалов следования кратны некоторому временному интервалу  $\tau_0$ , часто называемому "единицей последовательности". Общие времена нахождения сигнала в одном из состояний на интервале длины  $M$ -последовательности отличаются на величину  $\tau_0$ , поскольку длина  $M$ -последовательности равна нечетному числу единиц  $N$ . При большой длине  $M$ -последовательности эти времена почти равны. Мы будем полагать, что последовательность принимает два значения:  $-1$  и  $1$ .

Корреляционная функция непрерывной  $M$ -последовательности состоит из треугольника, высотой равного  $R_x(0) = \sigma^2$  – дисперсии последовательности и константе

$R_x(\tau > \tau_0) \equiv -\frac{R_x(0)}{N}$ , где  $N$  – длина  $M$ -последовательности в единицах [39]. При вы-

числении корреляционной функции аperiodической  $M$ -последовательности вне треугольника вместо константы появляется квазислучайный шум, для которого стано-

вится справедливым соотношение  $|R_x(\tau > \tau_0)| \sim \frac{R_x(0)}{\sqrt{N}}$ .

При вычислении (измерении) корреляционной функции серии из нескольких  $M$ -последовательностей через её спектр на интервале, равном длине  $T_0 = N\tau_0$ , корреляционная функция эквивалентна корреляционной функции непрерывной  $M$ -последовательности. В дальнейшем в книге рассматривается применение непрерывной  $M$ -последовательности (или серий  $M$ -последовательностей, следующих друг за другом без интервалов), поскольку только в этом случае удастся получить при обработке

корреляционный шум в виде константы равной  $R_x(\tau > \tau_0) \equiv \frac{R_x(0)}{N}$ , где  $N$  – длина

$M$ -последовательности в единицах [39].

Итак, измеряя импульсный отклик системы с помощью тестового сигнала в виде  $M$ -последовательности на интервале  $T_0$ , можно быть уверенным, что мы не получим ложных пиков, вызванных корреляционным шумом. В то же время использование реализаций белого шума требует проведения измерений на бесконечных интервалах времени для достижения такого же результата.

Генерирование  $M$ -последовательности не представляет никаких проблем, что также сыграло большую роль в широком её использовании в радиосвязи и в акустических экспериментах. Практически  $M$ -последовательность генерируется схемой на основе сдвигового регистра с обратными связями, на тактовый вход которой подается последовательность импульсов с периодом повторения  $\tau_0$ . В зависимости от набора обратных связей на выходе могут формироваться сигналы разного вида (от меандра до псевдослучайных последовательностей), повторяющиеся через определенный интервал. Сигнал, имеющий самый большой период, называется кодом максимальной длины или  $M$ -последовательностью. Обычно в литературе обратные связи, реализующие  $M$ -последовательность на выходе регистра, приводятся в виде таблиц [37]. Если регистр состоит из  $n$  триггеров, то длина такой последовательности будет равна  $N = 2^n - 1$ .

Пусть на выходе сдвигового регистра сигнал принимает два значения:  $1$  и  $-1$ . При определенных обратных связях формируется сигнал, интервал повторения которого максимален для регистра данной длины. Последовательность состояний на выходе такова, что посимвольное перемножение двух любых реализаций длины  $T$ , вырезанных из сигнала на выходе регистра, даст на единицу больше отрицательных произведений всегда, кроме полностью совпадающих реализаций. Для совпадающих ре-

лизаций все произведения будут равны единице. Суммирование этих произведений даст корреляционную функцию, состоящую из одного импульса равного  $N$  при нулевом сдвиге (или кратном  $T_0$ ), и  $-1$  при всех остальных сдвигах.

Рассмотрим сдвиговый регистр с  $n$  разрядами, представляющий собой совокупность триггеров. Каждый управляющий импульс синхронизирующей входной последовательности вызывает переход триггера с номером  $k$  в состояние, в котором находился триггер с номером  $k - 1$  и переход триггера с номером  $k + 1$  в состояние, в котором находился триггер с номером  $k$ . Это относится ко всем триггерам регистра. Но на первый триггер регистра поступает логическая сумма (по модулю 2) состояний нескольких выходов.

На рис. 5.2, *а* приведена схема 11-разрядного регистра, генерирующего  $M$ -последовательность.

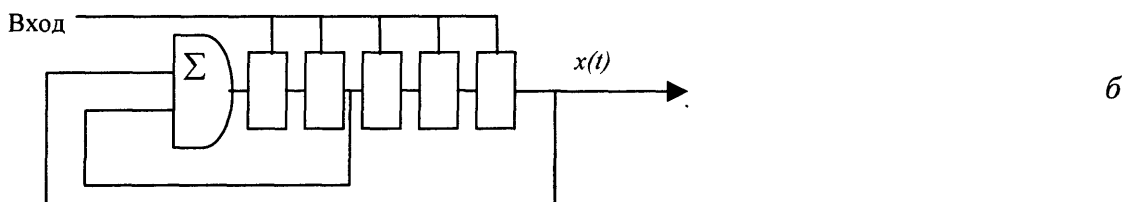
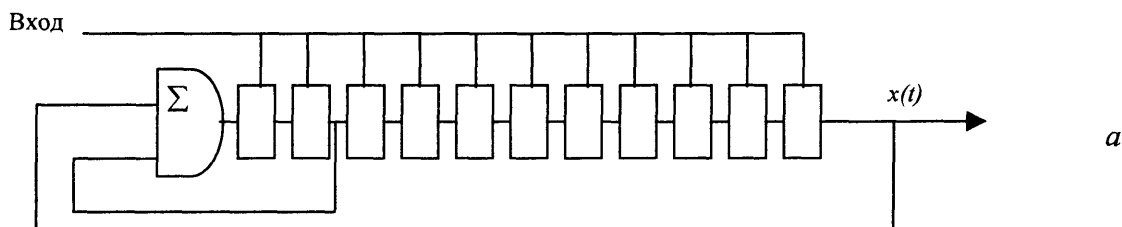


Рис. 5.2. Схема генератора  $M$ -последовательности длительностью 2047 символов на 11-разрядном сдвиговом регистре (*а*) и 31 символ на 5-разрядном сдвиговом регистре (*б*).

Работает схема следующим образом. На тактовый вход регистра поступает непрерывная последовательность импульсов. На выходе регистра получаем некоторую последовательность импульсов. При указанных обратных связях формируется непрерывная серия  $M$ -последовательностей длиной  $2^{11} - 1 = 2047$  периодов следования входных импульсов. Принято говорить, что  $M$ -последовательность имеет длину 2047 "единиц" (или "символов"). Для примера на рис. 5.2, *б* приведена схема регистра, формирующего  $M$ -последовательность в 31 единицу.

К полезным качествам  $M$ -последовательности следует отнести простоту передачи информации о ней, например, при удаленности выхода системы от входа. Ведь для точного её восстановления нет необходимости передавать саму последовательность: нужно сообщить длительность единицы, длину регистра и номера отводов обратной связи. Для передачи номеров отводов используют преобразованное к восьмеричному виду двоичное число, в котором номера триггеров, от которых берутся отводы, кодируются единицей.

Например, для схемы на рис. 5.2, *а* двоичное число будет равно 100000000101, т. е. отводы берутся от 2 и 11 регистров, младшая единица не учитывается. Её появление обусловлено тем, что номера отводов, как оказывается, совпадают с номерами

ненулевых членов неприводимых полиномов. Для этой  $M$ -последовательности такой полином будет  $x^{11} + x^2 + 1$ , ненулевые члены со степенями 0, 2 и 11. В восьмеричном виде это число 4005. Благодаря такой кодировке, для восстановления входной  $M$ -последовательности на выходе системы достаточно передать с входа системы восьмеричный код последовательности и длину ее единицы.

Пусть период следования тактовых импульсов  $\tau_0$ , а последовательность принимает значения  $-1$  и  $1$ , тогда корреляционную функцию  $M$ -последовательности  $M(\tau)$  для всех значений задержки (а не только кратных  $\tau_0$ ) можно записать в виде

$$R(\tau) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} M(t)M(t-\tau)dt = \begin{cases} (2^n - 1) \cdot (1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}), & |\tau| \leq \tau_0 \\ -1, & |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Как видно, корреляционная функция  $M$ -последовательности представляет собой узкий треугольник с высотой, равной длине кодовой последовательности, расположенный на ненулевой ( $-1$ ) подставке.

Спектр  $M$ -последовательности сосредоточен вблизи нуля частот. Поэтому для изучения свойств распространения акустических сигналов в определенных диапазонах частот используются сигналы с модуляцией  $M$ -последовательностью. Чаще всего используют сигналы в виде несущей, фаза которых манипулирована  $M$ -последовательностью (в англоязычной литературе такой сигнал называют  *$M$ -последовательностью на несущей*):

$$y(t) = A \cdot \cos \left[ 2\pi f t + \frac{\pi}{2} M(t) \right].$$

Такой сигнал обладает практически теми же свойствами, что и модулирующая последовательность. Корреляционная функция такого сигнала имеет вид

$$R(\tau) = \begin{cases} (2^n - 1) \cdot (1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}) \cdot \cos(2\pi f \tau), & |\tau| \leq \tau_0 \\ -\cos(2\pi f \tau), & |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Отметим еще раз особенность обработки непрерывных сигналов на основе  $M$ -последовательности. Вычисление спектров и корреляционных функций следует производить на интервалах, кратных длине  $M$ -последовательности  $T_0$ . Эти процедуры удобно выполнять, используя дискретное преобразование Фурье именно на интервале равном длине  $M$ -последовательности. Только в этом случае корреляционная функция определяется вышеприведенной формулой. Невыполнение этого условия приводит к появлению корреляционного шума, аналогичного шуму корреляционных функций случайных сигналов, для уровня которых справедлива оценка  $1/\sqrt{2^n - 1}$  от максимума корреляционной функции. В этом случае, как видно из уровня корреляционного шума, он не только в  $\sqrt{2^n - 1}$  раз становится больше, но и уже не является константой, что существенно повышает его маскирующие свойства. На рис. 5.3 приведены корреляционные функции  $M$ -последовательности, вычисленные на интервале, равном ее длине (сплошная линия), и при отклонении длительности интервала на 1% (штрихпунктир).

Приведем еще одну характеристику, часто используемую для описания сигналов, важную для понимания особенностей их обработки в экспериментах в нестационарных условиях. На нестационарных трассах (например, когда приемник или источник движется) принятый сигнал вследствие эффекта Доплера искажается, и взаимно корреляционная функция будет отличаться от импульсной характеристики, являющейся целью измерения. Экспериментатор должен иметь представление, насколько большими будут ошибки. С этой целью измеряется корреляционная функция излученного сигнала и набора сигналов, модифицируемых в зависимости от различных доплеровских смещений несущей частоты. Такая функция представляет аналог классической функции неопределенности. Функция неопределенности была введена Вудвортом для теории информации и теории вероятности применительно к радарам. Для них доплеровские смещения частоты могли играть существенную роль, вызывая неопределенность измерения расстояния до цели. Вид функции неопределенности для  $M$ -последовательности на несущей (в координатах задержка – доплеровское смещение несущей) приведен на рис. 5.4, из которого видно, что сигналы на основе  $M$ -последовательности обладают большой чувствительностью к доплеровским искажениям сигналов. Это может приводить к пропаданию сигнала на выходе согласованного фильтра на нестационарной трассе, если не преобразовывать реплику в соответствии с доплеровским искажением масштаба времени. С другой стороны, это свойство  $M$ -последовательности позволяет с высокой точностью определять скорость взаимного движения входа и выхода системы.

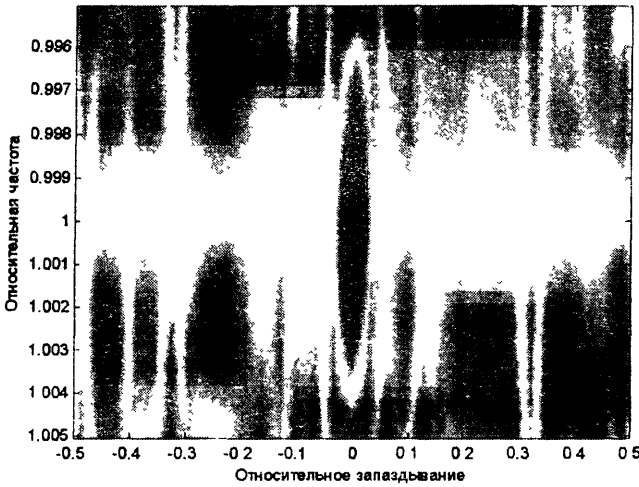


Рис. 5.4. Функция неопределенности  $M$ -последовательности на несущей частоте в координатах задержка – доплеровское смещение несущей. Большей амплитуде функции неопределенности соответствует более черная окраска.

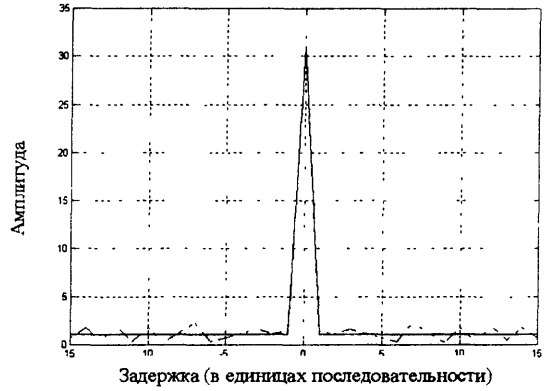


Рис. 5.3. Корреляционные функции  $M$ -последовательности, вычисленные на интервале, равном ее длине (сплошная линия), и при отклонении длительности интервала на 1% (штрих-пунктир).

Поясним причины "игольчатой" формы функции неопределенности. Запишем взаимно корреляционную функцию между излученным сигналом в виде несущей, модулированной  $M$ -последовательностью, и трансформированным эффектом Доплера сигналом с выхода системы:

$$x_{tr}(t) = A^2 \int_T \exp\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} M[t]\right) \exp\left\{-\omega_0 t(1 + \alpha) - \frac{\pi}{2} M[t(1 + \alpha)]\right\} dt =$$

$$= \int_T \exp\left\{\frac{\pi}{2} M[t] - \frac{\pi}{2} M[t(1 + \alpha)]\right\} \exp(\omega_0 t) \exp(-\omega t) dt,$$

мированным эффектом Доплера сигналом с выхода системы:



где  $\alpha$  – коэффициент трансформации, очевидно имеющий малые значения, а  $\omega$  – доплеровская частота. Как нетрудно заметить, выражение представляет собой преобразование Фурье по  $\omega$  от  $\exp\left\{\frac{\pi}{2}M[t] - \frac{\pi}{2}M[t(1+\alpha)]\right\}\exp(\omega_0 t)$ . В предположении малости  $\alpha$  функция, от которой определяется преобразование Фурье, представляет собой просто гармонический сигнал. И ширина отклика по частоте для такого сигнала равна  $\frac{1}{T}$ . В примере на рис. 5.4 длина  $M$ -последовательности равна 31 единице. Единица последовательности равна восьми периодам несущей сигнала, т. е.  $T = 31 \cdot 8$ . Таким образом, разрешение по Доплеру составляет  $\frac{1}{T} = \frac{1}{32 \cdot 8}$ . Для несущей с частотой равной единице спад корреляционного отклика до нуля происходит на частотах  $1 - \frac{1}{T}$  и  $1 + \frac{1}{T}$ , или 1.004 и 0.996, что хорошо видно на рис. 5.4.

Проведенный анализ – приближенный, но, как видно, дающий правильную оценку ширины функции неопределенности по Доплеру. Конечно, при необходимости можно сделать точный анализ формы функции неопределенности, однако более сложные выкладки могут содержать ошибки, а приближенный анализ позволяет легко их отследить. Это удивительное свойство несущей, модулированной  $M$ -последовательностью, обладающей такой же чувствительностью к смещению по частоте, как и тональный сигнал, позволяет получить также хорошее временное разрешение.

Ошибки оценки корреляционной функции обычно называют корреляционным шумом. Как показано в работе [39], его дисперсия зависит от многих параметров, но для белого шума имеет достаточно простое выражение и может служить приближенной оценкой в большинстве случаев. Эта формула уже была приведена:  $\sigma_R^2 \leq \frac{R_x^2(0)}{N}$ , где  $\sigma_R^2$  – дисперсия корреляционного шума,  $N$  – уже определена выше,  $R_x^2(0)$  – корреляционная функция сигнала. Аналогичное выражение определяет и дисперсию для взаимно корреляционной функции, только в числителе стоит произведение значений автокорреляционной функции в нуле. Значение корреляционного шума велико. Пусть мы исследуем канал распространения с импульсной характеристикой в виде дельта-функции. Подавая на вход системы реализацию белого шума и измеряя взаимно корреляционную функцию, можно получить оценку импульсной характеристики, имеющую кроме основного (истинного) пика еще множество дополнительных пиков, хотя и меньшего уровня, т. е. вместо истинной импульсной характеристики мы получаем оценку, отличающуюся от искомой. Важно то, что погрешность эта вызвана причиной, на которую вполне мог бы воздействовать экспериментатор, подобрав более подходящую реализацию, в отличие от ошибок, вызванных аддитивными помехами, в основном находящимися вне власти исследователей. Часто для уменьшения этой ошибки опыт повторяют несколько раз с различными реализациями шума с последующим усреднением результатов. При этом дисперсия корреляционного шума уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из числа опытов. Но такой подход требует априорной информации о стационарности системы и такого проведения измерений, чтобы за время проведения опытов не произошло изменения импульсной характеристики системы.

Фактически  $M$ -последовательность имеет корреляционный шум в виде константы. Хотя природа его иная, нежели природа корреляционного шума случайных сигналов, во

многим их влияние на оценки импульсных характеристик систем близко. Конечно, такой шум лучше, чем у реализаций белого шума (вызывающего появление ложных импульсов), но и он может приводить к неприятным последствиям. Для многих исследуемых систем с несколькими каналами распространения импульсный отклик может состоять из нескольких максимумов. Наличие такой подставки в корреляционной функции тестового сигнала ведет к тому, что некоторые максимумы могут маскировать слабые максимумы во взаимной корреляционной функции. Этот порог маскировки может быть значительно выше порога, определяемого уровнем шумов в сигнале.

Остановимся подробнее на корреляционном шуме и проблемах, им вызываемых. На рис. 5.5 приведена зависимость уровня отраженного сигнала после согласованной фильтрации при квази-моностатической локации (приемник размещался рядом с источником) единичной  $M$ -последовательностью. Хорошо виден зондирующий импульс, за которым тянется "плато" длиной, равной  $M$ -последовательности. Это плато образуется корреляционным шумом от зондирующего импульса (в этом случае равным  $R(\tau > \tau_0) \approx \frac{R(0)}{\sqrt{N}}$ ) и таким образом создает подобие "мертвой зоны". Но в отличие

от импульсной локации, где "мертвая зона" создается ближними отражениями и реверберацией, наша "мертвая зона" является искусственной и вызванной природой зондирующего сигнала. Для непрерывной  $M$ -последовательности шум в районе этого плато был бы значительно ниже, и можно было бы увидеть ближнюю реверберацию.

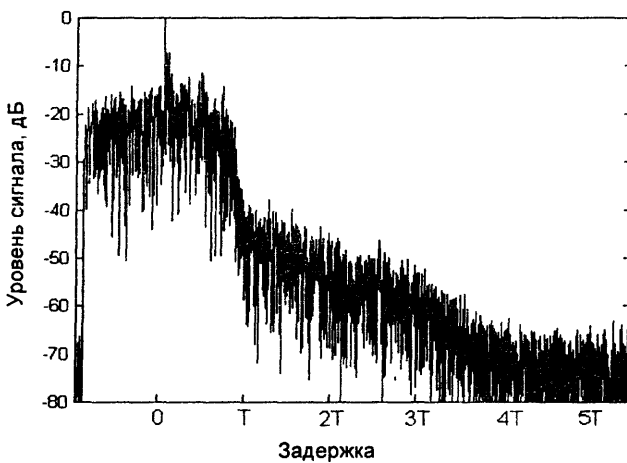


Рис. 5.5. Зависимость уровня отраженного сигнала от задержки после согласованной фильтрации при квази-моностатической локации (приемник размещается рядом с источником) единичной  $M$ -последовательностью.

Однако в этом случае интервал наблюдений был бы равен длительности  $M$ -последовательности, т. е. длине "плато". При более низких уровнях реверберации может оказаться, что и уровень корреляционного шума выбранной непрерывной  $M$ -последовательности может оказаться все же большим. Тогда при необходимости получения сигнала от ближних целей и реверберации может потребоваться значительное удлинение  $M$ -последовательности, поскольку уровень корреляционных помех обратно пропорционален длине последовательности.

Этот путь может привести к практически недопустимым условиям эксперимента длине  $M$ -последовательности. Однако существуют способы снижения (и этого уже достаточно) низкого корреляционного шума практически до нуля. Приведем два способа устранения боковой подставки (корреляционного шума).

Один из этих способов в последнее время часто применяется в экспериментах по программе АТОК и в других аналогичных программах. Как видно из формулы (5.3.2), для корреляционной функции  $M$ -последовательности подставка имеет отрицательный знак. В простейшем случае  $M$ -последовательность надо модифицировать путем добавления к ней сигнала, у которого корреляционная функция будет равна по модулю этой подставке, но с положительным знаком и некоррелированного с  $M$ -последовательностью. Таким образом реализован первый способ, в котором к обычному фазо-

манипулированному сигналу добавлен гармонический сигнал с частотой, равной частоте несущей. Этот способ – фазовая манипуляция с амплитудной модуляцией:

$$y(t) = A \cdot \cos \left[ 2\pi ft + \frac{\pi}{2} M_n(t) \right] + \frac{AM_n(t)}{\sqrt{2^n - 1}} \sin(2\pi ft) =$$

$$= A \left[ 1 + \frac{M_n(t)}{\sqrt{2^n - 1}} \right] \cos \left[ 2\pi ft + \frac{\pi}{2} M_n(t) \right], \quad (5.3.3)$$

где  $n$  – длина регистра, генерирующего  $M$ -последовательность.

Второй способ интуитивно не так прозрачен, но он приводит к тем же результатам и основан на фазовой модуляции

$$y(t) = A \cdot \cos [2\pi ft + \psi M(t)] = A \cdot \cos \left[ 2\pi ft + \arcsin \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 0.5} \right) M_n(t) \right]. \quad (5.3.4)$$

Такие псевдослучайные сигналы имеют корреляционную функцию

$$R(\tau) = \begin{cases} (2^n - 1) \cdot \left( 1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right) \cdot \cos(2\pi f\tau), & |\tau| \leq \tau_0 \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Использование этих сигналов позволяет полностью избавиться от корреляционного шума и таким образом устранить основной недостаток  $M$ -последовательности. Теоретически нет никаких препятствий к получению у таких сигналов нулевого корреляционного шума, но реально неточность модуляции амплитуды или фазы приводит к невозможности полного отсутствия корреляционного шума. Реализация подобных сигналов часто бывает затруднена в синтезаторах с дискретным квантованием и в аналоговых системах с нарушением линейности. Дискретный синтез может давать значения коэффициентов модуляции фазы и амплитуды, не совпадающие с требуемыми в соответствии с формулами для полного устранения корреляционного шума, т. е. избавиться от корреляционной подставки полностью обычно не удастся. Однако уменьшение подставки такими методами гораздо эффективнее. Например, снижение подставки у последовательности длиной 1023 на 20 дБ (исходно подставка имеет уровень –60 дБ) и первым, и вторым способом не представляет труда, в то время как для сигнала с фазовой манипуляцией требуется увеличение длины последовательности в 10 раз. Для получения корреляционной подставки у такого сигнала на уровне –80 дБ длина последовательности должна быть около 10000.

Кроме того, линейные системы, вообще говоря, являются обычно некоторой идеализацией, физически не реализуемой, но в пределах точности измерений допустимой. Поэтому даже в линейных системах коэффициент модуляции может изменяться от заданной величины вследствие её нелинейности. Исследования показали, что эти изменения могут приводить к изменению корреляционного шума.

На рис. 5.6 приведена зависимость уровня корреляционного шума от коэффициента нелинейности

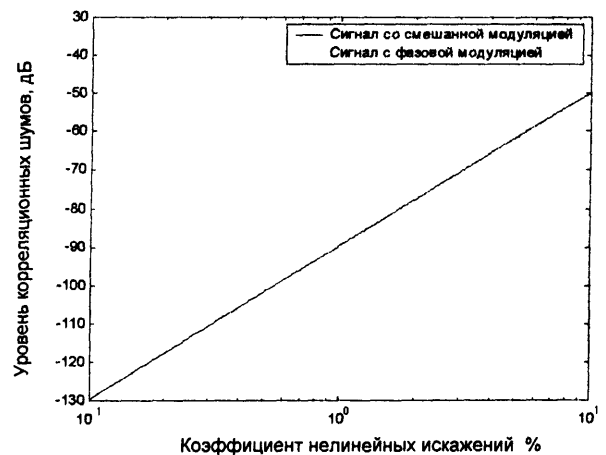


Рис. 5.6. Зависимость уровня корреляционного шума от коэффициента нелинейности регистрирующей системы.

системы. Из рисунка хорошо видно, что зависимость велика. Этот коэффициент определен как квадратный корень из отношения суммы мощностей дополнительных гармоник тонального сигнала к мощности первой. Очевидно, что только применение высококачественной звуковой аппаратуры может позволить максимально реализовать преимущества сигналов без корреляционного шума.

#### 5.4. Применение *M*-последовательности на стационарной сейсмической трассе

Приведем пример использования псевдослучайных сигналов на основе *M*-последовательности в сейсмике. Сейсмические акустические эксперименты обычно проводятся на трассах, имеющих более стабильные характеристики, чем у трасс в атмосфере и гидроакустике. Большая подвижность воздуха и воды приводит к появлению доплеровских смещений сигнала, распространяющегося по трассе, значительно превышающих разрешение спектрального анализа, достижимое в эксперименте. В сейсмических экспериментах движения земной коры вызывают частотные сдвиги сигнала много меньшие, чем реализуемое спектральное разрешение. Поэтому применение *M*-последовательности в сейсмике не требует модификации реплики, что несколько упрощает реализацию методов согласованной обработки.

Приводимый пример представляет собой эксперимент по межскважинной томографии с применением *M*-последовательности для идентификации модели среды. Методы межскважинных сейсмоакустических наблюдений, являющиеся средством исследования горных пород между двумя и более скважинами, начали предлагаться практически с начала XX века [40]. Но наибольший интерес к различным томографическим методам исследования земных пород возник в 80-е годы, когда было предложено множество различных алгоритмов межскважинных измерений. Одна из основных проблем реализации таких алгоритмов – необходимость повышения помехоустойчивости и точности оценки свойств пород, что может быть достигнуто за счет применения источников низкочастотного звукового диапазона высокой эффективности и когерентности.

Именно отсутствие до недавнего времени источников звука с четко известными и управляемыми параметрами (использовались либо взрывные источники, либо поверхностные механические вибраторы) являлось особенностью прикладных исследований распространения звука в земной толще.

В 1999 году были проведены натурные эксперименты по межскважинному низкочастотному акустическому зондированию [36]. Использовался мощный пьезокерамический источник, позволяющий излучать сигналы заданной формы и производить когерентное накопление и согласованную фильтрацию принятых сигналов, обеспечивающий хорошее согласование со средой. Источник размещался в почти вертикальной (максимальный угол отклонения не более 3 градусов) нефтескважине в районе нефтеносного слоя (1690 м). В соседней скважине размещался вертикально перемещаемый акустический приемник. Таким образом была реализована схема сейсмоакустической томографии на проходящих волнах с монохроматическими и широкополосными сигналами.

В качестве источника сигнала использовался мощный пьезокерамический излучатель с диапазоном излучения 60–500 Гц разработки ИПФ РАН, имеющий хорошее согласование со средой. Конструкция источника обеспечивала возбуждение в среде *S*-волн.

Волновое уравнение для твердой среды имеет два решения, отвечающие волнам двух типов. Первый тип волн (*Primary wave* или *P-wave*) – это волны давления, связанные с объемными изменениями среды распространения звука. Второй тип волн (*Secondary wave* или *S-wave*) – волны, вызывающие смещение материала среды без изменения его объема. В жидкой среде существуют лишь *P*-волны. Наличие двух типов волн, распространяющихся в среде с разной скоростью, приводит к сложности идентификации импульсных откликов. Фактически такая система состоит из двух сложных систем, имеющих общий вход и общий выход. Ниже будет показана возможность разделения каналов на основе использования селективных свойств источника и приемника.

В качестве тестового сигнала использовалась *M*-последовательность, модулирующая фазу гармонической несущей с частотой излучения 209 Гц. Длина *M*-последовательности составляла 1023 символа, один символ содержал 8 периодов несущей. Таким образом, ширина полосы сигнала составляла 25 Гц. Ширина импульса автокорреляции такого сигнала была порядка 40 мс. Длительность *M*-последовательности составила примерно 40 с.

В соседней скважине, ствол которой (несколько искривленный) находился в 110–350 м от ствола предыдущей, размещался перемещаемый акустический приемник. В качестве приемника использовался глубоководный гидрофон, который в заполненной жидкостью скважине обеспечивал прием и регистрацию *P*-волн, практически не реагируя на *S*-волны. До последнего времени в качестве приемников использовались датчики вибраций, регистрировавшие оба типа волн и легко устанавливаемые на грунте. Использование заполненных жидкостью скважин для установки приемников давления в сейсмических экспериментах является до некоторой степени новым и оригинальным решением, существенно упрощающим идентификацию. Шаг перемещения приемников составлял 150 м в диапазоне глубин от 1750 до 250 м.

Применение *M*-последовательности, накопления сигнала и согласованной фильтрации позволило получить хорошее отношение сигнал/шум на выходе схемы обработки и хорошее временное разрешение каналов (40 мс соответствуют разрешению 130 м для *P*-волн и 75 м для *S*-волн), что, в свою очередь, позволило уверенно выделить на импульсной характеристике отдельные импульсы, соответствующие траекториям лучей. Благодаря этому удалось идентифицировать различные каналы распространения звука и оценить их акустические параметры.

Обработка сигналов состояла из предварительной фильтрации сигнала с целью устранения помех и последующей корреляции с репликой излученного сигнала. Анализ массива сигналов, принятых на 11 горизонтах, позволил произвести идентификацию каналов распространения с разными скоростями распространения (разными типами волн). На рис. 5.7 приведен так называемый годограф, представляющий собой трехмерное отображение матрицы импульсных откликов для разных приемников. По горизонтали отложено время задержки сигнала, по вертикали – разные приемники в соответствии с глубиной, а чернота характеризует амплитуду отклика. Годограф построен по данным, полученным в результате первичной обработки сигналов, нормированных на суммарную дисперсию основных приходов сигнала. Над годографом приведена упрощенная модель среды и модель распространения в ней сигнала.

На рисунке хорошо различаются несколько импульсов на всех горизонтах, соответствующих приходам сигнала по разным путям. Для их идентификации была предложена простая модель распространения сигнала в среде, в основе которой лежат следующие положения:

1. Излучатель возбуждает в среде волны  $S$ -типа.
2. Гидрофон в соседней скважине, заполненной жидкостью, принимает волны  $P$ -типа, практически не реагируя на  $S$ -волны.
3. Регистрируемый сигнал, возбуждаемый излучателем  $S$ -типа, при распространении в неоднородной среде преобразуется в волну  $P$ -типа при наклонном падении на некоторую границу.

На основе этих предположений первый по времени приход сигнала соответствует волне  $S$ -типа, возбуждившей волну  $P$ -типа непосредственно вблизи гидрофона на

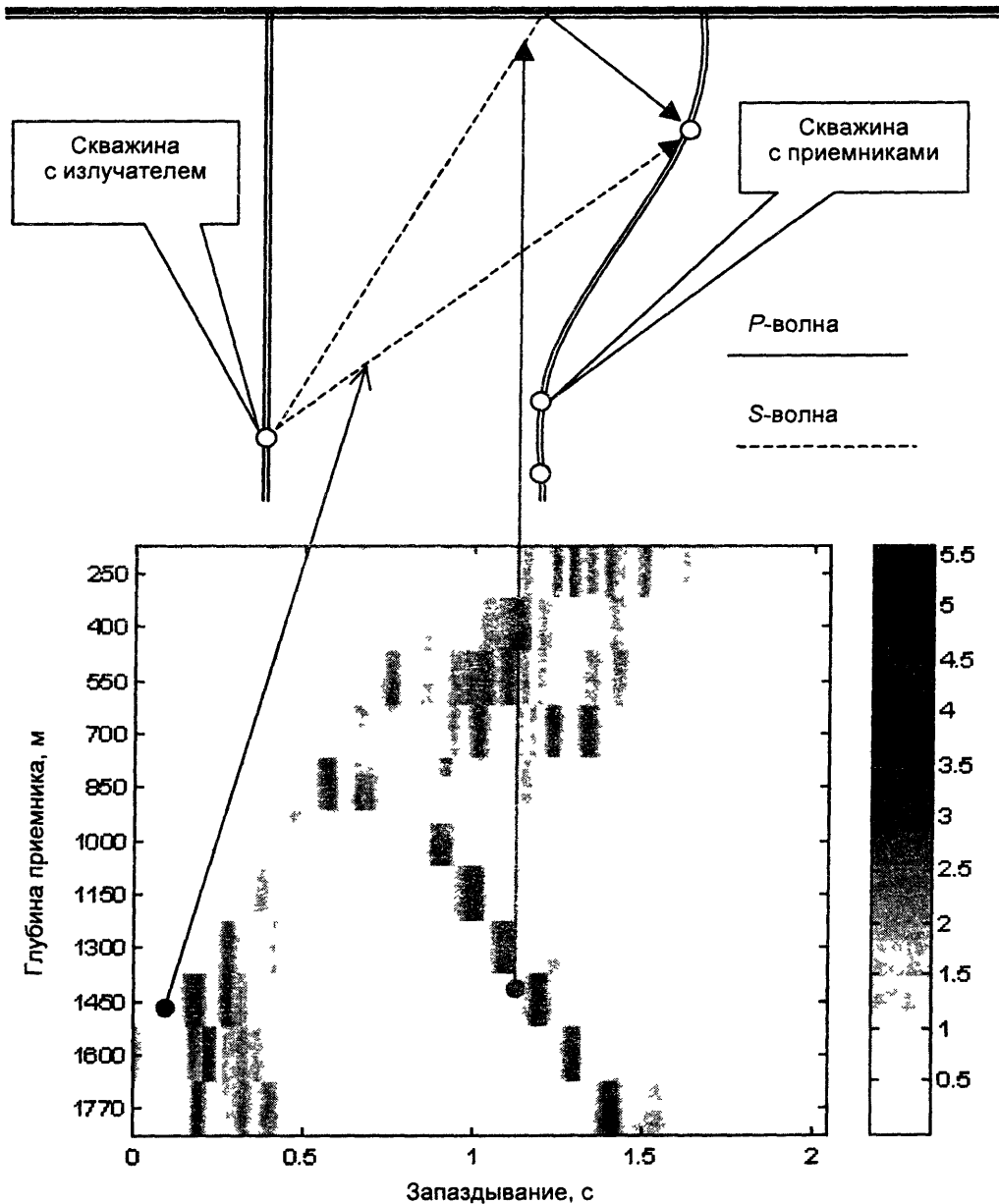


Рис. 5.7. Грехмерное представление матрицы импульсных откликов для приемников с разных глубин скважины. Почернение пропорционально амплитуде откликов.

стенках приемной скважины. По известным геометрическим параметрам скважины и времени первого прихода оценивается скорость *S*-волны. Она составила 2010 м/с. Следует отметить, что на втором приемнике сигнал первого прихода практически отсутствовал, что является некоторым подтверждением принятой модели, поскольку *S*-волна падает на скважину под углом в 90 градусов и практически не возбуждает *P*-волну. Следующий приход, являющийся отражением от верхней границы в соответствии с предполагаемой моделью, идентифицируется с отражением от поверхности, на которой *S*-волна преобразуется в *P*-волну и соответствует ее скорости, равной примерно 3500 м/с. Полученное соотношение скоростей хорошо совпадает с теоретическими оценками.

Приведенный пример показывает, что применение метода взаимно корреляционной функции с тестовыми сигналами позволяет разделять сигналы, распространяющиеся по разным трассам, и благодаря этому идентифицировать их с теоретическими моделями. Следует отметить одну особенность данного эксперимента – это использование эффекта преобразования волн в среде, источников и приемников, излучающих и принимающих только определенный тип волн, что упростило идентификацию. Обычные сейсмические приемники, регистрируя все типы волн, распространяющиеся с разной скоростью, часто не позволяют идентифицировать каналы из-за мешанины импульсов, пришедших по разным каналам и с разной скоростью.

В данном эксперименте использование псевдослучайного сигнала на основе *M*-последовательности плюс уникальный источник *S*-волн и оригинальный способ размещения гидрофона в заполненной жидкостью скважине позволило уверенно выделить импульсы, пришедшие по разным путям, и идентифицировать их с определенными траекториями лучей.

## **5.5. Применение *M*-последовательности на сверхдлинных океанических трассах**

Использование тестовых сигналов на основе *M*-последовательности на стационарных трассах иллюстрирует возможности разделения каналов и их идентификации с теоретическими моделями в многоканальных системах. В настоящем разделе мы рассмотрим примеры применения *M*-последовательностей для идентификации каналов распространения в лучевом приближении и оценки их параметров, а также измерения быстрых и медленных вариаций времени распространения.

В 1998 и 1999 годах в рамках проекта АТОК на стационарной акустической трассе в северной части Тихого океана проводился совместный российско-американский эксперимент по сверхдальному распространению низкочастотного звука. Сигналы, излучаемые стационарным источником, находящимся на глубине 800 м около Гавайских островов, регистрировались на многоэлементные приемные системы США и России, стационарно установленные в акватории Тихого океана. Целью экспериментов было определение вариаций как интегрального времени распространения сигнала, так и по отдельным группам лучевых каналов на стационарных трассах, вызванных глобальными (многолетними) и сезонными изменениями климата. В результате выполнения проекта АТОК в целом должен быть получен ответ, есть или нет глобальное потепление климата. В том эксперименте, о котором идет речь, нащупывалась методика измерения, определялась та точность, которая может быть достигнута в результате длительных наблюдений на протяженной акустической трассе, уточнялись и технические параметры, достижимые или необходимые в ходе такого эксперимента.

Здесь приведены результаты измерений быстрых (с периодами до суток) и медленных (с периодами до года) вариаций времени распространения на трассе Гавайи – Камчатка. Актуальность таких задач подтверждается большим интересом к ним известных научных организаций мира. Примером могут служить работы [41, 42], посвященные измерениям флуктуаций времени распространения менее помехоустойчивыми методами.

Длина акустической трассы составляла примерно 5000 км. Излученный сигнал представлял собой серию из 44 одинаковых посылок (импульсов) на несущей частоте 75 Гц. Фаза каждой тональной посылки модулирована  $M$ -последовательностью (восьмеричный код 3471) длиной 1023 единицы. Длительность одной единицы равна двум периодам несущей частоты. Для уменьшения корреляционного шума при смене знака модулирующей последовательности фаза менялась на  $\pm 88,2092^\circ$ . Ширина полосы излученного сигнала (по уровню 3 дБ) составляет 37,5 Гц. Длительность одного импульса равна 27,28 с, а длительность всей серии – примерно 20 минут. Такие серии импульсов излучались 6 раз в сутки (через каждые 4 часа).

Большая длина акустической трассы (около 5 тысяч км) приводит к значительному ослаблению сигнала, что могло бы быть скомпенсировано усилением излучаемого сигнала. Но увеличение мощности источника ограничивается как субъективными причинами, так и объективными. Главная объективная причина состоит в том, что повышение мощности может приводить к возникновению кавитации (образованию пузырьков) на поверхности излучателя, которая успешно поглощает энергию сигнала. Но более существенным ограничением оказалась субъективная причина. Экологические организации всячески ограничивают применение мощных гидроакустических источников, предполагая, чисто умозрительно, наличие отрицательного воздействия на биосферу океана. Вследствие этих причин уровень принимаемого сигнала был таков, что соотношение сигнал/шум в полосе сигнала не превышало  $-10$  дБ.

Первая задача эксперимента состояла в том, чтобы оценить получающееся отношение сигнала к шуму. Оценивание отношения сигнал/шум в смеси сигнала и шума, занимающих одну и ту же полосу частот, при уровне сигнала меньшем, чем помеха, задача не простая.

Рассмотрим исследуемый сигнал в виде суммы двух сигналов (полезного и помехи):  $y(t) = x(t) + n(t)$ . Типичная задача состоит в определении отношения сигнал/шум:  $\eta = \sigma_x^2 / \sigma_n^2$ .

Рассмотрим случай некоррелированных сигналов и помех. Корреляционная функция в этом случае:  $R_y(\tau) = R_x(\tau) + R_n(\tau)$ . Значение корреляционной функции в нуле есть дисперсия ее сигнала, т. е. для некоррелированных сигналов и шумов  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ . Остается разделить эти дисперсии. Задача, казалось бы, неразрешимая. Но обычно сигнал и помеха отличаются между собой достаточно сильно, поэтому при определенных значениях  $\tau$  корреляционная функция может определяться лишь сигналом или помехой. Сделав некоторые предположения о моделях сигнала и шума, можно определить соотношение сигнал/шум.

Принимаемый сигнал в эксперименте на трассе Гавайи – Камчатка состоял из смеси шума и сигнала, представлявшего собой несущую, модулированную периодически повторяющейся  $M$ -последовательностью. Благодаря тому, что корреляционная функция  $M$ -последовательности состоит из узкого пика, корреляционная функция сигнала, вычисленная на интервале больших задержек, содержала периодически повторяющиеся пики. Пик на нулевой задержке представляет собой сумму корреляционных функций сигнала и шума. При одинаковых полосах сигнала и шума эти корреляционные функции не разделяемы. Но в пиках на других задержках вклад от авто-



корреляции шума незначителен и падает с удалением пика от нулевой задержки. Экстраполируя значения максимумов на нулевую задержку амплитуды максимумов, несложно получить дисперсию сигнала. А при условии некоррелированности сигнала и шума остаток пика определяет дисперсию шума. На рис. 5.8 приведены значения корреляционной функции в пиках, уровень между пиками был на 10–20 дБ ниже. Увеличение разброса значений пиков корреляции при больших задержках связано с уменьшением усреднения, поскольку длительность серии посылок была ограничена. Как видно из рисунка, дисперсия сигнала на 10 дБ меньше суммарной дисперсии, т. е. дисперсия сигнала составляет примерно  $1/10$  часть от суммарной дисперсии, а дисперсия шума –  $9/10$ . Отношение сигнал/шум составит  $1/9$ , или  $-9,5$  дБ.

Для повышения отношения сигнал/шум проводились полосовая фильтрация и когерентное суммирование 44 последовательных отрезков принятого сигнала, равных длине одной  $M$ -последовательности и регистрируемых в течение одного сеанса. Полагая, что принятый сигнал после фильтрации содержит только белый шум в полосе сигнала, когерентное суммирование  $K$  независимых отрезков сигналов длиной равных  $M$ -последовательности приводит к увеличению амплитуды полезного сигнала в  $K$  раз, в то время как амплитуда шума растет как квадратный корень из  $K$ . Таким образом выигрыш (увеличение) отношения сигнал/шум составляет  $\eta = 10 \log_{10}(K) \leq 16$  дБ. Реально увеличение отношения сигнал/шум было несколько меньше, во-первых, поскольку полезный сигнал менялся от отрезка к отрезку, и, во-вторых, шум не был белым. Затем вычислялась взаимная корреляционная функция полученного сигнала и реплики. Для изучения вариаций времени распространения сигнала искались устойчивые приходы, которые могли бы быть идентифицированы с приходами отдельных лучей или групп лучей. Применение взаимно корреляционной обработки (согласованной фильтрации) также повышает отношение сигнал/шум, как показано выше (см. разд. 1.4) в  $\sqrt{N}$ , где  $N$  – число степеней свободы реплики. Для сигнала в виде несущей с модуляцией фазы  $M$ -последовательностью это число совпадает с её длиной в единицах. Таким образом, согласованный фильтр в этом эксперименте дает максимальный выигрыш, не превышающий  $\eta = 10 \log_{10}(N) = 10 \log_{10}(1023) \leq 30$  дБ. Поскольку принятый сигнал представляет собой смесь многих сигналов, пришедших по разным каналам с различным запаздыванием, этот выигрыш реализуется не полностью. Энергия сигнала распределяется по множеству импульсов в выходном сигнале коррелятора. Исходя из входного соотношения сигнал/шум  $-10$  дБ и суммарного выигрыша  $16 + 30 = 46$  дБ, теоретически на выходе коррелятора должно было быть отношение сигнал/шум  $36$  дБ, однако экспериментально полученные соотношения составляли от  $4$  до  $16$  дБ. Следует отметить, что для тестовых сигналов, представляющих собой реализации случайного процесса, величина повышения сигнал/шум и уровень корреляционных шумов выражаются через квадратный корень из степеней свободы. В то же время, для  $M$ -последовательности уровень корреляционных шумов лежит ниже максимума корреляции в  $N$  раз. Это может быть

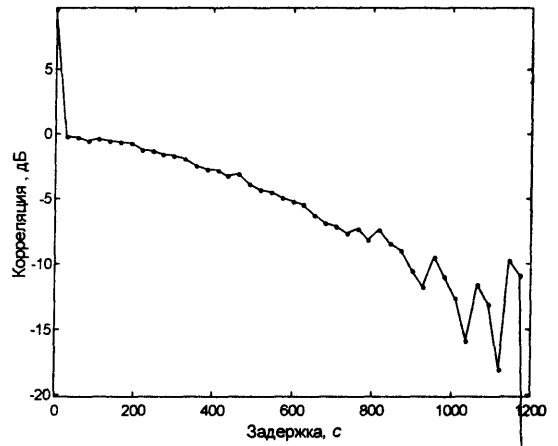


Рис. 5.8. Значения автокорреляционной функции непрерывной серии  $M$ -последовательностей, взятые в пиках, соответствующих периоду повторения  $M$ -последовательности.

не важно при больших помехах, поскольку корреляционный шум может быть ниже аддитивного шума после обработки. В этом эксперименте уровень шума после обработки не превышал  $-16$  дБ, а корреляционный шум был ниже  $-60$  дБ. Но при малых помехах корреляционный шум может стать равным или превысить уровень помех, и тогда его величина будет играть существенную роль.

Рисунок 5.9 представляет собой зависимость выхода согласованного фильтра от задержки и дня 1998 года. Следует отметить, что в данном эксперименте использовалась система единого времени с синхроимпульсами со спутников навигационной системы GPS, благодаря чему была возможность обеспечить единую систему временных координат для измерений, проведенных в разных сеансах в течение года. Наличие определенных технических сложностей как на излучающей стороне, так и на приемной, не позволило провести весь запланированный цикл измерений. Поэтому результат обработки содержит существенные пустые промежутки. И все же на рис. 5.9 видны сезонные флуктуации времен прихода сигнала, как целиком, так и по отдельным каналам.

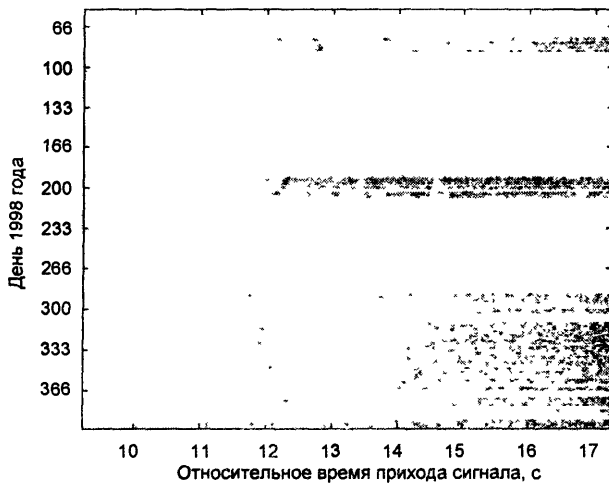


Рис. 5.9. Зависимость выхода согласованного фильтра от флуктуаций времени запаздывания сигнала и дня измерений в 1998 году.

Несмотря на отсутствие измерений в течение больших периодов времени, легко определить, что сезонные изменения времени распространения на данной трассе достигают 1 секунды. Это существенно больше оценок годичных вариаций (50 мс) вследствие изменения климата. В этом заключается сложность проблемы, решаемой в рамках АТОК.

Для идентификации хорошо различимых на рис. 5.9 треков с группами лучей был проведен расчет времен приходов лучей на исследуемой трассе в разные периоды года. Измерения структуры поля скоростей звука на трассе не проводились, да и вряд ли технически могли быть осуществлены. Для расчета использовалось модельное распределение скорости звука на трассе, полученное с помощью метода эмпирических ортогональных функций (ЭОФ) [43].

Базис ЭОФ для каждого сезона был построен на основе базы гидрологических данных (атлас Левитуса). По имеющейся пространственной зависимости коэффициентов разложения вертикальных профилей скорости звука были получены интерполированные сглаженные зависимости этих коэффициентов. Интерполированные значения использовались для восстановления профиля скорости звука в любой точке трассы. Использование полученных полей скорости звука при лучевом расчете давало значительную ошибку абсолютных времен распространения лучей, но ошибка определения относительных времен распространения по разным лучам была невелика. Это позволило путем варьирования абсолютного времени распространения совместить локализованные на рис. 5.9 группы лучей с расчетными лучами и таким образом идентифицировать их, т. е. с группами лучей, имеющих строго определенное число точек заворота.

Несмотря на то что приведенный пример показывает неплохие возможности по измерению вариаций времени распространения, решение задач АТОК осложняются наличием естественных факторов, ограничивающих точность временных измерений, таких, как приливы, внутренние волны и течения. Причем величина флуктуаций вре-

мени распространения по этим причинам может быть одного порядка с сезонными и многолетними изменениями времени распространения сигнала. Поэтому исследование флуктуаций времени распространения, разработка модели их воздействия на время распространения имеет большое значение для проблемы АТОК. Исследование флуктуаций времени распространения и их идентификация с физическими явлениями в океане является и самостоятельной задачей изучения волновых процессов в океане, и необходимым условием повышения устойчивости решений томографических задач и проблем АТОК. Применение сигналов на основе  $M$ -последовательности позволяет одновременно с измерением медленных вариаций измерить и быстрые.

Рассмотрим различные алгоритмы измерения флуктуаций времени распространения при прохождении сигнала через линейную систему.

Одним из наиболее ранних и простых методов исследования флуктуаций был метод с использованием тонального сигнала, подаваемого на вход системы.

Из уравнения (5.2.4) видно что измерения разности фаз между входным и выходным сигналами одноканальной линейной системы при использовании гармонического сигнала дают возможность измерять фазу частотной характеристики системы  $\varphi = \omega_0 t, = \arg [H(\omega_0)]$ , а следовательно и малые флуктуации времени распространения, не превышающие  $t, = \varphi/\omega_0$ . Измерение абсолютного времени распространения в этом случае невозможно из-за неоднозначности функции арктангенса. Однако, используя различные методы устранения неоднозначности фазы, т. е. развертывания фазы за пределы  $2\pi$  [44] (к примеру, так, как это описано выше, в разд. 1.5), можно измерять флуктуации времени, значительно превышающие длительность периода сигнала. Практически долгое время этот метод был основным при исследовании флуктуаций на стационарных гидроакустических трассах. Таким методом исследовались флуктуации времени распространения на арктической трассе Аляска – Шпицберген. Программа эксперимента включала два режима работы. Один режим – излучение несущей с модуляцией  $M$ -последовательностью для решения задач идентификации приходов сигнала с теоретическими или численными моделями. Второй – режим тонального сигнала с высокой когерентностью, для исследования флуктуаций. Для системы со многими каналами распространения (например, для многолучевых океанических волноводов) этот метод позволяет измерить флуктуации некоторого среднего времени, величина которого зависит не только от флуктуаций времени но и от распределения энергии сигнала по каналам. Возможность измерения флуктуаций по отдельным каналам существует только при применении пространственных систем селекции отдельных каналов, или попросту антенн, что практически либо не всегда возможно, либо не дает нужного результата. Однако особенность сигналов, построенных на основе  $M$ -последовательности, такова, что позволяет с их помощью измерять и малые флуктуации времени распространения. При этом можно производить оценки временных сдвигов импульсного отклика системы как абсолютных (без априорной информации не превышающие периода повторения такого сигнала), так и значительно меньших, чем период их несущей. Кроме того, они позволяют выделить каналы распространения или (в худшем случае) группы каналов с близким временем распространения и измерить их флуктуации.

Рассмотрим пример оценивания быстрых флуктуаций на трассе Гавайи – Камчатка [45]. Пусть на вход системы подается псевдослучайный периодический сигнал с корреляционной функцией в виде короткого радиоимпульса. Мы уже знаем, что таким сигналом может быть несущая, модулированная по фазе  $M$ -последовательностью. Корреляционная функция этого сигнала, вычисленная на интервале, равном длине последовательности,

$$R(\tau) = \begin{cases} (2^n - 1) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \cos(\omega_0 \tau), & |\tau| \leq \tau_0 \\ 0, & |\tau| > \tau_0 \end{cases}$$

представляет собой радиоимпульс с огибающей в виде треугольника с основанием равным удвоенной длине единицы  $M$ -последовательности с заполнением синусоидой

На выходе системы сигнал есть сумма сигналов, прошедших по разным каналам. Здесь тот случай, когда разница времен распространения сигнала по разным каналам значительно меньше самих времен распространения. Примером такой ситуации является распространение звука в океаническом волноводе, когда, например, на трассе Гавайи – Камчатка запаздывание сигналов было порядка 3000 с, а их максимальная разница не превышала 15–20 с.

Сигнал с выхода исследуемой системы разобьем на интервалы, равные по длительности одной  $M$ -последовательности.

Для сигнала каждого такого  $k$ -го интервала вычислим взаимную корреляцию  $R_k(\tau)$  с репликой

$$R_k(\tau) = \int_{t_k}^{t_k+T} y_k(t) M(\tau-t) dt,$$

где  $R_k(\tau)$  (как мы знаем) – оценка импульсного отклика системы,  $M(t)$  – реплика излученного сигнала,  $T$  – длина  $M$ -последовательности,  $y_k(t)$  –  $k$ -й отрезок принятого сигнала.

Представим  $R_k(\tau)$  как  $R_k(\tau) = h(\tau) \exp(i\omega_0 \tau_k)$ , т. е.  $R_k(\tau)$  представляет собой некоторое значение импульсного отклика, сдвинутого по времени на  $\tau_k$ .

Запишем функцию  $\rho_k(m)$  в виде

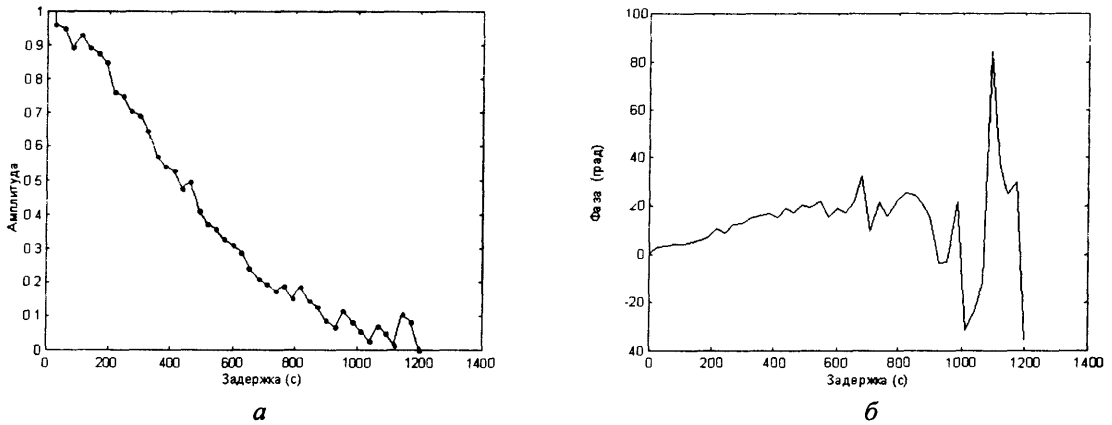
$$\rho_k(m) = \int_T b_k(\tau) b_{k+m}^*(\tau) d\tau = \exp[i\omega_0(\tau_k - \tau_{k+m})] \int_T h_k(\tau) h_{k+m}^*(\tau) d\tau,$$

где  $|\rho_k(m)| = \int_T h_k(\tau) h_{k+m}^*(\tau) d\tau$  – огибающая функции  $\rho_k(m)$ , а  $\varphi_k(m) = \omega_0(\tau_k - \tau_{k+m}) - \epsilon$

фаза, причем для стационарного канала распространения без флуктуаций  $\varphi_k(m) \equiv 0$  поскольку в стационарной системе время распространения не изменилось:  $\tau_k = \tau_{k+m}$ .

Поэтому отличие фазы функции  $\rho_k(m)$  от нуля в точках  $m = 0, 1, 2, \dots$  возможно только при наличии на трассе акустического волновода динамических процессов, изменяющих время распространения сигнала, т. е. когда  $\tau_k \neq \tau_{k+m}$ .

На рис. 5.10 приведены огибающая  $|\rho_k(m)|$  и фаза  $\varphi_k(m)$  для одного из сеансов излучения. Ограниченное число излученных и принятых сигналов приводит к тому, что с ростом  $m$  уменьшается усреднение оценки и, соответственно, растет её погрешность. Вместе с тем видно, что фаза  $\varphi_k(m)$  функции до 500 с ( $\sim 20 m$ ) изменяется почти линейно. Отсюда следует, что основные процессы, влияющие на изменение времени распространения сигнала на трассе, имеют характерные времена большие, чем 500 с. Естественно, что фазу  $\varphi_k(m)$  на этом интервале ( $0 < \tau < 500$  с) можно аппроксимировать полиномом первой степени и тем самым увеличить точность ее оценки.



**Рис. 5.10.** Огибающая  $|\rho_k(m)|$  (а) и фаза  $\varphi_k(m)$  (б), измеренные по принятому сигналу во время одного из сеансов излучения.

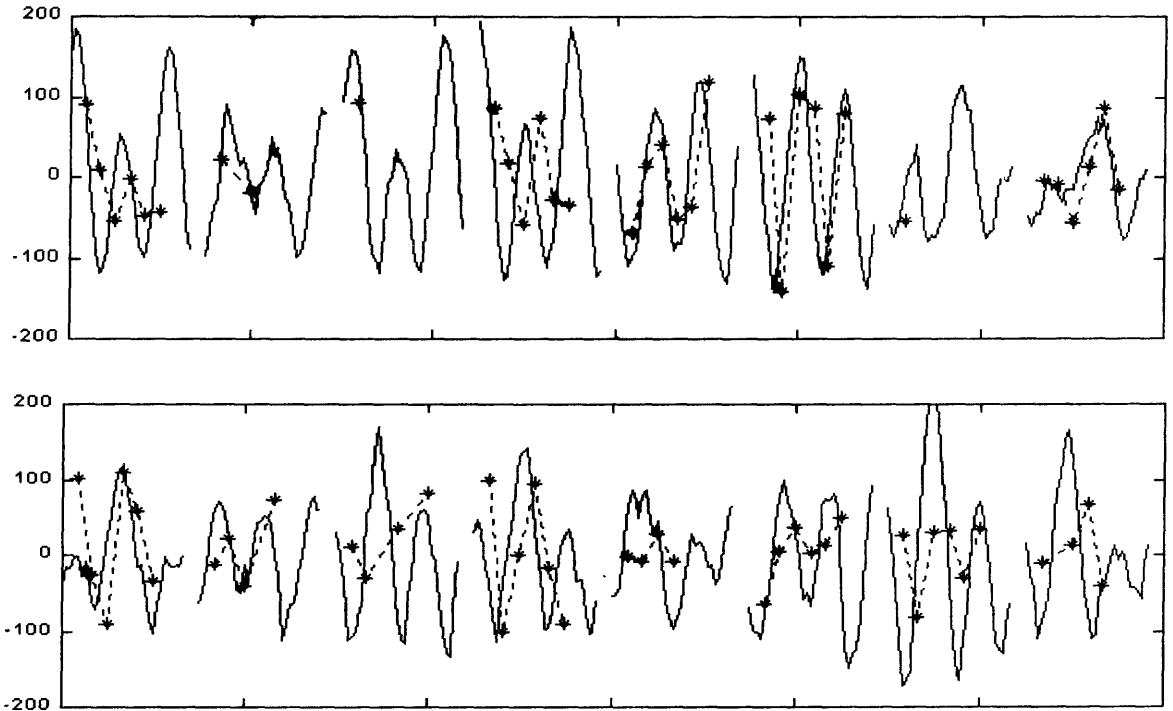
В отсутствие влияния на время распространения быстрых волновых процессов для идеального модельного волновода, который прогревался в соответствии с сезонными вариациями температуры, летом и зимой фаза  $\varphi_k(m)$  изменяла бы знак. Однако разные процессы в океане (главным образом приливные течения) приводят к изменению знака фазы даже в течение суток, в то время как измеренная фаза по элементам антенны для одного сеанса имеет одинаковый знак и близкие значения.

Очевидно, что флуктуации времени распространения должны иметь хорошую корреляцию с определенными физическими процессами в океане. Изучение и идентификация флуктуаций времени распространения позволяют установить их эмпирическую зависимость от физических процессов на трассе и тем самым разработать их теоретическую модель и учесть влияние на время распространения.

На рис. 5.11 приведены скорость изменения уровня океана и фаза функции  $\rho_k(m)$  для нескольких суток 1998 года. Для компактности графика убраны дни без измерений, а метки на горизонтальной оси соответствуют двум суткам (48 час). Пропущенным дням соответствуют разрывы в сплошной линии, на которой приведена величина изменения уровня океана за час (производная от уровня океана) у Гавайских островов. Пунктиром и звездочками обозначены значения фазы функции  $\rho_k(m)$  – сигнала, принятого на Камчатке. Амплитуды фазы нормированы по критерию минимума среднего квадрата (МНК-оценка) разности кривых в моменты измерения фазы. При этом получена и оценка временного запаздывания воздействия приливов у Гавайских островов на время распространения сигнала до Камчатки, составившая 2,49 – 2,51 часа. Поскольку трасса вытянута по широте примерно на 41 градус, запаздывание географического времени у Камчатки относительно Гавайев составляет 2,73 часа.

Величина фазовых набегов на несущей частоте на длине  $M$ -последовательности достигает 0,02 радиана, что составляет  $5,6 \cdot 10^{-4}$  градуса на период несущей. Таким образом, за 6 часов (половина периода приливных колебаний) величина интегрального запаздывания сигнала может достигать величины порядка 0,2 секунды.

Очевидно, что однозначно определить функциональную зависимость между характеристиками изменения времени распространения и скоростью изменения уровня океана по данным таких измерений затруднительно, однако приведенные на рис. 5.11 кривые указывают на наличие корреляционной связи между ними. Результаты исследования этой связи на других трассах, приведенные в литературе, говорят о наличии такой зависимости.



**Рис. 5.11.** Скорость изменения уровня океана и фаза функции  $\rho_k(m)$  в зависимости от времени для нескольких суток 1998 года на трассе Гавайи – Камчатка. Пунктиром и звездочками обозначены значения фазы функции  $\rho_k(m)$  сигнала, принятого на Камчатке.

Приведенные в этой части примеры иллюстрируют возможности сигнала в виде несущей с модуляцией  $M$ -последовательностью идентифицировать отдельные каналы распространения, измерять большие (до 10 секунд) и малые (0,02 радиана от периода несущей или 0,0001 с) флуктуации времени распространения. Из приведенных примеров становится понятна оптимальность использования  $M$ -последовательности в качестве тестового сигнала. Конечно, применяя тональный тестовый сигнал можно было бы измерить быстрые флуктуации времени распространения, однако при этом невозможно было бы измерить их сезонные вариации, выделить и идентифицировать отдельные группы лучей.

### 5.6. Идентификация каналов распространения на нестационарных трассах

Приведенные здесь примеры основаны на работах одного из авторов (А. А. Стромков). Основные результаты этих работ представлены в различных публикациях [35, 46–49]. Рассмотрим идентификацию каналов распространения применительно к нестационарной трассе, например, когда прием и/или излучение ведется с борта дрейфующего судна. Взаимное движение источника и приемника приводит к изменению масштаба времени (эффект Доплера). В этом случае для вычисления взаимной корреляционной функции необходимо использовать не сам излученный сигнал, а его модифицированную реплику, преобразованную в соответствии с изменением сигнала при распространении по трассе. Возможен второй способ, когда преобразовывается принятый сигнал. Преобразование принятого сигнала обычно представляет более сложную задачу. Еще с десяток лет назад для этой цели использовались маг-

нитофоны с изменяемой скоростью, или в оптических системах обработки изменялся масштаб изображения. В цифровых системах сейчас используются различные методы интерполяции с целью получения значений принятого сигнала во временной системе координат излученного сигнала. Методы интерполяции имеют большое значение в обработке сигналов. В MATLAB'е имеется большая группа операторов, разработанных именно для целей интерполяции. Необходимость интерполяции вызвана, большей частью, недостаточностью имеющихся в распоряжении экспериментатора данных измерений. Мы здесь не исследуем причины недостаточности данных, однако следует отметить, что они (причины) могут быть и объективными, и субъективными, и устранимыми в дальнейшем, и неустраняемыми. В большинстве практических случаев интерполяция представляет собой некорректную задачу, разрешимую при наличии априорной информации и в предположениях. Для однородного изменения масштаба сигнала (в любой момент времени масштаб одинаков) хорошо работает кубический сплайн и фурье-аппроксимация [38]. В случае неоднородного изменения масштаба сигнала фурье-аппроксимация невозможна. В этом случае можно воспользоваться сплайном или придется разработать свои оригинальные методы, как, например, было сделано в предыдущем параграфе для построения поля скоростей звука вдоль трассы. Использование модифицированной реплики часто может значительно снизить вычислительные затраты. Например, если использовать в качестве тестового сигнала *M*-последовательность в условиях, когда на длине последовательности движения системы стационарны. В этом случае можно заранее сформировать массив необходимых реплик и не производить модификацию сигнала для устранения доплеровского изменения масштаба времени. Однако в этом случае трудно для всех возможных реплик обеспечить вычисление корреляционных функций на интервалах, точно равных длине *M*-последовательности, и это приводит к повышению уровня корреляционного шума. Вместе с тем, в большинстве случаев корреляционный шум не мешает оценке смещения частоты сигнала. Оценив же смещение, можно модифицировать принятый сигнал только один раз так, чтобы на длине *M*-последовательности (или, что еще лучше, на длине единицы) укладывалось целое число отсчетов. В любом случае процедуре обработки на нестационарных трассах должно предшествовать определение доплеровских скоростей входа и выхода системы.

Такая обработка с предварительной оценкой взаимного движения приемника и источника использовалась при исследовании возможности разрешения и идентификации лучей по экспериментальным данным, полученным летом 1994 года в Средиземном море. С борта дрейфующего НИС "Академик Сергей Вавилов" регистрировались сигналы от стационарных источников, работавших по программе международного томографического эксперимента THETIS-2.

В ходе данного эксперимента автономными стационарными источниками излучались импульсные сигналы на несущей частоте 400 Гц с модуляцией фазы *M*-последовательностью. Глубина модуляции была такой ( $\psi \pm 87,408^\circ$ ), что обеспечивала низкий уровень корреляционного шума, при всех условиях лежащий ниже уровня помех. Модулирующая фаза псевдослучайная последовательность (восьмеричный закон 1021) состояла из 511 единиц, длительность каждой из которых равнялась 4 периодам несущей частоты, т. е. 0,01 с. Несколько раз в сутки излучалась серия из 40 одинаковых импульсов. Суммарная длительность каждой такой серии составляла 204,4 с. Прием велся на опущенные с борта дрейфующего судна приемники, перекрывающие диапазон глубин от поверхности до 127,5 м.

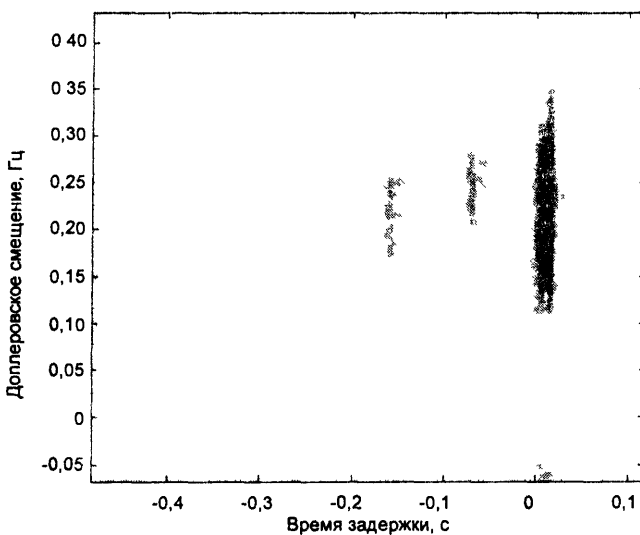
Одновременно измерялись вертикальные профили скорости звука, которые соответствовали океаническому волноводу с осью на 80–150 м на всей акватории про-

ведения измерений. Источник звука располагался чуть ниже оси звукового канала на глубине 150 м. При численном расчете времен приходов лучей, необходимом для решения задачи идентификации, использовалась плоскостойкая модель опорного волновода с профилем скорости звука, измеренным в точке приема. Вариации профиля скорости звука по трассе были достаточно малыми в том смысле, что вызванные ими вариации времен приходов лучей не затрудняли идентификацию последних.

В процессе обработки проводилось сжатие принятых импульсов путем их корреляции с копией первоначально излученного сигнала, т. е. реализовывался согласованный фильтр, для которого эффективная ширина функции автокорреляции излученного сигнала равна длительности единицы модулирующей фазу псевдослучайной последовательности, а именно 10 миллисекундам. Как уже было показано, сжатый сигнал эквивалентен тому, который был бы принят после излучения короткого импульса, имеющего форму функции автокорреляции реально излученного сигнала. Обработка не отличалась от обычной согласованной фильтрации, за исключением необходимости компенсации искажений импульса, обусловленных дрейфом судна.

Свободный дрейф НИС приводил к изменению временного масштаба принятого сигнала, вызванному доплеровским смещением несущей частоты. Поскольку углы приходов лучей лежали в небольшом (от  $-12$  до  $12$  градусов) диапазоне, учет проекции скорости дрейфа на направление прихода разрешаемого луча не проводился.

Компонента скорости дрейфа в направлении на источник оценивалась различными методами – от оценки по данным корабельной навигационной системы до измерения периода следования импульсов по автокорреляционной функции. Наиболее часто использовался метод простого перебора реплик, рассчитанных для разных доплеровских скоростей при согласованной фильтрации сигнала, принятого на гидрофон, расположенный вблизи оси канала. Метод обеспечивал достаточно высокую точность за счет свойств  $M$ -последовательности, имеющей "игольчатую" функцию неопределенности. В качестве оценки скорости принималось значение, соответствующее реплике, для которой амплитуда выхода согласованного фильтра была максимальной. В качестве "реперного" импульса использовался пик, формируемый пологими лучами. Полученные таким образом оценки скорости дрейфа затем использовались для



**Рис. 5.12.** Зависимость выхода согласованного фильтра от величины доплеровского сдвига несущей частоты. Более темным участкам соответствует большая амплитуда.

компенсации доплеровских искажений при обработке сигналов, принятых всеми гидрофонами антенны. На рис. 5.12 приведена зависимость выхода согласованного фильтра от величины доплеровского сдвига несущей частоты. По вертикали отложено доплеровское смещение, по горизонтали — относительные задержки. Более темным участкам соответствует большая амплитуда. Хорошо видно, что величина доплеровского смещения определяется однозначно, это обусловлено формой функции неопределенности излученного сигнала.

Как показывают и аналитические оценки, и данные численного моделирования [35], на приемный гидрофон сначала приходят группы



отдельных импульсов, отвечающие наиболее крутым лучам, а потом импульсы, пришедшие по более пологим траекториям. Последними на приемник, расположенный вблизи оси волновода, приходит множество неразрешенных приосевых лучей. Часть выхода согласованного фильтра, формируемая вкладками крутых лучей, содержит пики, отвечающие приходам отдельных лучей.

Отсутствие в данном эксперименте системы единого времени в источнике и приемнике не позволило определить абсолютное время распространения, тем более что и взаимные координаты даже навигационными системами определялись с погрешностью порядка 150 метров. Вследствие неравномерного дрейфа наклон троса, на котором были закреплены гидрофоны, также сильно варьировался. Поэтому неконтролируемые изменения глубин гидрофонов за счет этого эффекта, а также вследствие качки судна, по нашим оценкам, могли достигать 10 м.

Такие неточности в определении координат приводят к ошибкам в измерении времен приходов лучей, достигающих десятков миллисекунд. Эта величина сопоставима с типичной временной задержкой между приходами двух последовательных четверок крутых (лучше всего разрешаемых) лучей в данном волноводе. По этой причине сравнение теории и эксперимента на представленных графиках выполнялось путем сдвига всех рассчитанных времен приходов лучей на одну и ту же величину для их наилучшего совпадения с пиками выхода согласованного фильтра. Это означает, что при сравнении теории с экспериментом фактически сопоставлялись не времена

приходов лучей, а их разности (то есть, как и в предыдущем эксперименте, – относительные времена распространения).

На рис. 5.13 приведены результаты усреднения выхода согласованного фильтра для 40 последовательностей, непрерывно следовавших друг за другом. Показаны зависимости уровня сигнала от времени. Более темная кривая, идущая ниже, получена путем суммирования комплексных огибающих отдельных импульсов (когерентное суммирование), а другая кривая – путем суммирования мощностей данных амплитуд (некогерентное суммирование). Как видим, амплитуды максимумов в обоих случаях меняются мало, в то время как уровень шумов при когерентном усреднении, как и следовало, значительно падает. Тот факт, что и когерентное, и некогерентное

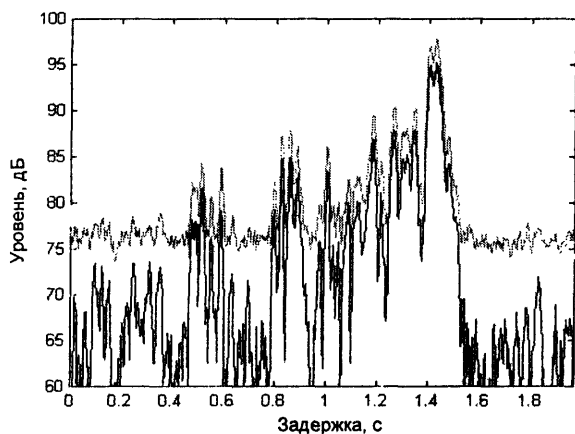
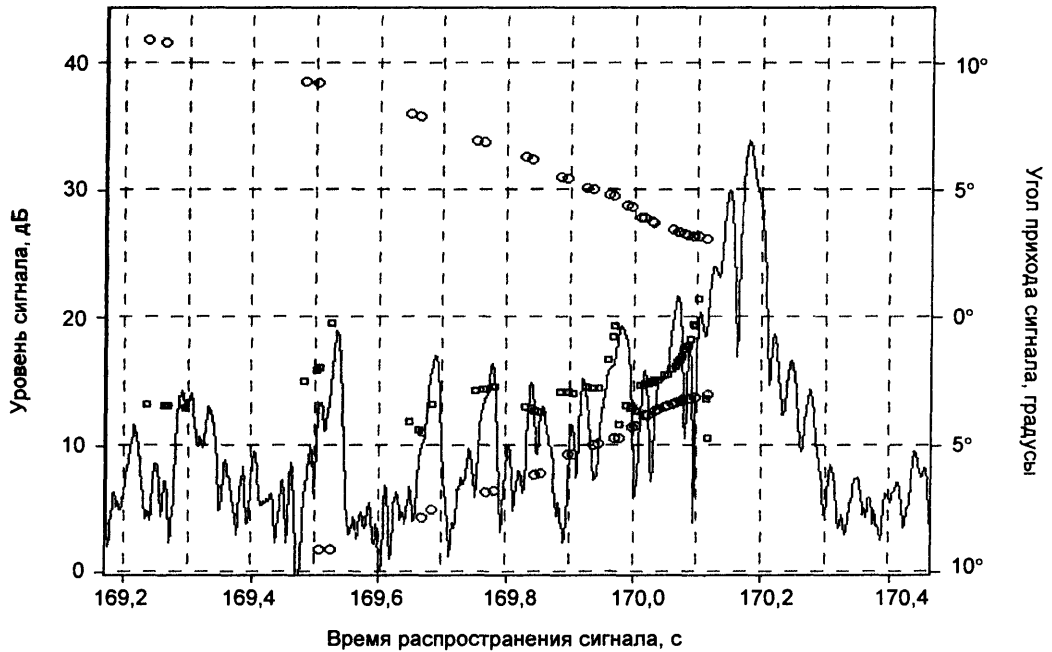


Рис. 5.13. Результат усреднения выхода согласованного фильтра для 40 последовательностей, непрерывно следовавших друг за другом. Показана зависимость уровня от запаздывания. Более темная кривая, идущая ниже, получена путем суммирования комплексных огибающих отдельных импульсов (когерентное суммирование), а верхняя кривая – суммированием мощностей данных амплитуд (некогерентное суммирование).

суммирование дают примерно одинаковое значение амплитуды лучевых импульсов, свидетельствует, что на протяжении одной серии (204,4 с) корреляция между импульсами сохраняется и метод компенсации искажений, вызванных эффектом Доплера, является вполне эффективным. В то же время некогерентное усреднение приводит к маскировке слабых импульсов.



**Рис. 5.14.** Идентификация импульсов с выхода согласованного фильтра на основе лучевого расчета. Сплошная кривая — зависимость интенсивности сигнала от времени. Квадраты — время прихода и интенсивность луча в соответствии с расчетом. Кружки — углы выхода соответствующего луча из источника.

На рис. 5.14 приведен пример идентификации импульсов с выхода согласованного фильтра на основе лучевого расчета. Сплошной кривой показана зависимость интенсивности сигнала от времени. Квадраты — это время прихода и интенсивность луча в соответствии с расчетом. Кружками изображены углы выхода луча из источника. Расчет не был сделан для пологих лучей (что видно из приведенной фигуры), поскольку большое количество не разрешаемых пологих лучей вызывает сильную интерференцию пика, им формируемого, в результате чего сравнение расчета и модели затруднено. Вместе с тем очевидно, что и этих данных достаточно для однозначной идентификации импульсов в выходном сигнале согласованного фильтра и крутых лучей в океаническом волноводе.

### 5.7. Кепстральный метод оценки флуктуаций запаздывания сигналов

Акустические методы успешно используются для определения ряда океанологических параметров. В предыдущих разделах приведены примеры использования таких методов для решения актуальных задач гидроакустики и сейсмической томографии. В этом разделе приводится пример обработки с использованием кепстра. Благодаря применению кепстральной обработки удастся преобразовать в сумму произведения некоторых характеристик систем. Разделяемыми характеристиками могут быть частотная характеристика системы и спектр входного сигнала (на выходе системы они перемножаются). Другим примером разделяемых характеристик могут быть полезный сигнал и помеха при их мультипликативном взаимодействии. Здесь мы рассмотрим пример устранения влияния флуктуирующей частотной (импульсной) характеристики системы, на измерение времени следования импульсных сигналов. Такая задача возникает (как уже мы отмечали) в рамках решения проблемы АТОК.

Круг задач, решаемых путем измерения времени распространения акустического сигнала, существенно зависит от точности его оценки. В работе [50] рассмотрены неточности, вызываемые многолучевостью акустического канала. Чтобы избежать ошибок, вызванных многолучевостью, предлагается увеличить временное разрешение сигналов путем расширения эффективной полосы частот, в которой производятся измерения. Определяется оптимальная с точки зрения точности степень сглаживания частотной характеристики сигнала с учетом аддитивного шума.

Здесь, как и в [50], решается задача повышения точности оценки времени распространения импульса в условиях многолучевого канала. Мы полагаем достаточно высоким отношение сигнал/шум, при котором определение положения импульса возможно с точностью, намного превышающей обратную ширину спектра импульса. Большое превышение сигнала над шумом позволяет получать оценки положений максимума сигнала с точностью, превосходящей интервал дискретизации сигнала во времени. В этих условиях актуальной становится задача не борьбы с многолучевостью, а нахождения пути уменьшения ошибок в определении положения импульса в условиях многолучевого распространения. Основным источником таких ошибок является изменение формы импульса, вызванное небольшими флуктуациями времени распространения сигнала по различным лучам интерферирующих сигналов. Здесь показана возможность исключения ошибок, вызванных флуктуациями формы импульса, путем переноса измерений из временной области в кепстральную. При отсутствии флуктуаций временное и кепстральное определения времени распространения сигнала полностью эквивалентны. Иначе обстоит дело в условиях многолучевого канала.

Поясним суть используемого кепстрального метода. Пусть имеем два почти идентичных сигнала  $a$  и  $b$ , задержанных один относительно другого. Спектр сигнала, взятый на интервале, включающем оба сигнала, запишем как

$$G_v(\omega) = G_a(\omega)\exp(i\omega\tau_a) + G_b(\omega)\exp(i\omega\tau_b). \quad (5.7.1)$$

Здесь  $G_{a,b}(\omega)$  – спектры каждого из сигналов в отдельности, взятые на том же интервале, что и их общий спектр, в которых выделено положение каждого из сигналов на оси времени  $\tau_{a,b}$ .

Преобразуя (5.7.1), вынеся за скобку параметры сигнала  $a$ , получим

$$G_v(\omega) = G_a(\omega)\exp(i\omega\tau_a)\{1 + \alpha \exp[i\omega(\tau_b - \tau_a)]\}, \quad (5.7.2)$$

где  $\alpha = G_b(\omega)/G_a(\omega)$ .

Из выражения (5.7.2) следует, что разница форм сигналов  $a$  и  $b$  (или их спектров) оказывает влияние при измерении спектра лишь на коэффициент  $\alpha$ , который характеризует подобные изменения и не содержит информации о задержке сигналов. Точнее, изменение флуктуаций может приводить к отличию измеренной задержки сигналов от  $\tau = (\tau_b - \tau_a)$  лишь при наличии в  $\alpha$  мнимой части, пропорциональной  $\omega$ . Наличие такого члена в  $\alpha$  не является ошибкой, это следствие флуктуаций положения сигнала. Поэтому мы имеем все основания выделить его из  $\alpha$  и внести его в измеряемую  $\tau$ . При измерении временного положения сигналов  $a$  и  $b$  по положению их максимумов интерференция сигналов, пришедших по разным каналам, будет вызывать неконтролируемые деформации формы сигнала.

Для повышения точности измерения запаздывания необходимо разделить амплитудные и временные факторы в соотношении (5.7.2), чтобы измерения величины  $\tau = (\tau_b - \tau_a)$  от амплитудных характеристик сигнала не зависели. Методом, позво-

ляющим это сделать, является кепстральный анализ. Запишем логарифм модуля (5.7.2):

$$\ln \{ |G_y(\omega)| \} = \ln \{ |G_a(\omega)| \} + \ln \{ |1 + \alpha \exp(i\omega\tau)| \}, \quad (5.7.3)$$

который содержит два слагаемых. Первое – логарифм модуля спектра одного импульса, фурье-образ которого состоит практически из низкочастотных составляющих. Спектр второго слагаемого содержит гармонические члены с частотами кратными  $\tau$ . Таким образом, фурье-преобразование от (5.7.3) (кепстр) содержит низкочастотные составляющие и гармонический ряд с периодом  $\tau$ . По положению гармоник этого ряда определяется задержка между импульсами. Спектральный анализ должен быть произведен для достаточно длинного интервала частот. Чем больше частотное окно, тем точнее в кепстре (5.7.3) определяются максимумы частоты (сачтота)  $\tau$ . Для того чтобы определить величину  $\tau$  с точностью, превышающей величину интервала квантования сигнала, функцию (5.7.3) следует дополнить нулями прежде, чем брать от нее спектр (кепстр).

Увеличение частотного окна путем дополнения его нулями не увеличивает разрешающей способности метода – это лишь необходимый прием численного счета. Дело в том, что при численных расчетах ось задержек состоит из ряда дискретных значений. Интервал дискретизации есть предел временного разрешения. Однако при больших отношениях сигнала к шуму временное положение импульса (без применения каких-то особых приемов) получается с гораздо большей точностью. Чтобы воспользоваться этой возможностью, необходимо увеличение числа точек на оси задержек. Этого можно достичь путем увеличения частотного окна, дополняя его нулевыми значениями.

Форма получающегося при этом кепстра будет иметь вид, изображенный на рис. 5.15. Если формула (5.7.3) нулями не дополняется, то расстояние между отсчетными точками кепстра функции на рис. 5.15

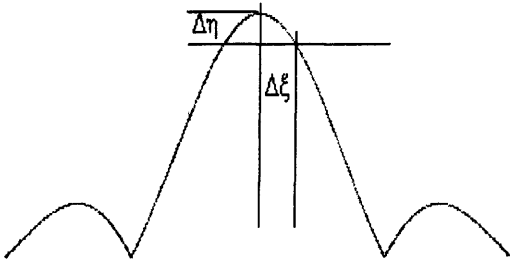


Рис. 5.15. Форма кепстрального отклика при дополнении спектра нулями.

будет соответствовать расстоянию между отсчетами этой функции. В результате измерить величину  $\tau$  можно лишь с погрешностью равной периоду квантования исследуемых импульсов. Дополняя (5.7.3) нулями, мы вводим в кепстр дополнительные отсчеты в количестве, пропорциональном дополняемому числу нулей. Естественно, что таким образом мы можем определить положение максимума со сколь угодно высокой точностью.

Однако положение максимума в действительности смещено относительно запаздывания сигналов  $\tau$  (мы измеряем именно запаздывание, а не положение максимума) присутствием шумов. Поэтому увеличивать до бесконечности число дополняемых нулей нецелесообразно. Препятствием точному определению  $\tau$  по положению максимума функции, представленной на рис. 5.15, являются аддитивные шумы в функции (5.7.3). Чем меньше уровень шума, показанного на рис. 5.15 в виде отрезка  $\Delta\eta$ , тем точнее может быть определено запаздывание  $\tau$ . Величина  $\Delta\xi$  определяет то число нулей, которое целесообразно вставлять в (5.7.3). Исходя из того, что график рис. 5.15 в окрестности максимума имеет вид близкий  $\sin(x)/x$ , на рис. 5.16 приведем график отношения числа целесообразно дополняемых нулей к длине исходного спектра в зависимости от уровня шума в (5.7.3). Этот уровень шума приведен в децибелах по отношению к модулю  $\alpha$  с учетом выигрыша

при спектральном анализе 1024 точек спектра (30 дБ). Из графика видно, что увеличивать длительность спектра в 16 раз, дополняя его нулями, целесообразно уже при превышении импульсом уровня шума на 20 дБ и более. Это означает, что такой важный параметр, как положение импульса по отношению к импульсу опорному, можно определить с точностью до  $1/16$  расстояния между точками отсчета на временной оси. Расстояние между отсчетными точками, как правило, много меньше интервала разрешения сигналов, определяемого как обратная величина ширины полосы сигнала.

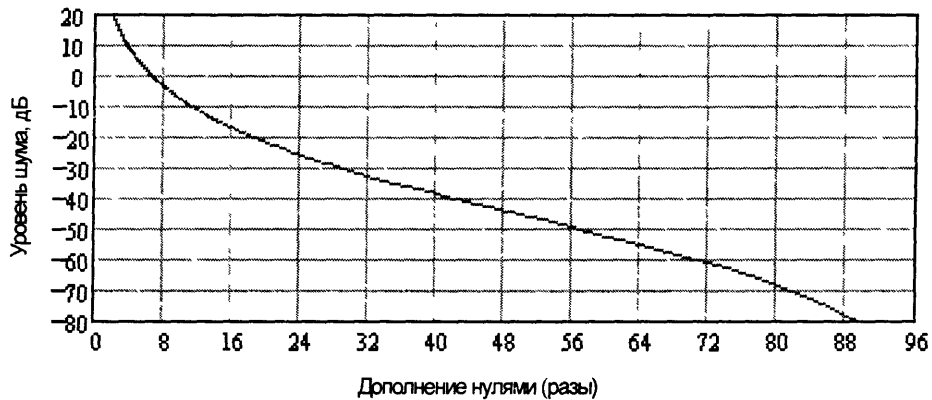


Рис. 5.16. Зависимость отношения числа целесообразно дополняемых нулей к длине исходного спектра в зависимости от уровня шума в спектре.

Отметим два важных обстоятельства. Первое – здесь нет никакого "сверхразрешения". Для "сверхразрешения" надо спектр сигнала дополнять не нулями, а значениями его подлинного спектра, получаемого за счет хитрым образом сделанных оценок или априорных предположений [51]. Мы просто уточняем положение обычным образом полученного максимума спектра, как это показано на рис. 5.15. Второе обстоятельство заключается в том, что рис. 5.15 и 5.16 являются лишь иллюстрацией возможностей, а не основой их осуществления. Осуществимость используемого здесь метода выясняется непосредственно при его осуществлении на основе формы реально наблюдаемого спектра (5.7.3) (кепстра). Для осуществимости метода форма кепстра должна иметь в окрестности максимума гладкую форму, близкую к показанной на рис. 5.15.

Комплексный коэффициент  $\alpha$  оценивается на основе уже определенной величины  $\tau$ . Приведем для примера два таких способа.

*Способ первый.* Составим соотношение, в которое входят как  $\alpha$ , так и  $\tau$ :

$$M(t) = S(t) - kS(t - \tau), \quad (5.7.4)$$

где  $S(t)$  – вид исходного сигнала, содержащего оба сигнала –  $a$  и  $b$ ;  $k$  – некий произвольный комплексный множитель. В (5.7.4) в определенный момент совмещаются оба импульса: прямой, умноженный на  $k$ , и задержанный, и можно наблюдать их интерференцию. Минимум амплитуды этого совмещенного импульса будет наблюдаться при условии  $k = \alpha$ . Исходя из этого условия, при минимуме совмещенного импульса определяются действительная и мнимая части  $\alpha$ .

Способ второй. Запишем следующее соотношение:

$$G_M(\omega) = \frac{G_y(\omega)}{1 + k \exp(i\omega\tau)}. \quad (5.7.5)$$

При условии  $k = \alpha$  (5.7.5) переходит в

$$G_M(\omega) = G_a(\omega). \quad (5.7.6)$$

Поэтому спектр (5.7.5) (кепстр  $S(t)$ ) будет достигать минимума на частоте  $\tau$  при условии  $k = \alpha$ . Этот способ является интегральным. Ему следует отдавать предпочтение при желании исключить или ослабить влияние локальных изменений формы сигналов. Он работает при условии, что знаменатель (5.7.5) нигде не обращается в нуль. Если это происходит, то следует исключить из рассмотрения эти точки.

Для того чтобы показать применимость вышеописанной методики к измерениям в области гидроакустики, мы применили ее для обработки данных натурального гидроакустического эксперимента THETIS-II.

Как уже отмечалось, предварительная обработка включала оценку трансформации масштаба времени вследствие эффекта Доплера из-за дрейфа судна. Для оценки трансформации сигнала измерялась автокорреляция принятого сигнала и по первому существенному максимуму на ненулевой задержке (близкой к периоду следования  $M$ -последовательностей) оценивалось среднее изменение периода следования и соответствующее доплеровское искажение. Вместе с тем, если для накопления (усреднения) сигналов такой метод и был достаточен, то для измерения реальных флуктуаций времени прихода этого было недостаточно. Кепстральный метод позволил повысить точность измерения периода следования импульсов, следовательно, и флуктуаций времени распространения.

Для тестирования методики мы воспользовались пятью группами импульсов с выхода коррелятора, образованных пятью следующими друг за другом последовательностями. Для компенсации доплеровских искажений при вычислении взаимной корреляции принятого сигнала и реплики использовалась фиксированная скорость движения приемника. Сигнал был принят одним из гидрофонов вертикальной цепочки. Приведенный пример выполнен с целью демонстрации возможностей по уточнению периода следования импульсов с помощью вышеописанной методики.

Обработка состояла в следующем. Проводился спектральный анализ реализации сигнала (рис. 5.17), включающей два импульса (определенные оценки импульсного отклика системы). После этого производилось логарифмирование модуля полученного спектра. По спектру этого модуля (кепстру) грубо (с точностью до одной отсчетной точки) оценивалась величина задержки по максимуму кепстра. После этого координата максимума кепстра уточнялась либо путем добавления нулей в модуль спектра, либо иным способом. Проводилось не быстрое, а обычное преобразование Фурье по небольшому (16) количеству точек в окрестности максимума. В этом случае точки брались через интервал в одну тысячную долю интервала квантования. После этого определялась относительная амплитуда импульсов путем ее подбора по условию  $k = \alpha$ , в формулах (5.7.4) или (5.7.5) до момента минимизации второго импульса в (5.7.4) или в спектре (5.7.5). Так определялись значения задержек и относительных амплитуд для соседних пар импульсов, показанных на рис. 5.17.

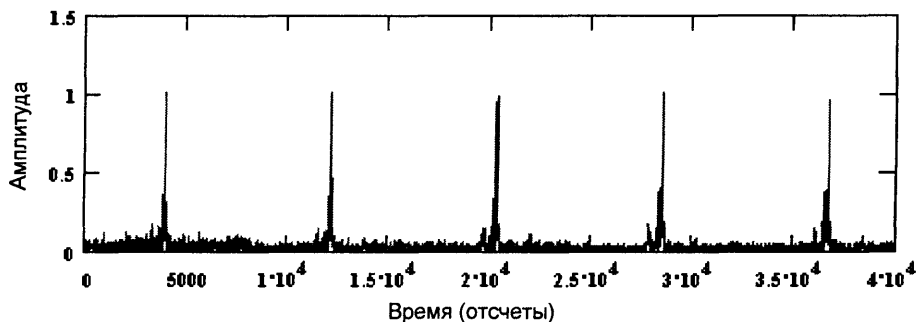


Рис. 5.17. Форма реализации обрабатываемого сигнала

Полученные результаты приведены в таблице и иллюстрированы рисунками.

Номер интервала между импульсами	Отклонение длительности интервала	Относительная амплитуда
1	0,092	1,08
2	0,242	1,13
3	0,119	1,06
4	-0,105	0,95

В первой колонке таблицы показан номер промежутка между импульсами, последовательность которых использовалась при обработке. График этой последовательности импульсов показан на рис. 5.17. В следующей колонке показана разность между значениями расстояний между импульсами, определенных с точностью в тысячную долю периода квантования и значения 8176 (период следования  $M$ -последовательностей), определенного с точностью до одной единицы квантования. В третьей колонке таблицы показаны значения относительной амплитуды импульсов последовательности.

На рис. 5.18 – 5.20 показаны иллюстрации основных этапов обработки сигналов натурального эксперимента. Рис. 5.18 и 5.19 показывают момент определения относительной амплитуды импульсов по методу, использующему вычитание сигнала и его задержанной копии по формуле (5.7.4). На рис. 5.18, а и 5.19, а показан вид функции  $M(t)$ , а под ним на рис. 5.18, б и 5.19, б показан вид функции  $S(t)$ , входящей в (5.7.4).

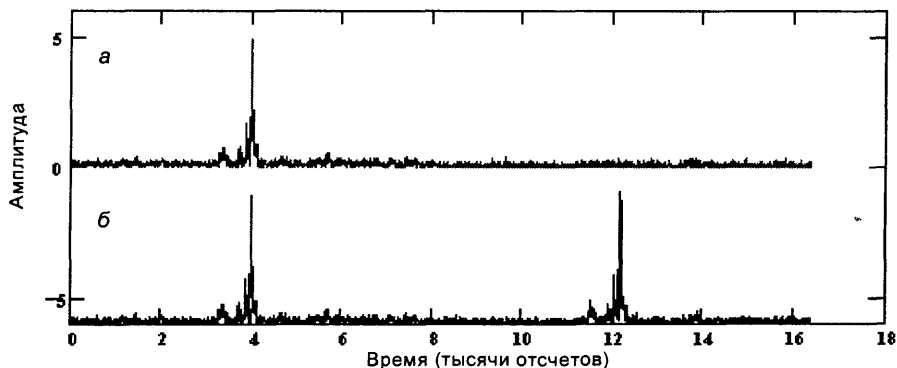


Рис. 5.18. Алгоритм определения относительной амплитуды импульсов, использующий вычитание сигнала и его задержанной копии по формуле (5.7.4): нижний график – исходная реализация сигнала, верхний – результат вычитания из второго импульса задержанной копии первого.

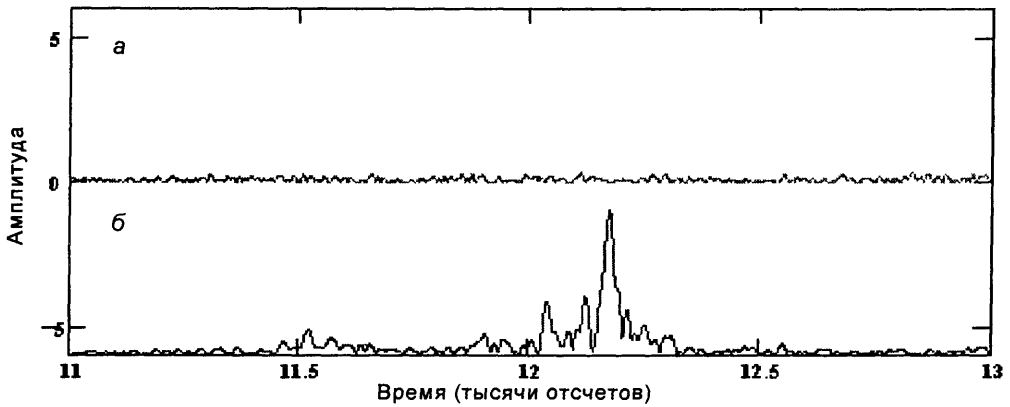


Рис. 5.19. То же, что и на рис. 5.18, но приведен только второй импульс в более подробном масштабе.

На рис. 5.20 приведен момент определения уточненного значения задержки между импульсами, показано 16 значений кепстра (спектра (5.7.3)), взятых через одну тысячную интервала квантования, в окрестности максимума модуля этой функции. Плавный регулярный вид этой кривой показывает, что шум пока не оказывает существенного влияния на результат определения положения максимума. Мы сравнили используемый нами метод с методом определения величины задержек по максимуму корреляционной функции, использованному, например, в [52]. Относительная задержка во второй паре импульсов была измерена по разности положений максимумов корреляционных функций, измеренных до тысячных долей интервала разрешения. Это значение отличается от значения, приведенного в таблице, на 0,311 интервала квантования. Правильность результата, указанного в таблице, подтверждается численным экспериментом с использованием натуральных исходных данных. Была смоделирована флуктуация амплитуды импульса вблизи максимума путем умножения (моделировалась мультипликативная помеха) сигнала на 1,001 в двух стоящих рядом с максимумом точках одной из корреляционных функций, временной интервал между которыми оценивался.

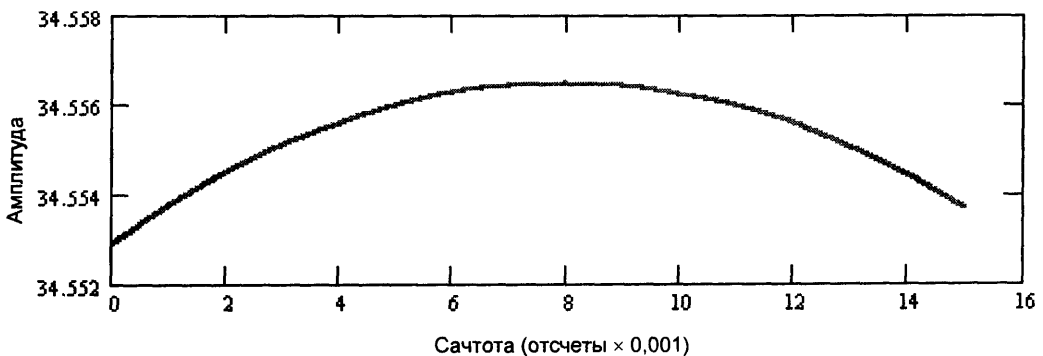
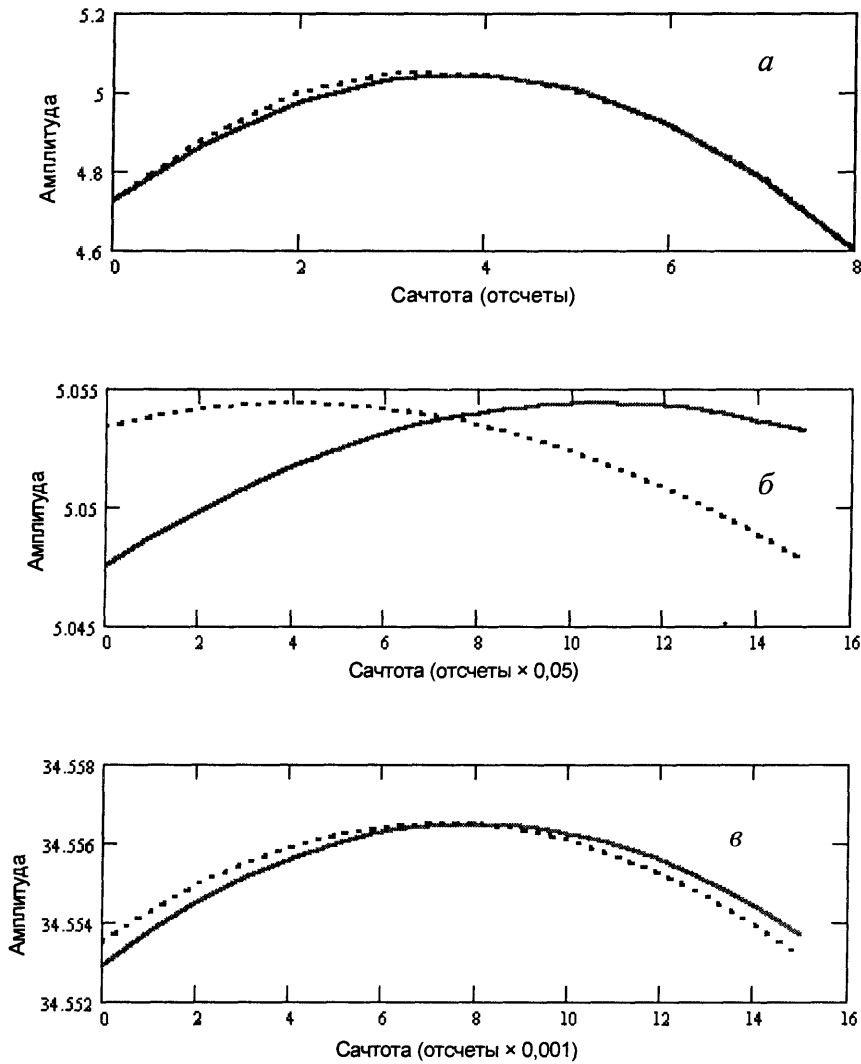


Рис. 5.20. Часть кепстра (спектра (5.7.3)), взятая через одну тысячную интервала квантования, в окрестности максимума модуля этой функции.





**Рис. 5.21.** Корреляционные функции (*a*) исходного сигнала (сплошная линия) и сигнала, в который внесены изменения (пунктир). Тот же участок в увеличенном (в 20 раз) масштабе (*б*). Участок кепстра тех же функций в еще более (в 1000 раз) растянутом масштабе (*в*).

На рис. 5.21, *a* показан вид участка корреляционной функции, близкий к максимуму с наложенной на него кривой, в которую внесены изменения. На рис. 5.21, *б* показан тот же участок в увеличенном (в 20 раз) масштабе. В результате внесенной в нее флуктуации положение максимума функции корреляции, определяемое на основе формы корреляционного пика (как это принято делать), сместилось примерно на 0,34 интервала разрешения. На рис. 5.21, *в* показан участок кепстра той же функции в еще более (в 1000 раз) растянутом масштабе. При этом величина задержки, измеренная описанным выше спектральным методом, до 0,001 единицы квантования не изменилась. Это иллюстрирует помехозащищенность спектрального метода от флуктуаций формы импульса, вызываемых многолучевостью.

## Литература

---

1. Mathcad 6.0 plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows'95 / Пер. с англ. – М.: Информационно-издательский дом "Филинь", 1996. – 712 с.
2. Зверев В. А., Литвак Н. В. Численное моделирование случайных акустических сигналов // Акустический журнал. 1999. № 6. С. 807–815.
3. Зверев В. А. Физические основы формирования изображений волновыми полями. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1998. – 252 с.
4. Зверев В. А. Формирование акустического изображения на основе его численной модели // Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 6. С. 796–803.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
6. Зверев В. А., Славинский М. М. Метод расчета акустического поля вблизи неровной поверхности // Акустический журнал. 1997. Т. 43, № 1. С. 67–72.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.–Л.: ГИТТЛ. 1950. – 387 с.
8. Зверев В. А. Антенна темного поля // Акустический журнал. 1994. Т. 40, № 3. С. 401–404.
9. Gershman A. B., Turchin V. I. and Zverev V. A. Experimental Results of Localization of Moving Underwater Signal by Adaptive Beamforming // IEEE Trans. on Signal Processing. 1995. Vol. 43, № 10. P. 2249–2257.
10. Зверев В. А. Физическая природа шумов акустических антенн в мелком море // Акустический журнал. 1996. Т. 42, № 2. С. 220–224.
11. Зверев В. А. Шумы акустической антенны в волноводе // Акустический журнал. 1998. Т. 44, № 4. С. 456–461.
12. Зверев В. А. Акустическое темное поле // Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 1. С. 75–83.
13. Зверев В. А., Коротин П. И., Матвеев А. Л., Митюгов В. В., Орлов Д. А., Салин Б. М., Турчин В. И. Экспериментальные исследования дифракции звука на движущихся неоднородностях в мелководных условиях // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 2. С. 227–237.
14. Препринт № 507. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1999. 28 с.
15. Зверев В. А., Матвеев А. Л., Славинский М. М., Стромков А. А. Фокусируемая антенна темного поля // Акустический журнал. 1997. № 4. С. 429–434.
16. Гончаров В. В., Зайцев В. Ю., Куртенов В. М., Нечаев А. Г., Хилько А. И. Акустическая томография океана / ИПФ РАН. Нижний Новгород, 1997. 256 с.
17. Rosenberg Alan P. A new rough surface parabolic equation program for computing low-frequency acoustic forward scattering from the ocean surface // JASA. 1999. Vol. 105, № 1. P. 144–153.
18. Fawcett J. A., Fox W. L. J., Maguer A. Modeling of scattering by objects on the seabed // JASA. 1998. Vol. 104, № 6. P. 3295–3304.
19. Зверев В. А., Коротин П. И., Матвеев А. Л., Салин Б. М., Турчин В. И. Обращенный апертурный синтез в акустическом темном поле // Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 5. С. 650–657.

20. *Leith E. N. Quasi-Holographic Techniques in the Microwave Region // Proc. of the IEEE. 1971. Vol. 59, № 9. P. 1305–1318.*
21. *Горский С. М., Зверев В. А., Матвеев А. Л., Митюгов В. В. Некогерентное накопление сигналов акустической дифракции // Акустический журнал. 1995. Т. 41, № 2. С. 223–231.*
22. *Зверев В. А., Матвеев А. Л., Митюгов В. В. Согласованная фильтрация откликов акустической дифракции при некогерентном накоплении на вертикальной антенне // Акустический журнал. 1995. Т. 41, № 4. С. 591–595.*
23. *Зверев В. А. Временное разрешение в радио, сейсмо и акустической локации // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 63, № 5. С. 406–412.*
24. *Современная радиолокация / Пер. с англ.; под ред. Ю. Б. Кобзарева. – М.: Сов. радио, 1969.*
25. *Oppenheim A. V., Schaffer R. W. and Stockham T. G. Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals // IEEE Trans. Audio and Electroacoustics. 1968. Vol. AU-16, № 3.*
26. *Зверев В. А. Радиооптика. – М.: Сов. радио, 1975.*
27. *Зверев В. А., Коротин П. И., Циберев А. В. Интерференционная локация высокого разрешения // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 4. С. 468–472.*
28. *Feuillade C., Clay C. S. Anderson (1950) revisited // Journ. Acoust. Soc. Am. 1999. Vol. 106, № 2. P. 553–564.*
29. *Зверев В. А., Павленко А. А. Формирование направленности гибкой акустической антенны // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 3. С. 355–361.*
30. *Зверев В. А., Павленко А. А., Соколов А. Д., Шаронов Г. А. Слепая деревербация в глубоком море // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 1. С. 76–82; Acoustical Physics. 2001. Vol. 47, № 1. P. 62–67.*
31. *Зверев В. А., Павленко А. А. Об алгоритме логарифмирования комплексной функции с минимальной шириной спектра логарифма // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43, № 7. С. 652–656.*
32. *Зверев В. А., Калачев А. И. Устройство для приема инфразвуковых колебаний: Авторское свидетельство № 422197 по заявке №710535 с приоритетом от 31 марта 1961 г.*
33. *Westervelt P. J. Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. America. 1963. Vol. 35, № 4. P. 535–537.*
34. *Virovliansky A. L., Artel'ny V. V., Stromkov A. A. Acoustic Data Obtained by Hydrophone Array off Kamchatka // Proc. of the U.S.-Russia Workshop on Experimental Underwater Acoustic. – Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2000. – P. 33–46.*
35. *Абросимов Д. И., Еркин А. Ф., Казарова А. Ю., Капустин П. А., Матвеев А. Л., Нечев А. Г., Потапов А. И., Стромков А. А., Шаргаев К. А. Идентификация лучевых импульсов в лучевой схеме акустической томографии с движущимся приемником // Акустический журнал. 1995. Т. 41, № 5. С. 632–635.*
36. *Боголюбов Б. Н., Лобанов В. Н., Рылов В. И., Стромков А. А., Таланов В. И. Использование когерентных сложных и тональных сигналов при межскважинном акустическом зондировании: Препринт № 550. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2000. – С. 18.*
37. *Алексеев А. И., Шереметьев А. Г., Тузов Г. И., Глазов Б. И. Теория и применение псевдослучайных сигналов. – М.: Наука. 1969.*
38. *Потемкин В. Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x. – М.: АО "Диалог-МИФИ", 1999. Т. 1, 366 с.; т. 2. 304 с.*
39. *Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1989. – 540 с.*
40. *Сейсмическая томография / Под ред. Г. Нолета. – М.: Мир, 1990.*

41. *Spieberger J. et al.* Ocean Acoustic Tomography: Estimating the Acoustic Travel Time with Phase // IEEE J. Oceanic Eng. 1989. Vol. 14, № 1. P. 108–119.
42. *Dushaw B. D.* Inversion of multimegameter range acoustic data for ocean temperature // IEEE J. Oceanic Eng. 1999. 24(2). P. 215–223.
43. *Вировлянский А. Л., Казарова А. Ю., Любавин Л. Я., Стромков А. А.* Эмпирические ортогональные функции в гидроакустических экспериментах. Методы и средства измерений физических величин // Тезисы докладов 3-й Всероссийской научно-технической конференции. Нижний Новгород, 1998. С. 33.
44. *Васильев В., Гуров И.* Компьютерная обработка сигналов в приложении к интерферометрическим системам. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1998. – 237 с.
45. *Kazarova A. Yu., Lubavin L. Ya., Petukhov Yu. V., Stromkov A. A.* Phase-difference methods of study travel time fluctuations of broadband signal // Proc. of 17<sup>th</sup> Symposium on Hydroacoustic. Jurata, Poland, 2000.
46. *Вировлянский А. Л., Казарова А. Ю., Капустин П. А., Любавин Л. Я., Матвеев А. Л., Стромков А. А.* Томографический эксперимент по лучевой схеме акустической томографии с движущимся приемником // 5-я сессия Российского акустического общества, 1996. С.191–194.
47. *Stromkov A. A., Kazarova A. Ju., Lyubavin L. Ya., Matveev A. L., Virovlyansky A. L.* Ship tomography experiment with vertical array reception in the western Mediterranean // Acoustica. 1996. Vol. 82, Suppl.1. P. 262.
48. *Казарова А. Ю., Вировлянский А. Л., Любавин Л. Я., Стромков А. А.* Идентификация лучей при регистрации сигналов с борта дрейфующего судна // Акустика на пороге 21-го века / Сб. трудов 6-й сессии Российского акустического общества. М., 1997. С. 241–244.
49. *Nechaev A. G., Stromkov A. A., Abrosimov D., Erkin A., Kazarova A., Kapustin P., Matveev A. L., Potapov A. and Shargaev K.* Identification of the Ray Pulses in the Ocean Acoustic Tomography with Moving Receiver // MTS/IEEE, Ocean'95 San-Diego, CA, USA, 1995.
50. *Ehrenberg J. E., Ewart T. E., Morris R. D.* Signal-processing techniques for resolving individual pulses in multipath signal // J. Acoust. Soc. Amer., 1978. V. 63. P. 1861–1865.
51. *Гун С., Рао Д., Арун Д.* Спектральный анализ: от обычных методов к методам с высокой разрешающей способностью // Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата. – М.: Радио и связь, 1989.
52. *Guthrie A. N., Fitzgerald R. M., Nutile D. A., Shaffer J. D.* Long-range low-frequency cw propagation in the deep ocean: Antigua-Newfoundland // Acoust. Soc. Amer., 1974. Vol. 56, № 1. P. 58–69.

## Оглавление

<i>Предисловие</i> .....	3
<i>Глава 1. Спектр и кепстр</i> .....	7
1.1. Ряд и интеграл Фурье .....	7
1.2. Математические свойства преобразования Фурье .....	11
1.3. Знаменитая теорема отсчетов .....	13
1.4. Как выполняется преобразование Фурье численно .....	16
1.5. Линейные системы .....	26
1.6. Кепструм .....	34
1.7. Численное представление случайных сигналов .....	42
<i>Глава 2. Фильтрация помех и локация на просвет</i> .....	58
2.1. Устранение узкополосной помехи .....	58
2.2. Метод темного поля .....	67
2.3. Эксперимент по наблюдению точечного рассеивателя .....	74
<i>Глава 3. Увеличение пространственного или временного разрешения</i> .....	86
3.1. Наблюдение протяженного рассеивателя .....	86
3.2. Увеличение временного разрешения сигналов .....	98
3.3. Локация на просвет с разделением прямого и дифрагированного сигналов по времени .....	113
<i>Глава 4. Фазовые шумы и реверберация</i> .....	121
4.1. Фильтрация мультипликативно связанных сигналов .....	121
4.2. Устранение влияния фазовых шумов в параметрическом микрофоне .....	136
4.3. Слепая дереверберация .....	137
<i>Глава 5. Исследование акустических трасс с использованием <math>M</math>-последовательности</i> .....	148
5.1. Акустические задачи, решаемые с помощью $M$ -последовательности .....	148
5.2. Выбор оптимальной методики анализа линейной системы .....	149
5.3. $M$ -последовательность – идеальный тестовый сигнал для анализа систем. Ее генерация и свойства .....	154
5.4. Применение $M$ -последовательности на стационарной сейсмической трассе .....	162
5.5. Применение $M$ -последовательности на сверхдлинных океанических трассах .....	165
5.6. Идентификация каналов распространения на нестационарных трассах .....	172
5.7. Кепстральный метод оценки флуктуаций запаздывания сигналов .....	176
<i>Литература</i> .....	184